«Теория формальных систем и алгоритмов»

Контрольная работа 1

Фамилия: *Группа:*

1. Пусть формула A выводима, а формула B невыводима в исчислении высказываний. Существует ли такая формула C, что формула $((C \to B) \to \overline{A}) \to B$ выводима?

2. Пусть Γ — множество всех формул вида $(A \to B) \to (\overline{B} \to A)$, где A — произвольная формула ИВ, не содержащая отрицаний, а B — такая формула, что либо B выводима, либо $\overline{B}$ выводима. Проверить множество Γ на синтаксическую полноту и противоречивость.

3. Построить вывод (без использования теоремы о дедукции)

$A, B \to (C \to (A \to D)) \vdash B \to (C \to D)$

4. Докажите, что замена третьей схемы аксиом на пару схем

$\overline{\overline{A}} \to A$

$A \to (\overline{A} \to B)$

приводит к неэквивалентному исчислению высказываний.

5. Пусть Γ_1, Γ_2 – множества гипотез. Докажите, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ противоречиво тогда и только тогда, когда существует формула φ такая, что $\Gamma_1 \vdash \varphi$ и $\Gamma_2 \vdash \overline{\varphi}$.

«Теория формальных систем и алгоритмов»

Контрольная работа 2

Фамилия: *Группа:*

1. Дана формула логики первого порядка в сигнатуре $\sigma = (P(\cdot,\cdot))$.

$$\forall x \overline{\exists y P(x,y) \to P(x,y)}$$

1) Исследуйте формулу на общезначимость.

2) Приведите формулу к предварённой нормальной форме.

2. Дана формула логики первого порядка в сигнатуре $\sigma = (P(\cdot,\cdot), Q(\cdot))$.

$$\forall y\,(P(x,y) \to Q(y)) \to \exists x\,(P(x,y) \wedge Q(y))$$

Пусть носителем интерпретации является $\mathbb{N}$, $P(x,y)$ интерпретируется как “y есть некоторая степень x”, $Q(x)$ интерпретируется как ”x имеет единственный простой делитель”.

1) На каких из следующих оценок формула в данной интерпретации истинна?

$x = 10, y = 25$,

$x = 8, y = 4$,

$x = 9, y = 18$,

$x = 1, y = 20$.

2) Существует ли формула класса Σ_0, эквивалентная исходной формуле?

3. Исследовать формулу в сигнатуре $\sigma = (Q(\cdot,\cdot))$ на выводимость в ИП

$$\forall x \exists y \exists z \forall t\,(Q(x,y) \wedge Q(z,t)) \to \exists x \forall y \forall z \exists t\,(Q(x,y) \wedge Q(z,t))$$

4. Пусть фиксирована сигнатура σ из трёх унарных предикатных символов (функциональных символов нет).

1) Приведите пример замкнутой формулы ψ над σ, которая истинна на любой интерпретации, носитель которой содержит 5 элементов, но которая при этом не является общезначимой.

2) Пусть известно, что на любой интерпретации, носитель которой содержит 10 элементов, замкнутая формула φ над σ истинна. Докажите, что φ общезначима.

«Теория формальных систем и алгоритмов»

Контрольная работа 3

Фамилия: *Группа:*

1. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. В интерпретации $(\mathbb{N}; =, <, f)$ выразить формулу, утверждающую, что функция f не является биекцией.

2. Описать все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}_6; =, +)$ (группа остатков по модулю 6 с равенством и сложением по модулю 6).

3. В модели $(\{0,1\}^*; P(\cdot,\cdot))$. где $P(x,y)$ означает, “x является суффиксом y” исследовать на выразимость предикаты

– унарный предикат $Q(y)$, означающий “$\exists x\, y = xx$”,

– унарный предикат $R(y)$, означающий “длина слова y равна 1”.

4. Пусть фиксирована сигнатура $\sigma = \{P(\cdot,\cdot)\}$ из одного бинарного предикатного символа.

Над этой сигнатурой заданы две модели:

– $(\mathbb{N}; P)$, где $P(x,y)$ понимается как “x делит y”,

– $(2^{\mathbb{N}}; P)$, где $P(x,y)$ понимается как “x является подмножеством y”.

Проверьте две данные модели на элементарную эквивалентность.

«Теория формальных систем и алгоритмов»

Контрольная работа 4

Фамилия: *Группа:*

1. Пусть $\mathsf{Halt} = \{(\langle M\rangle, \omega) \,|\, M$ останавливается на $\omega\}$, пусть L некоторый конечный язык.

Построить сводимость

$$(\mathsf{Halt} \cup L) \leqslant^m (\mathsf{Halt} \setminus L)$$

2. Доказать, что язык L неразрешим

$$L = \{(\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle) \,|\, \mathsf{Accept}(M_1) \leqslant^m \mathsf{Accept}(M_2)\}$$

В следующих двух задачах S – это множество всех слов над алфавитом $\{0, 1\}$, в которых единиц столько же, сколько нулей.

3. Определить, принадлежит ли классам $\mathcal{R}, \mathcal{RE}, \mathrm{co}\,\mathcal{RE}$ язык

$$L_1 = \{\langle M\rangle \,|\, \mathsf{Accept}(M) \subseteq S\}$$

4. Определить, принадлежит ли классам $\mathcal{R}, \mathcal{RE}, \mathrm{co}\,\mathcal{RE}$ язык

$$L_2 = \{\langle M\rangle \,|\, S \subseteq \mathsf{Accept}(M)\}$$