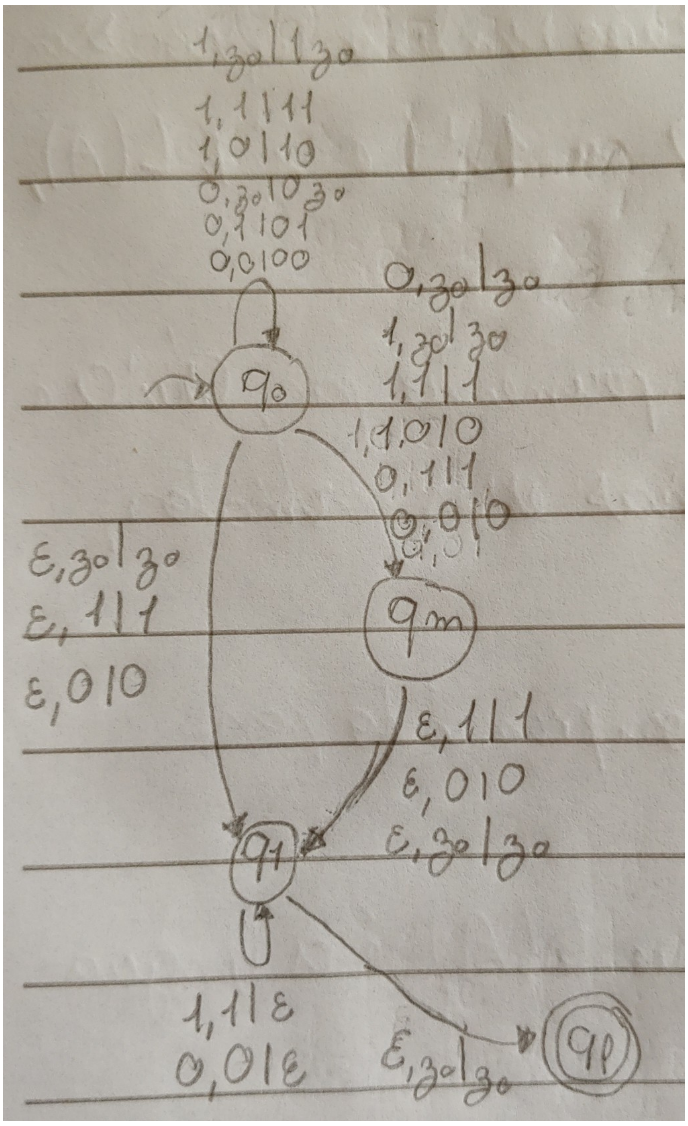
Exercício 31. Construa um AP cuja linguagem seja a de todos os palíndromos binários. Mostre que seu autômato aceita as palavras ϵ, 11, 010, e 0110.

Autômato com pilha A que aceita por estado final:
$A = (\{q_0, q_1, q_m, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, z_0\}, \delta, q_0, z_0, \{q_f\})$

Sendo a função de transição δ definida por:



Caso ϵ:

$$(q_0, \epsilon, z_0) \xrightarrow{\epsilon, z_0|z_0} (q_1, \epsilon, z_0)$$
$$(q_1, \epsilon, z_0) \xrightarrow{\epsilon, z_0|z_0} (q_f, \epsilon, z_0)$$

Portanto ϵ é aceito

Caso 11:

$$(q_0, 11, z_0) \xrightarrow{1, z_0|1z_0} (q_0, 1, 1z_0)$$
$$(q_0, 1, 1z_0) \xrightarrow{\epsilon, 1|1} (q_1, 1, 1z_0)$$
$$(q_1, 1, 1z_0) \xrightarrow{1, 1|\epsilon} (q_1, \epsilon, z_0)$$
$$(q_1, \epsilon, z_0) \xrightarrow{\epsilon, z_0|z_0} (q_f, \epsilon, z_0)$$

Portanto 11 é aceito.

Caso 010:

$$(q_0, 010, z_0) \xrightarrow{0, z_0|0z_0} (q_0, 10, 0z_0)$$
$$(q_0, 10, 0z_0) \xrightarrow{1, 0|0} (q_m, 0, 0z_0)$$
$$(q_m, 0, 0z_0) \xrightarrow{\epsilon, 0|0} (q_1, 0, 0z_0)$$
$$(q_1, 0, 0z_0) \xrightarrow{0, 0|\epsilon} (q_1, \epsilon, z_0)$$
$$(q_1, \epsilon, z_0) \xrightarrow{\epsilon, z_0|z_0} (q_f, \epsilon, z_0)$$

Portanto 010 é aceito.

