МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №13. Потоки (2)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. В двудольном графе каждая вершина v имеет некую стоимость c_v. Предложите алгоритм поиска вершинного покрытия этого графа минимальной суммарной стоимости.

2. (Матан) В курсе лекций по математическому анализу планируется рассказать n тем. Каждая тема i обладает некоторой полезностью для студентов $u_i \in \mathbb{Z}$. Также среди тем могут быть некие зависимости: для изучения одной темы нужно прослушать какую-то другую. Зависимости могут быть циклическими, в таком случае следует прослушать все темы цикла целиком (независимо от порядка). Определите набор тем для преподавания с целью максимизации суммарной полезности.

3. (Алгоритм Диница с масштабированием) Путь в алгоритме поиска максимального потока с помощью масштабирования вместо алгоритма Эдмондса—Карпа используется алгоритм Диница. Докажите, что время работы становится $O(|V|\,|E|\log C)$.

4. Докажите, что если F — максимальный поток в сети, а ℓ — кратчайшее расстояние в рёбрах от s до t, то $\ell \leqslant |V| \cdot \sqrt{2C/F}$. Выведите отсюда вторую теорему Карзанова: число итераций алгоритма Диница не превосходит $O(C^{1/3}\,|V|^{2/3})$.

5. В двудольном графе найдите такое $X \subset L$, что $|X| - |N(X)|$ максимально.

6. Дан неориентированный граф. Нужно ориентировать все его рёбра так, чтобы максимальная исходящая степень была минимально возможной.

1. Если L и R — доли графа, скажем, что разрез (S, T) соответствует множеству $(L \setminus S) \cup (R \cap S)$. Как сделать так, чтобы это множество действительно было вершинным покрытием?

2. Введите фиктивные s и t. Скажем, что разрез S содержит (помимо s) темы, которые будут рассказаны на лекциях. Во-первых, нужно гарантировать отсутствие зависимостей тем из S от тем из T. Во-вторых, минимизировать следует сумму положительных полезностей тем из T минус сумму отрицательных полезностей тем из S.

3. Уже известно, что на каждом шаге (при рассмотрении рёбер с остаточными пропускными способностями $\geqslant 2^k$) число находимых путей есть $O(|E|)$. Покажите тогда, что время работы каждого шага есть $O(|V|\,|E|)$.

4. См. ссылку.

5. Из s проведите рёбра пропускной способности 1 в вершины левой доли, аналогично — с правой долей и t, а рёбра графа превратите в рёбра с бесконечной пропускной способностью.

6. Каждое ребро увеличивает степень одного из своих концов на единицы. Заведите по вершине на каждое ребро, через эту вершину должна протекать единица потока и вытекать из какой-то вершины исходного графа. При этом нужно поставить ограничение (бинарным поиском) на суммарный поток через вершины.