МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Семинар №13. Диаграмма Вороного

1. Футбольный матч проходит на прямоугольном поле. В каждой команде — по n игроков. Областью ответственности каждого игрока назовём множество точек, которые располагаются к этому игроку ближе, чем ко всем остальным. Счёт каждой команды — это суммарная площадь всех областей ответственности игроков этой команды. Определите, какая команда имеет больший счёт, за $O(n \log n)$.

2. С помощью диаграммы Вороного найдите две ближайшие точки в множестве за $O(n \log n)$.

3. С помощью диаграммы Вороного для каждой точки множества найдите ближайшую к ней за $O(n \log n)$.

4. На плоскости даны n точек. Найдите круг максимального радиуса, внутри которого нет точек множества, а на его границе находится по крайней мере три точки множества. Асимптотика: $O(n \log n)$.

5. На плоскости дан круг, внутри которого расположено n башен. Самолёт должен сбросить по бомбе на каждую из башен. У каждой бомбы один и тот же радиус поражения r. Найдите минимальное r такое, что поразится весь исходный круг. Асимптотика: $O(n \log n)$.

6. Пусть дано множество из n точек на плоскости, которое нужно разбить на k непустых кластеров. Расстояние между двумя кластерами — минимальное расстояние между парами точек в этих кластерах. Кластерное расстояние — минимальное из расстояний между парами кластеров.

7. Для каждого $n \geqslant 3$ приведите пример множества из n сайтов, для которого диаграмма Вороного содержит $2n - 5$ вершин и $3n - 6$ рёбер.

8. Докажите, что построение диаграммы Вороного для множества из n сайтов требует времени $\Omega(n \log n)$.

9. Дано какое-то замощение плоскости выпуклыми (обобщёнными) многоугольниками, а также n сайтов вместе с биекцией между сайтами и гранями. Определите за $O(n)$, является ли данное замощение диаграммой Вороного данного множества сайтов с таким распределением между сайтами и ячейками диаграммы.

10*. (Кто решит, тот гений) Пусть дано какое-то замощение плоскости выпуклыми (обобщёнными) многоугольниками. За $O(n)$ проверьте, является ли оно диаграммой Вороного для некоторого набора сайтов.

1. Найдите диаграмму Вороного внутри bounding box'а, затем найдите площади всех многоугольников.
2. Переберите рёбра диаграммы. Каждое ребро соответствует двум точкам исходного множества. Ответ — минимальное из расстояний между такими парами точек.
3. Для каждой ячейки найдите все её рёбра, возьмите минимальное из расстояний между соответствующими точками. То есть нужно доказать такое утверждение: если ближайший сайт к p_i — это p_j, то ячейки этих двух сайтов будут иметь общий кусок границы положительной длины. Это легко доказать, нарисовав круг с центром в p_i, содержащим p_j на границе.
4. Центром круга обязана выступать вершина диаграммы Вороного.
5. Постройте диаграмму Вороного, сузьте её на круг. Затем для каждой вершины нужно взять ближайшую точку среди башен и вывести максимальное такое расстояние. Иными словами, чтобы покрыть весь круг, достаточно покрыть все вершины.
6. Каждая ячейка диаграммы должна быть треугольником, а также среди рёбер должно быть ровно три бесконечных луча (следует из формулы Эйлера). Чтобы выполнить первое условие, нужно расположить сайты так, чтобы никакие четыре не лежали на одной окружности (тогда каждая вершина диаграммы Вороного будет лежать только в трёх ячейках). Чтобы выполнить второе условие, поместите все сайты внутрь большого треугольника с вершинами в сайтах.
7. Сведите задачу сортировки чисел $x_1, \ldots, x_n$ к построению диаграммы Вороного точек $(x_1, 0), \ldots, (x_n, 0)$. Диаграмма должна поддерживать структуру таким образом, чтобы можно было по ребру узнавать обе грани её содержащие. Тогда можно извлечь порядок сортировки исходных чисел.
8. Рассмотрим конкретную грань, которая должна быть ячейкой сайта p_i. Каждое её ребро инцидентно двум граням, то есть задаёт некоторое ограничение на $V(p_i)$. Если пересечение всех таких ограничений совпадает с гранью, то $V(p_i)$ точно вложено в текущую грань (поскольку могли быть проигнорированы какие-то другие ограничения). Но если это выполнено для всех граней, то имеем настоящую диаграмму Вороного, поскольку в ней покрыта вся плоскость.
9*. Заметим для начала, что если нам удалось установить положение хотя бы одного сайта, то все остальные определяются однозначно, достаточно просто отражать первый сайт относительно соответствующих рёбер.

Пусть в диаграмме есть вершина степени 3, углы между исходящими рёбрами суть $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Пусть внутри этих углов лежат сайты. Тогда если α_1 — угол между лучом на первый сайт и первым ребром, то угол между первым ребром и вторым сайтом также равен α_1 (поскольку сайты должны быть симметричны относительно своего серединного перпендикуляра). В итоге $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_2 + \alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_3 + \alpha_1 = \beta_1$. Отсюда направления на все сайты определяются однозначно. Если есть две вершины диаграммы, соединённые ребром, то по проведённым лучам можно найти положение хотя бы одного сайта, а значит, вообще всех.

Это же рассуждение работает не только для вершин степени 3, но и для вершин любой нечётной степени. Более того, таким вершинам необязательно быть смежными, достаточно просто лежать в одной грани — тогда её сайт определяется однозначно. *Кажется*, что им даже не нужно лежать в одной грани, и если в принципе есть две вершины нечётной степени, то ответ можно восстановить не более чем однозначно.

Наконец, *кажется*, что если степени всех вершин чётны, то решений может быть много, достаточно лишь, чтобы сумма углов с чётными номерами равнялась π для каждой вершины.