ОВАиТК-2

> Не все вопросы одинаково интересны, и единственный способ оценить важность вопроса — это продемонстрировать, что ответ на него проясняет наше понимание математики в целом.
>
> У.Т. Гауэрс, Две культуры в математике

Рефлексируем над семинаром

Мы познакомились с таким понятием, как *подгруппа* — подмножество группы, которое само является группой с той же операцией.

Также ввели понятие *порядка элемента* — наименьшая положительная степень, в которой элемент равен нейтральному элементу. Если такой степени нет, то порядок элемента по определению полагают равным бесконечности.

Не стоит путать порядок элемента с *порядком группы. Порядок группы* (или подгруппы) — это просто число элементов в ней. Однако есть некоторая связь между ними: любой элемент $g \in G$ порождает в G циклическую подгруппу, состоящую из всех положительных и отрицательных степеней g, и её порядок совпадает с порядком g. (Если порядок g конечен, то это группа изоморфна $C_n \cong \mathbb{Z}_n$, а если бесконечен, то $\mathbb{Z}$).

Доказали *теорему Лагранжа*: порядок подгруппы делит порядок группы. Т.е. если $H < G$, то $|G| \vdots |H|$. Прямое следствие из этой теоремы: порядок любого элемента группы делит порядок группы.

Также в конце семинара мы упомяли такое понятие, как гомоморфизм — отображение из одной в группы в другую, которое "сохраняет операцию": $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

Домашнее задание

Определение: *транспозиция* — перестановка из одного цикла длины два: (ij).

Определение: говорят, что перестановка $s \in S_n$ содержит *инверсию* элементов $i < j$, если $s(i) > s(j)$ (то есть перестановка нарушает отношение порядка для этих двух элементов).

Будем считать очевидным, что любая перестановка представима в виде произведения транспозиций. Идея доказательства такая же, как и при сортировке пузырьком. Если этот момент неочевиден, продумайте его самостоятельно.

1. Четность перестановки - 1

Покажите, что домножение перестановки на транспозицию меняет четность числа инверсий.

2. Четность перестановки - 2

Докажите эквивалентность следующих свойств:

1. Перестановка содержит четное число инверсий
2. Любое разложение перестановки в произведение транспозиций содержит четное число множителей.
3. Перестановка разложима в произведение циклов длины три: (ijk)

Hint: в последнем пункте можно выразить произвольный цикл длины три при помощи четного числа транспозиций и произвольную пару транспозиций через циклы длины три.

Определение: Если перестановка удовлетворяет этим условиям, она называется *четной*.

3. Четность перестановки - 3

Докажите, что множество четных перестановок образует группу. Найдите ее порядок. Эту группу обычно обозначают A_n.

4. Циклическая группа

Рассмотрим циклическую группу C_n. Напомню, что циклической группа является тогда и только тогда, когда в ней найдется элемент a, такой что любой элемент из G является некоторой степенью a. Такой элемент называют порождающим элементом циклической группы.

Найдите порядок элемента a^k. При каком условии он сам является порождающим? Сколько в циклической группе порядка n порождающих элементов?

Hint: Для того, чтобы ответить на последний вопрос, вспомните определение функции Эйлера.

5. Группа с простым порядком

Воспользуйтесь теоремой Лагранжа и докажите, что любая группа простого порядка является циклической.

6. Старые долги

Докажите, что изоморфизм сохраняет порядок элементов, то есть если ϕ — изоморфизм, то порядок g равен порядку $\phi(g)$.

Вооружившись этим знанием, решите задачу 1.6 из предыдущей домашней работы.