Основные алгоритмы 5

Ковалев Алексей

1. Назовем исходом A такой исход: наибольшее среди первых 12 чисел в перестановке больше наибольшего среди последних 12 чисел $\iff$ число 24 находится в перестановке среди первых 12 чисел.

$$P(A) = \frac{\binom{12}{1} \cdot 23!}{24!} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Пусть $x \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Тогда

$$P(x \vdots 2 \mid x \vdots 3) = \frac{P(x \vdots 2 \wedge x \vdots 3)}{P(x \vdots 3)} = \frac{P(x \vdots 6)}{P(x \vdots 3)} = \frac{\lfloor 100/6 \rfloor}{\lfloor 100/3 \rfloor} = \frac{16}{33}$$

Ответ: $\frac{16}{33}$.

3. Пусть событие A – "среди выбранных чисел есть 2"; событие B – "среди выбранных чисел есть 3". Тогда

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{\binom{36}{4}}{\binom{36}{5}} = \frac{5}{32}$$

$$P(AB) = \frac{\binom{36}{3}}{\binom{36}{5}} = \frac{5}{264}$$

$$P(A \mid B) = \frac{5/264}{5/32} = \frac{4}{33} \neq P(A)$$

Значит события зависимы.
Ответ: события зависимы.

4. Пусть событие A – "f инъективна"; событие B – "$f(1) = 1$".

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{n!}{n^n}$$

$$P(B) = \frac{n^{n-1}}{n^n}$$

$$P(AB) = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

$$P(A \mid B) = \frac{(n-1)!/n^n}{n^{n-1}/n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{n!}{n^n} = P(A)$$

Значит события независимы.
Ответ: события независимы.

5. Вероятностное пространство – двоичные словы длины 3. Если на i-том месте ноль – i-тый член жюри принял неправильное решение, и наоборот, если на i-том месте единица – i-тый член жюри принял неправильное решение. Вероятность принятия праивльного решения (исход X) будет равна сумме вероятностей того, что в слове есть хотя бы 2 единицы. Назовем исходами A, B, C исходы, при которых соответсвенноо на первом, втором и третьем месте в слове стоят единицы. Члены жюри принимают решения независимо, значит

$$P\big(AB\overline{C}\big) = \frac{1}{2}p^2,\ P\big(A\overline{B}C\big) = P\big(\overline{A}BC\big) = \frac{1}{2}p(1-p),\ P(ABC) = \frac{1}{2}p^2$$

$$P(X) = P\big(AB\overline{C}\big) + P\big(A\overline{B}C\big) + P\big(\overline{A}BC\big) + P(ABC) = 2\cdot\frac{1}{2}p^2 + 2\cdot\frac{1}{2}p(1-p) = p^2 + p(1-p) = p$$

То есть $P(X) = P(A) = P(B) = p$.
Ответ: p.

6. Оптимальной стратегией будет положить в одну коробку один белый шар, а в другую – остальные белые и один черный. Докажем это:
Пусть в первой коробке лежит a белых и b черных шаров. Тогда в другой коробке лежит $10-a$ белых и $10-b$ черных шаров. Вероятность выжить $p(a,b)$ равна

$$p(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a-b}$$

Исследуя на максимум функцию $p(a,b)$, при условии $a \in \{0,1,\ldots,10\},\ b \in \{0,1,\ldots,10\},\ a+b \neq 0$, получаем, что максимум достигается при $a=1,\ b=0$, причем $p(1,0) = \frac{14}{19}$.
Ответ: $\frac{14}{19}$.

7. Пусть событие X – победа в матче. Событием $X(a:b)$ будем обозначать событие "первый игрок победил из состояния, когда счет был $a:b$". Событие $a:b \to a+1:b$ означает, что счет был $a:b$, а стал $a+1:b$. Тогда вероятность того, что первый игрок выиграет матч при счете $a:b$, где $a<10,\ b<10$ равна по формуле полной веротяности

$$\begin{aligned}P(X(a:b)) = P(a:b \to a+1:b)\cdot P(X(a:b) \mid a:b \to a+1:b) &+ \\ + P(a:b \to a:b+1)\cdot P(X(a:b) \mid a:b \to a:b+1)&\end{aligned}$$

