МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №14. Потоки (3)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. Дан взвешенный неориентированный граф. Напомним, что MST в нём — это минимальное (по суммарному весу входящих в него рёбер) остовное дерево. Найдите минимальное k такое, что существует k рёбер $e_1, \ldots, e_k$, таких что любой MST содержит хотя бы одно из этих рёбер. Иными словами, нужно удалить минимальное число рёбер, удаление которых увеличивает стоимость MST (или даже делает граф несвязным).

2. Задан полный взвешенный двудольный граф, в обеих долях которого находится по n вершин. Предложите алгоритм поиска самого дешёвого совершенного паросочетания.

3. На поляне резвится n покемонов. В вашем арсенале имеется a круглый мячей и b квадратных. Для каждого покемона известны числа p_i и q_i: вероятность того, что круглый или квадратный мяч, брошенный в него, попадёт в цель. В каждого покемона можно кинуть не более одного мяча каждой формы. Как нужно кинуть все мячи, чтобы максимизировать математическое ожидание числа покемонов, в которых попадёт хотя бы один мяч? Можете считать, что ошибки округления не появляются.

4. На плоскости с манхэттенской метрикой расположено n зданий и m бомбоубежищ. В каждом здании живёт определённое число жителей, а каждое бомбоубежище может вместить лишь ограниченное число беженцев. Определите такое назначение всех жителей по бомбоубежищам, чтобы суммарное проходимое ими расстояния от своих домой до убежищ было минимальным.

5. Вася потерял свой любимый массив длины n, все числа в котором были целыми из отрезка $[1, n]$. Достоверно про него Вася помнит только q фактов вида “на подотрезке массива с индексами от l_i до r_i все числа равны как минимум (как максимум) v_i”. Пусть $cnt(i)$ — количество вхождений числа i в этот массив. Восстановите искомый массив, минимизирующий $\sum\limits_{i=1}^{n} (cnt(i))^2$, за $\mathrm{poly}(n)$.

6. В турнире участвуют граждане с характеристиками $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Если сражаются i-й и j-й гражданин, то побеждает участник с большим номером, проигравший выбывает, а зрелищность сражения равна $a_i \oplus a_j$. У каждого участника есть ограничение на число сражений, в которых он может участвовать, — $b_i \geqslant 2$. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную зрелищность $n-1$ сражения вплоть до выявления победителя.

7. В мире существует всего n художественных произведений. Они издаются в книгах, стоимость покупки книги с i-м произведением равна c_i. Алёна заведует библиотекой, в которую в течение n дней приходят посетители. Каждый день приходит ровно один гость и читает какую-то книгу прямо в библиотеке, не забирая её домой (в i-й день посетитель хочет прочитать в библиотеке книгу с номером a_i; все эти a_i известны заранее). К сожалению, в библиотеке в любой момент времени могут храниться только k книг. Порой придётся выкидывать какие-то книги, чтобы необходимые уместились в хранилище. Если выкинутую книгу кто-то захочет прочитать, Алёне придётся купить её заново. Определите минимальную сумму, необходимую для обслуживания всех покупателей.

8. В обычной постановке стоимость пропускания f единиц потока вдоль ребра цены p равна $f \cdot p$. Определим теперь эту стоимость как $p \cdot \mathbb{I}(f > 0)$, то есть стоимость равна 0, если поток не течёт вообще, и равна p, если течёт положительный поток. Можно ли искать поток минимальной стоимости в такой постановке за полиномиальное время?

9. На мусорный полигон привезли n контейнеров, содержащих n типов мусора. В i-м контейнере находится a_{ij} килограммов мусора типа j. За одну минуту можно переместить 1 килограмм мусора из любого контейнера в любой другой. Нужно так переложить мусор, чтобы в каждом контейнере был мусор только одного типа. Найдите минимальное время для достижения цели за $O(n^3)$.