Листок 3

Выразительная сила логики первого порядка

Теорией называется произвольное множество замкнутых формул. Если интерпретация теории такова, что все формулы теории истинны, интерпретация называется *моделью* этой теории.

Теорема о полноте и корректности в сильной форме (аналог критерия условной выводимости в ИВ) говорит о следующем:

– теория непротиворечива (синтаксическое свойство) тогда и только тогда, когда имеет модель (семантическое свойство),

– формула φ выводится в теории Γ (синтаксическое свойство) тогда и только тогда, когда она истинна во всех моделях этой теории (семантическое свойство).

У теории существует модель тогда и только тогда, когда теория (синтаксически) непротиворечива.

Если существует формула, которая истинна в одной модели теории, но ложна в другой модели теории, то такая формула (а также её отрицание) невыводима в этой теории. Более того, если исходная теория непротиворечива (имеет модель), то эту формулу можно добавить к теории, получив снова непротиворечивую теорию (потому что она тоже будет иметь модель).

Пусть φ – формула первого порядка в сигнатуре σ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Пусть дана интерпретация сигнатуры σ с носителем M. Тогда φ определяет на M n–арный предикат. Будем говорить, что этот предикат выразим в интерпретации.

Автоморфизмом интерпретации назовем отображение $\alpha : M \to M$, удовлетворяющее свойствам:

1) это биекция,

2) каждый предикат интерпретации сохраняется, т.е. для любого предиката P верно, что

$$P(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow P(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)),$$

3) каждая функция интерпретации сохраняется, т.е. для любой функции f верно, что

$$\alpha(f(x_1, \ldots, x_k)) = f(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)).$$

Любой предикат, выразимый в интерпретации, сохраняется всеми её автоморфизмами.

В случае невозможности найти подходящий предикат (по разным причинам) для доказательства невыразимости используются иные техники.

Элиминация кванторов – это процедура, которая (в фиксированной интерпретации) приводит любую формулу φ к эквивалентной её бескванторной. Эта процедура возможна далеко не в любой интерпретации, но если она возможна, множество выразимых предикатов описывается обычно достаточно просто.

Пусть дано две разных интерпретации над одной сигнатурой $(M_1; P_1, \ldots)$ и $(M_2; P_2, \ldots)$. Эти две интерпретации называются элементарно эквивалентными, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы. Предъявив подходящую формулу (истинную в одной интерпретации и ложную в другой) можно доказать неэквивалентность интерпретаций. Критерием элементарной эквивалентности (в конечной сигнатуре) служит игра Эренфойхта-Фраиссе.

Игра Эренфойхта-Фраиссе для двух интерпретаций $(M_1; P_1, \ldots)$, $(M_2; P_2, \ldots)$, состоящая из k раундов ведётся между двумя игроками: $\exists$ и $\forall$.

Игра ведётся в k раундов, каждый раунд состоит сперва из хода $\exists$, затем из хода $\forall$.

В раунде i на своём ходу $\exists$ выбирает интерпретацию, в её носителе выбирает элемент и помечает его меткой i. Затем $\forall$ в другой интерпретации выбирает элемент и также помечает его меткой i.

После k шагов в каждой из интерпретаций помечены k элементов. Если существует предикат, который на наборе в одной из интерпретаций истинен, а в другой ложен (то есть он различает наборы), то выигрывает $\exists$, в противном случае выигрывает $\forall$.

Две интерпретации $(M_1; P_1, \ldots)$, $(M_2; P_2, \ldots)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого k в игру выигрывает $\forall$.

Более того, в случае выигрыша $\exists$ стратегия его выигрыша определяет (и определяется) той формулой, которая различает интерпретации.

Арифметика Робинсона представляет собой теорию с равенством, двумя бинарными операциями (сложение и умножение), унарной операцией (+1) и константой нуль. Аксиомы следующие (подразумевается замыкание следующих формул)

$R1)$ $0 \neq S(x)$

$R2)$ $S(x) = S(y) \to x = y$

$R3)$ $x + 0 = x$

$R4)$ $x + S(y) = S(x + y)$

$R5)$ $x \cdot 0 = 0$

$R6)$ $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

$R7)$ $x \neq 0 \to \exists y(x = S(y))$

Арифметика Пеано представляет собой теорию над той же сигнатурой, аксиомы это R1-6 плюс схема аксиом следующего вида:

Для каждого предиката P есть аксиома

$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(S(x)))) \to \forall x A(x)$

3.1: Выразить одноместный предикат $x = 1$ или доказать его невыразимость

a) в $\langle \mathbb{N}; =, + \rangle$

b) в $\langle \mathbb{R}; =, + \rangle$

3.2: Выразить или доказать невыразимость предиката в $\langle \mathbb{N}; | \rangle$, здесь $a|b$ означает, что $\exists c \; ac = b$

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 2$

d) x – простое число

e) x – есть точный квадрат

3.3: Аксиоматизация Тарского евклидовой планиметрии, интерпретация $\langle \mathbb{R}^2; C(a,b,c) \rangle$, где предикат $C(a,b,c)$ означает, что $\rho(a,b) = \rho(b,c)$ (ρ – есть расстояние между точками). Выразить предикаты

a) бинарный предикат «точки x и y совпадают»

b) тернарный предикат «три точки x, y, z лежат на одной прямой»

c) кватернарный предикат «четыре точки x, y, z, t образуют параллелограмм»

d) кватернарный предикат «два отрезка xy и zt равны по длине»

e) тернарный предикат «точка x лежит на отрезке yz»

f) кватернарный предикат «две точки x и y лежат по одну сторону от прямой zt»

g) тернарный предикат «угол xyz прямой»

h) сенарный предикат «углы xyz и tuv равны»

