datalab

前言

将datalab-handout.tar移动到WSL环境中,并解压,该实验的目的便是在bits.c文件中按照特定的规则,解决一系列puzzles

其中,使用btest检测结果的正确性,使用dlc检测是否符合规则(比如是否使用了禁止使用的operator,是否使用了过多的operator,在解决整数puzzles的时候,是否使用了nonstraightline code的代码),有关整数的题目,只需要考虑32位整数,有关浮点数的题目,只需要考虑单精度浮点数

我运行的时候出现了如下的问题:

```
gcc -O -Wall -m32 -lm -o btest bits.c btest.c decl.c tests.c
In file included from btest.c:16:
/usr/include/stdio.h:27:10: fatal error: bits/libc-header-start.h: No such file or directory
   27 | #include <bits/libc-header-start.h>
compilation terminated.
In file included from decl.c:1:
/usr/include/stdio.h:27:10: fatal error: bits/libc-header-start.h: No such file or directory
   27 | #include <bits/libc-header-start.h>
compilation terminated.
In file included from /usr/lib/gcc/x86 64-linux-gnu/11/include/limits.h:203,
                 from /usr/lib/gcc/x86 64-linux-gnu/11/include/syslimits.h:7,
                 from /usr/lib/gcc/x86_64-linux-gnu/11/include/limits.h:34,
                 from tests.c:3:
/usr/include/limits.h:26:10: fatal error: bits/libc-header-start.h: No such file or directory
   26 | #include <bits/libc-header-start.h>
compilation terminated.
make: *** [Makefile:11: btest] Error 1
```

这是由于环境没有完善造成的,通过执行以下命令来完善编译环境:

```
sudo apt-get update
sudo apt-get install gcc-multilib libc6-dev-i386
```

puzzles求解

bitXor

根据德摩根定律可知:

$$egin{aligned} x \wedge y &= (\neg x \ \& \ y) \mid (x \ \& \ \neg y) \ &= \neg igl(\neg igl((\neg x \ \& \ y) \mid (x \ \& \ \neg y) igr) igr) \ &= \neg igl(\neg (\neg x \ \& \ y) \ \& \ \neg (x \ \& \ \neg y) igr) \end{aligned}$$

按照要求,编写代码:

```
int bitXor(int x, int y)
{
  int left = ~(~x & y);
  int right = ~(x & ~y);
  int res = ~(left & right);
  return res;
}
```

dmz@LAPTOP-LLTKTCOC:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest -f bitXor
 Score Rating Errors Function
 1 1 0 bitXor
 Total points: 1/1

tmin

根据补码公式:

补码编码的定义

$$B2T_w(ec{x}) = -x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i$$

我们知道,32位补码能表示的最小数是 1000···(共31个0)000 ,思路很简单,首先对0进行取 反得到 all_one = 1111···(共32个1)111 然后让这个数左移31位即可

```
int tmin(void)

{
  int all_one = ~0;
  int res = all_one << 31;
  return res;
}</pre>
```

• dmz@LAPTOP-LLTKTCOC:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest -f tmin Score Rating Errors Function 1 1 0 tmin Total points: 1/1

isTmax

我们知道,32位补码能表示的最大数是 01111···(共31个1)111 ,然后我们发现:Tmax的补码的位表示与Tmax+1相同,也就是:

$$Tmax + 1 == \neg Tmax$$

在位运算中如何实现当a和b相同时返回一呢?如下所示

```
return !(a ^ b);
```

接下来思考有没有边界情况?发现当x是 111···(共32个1)111 时,同样满足上述性质,因此我们需要把这个情况排除,综上,我们编写如下代码:

```
int isTmax(int x)

{
  int x_o = ~x;
  int x_and_one = x + 1;
  int is_not_all_one = !!(~x);
  return !(x_o ^ x_and_one) & is_not_all_one;
}
```

