泛函分析

Waikwan Wong

2025 年 6 月 6 日

摘要

仅以此文简略的记录一下本学期泛函分析的课程笔记，写这一份笔记的原因只要是本人在这学期几乎没有学习泛函分析，遂在端午假期的时候通过写笔记的方式强迫自己学习泛函分析. 这份笔记分为两个部分，§1-§5 主要为拓扑学的部分，写法也主要是以罗列定理为主，§6-§10 为有界线性泛函的内容，在写笔记的时候补充了引入定义和定理的动机，但仍然罗列定义定理. 本笔记的参考书为曹广福《实变函数与泛函分析》、王凯《泛函分析》.

目录

1 L^p 空间复习、线性距离空间、线性赋范空间、内积空间 2

2 完备、完备空间、空间的完备化，Banach 空间、Hilbert 空间的定义和例子 6

3 Bessel 不等式的应用，Hilbert 空间的正交集，Zorn 引理的应用 8

4 Lusin 定理的重新表述，可分空间，稠密集和疏朗集，Baire 纲定理的应用，列紧性与紧集 11

5 复习：常见空间的性质，常见空间是列紧集的充要条件 14

6 有界线性算子，算子空间，算子的可逆性，对偶空间的定义，Hilbert 空间上连续线性泛函 16

7 Hahn-Banach 延拓定理，Hardy 空间简介，Hahn-Banach 延拓定理的几何形式 20

8 一致有界原理，Riemann-Stieltjes 积分，逆算子定理，闭图像定理 24

9 对偶空间的进一步讨论，二次对偶，自反空间，Radon-Nikodým 定理，弱收敛与弱 * 收敛 27

10 Banach 空间中的共轭算子，算子值域的进一步讨论，Hilbert 空间中的共轭算子，闭值域定理 31

1 L^p 空间复习、线性距离空间、线性赋范空间、内积空间

不将每一个函数当做孤立的对象，而是将其作为某一类集合中的一个元素，并将这个函数的集合作为一个整体讨论，于是引出 L^p 空间的定义.

定义 1.1 (L^p 空间). 将 $\mathcal{L}^p(E)$ 中几乎处处相等的函数放在一起，从而构成集合：

$$L^p(E)=\{[f]\mid f\in\mathcal{L}^p(E),g\in[f]\text{ 当且仅当 }f=g\text{ a.e. }[E]\}$$

其中设 $1\leqslant p<\infty,E$ 是 Lebesgue 可测集，

$$\mathcal{L}^p(E)=\left\{f\mid f\text{是}E\text{上的 Lebesgue 可测函数，且}\int_E|f(x)|^p\,\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

对任意的 $[f]$,$[g]\in L^p(E)$，其中 $[f]$ 指函数类，可以省略写成 f. 定义

$$\|f-g\|_p:=\rho(f,g):=\rho([f],[g])=\left[\int_E|f-g|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\tag{1}$$

Hölder 不等式和 Minkowski 不等式是学习泛函分析所经常需要用到的不等式，这里给出它们的公式.

引理 1.1. 设 a,b 都是正数，$\alpha,\beta\geqslant 0$ ，且 $\alpha+\beta=1$ ，则

$$a^\alpha b^\beta\leqslant\alpha a+\beta b$$

等式成立当且仅当 $a=b$ ，或 α,β 中有一个为 0 .

定理 1.2 (Hölder 不等式). 设 $p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$（满足该条件的 p , q 称作共轭数）, $f\in L^P(E),g\in L^q(E)$ ，则 $fg\in L^1(E)$ ，且

$$\int_E|fg|\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_E|f|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_E|g|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}},$$

等式成立当且仅当 $|f|^p$ 与 $|g|^q$ 相差一个常数因子.

定理 1.3 (Minkowski 不等式). 设 $p\geqslant 1,f,g\in L^p(E)$ ，则

$$\left[\int_E|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_E|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_E|g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

若 $p>1$ ，则等号只在 f 与 g 相差一个非负常数因子时成立.

在引入导出的线性空间前，补充一下基的概念

定义 1.2. 称线性空间 X 上的一个极大线性无关组为空间 X 的一组 **Hamel 基**. 若 X 是某个 Hamel 基中只有有限个元素，则 X 是有限维线性空间，否则则称为无限维线性空间.

线性距离空间

我们一般认为度量空间就是**距离空间**，收敛的度量空间就是**线性距离空间**.

例 1.1. $f,g\in L^p(E), 1\le p<\infty$，则 $\left(\int_E |f-g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=0$ 当且仅当 $f=g$ a.e $[E]$.

注. L^p 空间的距离收敛与点收敛无关，但可以推出（强于）依测度收敛.

例 1.2. $l^\infty=\left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty | x_n\in K, n=1,2,\cdots,\sup\limits_n |x_n|<\infty\right\}$ 中点列 $x^{(k)}=\left\{x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty$ 的收敛
设 $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l^\infty$ ，且 $\rho\left(x^{(k)},x\right)=\sup\limits_n\left|x_n^{(k)}-x_n\right|\to 0(k\to\infty)$ ，则

$$\forall\varepsilon>0,\exists k_0,\forall k\geqslant k_0,\left(\rho\left(x^{(k)},x\right)<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\forall n,\left(\left|x_n^{(k)}-x_n\right|<\varepsilon\quad(\forall k\geqslant k_0)\right)$$

这说明，$x^{(k)}$ 按坐标一致收敛到 x .

例 1.3. 设 $1\leqslant p<\infty$ ，$l^p=\left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_n\in K, n=1,2,\cdots \text{且} \sum\limits_{n=1}^\infty |x_n|^p<\infty\right\}$ 中的点列 $\left\{x^{(k)}\right\}=\left\{\left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^\infty\right\}$ 收敛到 $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 当且仅当

1. 对每个 $n, x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$ ；
2. 对任意 $\varepsilon>0$ ，存在 k_0,N_0 ，使得对任意 $k>k_0$ 及 $N\geqslant N_0$, $\sum\limits_{n\geqslant N}\left|x_n^{(k)}\right|^p<\varepsilon$.

线性赋范空间

定义 1.3 (线性赋范空间). 设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\|\cdot\|$ 是 X 到实数域 $\mathbb{R}$ 的映射满足：

1. （非负性）对任意 $x\in X,\|x\|\geqslant 0$ ，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$ ；
2. （正齐性）对任意 $x\in X,\alpha\in\mathbb{F},\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ ；
3. （三角不等式）对任意 $x,y\in X,\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,

   则称 X 为 $\mathbb{F}$ 上的**线性赋范空间**，记作 $(X,\|\cdot\|)$，$\|\cdot\|$ 称为 x 的**范数**.

定理 1.4. 线性赋范空间一定是线性距离空间，线性距离空间不一定是线性赋范空间.

例 1.4 (反例). L^p 空间不满足线性赋范空间. 因为对 $\forall\alpha\in\mathbb{F}$，

$$\|\alpha f\|=\int_E|\alpha f|^p\mathrm{d}x=|\alpha|^p\int_E|f|^p\mathrm{d}x\neq|\alpha|\int_E|f|^p\mathrm{d}x$$

于是 L^p 空间不满足正齐性.

这里补充以下几种常见的范数

定义 1.4 (向量范数). 设 X 为向量组成的线性空间，在 X 上可定义如下范数.

1. （1 范数）$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|$
2. （2 范数）$\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$
3. （∞ 范数）$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

定义 1.5 (向量范数). 设 $X=\mathrm{M}(m,n,R)$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵构成的线性空间，在 X 上可定义如下范数：

1. （1 范数）$\|\mathbf{A}\|_1 := \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{i,j}|$（列和取最大值）

2. （∞ 范数）$\|\mathbf{A}\|_\infty := \max\limits_{1\leq i\leq m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$（行和取最大值）

3. （2 范数）$\|\mathbf{A}\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$（注意转置）

最后介绍一下范数的收敛

定义 1.6 (按范数收敛)**.** 设 X 是线性赋范空间，由范数诱导一个距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|_X$ $(\forall x,y\in X)$，不难证明 ρ 是 X 上的距离，并且 (X,ρ) 是线性距离空间. 则若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 按此距离收敛到某个元素 x，即

$$\|x_n-x\|_X\to 0\ \ (n\to\infty)$$

则称它**按范数收敛**到 x，记作 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_X}x(n\to\infty)$ 或者 $x_n\to x(n\to\infty)$

内积空间

定义 1.7 (内积空间)**.** 设 X 是复数域上的线性空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $X\times X$ 到 $\mathbb{C}$ 的二元函数，使得对任意 $x,y,z\in X$ 及 $\alpha\in\mathbb{C}$ 满足：

1. $\langle x,x\rangle\geq 0$，且 $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$;

2. $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

3. $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

则称为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 的**内积**，称 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积 X 的**内积空间**.

例 1.5. 对于 $\mathbb{C}^n$ 中的任意两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i},$$

显然 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成一个内积，并且范数满足

$$\|x\|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

例 1.6 (L^2 空间)**.** 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Lebesgue 可测子集，对于 $f,g\in L^2(E)$，定义

$$\langle f,g\rangle=\int_E f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

是一个内积.

命题 1.1. $\forall\alpha\in\mathbb{C}$，$\langle x,\alpha y\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle$

内积与范数有着密切的联系，接下来证明 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数，称为**由内积诱导的范数**.

定理 1.5 (Cauchy-Schwarz). 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，则对任意的 $x,y\in X$ 有

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

定理 1.6. 若 X 是内积空间，定义的范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $(x\in X)$ 成为为线性赋范空间.

命题 1.2. 在内积空间 X 中，内积是关于范数的连续函数，即当 $\|x_n-x\|\to 0$，$\|y_n-y\|\to 0$ $(n\to\infty)$，则 $(x_n,y_n)\to(x,y)$ $(n\to\infty)$.

证明. 因为 $\{x_n\},\{y_n\}$ 按范数收敛，可看出它们是有界序列，所以

$$|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|=|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_n,y\rangle+\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|\leq|\langle x_n,y-y_n\rangle+\langle x_n-x,y\rangle|$$

然后再由 Cauchy-Schwarz 不等式易得上式趋于 0. □

定理 1.7 (极化恒等式). 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，则对任意的 $x,y\in X$，有

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)$$

由不同的范数相加可知，由内积导出的范数应该满足平行四边形法则，是否任何一个线性赋范空间都能够由极化恒等式定义呢？

定理 1.8 (平行四边形公式). 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，$\|\cdot\|$ 是由内积诱导的范数，则对 $\forall x,y\in X$，有

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

注 (几何意义). 平行四边形中的对角和长度的平方等于平行四边形的长度平方和.

由定理1.8可得，**由内积决定的范数必须适合平行四边形公式**.

例 1.7. 定义 $C[a,b]$ 上的度量为 $d(f,g)=\max\limits_{a\leq t\leq b}|f(t)-g(t)|$，设 $C([0,1])$ 中元素 $x(t)\equiv 1$，$y(t)=t$，

$$\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2=\|1+t\|_\infty^2+\|1-t\|_\infty^2=4+1=5\neq 2(\|x\|_\infty^2+\|y\|_\infty^2)=2(1+1)=4$$

定理 1.9. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是线性赋范空间，则 $(X,\|\cdot\|)$ 可以被赋予内积的充要条件是 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则.

