Disciplina de Processamento Digital de Sinais

Lista de Exercícios 1

Prof. Marcelo E. Pellenz

1 – Considere os sinais analógicos, $x(t)$, apresentados a seguir. Se estes sinais forem digitalizados por um A/D utilizando-se uma frequência de amostragem $F_s = 400$ Hz, escreva as equações dos respectivos sinais em tempo discreto, $x[n]$. Identifique se na digitalização de algum destes sinais haverá problema de *aliasing* e qual a frequência falsa reconstruída.

a) $x_1(t) = \cos(2\pi 100t)$
b) $x_2(t) = \cos(2\pi 200t)$
c) $x_3(t) = \cos(2\pi 300t)$

2 – Considere o sinal analógico, $x(t) = 3\ \cos(100\pi t)$:

a) Determine a taxa de amostragem mínima necessária para evitar *aliasing* (Taxa de Nyquist).
b) Considere que o sinal seja amostrado a uma taxa de amostragem $F_s = 200$ Hz. Qual o sinal discreto, $x[n]$ obtido após a amostragem ?
c) Se o sinal for amostrado com $F_s = 75$ Hz, qual o sinal discreto, $x[n]$ obtido após a amostragem ?
d) Se o sinal $x[n]$ do item **c)** for convertido para analógico no D/A, qual o sinal reconstruído, $\tilde{x}(t)$?

3 – Considere a digitalização e reconstrução dos seguintes sinais analógicos, $x(t)$. Se estes sinais forem digitalizados por um A/D utilizando-se uma frequência de amostragem $F_s = 40$ Hz, e imediatamente reconstruídos pelo D/A, quais as frequências em Hertz dos sinais reconstruídos.

a) $x_1(t) = \cos(2\pi 10t)$
b) $x_2(t) = \cos(2\pi 50t)$
c) $x_3(t) = \cos(2\pi 90t)$
d) $x_4(t) = \cos(2\pi 130t)$

4 – Considere o sinal analógico $x_a(t) = 3\cdot\cos(50\ \pi\ t) + 10\ \sin(300\ \pi\ t) - \cos(100\ \pi\ t)$. Determine qual deve ser a taxa de amostragem mínima para que o sinal seja digitalizado no A/D e reconstruído no D/A, sem perder componentes ou gerar *aliasing*. Demonstrar realizando a conversão $x_a(t) \rightarrow x[n] \rightarrow \tilde{x}_a(t)$.

5 – Considere o sinal analógico $x_a(t) = 3 \cdot \cos(2000\ \pi\ t) + 5 \cdot \sin(6000\ \pi\ t) + 10 \cdot \cos(12000\ \pi\ t)$:

a) Determine qual a frequência mínima de amostragem, F_s.
b) Se a frequência de amostragem for $F_s = 5k$Hz, determine a expressão da sequência $x[n]$.
c) Determine qual a sequência reconstruída, $\tilde{x}_a(t)$, a partir da sequência $x[n]$ da letra **b)**, assumindo a frequência de amostragem $F_s = 5k$Hz.

6 – Considere o sinal analógico $x_a(t) = 10 \cdot \cos(200\ \pi\ t) - 5 \cdot \sin(1000\ \pi\ t) + 20 \cdot \cos(3000\ \pi\ t)$. Se este sinal for digitalizado por um A/D utilizando-se uma frequência de amostragem $F_s = 1000$ Hz e novamente convertido para analógico pelo D/A, qual será o sinal analógico $\tilde{x}_a(t)$ reconstituído.

7 – Considere o sinal analógico $x_a(t) = 10 \cdot \cos(200\ \pi\ t) - 5 \cdot \sin(1200\ \pi\ t) + 20 \cdot \cos(1800\ \pi\ t)$. Se este sinal for digitalizado por um A/D utilizando-se uma frequência de amostragem $F_s = 500$ Hz e novamente convertido para analógico pelo D/A, qual será o sinal analógico $\tilde{x}_a(t)$ reconstituído.

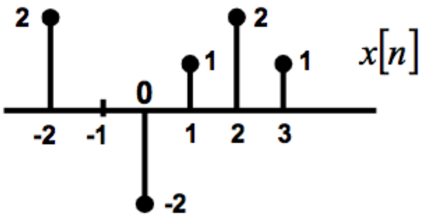
8 – Considere o sinal analógico, $x(t) = \cos(2\pi 200 t)$. Se este sinal for digitalizado por um A/D utilizando-se uma frequência de amostragem $F_s = 500$ Hz, determine se o sinal $x[n]$ será periódico e qual o seu período em amostras.

