# 算法课第 1 次作业

**作业得分（打印时请保留此项）：**

| | 题目 1 | 题目 2 | 题目 3 | 题目 4 | 题目 5 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | |

**注意事项：**

1. 算法课作业均采用 A4 纸打印，<u>左上角装订</u>；
2. 不需要复制题目内容，直接在每一题的标题下填写解题过程即可；
3. 对于复杂公式或图形，可以留空白后手写完成，**文字部分应该打印**；
4. 注意填写页眉中的姓名、学号；
5. 打印时请保留第一页上方的“作业得分”表格。

## 题目 1：

并不总是存在一对稳定的时间表。反例如下：
有 2 个黄金时段。A 网节目及对应收视率绝对值为{A1: 10, A2: 30}，B 网节目及对应收视率绝对值为{B1: 20, B2: 40}。
如果最后 A 给出自己节目表顺序为(A1, A2)，B 给出节目表顺序为(B1, B2)，那么 A 网则可以通过改变其节目表顺序为(A2, A1)，使得 A 网能获得一个黄金节目时段（A 网原来是没有黄金时段）。
如果最后 A 给出自己节目表顺序为(A1, A2)，B 给出节目表顺序为(B2, B1)，那么 B 网则可以通过改变其节目表顺序为(B1, B2)，使得 B 网能获得全部黄金节目时段（B 网原来只有一个黄金时段）。

## 题目 2：

1 小时该计算机能执行操作的次数为$t = 3600 \times 10^{10} = 3.6 \times 10^{13}$
a)　$n^2 \le \mathrm{t} \Longrightarrow \mathrm{n} \le t^{1/2} \Longrightarrow \mathrm{n} \le 6 \times 10^6$，即最多 n 为 6,000,000
b)　$n^3 \le t \Longrightarrow \mathrm{n} \le t^{1/3} \Longrightarrow n \le 33015$
c)　$100n^2 \le t \Longrightarrow n \le 6 \times 10^5$
d)　$\mathrm{nlogn} \le \mathrm{t} \Longrightarrow \mathrm{n} \approx 9 \times 10^{11}$
e)　$2^n \le t \Longrightarrow \mathrm{n} \le \mathrm{logt} \Longrightarrow \mathrm{n} \le 45$
f)　$2^{2^n} \le t \Longrightarrow n \le loglogt \Longrightarrow \mathrm{n} \le 5$

## 题目 3：

a) 第一个瓶子依次从$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$的倍数台阶处开始，即$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，$2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，$3\lfloor\sqrt{n}\rfloor\ldots$。加入第一个瓶子在$\mathrm{i}\lfloor\sqrt{n}\rfloor$处摔碎了，那么安全横档则处于$(\mathrm{i}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$至$\mathrm{i}\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1$之间。则第二个瓶子从$(\mathrm{i}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$处依次向下一阶一阶放，直至破碎即可找到安全横档。如此的话，第一个瓶子我们最多$2\sqrt{n}$次（由第一个瓶子找到了安全横档），第二个瓶子最多放$\sqrt{n}$次。

此时满足$\mathrm{f(n)}=\mathrm{O}(\sqrt{n})$，即满足$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} f(n)/n=0$

b) 归纳法。假设$f_k(n)\le 2kn^{1/k}$。

对于第一个瓶子，**以$\left\lfloor \boldsymbol{n^{\frac{k-1}{k}}}\right\rfloor$的倍数依次放**，这样这个瓶子做多被扔$2n/n^{(k-1)/k}=2n^{1/k}$次。第一个瓶子碎的时候，至少可以把安全横档距离“压缩”至$n^{(k-1)/k}$

对于余下的 k-1 个瓶子，递归的应用上述策略，根据假设，则每个瓶子最多扔$2(\mathrm{k}-1)\left(n^{(k-1)/k}\right)^{1/(k-1)}=2(k-1)n^{1/k}$次，再加上第一个瓶子最多扔$2n^{1/k}$，所以得到所有瓶子最多扔$2kn^{1/k}$次。证毕！

## 题目 4：

该命题为真！
反证法。
令 G 是有给定性质的图，并假设 G 不是连通的。那 G 至少含有两个连通分量，假设 S 是节点数最少的连通分量，那么$|S|<n/2$。考虑 S 中任一节点 i，它的所有邻接点均在 S 中，节点 i 的度数最多为$|S|-1\le n/2-1<n/2$。这与题设每个节点的度数不小于$n/2$相矛盾。即原命题为真。

## 题目 5：

该命题为假！存在图使得对于任意正的自然数 c，满足$diam(G)/apd(G)>c$。
这样的图 G 构建如下：
固定某一常数 k，对于 k 个节点 u1,u2,…,uk，依次连接每个节点。对于另外 n-k 个节点 v1,v2,…,vn-k，将其全部连接到节点 u1 上。
那么，显然直径 diam(G) = dist(v1, uk) = k。对于 apd(G)，只讨论其上界。这样的图 G 中，有一个节点在节点集合{u1, u2, …, uk}中的节点对，最多有 kn 对，且这样的节点对的$\mathrm{dist}\le\mathrm{k}$，剩余的节点对的距离不超过 2。所以 apd(G)有上界如下：

$$\mathrm{apd(G)}\le\frac{2C_n^2+kkn}{C_n^2}\le 2+\frac{2k^2}{n-1}$$

对于 k 与 n 之间的关系，这里选$\mathrm{n}-1>2k^2$，则有$\mathrm{apd(G)}<3$。另外，对于图直径 k 的选值，选$\mathrm{k}>3\mathrm{c}$，则有$diam(G)/apd(G)>3c/c>c$。