2 完备、完备空间、空间的完备化，Banach 空间、Hilbert 空间的定义和例子

完备的相关习题难度挺大，这里详细介绍它们的定义和应用.

定义 2.1 (Cauchy 列). 设 (X,ρ) 是距离空间（赋范空间），若 X 中的点列 $\{x_n\}$ 满足

$$\rho(x_m,x_n)\to 0(n,m\to\infty)$$

则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的 **Cauchy 列**.

定义了什么是 Cauchy 列之后才能证明空间是完备的.

例 2.1. l^p 空间是完备的.

定义 2.2. 若 X 中任意 Cauchy 列都在 X 中收敛，则称 (X,ρ) 是**完备度量空间（赋范空间）**.

例 2.2. $C[a,b]$ 是完备的度量空间.

例 2.3. 定义 $\mathcal{L}^\infty(E)$ 中的函数为**本性有界函数**，其中

$$\mathcal{L}^\infty(E)=\{f: f\text{是}E\text{上的 Lebesgue 可测函数，存在实数}M\text{，使得}m(|f|>M)=0\}$$

如果 $f=g$ a.e. $[E]$，则

$$\|f\|_\infty=\inf_{m(E_0)=0}\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|$$

$\mathcal{L}^\infty(E)$ 上的距离 ρ 为

$$\rho(f,g)=\inf_{m(E_0)=0}\sup_{x\in E-E_0}|f(x)-g(x)|$$

$(\mathcal{L}^\infty(E),\|\cdot\|_\infty)$ 是完备的线性赋范空间.

注. 证明在课本 P9.

给出了完备空间之后，完备的赋范空间和完备的内积空间定义就此给出.

定义 2.3 (Banach 空间). 称完备的赋范空间称为 **Banach 空间**.

例 2.4. $C[a,b]$ 是 Banach 空间.

例 2.5. l^p 空间是 Banach 空间.

定义 2.4 (Hilbert 空间). 称完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**.

例 2.6. l^2 空间是 Hilbert 空间.

对于子空间的完备性，也有一般性结论，下面的定理在列紧性的有关证明中将会用到

定理 2.1. 设 A 是完备的度量空间 (X,ρ) 的一个子集，度量空间 (A,d) 是完备的当且仅当 A 是 X 的一个**闭子集**，即若 A 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的点 x_0，则 $x_0\in A$.

注. 如何证明子空间上的一点是闭的，可以参考王书 P16，例题 1.2.15.

欧氏空间很多结论都依赖于空间的完备性，度量空间也不意外.

命题 2.1. 以下的命题相互等价

1. 设 A 是 X 的子空间，如果 A 是完备的度量空间，则 A 称为 X 的完备子空间；
2. 度量空间 X 中的收敛子列是基本点列；
3. 完备度量空间的闭子集也是完备子空间；
4. 任何度量空间的完备子空间是闭子集.

注. 不完备的度量空间也能有完备的子空间，例如度量空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的，但其子空间的 $\mathbb{N}$ 是完备的.

定理 2.2. 有限维的赋范空间是完备的.

推论 2.3. 线性赋范空间 X 的有限维子空间在 X 中是闭的.

直线上的区间套定理在完备的距离空间依旧成立.

命题 2.2 (闭球套定理). 设 (X,ρ) 是完备的距离空间，$\overline{S_n}=\{x\in X|\rho(x,x_n)\le\varepsilon_n\}$ 是一列闭球

$$\overline{S_1}\supset\overline{S_2}\supset\cdots\supset\overline{S_n}\supset\cdots$$

如果球的半径 $\varepsilon_n\to 0$，则存在唯一的点 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

定理 2.4. 设 X 是度量空间，如果在 X 上闭球套定理成立，那么 X 是完备的.

给定空间，如何使其完备？对于不完备的度量空间，可以通过在 Cauchy 列中加入“新点”，使得新空间是完备的.

定义 2.5 (稠密). 设 (X,ρ) 是距离空间，M,N 是 X 的两个子集，且 $M\subset N$，若对任意 $\varepsilon>0$，及任意的 $x\in N$，$M\cap S(x,\varepsilon)\neq\emptyset$，则称 M 在 N 中**稠密**.

定义 2.6 (完备化空间). 设 (X,ρ) 是距离空间，若有完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ 及映射 $T:X\to\widetilde{X}$，使得

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)\quad\forall x,y\in X$$

且 Tx 在 $\widetilde{X}$ 中稠密，则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的**完备化空间**.

注 (等距映射). T 通常称为从 (X,ρ) 到 $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ 的**等距映射**

注 (等距同构). 在等距意义下将 X 与 TX 等同，此时也称 X 与 TX **等距同构**.

例 2.7. 设 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，则 H 按范数 $\|\cdot\|$ 的完备化空间是 Hilbert 空间.

注. 证明在课本 P17.

定理 2.5. 任何距离空间都有完备化空间.

3 Bessel 不等式的应用，Hilbert 空间的正交集，Zorn 引理的应用

有了内积的定义就可以定义两个向量的夹角了.

定义 3.1 (正交向量). 设 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，$x,y\in H$，若 $(x,y)=0$，则称 x,y 为**相互直交**的，记为 $x\perp y$. 特别的，若 $\|x\|=\|y\|=1$，则称它们为**正交向量**.

定义 3.2 (正交集). 设 $M\subset H$，且对任意的 $x,y\in M$，有 $\|x\|=\|y\|=1$，且若 $x\neq y$，有 $\langle x,y\rangle=0$，则称 M 为 H 中的**正规直交集**，简称**正交集**.

例 3.1. n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 组成正交集.

例 3.2. 复周期函数空间 $L^2[0,2\pi]$ 中，规定内积为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)},\mathrm{d}x\quad\forall f,g\in L^2[0,2\pi]$$

这时，$\{1,\sqrt{2}\cos x,\sqrt{2}\sin x,\sqrt{2}\cos 2x,\sqrt{2}\sin 2x,\cdots,\sqrt{2}\cos nx,\sqrt{2}\sin nx\}$ 组成 $L^2[0,2\pi]$ 的正交集.

定义 3.3 (完备正交集). 若 H 中不存在与 M 中每个向量都直交的非零向量，则称 M 为 H 的**完备正交集**.

在数分中我们称 Fourier 级数中的

$$\begin{aligned}
a_0(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=\langle f,1\rangle\\
a_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sqrt{2}\cos nt\mathrm{d}t=\langle f,\sqrt{2}\cos nx\rangle\\
b_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sqrt{2}\sin nt\mathrm{d}t=\langle f,\sqrt{2}\sin nx\rangle
\end{aligned}$$

为 f 关于三角函数系的 **Fourier 系数**.Fourier 级数中的主要问题是研究 Fourier 系数和部分和的收敛性，现在对此概念做推广.

定义 3.4 (Fourier 系数集). 设 M 是内积空间 H 的一组正交集，$x\in H$，数集

$$\{\langle x,e\rangle:e\in M\}$$

称为向量 x 关于正交集 M 的 **Fourier 系数集**，而 $\langle x,e\rangle$ 称为 x 关于 e 的 **Fourier 系数**.

在引入 Bessel 不等式前，先回顾数分中的 Bessel 不等式长什么样.

定理 3.1 (数分中的 Bessel 公式). 若函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

定理 3.2 (Bessel). 设 M 为内积空间，若 $M=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 H 中的正交集，则对任意的 $x\in H$，有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle x,e_\lambda\rangle|^2\le\|x\|^2$$

有了 Bessel 不等式，下面的定义是合乎情理的.

定义 3.5 (正交基). 若对任意的 $x \in H$，总有 $x = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$，则称 M 为 H 的**正交基**.

定理 3.3. 若 H 是 Hilbert 空间，则对任意 $x \in H$ 及 H 中的任一正交集 M，必有 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda \in H$.

注. 证明在课本 P19.

定理 3.4. 若 H 是 Hilbert 空间，M 是正规直交集，则下列等价

1. M 是正交基；
2. $\overline{\mathrm{span}}M = H$，其中 $\mathrm{span}M$ 为 M 线性表示的元素的全体构成的线性空间.
3. M 是完全的，即若 $x \in H$ 满足 $x \perp e_\lambda (\forall \lambda \in \Lambda)$，则 $x = 0$；
4. M 是完备的；
5. Parseval 等式成立，即对任意 $x \in H$，

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2.$$

称满足上述条件之一的正规直交集为 Hilbert 空间 H 中的一组**标准正交基**.

证明. 因为 M 为可数集，所以将其排成序列 $\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \cdots, e_{\lambda_n}\}$. 由 Bessel 不等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_{\lambda_n} \rangle|^2 < \infty$ 和 $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{m} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k} \right\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_{\lambda_k} \rangle|^2$，可得 $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k} \right\}_n$ 是 H 中的基本点列，因此极限存在并且与 M 所取的排列顺序无关，所以可以合理定义 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k}$，由此可得 $\left\| \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda \right\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |\langle x, e_{\lambda_k} \rangle|^2 = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2$. 所以可得 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda \in \overline{\mathrm{span}}M$. □

例 3.3 (Riemann-Lebesgue 引理). $L^2[0, 2\pi]$ 中 $M = \{1, \cdots, \sqrt{2}\sin nx, \sqrt{2}\cos nx, \cdots\}$ 是一组标准正交基，从而有

$$\|f\|^2 = \sum_{e\in M} |\langle f, e \rangle|^2 \quad \forall f \in L^2[0, 2\pi]$$

成立，也可以表示为

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = 0.$$

利用定理3.4可以证明 Hilbert 空间基的存在性，但在此之前需要我们复习一下序关系和 Zorn 引理，因为在比较两个不是数的东西不能直接用大小关系和数学归纳法.

定义 3.6 (偏序集). 设 S 是一非空集合，如果在 S 的部分元素之间引进了某种特殊的序关系 $\preceq$，满足

1. $a \preceq a (a \in S)$；

2. 若 $a \preceq b$，$b \preceq c$，则 $a \preceq c$;

3. 若 $a \preceq b$，且 $b \preceq a$, 则 $a = b$,

则称 $(S, \preceq)$ 是一个**偏序集**.

注 (全序集). 若对任意 $a, b \in S$，$a \preceq b$ 与 $b \preceq a$ 必有一个成立，则称 $(S, \preceq)$ 是一个**全序集**.

注 (偏序集与全序集的区别). 偏序集只有部分元素有序关系，全序集是指集合中任意两个元素都能够比较“大小”.

例 3.4. $(\mathbb{R}, \preceq)$ 是全序集，因为任意实数都能够比较大小.

例 3.5. $(\mathbb{C}, \preceq)$ 是偏序集，因为不是任意两个复数都能够比较大小.

定义 3.7 (极大元). 设 $(S, \preceq)$ 是一个偏序集，$A \subset S$，$b \in S$，若对一切 $x \in A$，都有 $x \preceq b$，则称 b 是 A 的一个**上界**. 如果 $a \in S$，使得 S 中不存在 x，使得 $a \preceq x$，$a \neq x$，则称 a 是 S 的一个**极大元**.