• dmz@LAPTOP-LLTKTCOC:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest -f isTmax Score Rating <u>Errors</u> Function 1 1 0 isTmax Total points: 1/1

allOddBits

很容易想到的一个思路是让x与0xAAAAAAAA做与运算,如果结果等于0xAAAAAAA就返回一,因此这个问题就转换为了如何构造0xAAAAAAA,由于datalab最大能够使用的整数常量为0xff,因此我们用0xAA去构造0xAAAAAAAA,综上,我们编写如下代码:

```
int allOddBits(int x)
{
  int two_a = 0xAA;
  int eight_a = (two_a << 24) + (two_a << 16) + (two_a << 8) + two_a; //
0xAAAAAAAA
  return !(eight_a ^ (eight_a & x));
}</pre>
```

negate

刚开始我以为让这个题变一个符号位就行,于是是这样写的:

```
int negate(int x) {
  int tmin = 1 << 31;</pre>
```

```
return x ^ tmin;
}
```

但才想起来tmin和0这两个边界没办法处理,想了半天不知道这个边界如何处理?又突然想起来,其实求负数直接用补码定义就行了……取反加一

```
int negate(int x) {
    return ~x + 1;
}
```

```
• (base) dmz@LAPTOP-LLTKTC0C:~/cmu-15213-lab/datalab-handout$ ./btest -f negate
Score Rating Errors Function
2 2 0 negate

Total points: 3/3
```

isAsciiDigit

这道题是让我们判断x是否在一个区间范围 [0x30,0x39] 之内,因此我们可以让x与0x30作差,让0x39与x作差,然后当两个差的符号均为正,则结果返回1

然而,这道题是不允许使用减号的,所以可以改成加上对应的负数,如何求负数呢?我们只需要按照上道题的取反加一的方法即可!

```
int isAsciiDigit(int x)
{
  int low = 0x30;
  int high = 0x39;
  int diff1 = x + (~low + 1);
  int diff2 = high + (~x + 1);
  int sign1 = diff1 >> 31 & 1;
  int sign2 = diff2 >> 31 & 1;
  return !(sign1 | sign2);
}
```

conditional

使用位运算模拟条件语句,我们可以使用**掩码mask** 例如,对于 if (condition) return a; else return b; 如果条件为true,我们就令mask为全1的值,如果条件为false,令其为全0的值 这样的话,最终就返回: return (mask & a) | (~mask & b) 因为当条件为true时,全1的mask与a进行与运算还是a,而~mask为0,与b进行与运算结果为 0,因此最终返回a;同理,条件为false时,最终返回false 但是,我们在这个题中如何构造mask呢?可以使用: ~(!!x)+1 ,当x不等于0时,也就是条件为true时,!!x 为1,取反加一就是-1,位表示刚好是全1,当x等于0时,也就是条件为false时,!!x 为0,取反加一还是0,位表示刚好是全0。综上:

```
int conditional(int x, int y, int z)
{
  int mask = ~(!!x) + 1; // 如果x不为0, 就转换为全1, 否则转换为全0
  int true_val = y & mask;
  int false_val = z & ~mask;
  return true_val | false_val; // true_val和false_val必有一个是0
}
```

isLessOrEqual

这道题目可以直接想到的一种思路是让y减去x(y加上x的取反加一),如果差值的符号位是0,则返回1,否则返回0,但是直接这样写会出现溢出的情况,什么时候发生溢出?就是当x和y符号位不相同时,因此我们需要分类讨论两种情况,即符号位相同和不同,两种情况的条件转移采用上一题 conditional 的思路

我们设xy符号位异号为真,同号为假,那么条件变成了: sign_x ^ sign_y 当异号时,我们直接返回x的符号位即可,因此x符号位为1时,x为负,y为正,最后必然返回 1,反之同理

