ТРЯП 4

Ковалев Алексей

1.

(a) Язык $L = \{a^{2022n+5} : n \in \mathbb{N}_0\} \cap \{a^{2402n+33} : n \in \mathbb{N}_0, n \geqslant 401\}$ регулярен, так как $L = \{a^{2022\cdot 1201n+2022\cdot 1163+5} : n \in \mathbb{N}_0\}$ и очевидно задается РВ $(a^{2022\cdot 1201})^* a^{2022\cdot 1163+5}$.

(b) Язык $L = \{a^{2022n^2+5} : n \in \mathbb{N}_0\}$ является нерегулярным. Предположим обратное. Тогда для него верна лемма о накачке. Рассмотрим слово $w = a^{2022n^2+5} \in L$, где n – константа из условия леммы о накачке. Тогда для любого разбиения $w = xyz$, такого что $|xy| \leqslant n$ и $|y| \geqslant 1$, выполняется $1 \leqslant |y| \leqslant n$. Рассмотрим слово xy^2z, которое также должно лежать в языке. Оно имеет длину $2022n^2+6 \leqslant |xy^2z| \leqslant 2022n^2+n+5$. Но в языке L нет слов такое длины, так как следующее по длине за w слово из L имеет длину $2022n^2 + 4044n + 2027$. Значит xy^2z не лежит в L, значит язык L не является регулярным.

2. Предположим, что язык $S = \{ww : w \in T^*\}$ над алфавитом $T = \{a, b\}$ регулярен. Рассмотрим слово $a^n b^n a^n b^n$, где n – константа из леммы о накачке. Тогда для любого разбиения $w = xyz$, такого что $|xy| \leqslant n$ и $|y| \geqslant 1$, выполняется $x = a^m$, $y = a^k$, где $n > m \geqslant k > 0$. Взяв $i = 0$, получаем, что слово $xy^iz = xz = a^m b^n a^n b^n \in L$, что невозможно. Значит язык L нерегулярный.

3. Язык $L = T^* \setminus \{w : w = w^R\}$ не является регулярным, так как является дополнением к нерегулярному языку $R = \{w : w = w^R\}$. Язык R нерегулярен по теореме Майхилла-Нероуда, так как существует бесконечно много классов эквивалентности по соответствующему отношению эквивалентности (№6a).

4. Язык $L = \{ab^{i^2} : i \in \mathbb{N}_0\} \cup L(b^*) \cup L(aaa^*b^*) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ удовлетворяет лемме о накачке, так как $\exists N = 3$, такое что

- $\forall w \in L_1$, $|w| \geqslant 3$ существует разбиение $w = xyz$, такое что $x = \varepsilon$, $y = a$, $z = b^{k^2}$ и при любом i слово $xy^iz = a^i b^{k^2} \in L$
- $\forall w \in L_2$, $|w| \geqslant 3$ существует разбиение $w = xyz$, такое что $x = \varepsilon$, $y = b$, $z = b^k$ и при любом i слово $xy^iz = b^i b^k \in L_2$
- $\forall w \in L_3$, $|w| \geqslant 3$ существует разбиение $w = xyz$, такое что $x = aa$, $y = w_3$, $z = a^n b^k$, причем $n = 0$ при $w_3 = b$ и $n \geqslant 0$ при $w_3 = a$, и при любом i слово $xy^iz = aaw_3^i a^n b^k \in L_3$, так как $xy^iz = aaa^i a^n b^k \in L_3$ при $w_3 = a$ и $xy^iz = aab^i b^k \in L_3$ при $w_3 = b$

Язык $L_1 = \{ab^{i^2} : i \in \mathbb{N}_0\}$ не является регулярным. Докажем от обратного: пусть L_1 регулярен, тогда для него верна лемма о накачке. Пусть $w = ab^{n^2}$, где n – константа из леммы о накачке. Тогда существует его разбиение $w = xyz$, такое что $|xy| \leqslant n$ и $|y| \geqslant 1$. Возможны два варианта: $y = b^m$, $m \geqslant 1$ или $y = w$. В первом случае все слова вида ab^{k^2-m+im} должны лежать в языке, то есть для любого i должно быть верно $k^2 + m(i-1) = s^2$, что невозможно. Во втором случае w^2 должно лежать в языке, что невозможно, так как $w^2 = ab^{k^2}ab^{k^2}$. Значит язык L_1 является нерегулярным, а значит и L является нерегулярным, так как $L_1 = L \cap L(ab^*)$.

5.

(a) Из $R \in \mathsf{REG}$, $F \cap R \in \mathsf{REG}$ не следует, что $F \in \mathsf{REG}$. Например $R = \varnothing$, F – произвольный нерегулярный язык.

(b) Если $R \in \mathsf{REG}$, $F \cap R \in \mathsf{REG}$ и $F \cap \overline{R} \in \mathsf{REG}$, то $F \in \mathsf{REG}$, так как $(F \cap R) \cup (F \cap \overline{R}) \in \mathsf{REG}$ как объединение регулярных языков, и $(F \cap R) \cup (F \cap \overline{R}) = F$.

6.

(a) L – язык палиндромов над алфавитом $T = \{a, b\}$. Рассмотрим произвольные слова $w, u \in T^*$. Покажем, что они лежат в разных классах эквивалентности Майхилла-Нероуда. Пусть $|w| \leqslant |u|$.

- Если $|w| = |u|$, то ww^R – палиндром и лежит в L, uw^R – не палиндром и не лежит в L. Значит w и u лежат в разных классах эквивалентности Майхилла-Нероуда.
- Если $|w| < |u|$, то возможны два случая. Если w является префиксом u, то рассмотрим $x = au^R$ и $y = bu^R$. При этом ux и uy – палиндромы и лежат в L, одно из слов wx, wy не лежит в L при $u[|w| + 1] = b$ и $u[|w| + 1] = a$ соответственно. Если w не является префиксом u, то uu^R – палиндром и лежит в L, wu^R – не лежит в L, так как $\exists i \colon w[i] \neq u[i]$.

То есть для любых слов $w, u \in L$ существует $x \in T^*$, такое что $wx \in L$, $ux \notin L$ или $wx \notin L$, $ux \in L$. Значит w и u лежат в разных классах эквивалентности Майхилла-Нероуда. Тогда всего есть счетное число классов, состоящих из одного слова каждый.

(b) L – язык слов над $T = \{a, b\}$, в которых букв a не больше чем букв b. Рассмотрим произвольные слова $w, u \in T^*$. Пусть $\Delta(w) = |w|_b - |w|_a$. Тогда $w \in L \iff \Delta(w) \geqslant 0$ и $\Delta(wu) = \Delta(w) + \Delta(u)$.

- Если $\Delta(w) = \Delta(u)$, то ясно, что $\forall x \in T^*\ wx \in L \iff ux \in L$, то есть $w \sim_L u$, так как $\Delta(wx) = \Delta(w) + \Delta(x) = \Delta(u) + \Delta(x) = \Delta(ux)$.
- Если $\Delta(w) \neq \Delta(u)$, то будем считать, что $\Delta(w) > \Delta(u)$. Тогда найдется $x \in L$, такое что $\Delta(x) = -\Delta(w)$ и $wx \in L$, $ux \notin L$, так как $\Delta(wx) = 0$, $\Delta(ux) = \Delta(u) - \Delta(w) < 0$. Значит u и w лежат в разных классах эквивалентности Майхилла-Нероуда.

Тогда классы эквивалентности Майхилла-Нероуда состоят из слов, в которых разность между количеством букв a и количеством букв b одинакова, причем их счетное число.