例 3.6. 集合 $S = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$ 的极大元为 $\{2\}, \{2, 3\}$

定理 3.5. 如果偏序集 $(S, \preceq)$ 中任何全序子集在 S 中都有上界，则 S 中一定存在极大元.

有以上的预备知识就能够证明以下定理.

定理 3.6. 每个非零的 Hilbert 空间都有正交基.

定理 3.7. 若 H 是可分的 Hilbert 空间（H 有一个可数的稠密子集），则 H 有一个可数的正交基.

最后讲一下投影定理，合理的动机不多，主要是在后面的学习要频繁的使用到定理以及相关概念，在几何学中，对 x 及线性子空间 L，可以找到 L 中的一点 x_0，使得 $x - x_0 \perp L$，且垂足 x_0 恰好是 L 中到 x 距离最近的点. 所以将投影的概念推广到内积空间.

定理 3.8 (投影定理). 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，那么对任何的 $x \in H$，

1. 存在唯一的 $x_0 \in M$，$x_1 \perp M$，使 $x = x_0 + x_1$，这种分解称为**正交分解**;

2. x_0 称为 x 在 M 上的正交投影;

3. 特别的，当 $x \in M$ 时，$x_0 = x$.

由投影定理，我们很快得到正交补的定义

定义 3.8 (正交补). 设 M 是 Hilbert 空间 H 的子集，记 $M^\perp = \{y \in H \mid (y, x) = 0, \forall x \in M\}$，称 $M^\perp$ 为 M 在 H 中的**正交补**.

由正交补的定义可以得到以下公式

命题 3.1. 设 M, N 是 Hilbert 空间 H 的两个闭线性子空间，$M \subset N$，则有以下等式成立

1. $H = M \oplus M^\perp$，$M^\perp = H \ominus M$;

2. $N \ominus M = N \cap M^\perp$，$N = M \oplus (N \ominus M)$;

推论 3.9. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，而且 $M \neq H$，那么 $M^\perp$ 中有非零元素.

推论 3.10. 设 H 是 Hilbert 空间，$M \subset H$，那么 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$. 特别的，$M^\perp = \{0\}$ 的充要条件是 M 在 H 中稠密.

4 Lusin 定理的重新表述，可分空间，稠密集和疏朗集，Baire 纲定理的应用，列紧性与紧集

定义2.5已经给出稠密的定义，这里给出几个例子.

例 4.1. $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的稠密子集.

例 4.2. 对直线上的有界闭区间 $[a,b]$ 及 $(1 \leq p < \infty)$，$L^p[a,b]$ 中的简单函数全体、阶梯函数全体，$C_c^\infty(a,b)$，$C[a,b]$ 以及多项式全体 P 均是 $L^p[a,b]$ 的稠密子集.

注. 多项式全体 P 是 $L^[a,b]$ 的稠密空间是用 **Weierstrass 第一逼近定理**证明，这里略去定理，因为准备复习到那了.

稠密集的好处在于能够先对某个集合中的稠密的点集证明相关的结论，然后再利用稠密性过渡到该集合，所以 Lusin 定理也可以进行改述，这里列出 Lusin 定理的三种不同的表述方式.

定理 4.1 (Lusin 定理)**.** Lusin 定理的三种不同的表述方式如下：

1. 设 E 是有限测度集，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$，使得
   (a) $m(E - F_\varepsilon) < \varepsilon$；
   (b) $f(x)$ 是 F_ε 上的连续函数;
2. 设 $f \in L^p([a,b])(1 \leq p \leq +\infty)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 上的连续函数 φ，使得
$$\rho(f,\varphi) = \|f - \varphi\|_p < \varepsilon;$$
3. $C([a,b])$ 在 $L^p([a,b])$ 中稠密.

使得空间稠密的最小点集可能是可数集，这里引出可分空间的概念.

定义 4.1 (可分空间)**.** 设 X 是距离空间，若有 X 的可数的最小点集使得其在 X 稠密，则称 X 是**可分距离空间**，简称**可分空间**.

例 4.3. $C[a,b]$ 和 $L^p[a,b]$ 均是可分空间.

例 4.4. l^p 空间，当 $1 \leq p < \infty$ 时是可分空间，当 $p = \infty$ 时是不可分空间.

证明. 注意集合 $A = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_1 = 0, 1\}$ 是 l^∞ 的子集，它是不可数的. □

与稠密集相对的概念就是疏朗集.

定义 4.2 (疏朗集)**.** 设 X 是距离空间，$M \subseteq X$，若 X 的任意非空开集均有开邻域不含 M 中的点，则称 M 是**疏朗集**或**无处稠密集**.

以是是疏朗集的几个等价定义，考试的时候可以直接拿来用.

命题 4.1. 以下陈述相互等价.

1. A 是无处稠密集；

2. $\overline{A}$ 不包含任何非空开区间；

3. $\overline{A}$ 是无处稠密集；

4. $\overline{A}$ 的余集 $\overline{A}^{\complement}$ 是稠密集，即任意点的邻域都含有 $\overline{A}^{\complement}$ 中的点.

接下来介绍本学期最重要的定理的引理——Baire 纲定理，这个引理可以用于证明本科泛函分析最重要的四个定理的两个定理：**开映射定理**和**共鸣定理**. 在此先介绍纲集的概念.

定义 4.3 (第一纲集、第二纲集)**.** 距离空间中的点集 M 若能表示成至多可数个疏朗集的并，则称 M 为**第一纲集**. 否则则成为**第二纲集**.

定理 4.2 (Baire 纲定理)**.** 完备距离空间是第二纲集.

证明. 反证法，设 X 为第一纲集，则存在可数个疏朗集 $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$，任取 $x\in X$，作开球 $S(x,1)$，由 M_1 是疏朗集可知存在闭球 $\overline{S}(x_1,\varepsilon_1)\subset S(x,1)$ 使得 $M_1\cap\overline{S}(x_1,\varepsilon_1)=\emptyset$，对 M_2 也有同样的操作，有闭球 $\overline{S}(x_2,\varepsilon_2)\subset\overline{S}(x_1,\varepsilon_1)$，使得 $M_2\cap\overline{S}(x_2,\varepsilon_2)=\emptyset$，不妨设 $\varepsilon_2<\dfrac{1}{2}$，继续以此类推可得

$$\overline{S}(x_1,\varepsilon_1)\supset\overline{S}(x_2,\varepsilon_2)\supset\cdots\supset\overline{S}(x_k,\varepsilon_k)\supset\cdots,$$

且 $0<\varepsilon_k<\dfrac{1}{k}$，由闭球套定理可得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{S}(x_k,\varepsilon_k)=\{x_0\}$ 是单点集，但由于 $\overline{S}(x_k,\varepsilon_k)\cap M_k=\emptyset$，所以 $x_0\notin M_k(k=1,2,\cdots)$，从而 $x_0\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$，于是矛盾，定理成立. □

列紧集和紧集

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$，每个有界的无穷点必有聚点，但是在一般的距离空间中不一定成立，比如 l^{∞} 中的点集 $A=\{\varepsilon_n=\{x_i^{(n)}\}|x_i^{(n)}=1(i=n)\text{或}0(i\neq n)\}$. 由此引出以下概念.

定义 4.4. 设 M 是距离空间 X 的点集，

1. 若 M 中任何序列都有收敛子列（该子列的极限未必在 M 中），则称 M 为**列紧集**;

2. 列紧的闭集称为**自列紧集**;

3. M 中任何点列都有在 X 中收敛的子列，就称 A 是 X 中的**相对列紧集**.

注. 距离空间中闭的相对列紧集称为列紧集，但本文不讨论有关相对列紧集的性质.

可以证明若 X 是线性赋范空间，则 $(X)_1=\{x\in X|\|x\|\leq 1\}$ 是列紧当且仅当 $\dim X<\infty$，为此先证明 Riesz 引理.

定理 4.3 (Riesz 引理)**.** 设 M 是线性赋范空间 X 的子空间，且 $M\neq X$，则对任意正数 $\varepsilon<1$，存在 $x_\varepsilon\in X$ 使得 $\|x_\varepsilon\|=1$，且

$$\rho(x_\varepsilon,M):=\inf_{x\in M}\|x-x_\varepsilon\|\geq 1-\varepsilon.$$

注. 课本 P24 给出了 $\dim X=\infty$ 的证明可以去看看.

与列紧性密切相关的概念是完全有界性，首先引出 ε 网的概念.

定义 4.5 (ε 网). 设 M, N 是距离空间 (X,ρ) 中的集合，$\varepsilon \in \mathbb{N}_{>0}$，若对 M 中任意一点 x，存在 N 中的点 x' 使得 $\rho(x,x') < \varepsilon$ 则称 N 是 M 的 ε **网**.

定义 4.6 (完全有界集). 设 M 是距离空间 X 的集合，若对任意 $\varepsilon > 0$，总存在 X 中的有限点集构成的 ε 网，则称 M 为**完全有界集**.

例 4.5. 区间 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的完全有界集.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $N \in \mathbb{N}_{>0}$，当 $\dfrac{b-a}{N} < \varepsilon$ 时，令 $A_N = \left\{ \dfrac{i}{N}(b-a) + a \middle| i = 0, 1, 2, \cdots, N \right\}$，则 A_N 是有限集且构成 $[a,b]$ 的 ε 网. □

定理 4.4 (Hausdorff). 距离空间 (X,ρ) 中的任一列紧集必是完全有界集，反之 (X,ρ) 是完备距离空间，则 X 的任一完全有界集必是列紧集.

注. 完备性条件是不能去掉的，反例见王书 P57.

定理 4.5. 距离空间中任一完全有界集都是可分的.

定义 4.7 (紧集). 设 M 是距离空间 X 的点集，若 M 的任意开覆盖都有有限子覆盖，则称 M 是**紧集**.

同样的，在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 成立的有限覆盖定理在一般的距离空间不一定成立，例子同上. 那什么样的集合是紧集，从而符合有限覆盖定理呢？下面的定理给出了答案.

定理 4.6. 设 M 是距离空间 X 的点集，则 M 是紧集当且仅当它是自列紧集.

如何判断一个集合是不是紧集，可以使用**对角线法**.

定义 4.8 (等度连续函数). 设 $\mathcal{A}$ 是 $C([a,b])$ 中的有界集，且对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$，只要 $|x_1 - x_2| < \delta$，就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \ (\forall f \in \mathcal{A}),$$

满足上述条件的集合称为**等度连续函数族**.

注. 其中 δ 不依赖于 $\mathcal{A}$ 中个别的 f.

注. " 等度" 表示族 $\mathcal{A}$ 中的各个函数的连续程度是同等的.

注. $\mathcal{A}$ 为列紧集的条件是很有必要的.（P29，例 5）.

因为在有限维空间中完全有界和有界性是一致的，所以对于完备空间完全有界集的判断总是设法将问题引导到有限维的 Euclid 空间. 这样就可以通过定理4.4得到空间列紧.

