Бонусная задача 3

Ковалев Алексей

Введем предикат $Q_n(x, y)$, который означает, что $x = y + n$. При $n = 0$ он означает, что $x = y$. При четных $n \neq 0$ он может быть выражен формулой

$$\exists z \forall a \forall b \big((a = x) \wedge (b = z) \vee (a = z) \wedge (b = y) \to Q_{\frac{n}{2}}(a, b)\big)$$

При нечетных n этот предикат может быть выражен формулой

$$\exists z \forall a \forall b \big((S(a) = x) \wedge (b = z) \vee (a = z) \wedge (b = y) \to Q_{\frac{n-1}{2}}(a, b)\big)$$

Проеврить, что $Q_n(x, y)$ действительно выражается приведенными выше формулами можно по индукции. База: при $n = 0$ предикат выражается формулой $x = y$. Переход: пусть предположение индукции выполнено для всех $k < n$. Для четных n формула истинна тогда и только тогда, когда $Q_{\frac{n}{2}}(x, z)$ – истина и $Q_{\frac{n}{2}}(z, y)$ – истина, что по предположению индукции означает $x = z + \frac{n}{2}$ и $z = y + \frac{n}{2}$. Отсюда получаем, что формула истинна тогда и только тогда, когда $x = y + n$, то есть она действительно задает предикат $Q_n(x, y)$. Аналогично для нечетных n. Для произвольного $n \neq 0$ предикат $Q_n(x, y)$ может быть выражен формулой

$$\exists z \forall a \forall b \big((a = x) \wedge (b = z) \vee (S(a) = x) \wedge (b = z) \vee (a = z) \wedge (b = y) \to Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(a, b)\big)$$

Тот факт, что эта формула задает $Q_n(x, y)$ аналогично может быть доказан по индукции. Пусть $L(n)$ – длина формулы, которая выражает предикат $Q_n(x, y)$. Тогда для некоторой константы c

$$L(n) = L\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + c$$

Значит $L(n) = O(\log n)$. При этом предикат $P_n(x)$ может быть выражен как $Q_n(x, 0)$, то есть для предиката $P_n(x)$ существует формула длины $O(\log n)$, выражающая его. $\square$