

Nama : Wahyu Rananda Westri
NIM : 22305144039
Kelas : Matematika B
Kelompok : 3

URAIAN MATERI

DEFINISI FUNGSI

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil.

DEFINISI FUNGSI DUA VARIABEL

Sebuah fungsi bernilai riil dari dua variabel riil; yakni, fungsi f yang memadankan setiap pasangan terurut (x,y) pada suatu himpunan D dari bidang dengan satu dan hanya satu bilangan real yang ditulis sebagai $z = f(x,y)$.

Himpunan D disebut daerah asal fungsi. Sedangkan daerah nilai fungsi adalah himpunan nilai-nilainya. Misalnya $z = f(x,y)$, merupakan fungsi dua variabel dengan x,y disebut sebagai variabel bebas (independent variable) dan z variabel tak bebas (dependent variable).
Sebagai contoh

$$z = f(x,y) = x^2 + 2y^3$$

Perhatikan grafik fungsi permukaan bola dengan persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

yang berpusat di titik asal $O(0,0,0)$ dan berjari-jari 1. Dalam permukaan tersebut titik-titik $(x,y)=(0,0)$ berpadanan dengan dua nilai z , yakni -1 dan 1. Artinya oleh permukaan tersebut terdapat pemetaan dari $(0,0)$ ke dua nilai berbeda, maka pemetaan seperti itu bukan merupakan suatu fungsi.

PERMUKAAN DALAM R^3 (RUANG DIMENSI 3)

Terdapat tiga sumbu koordinat yang saling tegak lurus yaitu: sumbu x , sumbu y , sumbu z . Ruang R^3 oleh ketiga sumbu x,y,z tersekut dalam delapan oktan. Kumpulan dari titik-titik di R^3 dapat berupa kurva ataupun permukaan. Dalam R^3 terdapat permukaan linear(berupa bidang datar) dan kuadratik(berupa bidang lengkung). Permukaan linear tidak mungkin dapat dibuat keseluruhan bidangnya, cukup digambar wakil bidang yang dapat berupa segitiga, segiempat, dll. Permukaan kuadratik dapat berupa permukaan bola, elipsoida, paraboloida, tabung elips, tabung lingkaran, atau tabung parabola. Beberapa persamaan umum dari permukaan kuadratik.

- Bola:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$$

- Elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$$

- Hiperboloida Berdaun Satu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$$

- Hiperboloida Berdaun Dua:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$$

- Paraboloida Eliptik:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, a, b > 0$$

- Paraboloida Hiperbolik:

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}, a, b > 0$$

- Kerucut Eliptik:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Dalam menggambar sketsa permukaan, dapat dibuat langkah bantuan dengan menggambar perpotongan permukaan tersebut dengan tiga bidang utama, yaitu XOY, XOZ, dan YOZ.

Jika permukaan sangat rumit, dapat digunakan komputer untuk menggambar grafiknya,

GRAFIK FUNGSI DUA VARIABEL

Grafik fungsi dua variabel adalah himpunan

$$(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D$$

yang merupakan himpunan titik dalam ruang atau R3. Himpunan ini pada umumnya membentuk permukaan di ruang. Ketika kita menyebut grafik dari fungsi f dengan dua variabel, yang dimaksud adalah grafik dari persamaan $z = f(x, y)$.

Beberapa fungsi matematika yang terlibat dalam menggambar grafik fungsi dua variabel.

1. Fungsi Linear

Bentuk umum

$$f(x, y) = ax + by + c$$

di mana a , b , dan c adalah konstanta. Grafiknya adalah bidang datar.

Contoh:

$$f(x, y) = 2x + 5y + 3$$

2. Fungsi Kuadratik

Bentuk umum

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$$

dimana a , b , c , d , e , dan f adalah konstanta. Grafik fungsi kuadrat ini adalah sebuah permukaan yang dapat memiliki berbagai bentuk tergantung pada nilai-nilai konstantanya.

