北京大学 2018 年研究生算法课书面作业

发布时间：2018 年 10 月 8 日
截止时间：2018 年 10 月 29 日课前

注意事项：

- 作业应独立完成，严禁抄袭。作业必须使用统一规定的模板。
- 在截止日期那天，直接把纸质版的作业交给任课老师。

引言、递推计算、图

1. **题目来源：**《算法设计》第一章第 3 题：

题目描述：

除了课上讲的稳定匹配的场景外，还存在很多其它的场景，我们可以问与某类“稳定”原则相关的问题。这里是一个例子，涉及到两个企业之间的竞争。

假设我们有两个电视网，叫做 A 与 B。存在 n 个黄金时间的节目安排时段，每个电视网有 n 个电视节目，需要做出一个时间表（每个节目到不同时段的分配方案）以吸引尽可能多的市场占有率。

给定两个电视网的时间表，下面是我们确定它们的表现相对有多好的方式。每个节目基于上一年收看节目的人数有固定的收视率；我们假设没有两台节目有恰好相同的收视率。如果一个电视网为某时段安排的节目比起另一个电视网为那个时段安排的节目有更高的收视率，那么这个电视网就赢得这个给定的时段，每个电视网的目标就是赢得尽可能多的时段。

假设在秋季的开放周里，A 网展示了一个时间表 S，B 网展示了一个时间表 T。在这两个时间表的基础上，每个电视网依照上述规则赢得某些时段。如果没有一个网能单方面改变它自己的时间表而赢得更多的时段，我们就说这对时间表(S，T)是稳定的。那就是说，不存在时间表 S’使得 A 网用(S’，T)比用(S，T)能够赢得更多的时段；对称地，也不存在时间表 T’使得 B 网用(S，T’)比用(S，T)赢得更多的时段。

类似于 Gale-Shapley 问题，对于这类稳定性有如下问题：对每组电视节目和收视率，是否总是存在一对稳定的时间表？通过做下面两件事中的一件来求解这个问题:

(a)给出一个算法，使得它对任何一组电视节目和相关的收视率，产生一对稳定的时间表；或者

(b)给出一组电视节目和相关收视率的例子，对于它不存在一对稳定的时间表

2. **题目来源：**《算法设计》第二章第 2 题：

题目描述：

假设你有某些算法，它们的 6 个运行时间列出如下(假定这些都是作为一个输入规模为 n 的函数所执行操作的准确数目)。假设你有一台每秒可以执行 10^{10} 次操作的计算机，并且你需要在至多 1 小时内计算出一个结果。对每个算法，使得你能在 1 小时内得到结果的最大的输入规模 n 是多少？假设 log 函数都是以 2 为底的。**要求写出推导过程，计算出 n 的精确值**。

（a） n^2

（b） n^3

（c） $100n^2$

（d） nlogn

（e） 2^n

（f） 2^{2^n}

3. **题目来源：**《算法设计》第二章第 8 题

题目描述：

你正在对不同的玻璃瓶样品做强度测试以确定它们从多高的高度掉下来而仍旧不碎。对某类特定的瓶子如下设计这样一个实验，你有一个具有 n 个横挡的阶梯，你想找出最高的横挡，能使一个瓶子的样品从那里下落而不被摔碎，我们把它称为“最高的安全横挡”。

尝试二分搜索可能是一种自然的想法:使一个瓶子从中间的横挡下落，看看它是否摔碎，然后依赖于这个结果递归地从 n/4 横挡或者 3n/4 的横挡进行尝试。但是这个办法有个缺点：在找到答案之前，你可能摔碎了一大堆瓶子。

如果你的主要目标是保护瓶子，另一方面，可以尝试下面的策略。从第一个横挡开始让瓶子下落，然后第二个横档，继续下去，每次向上爬一个高度直到瓶子摔碎为止。以这种方式，你只需要一个瓶子——在它摔碎的时刻，你得到正确的答案——但是你可能不得不把它下落 n 次(而不是在二分搜索求解时的 log n 次)

