Convex sets

Ковалев Алексей

1. $S \subset \mathbb{R}^n$ выпукло.

- Рассмотрим произвольные $x,\, y \in \operatorname{int} S$. Покажем что $\forall \theta \in [0;1]$ $z = \theta x + (1-\theta)y \in \operatorname{int} S$.
  В силу того что $x \in \operatorname{int} S$ найдется открытый шар $B_r(x) \subset S$, причем $\forall \tilde{x} \in B_r(x)$ $\theta\tilde{x} + (1-\theta)y \in S$, так как S выпукло. Тогда $\theta B_r(x) + (1-\theta)y = B_{\theta r}(z) \subset S$. Значит $z \in \operatorname{int} S$. $\square$

- Рассмотрим произвольные $x,\, y \in \overline{S}$. Покажем что $\forall \theta \in [0;1]$ $z = \theta x + (1-\theta)y \in \overline{S}$.
  Существуют $x_n \to x$, $y_n \to y : \{x_n\} \subset S$, $\{y_n\} \subset S$. Пусть $z_n = \theta x_n + (1-\theta)y_n$. Тогда $z_n \to \theta x + (1-\theta)y = z$, причем $\{z_n\} \subset S$, так как S выпукло. Значит $z \in \overline{S}$. $\square$

2. Пусть $X = \operatorname{conv}\left\{xx^\top :\, x \in \mathbb{R}^n,\, \|x\|_2 = 1\right\}$, $Y = \{A \in \mathbb{S}^n_+ :\, \operatorname{tr} A = 1\}$

- Рассмотрим $xx^\top \in X$. Ясно что $\operatorname{tr}(xx^\top) = \|x\|_2^2 = 1$ и $(xx^\top)_{ij} = x_i x_j = x_j x_i = (xx^\top)_{ji}$. Также ясно что $xx^\top \succeq 0$, так как $\forall y \neq 0$ $y^\top xx^\top y = (x^\top y)^\top x^\top y = \|x^\top y\|_2^2 > 0$. Значит $xx^\top \in Y$ и $X \subset Y$.

- Рассмотрим $A \in Y$. Воспользуемся SVD разложением матрицы A в виде

$$A = \sum_{k=1}^{\operatorname{rk} A} \sigma_k u_k v_k^\top$$

  Матрица A симметрична, значит $A = A^\top$. Тогда $Au_k = \sigma_k v_k$, $Av_k = \sigma_k u_k$, то есть $(A - \sigma_k I)(u_k - v_k) = 0$. Тогда либо $u_k = v_k$, либо $A = \sigma_k I$, причем $\sigma_k I u_k = \sigma_k v_k$. Значит в любом случае $u_k = v_k$. Тогда также ясно, что $\sigma_k = \lambda_k$, так как $Au_k = \sigma_k u_k$.
  $1 = \operatorname{tr} A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = \sum\limits_{k=1}^{\operatorname{rk} A} \sigma_k$, причем все собственные числа неотрицательны, так как если $Au_k = \lambda_k u_k$, то $u_k^\top A u_k = \lambda_k \|u_k\|_2^2 \geqslant 0$. Значит SVD разложение матрицы A имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{\operatorname{rk} A} \sigma_k u_k u_k^\top \in \operatorname{conv}\left\{xx^\top :\, \|x\|_2 = 1\right\} = X$$

  по определению выпуклой оболочки.

Получаем, что $X = Y$. $\square$

3. $K \subset \mathbb{R}^n_+$ – конус. $N = \{x :\, x \in K,\, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \|x\|_1 = 1\}$.

- Пусть K – выпуклый конус. Рассмотрим $z = \theta x + (1-\theta)y$, где $x,\, y \in N$, $\theta \in [0;1]$. Ясно что $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \theta x_k + (1-\theta)y_k = \theta + (1-\theta) = 1$ и $z \in K$ в силу того что K – выпуклый конус. Значит $z \in N$, то есть N – выпуклое множество.

- Пусть N – выпуклое множество. Рассмотрим $c = \theta_1 x + \theta_2 y$, где $x,\, y \in K$, $\theta_1,\, \theta_2 \geqslant 0$. Если $x \in K$, то

$$\frac{x}{\|x\|_1} \in K,\ \frac{x}{\|x\|_1} \in N$$

  Ясно также, что $\|c\|_1 = \theta_1\|x\|_1 + \theta_2\|y\|_1$ и значит

$$1 - \frac{\theta_1\|x\|_1}{\|c\|_1} = \frac{\theta_2\|y\|_1}{\|c\|_1}$$

Тогда в силу выпуклости N

$$\frac{\theta_1\|x\|_1}{\|c\|_1}\cdot\frac{x}{\|x\|_1}+\frac{\theta_2\|y\|_1}{\|c\|_1}\cdot\frac{y}{\|y\|_1}\in N$$

$$\|c\|_1\cdot\left(\frac{\theta_1}{\|c\|_1}\cdot x+\frac{\theta_2}{\|c\|_1}\cdot y\right)=\theta_1 x+\theta_2 y\in K$$

Получаем, что K – выпуклый конус.

