Основные алгоритмы 6

Ковалев Алексей

1. Пусть X – случайная величина, равная выигрышу. Тогда

$$\mathbb{E}[X] = -100 \cdot \frac{5^3}{6^3} + 100 \cdot \frac{1}{6} + 100 \cdot \frac{1}{6} + 100 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{425}{54}$$

Ответ: $-\frac{425}{54}$.

2. Пусть X – случайная величина, равная выигрышу игрока по одному билету (если игрок ничего не выиграл, то выигрыш 0). Тогда, если играло n человек

$$\mathbb{E}[X] = \frac{0.4 \cdot 100n}{n} = 40$$

Отсюда, пользуясь неравенством Маркова

$$P(X \geqslant 5000) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{5000} = \frac{40}{5000} = \frac{1}{125} < \frac{1}{100}$$

$\square$

3. Рассмотрим слова в алфавите $\{a, b\}$ как слова в алфавите $\{0, 1\}$, слово ab в котором имеет вид 01. Теперь любое слово – число в двоичной системе счисления (возможно, с ведущими нулями). Рассмотрим все вхождения подслова ab: оно может находиться на четной или нечетной позиции (позиция подслова – позиция его первой буквы), причем подслова на четных и нечетных позициях не пересекаются, так как если на i-том месте есть подслово, то подслов точно нет на $(i+1)$-ом и $(i-1)$-ом месте. Значит искомое математическое ожидание равно сумме математических ожиданий случайных величин A и B, где A – количество подслов ab на четных местах; B – количество подслов ab на нечетных местах.
Рассмотри произвольное двоичное слово длины n (возможно, с ведущими нулями). Переведем его в четверичную систему счисления, получив число из $n/2$ цифр. При этом каждое подслово ab, находившееся на четном месте, и только оно перешло в цифру 1. Значит математическое ожидание количества подслов ab на четных местах $\mathbb{E}[A] = n/2 \cdot 1/4 = n/8$. Чтобы найти математическое ожидание количества подслов ab на нечетных местах, отбросим первую и последнюю цифры двоичного числа, и переведем полученнон $n-2$ значное число в четверичную систем счисления. Получим $(n-2)/2$ значное число, причем каждая подстрока ab, находившаяся на нечетном месте, и только она перешла в цифру 1. То есть математическое ожидание количества подслов ab на нечетных местах $\mathbb{E}[B] = (n-2)/2 \cdot 1/4 = (n-2)/8$.
Искомое математическое ожидание равно сумме $\mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B] = n/8 + (n-2)/8 = (2n-2)/8 = (n-1)/4$. Для $n = 20$ математическое ожидание количества подстрок ab равно $(20-1)/4 = 19/4$.
Ответ: 19/4.

4. Рассмотрим некоторую перестановку σ и произвольные i и j, такие что $i < j$. Тогда $P(\sigma_i > \sigma_j) = \frac{1}{2}$. Значит

$$\mathbb{E}[I(\sigma)] = \sum_{i<j} 1 \cdot P(\sigma_i > \sigma_j) = \sum_{i<j} \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

Ответ: $\frac{n(n-1)}{4}$.

5. Пусть ξ_i – случайная величина, равная 1, если $x_i = i$ и 0 иначе. Количество чисел оставшихся на своих местах $X = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ – также случайная величина.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n] = \mathbb{E}[\xi_1] + \mathbb{E}[\xi_2] + \ldots + \mathbb{E}[\xi_n] = n \cdot \mathbb{E}[\xi_1],$$

так как все перестановки равновероятны, а значит и каждое из чисел остается на месте с одинаковой вероятностью. В свою очередь

$$\mathbb{E}[\xi_1] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \mathbb{E}[\xi_1] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Ответ: 1.

6. Функция $f(x) = 2^x$ – монотонна возрастает, поэтому

$$P(X \geqslant 6) \leqslant P(f(X) \geqslant f(6)) = P\left(2^X \geqslant 64\right)$$

Из неравенства Маркова

$$P\left(2^X \geqslant 64\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[2^X\right]}{64} = \frac{5}{64}$$

$$P(X \geqslant 6) \leqslant \frac{5}{64} < \frac{1}{10}$$

□

7. Будем действовать согласно такому алгоритму:

1. Будем формировать граф G_p: , берем вершины независимо с вероятностью $p = 1/d$. Если в G_p попали две вершины, между которыми было ребро в изначальном графе, то добавим в граф это ребро.

2. В получившемся графе G_p удалим каждое ребро, с одной из инцидентных ему вершин, получив, таким образом, граф H_p.

Теперь оценим математическое ожидание количества вершин в графе G_p

$$\mathbb{E}[V(G_p)] = \frac{n}{d}$$

Пусть X – количество ребер в графе G_p. Ребро попадает в граф тогда и только тогда, когда обе инцидентные вершины попадают в граф, то есть с вероятностью $(1/d)^2$. Тогда

$$\mathbb{E}[X] = \frac{nd}{2} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^2 = \frac{n}{2d}$$

Значит после удаления всех эти ребер удалится не более $\frac{n}{2d}$ ребер, а значит в H_p будет хотя бы $\frac{n}{d} - \frac{n}{2d} = \frac{n}{2d}$ вершин. При этом граф H_p не содержит ни одного ребра, то есть является независимым множеством на $\frac{n}{2d}$ вершинах. □