Contoh:

$$f(x, y) = 2x^2 - 4y^2 + 3xy$$

3.Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri dua variabel adalah fungsi matematika yang melibatkan operasi trigonometri (seperti sin, cos, tan) pada kedua variabel x dan y. Contoh:

$$f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$$

4.Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah fungsi yang bisa didefinisikan sebagai akar dari sebuah persamaan aljabar. Fungsi aljabar merupakan ekspresi aljabar menggunakan sejumlah suku terbatas, yang melibatkan operasi aljabar seperti penambahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan peningkatan menjadi pangkat pecahan. Contoh dari fungsi tersebut adalah:

$$f(x, y) = 1/xy$$

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1+x^3}}{3^{3/7} - \sqrt{7}y^{1/3}}$$

5.Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial dua variabel bisa dinyatakan

$$f(x, y) = a.b^{xy}$$

dimana a dan b adalah konstanta, x dan y adalah variabel. Fungsi ini menggambarkan pertumbuhan eksponensial yang bergantung pada nilai x dan y .

Contoh:

$$f(x, y) = 2.3^{xy}$$

1. Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel dalam Bentuk Ekspresi

Langsung

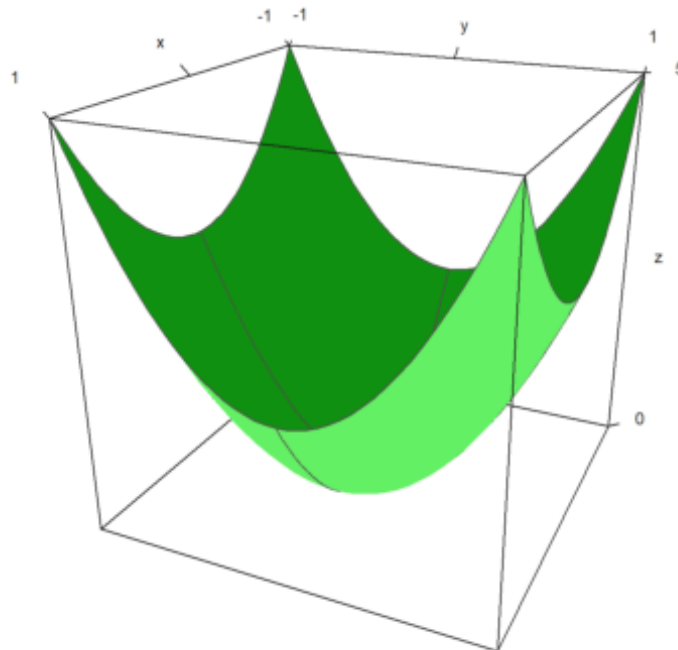
Grafik fungsi dua variabel dalam bentuk ekspresi langsung adalah representasi visual dari hubungan matematis antara dua variabel independen yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau ekspresi matematis.

Contoh Soal 1(Fungsi Kuadratik)

Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

```
>plot3d("2*x^2+3*y^2",n=40,grid=2):
```



Gambar di atas menampilkan grafik fungsi dengan $n=40$ dan $\text{grid}=2$.

- n = jumlah interval kisi-kisi, jumlah n default=40

- grid = jumlah garis kisi di setiap arah, jumlah grid default=10

Penjelasan:

misalkan

$$z = 2x^2 + 3y^2$$

$$z = \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}}$$

(yang dikenal sebagai persamaan sebuah paraboloida eliptik)
dan perhatikan bahwa

$$z \geq 0$$

cari jejak pada bidang koordinat

-bidang XOY($z=0$):

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 0$$

jika $z=0$ maka x^2 dan y^2 juga harus 0, maka diperoleh titik (0,0,0)

-bidang YOZ($x=0$)

$$\frac{y^2}{\frac{1}{3}} = z$$
$$y^2 = \frac{1}{3}z$$

(berupa parabola searah sumbu z dan titik puncaknya (0,0))

-bidang XOZ($y=0$)

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = z$$
$$x^2 = \frac{1}{2}z$$

(berupa parabola searah sumbu z dan titik puncaknya (0,0))

