ОВАиТК-5

> In a rather strong sense, we really only care about groups because they act on things: knowing that G acts on A tells us something about A; group actions are one key tool in the study of geometric and algebraic entities.
>
> Aluffi P., Algebra. Chapter 0

Немного теории

Простейшие примеры действия групп

Мы познакомились с таким понятием, как действие группы на множестве. Напомню, что оно заключается в следующем: задать действие G на X значит каждому элементу группы $g \in G$ сопоставить отображение $\phi_g : X \to X$ так, чтобы выполнялось $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$. Отсюда напрямую следует, что элементу $e_G \in G$ сопоставляется тождественное отображение: $\phi_e : \ x \mapsto x$, а $\phi_{g^{-1}}$ является обратным к ϕ_g. Их последнего напрямую следует, что все ϕ_g обратимы, а значит является биекциями.

Пример 1. *Группа S_n действует на множестве $\{1, \ldots, n\}$.*

Пример 2. *Рассмотрим множество биекций множества X на себя с операцией композиции и назовем получившуюся группу $S(X)$. Для любой подгруппы $S(x)$ тривиальным образом определено действие на X.*

Внимательно посмотрев на определение действия выше, можно лаконично его сформулировать следующим образом.

Определение 1. *Задать действие группы G на множестве X значит определить гомоморфизм $G \to S(X)$.*

Пример 3. *Сопоставим каждому элементу k из Z_n поворот плоскости на $\dfrac{2\pi k}{n}$. Это задаст действие группы Z_n на плоскости.*

Но особо интересные результаты появляются, когда мы действуем группой на себе.

Пример 4. *Действие группы на себе левыми сдвигами. Каждому элементу группы g сопоставляется отображение, действующее по правилу $x \mapsto gx$.*

Заметим, что если группа G конечна, то гомоморфизм $G \to S(G)$, задающий действие из примера 4, является инъекцией. Действительно, если g_1 и g_2 задают одинаковое отображение $G \to G$, то выполнено в частности $g_1 e = g_2 e$. Следовательно, мы нашли инъекцию $G \to S(G) \cong S_{|G|}$. Отсюда сразу вытекает теорема Кэли:

Теорема 1 (Кэли)**.** *Любая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок*

Еще один хороший пример действие группы на себе:

Пример 5. *Действие группы на себе сопряжениями. Каждому элементу группы g сопоставляется отображение, действующее по правилу $x \mapsto gxg^{-1}$.*

В этом примере (в отличие от примера 4) каждое отображение ϕ_g является не просто биекцией группы на себя, а автоморфизмами (напоминаю, что автоморфизм = изморфизм на себя). Такие автоморфизмы называют *внутренними*.

Пример 6. *На последнем семинаре мы ввели группу, действующую на $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (комплексная плоскость с добавленной бесконечно удаленной точкой). Каждой преобразование задается комплексными числами a, b, c, d такими, что $ad - bc \neq 0$ и действует по формуле $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. При этом мы считаем, что $\infty \mapsto \dfrac{a}{c}, \dfrac{-d}{c} \mapsto \infty$.*

Убедитесь самостоятельно, что композиция дробно-линейных преобрахований также является дробно-линейным, и что у каждого дробно-динейного преобразования существует обратный.

Очень часто отображение ϕ_g обозначают той же буквой, что и g, и пишут $g(x)$. Давайте договоримся тоже так делать, если это не приводит к недоразумению.

Как изучать действия групп

В первую очередь определим такие понятия, как орбита и стабилизатор.

Определение 2. ***Орбитой*** *элемента $x \in X$ называют все элементы множества X, в которые этот элемент может перейти под действием действия (извините за тавтологию) группы G. Формально,* $\mathrm{Orb}(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$

Заметим, что бинарное отношения $x \in \mathrm{Orb}(y)$ является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично и транзитивно), а значит все множество X разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, которые также называются орбитами. Для любых $x, y \in X$ можно найти такой элемент группы g, что $g(x) = y$ если и только если x и y лежат в одной орбите.

Определение 3. ***Стабилизитором*** *элемента $x \in X$ называют все элементы группы G, которые оставляют x на месте. Формально,* $\mathrm{Stab}(x) = \{g \mid g(x) = x\}$

Несложная проверка показывает, что стабилизатор любого элемента является подгруппой группы G. Менее тривиальна связь между левыми (и правыми) смежными классами стабилизатора и элементами орбиты. А именно, два элемента группы g и h лежат в одном левом смежно классе $\mathrm{Stab}(x)$ если и только если $g(x) = h(x)$. Докажем этот факт.

Пусть g и h лежат в одном левом смежном классе, т.е. $g \in h\,\mathrm{Stab}(x)$. Тогда $g = hs, s \in \mathrm{Stab}(x)$ и $g(x) = hs(x) = h(s(x)) = h(x)$.

