Subgradient and subdifferential

Ковалев Алексей

1.

$$f(x) = \mathrm{PReLU}(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ ax, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

По определению $g \in \partial f(x_0) \iff \forall x \in \operatorname{dom} f$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0) + \langle g,\, x - x_0 \rangle$.

- Пусть $a > 1$. Ясно, что при этом функция не выпукла. В точке $x_0 \neq 0$ функция дифференцируема, а значит $\partial f(x_0) = \varnothing$ или $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Но при этом по критерию выпуклости $\forall x \in \operatorname{dom} f$ выполняется $f(x) < f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),\, x - x_0 \rangle$, то есть $\nabla f(x_0) \notin \partial f(x_0)$ при $x_0 \neq 0$. При $x_0 = 0$ получаем $g \in \partial f(x_0) \iff \forall x \in \operatorname{dom} f$ выполняется $f(x) \geqslant gx$, а значит $x \geqslant gx$, $x > 0$ и $ax \geqslant gx$, $x \leqslant 0$. То есть $1 \geqslant g \geqslant a > 1$. Значит $\partial f(x) = \varnothing$ при любом x.

- Пусть $a \leqslant 1$. Тогда функция выпукла и из критерия выпуклости и теоремы о субдифференциале дифференцируемой функции получаем $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ при $x_0 \neq 0$. При x_0 получаем $g \in \partial f(x_0) \iff \forall x \in \operatorname{dom} f$ выполняется $f(x) \geqslant gx$, а значит $x \geqslant gx$, $x > 0$ и $ax \geqslant gx$, $x \leqslant 0$. То есть $1 \geqslant g \geqslant a$.

Ответ: $\partial f(x) = \varnothing$ при $a > 1$ и $\partial f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ [a; 1], & x = 0 \\ a, & x < 0 \end{cases}$ при $a \leqslant 1$.

2. $0 \in \partial f(x_0) \iff \forall x \in \operatorname{dom} f$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0) + \langle 0,\, x - x_0 \rangle = f(x_0) \iff x_0$ – точка минимума функции f. $\square$

3. $f(x) = \|Ax - b\|_1$. Пусть $\varphi(x) = Ax - b$. Тогда $f = \|\cdot\|_1 \circ \varphi$.
В таком случае субдифференциал $\partial f(x) = \partial(\|\cdot\|_1 \circ \varphi)(x) = A^\top \partial \|\cdot\|_1(\varphi(x)) = A^\top \partial \|\cdot\|_1(Ax - b)$. При этом

$$\partial \|\cdot\|_1(x) = \begin{cases} B_{\|\cdot\|_\infty}(0,\, 1), & x = 0 \\ \{s :\ s \in \mathbb{R}^n,\ \|s\|_\infty = 1,\ \langle s,\, x \rangle = \|x\|_1\}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\partial f(x) = \begin{cases} \left\{A^\top s :\ s \in B_{\|\cdot\|_\infty}(0,\, 1)\right\}, & Ax - b = 0 \\ \left\{A^\top s :\ s \in \mathbb{R}^n,\ \|s\|_\infty = 1,\ \langle s,\, Ax - b \rangle = \|Ax - b\|_1\right\}, & Ax - b \neq 0 \end{cases}$

4. $f(x) = e^{\|x\|}$. e^x – выпуклая, монотонно неубывающая, дифференцируемая функция, $\|\cdot\|$ – выпуклая функция, а значит справедлива формула для субдифференциала сложной функции

$$\partial f(x) = \partial e^{\|\cdot\|}(x) = e^{\|x\|} \partial \|\cdot\|(x)$$

Воспользуемся формулой для субдифференциала нормы

$$\partial \|\cdot\|(x) = \begin{cases} B_{\|\cdot\|_*}(0,\, 1), & x = 0 \\ \{s :\ s \in \mathbb{R}^n,\ \|s\|_* = 1,\ \langle s,\, x \rangle = \|x\|\}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\partial f(x) = \begin{cases} B_{\|\cdot\|_*}(0,\, 1), & x = 0 \\ \left\{e^{\|x\|} s :\ s \in \mathbb{R}^n,\ \|s\|_* = 1,\ \langle s,\, x \rangle = \|x\|\right\}, & x \neq 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1$, где $\lambda > 0$.
Сначала найдем $\partial g(x)$, где $g(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2$ аналогично номеру 3.

$$\partial g(x) = \begin{cases} \left\{A^\top s:\ s \in B_{\|\cdot\|_2}(0,1)\right\}, & Ax-b=0 \\ \left\{A^\top s:\ s\in\mathbb{R}^n,\ \|s\|_2=1,\ \langle s,\ Ax-b\rangle = \|Ax-b\|_2\right\}, & Ax-b\neq 0 \end{cases}$$