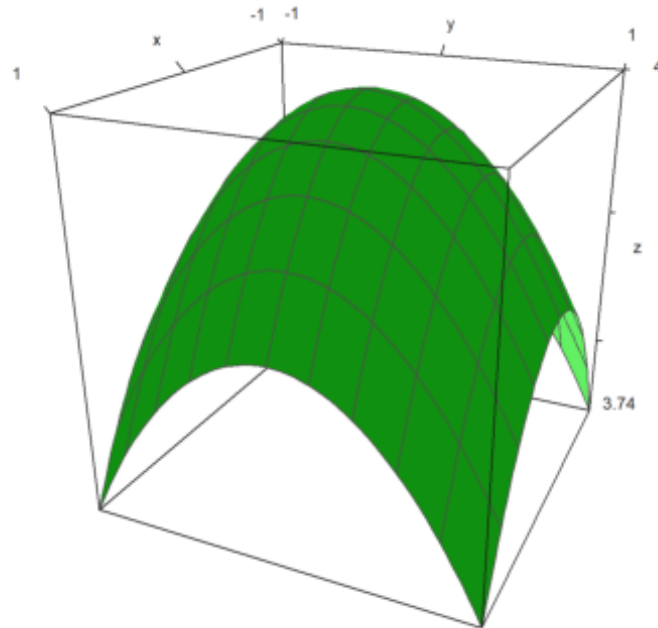
Contoh Soal 2(Fungsi Aljabar)

Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$$

```
>plot3d("(16-x^2-y^2)^(1/2)",>user, ...  
>title= "Turn with the vector keys (press return to finish)":
```

Turn with the vector keys (press return to finish)



Gambar di atas menampilkan grafik fungsi dengan menggunakan `>user`.

Untuk menggunakan `>user`, kita dapat menekan tombol:

- kiri,kanan,atas,bawah:putar sudut pandang
- +/-:memperbesar atau memperkecil
- a:menghasilkan anaglyph
- l:sakelar untuk memutar sumbu cahaya
- spasi:setel ulang ke default
- enter: mengakhiri interaksi

Penjelasan :
misalkan

$$z = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$$

dan perhatikan bahwa

$$z \geq 0$$

Jika kedua ruas dikuadratkan dan sederhanakan, akan kita peroleh persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

yang kita kenal sebagai persamaan sebuah bola.

cari jejak pada bidang koordinat
-bidang XOY($z=0$):

$$x^2 + y^2 = 16$$

(berupa lingkaran dengan pusat(0,0) dan jari-jari 4)
-bidang YOZ($x=0$)

$$y^2 + z^2 = 16$$

(berupa lingkaran dengan pusat(0,0) dan jari-jari 4)
-bidang XOZ($y=0$)

$$x^2 + z^2 = 16$$

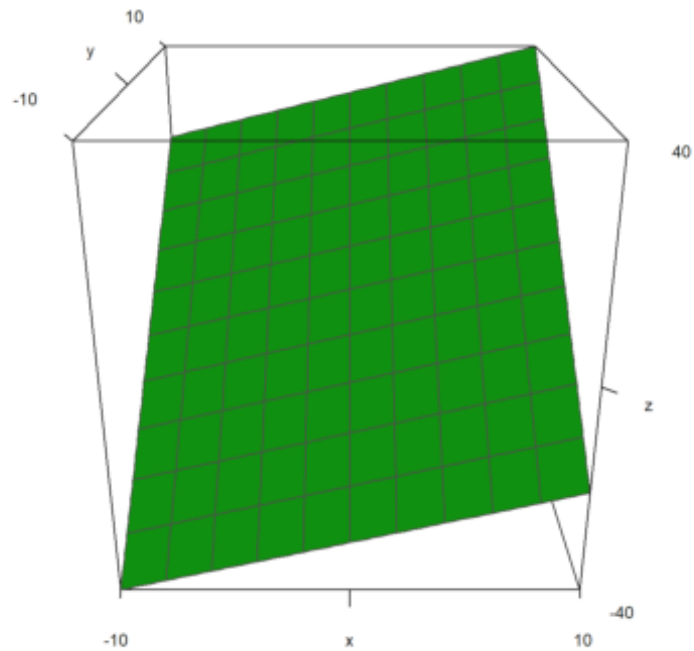
(berupa lingkaran dengan pusat(0,0) dan jari-jari 4)

Contoh Soal 3 (Fungsi Linear)

Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = x + 3y$$

```
> plot3d("x+3*y", angle=0°, a=-10, b=10, c=-10, d=10, fscale=10):
```



Gambar di atas menampilkan grafik fungsi dengan $\text{angle}=0$ derajat, $a=-10$, $b=10$, $c=-10$, $d=10$, $\text{fscale}=10$.