定理 4.7 (Arzelà–Ascoli). 设 X 是距离空间，$\Omega \subset X$ 是紧集，$\mathcal{A}$ 是 $C(\Omega) = \{f | f\text{是}\Omega\text{到}\mathbb{C}\text{的连续映射}\}$ 的子集，则 $\mathcal{A}$ 列紧当且仅当

1. $\mathcal{A}$ 是一致有界的，即存在常数 $C > 0$，使得对任意的 $f \in \mathcal{A}$，有

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leq C;$$

2. $\mathcal{A}$ 是等度连续的.

注. 这部分内容的重点是知道常见空间是列紧集的充要条件（不需要懂证明），这里我们在 §5 给出.

5 复习：常见空间的性质，常见空间是列紧集的充要条件

本节对第一章常见的空间进行总结，并给出他们的证明.

	$\mathbb{R}^n$ 空间	$C[a,b]$	$L^p(1\leq p<\infty)$	L^∞	$l^p(1\leq p<\infty)$	l^∞
线性距离空间	✓	✓	✓	✓	✓	✓
线性赋范空间	✓	✓	✓	✓	✓	✓
内积空间	✓		（仅 $p=2$ 时）		（仅 $p=2$ 时）	
完备	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Fréchet 空间	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Banach 空间	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Hilbert 空间	✓		（仅 $p=2$ 时）		（仅 $p=2$ 时）	
可分空间	✓	✓	✓		✓	

这里还是给出各种空间的定义，因为 L^∞ 空间和 l^∞ 空间还挺少见定义但是用的多.

1. L^p 空间：$\|f-g\|_p:=\rho(f,g)=\left[\int_E|f-g|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$
2. L^∞ 空间：$\|f-g\|_\infty:=\rho(f,g)=\inf\limits_{m(E_0)=0}\sup\limits_{x\in E-E_0}|f(x)-g(x)|$;
3. l^p 空间：$l^p=\left\{x:x=(x_1.x_2,\cdots),\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\leq\infty\right\}(1\leq p<\infty)$;
4. l^∞ 空间：$\|x_n\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$.

接下里是以上空间完备性的证明.

例 5.1. $C[a,b]$ 是完备的度量空间.

证明. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $C[a,b]$ 中的基本点列，即存在任何正数 ε，存在 $N>0$，使得当 $n,m\geq N$ 时

$$d(f_n,f_m)=\max_{a\leq t\leq b}|f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon$$

从而，对于任何 $x\in[a,b]$，只要 $n,m\geq N$，就有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$，所以 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

令 $m\to\infty$，可得当 $n\geq N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon\ (\forall x\in[a,b])$，这说明 f 是 f_n 的一致收敛极限，从而 $f\in C[a,b]$，并且 $d(f_n,f)\to 0$. □

例 5.2. l^p 空间是完备的.

证明. 令 $1\leq p<\infty$，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p$，定义

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

设 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)},\cdots)$ 是 l^p 中一个基本点列，由于

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(k)}|\leq\|x_m-x_k\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以当 $\{x_m\}$ 是 l^p 中的基本点列，则对任意 i，$\{x_i^{(m)}\}$ 是基本点列. 由数列的 Cauchy 收敛准则，$x_i^{(0)} = \lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)}$，记 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \cdots)$.

因为 $\{x_m\}$ 是 l^p 中的基本点列，所以对任何 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $m, k \geq N$ 时，

$$\|x_m - x_k\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

令 $m \to \infty$，由 $x_j^{(0)}$ 的定义和 Fatou 引理可得

$$\|x_0 - x_k\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \liminf_{m\to\infty} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\liminf_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

从而 $x_0 = x_k - (x_k - x_0) \in l^p$. 同时说明 $\{x_m\}$ 在 l^p 中收敛于 x_0，从而 l^p 时完备的. $\square$

接下来补充 $C[a,b]$ 空间，l^p 空间，$L^p[a,b]$ 空间，$L^p(\mathbb{R})$ 空间中的点集是列紧集的条件.

定理 5.1 (Arzelà-Ascoli). $C[a,b]$ 的子集 A 是相对列紧集的充要条件是 A 为有界的、等度连续的函数.

定理 5.2 (Arzelà-Ascoli). 对 $1 \leq p \leq \infty$，空间 l^p 中的集 A 成为相对列紧集的充要条件是 A 为有界集且对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对一切 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in A$，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon$$

定理 5.3 (Kolmogorov-Riesz-Fréchet). 空间 $L^p(\mathbb{R})$ 中的集 A 是完全有界集的充要条件是

1. A 为有界集；
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $M \in \mathbb{N}^+$，使得对于任意的 $f \in A$，都有

$$\int_{|x|>M} |f(x)|^p \mathrm{d}m(x) < \varepsilon^p;$$

3. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对于任意的 $f \in A$，当 $|h| < \delta$ 时，一定有

$$\|f(\cdot, +h) = f(\cdot)\|_p \leq \varepsilon.$$

6 有界线性算子，算子空间，算子的可逆性，对偶空间的定义，Hilbert 空间上连续线性泛函

泛函分析主要研究的是无限维的线性空间及其线性映射，线性赋范空间上的线性算子是线性泛函分析主要的研究对象.

定义 6.1. 设 X, Y 是 $\mathbb{C}$ 上的线性赋范空间，T 是从 X 到 Y 的映射，则

1. 若对任意的 $x, y \in X$ 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，有 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$，则称 T 是 X 到 Y 的**线性算子**;
2. 若存在常数 $M>0$，使得对任意下 $x \in X$，有 $\|Tx\|_Y = M\|x\|_X$，则称 T 是 X 到 Y 的**有界线性算子**;
3. $\|T\| = \inf\{M \mid \|Tx\|_Y = M\|x\|_X, \forall x \in X\}$，则称 $\|T\|$ 为 T 的**范数**.

接下来一并给出一些研究线性映射时顺便得出的一些定义

定义 6.2. 设 X, Y 为线性赋范空间，T 是从 X 到 Y 的有界线性算子，则

1. 称 $D = X = D(T)$ 是 T 的**定义域**;
2. 称集合 $R(T) = \{Tx \mid x \in X\}$ 为 T 的**值域**;
3. 若 $R(T) = Y$，则称 T 是**满射**;
4. 若对任意 $x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$ 就有 $Tx_1 \neq Tx_2$，则称 T 是**单射**.

有限维赋范空间中的线性算子是连续算子，那么无限维呢？给出如下定理

定理 6.1. 设 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间，$T: X \to Y$ 是线性映射, 则下列条件等价

1. T 是连续映射;
2. T 在 0 点处连续;
3. 存在 $M>0$，使得 $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

线性映射下的算子都是有界的吗？不一定，下面给出反例.

例 6.1. 给出正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，$T: e_n \to ne_n$，则 $Te_n = ne_n$，但 $\sup \|Te_n\| = +\infty$.

不难证明有界线性算子有以下结论，其几何意义如下:

推论 6.2.

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\|$$

1. $T = I$（单位算子）时，$\|I\| = 1$;
2. $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ 为 T 在 x 方向上的伸张系数;
3. $\|T\|$ 的几何意义是一切方向伸张系数的上确界.

如何求一个算子范数的值呢？这里有必要给出几个例子.

例 6.2. 对任意的 $f \in L^1[a,b]$，作

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

1. 当算子 $T : L^1[a,b] \mapsto C[a,b]$ 时，$\|T\| = 1$;
2. 当算子 $T : L^1[a,b] \mapsto L^1[a,b]$ 时，$\|T\| = b - a$;

例 6.3. 设 $X = L^1[a,b]$，取 $x \in L^\infty[a,b]$，作 $X \to X$ 的线性算子如下：

$$M_x : \ f(t) \mapsto x(t)f(t), \ \ \forall f \in L^1[a,b].$$

证明 M_x 是线性算子、有界算子且 $\|M_x\| = \|x\|_\infty$.

注. 证明参考王书 P69-P71.

不难看出线性赋范空间 X 到 Y 的两个有界线性算子的线性组合仍然是有界线性算子，我们定义从 X 到 Y 的所有有界线性算子构成的集合是一个线性空间，记为 $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

命题 6.1. 设 X 和 Y 均为线性赋范空间，$T,S \in \mathrm{Hom}(X,Y)$，$\alpha$ 为常数，则

1. $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$;
2. $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$;
3. $\|T\| = 0 \Longleftrightarrow T = 0$.

定理 6.3. 设 X 是线性赋范空间，Y 是 Banach 空间，则 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

若 $X = Y$，则记 $\mathrm{Hom}(X,X) = \mathrm{End}(X)$.

定义 6.3. 对任意 $T,S \in \mathrm{End}(X), x \in X$，定义如下:

1. 定义 $(TS)x = T(Sx)$ 为 $\mathrm{End}(X)$ 上的两个元的“乘法”运算；
2. $TS \in \mathrm{End}(X)$，且有 $\|TS\| = \|T\|\|S\|$;
3. 定义 $T^n = T^{n-1} \cdot T = T^{n-2} \cdot T \cdot T = \cdots = T \cdot T \cdot \cdots \cdot T$，即 T 与自身的乘积为**幂**;
4. 称满足 $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ 的 Banach 空间为 **Banach 代数**，即 $\mathrm{End}(X)$ 是一个 Banach 代数.

Banach 代数在量子力学中有着许多的作用，不只是在数学理论中有用. 最后一部分讲一下算子的可逆性，在集合论中讲过映射的可逆性，那么在线性赋范空间呢？

定义 6.4. 设 X,Y 为线性赋范空间，T 是从 X 到 Y 的有界线性算子，则

1. 若 T 是单射，则可定义映射 $T^{-1} : R(T) \to X$ 为 $T^{-1}y = x$（若 $Tx = y$），称 T^{-1} 为 T 的**逆算子**；
2. 若 T^{-1} 有界时，称 T 时**有界可逆（可逆）**的;
3. 称 X 的子空间 $\ker T := T^{-1}(0) = \{x \in X \ : \ Tx = 0\}$ 为**核（零空间）**.

研究的动机是微分方程、积分方程等等都能够化成 $Tx = f$ 的形式，但是当 f 发生变化的时候，$T^{-1}f$ 关于 f 是否连续？又因为由定理6.1可得问题转化为 $T^{-1}f$ 是否有界，于是有以下的判别定理

定理 6.4. 设 X, Y 是赋范线性空间，T 是从 X 到 Y 的线性算子，若线性算子 $T: X \to R(T)$，则 T 有有界逆当且仅当存在常数 $m > 0$，使得对任意的 $x \in X$，有 $\|Tx\| \geq m\|x\|$.

定理 6.5. 设 X 是 Banach 空间，$T \in \mathrm{End}(X)$ 且 $\|T\| < 1$，则 $I - T$ 有有界逆并且

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right\| =: \|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$$

其中约定 $T^0 = I$ 为恒等算子.

定理 6.6. 设 X 是 Banach 空间，对 $\mathrm{End}(X)$ 中的有界可逆算子 T，其逆 T^{-1} 是 T 的连续函数，. 记 $\mathcal{G}$ 为 $\mathrm{End}(X)$ 中有界可逆元的全体，则 $\mathcal{G}$ 是开集.

如果一个线性算子的值域在复数域中，我们称这样的算子为线性泛函，具体定义如下.

定义 6.5.

