ОВАиТК 3

Ковалев Алексей

1. Рассмотри гомоморфизм

$$\varphi\colon R \to R/I$$
$$\varphi\colon a \mapsto a + I$$

Этот гомоморфизм является сюръективным, значит $\varphi(J)$ – идеал в R/I. Причем $\varphi(J) = J/I$, то есть J/I – идеал в R/I. $\square$
Теперь рассмотрим отображение

$$\pi\colon R/I \to R/J$$
$$\pi\colon a + I \mapsto a + J$$

Для этого отображение верно $a + I = b + I \Rightarrow a - b \in I \subset J \Rightarrow a + J = b + J$. Тогда π – сюръективный гомоморфизм колец. Его ядро

$$\operatorname{Ker}\pi = \{a + I \in R/I : a + J = 0 + J\} = \{a + I \in R/I : a \in J\} = J/I$$

Отсюда по теореме о гомоморфизме

$$\frac{R/I}{\operatorname{Ker}\pi} = R/J$$

то есть

$$\frac{R/I}{J/I} = R/J$$

$\square$

2. Для начала докажем, что множество нильпотентных элементов образует подкольцо в R. Пусть a и b – нильпотенты в R, $a^k = 0$ и $b^n = 0$. Во-первых, множество нильпотентных элементов замкнуто относительно умножения, так как

$$(ab)^{\max(n,k)} = a^{\max(n,k)} b^{\max n,k} = 0$$

Во-вторых, нильпотентные элементы образуют группу по сложению. Рассмторим $(a + b)^{n+k}$

$$(a + b)^{n+k} = \sum_{i=0}^{n+k} r_i a^i b^{n+k-i}$$

В этой сумме либо $i \geqslant k$, либо $n + k - i \geqslant n$, то есть каждое из слагаемых равно 0. Замкнутость относительно взятия противоположного элемента следует из того, что $(-a)^{2k} = ((-a)^2)^k = (a^2)^k = a^{2k} = 0$ (равентсво $(-a)^2 = a^2$ вытекает из коммутативности кольца). 0 очевидно принадлежит множеству нипотентов.
Значит нильпотенты действительно образуют подкольцо в R.
Покажем теперь, что для этого подкольца (назовем его K) выполнено свойство втягивания: если $a \in K$, то для произвольного $x \in R$ выполняется $(xa)^k = x^k a^k = 0$, то есть xa также нильпотент, то есть $xa \in K$.
Множество нильпотентов – подкольцо, обладающее свойством втягивания, значит оно идеал. $\square$

3. Пусть кольцо R не содержит собственных левых и правых идеалов. Выберем какой-нибудь элемент $a \in R$, $a \neq 0$ и рассмотрим левый идеал I, порожденный этим элементом. Кольцо R не содержит собственнных левых идеалов, значит I либо нулевой идеал, что невозможно из $a \neq 0$, либо $I = R$. Значит I совпадает со всем кольцом. Но тогда $1 \in I$, то есть $1 = ba \in R$, значит у a есть левый обратный. Аналогично у a есть правый обратный c, такой что $1 = ac \in R$. Равенство левого и правого обратных следует из $b = b(ac) = bac = (ba)c = c$. Значит в R можно делить, так как у каждого ненулевого $a \in R$ существует единственный обратный. $\square$

4. Пусть $J \subset Mat(n, R)$ – идеал в кольце матриц размера $n \times n$ над кольцом R. Докажем, что все значения, которые встречаются в матрицах из J хотя бы раз, образуют идеал I в R.
Заметим, что если есть некоторая матрица $A \in J$, то умножением ее на матрицы из 0 и 1 можно получить матрицу, в которой на любом месте стоит число a из матрицы A, а остальные числа – нули. Покажем, как это делается: будем обозначать E_{ij} матрицу, у которой $e_{ij} = 1$, а все остальные элементы – нули. Тогда $E_{ij}A$ – матрица, i-ая строка которой равна j-ой строке матрицы A; AE_{ij} – матрица, j-ый столбец которой равен i-ому столбцу матрицы A. Таким образом, умножая A слева и справа на матрицы такого вида мы можем получить матрицу $\widetilde{A}$, у которой $\widetilde{a}_{kl} = a_{nm}$ для любых k, l, n, m, а остальные элементы равны 0. Причем все матрицы $\widetilde{A} \in J$, так как $A \in J$. Значит, умножая все такие матрцы и складывая их, можно получить все суммы и произведение элементов из I, а так как J идеал, то и I – идеал. $\square$
Теперь покажем, что J состоит из всех матриц над I. Это следует из рассуждений, приведенных выше: любую матрицу над I можно представить в качестве суммы матриц лишь с одним ненулевым элементом из I, а все они лежат в J. Идеал является кольцом, поэтому замкнут относительно сложения, то есть сумма матриц из идеала вновь даст матрицу из идеала. $\square$

5. Пусть I – максимальный идеал некоторого кольца R. Тогда по теореме о максимальном идеале R/I – поле. В полях очевидно нет делитилей нуля, а значит I – простой идеал. $\square$
На два других вопроса ответ отрицательный. Построим контрпример для максимального идеала: пусть F – поле. Рассмотрим кольцо многочленов $F[x]$ и поле рациональных функций $F(x)$. Тогда между ними существует инъективный гомоморфизм $\varphi\colon F[x] \to F(x)$. В силу того, что $F(x)$ – поле, максимальным идеалом в нем является нулевой идеал. Его проообразом является нулевой идеал в $F[x]$, который не является максимальным, так как содержится, например, в (x). Максимальный идеал является простым, значит этот контрпример также является контрпримером для простого идеала.