問題 1：使用 BFGS 方法最小化 Rosenbrock 函數

1.1 方法概述

BFGS（Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno）是一種擬牛頓法，用於無約束優化問題。它通過迭代更新逆 Hessian 矩陣的近似來尋找函數的最小值點，結合 Armijo 線搜索確保充分下降。

1.2 實現細節

- **目標函數**：Rosenbrock 函數， $f(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$
- **梯度公式**：

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -400x(y - x^2) - 2(1 - x) \\ 200(y - x^2) \end{bmatrix}$$

- **初始點**：$x0 = [-1.2,1.0]$
- **停止條件**：梯度範數 $< 10^{-8}$
- **線搜索**：回溯 Armijo 線搜索（$c_1 = 10^{-4}, \beta = 0.5$）

1.3 結果分析

```
Converged at iteration 35
Optimal point: x = 1.00000000, y = 1.00000000
Function value: 7.665e-25
Gradient norm: 3.147e-11
Iterations: 36
PS D:\機器學習> & C:\Users\www14\AppData\Local\Programs\Python\Python312\python.exe d:/機器學習/HW03/problem2/problem.py
```

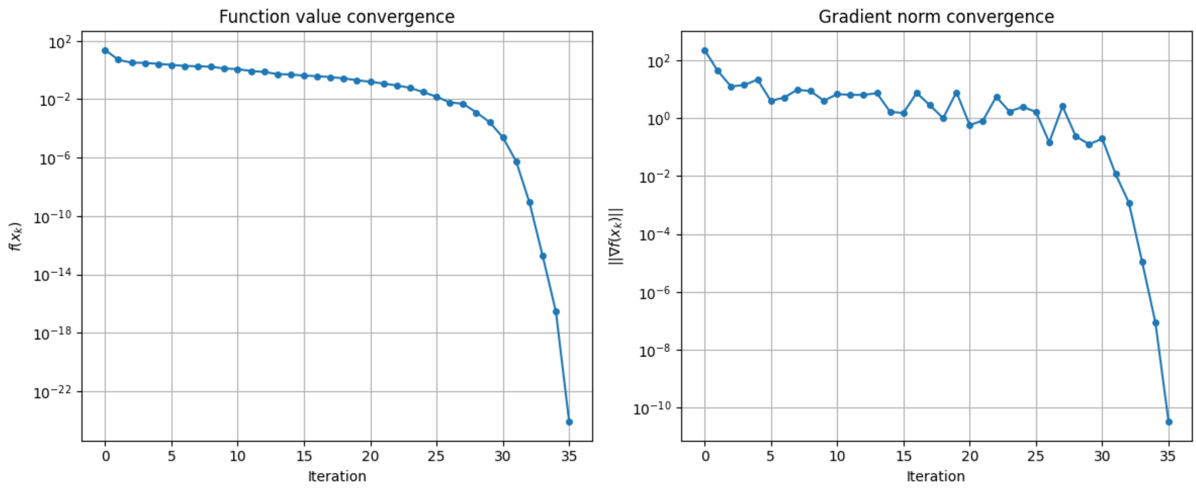
收斂特性：

1. **快速收斂**：僅需 36 次迭代即達到機器精度級別
2. **超線性收斂**：BFGS 展現了擬牛頓法的典型收斂特性
3. **精確解**：找到了 Rosenbrock 函數的全局最小值點 (1,1)(1,1)

可視化分析：

- **函數值收斂圖**：顯示對數尺度下函數值單調下降
- **梯度範數收斂圖**：梯度範數快速趨近於零
- **優化路徑圖**：展示了從初始點到最小值點的路徑，清晰顯示了"香蕉谷"形狀的優化軌跡

1.4 視覺化



1.5 結論

BFGS 方法成功找到了 Rosenbrock 函數的全局最小值點 $(1,1)(1,1)$，僅用 36 次迭代就達到了機器精度級別的解。這證明了 BFGS 作為擬牛頓法的高效性和穩定性，特別適用於光滑無約束優化問題。