Основные алгоритмы 4

Ковалев Алексей

1. Будем сортировать массив следующим способом: пройдемся по массиву 1 раз, считая количество нулей в нем в переменной `count`. Затем запишем в первые `count` ячеек массива нули, а во все остальные – единицы. Корректность и линейная ассимптотика данного алгоритма очевидны.

2. Заметим, что в $(-\infty,\, l_0)$ все точки покрыты нулем отрезков, в $[l_0,\, l_1)$ все точки покрыты одним отрезком и так далее, в $[l_{n-1},\, l_n)$ все точки покрыты n отрезками, $[l_n,\, r_0]$ все точки покрыты всеми отрезками, аналогично для правых концов отрезков. Значит $\frac{2n}{3}$ отрезками покрыты $[l_{2n/3-1},\, l_{2n/3})$ и $(r_{2n/3-1},\, r_{2n/3}]$. Тогда нужно всего лишь найти $\frac{2n}{3} - 1$ и $\frac{2n}{3}$ порядковые статистики среди левых и правых концов отрезков, что делается за линейное время.

3. Аналогично 9.3 Кормена (а также семинару и лекции) распишем время работы алгоритма для некоторой константы c

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{4n}{14}\right) + cn$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{2n}{7}\right) + cn$$

Тогда, решив рекурентное соотношение, получим

$$T(n) = \Theta(n)$$

Ответ: $T(n) = \Theta(n)$.

4. Сначала докажем, что минимум суммы

$$\sum_{i=1}^{2n+1} |x_i - s|$$

достигается, если s – медиана входного массива. Пусть s лежит в массиве и равно его медиане m. Докажем, что, если перенести s в другую точку, значение суммы увеличится. В этом случае $s = m + x$, причем, не умаляя общности, будем считать $x > 0$. Пусть при этом слева от s оказалось $n + 1 + \alpha$ точек массива, где $\alpha \geqslant 0$. Тогда изменение значения суммы составит $(n+1+\alpha)x - (n-\alpha)x = x + 2\alpha$, то есть сумма увеличится. $\square$

Остается только найти медиану массива за линейное время, что легко делается с помощью алгоритма поиска k-ой порядковой статистики для $k = n + 1$.

5. Представим уравнение $ax + b \equiv 0 \pmod{M}$ в виде

$$ax + b = kM,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$ax + Mk = -b$$

Задача свелась к решению Диофантова уравнения, которые мы уже умеем решать с помощью алгоритма Евклида за $O(\log(a + M))$ при условии, что арифметические операции выполняются за $O(1)$, или за $O\big(n^3\big)$ в битовой модели, где n – длина входа. В любой из этих модели вычислений алгоритм полиномиален от длины входа.

6. Для первого многочлена:

$$A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 = A_1\big(x^2\big) + xA_2\big(x^2\big)$$

$$A_1(x) = 3x + 1,\ A_2(x) = 2x$$

$$A_1(x) = 3x + 1 = A_{11}\big(x^2\big) + xA_{22}\big(x^2\big)\,,\ A_{11}(x) = 1,\ A_{22}(x) = 3$$

$$A_2(x) = 2x = A_{21}\big(x^2\big) + xA_{22}\big(x^2\big)\,,\ A_{21}(x) = 0,\ A_{22}(x) = 2$$

$$\text{DFT: } A_{11}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_{12}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT: } A_{21}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_{22}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT: } A_1(x) \mapsto \begin{pmatrix} 1+3i \\ -2 \\ 1-3i \\ 4 \end{pmatrix},\ A_2(x) \mapsto \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT: } A(x) \mapsto \begin{pmatrix} \big(1-\sqrt{2}\big) + \big(3+\sqrt{2}\big)\,i \\ -2-2i \\ \big(1+\sqrt{2}\big) + \big(-3+\sqrt{2}\big)\,i \\ 2 \\ \big(1+\sqrt{2}\big) + \big(3-\sqrt{2}\big)\,i \\ -2+2i \\ \big(1-\sqrt{2}\big) - \big(3+\sqrt{2}\big)\,i \\ 6 \end{pmatrix}$$

