ТРЯП 1

Ковалев Алексей

1. Регулярное выражение для этого языка – $(a|b)^*bb(a|b)^*$. Для доказательства покажем, что язык L из условия и язык L_1, задаваемый РВ совпадают. Покажем включения в обе стороны.

1. Очевидно, что слово bb является подсловом слова, задаваемого РВ $(a|b)^*bb(a|b)^*$, поэтому $L_1 \subset L$.

2. Рассмотри произвольное слово $w \in L$. Оно содержит подстроку bb. Представим слово w как w_1bbw_2, где $w_1,\ w_2 \in \{a, b\}^*$. Слово w задается регулярным выражениям, так как $(a|b)^*$ задает любое слово из $\{a, b\}^*$, в том числе w_1 и w_2. Значит $L \subset L_1$.

Ответ: $(a|b)^*bb(a|b)^*$.

2. Регулярное выражение для этого языка – $(a|b)^*a(a|b)^*b(a|b)^*|(a|b)^*b(a|b)^*a(a|b)^*$. Для доказательства покажем, что язык L из условия и язык L_1, задаваемый РВ совпадают. Покажем включения в обе стороны.

1. Очевидно, что в слове, задаваемом РВ $(a|b)^*a(a|b)^*b(a|b)^*|(a|b)^*b(a|b)^*a(a|b)^*$ есть буквы a и b, поэтому $L_1 \subset L$.

2. Рассмотри произвольное слово $w \in L$. Оно содердит и букву a, и букву b. Тогда оно представимо либо как $w_1aw_2bw_3$, либо как $w_1bw_2aw_3$, где $w_1,\ w_2,\ w_3 \in \{a, b\}^*$. Такие представления задаются регулярными выражениями $(a|b)^*a(a|b)^*b(a|b)^*$ и $(a|b)^*b(a|b)^*a(a|b)^*$ соответсвенно, так как $(a|b)^*$ задает любое слово из $\{a, b\}^*$, в том числе w_1, w_2 и w_3. Тогда слово w задается приведенным РВ. Значит $L \subset L_1$.

Ответ: $(a|b)^*a(a|b)^*b(a|b)^*|(a|b)^*b(a|b)^*a(a|b)^*$.

3. Регулярное выражение для этого языка – $a^*(b|aaa^*)^*a^*$. Для доказательства покажем, что язык L из условия и язык L_1, задаваемый РВ совпадают. Покажем включения в обе стороны.

1. В слове, задаваемом РВ $a^*(b|aaa^*)^*a^*$, нет подстроки bab, так как после любой буквы b, кроме, может быть, последней, идет либо буква b, либо хотя бы две буквы a. Значит $L_1 \subset L$.

2. Рассмотри произвольное слово $w \in L$. Оно может быть представленно в виде

$$w = a^{\alpha_0}b^{\beta_1}a^{\alpha_1}\dots b^{\beta_n}a^{\alpha_n} = w_1b^{\beta_1}a^{\alpha_1}\dots b^{\beta_n}w_2$$

где $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1},\ \beta_1,\ \dots,\ \beta_n \in \mathbb{N}$; $\alpha_0,\ \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. Причем $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1} \geqslant 2$, так как w не имеет подстроки bab. Тогда w_1 и w_2 задаются РВ a^*, каждый из блоков вида $b^{\beta_i}a^{\alpha_i}$, $i \in \{1,\ 2, \dots,\ n-1\}$ может быть задан РВ $(b|aaa^*)^*$, так как содержит произвольное количество букв b и неравное 1 число букв a. Последний блок также может быть задан РВ $(b|aaa^*)^*$, так как имеет вид b^{β_n}. Значит и само w слово может быть задано РВ $a^*(b|aaa^*)^*a^*$, то есть $L \subset L_1$.

Ответ: $a^*(b|aaa^*)^*a^*$.

4. Регулярное выражение для этого языка – $(a^*(baa^*)^*b)|\varepsilon$. Для доказательства покажем, что язык L из условия и язык L_1, задаваемый РВ совпадают. Покажем включения в обе стороны.

1. Слово, заданное РВ, либо равно ε, либо имеет последнюю букву b и не содержит двух букв b подряд. Значит $L_1 \subset L$.

2. Будем доказывать индукцией по длине слова. База индукции: слово длины 0 лежит и в L, и в L_1, то есть для него включение $L \subset L_1$ выполнено. Переход индукции: предположим, что слово $\forall w \in L, |w| = n$ выполняется $w \in L_1$. Рассмотрим произвольное слово $w \in L$ длины $n+1$. Так как в этом слове нет двух b подряд и после любой a есть b, те же условия верны и для его суффикса w_1 длины n. Поэтому для

этого суффикса верно предположение индукции и он лежит в L_1, а значит задается РВ $(a^*(baa^*)^*b)|\varepsilon$. В случае, когда $w = aw_1$, оно может быть задано этим РВ, так как РВ начинается с a^*. Если $w = bw_1$, то w_1 либо пусто, либо начинается с a. В первом случае $w = b$ и задается РВ, во втором случае w также может быть задано РВ, так как в нем есть часть $(baa^*)^*$. Значит переход индукции корректен. Тогда выполнено включение $L \subset L_1$.

Ответ: $(a^*(baa^*)^*b)|\varepsilon$.