ОВАиТК 2

Ковалев Алексей

1. Предположим обратное: пусть группа S_{p-1} транзитивно действует на множестве X из p элементов. Действие является транзитивным, значит все элементы множества образуют ровно одну орбиту, то есть $\forall x \in X\ \operatorname{Orb} x = X,\ |\operatorname{Orb} x| = p$. Но $|S_{p-1}| = |\operatorname{Stab} x| \cdot |\operatorname{Orb} x|$, причем $|S_{p-1}| = (p-1)!$. Отсюда

$$(p-1)! = |\operatorname{Stab} x| \cdot p$$

что приводит к $|\operatorname{Stab} x| \notin \mathbb{N}$ – противоречие. Значит группа S_{p-1} не может транзитивно действовать на множестве из p элементов. $\square$

2. Рассмотрим следующее множество X:

$$X = \{(g_1, g_2, \ldots, g_p) \colon\ g_1, g_2, \ldots, g_p \in G;\ g_1 g_2 \ldots g_p = e\}$$

Каждый из наборов $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ однозначно задается первыми $p-1$ его элементанми, а последний элемент является обратным к их произведению. Значит всего в множестве X содержится $|G|^{p-1}$ элементов.
Рассмотрим действие группы C_p на множестве X, циклически сдвигающее элементы наборы $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$. В силу того что $|C_p| = |\operatorname{Stab} x| \cdot |\operatorname{Orb} x| = p$, это действие образует только орбиты размера 1 или p.
Множество X представляет собой объединение всех орбит рассмотренного действия, значит

$$|X| = |G|^{p-1} = 1 + 1 + \ldots + 1 + p + p + \ldots + p$$

причем $p \mid |X| = |G|^{p-1}$, а значит в рассмотренной сумме число единиц делится на p. При этом размер орбиты равен одному, если и только если все числа набора $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ одинаковы и равны некоторому g, то есть g является решением уравнения $g^p = e$. В данной сумме есть хотя бы одна единица, так как решением этого уравнения является $g = e$. Но тогда в этой сумме есть еще хотя бы $p-1$ единица, то есть в группе существует нееденичный элемент, являющийся решением уравнения $g^p = e$, а значит имеющий порядок p, в силу простоты числа p. $\square$

3. Если существует факторгруппа G/H, значит $H \triangleleft G$. По определению нормальной подгруппы $\forall g \in G$ выполняется $gH = Hg$. Тогда $gHg^{-1} = H$. Значит $G/H \cong G/(gHg^{-1})$. $\square$

4. Построим искомую группу K. Пусть X – множество левых смешных классов G по подгруппе H. Мощность этого множества равна $(G : H) = n$. Рассмотрим действие φ группы G на множестве X, такое что $g(aH) = (ga)H$. Это действие является гомоморфизмом, так как $(gh)(aH) = (gha)H = g(h(aH))$. Ядро этого гомоморфизма $\operatorname{Ker}\varphi$ является нормальной подгруппой в G. По теореме об изоморфизме групп

$$G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi < S(X)$$

значит $(G : \operatorname{Ker}\varphi) \mid n!$. Также $(G : \operatorname{Ker}\varphi) = \frac{|G|}{|\operatorname{Ker}\varphi|} \mid |G|$. Из этих фактов вытекакет $(G : \operatorname{Ker}\varphi) \mid \gcd(|G|, n!)$.
Докажем теперь, что $\operatorname{Ker}\varphi$ является подгруппой в H. Пусть $g \in \operatorname{Ker}\varphi$, тогда

$$g(aH) = aH \Rightarrow (a^{-1}ga)H = H \Rightarrow a^{-1}ga \in H \Rightarrow g \in aHa^{-1}$$

В частности, при $a = e$ это означает, что $g \in H$. Значит $\operatorname{Ker}\varphi \subset H$. Докажем замкнутость $\operatorname{Ker}\varphi$ относительно операций. Для любых $g, h \in \operatorname{Ker}\varphi$

$$(gh)(aH) = g(h(aH)) = g(aH) = aH \Rightarrow gh \in \operatorname{Ker}\varphi$$

$$aH = e(aH) = (g^{-1}g)(aH) = g^{-1}(g(aH)) = g^{-1}(aH) \Rightarrow g^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$$

Получается, что $\operatorname{Ker}\varphi$ – подгруппа H, нормальная подгруппа G и $(G : \operatorname{Ker}\varphi) \mid \gcd(|G|, n!)$, то есть $K = \operatorname{Ker}\varphi$ – искомая подгруппа K. $\square$

5. Группа внутренних автоморфизмов группы G:

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_g \colon x \mapsto gxg^{-1}\}$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi \colon G \to \mathrm{Inn}(G)$$

$$\varphi \colon g \mapsto \phi_g$$

Докажем, что φ – гомоморфизм

$$(\varphi(g)\varphi(h))(x) = (\phi_g\phi_h)(x) = \phi_g(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1}$$

$$\varphi(gh)(x) = \phi_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1}$$

То есть $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, значит φ – гомоморфизм. $\square$

Найдем ядро этого гомоморфизма:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G \colon \varphi(g) = \mathrm{id}\}$$

где id – единичный элемент $\mathrm{Inn}(G)$.

$$g \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \forall x \in G\ \varphi(g)(x) = x$$

$$\varphi(g)(x) = \phi_g(x) = gxg^{-1} = x$$

Отсюда $\forall x \in G\ gx = xg \Rightarrow g \in Z(G)$. Значит ядром этого гомоморфизма является $Z(G)$ – центр группы G.