Caso 0110:

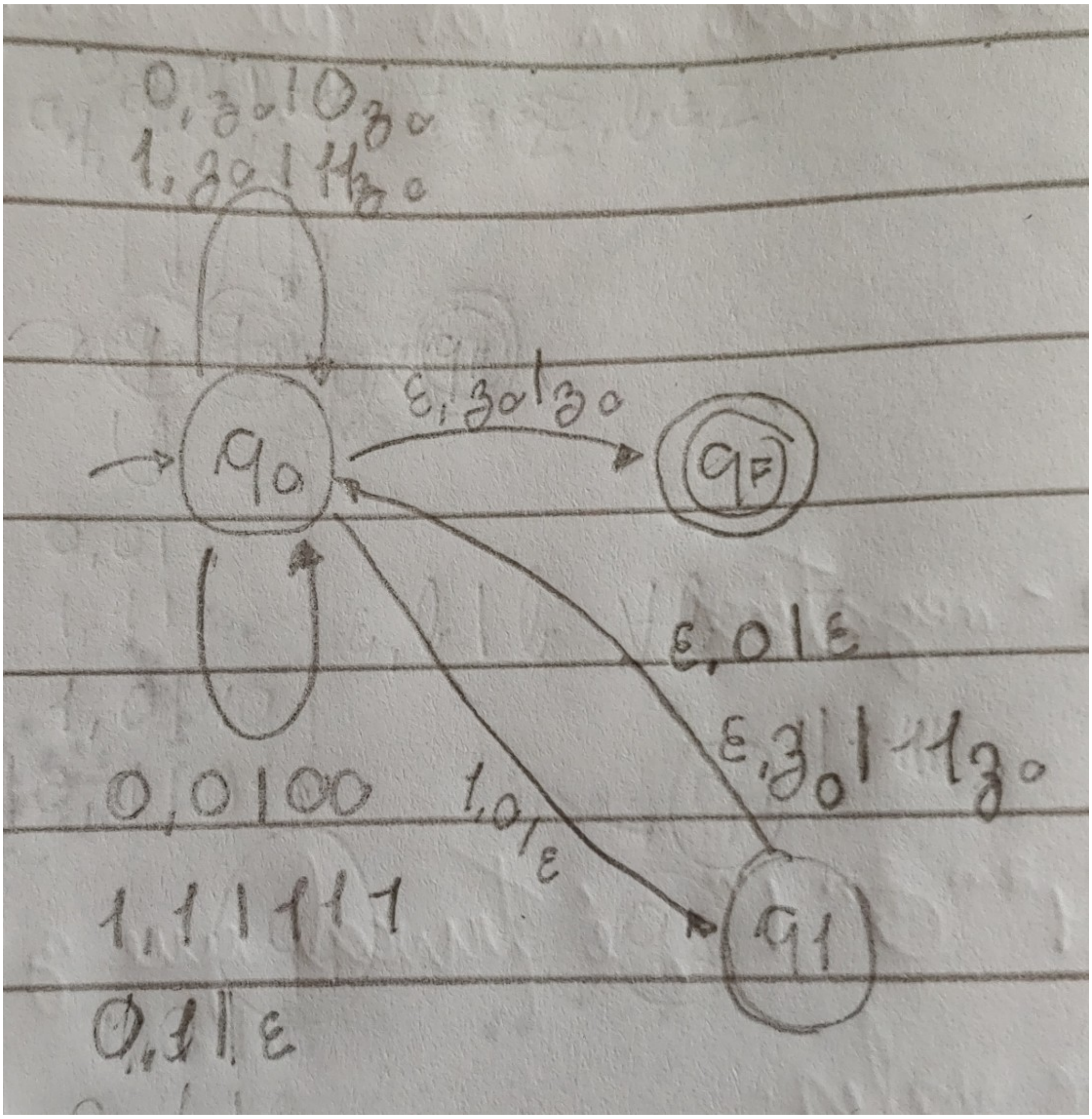
$$(q_0, 0110, z_0) \xrightarrow{0, z_0|0z_0} (q_0, 110, 0z_0)$$
$$(q_0, 110, 0z_0) \xrightarrow{1, 0|10} (q_0, 10, 10z_0)$$
$$(q_0, 10, 10z_0) \xrightarrow{\epsilon, 1|1} (q_1, 10, 10z_0)$$
$$(q_1, 10, 10z_0) \xrightarrow{1, 1|\epsilon} (q_1, 0, 0z_0)$$
$$(q_1, 0, 0z_0) \xrightarrow{0, 0|\epsilon} (q_1, \epsilon, z_0)$$
$$(q_1, \epsilon, z_0) \xrightarrow{\epsilon, z_0|z_0} (q_f, \epsilon, z_0)$$

Portanto 0110 é aceito.

