Exercício 4. Sendo k um inteiro não-negativo e Σ um alfabeto qualquer, mostre por indução que $|\Sigma^k| = |\Sigma|^k$.

Base: $k = 0$

$|\Sigma^0| = |\{\epsilon\}| = 1$
$|\Sigma|^0 = 1$
Logo $|\Sigma^k| = |\Sigma|^k$ para $k = 0$

Indução:

Todo $x \in \Sigma^{k+1}$ pode ser escrito como $x = aw$, tal que $a \in \Sigma$ e $w \in \Sigma^k$ para $k \geq 0$.
Logo $|\Sigma||\Sigma^k| = |\Sigma^{k+1}|$
Usando essa igualdade podemos fazer:
$|\Sigma|^{k+1} = |\Sigma||\Sigma|^k = |\Sigma||\Sigma^k| = |\Sigma^{k+1}|$

Portanto $|\Sigma^k| = |\Sigma|^k$ para todo k inteiro não-negativo

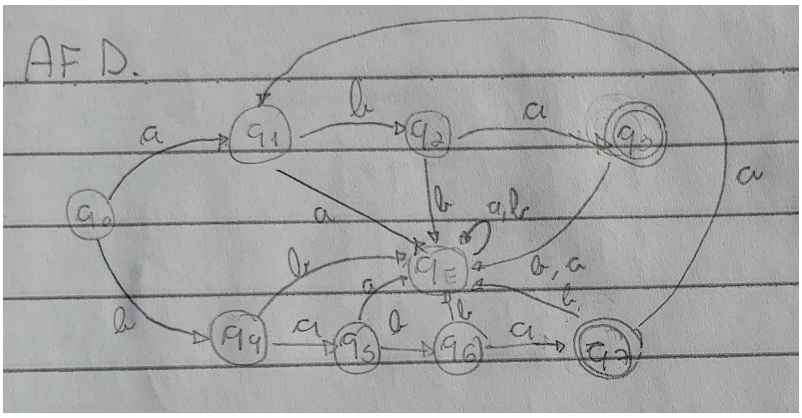
Exercício 16. Construa um autômato finito determinístico A com alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ tal que $L(A) = \{aba, baba, babaaba\}$. Construa ainda um autômato finito não-determinístico B com transições ϵ tal que $L(B) = L(A)$, valendo-se do não-determinismo e das transições ϵ para a simplificação do autômato.

Autômato finito determinístico:

$A = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_e\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3, q_7\}\}$, sendo δ definido por:

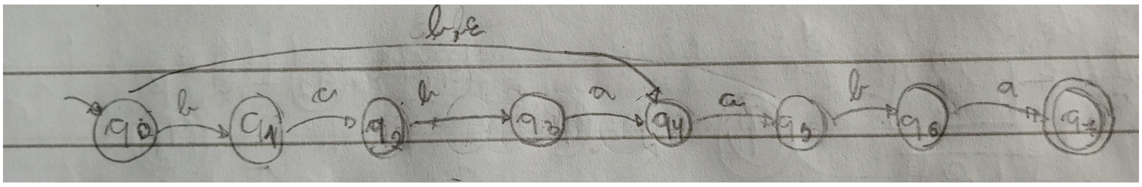
(q, s)	$\delta(q, s)$
(q_0, a)	q_1
(q_0, b)	q_4
(q_1, a)	q_e
(q_1, b)	q_2
(q_2, a)	q_3
(q_2, b)	q_e
(q_3, a)	q_e
(q_3, b)	q_e
(q_4, a)	q_5
(q_4, b)	q_e
(q_5, a)	q_e
(q_5, b)	q_6
(q_6, a)	q_7
(q_6, b)	q_e
(q_7, a)	q_1
(q_7, b)	q_e
(q_e, a)	q_e
(q_e, b)	q_e

Representação por grafo:



Autômato finito não-determinístico com transições ϵ:

$B = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_7\}\}$, sendo δ definido pelo grafo:



Exercício 20. Considere a linguagem L sobre $\Sigma := \{0, 1\}$ definida por $L := \{0^n10^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Prove ou refute: L é uma linguagem regular.

Lema do bombeamento:

Existe um b inteiro positivo tal que para todo $w \in L$ tal que $|w| \geq b$, w pode ser escrito como $w = xyz$ e

1. $y \neq \epsilon$
2. $|xy| \leq b$
3. $xy^kz \in L$ para todo k inteiro não negativo

Suponhamos que L seja regular, logo existe um b tal que o lema do bombeamento é satisfeito. Tomando $w = 0^b10^b$, é trivial que $w \in L$. Também é trivial que y do lema de bombeamento será do tipo $y = 0^i$ tal que $1 \leq i \leq b$ e também está antes do único 1 da palavra, caso contrário as partes 1 e 2 do lema não seriam satisfeitas.

Ao bombear y com $k = 2$ ($w' = xyyz$), é possível perceber que a palavra não faz mais parte da linguagem, devido ao desbalanceamento de 0 antes e depois do 1 da palavra, isto é, w' não pode ser escrita como 0^n10^n tal que n é um inteiro não negativo. De modo explícito: $w' = 0^{b+i}10^b$ e $i \geq 1$, então $w' \notin L$.

Logo a parte 3 do lema não é satisfeito e L não satisfaz o lema do bombeamento. Portanto L não é uma linguagem regular.