МФТИ, ФПМИ
Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022
Семинар №12. Потоки (1)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1*. Приведите пример сети с вещественными пропускными способностями, в которой алгоритм Форда—Фалкерсона может не завершиться.
2. Докажите теорему о декомпозиции потока: если в сети G течёт некий поток f, то его можно разбить на несколько путей из s в t, а также на несколько замкнутых циклов.
3. Сведите задачу поиска максимального паросочетания в двудольном графе к поиску максимального потока в некоторой сети. Сравните время работы алгоритмов Форда—Фалкерсона и Эдмондса—Карпа. Можно ли проделать то же в произвольном (необязательно двудольном) графе?
4. На фабрику поступило n заказов, реализация i-го из которых принесёт ей прибыль в a_i рублей. Каждый заказ для производства требует некоторого набора инструментов. Пусть всего зависимостей "заказ—инструмент" ровно k. Инструменты можно переиспользовать, то есть задействовать в нескольких заказах. Однако в данный момент на фабрике вообще нет инструментов, так что покупка j-го из них обойдётся в b_j рублей. Конечно, от приёма каких-то заказов или покупки каких-то инструментов фабрика может отказаться. Какие заказы следует реализовать для максимизации прибыли (с учётом трат на инструменты)?
5. Как найти минимальный разрез в графе?
6. В турнире участвует n команд, в каждой команде по k членов. Каждый участник в совершенстве владеет одной из m тем. Какое максимальное количество команд можно выбрать так, чтобы в них можно было выбрать по капитану таким образом, что темы, которыми владеют все капитаны, были попарно различны? Асимптотика: $O(knm)$.
7. Грабители хотят украсть изумруд из музея и вывезти его в своё логово! Формально, дан неориентированный граф, в котором выделены вершины s и t. Полиция может заблокировать движение через город $i \notin \{s, t\}$, потратив a_i ресурсов. Найдите минимальное необходимое число ресурсов, чтобы заблокировать грабителям путь из s в t. Асимптотика: $O(n(n+m)^2)$.
8. Есть n предприятий и n банков, предприятия могут брать кредиты у банков (причём одно предприятие может брать кредиты в нескольких банках и наоборот, один банк может давать кредиты нескольких предприятиям). Известно, что i-е предприятие хочет взять в кредит суммарно a_i рублей, а j-й банк готов предоставить кредитов суммарно на b_j рублей. Могут ли предприятия взять кредиты так, чтобы все условия выполнились? Асимптотика: $\mathrm{poly}(n)$.

1*. См. статью на Википедии.
2. Можно постепенно откусывать по единице потока. Путь всегда можно будет продолжать из закона сохранения.
3. Введите фиктивные исток и сток, проведите рёбра от истока к вершинам левой доли, от вершин правой доли к стоку. Наконец, рёбра исходного графа ориентируйте слева направо. Если назначить все пропускные способностями единицами, то максимальный поток в такой сети соответствует максимальному паросочетанию в исходном двудольном графе.
4. Введите исток и сток, в i-й заказ проведите ребро из истока с пропускной способностью a_i, а из j-го инструмента проведите ребро в сток с пропускной способностью b_j. Как нужно отразить зависимости заказов от инструментов, чтобы минимальный разрез соответствовал максимальной прибыли?
5. Найдите максимальный поток, а в S отнесите все вершины, достижимые из s в остаточной сети. Величина такого разреза равна величине потока.
6. Заведите граф из нескольких слоёв: команды, члены команд, темы. В каждую команду должна входить одна единица потока, а их каждой темы — выходить одна единица.
7. Раздвойте города, проведите между копиями города ребро с пропускной способностью a_i. Рёбрам графа назначьте бесконечную пропускную способность. Тогда любой разрез (конечной величины) соответствует выбору блокируемых вершин.
8. Заведите двудольный граф, в левой доле — предприятия, в правой — банки. Должен найтись поток величины $\sum\limits_i a_i = \sum\limits_j b_j$.