Convex functions and Conjugate sets

Ковалев Алексей

Convex functions

1. $f(x) = x^d$, $x \in \mathbb{R}_+$

d	выпуклая	вогнутая	строго выпуклая	μ-сильно выпуклая
-2	да	нет	да	нет
-1	да	нет	да	нет
0	да	да	нет	нет
0.5	нет	да	нет	нет
1	да	да	нет	нет
$\in (1;2)$	да	нет	да	нет
2	да	нет	да	да, $\mu = 2$
> 2	да	нет	да	нет

- Проверим на выпуклость: $f''(x) = d(d-1)x^{d-2} \geqslant 0 \iff d(d-1) \geqslant 0 \iff d \in \mathbb{R} \setminus (0;1)$.
- Проверим на вогнутость: $f''(x) = d(d-1)x^{d-2} \leqslant 0 \iff d(d-1) \leqslant 0 \iff d \in [0;1]$.
- Проверим на строгую выпуклость: $f''(x) = d(d-1)x^{d-2} > 0 \iff d \in \mathbb{R} \setminus [0;1]$.
- Проверим на сильную выпуклость: $f''(x) = d(d-1)x^{d-2} \geqslant \mu$. Это неравенство не может быть выполнено при $d < 2$, так как при этом $x^{d-2} \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow \infty$. При $d = 2$ под условие подходит $\mu = 2$. При $d > 2$ неравенство не выполняется, так как в точке $x = 0$ оно имеет вид $0 \geqslant \mu$.

2.

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{n} x_k \log x_k,$$

где $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n_{++} : \|x\|_1 = 1\}$. Ясно, что $\operatorname{dom} f$ – выпуклое множество.

Рассмотрим $g = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \log x_k$, определенную на $\mathbb{R}^n_{++}$. Воспользуемся дифференциальным критерием строгой выпуклости 2 порядка.

$$\nabla^2 g(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \succ 0,$$

так как $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ $y^\top \nabla^2 g(x) y = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{x_k} > 0$. Значит g строго выпукла на $\mathbb{R}^n_{++}$.

Если функция строго выпукла на некотором выпуклом множестве X, то она строго выпукла и на его выпуклом подмножестве $Y \subset X$. Значит g строго выпукла на $\operatorname{dom} f$, причем $-g|_{\operatorname{dom} f} = f$, значит f строго вогнута на $\operatorname{dom} f$. $\square$

3. $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, $\mathbf{1}^\top \alpha = 1$, $\alpha \succeq 0$.

To be done...

4. $P = \operatorname{conv}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$, $f: P \to \mathbb{R}$ – выпуклая.

Для любой точки $x = \sum\limits_{n=1}^{k} \theta_n v_n \in P$, где $\sum\limits_{n=1}^{k} \theta_n = 1$, $\theta_n \geqslant 0$ выполняется неравенство Йенсена (в таком виде его можно получить применив $k-1$ раз определение выпуклой функции), то есть

$$f\left(\sum_{n=1}^{k} \theta_n v_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \theta_n f(v_n)$$

Пусть $\underset{n=1,\ldots,k}{\arg\max} f(v_n) = i$, то есть среди v_n максимум достигается на вершине v_i (возможно и на других, в таком случае выберем одну произвольную). Тогда

$$f\left(\sum_{n=1}^{k} \theta_n v_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \theta_n f(v_n) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \theta_n f(v_i) = f(v_i)$$

Иными словами $\sup\limits_{x \in P} f(x) \leqslant f(v_i)$, причем очевидно, что на v_i он достигается. Значит $\sup\limits_{x \in P} f(x) = \max\limits_{n=1,\ldots,k} f(v_k)$.

$\square$

5.

(a) f является μ-сильно выпуклой $\iff \exists \mu > 0: \forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0; 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \mu\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2$$

(b) f является μ-сильно выпуклой $\iff \exists \mu > 0: f(x) - \mu\|x\|^2$ является выпуклой.

To be done...

Conjugate sets

1. $\mathbb{A}_n = \{A: A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A^\top = -A\}$.

