МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Семинар №14. Триангуляция Делоне

1. Докажите, что если в множестве n точек, то для него существует не более $2^{C_n^2}$ триангуляций.

2. Докажите, что для для бесконечно многих n существует набор из n точек на плоскости, у которого есть по крайней мере $2^{n-o(n)}$ триангуляций.

3. Для данной триангуляции определите, является ли она триангуляцией Делоне за $O(n)$, где n — число сайтов.

4. С помощью триангуляции Делоне найдите две ближайшие точки в множестве за $O(n \log n)$.

5. С помощью триангуляции Делоне для каждой точки множества найдите ближайшую к ней за $O(n \log n)$.

6. Дано множество точек на плоскости. Пусть круг, построенный на отрезке $p_i p_j$ как диаметре, не содержит других точек множества внутри себя или на своей границе, то отрезок $p_i p_j$ обязательно является ребром триангуляции Делоне.

7. Найдите евклидово минимальное остовное дерево за $O(n \log n)$. То есть на плоскости даны n точек, стоимость ребра между i-й и j-й точками равна расстоянию между ними; требуется найти минимальное остовное дерево.

8. Пусть дано множество из n точек на плоскости, которое нужно разбить на k непустых кластеров. Расстояние между двумя кластерами — минимальное расстояние между парами точек в этих кластерах. Кластерное расстояние — минимальное из расстояний между парами кластеров.

а) Докажите, что если кластерное расстояние достигается на паре точек $p_i p_j$, то этот отрезок обязательно является ребром триангуляции Делоне.

б) Найдите разбиение на k кластеров с максимальным кластерным расстоянием за $O(n \log n)$.

9. Пусть уже известна триангуляция Делоне для данного множества сайтов. Постройте его диаграмму Вороного за $O(n \log n)$. Что нужно потребовать от триангуляции, чтобы диаграмму можно было построить за $O(n)$?

1. Каждая пара точек либо образует ребро триангуляции, либо нет.
2. Для $n = 3k$ рассмотрите k вложенных друг в друга треугольников. Соединить два соседних уровня можно как минимум 8 способами.
3. Нужно проверить легальность триангуляции, то есть легальность каждого ребра.
4. По сути, эта задача решена на прошлом семинаре. Вспомните, как строится триангуляция Делоне по диаграмме Вороного.
5. По сути, эта задача решена на прошлом семинаре. Вспомните, как строится триангуляция Делоне по диаграмме Вороного.
6. На лекции доказан критерий: часть серединного перпендикуляра p_ip_j является ребром диаграммы Вороного, если и только если на нём найдётся точка q, пустой круг которой содержит только p_i и p_j. Здесь в роли q выступает середина отрезка p_ip_j.
7. Пусть какое-то ребро p_ip_j минимального остова не входит в триангуляцию Делоне. Построим круг на p_ip_j как на диаметре. Внутри него или на его границе должна быть ещё хотя бы одна точка p_k. Но тогда ребро p_ip_j — самое длинное в цикле $p_ip_jp_k$.
8.

а) Внутри и на границе круга, построенного на p_ip_j как на диаметре, не может быть других точек.

б) Отсортируйте рёбра триангуляции Делоне, а вершины изначально отнесите в n отдельных кластеров. При прохождении очередного ребра придётся объединить два кластера в один.

9. Чтобы определить ячейку очередной вершины, нужно пересечь только те полуплоскости, которые порождаются смежными вершинами в триангуляции. Если изначально список рёбер каждой вершины отсортирован по полярному углу, то при пересечении полуплоскостей сортировку выполнять не нужно, и суммарное время работы составим $O(n)$ ввиду линейности размера триангуляции.