МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2021

Семинар №11. Дерево Фенвика

1. Пусть $f(i) = i \wedge (i+1)$. Опишите все i, для которых $f(i) = i$.

2. Пусть $g(i) = i \vee (i+1)$. Для каких i выполняется равенство $g(i) = i+1$?

3. Дан массив чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Поступает q запросов одного из двух видов: а) увеличить число в некоторой точке (то есть по pos и $x \geqslant 0$ нужно увеличить a_{pos} на x); б) сообщить максимум на префиксе. Используйте только прямое дерево Фенвика. Обработайте все запросы за $O((n+q)\log n)$.

4. Пусть дан массив чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Последовательность индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ называется возрастающей подпоследовательностью данного массива, если $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}$. Найдите наибольшую возрастающую подпоследовательность за $O(n \log n)$.

5. К массиву неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ поступает q запросов двух типов: а) изменить значение в точке (то есть по pos и $x \geqslant 0$ выполнить $a_{pos} := x$); б) по числу k сообщить минимальное значение r, такое что $a_1 + a_2 + \ldots + a_r \geqslant k$. Обработайте все запросы за $O((n+q)\log n)$.

6. Пусть все вычисления происходят в $\mathbb{Z}_p$ для некоторого заданного простого p. Задан массив $a_1, \ldots, a_n$. За $O((n+q)\log n + q \log p)$ обработайте q запросов вида: а) обновить число в точке; б) сообщить произведение чисел на подотрезке. Можно считать, что операция обращения числа по модулю выполняется за $O(\log p)$. Используйте только прямое дерево Фенвика.

7. (Фенвик Фенвиков) На плоскости даны n точек, в каждой точке написано своё число a_i. Обработайте q запросов двух типов: а) изменить число, записанное в i-й точке; б) найти сумму чисел, записанных в точках в прямоугольнике $(0,0) \div (l,r)$. Асимптотика: $O((n+q)\log^2 n)$ времени и $O(n \log n)$ памяти.

8. Дан массив $a_0, \ldots a_{n-1}$. За $O((n+q)\log n)$ ответьте на q запросов двух типов: а) прибавление на отрезке (по l, r, val увеличить все числа $a_l, \ldots, a_r$ на val); б) сумма на отрезке (по l, r найти $a_l + \ldots + a_r$). *Указание:* введите массив $b_i = a_i - a_{i-1}$.

9. Дана таблица чисел a_{ij} размера $n \times n$. За $O((n^2+q)\log^2 n)$ ответьте на q запросов двух типов: а) прибавление на подматрице; б) сумма на подматрице. *Указание:* введите массив $b_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j} - a_{i,j-1} + a_{i-1,j-1}$.

10. Дана таблица целых чисел $a_{i,j,k}$ по всем $0 \leqslant i, j, k < n$. Поступает q запросов одного из двух видов: а) прибавить константу в подкубе (то есть по $i_1, j_1, k_1, i_2, j_2, k_2, val$ нужно увеличить $a_{i,j,k}$ на val по всем $i_1 \leqslant i \leqslant i_2, j_1 \leqslant j \leqslant j_2, k_1 \leqslant k \leqslant k_2$); б) найти сумму в подкубе. Обработайте все запросы за $O((n^3+q)\log^3 n)$.

1. Как легко убедиться, f зануляет последний блок из единиц. Если $f(i) = i$, то последний блок из единиц отсутствует, то есть число i должно быть чётным. Остаётся понять, что для чётных i равенство имеет место.
2. Функция g выставляет единицей младший нулевой бит. Если этот младший бит – на последнем месте, то число должно быть чётным.
3. Максимум на отрезке легко обновлять, если числа только увеличиваются.
4. Пусть $f(x)$ — длина НВП, которая оканчивается числом x (именно числом, а не индексом). Пройдите по массиву слева направо, как пересчитывается f для нового элемента?
5. Пусть у r известны несколько первых (старших) битов в двоичном представлении. Покажите, что в дереве Фенвика можно за $O(1)$ однозначно определить, чему равен следующий бит — нулю или единице.
6. Если можно было бы использовать и встречное дерево Фенвика, можно было бы поддерживать произведения на соответствующих отрезках. Сейчас же будем также поддерживать произведение, но ещё будем сохранять количество нулей на отрезке. Тогда можно поделить два числа друг на друга (зная произведение ненулевых элементов и количество нулевых).
7. Сожмите координаты, отсортировав все точки в порядке возрастания абсцисс. Для каждого i рассмотрите вертикальную полосу, в которую входят точки с $f(i)$-й по i-ю. В каждой такой полосе постройте своё дерево Фенвика на точках, попавших в неё.
8. Запрос первого типа в массиве a превращается в два запроса изменения в точке в массиве b. Далее, $a_i = b_0 + \ldots + b_i$. Тогда $a_0 + \ldots + a_x = \sum\limits_{j=0}^{x} b_j(x + 1 - j) = (x + 1)\sum\limits_{j=0}^{x} b_j - \sum\limits_{j=0}^{x} j \cdot b_j$. Значит, достаточно хранить два дерева Фенвика: по b_j и по $j \cdot b_j$.
9. Аналогично, $a_{ij} = \sum\limits_{u=0}^{i}\sum\limits_{v=0}^{j} b_{uv}$. Нужно будет 4 дерева Фенвика, на $b_{ij}, i \cdot b_{ij}, j \cdot b_{ij}, ij \cdot b_{ij}$.
10. Сведите сумму на произвольном подкубе к сумме на подкубе вида $(0, 0, 0) \div (i, j, k)$. Затем перейдите к массиву $c_{i,j,k} = a_{i,j,k} - a_{i-1,j,k} - a_{i,j-1,k} - a_{i,j,k-1} + a_{i-1,j-1,k} + a_{i-1,j,k-1} + a_{i,j-1,k-1} - a_{i-1,j-1,k-1}$.