Теперь воспользуемся формулой для субдифференциала сложной функции для $h(x) = \|Ax-b\|_2^2$. Эта формула справедлива, так как x^2 – выпуклая, монотонно неубывающая, дифференцируемая на $\mathbb{R}_+$ функция, $\|Ax-b\|_2$ – выпуклая функция.

$$\partial h(x) = \|Ax-b\|_2 \partial g(x)$$

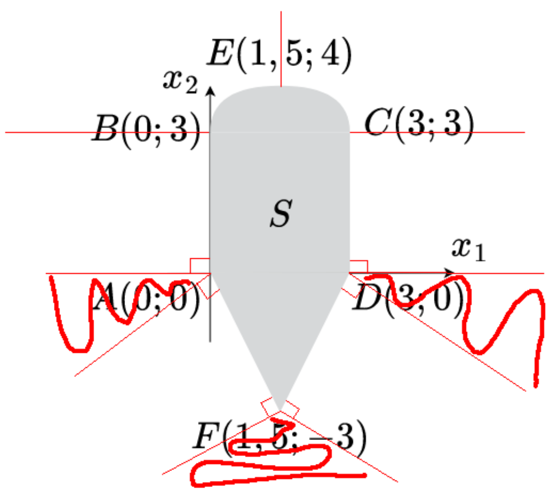
Наконец, пользуясь теоремой Моро-Рокафеллара, получаем

$$\begin{aligned}
&\partial f(x) \\
&\quad = \partial h(x) + \lambda\partial\|\cdot\|_1(x) \\
&\quad = \begin{cases} \{0\}, & Ax-b=0 \\ \left\{\|Ax-b\|_2\cdot A^\top s:\ s\in\mathbb{R}^n,\ \|s\|_2=1,\ \langle s,\ Ax-b\rangle = \|Ax-b\|_2\right\}, & Ax-b\neq 0 \end{cases} \\
&\quad + \begin{cases} B_{\|\cdot\|_\infty}(0,\lambda), & x=0 \\ \{\lambda s:\ s\in\mathbb{R}^n,\ \|s\|_\infty = 1,\ \langle s,\ x\rangle = \|x\|_1\}, & x\neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: приведен выше.

6. $N_S(x) = \{c:\ c\in\mathbb{R}^n,\ \forall y\in S\ \langle c,\ y-x\rangle \leqslant 0\}$ – нормальный конус множества S в точке x.

(a) Нормальные конусы на самом деле находятся в точке 0, но для удобства каждый конус смещен смещены в точку, к которой он относится. Конусы построены из тех соображений, что вектор лежит в нем тогда и только тогда, когда он образует угол $\geqslant 90^\circ$ с любым вектором множества.



(b) Пусть $x\in \operatorname{rint} S$. Пусть также $0\neq c\in N_S(x) = \{c:\ c\in\mathbb{R}^n,\ \forall y\in S\ \langle c,\ y-x\rangle\leqslant 0\}$. Ясно, что в $\operatorname{rint} S$ найдутся $x_1,\ x_2$, такие что $x-x_1 = x_2-x$, так как $x\in\operatorname{rint} S \iff x\in U(x)\cap \operatorname{aff} S$, где $U(x)$ – какая-то окрестность x. Тогда $\langle c,\ x-x_1\rangle\leqslant 0$ и $\langle c,\ x_2-x\rangle \geqslant 0$. Но $x-x_1 = x_2-x$, а значит $\langle c,\ x-x_1\rangle = 0$ и $c=0$. $\square$

(c)

$$I_S(x) = \begin{cases} 0, & x\in S \\ \infty, & x\notin S \end{cases}$$

Требуется показать, что $\partial I_S(x) = N_S(x)$, но это справедливо только для точек $x\in S$. Пусть $x_0\in S$.

$$\partial I_S(x_0) = \{g:\ \forall x\in\mathbb{R}^2\ I_S(x)\geqslant I_S(x_0) + \langle g,\ x-x_0\rangle\} = \{g:\ \forall x\in S\ 0\geqslant \langle g,\ x-x_0\rangle\} = N_S(x_0)$$

Пусть теперь $x_0 \notin S$. Тогда $N_S(x_0) = \{0\}$, в то время как

$$\partial I_S(x_0) = \{g : \forall x \in \mathbb{R}^2 \; I_S(x) \geqslant I_S(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle\} = \{g : \forall x \in \mathbb{R}^2 \; I_S(x) \geqslant \infty + \langle g, x - x_0 \rangle\} = \varnothing$$

Значит для любого $x \in S$ $\partial I_S(x) = N_S(x)$, а для любого $x \notin S$ $\partial I_S(x) \neq N_S(X)$.