ОВАиТК, дз №2

Задача 1

Докажите, что если p — простое число, то группа S_{p-1} не может транзитивно действовать на множестве из p элементов.

Действие G на X называется **транзитивным**, если для любых $x, y \in X$ найдется элемент группы $g \in G$, такой что $g(x) = y$. Другими словами, действие транзитивно, если все элементы X образуют ровно одну орбиту.

Задача 2

Пусть p простой делитель $|G|$. Докажите, что в G найдется элемент порядка p.

Для этого рассмотрите следующее множество: наборы $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ элементов группы G таких, что $g_1 g_2 \dots g_p = e$. Сколько существует различных таких наборов? Рассмотрите на нем действие группой C_p, сдвигающее элементы набора циклически. Какая мощность у орбит этого действия?

Задача 3

Докажите изоморфизм $G/H \equiv G/(gHg^{-1})$

Задача 4

Докажите, что если $H < G$ индекса n, то найдется $K < H$, нормальная в G, такая что индекс $(G : K)$ делит НОД $|G|$ и $n!$.

Hint: мы разбирали похожую теорему на последнем семинаре.

Задача 5

Пусть $Inn(G)$ — множество изоморфизмов $G \to G$, представимых в виде $\phi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ с операцией композиции. Докажите, что отображение $G \to Inn(G)$, задаваемое правилом $g \mapsto \phi_g$, является гомоморфизмом. Найдите его ядро.