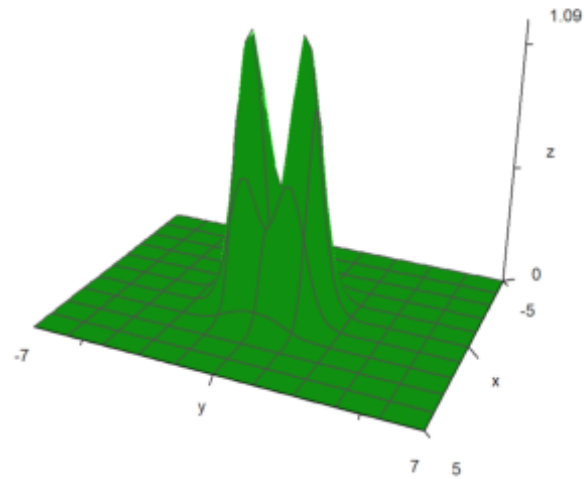
- angle: sudut pandang
- a,b: rentang x
- c,d: rentang y
- fscale: skala ke nilai fungsi (defaultnya adalah fscale)

Contoh Soal 4(Fungsi Eksponensial)

Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$$

```
>plot3d("(x^2+3*y^2)*E^(-x^2-y^2)",scale={1,2},xmin=-5,xmax=5,ymin=-7,ymax=7,frame=3):
```



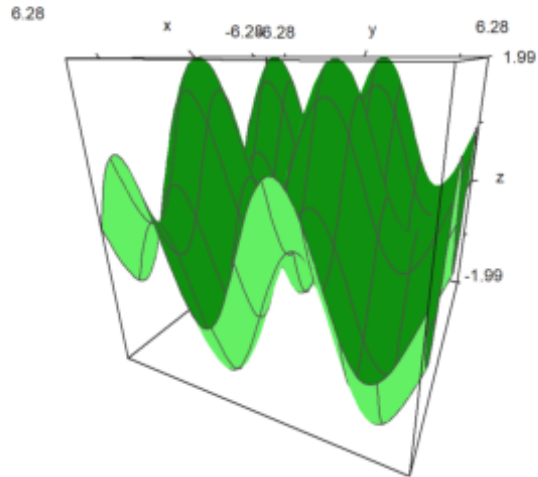
- Gambar di atas menampilkan grafik fungsi dengan $\text{scale}=[1,2]$, $\text{xmin}=-5$, $\text{xmax}=5$, $\text{ymin}=-7$, $\text{ymax}=7$, $\text{frame}=3$.
- scale : angka atau vektor 1×2 untuk menskalakan ke arah x dan y
 - xmin, xmax : rentang x
 - ymin, ymax : rentang y
 - frame : jenis bingkai (default 1)

Contoh Soal 5(Fungsi Trigonometri)

Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$

```
>plot3d("sin(x)+sin(y)",r=2*pi,distance=3,zoom=1,center=[0.1,0,0],height=20°):
```



Gambar di atas menampilkan grafik fungsi dengan $r=2\pi$, $\text{distance}=3$, $\text{zoom}=1$, $\text{center}=[0.1,0,0]$, $\text{height}=20$ derajat.

- r: dapat digunakan sebagai ganti xmin, xmax, ymin, ymax; r dapat berupa vektor [rx, ry] atau [rx, ry, rz]
- distance: jarak pandang plot
- zoom: nilai zoom
- center: memindahkan bagian tengah plot
- height: ketinggian tampilan dalam radian

Nilai default dari distance, zoom, angle, height dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view. Fungsi ini mengembalikan parameter sesuai urutan di atas.

```
>view
```

```
[5, 2.6, 2, 0.4]
```

2. Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Rumusnya Disimpan

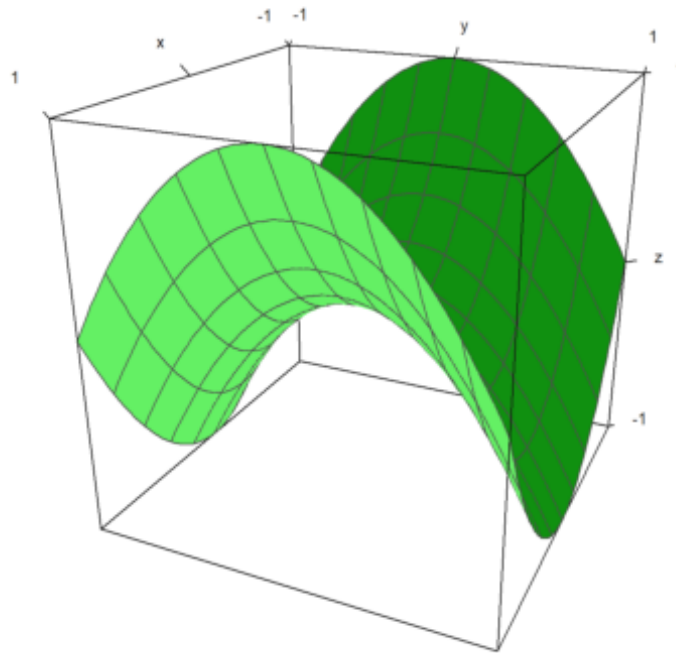
dalam Variabel Ekspresi

Untuk menyimpan sebuah fungsi, dapat dilakukan menggunakan perintah function. Kemudian untuk memanggil atau membuat grafiknya tinggal memanggil nama fungsi tersebut. Contohnya :

```
>function b(x,y):=x^2-y^2;
```

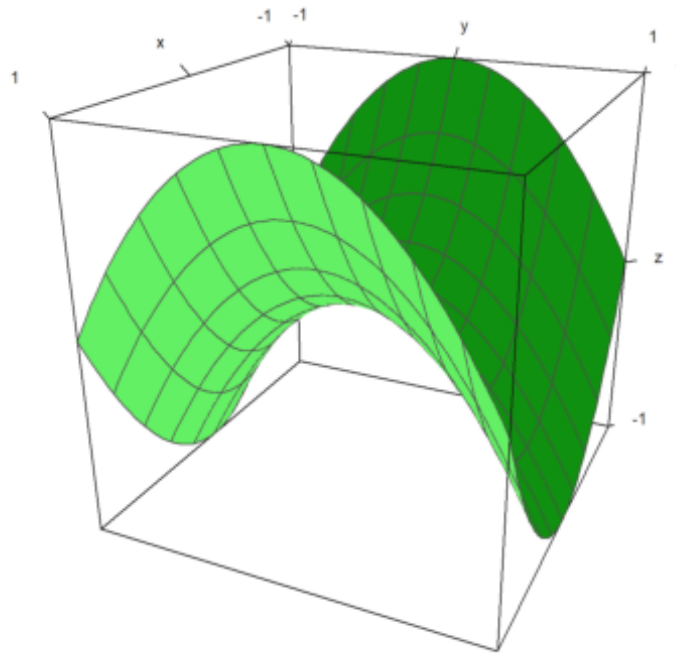
selanjutnya kita akan membuat grafik dari fungsi tersebut

```
>plot3d("b(x,y)":
```



selain cara di atas, kita juga bisa membuat grafik dari fungsi tersebut dengan

```
>plot3d("b"):
```

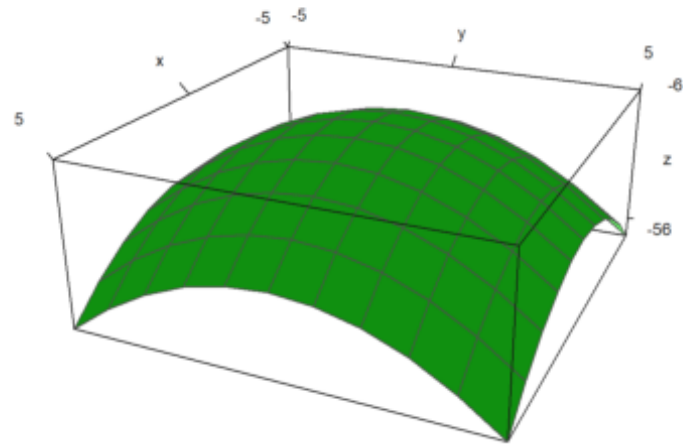


Contoh Soal 1(Fungsi Kuadratik)

Gambarlah grafik dari fungsi tersebut.

$$f(x, y) = -6 - x^2 - y^2$$

```
>function p(x,y):=-6-x^2-y^2;  
>plot3d("p(x,y)",r=5, ...  
>fscale=2,n=10,zoom=2.7):
```