1. 若 f 是线性空间 X 到复平面 $\mathbb{C}$ 的线性算子，则称 f 是 X 上的**线性泛函**;
2. 若 X 是线性赋范空间，f 是 X 到 $\mathbb{C}$ 的有界线性算子，即 $f(x) \leq M\|x\|$（对任意的 $x \in X$），则称 f 为 X 上的**有界线性泛函**;
3. X 上的有界线性泛函全体为记作 X^*，定义 X^* 为 X 的**对偶空间**;
4. 由域 $\mathbb{F}$ 的完备性可知 X^* 是一个 Banach 空间;
5. 对于 $f \in X^*$ 有
$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|<1} |f(x)|$$

对偶空间在算子理论中起到非常重要的作用，在某种意义下充当坐标的角色. 接下来补充一些线性泛函的内容，线性泛函是最简单的一种线性算子，有许多特殊的性质，一个重要的角度是从几何角度进行分析.

例 6.4. $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i (\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$，其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$，则 $\ker f = \left\{x : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\right\}$，即 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面.

例 6.5. $C[0,1]$ 上的线性泛函 $f(\phi) = \int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t (\phi \in C[0,1])$，它的核为

$$\ker f = \left\{\phi \in C[0,1] \int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$$

线性泛函有许多都由它的核决定.

定义 6.6. 设 f 是线性空间 V 的非零线性泛函，c 为给定常数，则定义

1. 集合 $M_c = \{x : f(x) = c, x \in V\}$ 称为 V 的一个**超平面**.
2. 它决定的半空间 $\{x : f(x) \geq c\}$ 与 $\{x : f(x) \leq c\}$ 称为**闭半平面**；
3. $\{x : f(x) > c\}$ 与 $\{x : f(x) < c\}$ 称为**开半平面**.

注. 任取 $y_0 \in V$ 使得 $f(y_0)=c$，则 $M_c = y_0 + \ker f$.

定理 6.7. 设 f 为线性赋范空间 X 上的线性泛函，则 f 有界的充要条件是 $\ker f$ 是闭的.

王书 2.2 节讲了 Hilbert 空间、l^p 空间上的连续线性泛函以及 Hermite 泛函，因为我觉得还是有必要知道线性泛函的应用，所有在这里详细介绍以下 Hilbert 空间上连续线性泛函，剩下的可以参考王书 P77-P81.

为了应用泛函分析到具体的场合，如果能了解具体空间上连续线性泛函的一般形式，即具体了解一个线性空间 X 的对偶空间 X^* 中的每个元素是重要的. 为此，首先引入同构的概念.

定义 6.7. 设 X, Y 是两个线性赋范空间，U 是 X 到 Y 的映射

1. 如果对一切 $x \in X$，有 $\|Ux\| = \|x\|$，那么称 U 是 X 到 Y 的**保范算子**;
2. 如果 U 是保范的、线性的、能实现 X 到 Y 一一对应，则称 U 是 X 到 Y 的**（保范）同构映射**;
3. 若空间 X, Y 之间存在一个从 X 到 Y 的同构映射，就称 X 和 Y **同构**，记为 $X \cong Y$
4. 如果 $U : X \mapsto Y$ 是从 X 到 Y 的一个同构，则将 x 与 Ux **同一化**，即把 X 与 Y 同一化而不加以区别.

如何研究 X^* 这个线性赋范空间能与怎么样的空间同构？现在 X 中取适量元素集 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}$ 中的元素在线性组合 X 中稠密，之后用 f 在 $\mathcal{F}$ 上的形式表现出来，利用 $\mathcal{F}$ 中元素的线性组合 X 中的稠密性以及 f 的连续性，从而把 f 在 X 上的形式表示出来.

定理 6.8 (F.Riesz)**.** 设 H 是 Hilbert 空间，F 是 H 上的连续线性泛函，以下命题相互为逆命题：

1. 任意固定 $y \in H$，在 H 中的泛函 $F_y(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in H$，则 $F_y \in H^*$ 且 $\|F_y\| = \|y\|$;
2. 存在唯一的向量 $y \in H$，使得 $F(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in H$，并且 $\|F\| = \|y\|$.

注. 我们称 F_y 是向量 y 导出的有界线性泛函.

证明. 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得，由 $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$，并且当 $x = y$ 时等号成立，故 $F_y \in H^*$ 且 $\|F_y\| = \|y\|$. 它的核为 $\ker F_y = \{y\}^\perp$. 故 1 成立.

如果 $F = 0$，则只需要取 $y = 0$，2 显然成立，所有不妨设 $F \ne 0$，此时 $\ker F$ 是 H 的真闭线性子空间，即存在非零向量 $w \in (\ker F)^\perp$，使得 $F(w) \ne 0$.

为了方便计算，不妨令 $z_0 = w/F(w)$，由于 F 是线性的，所以

$$F(z_0) = F\left(\frac{w}{F(w)}\right) = \frac{F(w)}{F(w)} = 1$$

所以由投影定理可得，存在 $z_0 \in H$，使得 $z_0 \perp \ker F$，$F(z_0) = 1$，于是对于任意的 $x \in H$，由于

$$F(x - F(x)z_0) = F(x) - F(x)F(z_0) = F(x) - F(x)\cdot 1 = 0$$

所以 $x - F(x)z_0 \in \ker F$，于是得到

$$\langle x - F(x)z_0, z_0\rangle = \langle x, z_0\rangle - F(x)\langle z_0, z_0\rangle = 0 \Longleftrightarrow F(x) = \frac{\langle x, z_0\rangle}{\langle z_0, z_0\rangle} = \frac{\langle x, z_0\rangle}{\|z_0\|^2} \Longleftrightarrow F(x) = \langle x, y\rangle, \ \left(\text{其中}y = \frac{z_0}{\|z_0\|}\right)$$

唯一性显然，故 2 成立. □

定理 6.9. Hilbert 空间 H 到它的对偶空间 H^* 是同一化的.

7 Hahn-Banach 延拓定理，Hardy 空间简介，Hahn-Banach 延拓定理的几何形式

是否任一线性赋范空间都有非零的有界线性泛函 X^*？如果是，则 X^* 上又有多少的有界线性泛函？本节探讨 Hahn 在 1927 年对一般的 Banach 空间的情形解决了线性泛函的延拓问题的相关定理.

定义 7.1 (半范). **半范**与范数的区别在于由 $p(x)=0$ 未必推出 $x=0$.

例 7.1. $\rho(x,y)=\sqrt{ax^2+by^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}$，其中 $a,b\geq 0$，则 $\rho(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的半范数.

定义 7.2 (延拓). 设 X 是实线性空间，$X_0\subset X$ 是 X 上的实线性子空间，f_0 是子空间 X_0 上的实线性泛函，如果 $f(x)=f_0(x)(\forall x\in X_0)$，则在全空间 X 上定义的线性泛函 f 叫做 f_0 的**延拓**.

定理 7.1. (Banach 延拓定理) 设 X 是实线性空间，p 是 X 上的半范，$X_0\subset X$ 是 X 上的实线性子空间，f_0 是 X 上的实线性泛函并满足 $f_0(x)\leq p(x)(\forall x\in X_0)$，则存在 X 上的实线性泛函 f，满足：

1. $f(x)\leq p(x)$，$\forall x\in X$;
2. $f(x)=f_0(x)$，$\forall x\in X_0$.

定理 7.2. (Banach 延拓定理（复数版）) 设 X 是复线性空间，p 是 X 上的半范，$X_0\subset X$ 是 X 上的线性子空间，f_0 是 X 上的线性泛函并满足 $|f_0(x)|\leq p(x)(\forall x\in X_0)$，则存在 X 上的实线性泛函 f，满足：

1. $|f(x)|\leq p(x)$，$\forall x\in X$;
2. $f(x)=f_0(x)$，$\forall x\in X_0$.

定理 7.3 (Hahn-Banach 延拓定理). 设线性赋范空间 $X_0\subset X$，f 是 X_0 上的连续线性泛函，则存在 X 上的连续线性泛函 $F(x)$，使得

1. $F|_{X_0}=f$;
2. $\|F\|=\|f_0\|_{X_0}$（$\|f_0\|_{X_0}$ 表示 f 作为 X_0 上连续线性泛函的范数）.

由 Hahn-Banach 定理可以解决最开始提出的几个问题

推论 7.4. 设 X 是线性赋范空间，则对任给非零的 $x_0\in X$，存在 $f\in X^*$ 满足

1. $\|f\|=1$;
2. $f(x_0)=\|x_0\|=\sup\limits_{\|f\|\leq 1,f\in X^*}|f(x_0)|$.

证明. 将 x_0 张成的一维线性空间记作 $Y=\mathbb{F}x_0$，定义 Y 上的泛函为 $f_0(ax_0)=a\|x_0\|$, $\forall a\in\mathbb{F}$，则

$$\|f_0\|=\sup_{x_0\neq 0}\frac{|f(ax_0)|}{\|ax_0\|}\sup_{x_0\neq 0}\frac{|a\|x_0\||}{a\|x_0\|}=1$$

于是由 Hahn-Banach 延拓定理可得，存在延拓 $f\in X^*$，使得 $\|f\|=\|f_0\|=1$，则 $f(x_0)=f_0(x_0)=\|x_0\|$. □

注. 上述推论说明了无限维的线性赋范空间存在相当多的连续线性泛函，可以使用类似证明单射的方法证明若 $x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，则存在 $f\in X^*$，使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

推论 7.5. 设 X 是线性赋范空间，闭子空间 $X_0\subset X$，$x_0\notin X_0$，则存在 $f\in X^*$ 满足：

1. $f|_{X_0} = 0$;
2. $f(x_0) = 1$;
3. $\|f\| = 1/\mathrm{dist}(x_0, X_0) = 1/\inf\limits_{x \in X_0} \|x_0 - x\|$.

注. 其中 2,3 两条可以改为，证明与上述推论完全类似

1. $f(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, X_0)$;
2. $\|f\| = 1$.

由推论7.5可立即得到

推论 7.6. 设 X_0 是线性赋范空间 X 的线性子空间，则 $x_0 \in \overline{X_0}$ 当且仅当 $f \in X^*$，由 $f(x) = 0(\forall x \in X_0)$ 可以推得 $f(x_0) = 0$.

证明. 必要性是显然的，充分性使用反证法，如果 $x \notin \overline{X_0}$，则由推论7.5可得，存在 $f \in X^*$，$f(\overline{X_0}) = 0$，但 $f(x) \neq 0$，这与条件矛盾，故假设不成立，即 $x \in \overline{X_0}$. □

推论 7.7. 设 M 为线性赋范空间 X 的子集，$x_0 \in X$，则 x_0 可以用 M 中元的线性组合逼近当且仅当对 X 上任何连续线性映射 f，由 $f(x_0) = 0(\forall x \in M)$ 可以推得 $f(x_0) = 0$.

定理 7.8. 设 M 为 Banach 空间 X 的有限维子空间，则存在 X 的子空间 N，使 $X = M + N$.

