МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №5. Базовые алгоритмы на графах (1)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. В ориентированном графе введём отношение на вершинах: $u \sim v$, если и только если существует простой путь из u в v, а также существует простой путь из v в u. Докажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности, то есть

а) (*рефлексивность*) для любой вершины v верно $v \sim v$;

б) (*симметричность*) если $u \sim v$, то $v \sim u$;

в) (*транзитивность*) если $u \sim v$, $v \sim w$, то $u \sim w$.

2. Приведите пример графа и двух вершин в нём, таких что они были бы эквивалентны (в терминах предыдущей задачи), но между ними бы не существовало непересекающихся путей в обе стороны.

3. Дано ориентированное корневое дерево. Назовём вершину u предком вершины v, если из u есть путь в v. За $O(n + q)$ ответьте на q запросов вида "является ли u_i предком v_i"?

4. Ориентированный граф называется *турниром*, если между каждой парой вершин есть ровно одно ребро. Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь (то есть простой путь, проходящий по всем вершинами). Как найти этот путь за линейное от размера графа время?

5. Неориентированный граф называется двудольным, если его хроматическое число не превосходит двух (то есть все вершины можно раскрасить в два цвета, так чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов). Докажите, что двудольность графа равносильна каждому из перечисленных свойств:

а) вершины графа можно разбить на две доли, так что рёбра соединяют только вершины из разных долей;

б) в графе нет циклов нечётной длины.

6. *Деревом* называется связный граф без циклов. Докажите, что дерево является двудольным графом.

7. Найдите число путей в данном ориентированном ациклическом графе за $O(n + m)$.

8*. На прямой расположены бомбочки в точках $x_1, \ldots, x_n$. У каждой из них есть свой радиус поражения r_i: если взрывается i-я бомбочка, она поражает весь отрезок $[x_i - r_i, x_i + r_i]$. Задетые бомбочки тоже взрываются и вызывают цепную реакцию. Определите наименьшее количество бомбочек, которые нужно поджечь вручную, чтобы взорвались все бомбочки. Асимптотика: $O(n \log n)$.

1. В пункте в) нужно склеить имеющиеся пути. Важно ли требование простоты путей?
2. Сгодится граф с рёбрами $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 1), (4, 2)$.
3. Введите времена входа и выхода для каждой вершине при обходе `dfs`. Сформулируйте, когда одна вершина является предком другой, в этих терминах.
4. Докажите утверждение индукцией по числу вершин. Пусть найден гамильтонов путь в турнире на $n - 1$ вершине. Куда можно вклинить новую, n-ю вершину?
5. Свойство а) является переформулировкой определения двудольности. Наличие нечётного цикла, очевидно, не позволяет графу быть 2-раскрашиваемым (то есть двудольным). Если же нечётных циклов нет, можно запустить любой алгоритм раскраски (который красит соседние вершины в разные цвета) и доказать, что он не найдёт противоречия.
6. Можно подвесить дерево за произвольную вершину и цветом вершины назначить чётность её глубины.
7. Найдите топологическую сортировку графа и насчитайте естественную ДП.
8*. Создайте дерево отрезков (в виде ориентированного графа) на бомбочках. Из листа, соответствующего бомбочке i проведите рёбра в отрезок затрагиваемых бомб. Что теперь нужно найти в построенном графе?