問題 2：向前和向後 Euler 方法求解線性 ODE

2.1 問題描述

求解線性常微分方程：

$$\mathrm{y}'(\mathrm{t}) = \lambda \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{r}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0$$

其中：

- $\lambda = -10$
- $\mathrm{r}(\mathrm{t}) = \sin(t)$
- y_0=1
- t∈[0,5]

2.2 方法比較

向前 Euler 方法（顯式）：

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t(\lambda y_n + r(t_n))$$

向後 Euler 方法（隱式，線性情況下可顯式求解）：

$$y_{n+1} = \frac{y_n + \Delta t \cdot r(t_{n+1})}{1 - \lambda \Delta t}$$

2.3 結果分析

使用不同步長ΔtΔt進行測試：

數值解在 t=5 的比較：

```
Numerical solution at t = 5:
Forward Euler:  y(5) = -0.097801
Backward Euler: y(5) = -0.097702
Reference (RK45): y(5) = -0.097751

Absolute errors at t = 5:
Forward Euler error:  4.957e-05
Backward Euler error: 4.905e-05
PS D:\機器學習>
```

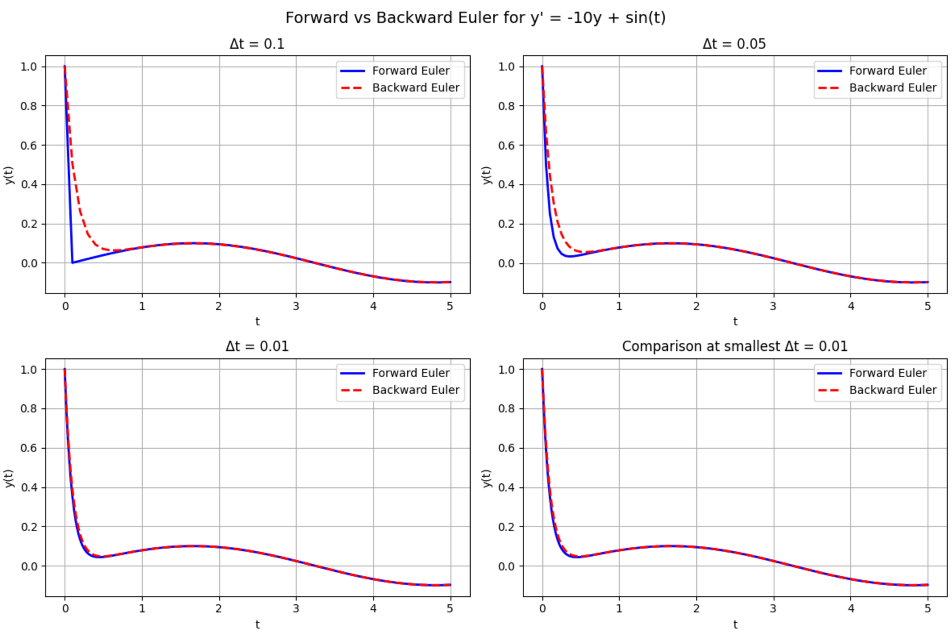
誤差分析：

1. **相同步長下的精度**：兩種方法的誤差量級相同（約 $5\times10−55\times10^{-5}$）
2. **收斂階**：兩者均為一階方法，誤差隨步長線性減少
3. **穩定性**：
    - 向前 Euler：條件穩定，要求 $\Delta t<0.2\Delta t<0.2$
    - 向後 Euler：無條件穩定

可視化分析：

- **不同步長下的數值解比較**：顯示步長越小，數值解越接近參考解
- **誤差隨步長變化圖**：在對數座標下顯示一階收斂特性

2.4 視覺化



2.5 結論

對於線性 ODE 問題：

1. 向前 Euler 和向後 Euler 方法在足夠小的步長下都能給出準確的數值解。
2. 兩種方法均表現出一階收斂特性。
3. 向後 Euler 方法由於無條件穩定的特性，更適合剛性方程，但在這個問題中，兩種方法在適當步長下表現相當。

整體收穫

本作業通過實際編程實現，加深了對以下數值方法的理解：

1. 無約束優化中的擬牛頓法（BFGS）
2. 常微分方程數值解法中的顯式和隱式 Euler 方法
3. 數值方法的收斂性、穩定性和誤差分析