9 – Considere que o sinal analógico em tempo contínuo, $x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi 3000\, t)$, é digitalizado utilizando-se uma frequência de amostragem $F_s = 50\text{kHz}$. Explique se o sinal amostrado, $x[n]$, é ou não é uma sequência periódica em tempo discreto (justifique) e interprete os valores de k e N da frequência normalizada deste sinal ($f = k/N$).

10 – Determine se as seguintes sequências discretas são periódicas e qual o período:

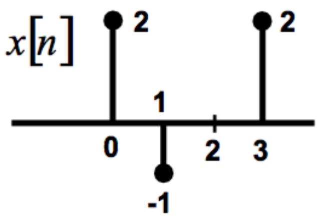
a) $x_1[n] = \cos(0.01\pi n)$
b) $x_2[n] = \cos(\frac{30}{105}\pi n)$
c) $x_3[n] = \cos(3\pi n)$
d) $x_4[n] = \sin(3n)$
e) $x_4[n] = \sin(\frac{62}{10}\pi n)$

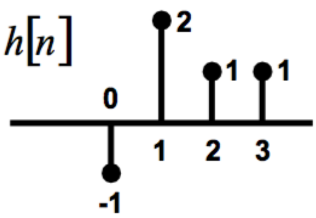
11 – Considerando o sinal discreto $x[n]$ mostrado na figura abaixo, desenhe a seguinte sequência discreta $y[n] = x[n]\,\big(u[n] - u[n-4]\big) + 2\,\delta[n+2] - 4\,\delta[n-2]$.



12 – Um sistema discreto linear invariante no tempo, é caracterizado pela resposta ao impulso, $h[n]$.

a) Determine a resposta do sistema, $y[n]$, para o sinal de entrada $x[n]$.
b) Escreva a equação de diferenças que relaciona entrada e saída para este sistema.





13 – Considere um sistema discreto LTI, cuja resposta ao impulso é dada por:

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{5}, -2, 0, 0, 4, -1, 0, 0, 1\}.$$

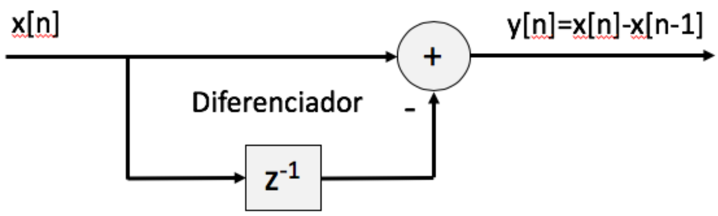
a) Expressar a resposta ao impulso do sistema, $h[n]$, como sendo um somatório de funções impulso escalonadas em amplitude e deslocadas. Apresentar a equação de $h[n]$ em função dos $\delta[n]$.
b) Escrever a equação de diferenças do sistema, que relaciona $x[n]$ com $y[n]$.
c) Desenhar o diagrama de blocos que representa este sistema.
d) Calcular a resposta em frequência do sistema, $H(e^{j\omega})$.
e) Determine o sinal de saída deste sistema, $y[n]$, dado o sinal de entrada $x[n] = \{1, 0, 2, -1\}$.

14 – Um sistema discreto LTI é representado pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{3}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2]$$

Considerando a operação do sistema a partir do instante $n = 0$ (sistema causal), determine o valor das cinco (5) primeiras amostras de saída deste sistema, considerando o sinal de entrada, $x[n] = \{\underset{\uparrow}{4}, -2, 3, 1, 0\}$.

15 - Determine se o sistema diferenciador mostrado na figura abaixo, $y[n] = x[n] - x[n-1]$, é um sistema *variante* ou *invariante* no tempo:



Resolução: O procedimento de análise é o seguinte: a) Primeiro, aplique o atraso na entrada. b) Depois, passe o sinal atrasado pelo sistema. c) O resultado deve ser o mesmo que atrasar a saída original do sistema. O sistema é definido como

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Se a entrada $x[n]$ for atrasada de k amostras, $x[n-k]$, e aplicada ao sistema, a saída do sistema será

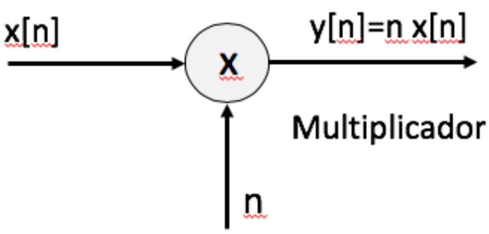
$$y_1[n] = x[n-k] - x[n-k-1]$$

Por outro lado, se atrasarmos a saída do sistema em k amostras, teremos:

$$y_2[n] = y[n-k] = x[n-k] - x[n-k-1]$$

Portanto, como $y_1[n] = y_2[n]$, o sistema é **invariante no tempo**.