Обратно, пусть $g(x) = h(x)$, тогда $h^{-1}g(x) = x$ и $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$. Но тогда домножением на h слева мы получим $g \in h\,\mathrm{Stab}(x)$.

Таким образом мы получили биекцию между элементами $\mathrm{Orb}(x)$ и левыми смежными классами подгруппы $\mathrm{Stab}(x) < G$. Напоминаю, что число смежных классов подгруппы называется её индексом и обозначается $(G : H)$, и имеет место соотношение $|H| \cdot (G : H) = |G|$ (здесь $H < G$). Последнее соотношение носит имя теоремы Лагранжа. Применив ее к нашему случаю, получим следующее соотношение:

Теорема 2. *Для любого действия G на X и любого $x \in X$ выполнено*

$$|\mathrm{Orb}(x)| \cdot |Stab(x)| = |G|$$

Пример 7. *Самая простая иллюстрация теоремы 2 — действие S_n на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Для каждого числа k его стабилизатором является подгруппа S_n, изоморфная S_{n-1}. Это значит, что орбита каждого элемента имеет размер $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$, а значит равна всему множеству (что нетрудно было показать и по определению).*

Теорема 3. *Также представляет интерес тот факт, что все стабилизаторы сопряжены друг другу, а именно, если $g(x) = y$, то* $\mathrm{Stab}(y) = gStab(x)g^{-1}$

Доказательство. Действительно, $\forall h \in gStab(x)g^{-1}$ $h = gsg^{-1}, s \in \mathrm{Stab}(x)$, и $h(y) = gsg^{-1}(y) = gs(x) = g(x) = y$. Отсюда, $gStab(x)g^{-1} \subseteq Stab(y)$.

С другой стороны, можно показать, что для любого$h \in g^{-1}Stab(y)g$ выполнено $h(x) = x$. т.е. $g^{-1}Stab(y)g \subseteq Stab(x)$. Перенеся g в правую часть уравнения, получим $Stab(y) \subseteq gStab(x)g^{-1}$.

Мы получили включение в обе стороны, откуда следует утверждение теоремы.

□

Действие группы может обладать следующими хорошими свойствами:

Определение 4. *Действие группы G на X называется*

- ***Эффективным**, если гомоморфизм $G \to S(X)$ инъективен. Это означает, среди элементов G не найдется двух элементов, которые действуют на X одинаково.*
- ***Транзитивным**, если весь X представляет собой одну орбиту. Это значит, что каждый элемент множества X может быть переведен в любой другой, а именно $\forall x, y \in X\ \exists g \in G : g(x) = y$.*
- ***n-транзитивным**, если для различных $x_1, \ldots, x_n$ и различных $y_1, \ldots, y_n$ найдется $g \in G$ такой что $g(x_i) = y_i$ для всех i.*
- ***Свободным**, если для любых элементов $g, h \in G$ и любого $x \in X$ выполнено $g(x) \neq h(x)$*

Полезные применения

Докажем, например, следующую терему:

Теорема 4. *Пусть p — наименьший простой делитель $|G|$, и индекс некоторой ее подгруппы H равен p. Тогда $H \lhd G$.*

Доказательство. Давайте действовать группой G на левых смежных классах H левыми сдвигами. Таким образом, элемент g будет действовать по правилу $xH \to gxH$ (убедитесь, что действие определено корректно).

Таким образом мы построили гомоморфизм из G в группу $S(G/H)$ (под G/H мы здесь понимаем множество левых смежных классов как множество, без операции). Поскольку G/H состоит из p элементов, то $S(G/H) \cong S_p$, и мы построили гомоморфизм $\phi : G \to S_p$.

По теореме о гомоморфизме, $G/\ker(\phi)$ изоморфна некоторой подгруппе S_p. Воспользуемся теоремой Лагранжа: с одной стороны, порядок группы $G/\ker(\phi)$ делит порядок G, и все простые делители $|G/\ker(\phi)|$ должны быть больге или равны p. А с другой стороны, порядок группы $G/\ker(\phi)$ делит порядок S_p, и все простые делители $|G/\ker(\phi)|$ должны быть меньше или равны p, и простой делитель p может входить в разложение $|G/\ker(\phi)|$ максимум в первой степени. Получаем, что $|G/\ker(\phi)|$ либо равно p, либо 1.

Но что означает, что элемент g лежит в ядре ϕ, Это означает, что g действует на G/H как тождественная перестановка. В частности, $gH = H$. Но это возможно только если $g \in H$. Таким образом мы получили, что $\ker \phi \subseteq H$.

