МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Семинар №15. Семинар, который несколько задержался

1. Докажите, что внутри n-угольника можно поставить $\lfloor n/3 \rfloor$ лампочек так, что их свет целиком подсветит весь многоугольник, если его границу воспринимать как стену.
2. Приведите пример последовательности многоугольников, для подсветки которых требуется $n/3 - O(1)$ лампочек.
3. Функция `atan2(y, x)` находит аргумент точки (x, y), то есть угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором (x, y). Докажите, что если u, v — два вектора, то `atan2(cross(u, v), dot(u, v))` равен углу между ними.
4. Дан набор из n полуплоскостей. Определите непустоту пересечения полуплоскостей этого набора за $O(n)$ в среднем.
5. Многоугольник называется звёздчатым, если существует такая точка внутри него, из которой виден весь многоугольник целиком (другими словами, существует точка p, такая что для любой точки многоугольника q отрезок pq не выходит за границы многоугольника). Проверьте, является ли данный многоугольник звёздчатым.
6. На плоскости даны n точек. Найдите диск минимального радиуса, который бы покрывал все эти точки, за $O(n)$ в среднем.
7. В море есть n островов в виде кругов, движение по которым запрещено. Корабль также имеет форму круга и расположен в некоторой точке. Определите, может ли корабль выплыть из этого архипелага, то есть удалиться на бесконечно большое расстояние от всех островов. Асимптотика: $O(n^3)$.
8. На плоскости расположено n точек. За $O(n \log n)$ найдите две самые близкие из них.

1. Покажите, что существует корректная раскраска всех вершин в три цвета, если рассмотреть граф на рёбрах и диагоналях триангуляции. Для этого введите двойственный граф (вершины — грани, соединены грани, разделяющие ребро). Такой граф будет деревом.
2. Рассмотрите пилу.
3. Подставляемые аргументы (с точностью до мультипликативных коэффициентов) равны $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
4. Перемешайте полуплоскости в случайном порядке. Для каждого префикса полуплоскостей найдите точку с максимальной ординатой, которая принадлежит всем полуплоскостям. Если точка для первых j полуплоскостей не принадлежит $(j+1)$-й, то нужно пересечь все прошлые полуплоскости с $(j+1)$-й и выбрать новую точку. Чтобы доказать, что этот алгоритм работает за $O(n)$ в среднем, рассмотрите вероятность изменения точки на j-м шаге: новая полуплоскость должна была не войти во множество полуплоскостей на прошлых шагах. Это происходит с вероятностью $O(1/j)$.
5. Для каждой стороны нужна ввести полуплоскость, локально содержащую многоугольник. Пересечение всех таких полуплоскостей называется ядром многоугольника.
6. Перемешайте точки в случайном порядке. Решите задачу для каждого префикса точек. Если найден минимальный диск для первых j точек, и в нём лежит $(j+1)$-я точка, то диск менять не нужно. Иначе решите новую задачу: найти минимальный диск, на границе которого лежит p_{j+1}, который покрывает $p_1, \ldots, p_j$. Чтобы доказать, что этот алгоритм работает за $O(n)$ в среднем, рассмотрите вероятность изменения диска на j-м шаге: новая точка должна задавать новый диск. Это происходит с вероятностью $O(1/j)$.
7. Раздуйте острова на радиус корабля, а корабль превратите в точку. Для каждой пары перекрывающихся островов определите ориентированный угол, под которым из точки виден отрезок между центрами. Тогда задача сводится к поиску цикла длины -2π, то есть отрицательного цикла в графе.
8. Воспользуйтесь идеей divide and conquer: разбейте множество точек пополам с помощью вертикальной прямой $x = x_0$, найдите ответ в каждом из множеств рекурсивно. Пусть d — минимальный из них. Тогда достаточно ограничиться полоской, отстоящей на $\pm d$ от x_0. Легко видеть, что для каждой точки из левой части полосы есть $O(1)$ точек правой полосы, которые лежат на расстоянии не больше d от неё.