16 - Determine se o sistema *multiplicador* mostrado na figura abaixo, $y[n] = n \cdot x[n]$, é um sistema *variante* ou *invariante* no tempo:



Resolução: O sistema é definido como

$$y[n] = n\, x[n]$$

Se a entrada $x[n]$ for atrasada de k amostras, $x[n-k]$, e aplicada ao sistema, a saída do sistema será

$$y_1[n] = n\, x[n-k]$$

Por outro lado, se atrasarmos a saída do sistema em k amostras, teremos:

$$y_2[n] = y[n-k] = (n-k)\, x[n-k] = n\, x[n-k] - k\, x[n-k]$$

Portanto, como $y_1[n] \neq y_2[n]$, o sistema é **variante no tempo**.

17 - Determine se os sistemas descritos pelas equações de entrada-saída apresentados abaixo, são *lineares* ou *não lineares*:
a) $y[n] = n\ x[n]$
b) $y[n] = x^2[n]$

Resolução a) Para duas sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$, as saídas correspondentes são

$$y_1[n] = n\ x_1[n] \qquad y_2[n] = n\ x_2[n]$$

A combinação linear destas duas sequências de entrada resulta na saída:

$$y_3[n] = n\ (a_1\ x_1[n] + a_2\ x_2[n]) = n\ a_1\ x_1[n] + n\ a_2\ x_2[n]$$

Por outro lado, uma combinação linear das duas saídas resulta na saída:

$$a_1\ y_1[n] + a_2\ y_2[n] = a_1\ n\ x_1[n] + a_2\ n\ x_2[n]$$

Postanto o **sistema é linear**.

Resolução b) Para duas sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$, as saídas correspondentes são

$$y_1[n] = x_1^2[n] \qquad y_2[n] = x_2^2[n]$$

A combinação linear destas duas sequências de entrada resulta na saída:

$$y_3[n] = T\{a_1\ x_1[n] + a_2\ x_2[n]\} = \left[a_1\ x_1[n] + a_2\ x_2[n]\right]^2 = a_1^2 x_1^2[n] + 2a_1a_2x1[n]x2[n] + a_2^2 x_2^2[n]$$

Por outro lado, uma combinação linear das duas saídas resulta na saída:

$$a_1\ y_1[n] + a_2\ y_2[n] = a_1\ x_1^2[n] + a_2\ x_2^2[n]$$

Postanto o **sistema é não linear**.

18 – Considere o sistema discreto (filtro de média móvel) descrito pela equação de diferenças abaixo. Escreva a equação de diferenças do sistema na *forma recursiva* e então represente o sistema usando um diagrama de blocos.

$$y[n] = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} x[n-k]$$

19 – Um sistema discreto LTI é representado pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-2] - \frac{1}{6}y[n-1]$$

Considerando a operação do sistema a partir do instante $n = 0$ (sistema causal), determine o valor das quatro (4) primeiras amostras de saída deste sistema, considerando o sinal de entrada, $x[n] = \{1, -1, 2, 0\}$.

20 – Considere que a sequência discreta $x[n] = \{\underset{\uparrow}{2},\ 1,\ 0,\ 2\}$ foi amostrada com frequência de amostragem $F_s = 10$ kHz. Calcule a DFT de $N = 4$ pontos para a sequência $x[n]$ e trace o gráfico do espectro (apenas resposta em módulo) com a escala de frequência em hertz e simetria em torno da origem dos eixos.

Formulário

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \qquad \delta[n+n_0] = \begin{cases} 1, & n = -n_0 \\ 0, & n \neq -n_0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad u[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases} \qquad u[n+n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq -n_0 \\ 0, & n < -n_0 \end{cases}$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{F}{F_s}$$ Normalização de Frequências

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\ h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\ x[n-k]$$ Soma de Convolução

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\ y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m\ x[n-m]$$ Equação de Diferenças

$$x[n] = e^{j\omega n} \longrightarrow y[n] = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$$ Autofunção

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\ e^{-j\omega n}$$ Resposta em Frequência

$$y[n] = \frac{1}{M_2+1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k]$$ Filtro de Média Móvel Causal

$$y[n] = \frac{1}{M_2+1}\ x[n] + y[n-1] - \frac{1}{M_2+1}\ x[n-(M_2+1)]$$ Filtro de Média Móvel Causal Recursivo

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\sin(\theta)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$ DTFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\omega_k n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$ DFT de N-pontos

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}$$