Penjelasan :
misalkan

$$z = -6 - x^2 - y^2$$

Cari domainnya

$$D_z = [(x, y) | x, y \in \mathbb{R}^2]$$

Cari daerah hasilnya

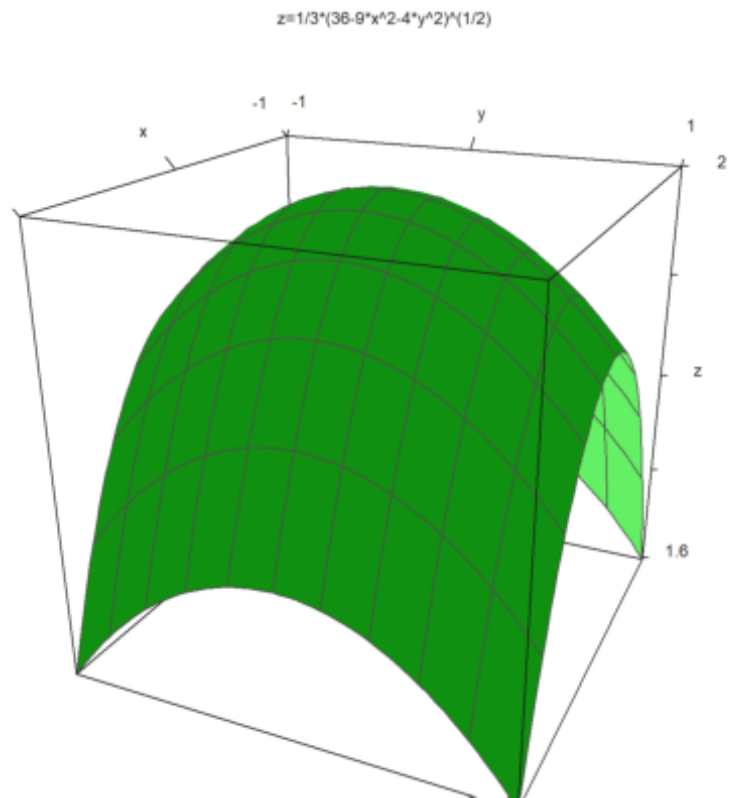
$$R_z = [-\infty, -6]$$

Contoh Soal 2(Fungsi Aljabar)

Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$$

```
>function z(x,y) :=1/3*(36-9*x^2-4*y^2)^(1/2);  
>plot3d("z(x,y)",title="z=1/3*(36-9*x^2-4*y^2)^(1/2)",zoom=3):
```

Penjelasan :
misalkan

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$$

dan perhatikan bahwa

$$z \geq 0$$

Jika kedua ruas di kuadratkan dan sederhanakan, akan diperoleh:

$$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$

yang dikenal sebagai persamaan sebuah elipsoida.

cari jejak pada bidang koordinat

-bidang XOY(z=0):

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(berupa elips dengan pusat(0,0), titik puncak : (0,-2),(0,2),(0,3),(0,-3))

-bidang YOZ(x=0)

$$4y^2 + 9z^2 = 36$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

(berupa elips dengan pusat $(0,0)$, titik puncak : $(0,-3),(0,3),(0,-2),(0,2)$)

-bidang XOZ($y=0$)

$$9x^2 + 9z^2 = 36$$

$$x^2 + z^2 = 4$$

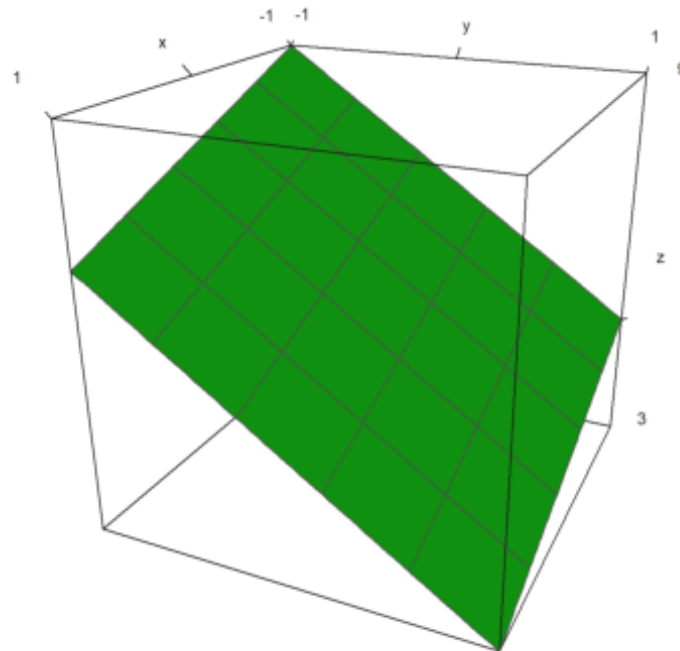
(berupa lingkaran dengan pusat $(0,0)$, jari-jari=2)