Для второго многочлена:

$$B(x) = 2x^2 + x = B_1\big(x^2\big) + xB_2\big(x^2\big)$$

$$B_1(x) = 2x,\ B_2(x) = 1$$

$$B_1(x) = 2x = B_{11}\big(x^2\big) + xB_{12}\big(x^2\big)\,,\ B_{11}(x) = 0,\ B_{12}(x) = 2$$

$$B_2(x) = 1 = B_{21}\big(x^2\big) + xB_{22}\big(x^2\big)\,,\ B_{21}(x) = 1,\ B_{22}(x) = 0$$

$$\text{DFT: } B_{11}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B_{12}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT: } B_{21}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B_{22}(x) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT: } B_1(x) \mapsto \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix},\ B_2(x) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT: } B(x) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i \\ -2+i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i \\ -2-i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon A(x)\cdot B(x) = \begin{pmatrix} \left(-8-3\sqrt{2}\right)+2i \\ 6+2i \\ \left(-8+3\sqrt{2}\right)-2i \\ 2 \\ \left(-8+3\sqrt{2}\right)+2i \\ 6-2i \\ \left(-8-3\sqrt{2}\right)-2i \\ 18 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$C(x) = A(x)\cdot B(x) = \left(-8-3\sqrt{2}+2i\right)x^7 + (6+2i)\,x^6 + \left(-8+3\sqrt{2}-2i\right)x^5 + 2x^4 + \\ + \left(-8+3\sqrt{2}+2i\right)x^3 + (6-2i)\,x^2 + \left(-8-3\sqrt{2}-2i\right)x + 18$$

$$C_1(x) = (6+2i)\,x^3 + 2x^2 + (6-2i)\,x + 18$$

$$C_{11}(x) = 2x + 18 \Rightarrow C_{111}(x) = 18,\ C_{112}(x) = 2$$

$$C_{12}(x) = (6+2i)\,x + (6-2i) \Rightarrow C_{121}(x) = 6-2i,\ C_{122}(x) = 6+2i$$

$$C_2(x) = \left(-8-3\sqrt{2}+2i\right)x^3 + \left(-8+3\sqrt{2}-2i\right)x^2 + \left(-8+3\sqrt{2}+2i\right)x + \left(-8-3\sqrt{2}-2i\right)$$

$$C_{21}(x) = \left(-8+3\sqrt{2}-2i\right)x + \left(-8-3\sqrt{2}-2i\right) \Rightarrow C_{211}(x) = -8-3\sqrt{2}-2i,\ C_{212}(x) = -8+3\sqrt{2}-2i$$

$$C_{22}(x) = \left(-8-3\sqrt{2}+2i\right)x + \left(-8+3\sqrt{2}+2i\right) \Rightarrow C_{221}(x) = -8+3\sqrt{2}+2i,\ C_{222}(x) = -8-3\sqrt{2}+2i$$

$$\text{DFT}\colon C_{111}(x) \mapsto \begin{pmatrix}18\end{pmatrix},\ C_{112}(x) \mapsto \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C_{121}(x) \mapsto \begin{pmatrix}6-2i\end{pmatrix},\ C_{122}(x) \mapsto \begin{pmatrix}6+2i\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C_{211}(x) \mapsto \begin{pmatrix}-8-3\sqrt{2}-2i\end{pmatrix},\ C_{212}(x) \mapsto \begin{pmatrix}-8+3\sqrt{2}-2i\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C_{221}(x) \mapsto \begin{pmatrix}-8+3\sqrt{2}+2i\end{pmatrix},\ C_{222}(x) \mapsto \begin{pmatrix}-8-3\sqrt{2}+2i\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C_{11}(x) \mapsto \begin{pmatrix}20 \\ 16\end{pmatrix},\ C_{12}(x) \mapsto \begin{pmatrix}12 \\ -4i\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C_{21}(x) \mapsto \begin{pmatrix}-16-4i \\ -6\sqrt{2}\end{pmatrix},\ C_{22}(x) \mapsto \begin{pmatrix}-16+4i \\ 6\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C_1(x) \mapsto \begin{pmatrix}12 \\ 8 \\ 20 \\ 32\end{pmatrix},\ C_2(x) \mapsto \begin{pmatrix}-6\sqrt{2}-6\sqrt{2}i \\ -8i \\ -6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i \\ -32\end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon C(x) \mapsto \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$C(x) = 4x^5 + 8x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$$

Ответ: $C(x) = 4x^5 + 8x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$.

