ОВАиТК, дз №3

1. Пусть $I \subset J \subset R$ — кольцо с двумя вложенными идеалами. Тогда J/I — подмножество R/I. Докажите, что J/I — идеал, и
$$\frac{R/I}{R/J} \cong \frac{R}{J}$$
2. Пусть R — коммутативное кольцо. Докажите, что множество всех его нильпотентных элементов обазуют идеал в R. (этот идел называют нильрадикалом кольца)
3. Докажите, что в кольце можно делить, если в нем нет собственных левых и правых идеалов.

   Remark: заметим, что отсутствие двусторонних идеалов это не гарантирует, что вы докажите в следующей задаче
4. Пусть $Mat(n, R)$ — кольцо матриц размера $n \times n$ с элементами из кольца R. Докажите, что все идеалы в $Mat(n, R)$ устроены следующим образом: если $J \subset Mat(n, R)$ является идеалом, и $I \subset R$ — все значения, которые хоть раз встречаются в матрицах из J, то
   - I — идеал
   - J состоит из *всех* матриц над I

   Hint: внимательно посмотрите на это равенство:
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b & 0 & 0\end{pmatrix}$$

   Remark: согласитесь с тем, что это действительно контрпример, обещанный в предыдущей задаче
5. Докажите, что максимальный идеал явялется простым. Является ли пообраз простого идеала простым? Является ли прообраз максимального идеала максимальным?
6. * Пусть в коммутативном кольце R нет ненулевых нильпотентов. Докажите, что в нем $IJ = I \cap J$ для любых двух идеалов I и J.