Из этого сразу следует, что $\ker \phi \neq G$, и $|G/\ker(\phi)| \neq 1$. Но тогда $|G/\ker(\phi)| = p$, и $|\ker \phi| = \dfrac{|G|}{p}$.

Мы получили, что $\ker \phi \subseteq H$, и что $\ker \phi$ и H имеют одинаковую мощность. Следовательно, $H = \ker \phi$.

Но если H является ядром некоторого гомоморфизма, то она нормальна □

Теорема 5 (лемма Бернсайда). *Пусть $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x$. Тогда число орбит действия G на X равно $\dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} X^g$*

Доказательство. Давайте посчитаем число пар $\{(g, x) \in G \times X \mid g(x) = x\}$ двумя способами.

С одной стороны, для каждый элемент группы g входит в $|X^g|$ пар. Получаем $\sum\limits_{g \in G} X^g$.

С другой стороны, каждый элемент $x \in X$ входит в $|\operatorname{Stab}(x)|$ пар. Если взять орбиту элемента x, то в ней у каждого элемента мощность стабилизатора одинакова (мощности сопряженных групп равны), и элементы одного отдельно взятой орбиты дадут нам ровно $|\operatorname{Stab}(x)| \times |\operatorname{Orb}(x)| = |G|$ пар.

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Лемма Бернсайда полезна тем, что имеет приложения в комбинаторике для подсчета объектов с точностью до некоторого преобразования.

Пример 8. *Приведем пример использования леммы Бернсайда.*

Пусть мы хотим посчитать число способов составить ожерелье из 6 *бусин. Бусины бывают* k *цветов. Раскраски мы считаем одинаковыми, если одна получается из другой поворотом (но не переворачиванием) ожерелья.*

Итак, в качестве множества выступают набры из 6 чисел от 1 *до* k, *и мы действуем на нем группой* C_6 *циклическим сдвигом.*

Сдвиг на 0 *бусин оставляем все элементы на месте, а всего раскрасок* k^6.

Сдвиг на 1 *и* 5 *бусины перводит в себя те и только те ожерелья, у которых все бусины одного цвета. Таких ожерелий* k *штук.*

Сдвиг на 2 *и* 4 *бусин перводит в себя те и только те ожерелья, у которых 1, 3 и 5 бусина одного цвета, а также 2, 4 и 6 бусины одного цвета. Таких ожерелий* k^2.

Сдвиг на 3 *бусины перводит в себя те и только те ожерелья, у которых 1 и 4, 2 и 5, а также 3 и 6 бусины одного цвета. Таких ожерелий* k^3.

Итого получаем, что раскрасок с точностью до сдвига ровно $\dfrac{k^6 + k^3 + 2k^2 + 2k}{6}$

Домашнее задание

1. Слишком маленькая группа перестановок

Докажите, что если p — простое число, то группа S_{p-1} не может транзитивно действовать на множестве из p элементов.

2. "Обращение" теоремы Лагранжа

Пусть p — простой делитель G. Докажите, что в G найдется элемент порядка p.

Для этого рассмотрите следующее множество: наборы $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ элементов группы G таких, что $g_1 g_2 \dots g_p = e$. Посчитайте, сколько элементов в этом множестве.

Давайте действовать на этом множестве сдвигами, переводящими набор $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ в $(g_p, g_1, g_2 \dots, g_{p-1})$. Поскольку сдвиг в степени p дает тождественное действие, то можно считать, что мы действуем группой C_p.

Аккуратно покажите, какой размер может быть у орбит такого действия и сделайте выводы.

3. Представление группы

Если потребовать от множества X чтобы оно было конечномерным линейным пространством, а от действия чтобы каждое ϕ_g было линейным преобразованием (= задавалось матрицей), то полученной действие называют представлением группы G. Другими словами, вещественное представление — это гомоморфизм из G в $GL(n, \mathbb{R})$.

Изучение представлений представляет собой глубокую и содержательную науку (которую я не шарю).

Найдите представление C_n над $\mathbb{R}^2$, которое являлось бы **эффективным** действием.

4. Дробно-линейные преобразования

Докажите, что действие дробно-линейными преобразованиями из примера 6 3-транзитивно.

Hint: покажите, что 0, 1 *и* ∞ *можно перевести в любые три элемента.*

5. Действие сопряжениями

Так как класс сопряжённости – орбита действия сопряжениями, то мощность каждого класса сопряжённости делит порядок группы. Пользуясь этим утверждением покажите, что если порядок $|G|$ нечётен, то только единичный элемент группы сопряжён своему обратному.

Hint: как связаны класс сопряжённости элемента и его обратного, и какие элементы группы обратны сами себе?

6. Применяем лемму Бернсайда

Посчитайте число графов на 4 вершинах с точностью до изморфизма при помощи леммы Бернсайда.

Hint: действуйте группой S_4