

Во всех задачах этого листка, при необходимости, можно считать, что все арифметические операции выполняются за $O(1)$.

1. Есть массив a_1, \dots, a_n и два игрока, которые ходят по очереди. Каждым своим ходом игрок откусывает от массива крайнее левое или крайнее правое число. Результат игрока — сумма всех откушенных им чисел. Каждый хочет максимизировать свой выигрыш. Кто выигрывает при правильной игре? Приведите алгоритм за $O(n^2)$.
2. Дана матрица $n \times m$ целых чисел. Нужно пройти из левого верхнего в правый нижний угол, ходить можно только вправо или вниз. Стоимость пути — это произведение всех чисел на пути. Найти минимальное количество нулей, на которое может заканчиваться стоимость пути. Асимптотика $O(nm)$.
3. Дан массив чисел a_1, \dots, a_n . За одну операцию разрешается удалить любое (кроме крайних) число, заплатив за это штраф, равный произведению этого числа на сумму соседних. После этого массив “склеивается”, чтобы в нём не было дырок. Требуется удалить все числа, кроме крайних, с минимальным суммарным штрафом. Асимптотика: $O(n^3)$.
4. На столе лежат n камней. Играют двое. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? Асимптотика: $O(n)$. За один ход игрок может взять из кучи
 - а) 1 или 2 камня, если текущее $n \equiv 0 \pmod{3}$;
 - б) 1 или 3 камня, если текущее $n \equiv 1 \pmod{3}$;
 - в) 1, 2 или 3 камня, если текущее $n \equiv 2 \pmod{3}$.
5. Назовём число *гладким*, если в его десятичной записи абсолютная разность любых двух рядом стоящих цифр не меньше l и не больше r . Дано число n . Сколько существует гладких натуральных чисел, состоящих из n цифр? Асимптотика: $O(n)$.
6. На плоскости дано n кругов. Любые два либо не пересекаются, либо вложены друг в друга. Найдите наибольшую цепочку вложенных кругов. Асимптотика: $O(n^2)$.
7. Дана последовательность из круглых открывающих и закрывающих скобок длины n . За $O(n^2)$ найдите число способов разбить её в конкатенацию некоторого количества правильных скобочных последовательностей.

1. Каков будет результат игры, если остаются только числа a_i, a_{i+1}, \dots, a_j ?
2. Найдите минимальную степень двойки, на которую делится ответ. То же с пятёркой. Как совместить ответы? Не забудьте про случай нулевых элементов.
3. Обратите внимание на число, удаляемое последним.
4. Кто выигрывает, если остаётся k камней: начинающий или его оппонент? Подобные задачи часто можно решать и почти без кода, например, здесь первый проигрывает, если и только если n делится на 3. Смысл задачи в том, что можно динамическим программированием без особых размышлений написать работающий код.
5. Сколько существует чисел длины k , оканчивающихся на цифру d ?
6. Для каждого круга найдите длину наибольшей цепочки, заканчивающейся на нём.
7. Сначала нужно за $O(1)$ научиться понимать, является ли подстрока ПСП. Далее введите одномерную динамику, перебирайте последний блок, выступающий отдельной ПСП. Можно действовать и иначе: заметить, что исходная строка сама должна быть ПСП, значит, её надо разбить на блоки с нулевым балансом. Если всего выделяется k блоков, то разбить их можно 2^{k-1} способами, т.к. каждые два соседних можно либо склеить, либо разделить.