

1. Дано n пар $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$, а также число k . Нужно выбрать $I \subset \{1, \dots, n\}$, такое что $|I| = k$, максимизируя сумму $\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \notin I} b_i$. Найдите максимальное значение суммы за $O(n \log n)$.
2. В $2n - 1$ ящиках лежат яблоки и апельсины. Требуется выбрать n ящиков так, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов. Докажите, что такой выбор всегда существует.
3. Пусть дан массив a_1, \dots, a_n . Если $n = 5$, назовём его супермедианой его медиану. Если же $n = 5^k$, назовём его супермедианой супермедиану массива медиан пятёрок (то есть определим b_i как медиану массива $[a_{5i-4}, a_{5i-3}, a_{5i-2}, a_{5i-1}, a_{5i}]$, а затем найдём супермедиану массива $[b_1, \dots, b_{n/5}]$). Докажите, что не существует такой универсальной константы $C \in (0, 1)$, что супермедиана массива длины n гарантированно является его порядковой статистикой с номером $[Cn, (1 - C)n]$. Иными словами, использовать супермедиану в качестве пивота может быть невыгодно.
4. Через mex (minimal exclusive) данного массива чисел будем обозначать минимальное целое неотрицательное число, которого нет в этом массиве. Дан массив целых чисел a_1, \dots, a_n . За одну операцию можно изменить одно любое число массива на mex всех его элементов (сам mex может измениться). Покажите, как сделать массив неубывающим не более чем за $2n$ операций. Асимптотика: $O(n)$.
5. В данном массиве длины n найдите первые k порядковых статистик за $O(n \log k)$.