# Исчисление высказываний (ИВ)

## Синтаксис

В основе формального исчисления лежат абстрактные знаки, строки из знаков и действия с этими строками. Точное определение формальной системы можно найти в учебнике Вялого по курсу. Абстрактные формальные преобразования строк, правила вывода и наборы аксиом составляют *синтаксис* формальной системы.

Рассмотрим формальную систему, называемую *исчислением высказываний* или логикой нулевого порядка.

Несмотря на то, что в абстрактной формальной системе символам **не приписывается никакого смысла**, для лучшего понимания мы будем разделять символы ИВ на высказывания (символами для них будут буквы или индексированные буквы), логические связки (они будут стоять между высказываниями) и служебные символы. Зачем это делается, будет понятно позднее.

В качестве логических связок в нашей конкретной реализации ИВ (да, ИВ – одна из многих формальных систем, а схема, которую изучаем мы, – лишь одна из многих её реализаций) используются импликация $\to$ и отрицание $\neg$ (вместо символа отрицания я буду писать чёрточку над символом). Ещё раз подчеркну, что это импликация только по изображению символа, никакого смысла “если, то” в это символ мы не вкладываем – позже окажется, что именно **интерпретация** этого символа как импликации позволяет содержательно использовать ИВ.

*Аксиомы (на самом деле это схемы аксиом, в которых вместо $A, B, C$ можно подставлять любые формулы):*

**Ax1** $: A \to (B \to A)$

**Ax2** $: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

**Ax3** $: (\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$

*Правило вывода:* несёт звучное латинское название modus ponens, **MP**:

$$\begin{array}{rl} & A \\ & A \to B \\ \hline \therefore & B \end{array}$$

($\therefore$ — один из вариантов знака «следовательно»)

Знак $\vdash$ означает «синтаксически следует», «выводимо» или «доказуемо» в рамках формальной теории.

Вывод формулы или доказательство формулы — конечная последовательность строк, каждая из которых есть аксиома, *гипотеза (в случае условного вывода)* или получается из предыдущих строк по правилу вывода, последняя строка при этом есть выводимая формула или теорема.

*Теорема о дедукции в ИВ:*

для любого множества формул $\Gamma$: $\Gamma \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

Множество формул $\Gamma$ называется **противоречивым**, если существует формула $A$ такая, что

$\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \overline{A}$. Множество формул в данной формальной системе также называют **теорией**, и потому говорят о противоречивости теории.

В противном случае теория (или множество) называется непротиворечивым (consistent).

Теория $\Gamma$ называется (синтаксически) *полной* (complete), если для любой формулы $A$ хотя бы одна из формул $A$ и $\overline{A}$ (синтаксически) выводима из $\Gamma$.

**Семантика**

Для другого понятия полноты (об этой полноте говорит теорема о полноте ИВ и теорема Гёделя о полноте) требуется введение *семантики*: интерпретации, содержательного смысла, стоящего за данной формальной системой.

Для ИВ естественной интерпретацией формул является алгебра высказываний с присваиванием формулам ИВ истинностного/ложностного значений (кто бы мог подумать!). Семантическая выводимость или семантическое следование формулы $\varphi$ из теории $\Gamma$ (пишем $\Gamma \vDash \varphi$) означает истинность формулы $\varphi$ на всех наборах значений переменных, на которых все формулы из $\Gamma$ истинны. При такой интерпретации можно показать, что любая тавтология алгебры высказываний выводима в ИВ (при пустой теории $\Gamma$).

В этом состоит понятие (и теорема) *полноты* (complete) для ИВ: $\vDash \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$ (теорема о полноте ИВ – Completeness of Propositional Logic).

Одновременно с этим ИВ корректно (sound), т. е. в ИВ выводимы только тавтологии (теорема о корректности ИВ – Soundness of Propositional Logic), что значит $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$.

Окончательно получаем $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi$.

Не путайте два разных определения полноты (есть ещё третье – про полные системы булевых связок – оно вообще не при чём). Первая полнота – это синтаксическая полнота теории (т. е. множества формул). Вторая полнота – это семантическая полнота логики – системы, которая называется исчислением высказываний.

При решении задач полезным может быть следующий *критерий условной выводимости* для ИВ: $\Gamma \vdash A$ тогда и только тогда, когда формула $A$ истинна при всех наборах значений переменных, на которых все формулы из множества $\Gamma$ истинны, что означает $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$.

Множество формул $\Gamma$ называется *совместным* или *выполнимым* если существует такой набор значений переменных, что все формулы из $\Gamma$ истинны на этом наборе.