于是，这里是某种权衡:似乎是如果你愿意打碎更多的瓶子，你就可以执行更少的下落。为了更好地理解这种权衡在量级上是怎样起作用的，让我们考虑给定 k≥1 个瓶子的“预算”，

怎样来运行这个实验。换句话说，你必须确定正确的答案——最高的安全横挡——并且在这个过程中至多可以用 k 个瓶子。

(a)假设只给你 k=2 个瓶子。描述一种找到最高安全横挡的策略，对某个比线性函数增长更慢的函数$f(n)$，要求一个瓶子至多落$f(n)$次(换句话说，应该满足$\lim_{n\to\infty} f(n)/n = 0$)

(b)假设你的瓶子数的预算是某个给定的 k>2。描述一种至多使用 k 个瓶子找到最高安全横挡的策略。如果$f_k(n)$表示依照你的策略需要下落瓶子的次数，那么函数$f_1, f_2, f_3, \ldots$，应该有这样的性质，每个函数渐近增长比前面的函数要慢：对每个 k，$\lim_{n\to\infty} f_k(n)/f_{k-1}(n) = 0$

4. **题目来源：**《算法设计》第三章第 7 题

题目描述：

你的某些朋友从事无线网工作，他们日前正在研究 n 个移动设备的一个网络的性质。由于这些设备到处移动(实际上，因为它们的主人到处移动)，对于任何一个时间点他们如下定义了一个图：每个结点表示 n 个设备中的一个设备，如果设备 i 与设备 j 的物理位置不超过 500 米远(我们就把这称做 i 和 j 互相“在范围内”)，那么它们之间有一条边。

他们希望这个设备网络所有时刻都是连通的，于是他们对设备的移动加以限制以满足下面的性质:在所有时刻，每个设备 i 至少在其他 n/2 个设备的 500 米之内。(我们假设 n 是偶数)。他们希望知道的是：这个性质本身能够保证这个网络保持连通吗？

下面是用图的陈述来描述这个问题的一种具体的方法。

命题：G 是一个 n 个结点的图，其中 n 是一个偶数，如果 G 的每个结点的度数至少为 n/2，那么 G 是连通的。

5. **题目来源：**《算法设计》第三章第 8 题

题目描述：

在关于因特网和 Web 结构的出版物中有许多报导集中于下面的问题：在这些网络中一般的结点离开有多远？如果你细心读这些报导，你会发现许多报导关于网络的直径与平均距离之间的区别是混淆的；他们常常在这些概念之间跳来跳去，尽管他们说的是同一个东西。

正如在本书里，我们看到在图 G=(V，E)中两个结点 u 与 v 之间的距离是在与它们相交的路径上的最少边数；我们将它记为$dist(u，v)$。我们说 G 的直径是在任意一对结点之间的最大距离；并且我们将把这个量记为$diam(G)$。

让我们定义一个相关的量，我们称之为 G 中的平均点对距离(标记为$apd(G)$)。我们定义$apd(G)$是在所有$\binom{n}{2}$个两两不同的结点 u 与 v 的集合上 u 与 v 距离的平均值。即

$$\left[\sum_{\{u,v\}\subseteq V} dist(u,v)\right] \Big/ \binom{n}{2}$$

这里是一个简单的例子，它使你确信存在图 G，其中$diam(G) \neq apd(G)$。设 G 是一个图，具有三个结点 u,v,w 以及两条边$\{u,v\}$和$\{v,w\}$，那么

$$diam(G) = dist(u,w) = 2$$

而

$$apd(G) = [dist(u，v) + dist(u，w) + dist(v，w)]/3 = 4/3$$

当然，这两个数在这三个结点的图的情况下差得不远，很自然会问是否在它们之间总是存在一种接近的关系。这里有一个试图使得这个结果更为精确的论断

命题:存在一个正的自然数 c 使得对所有的连通图 G 有：

$$\frac{diam(G)}{apd(G)} \leq c$$

你认为这个论断是真还是假给出一个证明或者一个反例。