注. 证明中下面展示的式子的作用是为了证明 P 是投影，因为

$$f_i(P(x)) = f_i\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x)e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f_i(f_j(x)e_j) \overset{\text{正齐性}}{=} \sum_{j=1}^{n} f_j(x)f_i(e_j) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\delta_{ij} = f_i(x)$$

由此可以证明，对任意的 $x \in X$，有

$$P^2(x) = P(P(x)) = \sum_{j=1}^{n} f_j(P(x))e_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)e_j = P(x)$$

注. 当 M 为无限维子空间时，上述定理不一定正确. 下面详细介绍以下两个例子.

命题 7.1. Hilbert 空间的任何（包括无限维）子空间必有正交补.

命题 7.2. 设 M 为 Hardy 空间 X 的无限维子空间，则不存在 X 的子空间 N，使 $X = M + N$.

这里简单介绍以下 Hardy 空间，常见的 L^p 空间时复平面内单位圆周上相对于弧长测度的 L^p 空间，具体来说记 $\mathbb{T}$ 为复平面内的单位圆周，$\mathrm{d}\theta$ 为 $\mathbb{T}$ 上的弧长长度，则对任意的 $p > 0$，定义

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L(\mathbb{T}) \;\middle|\; \int_0^{2\pi} |f(e^{\mathrm{i}\theta})|^p \mathrm{d}\theta < \infty \right\}$$

其中 $L^p(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 上关于测度 $\mathrm{d}\theta$ 的可测函数全体. 若在 $L^p(\mathbb{T})$ 中引入范数，则有

$$\|f\|_p = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{\mathrm{i}\theta})|^p \mathrm{d}\theta\right]^{\frac{1}{p}} \quad (f \in L^p(\mathbb{T}))$$

则当 $1 \le p < \infty$ 时，$L^p(\mathbb{T})$ 构成一个 Banach 空间. 如何将 $L^p(\mathbb{T})$ 的空间结构和解析函数的结构相结合？因为 $L^p(\mathbb{T})$ 中的每个函数都有形式的 Fourier 级数：

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad f \in L^p(\mathbb{T}), \quad p \ge 1$$

单位圆盘内的解析函数有内部一致的级数展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f\text{在开单位圆盘}D\text{内解析}.$$

定义 7.3 (Hardy 空间). 由上述两个级数可以定义解析函数空间 $H^p(\mathbb{T})$：

$$H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) \middle| f\text{的 Fourier 系数具有形式} f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right\}$$

称 $H^p(\mathbb{T})$ 为 $\mathbb{T}$ 上的 **Hardy 空间**，它是一个 Banach 空间.

所有由此可以得出出命题7.2的证明. 讲完了 Hahn-Banach 延拓定理的代数形式之后，因为在 §6中讲过线性空间上的线性泛函有着明显的几何背景，于是接下来我们研究 Hahn-Banach 空间的几何形式.

定义 7.4 (凸集). 设 V 是线性空间，M 是 V 的一个子集，如果对任意的 $x, y \in M$，$\alpha \in [0,1]$，有 $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$，就称 M 是一个**凸集**.

命题 7.3. 线性空间 V 中任意多个凸集的交仍为凸集.

为了记号方便，这里定义超平面为 $f^{-1}(c) := \{x \in X : f(x) = c\}$，其中 f 是 Banach 空间 X 上的线性泛函. 这里的定义和定义6.6有些不一样. 研究 Hahn-Banach 延拓定理的几何形式的动机是三维空间中平面中任意两个非空的凸集都可以用平面将其分开，那么在 Banach 空间中的超平面是否也具有同样的性质？

定义 7.5. 设 $f^{-1}(r)$ 是 Banach 空间 X 的一个超平面，$M \subset X$，如果对任意的 $x \in M$，恒有 $f(x) \ge r$（或 $\le r$），则说 M **在** $f^{-1}(r)$ **的一侧**.

定义 7.6. 设 $f \in X^*$，$X_1, X_2 \subset X$，若有 $r \in \mathbb{R}$，使得

1. $f(x) \ge r$ $(\forall x \in X_1)$ 和 $f(x) \le r$ $(\forall x \in X_2)$，则说超平面 $f^{-1}(r)$ **分离** X_1 与 X_2;
2. 1. 两式至少有一个为严格不等式，则说超平面 $f^{-1}(r)$ **严格分离** X_1 与 X_2;

定理 7.9 (Hahn-Banach 延拓定理的几何形式). 设 X_0 是实线性赋范空间 X 中以 0 为内点的凸子集，$x_0 \notin X_0$，则存在实值 $f \in X^*$ 以及 $r \in \mathbb{R}$，使得超平面 $f^{-1}(r)$ 分离 x_0 与 X_0.

定义 7.7. 这里给出证明中的 Minkowski 泛函的定义

1. 设 $p(x)$ 是线性空间 X 上的半范数，$X_0 = \{x \in X : p(x) \le 1\}$，当对任何 $x \in X$，总存在 $\lambda > 0$，使得 $\lambda^{-1} x \in X_0$，则称 M 是**吸收**的;
2. 若 X_0 是线性赋范空间 X 中吸收的凸集，则对任意的 $x \in X$，定义

$$p(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in X_0 \right\}$$

则称 $p(x)$ 为 X_0 的 **Minkowski 泛函**.

例 7.2. 设 $M = B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le r\}$，则

$$\frac{B(0,r)}{\lambda} = \left\{\frac{x}{\lambda} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{\|x\|}{\lambda} \le r\right\} \Longrightarrow p(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \;\middle|\; \frac{B(0,r)}{\lambda} \in M\right\} = \frac{\|x\|}{r}.$$

例 7.3. 设 $M = \{x \in l^2 \mid x = (x_1, x_2, \cdots), |x_1| \le 1\}$，则

$$\frac{M}{\lambda} = \left\{\frac{x}{\lambda} \in l^2 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \left(\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{|x_1|}{\lambda} \le 1\right\} \Longrightarrow p(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \;\middle|\; \frac{M}{\lambda} \in M\right\} = \|x_1\|.$$

推论 7.10. 若 X_0 是闭凸集，$x_0 \notin X_0$，则存在超平面严格分离 x_0 与 X_0.

推论 7.11. 设 X 是实线性赋范空间，M 为 X 的闭凸子集且 $0 \in M$，则对任意的 $x_0 \notin M$，存在 $f \in X^*$，使得 $f(x_0) > 1$，且在 M 上有 $f(x) \le 1$.

定理 7.12. 设 X_1, X_2 是线性赋范空间 X 中两个互不相交的非空凸集，且至少有一个内点，则存在 $f \in X^*$ 以及 $r \in \mathbb{R}$，使得超平面 $f^{-1}(r)$ 分离 X_1, X_2，即 $f(x) \le r(\forall x \in X_1)$，$f(x) \ge r(\forall x \in X_2)$.

如何解决一般线性空间的凸集分离问题？首先是 Minkowski 对有限维空间情形证明任何有界凸集在每个边界点必有一个支撑平面，Mazur 将这一情况推广到无限维. 这里需要给出支撑超平面的概念.

定义 7.8. 设 E 是线性赋范空间 X 中的凸集，x_0 是 E 的边界点，若存在超平面 $f^{-1}(r)$，使得 $x_0 \in f^{-1}(r)$，且 E 在 $f^{-1}(r)$ 的一侧，即 $f(x) \le r = f(x_0)$ $(\forall x \in E)$ 或 $f(x) \ge r = f(x_0)$ $(\forall x \in E)$，则称 $f^{-1}(r)$ 为 E 在 x_0 处的**支撑超平面**.

命题 7.4. 设 E 是线性赋范空间 X 中有内点的凸集，$F \subset X$，且 $\overline{E} \cap F = \emptyset$，则存在超平面 $f^{-1}(r)$，使得 $F \subset f^{-1}(r)$ 且 E 在 $f^{-1}(r)$ 的一侧，

命题 7.5. 设 X 是线性赋范空间，$S_r = \{x \in X \mid \|x\| \le r\}$，$x_0 \in X$ 满足 $\|x\| = r$，则 S_r 在 x_0 处有一个支撑超平面.

定理 7.13. 设 X 是线性赋范空间,E 是 X 中含有内点的闭凸集，则在 E 的每个边界点都有一个支撑超平面.

有界线性泛函的一个重要应用是分布理论，名字很熟悉.

8 一致有界原理，Riemann-Stieltjes 积分，逆算子定理，闭图像定理

本节所讲述的定理均为泛函分析在 Banach 空间理论中的重要定理，首先先讲一致有界原理，研究的动机是在不同的数学领域研究中，都会发现一致有界定理的特殊情形，例如在 Fourier 分析中，du Bois-Reymond 发现了连续函数的 Fourier 级数发散的例子[1]

定理 8.1 (du Bois-Reymond). 存在连续函数 $f \in C(X)$，使得 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} W_{K_t}(x)$$

的部分和序列 $\{S_N(f)(x)\}_{N\geq 1}$ 在 $x=0$ 处发散.（其中 $W_{K_t}(x)$ 为若干频率叠加函数）.

还有 Toeplitz 等人的关于级数求和法的结果

定理 8.2 (Toeplitz 求和法). 设 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ 为一个 Toeplitz 二元数列，由设 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为一个收敛数列，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(\in \mathbb{C})$. 若令

$$t_m := \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s_n, \quad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

则数列 $\{t_m\}_{m=0}^{\infty}$ 收敛，并满足 $\lim\limits_{m\to 0} t_m = s$.

在此基础上延伸出的一般定理就是一致有界原理.

定理 8.3 (一致有界原理). 设 X 是 Banach 空间，Y 是线性赋范空间，$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 中的一簇元素，满足

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty \quad (\forall x \in X),$$

则

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty.$$

一致有界原理也叫**共鸣定理**，定理告诉我们有界线性算子簇的逐点有界能够推出一致有界性.

定理 8.4 (Banach-Steinhaus). 设 X, Y 是 Banach 空间，X_0 是 X 的稠密子集，$\{T_n\} \subset \mathrm{Hom}(X,Y)$，$T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$，则对任意 $x \in X$，

$$\lim_{n\to} T_n x = Tx \tag{2}$$

的充要条件是

1. $\{\|T_n\|\}$ 有界;
2. 对任意的 $x \in X_0$，(2) 式成立.

Banach-Steinhaus 定理的一个最直接的应用是在积分的定义上，在这里简要介绍一下 Reimann-Stieltjes 积分[2]，并给出有关定理.

定义 8.1 (有界变差函数). 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，对 $[a,b]$ 的任一分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，

[1] 请自行查阅相关书籍，上述定理可能完全错误，因为我实在不懂这方面的内容.
[2] 参考：于品《数学分析讲义》.

1. 定义

$$V(\Delta,f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

为 f 关于分划 Δ 的**变差**;

2. 若存在常数 M，使得对一切的分划 Δ，都有 $V(\Delta,f)\le M$，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 的**有界变差函数**;

3. 若 Δ 取遍 $[a,b]$ 的所有分划，则称

$$V_a^b(f)=\sup_{\Delta}V(\Delta,f)$$

为 f 在 $[a,b]$ 的**全变差**.

