

ОВАиТК-4

Домашнее задание

1. Пересечение подгрупп

Докажите, что пересечение произвольного (не обязательно конечного или счетного) множества подгрупп является подгруппой. Верно ли, то пересечение произвольного множества нормальных подгрупп является нормальной подгруппой?

2. Образ подгруппы при факторизации

Пусть $H < K < G$, и H — нормальная подгруппа G . Докажите, что образ K при факторизации G по H является подгруппой в G/H и он изоморфен K/H .

3. Разложение абелевой группы

Сколько элементов порядка 2 может быть в абелевой группе из 60 элементов?

4. Группа, порожденная множеством

Часто говорят, что подгруппа $H < G$ порождена множеством S , если G состоит из всех конечных произведений элементов из S и обратных к ним (то есть из конечных произведений $h_1 \dots h_n$, где для любого i элемент h_i или h_i^{-1} лежат в S).

Докажите, что в таком случае H — наименьшая по включению подгруппа, содержащая все элементы из S .

Последнее утверждение нужно понимать так, что если мы упорядочим все подгруппы G по включению, то H будет в этом частично упорядоченном множестве наименьшим элементом.