Contoh Soal 3(Fungsi Linear)

a) Gambarkanlah grafik dari fungsi tersebut.

$$f(x, y) = 6 - x - 2y$$

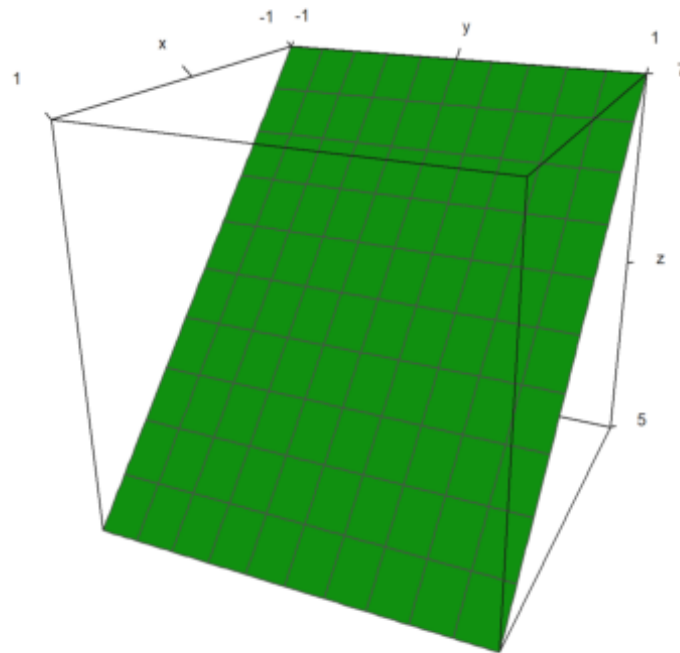
```
>function q(x,y):=6-x-2*y;  
>plot3d("q(x,y)",grid=5):
```



b) Gambarkanlah grafik dari fungsi tersebut.

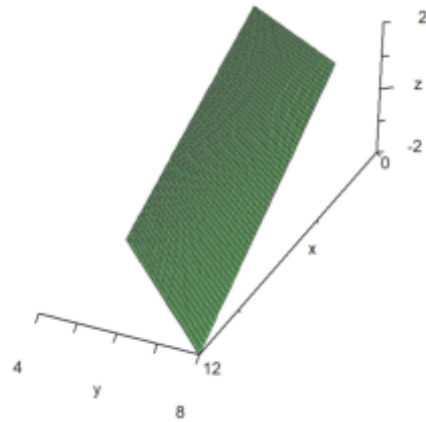
$$f(x, y) = 6 - x$$

```
>function j(x,y):=6-x;  
>plot3d("j"):
```



Berikut adalah plot dari tiga fungsi.

```
>plot3d("q","j","y",r=2,zoom=3,frame=3):
```

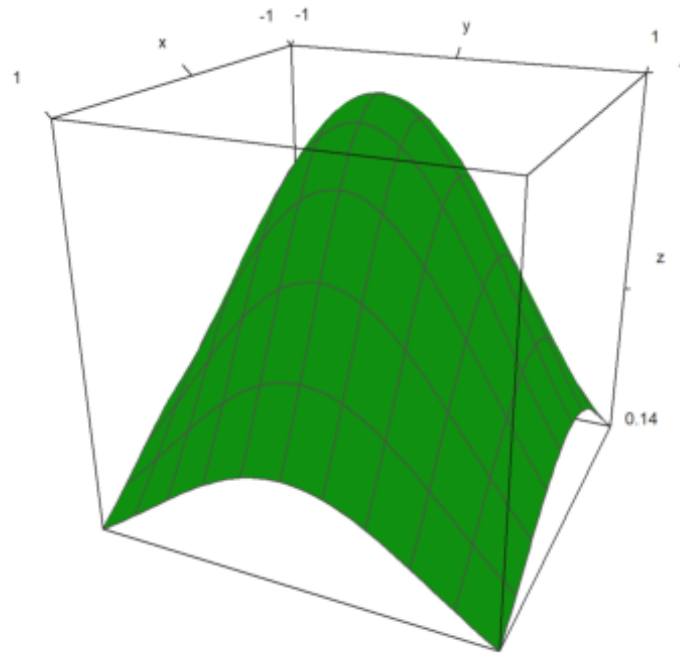


Contoh Soal 4(Fungsi Eksponensial)

a) Gambarlah grafik dari fungsi tersebut.

