ОВАиТК, дз №1

Задача 1

Пусть $|g| = n$, и m не делится на n.

1. Докажите, что $g^m \neq e$.
2. Выразите порядок элемента g^m через n, m и их наибольший общий делитель d.

Задача 2

Докажите, что $C_{mn} \cong C_n \times C_m$ тогда и только тогда, когда n и m взаимо просты

Задача 3

Пусть в группе G для любого элемента g выполнено равенство $g^2 = e$. Докажите, что группа абелева.

Задача 4

Пусть в абелевой группе G ровно один элемент f имеет порядок 2. Найдите произведение всех элементов этой группы.

Задача 5

Пусть G абелева, $g, h \in G$

1. Докажите, что в порядок gh делит наименьшее общее кратное $|g|$ и $|h|$.
2. Приведите пример абелевой группы G, в которой для некоторых $|g|$ и $|h|$ порядок gh строго меньше НОК$(|g|, |h|)$.

   Указание: пример можно найти в $G = \mathbb{Z}_n$
3. Докажите, что если $|g|$ и $|h|$ взаимо просты, то порядок gh в точноности равен $|g||h|$.

Задача 6

Сравните группы $\mathbb{Z}_5^*$ и $\mathbb{Z}_{12}^*$. Равны ли их мощности? Изоморфны ли они?

Задача 7

Докажите, что группа $\mathbb{Q}$ не представима в виде декартова произведения двух нетривиальных подгрупп

Задача A*

Выведите из задачи 3 обобщение теоремы Лагранжа для абелевой группы: пусть в абелевой группе G среди элементов с конечным порядком элемент g имеет максимальный порядок (это значит, что если $|h| < +\infty$, то $|h| \leq |g|$. Среди элементов группы могут быть элементы с бесконечным порядком). Тогда для любого другого элемента с конечным порядком h порядок h делит порядок g.