Exercício 32. Construa um autômato com pilha para a linguagem das palavras binárias cujo número de 0s é o dobro do número de 1s. Mostre que seu autômato aceita 001010 e rejeita 01010.

Autômato com pilha A que aceita por estado final:
$A = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, z_0\}, \delta, q_0, z_0, \{q_f\})$

Sendo a função de transição δ definida por:



Caso 001010:

$(q_0, 001010, z_0) \xrightarrow{0,z_0|0z_0} (q_0, 01010, 0z_0)$
$(q_0, 01010, 0z_0) \xrightarrow{0,0|00} (q_0, 1010, 00z_0)$
$(q_0, 1010, 00z_0) \xrightarrow{1,0|\epsilon} (q_1, 010, 0z_0)$
$(q_1, 010, 0z_0) \xrightarrow{\epsilon,0|\epsilon} (q_0, 010, z_0)$
$(q_0, 010, z_0) \xrightarrow{0,z_0|0z_0} (q_0, 10, 0z_0)$
$(q_0, 10, 0z_0) \xrightarrow{1,0|\epsilon} (q_1, 0, z_0)$
$(q_1, 0, z_0) \xrightarrow{\epsilon,z_0|1z_0} (q_0, 0, 1z_0)$
$(q_0, 0, 1z_0) \xrightarrow{0,1|\epsilon} (q_0, \epsilon, z_0)$
$(q_0, \epsilon, z_0) \xrightarrow{\epsilon,z_0|z_0} (q_f, \epsilon, z_0)$

Portanto 001010 é aceito

Caso 01010:

$(q_0, 01010, z_0) \xrightarrow{0,z_0|0z_0} (q_0, 1010, 0z_0)$
$(q_0, 1010, 0z_0) \xrightarrow{1,0|\epsilon} (q_1, 010, z_0)$
$(q_1, 010, z_0) \xrightarrow{\epsilon,z_0|1z_0} (q_0, 010, 1z_0)$
$(q_0, 010, 1z_0) \xrightarrow{0,1|\epsilon} (q_0, 10, z_0)$
$(q_0, 10, z_0) \xrightarrow{1,z_0|11z_0} (q_0, 0, 11z_0)$
$(q_0, 0, 11z_0) \xrightarrow{0,1|\epsilon} (q_0, \epsilon, 1z_0)$

Não há nenhuma transição possível a partir de $(q_0, \epsilon, 1z_0)$

Portanto 01010 não é aceito.

Exercício 34. Sendo T uma árvore de derivação completa para uma gramática livre de contexto Γ na Forma Normal de Chomsky que mostra que uma palavra $x \in L(\Gamma)$, e sendo h a profundidade de T (i.e. o comprimento do maior caminho da raiz de T a alguma folha de T), mostre que $|x| \leq 2^{h-1}$.

É trivial que a palavra x é formada pelos terminais nas folhas de T. Também é trivial que toda folha de T possui apenas um terminal, devido as restrições da forma normal de Chomsky (terminais são produzidos apenas de maneira $S \to c$, onde c é um terminal da gramática e S uma variável da gramática.

Com isso, para provar que a palavra x tem comprimento de no máximo 2^{h-1}, basta provar que o número de folhas de T é no máximo 2^{h-1}.

É possível perceber que todos os nós tem no máximo dois filhos (dois no caso de $A \to BC$, sendo A, B e C variáveis da gramática e um para o caso da produção de terminal apresentada anteriormente, as quais são as únicas opções de produções possíveis).

Também todos os nós pais de terminais, isto é, pai das folhas de T, tem apenas um filho, já que são produções do tipo $S \to c$. Isto permite criar uma árvore T' removendo todas as folhas de T, assim o número de folhas de T' é o mesmo de T, porém a altura h' de T' é igual a $h - 1$. Importante notar que agora todas as produções que não são folhas são do tipo $A \to BC$, logo T' é uma árvore binária.

Sendo assim, o número máximo de folhas em uma árvore binária de altura b é 2^b (caso de uma árvore binária perfeita). Portanto é possível afirmar que o número de folhas n em T' é no máximo $2^{h'} = 2^{h-1}$, e o número máximo de folhas em T é o mesmo.

Logo o comprimento máximo de x é 2^{h-1}, isto é, $|x| \leq 2^{h-1}$.