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

```
>function n(x,y):= E^(-(x^2+y^2));  
>plot3d("n",>fscale,>scale):
```



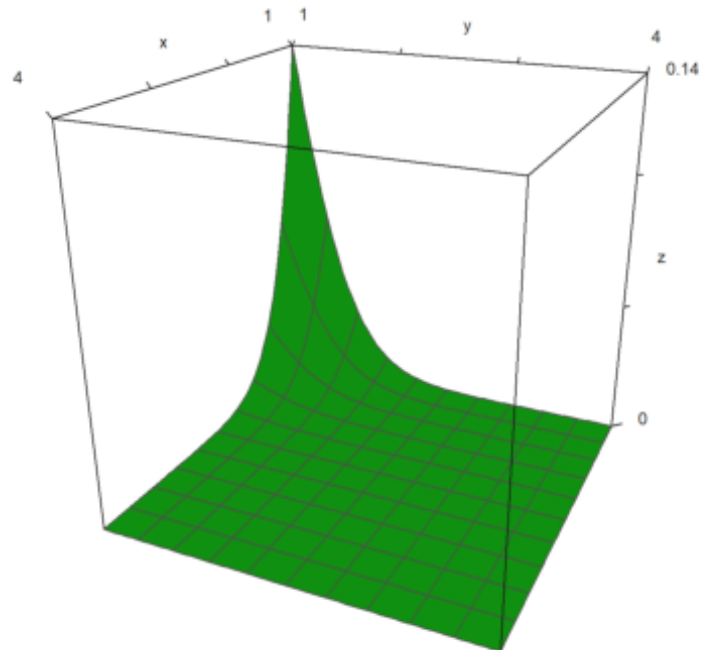
b) Gambarlah grafik dari fungsi pada contoh soal a dengan syarat:

$$1 \leq x \leq 4$$

dan

$$1 \leq y \leq 4$$

```
>plot3d("n",a=1,b=4,c=1,d=4):
```

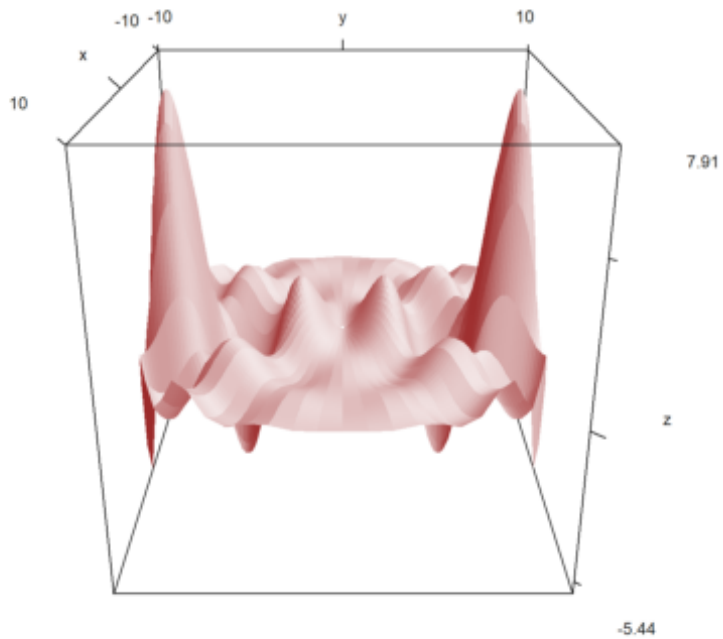


Contoh Soal 5(Fungsi Trigonometri)

Gambarlah grafik dari fungsi tersebut.

$$f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$

```
>function m(x,y):=(sin(x)*sin(y))/x*y;  
>plot3d("m",r=10,angle=90°,fscale=-1,>user,>polar,color=red,>hue):
```



Dalam membuat grafik di atas terdapat `>polar`.

- `>polar`: menghasilkan plot polar
- `hue`: mengaktifkan bayangan cahaya
- `color`: mengatur warna pada grafik