1 Лист 1

1. Известно, что сложность умножения двух матриц $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$ равна $O(nmk)$, также умножение ассоциативно $(AB)C = A(BC)$. Пусть у нас есть набор матриц, для которых корректно определено произведение $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$, $A_i \in \mathbb{C}^{n_{i-1} \times n_i}$. Придумайте алгоритм, который скажет в каком порядке нужно перемножать матрицы, чтобы получить оптимальное время (т. е. произвести минимум операций).

2. По определению норма должна удовлетворять следующему набору свойств:

   (a) $\|x\| \geq 0$;

   (b) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

   (c) $\|cx\| = |c|\|x\|$;

   (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   Покажите, что одно из этих свойств следует из двух других.

3. Покажите, что при $0 < p < 1$ величина $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$ задает функцию в $\mathbb{C}^n$, которая удовлетворяет всем свойствам нормы, кроме одного. Приведите пример.

4. Приведите примеры неэквивалентных норм.

5. Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. Докажите, что x и y линейно зависимы. Верно ли это, если $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$, $p \neq 2$?

6. Пусть норма $\|\cdot\|$ задана на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что для p-нормы дуальной является q-норма, где p и q образуют гельдеровскую пару:

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

   Кроме того, пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ сохраняет p-норму:

   $$\|Ax\|_p = \|x\|_p, \quad \forall x \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

   Докажите, что в этом и только в этом случае матрица A^T сохраняет q-норму:

   $$\|A^T x\|_q = \|x\|_q, \quad \forall x \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

7. Докажите, что норма Фробениуса $\|A\|_F$ <u>не является</u> операторной нормой. Т. е. не существует такой векторной нормы $\|x\|$, что:

   $$\|A\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

8. Докажите формулы

   $$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

   $$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

   Напомним, что:

   $$\|x\|_\infty = \max_{i \in \overline{1,n}} |x_i|$$

9. Пусть A — подматрица матрицы B. Докажите, что $\|A\|_p \leq \|B\|_p$.

10. Элементы матриц A и B неотрицательны и $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех i, j. Верно ли, что $\|A\|_p \leq \|B\|_p$?

11. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $c = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Покажите, что выполняется неравенство:

$$|\det A| \leq c^n n^{n/2}$$

12. Докажите, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является нормальной ($AA^* = A^*A$) тогда и только тогда, когда:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \|Ax\|_2 = \|A^*x\|_2$$

13. Пусть матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ коммутируют между собой. Покажите, что тогда B коммутирует с алгебраическим дополнением матрицы A.

14. Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ представляется в виде:

$$A = BC \qquad \text{где } B, C^* \in \mathbb{C}^{n \times k}$$

Докажите, что существует полином $q(t)$ степени не более чем $(k+1)$, т. ч. $q(A) = 0$.

15. Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A и B одновременно подобны верхнетреугольной матрице. Т. е. существует невырожденная S, т. ч. SAS^{-1} и SBS^{-1} являются верхнетреугольными (не обязательно одинаковыми). Покажите, что все собственные значения $AB - BA$ равны нулю.

16. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является кососимметричной ($A* = -A$) и имеет ранг 1. Докажите, что $A = 0$.

17. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, покажите, что выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)$$

Где $\lambda_i(A)$ это собственные значения матрицы A, а $\sigma_i(A)$ её сингулярные значения.

18. Покажите, что для матрицы $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ сингулярные значения могут быть найдены по формуле:

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A^*A) \pm \sqrt{\left(\operatorname{tr} A^*A\right)^2 - 4|\det A|^2}\right)$$

19. Величина

$$d_k(A) = \min_{\dim L_k \leq k} \max_{\|x\|_2 \leq 1} \min_{y \in L_k} \|Ax - y\|_2$$

называется поперечником по Колмогорову. Докажите, что $d_k(A) = \sigma_{k+1}(A)$.

20. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ подпространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A^*$ ортогональны, и в прямой сумме дают $\mathbb{C}^n$.

21. Докажите, что произведение эрмитовой и положительно определенной матрицы имеет вещественные собственные значения.

22. Найдите сингулярное разложение матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

23. Докажите, что $\sigma_1(A) = \max_{\|u\|_2 = 1, \|v\|_2 = 1} |u^*Av|$.

24. Чему равно расстояние от вырожденной матрицы A до ближайшей невырожденной?

25. Можно ли утверждать, что $B = A^*$, если $(Ax, x) = (x, Bx)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$?

26. Докажите, что $\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F$.

27. Пусть L это нижняя треугольная матрица с нижней треугольной частью, взятой из матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Докажите, что:
$$\|L\|_2 \le \log_2 2n \|A\|_2$$

28. Нормальная матрица A имеет блочно треугольный вид
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$
с квадрартными блоками A_{11} и A_{22}. Докажите, что матрицы A_{11} и A_{22} нормальные и, кроме того, $A_{12} = 0$.

29. Пусть зафиксировано подпространство $L \in \mathbb{C}^n$ и рассматриваются матрицы P такие, что $P^2 = P$ и $\operatorname{Im} P = L$. Докажите, что среди всех таких матриц P наименьшую 2-норму имеет эрмитова матрица.