Теория формальных систем и алгоритмов. Осень 2022. Бонусные задачи.

Правила выдачи бонусов.

Присылайте решения этих задач на почту `vyaly.mn@phystech.edu`. Формат файлов: pdf. Не забудьте указать своё имя и номер группы.

Первое правильное решение бонусной задачи дает +10 очков к оценке за работу в семестре (в 100-балльной системе). Если первых правильных решений несколько, то добавка +10 делится поровну на количество первых правильных решений. Первые правильные решения — это правильные решения, присланные до того момента, когда одно из присланных решений признано правильным.

Бонусная задача №1. Выдана 15.09.2022.
(решена Я.В. Богдановым 04.11.2022)
Докажите, что существует выводимая формула исчисления высказываний, которая встречается только в выводах длины больше 100.

Бонусная задача №2. Выдана 22.09.2022.
(пока не решена)
Пусть C — КНФ, в которую входят n переменных и которая состоит из K дизъюнктов. Докажите, что если у C есть опровержение резолюциями, в которое входит L дизъюнктов, то для $\neg C$ существует вывод в ИВ длиной $O(K+nL)$. (Длина вывода — количество формул в нём.)

Бонусная задача №3. Выдана 06.10.2022.
(решена А.Л. Ковалёвым, А.А. Поляковым 04.11.2022)
Рассмотрим модель $\langle \mathbb{Z}, <, =, S, 0\rangle$, где все знаки имеют обычный смысл, а S обозначает функцию последования: $S(x) = x + 1$. Унарный предикат $P_n(x)$ равен 1 тогда и только тогда, когда $x = n$. Докажите, что существует формула, которая выражает предикат $P_n(x)$ в этой модели и длина которой $O(\log n)$.

Бонусная задача №4. Выдана 27.10.2022.
(пока не решена)
Пусть $A(u, x, y)$ — формула логики первого порядка, у которой ровно три параметра u, x, y; P — бинарный предикатный символ, который не входит в формулу $A(u, x, y)$. Докажите, что тогда формула

$$\exists u\forall x\exists y A(u, x, y)$$

общезначима тогда и только тогда, когда общезначима формула

$$\exists u\Big(\forall x\big(\exists y A(u, x, y)\to P(u, x)\big)\to\forall x P(u, x)\Big).$$

Бонусная задача №5. Выдана 10.11.2022.
(решена А.Л. Ковалёвым 15.11.2022)
Докажите, что существует такой разрешимое подмножество D натуральных чисел, что неразрешимо множество $S(D) = \{y : y = S_{10}(x),\ x \in D\}$, состоящее из тех чисел, которые являются суммой цифр десятичной записи некоторого числа из D. ($S_{10}(x)$ — сумма цифр x в десятичной записи.)

Бонусная задача №6. Выдана 17.11.2022.
(пока не решена)
Докажите, что в классе перечислимых множеств есть неразрешимые множества, которые не являются m-полными (то есть, не любое перечислимое множество к ним m-сводится).