

1. Докажите, что если все приоритеты попарно различны, то декартово дерево единственно. Покажите, как построить его за $O(n)$, если ключи отсортированы.
2. Пусть множество ключей отсортировано. Как построить по ним AVL-, splay-, B-деревья за линейное время?
3. Дан массив чисел длины n , каждое является целым и лежит в отрезке от 1 до 100. Поступает q запросов вида “на отрезке позиций с l по r удалить все числа, равные x ”. Оставшиеся части массива склеиваются и нумеруются подряд, начиная с 1. Что останется после всех операций? Асимптотика: $O(q \log^2 n + n \log n)$.
4. Задан набор целых чисел a_1, \dots, a_n . Существует ли перестановка p_1, \dots, p_n чисел $1, \dots, n$ такая, что для каждого i выполнено $|\{j \mid j < i, \text{ но } p_j > p_i\}| = a_i$? Асимптотика: $O(n \log n)$.
5. Для всякого массива b_1, \dots, b_k попарно различных чисел определим операцию `next_permutation` как наименьший массив длины k , больший исходного, составленный из тех же чисел (все сравнения массивов – лексикографические). Если нет ни одного массива, большего данного, `next_permutation` возвращает лексикографически минимальный. Разработайте структуру данных, которая бы позволяла хранить массив элементов с операциями: а) добавлять в произвольное его место произвольное число; б) удалять число с данной позиции; в) сообщать элемент на данной позиции; г) применять `next_permutation` на заданном подотрезке. Асимптотика: $O(\log n)$ на запрос, где n — текущая длина массива.
6. Дано взвешенное дерево (не обязательно бинарное), то есть на каждом ребре написано некоторое целое (возможно, отрицательное) число. Найдите в нём самый длинный (по числу рёбер) простой путь с нулевой суммой. Асимптотика: $O(n \log^2 n)$, где n — число вершин.
7. За $O(n \log^2 n)$ найдите число путей во взвешенном дереве (не обязательно бинарном), стоимость которых лежит в отрезке $[L, R]$.