- Пусть $X \in \mathbb{A}_n^*$. Тогда $\forall A \in \mathbb{A}_n$ $\langle A, X\rangle \geqslant 1$. То есть $\langle A, X\rangle \operatorname{tr} A^\top X = -\operatorname{tr} AX \geqslant -1$. Рассмотрим A, такую что $A_{ij} = q$, $A_{ji} = -q$, а все остальные элементы – нули. Тогда $\operatorname{tr} AX = qX_{ji} - qX_{ij} \leqslant 1$. То есть при $q > 0$ имеем $X_{ji} \leqslant X_{ij} + \frac{1}{|q|}$, а при $q < 0$ имеем $X_{ji} \geqslant X_{ij} - \frac{1}{|q|}$. В силу произвольности q это значит, что $X_{ij} = X_{ji}$. Значит $\mathbb{A}_n^* \subset \mathbb{S}_n$.
- Пусть $X \in \mathbb{S}_n$, $A \in \mathbb{A}_n$. $\mathbb{A}_n$ образует линейное пространство с базисом из матриц E_{ij}, $i \neq j$, где $E_{ij} = -E_{ji} = 1$. Тогда $\langle A, X\rangle = \operatorname{tr} A^\top X = -\operatorname{tr} AX = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} q_{ij} \operatorname{tr} E_{ij} X = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} q_{ij}(X_{ji} - X_{ij}) = 0 \geqslant -1$.

Значит $\mathbb{A}_n^* = \mathbb{S}_n$. $\square$

2. $S = \left\{x \in \mathbb{R}^2: x_1 + x_2 \geqslant 0, -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geqslant 0, 2x_1 + x_2 \geqslant -1, -2x_1 + x_2 \geqslant -3\right\}$.
Ясно, что S – замкнутое множество, выпуклое множество (как надграфик выпуклой функции, полученной как максимум линейных), $0 \in S$. Значит $S^{**} = \overline{\operatorname{conv}(S \cup \{0\})} = S$. Так как S^* всегда замкнуто и содержит 0, то $S^{***} = S^*$. Остается лишь найти само S^*.
Представим S в виде $S = \operatorname{conv}\big((0, 0), (-1, 1), (2, 1)\big) + \operatorname{cone}\big((1, 2), (-1, 2)\big)$. Это абсолютно очевидно геометрически, но можно показать и непосредственно (но я этого делать не буду, потому что лень). Тогда согласно теореме о сопряженном к многограннику множеству

$$S^* = \{p \in \mathbb{R}^2: -p_1 + p_2 \geqslant -1, 2p_1 + p_2 \geqslant -1, p_1 + 2p_2 \geqslant 0, -p_1 + 2p_2 \geqslant 0\}.$$

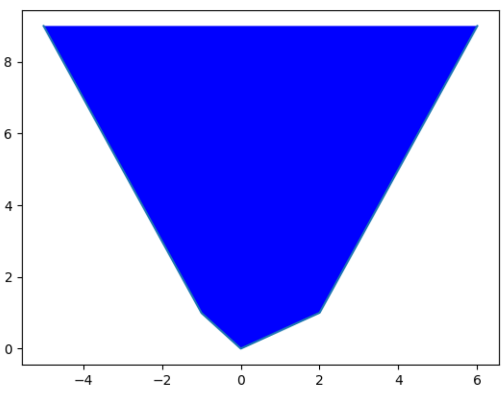

Рис. 1: Множество S

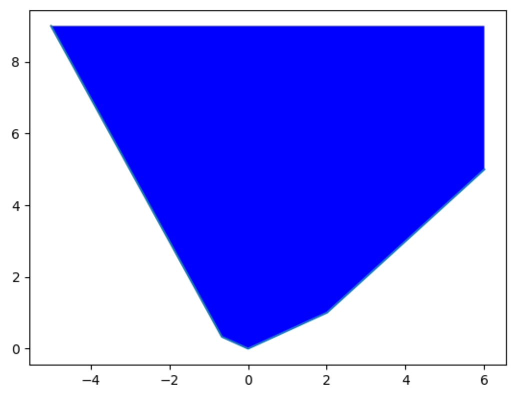

Рис. 2: Множество S^*

3. $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leqslant 1\}$, $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$.
В любой норме единичный шар является замкнутым, выпуклым и содержит 0, значит $B_p^{**} = B_p$. Тогда если $B_{p^*} = B_p^*$, то и $B_{p^*}^* = B_p^{**} = B_p$.

- Пусть $y \in B_{p^*}$, $x \in B_p$. Воспользуемся неравенство Гельдера

$$|\langle x,\, y\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p^*} \leqslant 1.$$

  Значит $\langle x,\, y\rangle \geqslant -1$, $y \in B_p^*$ и $B_{p^*} \subset B_p^*$.

- To be done...