МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №11. Паросочетания

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. Докажите, что следующие условия на граф G равносильны:
а) G двудолен (то есть множество вершин можно разбить на множества L и R, внутри которых нет рёбер);
б) в G нет нечётных циклов;
в) $\chi(G) \leqslant 2$ ($\chi(G)$ — хроматическое число графа G).
2. Докажите теорему Холла: в двудольном графе существует паросочетание размера $|L|$, если и только если $\forall A \subset L : |N(A)| \geqslant |A|$. Здесь $N(A) = \{b \in R \mid \exists a \in A : \{a, b\} \in E\}$.
3. Докажите, что в d-регулярном двудольном графе существует паросочетание, насыщающее все вершины левой доли. Граф называется d-регулярным, если степени всех его вершин равны d.
4. Пусть $G = (V, E)$ — граф. Докажите, что если $C \subset V$ — вершинное покрытие, то $V \setminus C$ — независимое множество. Выведите отсюда, что дополнение к минимальному вершинному покрытию является максимальным независимым множеством.
5. Пусть G — ациклический ориентированный граф. Предложите алгоритм поиска наименьшего количества вершинно непересекающихся путей, которые покрывают все вершины G. Асимптотика: $O(nm)$.
Указание: раздвойте вершины графа. Сведите задачу к поиску максимального паросочетания.
6. В графе $G = (V, E)$ множество $C \subset E$ называется рёберным покрытием, если каждая вершина из V инцидентна по крайней мере одному ребру из C. Предложите алгоритм поиска минимального рёберного покрытия в двудольном графе за $O(nm)$.
7. Докажите теорему Дилворта: если G — ациклический транзитивный орграф, то наименьшее количество вершинно непересекающихся путей, необходимых для покрытия всех вершин G, равно мощности максимального независимого множества в нём.
8. На шахматной доске размера $n \times n$ некоторые клетки сломаны, фигуры ставить в них нельзя. За $O(n^3)$ определите, можно ли расставить на эту доску n ладей, которые бы не били друг друга.
9. Вы играете в обобщённого дурака. За $O(1)$ можно определить, бьёт ли одна карта другую. У вас в руке n карт. Сейчас ход противника, и он нападает на вас своими n картами. Определите за $O(n^3)$, можете ли вы отбиться. Бить одной картой разные карты противника запрещается.
10. Пусть M_1 — нерасширяемое (максимальное по включению) паросочетание в G, а M_2 — наибольшее паросочетание в G. Докажите, что $|M_2| \leqslant 2\,|M_1|$. Разработайте линейный алгоритм поиска какого-нибудь нерасширяемого паросочетания в произвольном графе.
11. Считаем, что теорема Кёнига доказана: число вершин в минимальном вершинном покрытии двудольного графа равно числу рёбер в максимальном паросочетании. Покажите, как найти минимальное вершинное покрытие (а заодно и максимальное независимое множество), сведя эту задачу к 2SAT.

1. Если в графе есть цикл нечётной длины, то в два цвета его покрасить не удастся. Иначе же достаточно предъявить простейший алгоритм раскраски в два цвета.
2. В одну сторону утверждение очевидно. В другую — воспользуйтесь алгоритмом Куна.
3. Примените теорему Холла.
4. Вспомните определения.
5. Пусть $G = (V, E)$. Создайте двудольный граф с долями $V \times \{0\}$ и $V \times \{1\}$, ребро (u_0, v_1) проводите при наличии ребра (u, v) в G. Пусть изначально вершины G покрыты n путями, каждый из которых состоит из одной вершины. Взятие ребра (u_0, v_1) в паросочетание склеивает путь, заканчивающийся в u, и путь, начинающийся в v. Таким образом, каждое ребро паросочетания уменьшает число путей в покрытии на один.
6. В C нужно взять максимальное паросочетание G, а также добавить все рёбра, которые покрывают ненасыщенные вершины.
7. Во-первых, если в графе есть независимое множество размера k, то никакая пара из них не может присутствовать в одном пути, так что количество путей составляет по крайней мере k. Во-вторых, пусть C — минимальное вершинное покрытие в соответствующем двудольном графе (см. задачу 3). Определим A как множество вершин G, которым не соответствует ни одна вершина из C. Тогда $|A| \geqslant |V| - |M|$, где M — максимальное паросочетание в двудольном графе ($|M| = |C|$). С другой стороны, количество путей, которыми покрыты все вершины, в точности равно $|V| - |M|$.
8. Сопоставьте строкам вершины левой доли, столбцам — правой.
9. Сопоставьте вашим картам вершины левой доли, картам оппонента — правой.
10. Если $|M_2| > 2\,|M_1|$, то какое-то из рёбер M_2 можно добавить в M_1.
11. У каждого ребра паросочетания нужно взять ровно один из концов. Введите булевскую переменную для каждого ребра, отвечающую за то, какой из двух концов берём. Напишите все условия на вершинное покрытие в виде импликаций.