МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №3. Динамическое программирование (3)

Во всех задачах этого листка, при необходимости, можно считать, что все арифметические операции выполняются за $O(1)$.

1. Определите, есть ли в неориентированном графе гамильтонов цикл за $O(2^n \cdot n)$, где n — число вершин.

2. В задаче о наибольшей клике использовалось проталкивание максимума вверх. Предложите алгоритм проталкивания максимума вниз. Предложите алгоритм суммирования сверху/снизу. Формально, пусть каждой n-битной маске $mask$ сопоставлено некоторое число $a(mask)$. Определите для всякой $mask$ (суммарно за время $O(2^n \cdot n)$) величины:

а) $max\_sup(mask) = \max\limits_{supermask \supseteq mask} a(supermask)$;

б) $max\_sub(mask) = \max\limits_{submask \subseteq mask} a(submask)$;

в) $sum\_sup(mask) = \sum\limits_{supermask \supseteq mask} a(supermask)$;

г) $sum\_sub(mask) = \sum\limits_{submask \subseteq mask} a(submask)$.

3. Дан набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых лежит в отрезке $[0, 1]$. Считайте, что числа хранятся в памяти точно, без ошибок округления. Найти такое множество $S \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $\sum\limits_{i \in S} a_i \leqslant 1$, но при этом максимально возможно. Предложите алгоритм за $O(2^{n/2} \cdot \text{poly}(n))$.

4. Дан неориентированный граф из n вершин и m рёбер. Занумеруем вершины целыми числами от 1 до n. Найти перестановку p (то есть биекцию из $\{1, \ldots, n\}$ в $\{1, \ldots, n\}$), минимизирующую функцию $S = \sum\limits_{(u,v) \in E} |p_u - p_v|$. Асимптотика: $O(2^n \cdot \text{poly}(n, m))$.

5. У агента на сегодня запланировано n встреч. Некоторые из них он может не посещать. Известно, что настроение агента в любой момент времени является целым числом, при этом изначально оно равно m_0. Далее, i-я встреча характеризуется параметрами: l_i, r_i, d_i. Они означают, что прийти на i-ю встречу можно, только если текущее настроение попадает в отрезок $[l_i, r_i]$, а после её посещения настроение увеличивается на d_i (само d_i не обязано быть положительным). Найдите наибольшее число встреч, которые можно посетить (порядок встреч может быть произвольным). Асимптотика: $O(2^n \cdot n)$.

6. Найдите число замощений доски $n \times m$ доминошками. Доминошки — это прямоугольники 1×2 или 2×1, которые не должны пересекаться. Асимптотика:

а) $O(4^n \cdot (n + m))$;

б) $O(3^n \cdot (n + m))$;

б) $O(8^n \log n)$.

7. Имеется n предметов, i-й из которых имеет вес c_i. Предусмотрительный вор хочет закупить достаточно много рюкзаков, чтобы украсть все эти n предметов из хранилища. На рынке доступны m моделей рюкзаков, каждая модель характеризуется стоимостью и вместимостью, каждая доступна в неограниченном количестве. Найдите минимальную суммарную стоимость рюкзаков, которые придётся оплатить грабителю. Асимптотика:

а) $O(2^n \cdot m + 3^n)$;

б) $O(2^n \cdot n \cdot C)$, где C — ограничение на максимальную вместимость каждого рюкзака.