Множество $\Gamma$ непротиворечиво тогда и только тогда, когда оно выполнимо (фактически, это переформулировка критерия условной выводимости).

Построить вывод (заметьте, такая формулировка задачи не предполагает использования знаний о тавтологии формул и/или теорему о дедукции – эти инструменты доказывают существование вывода, но не строят его).

**1.1.1:** $\vdash A \to A$

**1.1.2:** $A \to B, B \to C \vdash A \to C$

**1.1.3:** $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$

Построить вывод.

**1.2.1:** $\vdash \overline{\overline{A}} \to A$

**1.2.2:** $\vdash A \to \overline{\overline{A}}$

Контрапозиция импликации. Построить вывод.

**1.3.1:** $\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$

**1.3.2:** $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$

**1.3.3:** $\vdash (A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A})$

**1.3.4:** $\vdash (\overline{A} \to B) \to (\overline{B} \to A)$

**1.4:** Теория называется *противоречивой* если в ней существует формула $A$ такая, что выводимы $A$ и $\overline{A}$. Доказать, что любая формула является теоремой противоречивой теории т. е, что

$A, \overline{A} \vdash B$

**1.5:** Построить вывод $\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

**1.6:** Построить вывод $A \to (B \to C) \vdash A \to ((D \to B) \to (D \to C))$

**1.7:** Доказать, что схема аксиом **Ax3** эквивалентна схеме аксиом

$(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$

**1.8:** Доказать, что схема аксиом **Ax3 не** эквивалентна схеме аксиом

$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$

**1.9:** Рассмотрим другую версию ИВ. Пусть связками в алфавите формальной системы служат символы $\vee$ и $\neg$ (как и ранее вместо символа $\neg$ будем писать чёрточку над формулой). Формулы строятся аналогично формулам теории $L$, аксиомы есть схемы

**Ax1** $: \overline{A \vee A} \vee A$

**Ax2** $: \overline{A} \vee (A \vee B)$

**Ax3** : $\overline{A \vee B} \vee (B \vee A)$

**Ax4** : $\overline{\overline{B} \vee C} \vee (\overline{A \vee B} \vee (A \vee C))$

правило вывода есть

$\overline{A} \vee B$
$A$
$\therefore B$

Вывести формулу $A \vee \overline{A}$

**1.10:** В этой задаче будем рассматривать формулы только от трёх переменных: $x, y, z$.

Проверить множества на полноту и противоречивость:

$\{x \vee y \to z, x \vee y, \overline{z}\}$, $\{x \wedge y \to y \vee z, z, \overline{x} \wedge \overline{y}\}$, $\varnothing$

**1.11:** Пусть $\Gamma$ — множество всех формул исчисления высказываний, в которые не входят отрицания и входит не менее двух импликаций. Пусть $x$, $y$ — переменные в алфавите ИВ.

Докажите, что $\Gamma \vdash \overline{y} \to x$, $\Gamma \nvdash \overline{\overline{y} \to x}$

**1.12:** Из трёх следующих утверждений некоторые верны, а некоторые неверны. Для каждого утверждения:

– если утверждение верно, требуется это доказать. Хотя бы одно из таких доказательств должно быть сделано с помощью построения вывода.

– если утверждение неверно, требуется это доказать.

$$(A \to B) \to (\neg B \to A) \vdash \neg(A \to A) \to \neg(B \to B)$$

$$\neg A \to B, \neg(B \to A) \vdash (A \to A) \to \neg(B \to B)$$

$$A \to C, \neg A \to \neg C, \neg B \to A, C \to B \vdash (C \to \neg B) \to (A \to B)$$

**1.13:** Назовём множество $\Gamma$ независимым, если для каждой формулы $\varphi \in \Gamma$ не существует её вывода из множества без этой формулы, т.е. $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$. Для каждой формулы ИВ $\psi$ проверить, является ли множество $\{\psi\}$ независимым.

**1.14:** Доказать, что схемы аксиом ИВ независимы друг от друга.

**1.15:** Существуют ли невыводимые в ИВ формулы $A$, $B$ и $C$ такие, что формулы $A \to (B \to C)$ и $A \to (\overline{B} \to C)$ выводимы в ИВ?

**1.16:** Пусть $\Gamma_x$ — множество всех формул вида $A \to (A \to x)$, где $A$ — произвольная формула ИВ, а $x$ — фиксированная переменная. Проверить множество $\Gamma_x$ на полноту и противоречивость.