ОВАиТК А*

Ковалев Алексей

Задача А*

Лемма 1. Элементы с конечным порядком абелевой группы G образуют подгруппу H.
Проверим замкнутость H относительно операции: $\forall g, h \in G\colon\ \operatorname{ord} g < +\infty,\ \operatorname{ord} h < +\infty$

- очевидно $e \in H$
- $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} g^{-1} < +\infty \Rightarrow g^{-1} \in H$
- пусть $\operatorname{ord} g = n,\ \operatorname{ord} h = m$, тогда $(gh)^{nm} = g^{nm} h^{nm} = e \Rightarrow \operatorname{ord} gh \mid nm \Rightarrow \operatorname{ord} gh < +\infty$

Отсюда $H \neq \varnothing$ и H замкнуто относительно операции, значит H – подгруппа G. $\square$

Лемма 2. В любой абелевой группе G, где есть элемент $g\colon \operatorname{ord} g$ – максимален, $\forall h\ \operatorname{ord} h \mid \operatorname{ord} g$.
Предположим $\exists h \in H\colon \operatorname{ord} h \nmid \operatorname{ord} g$. Тогда $\exists p, \alpha\colon p^\alpha \mid \operatorname{ord} h,\ p^\alpha \nmid \operatorname{ord} g$. Обозначим за β наибольшее натуральное число, такое что $p^\beta \mid \operatorname{ord} g$. Тогда $\alpha > \beta$. Рассмотрим $a = h^{\operatorname{ord}(h)/p^\alpha} \in G,\ b = g^{p^\beta} \in G$. По доказанному ранее в задаче 1

$$\operatorname{ord} a = \frac{\operatorname{ord} h}{\operatorname{ord}(h)/p^\alpha} = p^\alpha$$

$$\operatorname{ord} b = \frac{\operatorname{ord} g}{p^\beta}$$

Так как $\operatorname{ord} a$ и $\operatorname{ord} b$ взаимнопросты, по доказанному в задаче 5

$$\operatorname{ord} ab = \operatorname{ord} a \cdot \operatorname{ord} b = p^\alpha \cdot \frac{\operatorname{ord} g}{p^\beta} = p^{\alpha-\beta} \operatorname{ord} g > \operatorname{ord} g$$

То есть $\operatorname{ord} ab = p^{\alpha-\beta} \operatorname{ord} g > \operatorname{ord} g \Rightarrow g$ не является элементом, порядок которого максимален – противоречие.
Значит $\forall h \in H\ \ \operatorname{ord} h \mid \operatorname{ord} g$. $\square$

Доказательство. Чтобы доказать утверждение задачи, остается лишь применить лемму 1 к данной абелевой группе G и лемму 2 к подгруппе конечных ее элементов. $\square$