7.

$$r_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j}(p_j - t_{i+j})^2$$

1. В одну сторону: $r_i = 0 \Rightarrow \forall j$ либо $p_j = 0$, либо $t_{i+j} = 0$, либо $(p_j - t_{i+j})^2 = 0$. Если $(p_j - t_{i+j})^2 = 0$, то j-ый символ образца совпадает с $(i+j)$-ым символом текста. Если $p_j = 0$, то j-ый символ образца – джокер. Значит в этом случае образец входит в текст.
   Обратно, если образец входит в текст, то либо $p_j = 0$, в случае если j-ый символ – джокер, либо $(p_j - t_{i+j})^2 = 0$, j-ый символ образца совпадает с $(i+j)$-ым символом текста. Тогда $r_i = 0$. $\square$

2. Представим r_i в виде
$$r_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j^3 t_{i+j} - 2\sum_{j=0}^{m-1} p_j^2 t_{i+j}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j}^3$$
   Рассмотрим многочлены
$$P_3(x) = p_0^3 + p_1^3 x + p_2^3 x^2 + \ldots + p_{m-1}^3 x^{m-1}$$
$$T_1(x) = t_{n-1} + t_{n-2}x + t_{n-2}x^2 + \ldots + t_0 x^{n-1}$$
   Тогда их произведение дает первую сумму в выражении для r_i, причем это произведение можно вычислить за $O(n \log n)$. Аналогично введем
$$P_2(x) = p_0^2 + p_1^2 x + p_2^2 x^2 + \ldots + p_{m-1}^2 x^{m-1}$$
$$T_2(x) = t_{n-1}^2 + t_{n-2}^2 x + t_{n-2}^2 x^2 + \ldots + t_0^2 x^{n-1}$$
   произведение которых дает вторую сумму и также вычисляется за $O(n \log n)$. Также для $P_1(x),\ T_3(x)$
$$P_1(x) = p_0 + p_1 x + p_2^2 x + \ldots + p_{m-1} x^{m-1}$$
$$T_3(x) = t_{n-1}^3 + t_{n-2}^3 x + t_{n-2}^3 x^2 + \ldots + t_0^3 x^{n-1}$$
   произведение которых дает третья сумму в выражении для r_i. Затем покоординатно сложив полученные вукторы мы получаем в i-той координате r_i.
   То есть мы смогли вычислить все r_i трижды умножив многочлены с помощью FFT и сделав сколько-то линейных операций. Значит сложность – $O(n \log n)$.

8.

1. Рассмторим $\omega = 3$. Тогда $\omega = 3,\ \omega^2 = 2,\ \omega^3 = 6,\ \omega^4 = 4,\ \omega^5 = 5,\ \omega^6 = 1$. Также $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 3 + 2 + 6 + 4 + 5 + 1 \equiv 0 \pmod 7$

2. Пусть y – дискретное преобразование Фурье вектора $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$.

$$M_6(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} \\ 1 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$y = M_6(\omega) \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Ответ: $y = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T$.

3. Матрица обратного преобразовния Фурье – обратная к $M_6(\omega)$ матрица $M_6^{-1}(\omega)$.

$$M_6^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_6^{-1}(\omega) \cdot y = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = a$$

Значит $M_6^{-1}(\omega)$ действительно матрица обратного преобразования.

Ответ: $M_6^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $A(x) = 1 + x + x^2,\ B(x) = -1 + 2x + x^3,\ C(x) = A(x) \cdot B(x) \pmod 7$

$$A(x) \mapsto a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B(x) \mapsto b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $y_a,\ y_b$ – дискретные преобразования Фурье для векторов $a,\ b$ соответсвенно. Тогда

$$\text{DFT}\colon y_a = M_6(\omega) \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{DFT}\colon y_b = M_6(\omega) \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_c = (y_a,\, y_b) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 6 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование Фурье для y_c

$$\text{DFT}\colon c = M_6^{-1}(\omega) \cdot y_c = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \mapsto C(x) = 6 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5$$

Ответ: $A(x) \cdot B(x) = 6 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5 \pmod 7$