МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Семинар №12. Пересечение полуплоскостей, тернарный поиск

1. Рассмотрим следующий (неверный!) алгоритм "нахождения" диаметра конечного множества S. Построим выпуклую оболочку S. Для 1-й вершины найдём самую далёкую от неё. Затем пройдём по вершинам двумя указателями: сдвигаем первую точку и двигаем вторую, пока расстояние увеличивается. Приведите пример, на котором такой алгоритм ошибается.

2. Дан многоугольник с вершинами в целых точках. Найдите количество целочисленных точек в его внутренности за $O(n \log A)$, где n — количеств вершин, а A — ограничение на абсолютное значение координат.

3. Пусть две непараллельные прямые заданы координатами каких-то своих точек, при этом координаты — целые числа, не превосходящие C по модулю. Найдите асимптотическую оценку на координаты точки пересечения этих прямых.

4. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — точки на плоскости. Диаграммой Вороного называется разбиение всей плоскости на n частей, таких что в i-й части лежат в точности все точки, расстояние от которых до p_i не больше расстояния до любой другой p_j. Постройте диаграмму Вороного за $O(n^2 \log n)$.

5. В соревновании участвуют n спортсменов, у i-го из них есть своя скорость плавания u_i, бега — v_i, и езды на велосипеде — w_i. Жюри хочет создать трассу, где участникам придётся проплыть x метров, пробежать y метров и проскакать z метров, причём единственное требование — положительность всех x, y, z. Эти x, y, z пока не фиксированы и могут устанавливаться членами жюри. За $O(n^2 \log n)$ определите, кто может финишировать раньше остальных при должном выборе x, y, z.

6. На плоскости даны точки $p_1, \ldots, p_n$. Определите, существует ли такая точка q, что из q все остальные точки видны ровно в этом порядке при просмотре слева направо (точки не должны закрывать друг друга). Асимптотика: $O(n \log n)$.

7. На плоскости в вершинах выпуклой оболочки расположены n башен, охраняющих территорию. Нужно построить командный пункт в одной из точек многоугольника так, чтобы противнику пришлось взорвать как можно больше башен, чтобы вывести пункт из выпуклой оболочки оставшихся башен. Найдите самое надёжное положение для командного пункта за $O(n \log^2 n)$, то есть такое положение, которое вынудит противника взорвать как можно больше башен.

8. Дан выпуклый многоугольник на n вершинах. Найдите максимальный радиус круга, который можно в него поместить. Найдите также максимальное r, такое что в многоугольник можно поместить два круга радиуса r. Асимптотика: $O(n \log n \log \frac{1}{\varepsilon})$, где ε — требуемая точность.

9. У робота есть последовательность команд длины n, которую он выполняет ровно m раз подряд. Каждая команда — сдвинуться влево/вправо/вниз/вверх на координатной плоскости. За $O(n \log m)$ определите минимальное расстояние от начала координат до робота за всю историю его движения.

10. На плоскости дан треугольник. Найдите его точку Торричелли за $O(\log \frac{1}{\varepsilon})$, где ε — необходимая точность.

1. Может быть такое, что $dist(p_i, p_j) > dist(p_i, p_{j+1})$, но $dist(p_i, p_j) < dist(p_i, p_{j+2})$.
2. Воспользуйтесь формулой Пика. Нужно будет только найти число точек на сторонах. Это можно сделать с помощью `gcd`.
3. По формуле Крамера довольно легко установить, что координаты имеют порядок не больше C^3. Дальше можно рассмотреть прямые $y = \frac{A+1}{A+2}x$ и $y = \frac{A}{A+1}x + A$, их можно легко задать точками с небольшими координатами. У точки пересечения будет абсцисса порядка A^3.
4. Для каждой пары точек нужно провести серединный перпендикуляр между ними, затем пересечь $(n-1)$ полуплоскость для каждого i.
5. Переобозначим $\alpha_i = 1/u_i, \beta_i = 1/v_i, \gamma_i = 1/w_i$. Для каждого i требуется понять, существуют ли $x, y, z > 0$, такие что $x(\alpha_i - \alpha_j) + y(\beta_i - \beta_j) + z(\gamma_i - \gamma_j) \leqslant 0$ для всех j. Можно считать, что во всех таких неравенствах $z = 1$. Тогда останется пересечь полуплоскости вместо с ограничениями $x, y > 0$.
6. Условие "точка p_i видна из точки q раньше (левее), чем p_j" задаёт полуплоскость для q.
7. Примените бинарный поиск по ответу. Если k — кандидат на ответ, то противнику выгоднее всего взрывать k подряд идущих вершин выпуклой оболочки. Проведите рёбра между концами взрываемых отрезков. Нужно понять, есть ли точка в пересечении полуплоскостей.
8. Примените бинарный поиск по ответу. Сдвиньте стороны на r внутрь, найдите пересечение полуплоскостей.
9. Рассмотрим позиции робота в моменты времени с одним и тем же остатком по модулю m. Тогда траектория в эти моменты — равные отрезки на прямой. По ним можно сделать тернарный поиск, и так для каждого остатка.
10. Примените тернарный поиск по x, внутри по y.