Как можно заметить, выражается достаточно много – подходящая аксиоматизация позволяет переформулировать евклидову планиметрию в логике первого порядка (без использования теории множеств)

3.4: Метрическая геометрия, интерпретация $\langle \mathbb{R}^2; E(x,y) \rangle$, где предикат $E(x,y)$ означает, что расстояние между точками x и y равно единице. Выразить предикаты

a) бинарный предикат «точки x и y совпадают»

b) бинарный предикат «расстояние между точками x и y меньше либо равно 2»

c) бинарный предикат «расстояние между точками x и y равно 2»

d) бинарный предикат «расстояние между точками x и y равно $\sqrt{3}$»

e) бинарный предикат «расстояние между точками x и y равно $\sqrt{2}$»

f) бинарный предикат «расстояние между точками x и y равно $1/2$»

3.5: Найти все возможные автоморфизмы

a) в $\langle \mathbb{Z}; =, < \rangle$

b) в $\langle \mathbb{Z}; =, + \rangle$

Исследовать обе интерпретации на выразимость в них констант.

3.6: Выразить или доказать невыразимость предикатов в $\langle \mathbb{Z}; < \rangle$

a) $x = y$

b) $x = y + 1$

c) $x = y + 2$

d) $x = y + z$

3.7: Доказать арифметичность предикатов (т.е. выразимость в $\langle \mathbb{N}; =, +, \cdot \rangle$

a) $x \leqslant y$

b) $x = c$ для любой константы c

c) x – простое число

d) r – есть остаток от деления x на y

e) x – есть степень двойки

f) x – есть степень шестёрки

g) $x = y!$

h) x – есть факториал некоторого числа

i) x – есть простое число номер y

3.8: Для каждого натурального $n \geqslant 1$ определить, выразим ли унарный предикат $a = 0$ в модели $\langle \mathbb{Z}_n; =, P(a, b) \rangle$, где $P(a, b)$ есть предикат '$a + b \equiv 0 \mod n$'.

3.9: Провести элиминацию кванторов (здесь $S(x) = x + 1$)

a) в $\langle \mathbb{Z}; =, S(x), 0 \rangle$

b) в $\langle \mathbb{Z}; =, S(x), < \rangle$

3.10: Определить выразимы ли предикаты в данных интерпретациях

1) бинарный предикат "$a = b + 1$" в $(\mathbb{Z}; =, a + b = 1)$,

2) бинарный предикат "a и b одной чётности" в $(\mathbb{N}_0; +, =)$,

3) унарный предикат "$x = 1/2$" в $(\mathbb{R}; 0, 1, <, =)$,

4) бинарный предикат "$a = b + 1$" в $(\mathbb{Z}; a = b + 2)$,

5) бинарный предикат "$|a - b| = 2$" в $(\mathbb{R}; |a - b| = 1)$,

6) тернарный предикат "$xy = z$" в $(\mathbb{R}; =, +, a^2 = b)$.

3.11: Теорема Тарского–Зайденберга – провести до конца вычисления алгоритма для разрешения следующей формулы

$$\forall p \, \exists x \, (x^2 + p > 0)$$

3.12: Под $A + B$ будем понимать линейный порядок, в котором "сперва стоит A, а затем B" – формально это значит, что рассматривается множество $S = \{(a,1) \mid a \in A\} \cup \{(b,2) \mid b \in B\}$ с порядком $(a,x) < (b,y)$ тогда и только тогда, когда $x < y$ или $x = y$ и $a < b$. Аналогично определяются $A + B + C$ и так далее. Под A^* мы понимаем A с обратным порядком. Под 1 – множество, содержащее один элемент.

Проверьте линейные порядки $(S, <)$ на элементарную эквивалентность (все со всеми, пока не надоест). S равно:

1) $\mathbb{N}$

2) $\mathbb{Z}$

3) $\mathbb{Q}$

4) $\mathbb{N} + \mathbb{N}$

5) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$

6) $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$

7) $\mathbb{Z} + \mathbb{Q}$

8) $1 + \mathbb{Z} + 1$

9) $\mathbb{N} + \mathbb{N}^*$

10) $\mathbb{N} + \mathbb{Z} + \mathbb{N}^*$

11) $1 + \mathbb{N}$

12) $\mathbb{N} + 1$

13) $\mathbb{Z} + \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$

14) $\mathbb{Q} + \mathbb{Z} + \mathbb{Q}$

3.13: Докажите с помощью игры Эренфойхта-Фраиссе и с помощью предъявления явной формулы, что $(\mathbb{Z}, 0, +)$ и $(\mathbb{Z}^2, \mathbf{0}, +)$ не элементарно эквивалентны. На $\mathbb{Z}^2$ сложение покоординатное.

3.14: Доказать, что в арифметике Робинсона недоказуемы формулы

a) $\forall x\ (0 + x = x)$

b) $\forall x\ (0 \cdot x = x)$

c) $\forall x\ \exists y\ (y + y = x \lor y + y + 1 = x)$

d) Пусть $P(x)$ есть предикат "x – простое число" (то есть если число есть произведение двух делителей, то одно из них 1, а второе – это число). Доказать недоказуемость и неопровержимость

$$\exists x\ (x \neq 2 \land P(x) \land P(x+1))$$

3.15: Доказать, что в арифметике Пеано доказуемы формулы:

1) R7

2) $x + y = y + x$

3) $0 \cdot x = 0$

4) $x \cdot y = y \cdot x$