Причем $\forall a,b\colon a<10,\ b<10$

$$P(X(a:b) \mid a:b \to a+1:b) = P(X(a+1:b))$$

$$P(a:b \to a+1:b) = P(a:b \to a:b+1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X(10:b)) = 1,\ b \neq 10;\ P(X(a:10)) = 0,\ a \neq 10$$

Тогда

$$\begin{aligned}P(X(8:7)) &= \frac{1}{2}\cdot P(X(9:7)) + \frac{1}{2}\cdot P(X(8:8)) = \\ &= \frac{1}{4}\cdot P(X(10:7)) + \frac{1}{4}\cdot P(X(9:8)) + \frac{1}{4}\cdot P(X(9:8)) + \frac{1}{4}\cdot P(X(8:9)) = \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8}\cdot P(X(10:8)) + \frac{1}{8}\cdot P(X(9:9))\right)\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot P(X(9:9)) + \frac{1}{8}\cdot P(X(8:10)) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{16}\cdot P(X(10:9)) + \frac{3}{16}\cdot P(X(9:10)) = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{11}{16}$.

8. Пронумеруем яйца, учавствующие в первых k раундах числами от 1 до $k+1$ в соответствии с их прочностью (яйцо с большим номером побеждает яйцо с меньшим номером). Пространство вероятностей – перестановки чисел от 1 до $k+1$. Условию победы в n раундах удовлетворяет те и только те перестановки, где на первом месте стоит число $n+1$. Таких перестановок существует $n!$. Затем, при уччастии в $n+1$ раунде появляется новое яйцо. Переприсвоим яйца новые номера, также соответствующие их прочности, но теперь с учетом нового яйца. Тогда есть $(n+1)!$ перестановок, в которых максимальное по прочности яйцо стоит на первом месте. Именно они соответствуют случаям победы в $n+1$ раунде. Всего есть $n!+(n+1)!$ перестановок, в которых либо единственный победитель во всех раундах, либо в первых n один победитель, а в последнем раунде – другой. Значит вероятность p победить в $n+1$ раунде составляет

$$p = \frac{(n+1)!}{n!+(n+1)!} = \frac{n+1}{1+n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ответ: $\frac{n+1}{n+2}$.

9. Назовем событием X событие "на первых 10 позициях стоит меньше единиц, чем на последних 11". Рассмотрим первые и последние 10 мест в перестановке. Пусть количество единиц на первых 10 местах равно a, на послених 10 местах – b. Тогда в силу симметрии

$$P(a > b) = P(a < b)$$

- $a > b$: на последних 11 местах либо b, либо $b+1$ единиц, причем ни один из этих случаев не подходит, то есть
$$P(X \mid a > b) = 0,\ P\big(\overline{X} \mid a > b\big) = 1$$
- $a < b$: на последних 11 местах либо b, либо $b+1$ единиц, причем оба случая подходят, то есть
$$P(X \mid a < b) = 1,\ P\big(\overline{X} \mid a < b\big) = 0$$
- $a = b$: на последних 11 местах либо b, либо $b+1$ единиц, причем только один из случаев подходит, то есть
$$P(X \mid a = b) = \frac{1}{2},\ P\big(\overline{X} \mid a = b\big) = \frac{1}{2}$$

Тогда вероятность события X по формуле полной вероятности

$$P(X) = P(a<b)\cdot P(X \mid a<b) + P(a>b)\cdot P(X \mid a>b) + P(a=b)\cdot P(X \mid a=b) = P(a<b) + \frac{1}{2}\cdot P(a=b)$$

Найдем также вероятность события $\overline{X}$ по формуле полной вероятности

$$P\big(\overline{X}\big) = P(a<b)\cdot P\big(\overline{X} \mid a<b\big) + P(a>b)\cdot P\big(\overline{X} \mid a>b\big) + P(a=b)\cdot P\big(\overline{X} \mid a=b\big) = P(a>b) + \frac{1}{2}\cdot P(a=b)$$

С учетом $P(a>b) = P(a<b)$ получаем
$$P(X) = P\big(\overline{X}\big)$$

Значит $P(X) = \frac{1}{2}$.
Ответ: $\frac{1}{2}$.