当同号时,直接利用最开始说的方法就可以了

综上,编写如下代码

```
int isLessOrEqual(int x, int y)
{
    // 假设符号位异号为真, 同号为假
    int sign_x = x >> 31 & 1;
    int sign_y = y >> 31 & 1;
    int condition = sign_x ^ sign_y;
    int mask = ~(!!condition) + 1;
    int true_val = sign_x & mask;
    int diff = y + (~x + 1);
    int sign_diff = diff >> 31 & 1;
    int false_val = !sign_diff & (~mask);
    return true_val | false_val;
}
```

```
• (base) dmz@LAPTOP-LLTKTCOC:~/cmu-15213-lab/datalab-handout$ ./btest -f isLessOrEqual Score Rating Errors Function
3 3 0 isLessOrEqual
Total points: 3/3
```

logicalNeg

本题可以利用"0的负数还是0"的性质,也就是说0进行取反加一之后,其最高符号位依然为0, 而其它任意的非0数x的最高符号位,和-x的最高符号位必定是异号,利用此性质:

```
int logicalNeg(int x)
{
    int sign_or = x | (~x + 1);
    return (sign_or >> 31) + 1;
}
```

howManyBits

本puzzle的目的是求一个数如果用补码表示,最少需要多少位,我们分别举一个正数和负数的 例子:

对于12,二进制是1100,表示的话最少需要4+1=5位(还有一个是符号位),也就是说01100 和001100表示的都是12

对于-5,二进制是1011,表示的话最少需要4位,(最高位1为符号位),1011和11011表示的都是-5

根据上面这个例子,我们找到了一个规律,对于正数,我们需要找到最高位的1的位置,然后再加上一个符号位,就是最少需要的位数,比如1100,最高位1的位置是在从低到高第4个位置,然后再加一就是5;对于负数,我们需要找到最高位的0的位置,然后再加上一个符号位,比如1011,最高位0的位置在从低到高第3个位置,然后再加上就是4

为了统一,我们使用以下代码先对x处理,当x为正数时,保持x不变,当x为负数时,将x取反,这样做的好处是,不管是正数还是负数,我们都去找最高位1的位置即可:

```
int sign = x >> 31;
x = (sign & ~x) | (~sign & x); // 如果x为正数的话,不变,如果x为负数的话,x取反
```

接下来就可以按位依次寻找最高位的1,一种直接的想法是依次判断当前的数是不是全0,如果不是就让sum加一反之sum不变,并让x右移,共循环31次,如下所示:

```
int howManyBits(int x)
```

```
int sign = x >> 31;
x = (sign & ~x) | (~sign & x); // 如果x为正数的话,不变,如果x为负数的话,x取反
int sum = 0;
sum = sum + !!x;
x = x >> 1;
sum = sum + !!x;
x = x >> 1;
//....共重复31次
sum = sum + !!x;
x = x >> 1;
return sum + 1;//加上一个符号位
}
```

这样做答案是没问题的,可以通过btest的正确性测试,但是不能通过dlc的测试,因为operator共使用了131个,超过了上限90个

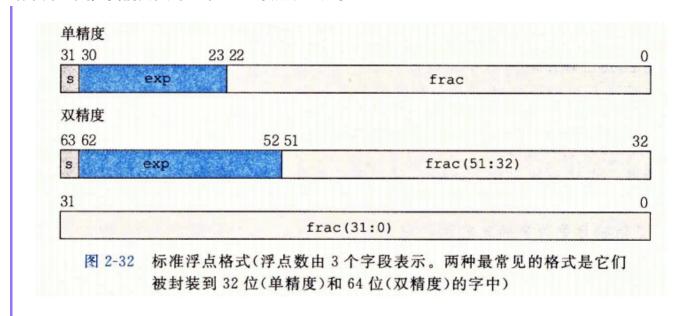
因此,在这里参考网上的做法,使用二分法,依次缩小最高位1的所在范围,从而减少operator的数量,如下所示:

```
int howManyBits(int x)
 int sign = x \gg 31;
 int b16, b8, b4, b2, b1, b0;
 x = (sign \& ~x) \mid (~sign \& x); // 如果x为正数的话,不变,如果x为负数的话, x取反
 // 判断最高16位是否有1,如果有,则让x右移,以判断最高16位具体最高1在哪里
 // 如果没有,x不右移,以判断8-16位中是否有1,以此类推.....
 b16 = !!(x >> 16) << 4;
 x = x >> b16;
 b8 = !!(x >> 8) << 3;
 x = x >> b8;
 b4 = !!(x >> 4) << 2;
 x = x >> b4;
 b2 = !!(x >> 2) << 1;
 x = x \gg b2;
 b1 = !!(x >> 1);
 x \gg b1;
 b0 = !!x;
 return b16 + b8 + b4 + b2 + b1 + b0 + 1;
}
```