例 8.1. 令 $f=\sin\dfrac{1}{x}$，则 $V(\Delta,f)=+\infty$;

例 8.2. 令 $f\in C[a,b]$ 为有限单调函数，则 $V(\Delta,f)=V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

定义 8.2 (Reimann-Stieltjes 积分)**.** 设有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 和分划 $\Delta: a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$，记 f 在区间 $[a_{i-1},a_i]$ 的上确界和下确界为

$$M_i:=\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]}f(x)\ ,\quad m_i:=\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]}f(x).$$

1. 则定义 **Darboux 上和**、**Darboux 下和**为（为了严谨定义 $V(\Delta,f)=|V'(\Delta,f)|$）

$$\overline{S}_\mu(f;\Delta):=M_i\cdot V'(\Delta,f)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))M_i$$

$$\underline{S}_\mu(f;\Delta):=m_i\cdot V'(\Delta,f)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))m_i;$$

2. 设 $\mu:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是递增函数，定义**上积分**和**下积分**为

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}\mu(x):=\inf_{\Delta}\overline{S}_\mu(f;\Delta)\ \ ,\quad \underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}\mu(x):=\sup_{\Delta}\underline{S}_\mu(f;\Delta);$$

3. 如果上述积分相等，即

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

则称 $f(x)$ **对于** $\mu(x)$ **是 Stieltjes 可积的**，并且讲上述数值记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu(x):=\int_a^b f\mathrm{d}\mu.$$

由上述定义很快的可以给出推论

推论 8.5. 对任意的 $x\in C[0,1]$，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，定义新的分划 $\sigma: 0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}=1$，记

$$f_n(x):=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)})=\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi(t_k^{(n)})-\varphi(t_{k-1}^{(n)})\right)x(t_k^{(n)}),$$

则 $f_n(x)$ 收敛到 $\displaystyle\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$ 当且仅当

1. 存在常数 $M>0$，使得 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|\leq M$;
2. 对任意的多项式 $P(x)$，$x\in P(x)$，有 $f_n\to\displaystyle\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t\ \ (n\to\infty)$.

一般的线性赋范空间上，逆算子未必有界，但又逆算子定理可以知道在 Banach 空间这种情况不会发生.

例 8.3. 设 T 是 $C[a,b]$ 上的积分算子：

$$(T\varphi)(t)=\int_a^t\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

但 T^{-1} 是微分算子 D 不是有界的.

在证明逆算子定理前需要证明开映射定理

定理 8.6 (开映射定理)**.** 设 X,Y 是 Banach 空间，若 $T\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ 是满射，则 T 是开映射，即 T 将 X 中的开集映为 Y 的开集.

定理 8.7 (Banach 逆算子定理)**.** 设 X,Y 是 Banach 空间，若 $T\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ 是既是单射，又是满射，则 $T^{-1}\in\mathrm{Hom}(Y,X)$.

下面给出逆算子定理在范数等价性问题的应用，也是作为证明接下来闭图像定理的引理.

推论 8.8 (范数等价定理)**.** 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数，它们都使 X 成为 Banach 空间，若 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$，则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

处理类似微分算子无界的情形可以通过考察其图像是否具有某种特定性质，这就得到另外一类重要的算子——闭算子.

定义 8.3. 设 X,Y 是线性赋范空间，$X_0\subset X$，线性算子 $T:X_0\to Y$，则

1. X_0 称为 T 的**定义域**，记作 $D(T)$;
2. 称 $X\times Y$ 中的集合 $G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in X_0\}$ 为 T 的**图像**;
3. 若 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭集，则称 T 是**闭算子**;
4. 值域 Y 的闭算子全体用 $C(X,Y)$ 表示.

在这里补充一下连续映射与闭算子的关系

1. 定义域是连续的闭集是闭算子;
2. 求导算子 T 是闭算子，但不是有界算子.（例子证明，王书 P121）

定理 8.9 (闭图像定理)**.** 设 X,Y 均为 Banach 空间，$T\in C(X,Y)$，若 $D(T)=X$，则 $T\in\mathrm{Hom}(X,Y)$.

9 对偶空间的进一步讨论，二次对偶，自反空间，Radon-Nikodým 定理，弱收敛与弱 * 收敛

除了 Hilbert 空间之外，还有 l^p 空间、共轭双线性 Hermite 泛函、$C[a,b]$ 空间上连续线性泛函的研究，并由此可以推出在 Riesz 表示定理.

定理 9.1 (Riesz 表示定理). 设 X 是紧度量空间，对实（复）连续函数空间 $C(X)$ 上的一个连续线性泛函 f，存在 X 上唯一的全有限广义测度（复测度）μ 使得

$$f(x)=\int_X x(t)\mathrm{d}\mu(t),\quad \forall x\in C(X).$$

并且 $\|f\|=|\mu|(X)$，这里 $|\mu|$ 是 μ 的全变差测度.

引入对偶空间有什么好处吗？首先可以利用对偶空间 X^* 来刻画 X 的某种性质，从几何上看，它相当于有限维线性空间的坐标；其次当我们考察空间中的某个子集时，常常要求它具有某种紧性，但在无限维的 Banach 空间中，紧性的要求很强，所以可以利用对偶空间取定义所谓的弱紧性，从而解决问题.

定义 9.1. 对偶空间的几个定义如下

1. $(X^*)^*$ 为 X^* 上的有界线性泛函全体，称为 X 的**二次对偶空间**，记作 $X^{**}:=(X^*)^*$;
2. 对任意的 $x\in X$，$f\in X^*$，记 $x^{**}(f)=f(x)$;
3. 若 $X=X^{**}$，则称 X 是**自反空间**.

接下来详细讲一下上述定义，以定理的形式给出

定理 9.2. 设 X 是线性赋范空间，映射 $J:x\to x^{**}$ 是从 X 到 X^{**} 的保范的线性算子，即

1. $(\alpha x+\beta y)^{**}=\alpha x^{**}+\beta y^{**}$;
2. $\|x^{**}\|=\|x\|$.

证明. 只证 2.,因为由定义9.1可得 $x^{**}(f)=f(x)$,所以可得 x^{**} 定义了一个有界线性泛函,即 $x^{**}\in X^{**}$，又由于 $|x^{**}(f)|\le\|f\|\|x\|$，所以 x^{**} 是有界泛函，且 $\|x^{**}\|\le\|x\|$，称 x^{**} 为 x 生成的，由此得到映射 $J:x\to x^{**}$；

又因为由 Hahn-Banach 定理可得存在 $f_0\in X^*$，使得 $\|f_0\|=1$，且 $|f_0(x)|=\|x\|$，于是

$$\|x^{**}\|\|f_0\|\ge|x^{**}(f_0)|=|f_0(x)|=\|x\|\Longrightarrow\|x^{**}\|\ge\|x\|$$

于是 $\|x^{**}\|=\|x\|$，故 X 可以等距嵌入到 X^{**} 中，在等距同构的意义下可将 X 看作 X^{**} 的子空间. □

定义 9.2. 补充定理9.2出现的几个定义，设 X 是线性赋范空间

1. 称映射 J 称为**典范映射**;
2. 如果 $J:X\mapsto X^{**}$ 是同构，就称 X 是自反的.

注. 实际存在 X，使得 J 不是满射，但仍能满足 $X^{**}\cong X$.

注. 具体来说，我们将 x 与 X^{**} 中的像等同对待，能够在 X 不完备的时候，JX 在 X^{**} 中的闭包就可以自动给出一个 X 的一个完备化.

定理 9.3. 任何有限维线性赋范空间都是自反的.

例 9.1. $\mathbb{R}^n$ 是自反空间，即 $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$.

定理 9.4. 对任意的 $1 < p < \infty$，$(L^p[a,b])^* \cong L^q[a,b]$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

这个定理的证明用到了抽象测度理论的 Radon-Nikodým 定理，这里简单介绍一下[3].

定义 9.3. 测度论中的几个定义

1. 非空集合 X 与其上面的 σ 域 $\mathcal{F}$ 放在一起所组成的 $(X, \mathcal{F})$ 称为**测度空间**;
2. 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个可测空间，从 $\mathcal{F}$ 到 $\hat{\mathbb{R}}$ 的集函数 φ 称为**符号测度**，如果满足
   (a) $\varphi(\emptyset) = 0$;
   (b) 可列可加性：对任何两两不交的 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\} \subset \mathcal{F}$，有
$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

定义 9.4. 设 φ 是测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 的符号测度，则

1. 该符号测度可以表示称定积分的形式，即
$$\varphi(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}; \tag{3}$$
2. 如果存在 a.e. 意义下唯一的可测函数 f 使得 $\varphi(A)$ 成立，则称 f 为 φ 对于 μ 的 **R-N 导数**，记为
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} =: f;$$
3. 设 μ 是测度空间上的测度，如果对任何 $A \in \mathcal{F}$，均有
$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \varphi(A) = 0$$
   则称 ϕ 对 μ **绝对连续**，记作 $\varphi \ll \mu$.

定理 9.5 (Radon-Nikodým)**.** 设 φ 和 μ 分别是 $(X, \mathcal{F})$ 上的符号测度和 σ 有限测度，如果 $\varphi \ll \mu$，则存在 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上 a.e. 意义下唯一的可测函数 f，使得 (3) 式子和
$$\int_X f^- \mathrm{d}\mu < \infty$$
成立；如果 φ 是 σ 有限的，则 f a.e. 有限.

由 Radon-Nikodým 定理可以推出定理9.4所需要的结论

[3]此部分参考：程士宏《测度论与概率论基础》

推论 9.6. 存在可测函数 g，使得 $\mathrm{d}\mu = g\mathrm{d}x$.

接下来是是一些定理的罗列，证明请多多看课本，因为证明挺训练基本功的.

推论 9.7. $(L^1[a,b])^* \cong L^\infty[a,b]$.

定理 9.8. 对任意 $1 < p < \infty$，$L^p[a,b]$ 是自反空间.

定理6.9告诉我们 Hilbert 空间 H 到它的对偶空间是同一化的，由同一化的定义可得 Hilbert 空间是自反空间，于是延续 §6来研究子空间对偶空间.

定理 9.9. Hilbert 空间是自反空间.

在 Hilbert 空间中，由推论3.10可知 $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$，对于线性赋范空间的子空间，这里直接阐述 Banach 空间的情形，我们有以下结果

定义 9.5. 设 X 是 Banach 空间，M 是 X 的子空间，G 是 X^* 的子空间，称

1. 集合 $M^\perp = \{f \in X^* \mid f(x) = 0, \forall x \in M\}$ 为 **M 在 X^* 的零化子**，简称为**后零化子**;
2. 集合 ${}^\perp G = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in G\}$ 为 **G 在 X 的零化子**，简称为**前零化子**.

定理 9.10. 设 X 是 Banach 空间，则

1. 若 M 是 X 的闭子空间，则 ${}^\perp(M^\perp) = M$;
2. 若 X 是自反空间，G 是 X^* 的闭子空间，则 $({}^\perp G)^\perp = G$.

注. 能够找出反例，使得当 X 不是自反空间时，$({}^\perp G)^\perp = G$ 不成立的例子.

定理 9.11. 设 X 是 Banach 空间，若 X^* 可分，则 X 也可分.

定理 9.12. $L^1[a,b]$ 非自反空间.

定理 9.13. 设 X 是 Banach 空间，若 X 是自反空间，则 X 的任何子空间 M 也是自反的.

