МФТИ
Алгоритмы и структуры данных, осень 2022
Семинар №10. Выпуклые оболочки

1. На плоскости даны n точек. Найдите такую минимальную по включению выпуклую фигуру F, что все n точек лежат внутри F, причём каждая из точек лежит на расстоянии хотя бы r от границы F. Как найти периметр такой фигуры? Асимптотика: $O(n \log n)$.

2. На плоскости в некоторых точках стоят n детей. Они хотят сделать селфи. Для этого им нужно определить человека, с положения которого все остальные видны под минимальным углом. Помогите им определить фотографа за $O(n \log n)$.

3. Постройте выпуклое расслоение данного множества из n точек за $O(n^2)$. Выпуклое расслоение строится по слоям: i-м слоем выступают точки, лежащие в вершинах выпуклой оболочки множества точек, из которого выброшены точки меньших слоёв. Иными словами, 1-й слой — это вершины выпуклой оболочки; 2-й слой — это вершины выпуклой оболочки после выкидывания вершин 1-го слоя; и так далее.

4. На плоскости даны n точек в общем положении (никакие три не лежат на одной прямой). За $O(n^2 \log n)$ найдите сумму площадей выпуклых оболочек по всем подмножествам точек, содержащих хотя бы три из них.

5. Известно, что если $x_1 \neq x_2$, то существует ровно одно парабола вида $y = x^2 + bx + c$, проходящая через заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). На плоскости даны n точек. Вася проводит параболы описанного вида через каждую пару точек с различными абсциссами. Найдите количество различных нарисованных парабол, внутри которых (между ветвями которых) нет других точек. Асимптотика: $O(n \log n)$.

6. Дан набор чисел $a_1, \ldots, a_n$, не обязательно положительных. Определим $f(l, r) = a_l + 2a_{l+1} + \ldots + (r - l + 1)a_r$. Найдите $\max\limits_{l \leqslant r} f(l, r)$ за $O(n \log n)$.

7. Дано корневое дерево, в каждой вершине которого написаны два числа: в i-й вершине написаны числа a_i и b_i. Из произвольной вершины i можно перепрыгнуть в любую вершину j, лежащую в поддереве i, тогда стоимость прыжка равна $a_i \cdot b_j$. Для каждой вершины определите минимальную суммарную стоимость прыжков, чтобы добраться из неё до какого-либо листа дерева. Асимптотика: $O(n \log^2 n)$.

8. Пусть a, b, c — три массива длины n. Пусть $dp_0 = 0$. Пусть $dp_i = \max\limits_{j<i} \{a_j b_i + dp_j \cdot c_i\}$. Найдите все значения dp за $O(n \log n)$.

1. Постройте выпуклую оболочку. От вершин нужно отступить на расстояние r, суммарно к границе прибавится окружность радиуса r.
2. Покажите, что фотограф обязательно стоит в вершине выпуклой оболочки.
3. Здесь идея только одна: точки достаточно отсортировать один раз (по (x, y) в самом начале).
4. Рассмотрите пару точек и определите, во сколько выпуклых оболочек входит это ребро. Для этого можно перебрать первую вершину, отсортировать все остальные по полярному углу относительно неё и провращать прямую.
5. При замене координат $(x, y) \to (x, y - x^2)$ параболы перейдут в прямые. Останется найти количество сторон выпуклой оболочки.
6. Пусть $suff_i = f(i, n)$. Перебирайте r в порядке возрастания, найдите максимум по всем отрезкам, которые заканчиваются в r. Тогда $f(i, r) = suff_i - suff_{r+1} - sum(r+1, n) \cdot (r - i + 1)$. Тогда достаточно хранить выпуклую оболочку на точках $(suff_i, i)$.
7. Пусть dp_i — ответ для i-й вершины. Тогда $dp_i = \min\limits_{j \text{ из поддерева } i} dp_j + a_i \cdot b_j$. Достаточно хранить точки (dp_j, b_j) в выпуклой оболочке. Нужно будет также сливать выпуклые оболочки, для этого воспользуйтесь идеей переливания меньшего к большему.
8. Храните точки (a_j, dp_j). Нужно просто вставлять “в середину” выпуклой оболочки.