这种情况下,共使用了38个operators

floatScale2

本puzzle的目的是给定一个无符号数uf,把它看成是一个浮点数的位模式,计算其乘以二后的结果并返回,我们先复习一下IEEE浮点数的表示:



我们首先根据单精度IEEE浮点数的格式分别拆分出uf的sign、exp和frac:

```
int sign = uf & 0x80000000;
int exp = uf & 0x7f800000;
int frac = uf & 0x007ffffff;
```

然后我们分三种情况进行讨论:

情况一: 无穷大或者NaN

当exp全1时,uf为无穷大或者NaN,此时直接返回uf即可:

```
if (exp == 0x7f800000) return uf;
```

情况二: 非规格化数

当exp全0,uf为非规格化数,此时如果frac全0,那么uf为0,乘以2还是0,因此直接返回uf;如果frac不为0,只需要将frac左移1即可,这里,我们举两个例子说明:

假设exp的位数是4,frac的位数是3:

例子一: 0 0000 001,E是1/64,M是1/8,最终的值是: 1/512

将这个非规格化数的尾数部分左移1位,得到0 0000 010,E不变,M变为2/8,最终变为2/512

例子二: 0 0000 111,E是1/64,M是7/8,最终的值是: 7/512

将这个非规格化数的尾数部分左移1位,得到0 0001 110,变为了规格化数,E不变,M变为

1+6/8=14/8, 最终的值是: 14/512

因此,这部分代码为:

```
if (exp == 0) {
   if (frac == 0) return uf;
```

```
frac = frac << 1;
}</pre>
```

情况三: 规格化数

这种情况下,我们直接让阶码exp加一即可,但是如果加一之后,exp变成全1的数,说明uf表示的浮点数乘以2之后溢出为正无穷了,所以,我们需要将frac置零

```
exp += 0x00800000;
if (exp == 0x7f800000) frac = 0;
```

最后,我们将三种情况的结果进行合并: return sign | exp | frac

综上:

```
unsigned floatScale2(unsigned uf)
{
  int sign = uf & 0x80000000;
  int exp = uf & 0x7f8000000;
  int frac = uf & 0x007ffffff;
  if (exp == 0x7f800000) // 无穷大或NaN
   return uf;
  if (exp == 0) // 非规格化数
    if (frac == 0)
     return uf;
    frac = frac << 1;</pre>
  }
  else // 规格化数
    exp += 0x00800000;
    if (exp == 0x7f800000)
      frac = 0;
  return sign | exp | frac;
}
```

• dmz@LAPTOP-LLTKTC0C:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest bits.c -f floatScale2 Score Rating Errors Function 4 4 0 floatScale2 Total points: 4/4

floatFloat2Int

本puzzle的目的是给定一个无符号数uf,将其转换成整数,如果uf表示的数值超过了int的范围就返回0x80000000,我们首先回顾一下如何根据IEEE754的标准进行位模式和其对应的数据值的转换,如下图所示:

下面展示了8位浮点格式的示例,其中k=4, n=3:

描述	位表示	指数			小数		值		
		e	E	2^E	f	М	$2^E \times M$	V	十进制
0	0 0000 000	0	-6	1 64	0 8	0/8	<u>0</u> 512	0	0.0
最小的非规格化数	0 0000 001	0	-6	$\frac{1}{64}$	1/8		1 512	$\frac{1}{512}$	0.001953
	0 0000 010	0	-6	$\frac{1}{64}$	1 8 2 8 3 8	1 8 2 8 3	2 512	$\frac{1}{256}$	0.003906
	0 0000 011	0	-6	$\frac{1}{64}$	3 8	3/8	3 512	$\frac{3}{512}$	0.005859
最大的非规格化数	0 0000 111	0	-6	1 64	7 8	7/8	7 512	$\frac{7}{512}$	0.013672
最小的规格化数	0 0001 000	1	-6	$\frac{1}{64}$	0/8	8	8 512	1 64	0.015625
	0 0001 001	1	-6	1 64	1/8	8 9 8	8 512 9 512	9 512	0.017578
	0 0110 110	6	-1	$\frac{1}{2}$	6 8	$\frac{14}{8}$	14 16	7 8	0.875
	0 0110 111	6	-1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	6 8 7 8 0 8			15 16	0.9375
1	0 0111 000	7	0	1	0 8	15 8 8 8	15 16 8 8 9 8 10 8	1	1.0
	0 0111 001	7	0	1	1 8 2 8	98	9 8	98	1.125
	0 0111 010	7	0	1	2 8	10 8	10/8	5 4	1.25
	0 1110 110	14	7	128	68	14 8	1792 8	224	224.0
最大的规格化数	0 1110 111	14	7	128	$\frac{7}{8}$	15 8	1920 8	240	240.0
无穷大	0 1111 000	_	_	_	_	_	_	00	_

图 2-35 8 位浮点格式的非负值示例(k=4 的阶码位的和 n=3 的小数位。偏置量是 7)

对于uf,我们依次获得sign、E和M,其中exp需要减去偏置Bias=127得到最终的幂E,而frac需要补上最前面隐含的1,以进行规格化数处理得到最终的M

```
int sign = uf >> 31 & 1;
int E = ((uf >> 23) & 0xff) - 127;
int M = (uf & 0x007ffffff) | 0x00800000;
```

我们发现当E<0时,最后的十进制数都是小于1的,对于这部分的数,我们直接返回0即可:

```
if (E < 0) return 0;
```

接下来,我们举一个例子来探究如何通过E和M推出最终的结果,我们以十进制数3为例,它的二进制表示是11,可以表示为: $1.1*2^1$,由此frac为 $1000\cdots$ (共22个0)000,M为 $1100\cdots$ (共22个0)000,E为 1,如何从M变为我们想要的"11"?方法是将M右移22位,这个 22位是怎么计算的,其实就是23-E;当E>23时怎么办呢?比如 $1.1*2^{24}$,它其实表示的是整数 $11000\cdots$ (共23个0)···,是M左移1位得到的,这个1恰好是通过E-23算出的;因此

```
if (E > 23) res = M << (E - 23);
else res = M >> (23 - E);
```

上面说到E是下边界的,当小于0的时候,最终得到的十进制数一定小于1,那么E大于多少的时候得到的十进制数会爆int呢?还以上述这个例子, $1.1*2^E$ 表示的十进制数是: 11000··· $(E-1 \cap 0)$ 00 总共有E+1位数,int是32位的,去掉符号位还剩31位,因此需要满足:

$$E + 1 <= 31$$

因此当E大于30时,会爆int,此时返回题目中要求的 0x80000000 即可

最后,我们判断符号位,如果符号位为1,我们将res取反加一,也就是变成负数

综上:

```
int floatFloat2Int(unsigned uf)
 int sign = uf >> 31 & 1;
 int E = ((uf >> 23) \& 0xff) - 127;
 int M = (uf \& 0x007fffff) | 0x00800000;
 int res;
 if (E < 0)
  return 0;
 if (E > 30)
   return 0x80000000u;
 if (E > 23)
   res = M << (E - 23);
  else
   res = M >> (23 - E);
 if (sign)
   return ~res + 1;
 else
   return res;
}
```

dmz@LAPTOP-LLTKTC0C:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest bits.c -f floatFloat2Int
 Score Rating Errors Function
 4 4 0 floatFloat2Int
 Total points: 4/4

floatPower2

本puzzle的目的是给定一个整数x,让我们求解 2^x 并以无符号数形式返回IEEE754的单精度浮点数格式,当x过大的时候,返回正无穷的表示,当x过小的时候,返回0,我们分类讨论:

情况一:返回正无穷

在规格数中,exp最大为: 11111110 ,也就是254,偏置Bias=127,因此E最大为254-127=127,所以,当x>127时,返回正无穷0x7f800000

情况二:返回0

在非规格数中,能够表示的最小数为:E=1-Bias=-126,而M最小为: $000 \cdots (\pm 26 \land 0)$ 1 整体表示的最小数为: 2^{-149} ,因此当x<-149时,返回0

情况三: 非规格数

当x大于等于-149且x小于等于-127时,需要使用非规格数进行表示对于最小的情况,也就是 2^{-149} ,sign和exp全为0,frac只有最低位为1,因此位模式是1<<0对于最大的情况,也就是 2^{-127} ,sign和exp也为0,frac只有最高位为1,因此位模式是1<<23对于一般情况,也就是 2^x ,位模式为:1<<(x+149)

情况四: 规格数

规格数的表示为 $1.0*2^E$ 其中E=x=exp-Bias=exp-127,推出exp=x+127最终的位模式是让exp左移23位,即exp<<23

综上:

```
unsigned floatPower2(int x)
{
  if (x > 127)
    return 0x7f800000;
  else if (x < -126)
    return 0;
  else if (x <= -127)
    return 1 << (x + 149);
  else
    return (x + 127) << 23;
}</pre>
```

• dmz@LAPTOP-LLTKTCOC:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest bits.c -f floatPower2 Score Rating Errors Function 4 4 0 floatPower2 Total points: 4/4

总结与思考

• dmz@LAPTOP-LLTKTC0C:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./btest

Score	Ratin	g Error	rs Function
1	1	0	bitXor
1	1	0	tmin
1	1	0	isTmax
2	2	0	allOddBits
2	2	0	negate
3	3	0	isAsciiDigit
3	3	0	conditional
3	3	0	isLessOrEqual
4	4	0	logicalNeg
4	4	0	howManyBits
4	4	0	floatScale2
4	4	0	floatFloat2Int
4	4	0	floatPower2
Total	nointee	26/26	

Total points: 36/36

到此完成了datalab的全部puzzles,执行 ./dlc -e bits.c ,各puzzles使用的operator数量结果如下,每个题解并不是最优的,应存在更好的方法使用更少的operators,本题解方法仅供参考。

• dmz@LAPTOP-LLTKTCOC:~/cmu-15213-lab/datalab-handout\$./dlc -e bits.c

```
dlc:bits.c:150:bitXor: 8 operators
dlc:bits.c:162:tmin: 2 operators
dlc:bits.c:177:isTmax: 8 operators
dlc:bits.c:191:allOddBits: 9 operators
dlc:bits.c:202:negate: 2 operators
dlc:bits.c:222:isAsciiDigit: 12 operators
dlc:bits.c:236:conditional: 8 operators
dlc:bits.c:257:isLessOrEqual: 19 operators
dlc:bits.c:271:logicalNeg: 5 operators
dlc:bits.c:303:howManyBits: 38 operators
dlc:bits.c:336:floatScale2: 11 operators
dlc:bits.c:367:floatFloat2Int: 16 operators
dlc:bits.c:391:floatPower2: 9 operators
```

本次实验主要收获了有关位运算的知识以及技巧,体验到了位运算的强大性,利用位运算效率 高的特点,也可以对平常写的一些代码进行优化。最后总结一下本次实验的主要收获:

- 德摩根定律进行与运算和或运算的相互转换
- 利用位运算模拟条件语句,可以使用全1(条件为真)或全0的掩码(条件为假)
- 利用位运算比较大小,分同号和异号两种情况,同号下可以直接相减再比较符号位
- 进行整数位运算时,边界情况一般是Tmin、0
- 进行浮点数位运算时,边界情况一般是向上溢出到正无穷以及向下数值太小无法表示
- 对浮点数的IEEE754的格式更加熟悉