接下来详细讲一下会在线性赋范空间使用的一些较弱的拓扑，作为最开始动机的延伸.

定义 9.6. 设 X 是 Banach 空间，X^* 是对偶空间，则

1. 称 X 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ **弱收敛**于 X 中的点 x（记作 $x_n \xrightarrow{w} x$）是指：对任意的 $f \in X^*$，$f(x_n)$ 收敛到 $f(x)$;
2. 称 X^* 中的点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ **弱 * 收敛**于 X^* 中的点 f（记作 $f_n \xrightarrow{w^*} f$）是指：对任意的 $x \in X$，$f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$.

命题 9.1. 设 X 是 Banach 空间，$\{x_n\} \subset X$ 是弱收敛序列，则其极限必然唯一.

定理 9.14. 设 X 是 Banach 空间，$x_n \xrightarrow{w} x(n \to \infty)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ 及 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_m}$，使

$$\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_{n_i} - x_0 \right\| < \varepsilon$$

换言之，x_0 是 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的凸组合在范数拓扑意义下的聚点.

在这里我们对上述定义做一些总结

1. 当 X 是自反空间时，弱收敛 $(X^*, w) \Longleftrightarrow$ 弱 * 收敛 (X^*, w^*);
2. 在对偶空间 X^* 上，范数收敛 $(X^*, \|\cdot\|) \Longrightarrow$ 弱收敛 $(X^*, w) \Longrightarrow$ 弱 * 收敛 (X^*, w^*);
3. Hilbert 空间 $H = l^2$ 弱收敛但范数不收敛.
   (a) H 的标准正交基为 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，考虑序列 $x_n = l_n$，则 $\|x_n\| = 1$, $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$，但 $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$, $(\forall n, m \in \mathbb{N}^+, n \neq m)$，故序列不是 Cauchy 列，范数不收敛;
   (b) 对任意的 $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$，有 $\langle x_n, y \rangle = \langle e_n, y \rangle = y_n$，则由 l^2 的性质可得 $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$，故当 $n \to \infty$ 时，$y_n \to 0$，因此 $\langle x_n, y \rangle \to 0$ 对所有 y 成立，于是，$x_n \xrightarrow{w} 0$.
4. 序列空间 $X = c_0 := \{x_n \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ 弱 * 收敛但不是弱收敛.
   (a) 定义序列 $\{f_n\} \subset X^* = l^1$ 为 $f_n = e_n$，显然有 $\|f_n\|_1 = 1$ 对所有 n 成立，所以对任意的 $x \in X = c_0$，有 $\langle f_n, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (f_n)_k x_k = \delta_{nk} x_k = x_n \to 0$，于是 $f_n \xrightarrow{w^*} 0$;
   (b) 因为对任意 $\varphi \in X^{**} = l^{\infty}$，有 $\langle \varphi, f_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k (f_n)_k = \varphi_n$，但当 $\varphi \in l^{\infty}$ 取 $\varphi = (1, 1, \cdots)$ 时，则 $\|\varphi\|_{\infty} = 1$，于是 $\langle \varphi, f_n \rangle = 1 \nrightarrow 0$，故 $\{f_n\}$ 不弱收敛到 0.

定义 9.7. 设 X 是 Banach 空间，则

1. $A \subset X$，若 A 中任一序列都有弱收敛的子列，则称 A 是 X 的**弱列紧集**;
2. $A \subset X^*$，若 A 中任一序列都有弱 * 收敛的子列，则称 A^* 是 X 的**弱 * 列紧集**;
3. 对任意的 $x_0 \in X$，点 x_0 的**弱邻域基**定义为点集

$$B(f_1, f_2, \cdots, f_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n) = \{x \in X \mid |f_i(x)| < \varepsilon_i, \forall 1 \leq i \leq n, \ \varepsilon_i > 0\}.$$

定义 9.8. 设 X 是 Banach 空间，则

1. X 上的集合 G 称为**弱开集**，是指 G 中任一点 x 都有邻域基 V，使得 $V \subset G$;
2. 由弱开集生成 X 上的拓扑称为 X 上的**弱拓扑**;
3. 若 X 中的集合 F 按弱拓扑是闭的，则称 F 为 X 的**弱闭集**;

注. 弱拓扑、弱紧集和弱 * 紧集可类比定义.

类比紧集的定义，是否可以将某个弱列紧集中所有序列的弱收敛的极限添加进去使之成为一个弱紧集？不行，以下为反例.

例 9.2. 存在 l^2 中的点集 A，使点 0 为 A 的弱聚点，但 A 中任何序列都不可能弱收敛到 0.

定理 9.15 (Alaoglu)**.** 设 X 是 Banach 空间，则 X^* 中的闭单位球是弱 * 紧集.

当 X 可分时的情况容易证明.

定理 9.16. 设 X 是可分的 Banach 空间，则 X^* 中的单位球 $(X^*)_1$ 是弱 * 列紧的.

定理 9.17. 自反空间 X 中的单位球是弱列紧的.

10 Banach 空间中的共轭算子，算子值域的进一步讨论，Hilbert 空间中的共轭算子，闭值域定理

在有限维空间中的转置矩阵的概念拓展到一般的线性赋范空间是对偶空间的概念.

定义 10.1 (共轭算子). 设 X, Y 都是 Banach 空间，$T \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，定义

$$(T^* f)(x) = f(Tx) \ \ (\forall f \in Y^*,\, x \in X),$$

称 $T^* \in \mathrm{Hom}(Y^*, X^*)$ 为 T 的 **Banach 共轭算子**.

例 10.1. 设 E 是 n 维 Banach 空间，F 是 m 维 Banach 空间，$T \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，如果 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 E 的一组基，$\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 为 f 的一组基，则 $Te_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 可以写成 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 的线性组合，即

$$T(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}(1 \le i, j \le n)$ 和 $f_u^*(f_v) = \delta_{uv}$（$\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ 称为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的**对偶基**），则 T^* 为

$$T(f_1^*, f_2^*, \cdots, f_n^*) = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

因此 T^* 的共轭表示相应于矩阵转置.

正如转置矩阵一样，共轭算子关于代数运算满足如下

定理 10.1. 设 X, Y 都是 Banach 空间，$T, S \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，则

1. $\|T^*\| = \|T\|$;
2. $(S + T)^* = S^* + T^*$;
3. $(\alpha T)^* = \alpha T^*$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$.

定理 10.2. 设 X 是 Banach 空间，$S, T \in \mathrm{End}(X)$，则

1. $(ST)^* = T^* S^*$;
2. 若 T 有有界逆，则 T^* 亦有有界逆，且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

我们之前研究了 T, T^* 的关系，在对偶空间的学习中我们知道 X 可以看作 X^{**} 的子空间，那么 T^{**} 限制在 X 上，和 T 有什么关系呢？

定理 10.3. 设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，则 T^{**} 是 T 的扩张，即对任意的 $x \in X$，有 $T^{**}x^{**} = (Tx)^{**}$.

接下里我们在 §9的讲述的算子值域基础上，结合共轭算子的内容给出如下定理

定理 10.4. 设 T 是 Banach 空间 X 的有界线性算子，则

1. $\ker(T)$ 是 X 的闭子空间，$R(T)$ 是 X 的子空间（未必闭）；
2. $\ker(T^*)$ 是 X^* 的闭子空间，$R(T^*)$ 是 X^* 的子空间;
3. $\ker(T^*) = \overline{R(T)}^{\perp}$，$\ker(T) = ^{\perp}\overline{R(T^*)}$;
4. $^{\perp}\ker(T^*) = ^{\perp}[\overline{R(T)}^{\perp}] = \overline{R(T)}$，$\ker(T)^{\perp} = [^{\perp}\overline{R(T^*)}]^{\perp}$
5. 存在反例，使得 $\ker(T)^{\perp} = [^{\perp}\overline{R(T^*)}]^{\perp} \neq \overline{R(T^*)}$;
6. $\overline{R(T^*)} \subset \ker(T)^{\perp}$，且当 X 为自反空间时，$\overline{R(T^*)} = \ker(T)^{\perp}$.

由于 Hilbert 空间 H 和 H^* 可以一致化，因此对偶空间的共轭算子的概念可以引进 Hilbert 空间本身中去.

定理 10.5. 设 G, H 是 Hilbert 空间，$T \in \mathrm{Hom}(H, G)$，那么有唯一的有界线性算子 $S \in \mathrm{Hom}(G, H)$，使得

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle, \quad \forall x \in H, y \in G$$

并且 $\|S\| = \|T\|$.

定义 10.2. 设 H, G 是两个 Hilbert 空间，$T \in \mathrm{Hom}(H, G)$，又设 $T^* \in \mathrm{Hom}(G, H)$ 适合

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x \in H, y \in G$$

那么称 T^* 是 T 的 **Hilbert 共轭算子**.

注. 对于实 Hilbert 空间，Hilbert 共轭算子与 Banach 共轭算子完全一致，但在复 Hilbert 空间上的共轭算子对应于矩阵的共轭转置.

例 10.2. 设 $\mathbb{C}^n$ 是复 Hilbert 空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基，设有界线性算子 $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，则有 Te_μ 的值决定了算子 T，如果

$$T\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

当 $x \in \mathbb{C}^n$，$y = Te_\mu (\mu = 1, 2, \cdots, n)$，$x, y$ 用 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 表示时有

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义 10.3. $\mathbb{C}^n$ 中的线性算子 T 由 n 阶方阵 $(a_{\mu\nu})$ 决定，而给定任何一个 $(a_{\mu\nu})$ 都能由 (4) 式决定一个 T，称这个 $(a_{\mu\nu})$ 为 T 在 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的**表示矩阵**.

由 (4) 式可知 $a_{\mu\nu} = \langle Te_\mu, e_\nu \rangle$，则 T^* 的表示矩阵 $(a^*_{\mu\nu})$ 为

$$a^*_{\mu\nu} = \langle T^* e_\mu, e_\nu \rangle = \langle e_\mu, Te_\nu \rangle = \overline{\langle Te_\nu, e_\mu \rangle} = \overline{a_{\nu\mu}}$$

因此 T^* 在 $\{e_i\}$ 下的表示矩阵 $(\overline{a_{\nu\mu}})$ 就是 T 的表示矩阵 $(a_{\mu\nu})$ 的共轭矩阵.

在有限维线性空间中，线性变换的值域总是闭的，故定理10.4中的式子可以换成相应算子的值域，在无限维线性空间中，若 $R(T)$ 和 $R(T^*)$ 是闭的，则同样可以，可以看出算子值域是否闭非常的重要，这就是接下来讲的闭值域定理.

定理 10.6. 设 X 是 Banach 空间，$T \in \mathrm{End}(X)$，则 T^* 是单射当且仅当 $R(T)$ 在 X 中稠密.

定理 10.7 (闭值域定理)**.** 设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，则下列各断言相互等价:

1. $R(T)$ 是闭集;
2. $R(T^*)$ 是闭集;
3. $R(T) = {}^\perp \ker(T^*)$;
4. $R(T^*) = \ker(T)^\perp$.

推论 10.8. 设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，则 T 可逆当且仅当 T^* 是可逆的.