

# Расширения полей

1. Чему изоморфна аддитивная группа конечного поля  $\mathbb{F}_{p^n}$ ?
2. Чему изоморфна мультипликативная группа  $\mathbb{F}_{p^n}$ ?

Лемма 1: Верно равенство

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

Лемма 2: если в группе  $G$  порядка  $n$  для каждого  $d|n$  есть не более  $d$  корней многочлена  $x^d = e$ , то эта группа циклическая.

3. Элемент, из которого можно извлечь корень, называют квадратичным вычетом. Сколько в конечном поле может быть квадратичных вычетов (ответ будет разным для нечетной характеристики и характеристики 2)?
4. Найдите явный изоморфизм

$$\mathbb{F}_2/(x^3 + x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{F}_2/(x^3 + x + 1)$$

5. Сколько над полем  $\mathbb{F}_9$  есть неприводимых многочленов порядка 6? Порядка 12?
6. В каждой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой. При нажатии на кнопку лампочка меняет состояние — загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены.  
Задано конечное множество целых чисел — шаблон  $S$ . Его можно перемещать вдоль числовой оси как жесткую фигуру и приложив в любом месте, поменять состояние всех лампочек закрытых шаблоном. Докажите, что всё, что можно получить с помощью пяти различных таких шаблонов, можно заменить одним шаблоном.
7. Докажите в предположении предыдущей задачи, что с помощью таких операций и одним шаблоном можно добиться, чтобы горели ровно две лампочки.
8. Докажите, что в  $\mathbb{R}$  есть ровно одно поле, изоморфное  $\mathbb{Q}[t]/(t^2 - 2)$ .
9. Докажите, что в  $\mathbb{C}$  есть ровно три поля, изоморфных  $\mathbb{Q}[t]/(t^3 - 2)$ . Сколько из них лежат на прямой?