Таким образом, равносильность выпуклости этих множеств доказана. □

4. $X=\{x: x\in\mathbb{R}^2,\ e^{x_1}\leqslant x_2\}$. Рассмотрим $z=\theta x+(1-\theta)y$, где $x,\ y\in X$, $\theta\in[0;1]$. Справедливы неравенства $e^{x_1}\leqslant x_2$ и $e^{y_1}\leqslant y_2$.

$$\begin{aligned}
z_2&=\theta x_2+(1-\theta)y_2\geqslant\theta e^{x_1}+(1-\theta)e^{y_1}=e^{x_1}\left(\theta+(1-\theta)e^{y_1-x_1}\right)\\
&=e^{x_1}\left(\theta+(1-\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y_1-x_k)^k}{k!}\right)=e^{x_1}\left(\theta+1-\theta+(1-\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y_1-x_k)^k}{k!}\right)\\
&=e^{x_1}\left(1+(1-\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y_1-x_k)^k}{k!}\right)\geqslant e^{x_1}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\theta)^k(y_1-x_1)^k}{k!}\right)\\
&=e^{x_1}\cdot e^{(1-\theta)(y_1-x_1)}=e^{x_1-(1-\theta)x_1+(1-\theta)y_1}=e^{\theta x_1+(1-\theta)y_1}=e^{z_1}
\end{aligned}$$

То есть $z_2\geqslant e^{z_1}$, а значит $z\in X$ и X выпукло. □

5. Будем считать, что в условии опечатка и будем решать при условии нестрогого убывания. Будем также считать, что по направлению $0\in\mathbb{R}^n$ функция нестрого убывает (иначе такое множество не будет конусом). Пусть $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Функция убывает по направлению $0\neq e\in\mathbb{R}^n$ в точке x тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f(x)}{\partial e}=\langle\nabla f(x),\, e\rangle\leqslant 0$. Тогда множество направлений, по которым функция убывает в точке x, есть $K=\{e:\ \nabla f^\top(x)e\leqslant 0\}$. Причем неравенство $\nabla f^\top(x)e\leqslant 0$ задает полупространство, которое очевидно является выпуклым. Остается показать, что множество K является конусом. Непосредственно проверим это: пусть $e\in K$, $\theta\geqslant 0$. Тогда $\theta e\in K$, так как $\langle\nabla f^\top(x),\,\theta e\rangle=\theta\langle\nabla f^\top(x),\, e\rangle\leqslant 0$. Значит K – выпуклый конус. □
Здесь мы воспользовались тем, что конус, который является выпуклым множеством, является и выпуклым конусом. Это верно, так как если K – конус и выпуклое множество, то

$$\theta_1x+\theta_2y=(\theta_1+\theta_2)\left(\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x+\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}y\right)=(\theta_1+\theta_2)(\lambda x+(1-\lambda)y)\in K,$$

где $\theta_1,\ \theta_2\geqslant 0$, $\lambda=\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\in[0;1]$, $x,\ y\in K$. (Случай $\theta_1=\theta_2=0$ очевиден).

6. $S=\{a:\ a\in\mathbb{R}^k,\ p(0)=1,\ |p(t)|\leqslant 1,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$, где $p(t)=a_1+a_2t+\ldots+a_kt^{k-1}$. Заметим для начала, что $p(t)=a^\top x$, где x – вектор, такой что $x_i=t^{i-1}$, $i=1,\,2\,\ldots,\,k$. Покажем, что S – выпуклое множество. Пусть $a,\ b\in S$, $\theta\in[0;1]$. Тогда $c=\theta a+(1-\theta)b\in S$, так как

- $(c^\top x)(0)=\theta(a^\top x)(0)+(1-\theta)(b^\top x)(0)=\theta+(1-\theta)=1$
- $\left|(c^\top x)(t)\right|=\left|\theta(a^\top x)(t)+(1-\theta)(b^\top x)(t)\right|\leqslant\theta\left|(a^\top x)(t)\right|+(1-\theta)\left|(b^\top x)(t)\right|\leqslant\theta+(1-\theta)\leqslant 1$ при $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$

То есть действительно $c\in S$.
Ответ: множество S является выпуклым.