МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №10. Минимальные остовы

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) $n$ означает количество вершин в графе, а $m$ — количество рёбер.

**1.** Напомним, что остовным подграфом графа $G = (V, E)$ называется произвольный граф $H = (V, E')$, такой что $E' \subset E$. Найдите число остовных подграфов данного графа.

**2.** Может ли у несвязного графа быть остов (остовное дерево)?

**3.** *Красотой* остова будем считать вес наибольшего ребра в нём. Предложите алгоритм поиска остова с минимальной красотой. Что делать, если нужно, наоборот, максимизировать вес минимального ребра?

**4.** Докажите, что при использовании в СНМ только эвристики сжатия путей асимптотика ответа на каждый запрос есть $O^*(\log n)$.

**5.** Оцените асимптотику следующего алгоритма поиска минимального остова. Запустим алгоритм Борувки на $\log \log n$ шагов. На оставшемся графе (со сжатыми компонентами) запустим алгоритм Прима (с использованием кучи Фибоначчи).

**6.** Докажите, что если в графе веса всех рёбер попарно различны, то минимальный остов в нём единствен. Покажите, что это условие не является обязательным.

**7.** В данном графе найдите все рёбра, которые

а) могут

б) обязаны

лежать в минимальном остовном дереве.

**8.** Предположим, что в арсенале имеется некоторая эффективная процедура подсчёта числа остовных деревьев в графе (интересующиеся могут изучить матричную теорему о деревьях). Предложите способ, как с её помощью можно насчитать число минимальных остовов.

**9.** Среди всех минимальных остовов графа $G$ найдите тот, в котором степень вершины $v$ минимальна. Считайте, что веса всех рёбер графа — целые неотрицательные числа.

**1.** Ответ равен $2^{|E|}$.
**2.** Нет.
**3.** Можно доказать, что минимальный остов имеет минимальную красоту среди всех остовов.
**4.** (Решение взято с https://e-maxx.ru/algo/dsu). Введём ранг вершины: $size[v]$ — число вершин в её поддереве. Далее, весом ребра $(u, v)$ в СНМ назовём $|size[u] - size[v]|$. Ясно, что вес каждого конкретного ребра может только увеличиваться со временем. Далее, скажем, что ребро имеет тип $k$, если его вес попадает в промежуток $[2^k, 2^{k+1})$. Тогда всего есть $O(\log n)$ типов рёбер. Наконец, в каждом запросе `get` проигнорируем последние рёбра (на восходящем пути до лидера) каждого типа, то есть проигнорируем не больше $O(\log n)$ рёбер. Все остальные рёбра после сжатия увеличат свой тип, что не может происходить слишком часто.
**5.** Асимптотика равна $O(m \log \log n)$.
**6.** Предположите, что в графе есть два минимальных остова. Рассмотрите ребро минимального веса, которое встречается ровно в одном из этих деревьев, и цикл, который его стягивает в другом дереве.
**7.** Промоделируйте алгоритм Крускала. Внутри блока рёбер одной стоимости обязательно в минимальный остов входят мосты текущего графа, а могут входить – все рёбра, ещё не сжатые в одну компоненту.
**8.** Обратитесь к алгоритму Крускала. Внутри каждого блока рёбер одной стоимости нужно выбрать остовный лес.
**9.** Пусть $\varepsilon = \frac{1}{\deg(v)+1}$. Прибавим $\varepsilon$ ко всем рёбрам, инцидентным $v$. Оказывается, минимальный остов в новом графе имеет вес $w(T) + k\varepsilon$, где $w(T)$ — вес минимального остова в исходном графе, а $k$ — минимальная степень $v$ в таком остове. Для этого покажите, что MST (minimum spanning tree, минимальное остовное дерево) в новом графе (как набор рёбер) также является MST в исходном графе.