МФТИ
Алгоритмы и структуры данных, осень 2022
Семинар №08. Быстрое преобразование Фурье

Везде, где не сказано иное, предполагается, что используемые числа помещаются в стандартные типы данных; погрешностями округления пренебречь.

1. Пусть $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$ — два вектора. Для каждого $i \in [0, n-m]$ найдите $a_i b_0 + a_{i+1} b_1 + \ldots + a_{i+m-1} b_{m-1}$, то есть скалярное произведение $(a_i, \ldots, a_{i+m-1})$ и b. Асимптотика: $O(n \log n)$.

2. Пусть $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ — два вектора. Для каждого $i \in [0, n-1]$ найдите $a_i b_0 + a_{i+1} b_1 + \ldots + a_{i+n-1} b_{n-1}$, считая, что $a_{k+n} = a_k$ для любого k.

3. Пусть $s = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ — текст, а $p = p_0 p_1 \ldots p_{m-1}$ — шаблон. Скажем, что p почти входит в s, начиная с позиции i, если p отличается от $s_i s_{i+1} \ldots s_{i+m-1}$ не более чем в k символах. Предложите способ найти все почти-вхождения p в s за:

а) $O(kn + n \log n)$;
б) $O(|\Sigma| \cdot n \log n)$.

4. Дана строка a из n битов. Найти количество троек (i, j, k), таких что $i < j < k$, $a_i = a_j = a_k = 1$ и $k - j = j - i$.

5. Найдите число правильных структур AVL-дерева (то есть без учёта значений ключей) на n вершинах глубины h. Асимптотика: $O(nh \log n)$.

6. Пусть $a_n = \sum\limits_{i=0}^{s-1} b_i a_{n-s+i}$ — линейная рекуррента. По начальным членам $a_0, \ldots, a_{s-1}$ и коэффициентам $b_1, \ldots, b_s$ найдите a_n за

а) $O(s^3 \log n)$;
б) $O(s^2 \log n)$;
в) $O(s \log s \log n)$.

7. Многочлен от двух переменных x, y можно задать таблицей коэффициентов $(n+1) \times (m+1)$, если его степень по x равна n, а по y — m. Предложите способ перемножения двух таких многочленов за $O(nm \log(nm))$.

8. Дан набор различных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$, каждое из которых не превосходит m. Для каждого i существует сколь угодно много предметов веса a_i.

а) В пакет можно сложить сколько угодно предметов каких угодно весов (из имеющихся), но только при условии, что их суммарный вес положителен и не превосходит m. Проверьте, верно ли, что любой собранный пакет имеет один из весов $a_1, \ldots, a_n$. Иными словами, верно ли, что других весов набрать нельзя? Асимптотика: $O(m \log m)$.
б) В предположении, что условие пункта а) выполнено, найдите все i, такие что нельзя собрать пакет веса a_i без использования предмета i. Асимптотика: $O(m \log m)$.

9. Дан белый клетчатый квадрат размером $n \times n$, окружённый чёрным цветом. За один ход можно выбрать любой белый квадрат размером $m \times m$ для произвольного нечётного m, который окружён клетками чёрного цвета, и закрасить в нём центральный столбец и центральную строку чёрной краской. (После этого квадрат либо исчезает, либо порождает 4 квадрата меньших размеров). По данным n и k определите число различных последовательностей действий длины k. Асимптотика: $O(k \log k \log n)$.

1. Достаточно развернуть b и воспринимать векторы как многочлены (набор коэффициентов). Перемножьте их и проследите за полученными коэффициентами.

2. Раздвойте массив a. Задача сведётся к предыдущей.

3.

а) Постройте суффиксный массив на $p\#s$. Затем прикладывайте p в каждой позиции, находите максимальный совпадающий кусок и пропускайте ошибочные символы.

б) Для каждого символа алфавита $c \in \Sigma$ постройте битовый вектор для p и для s: на каких позициях встречается этот символ в обеих строках. Затем для каждого i нужно скалярно умножить кусок строки s на строку p, результат равен числу совпадающих символов c. Если просуммировать такие числа по всем c, мы получим число расхождений (совпадений) между $s_i s_{i+1} \ldots s_{i+m-1}$ и p для всех i.

4. Очевидно, $k - j = j - i$ ровно тогда, когда $2j = k + i$. Построим многочлен $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$. Используя FFT, можно быстро вычислить P^2. Тогда его коэффициент при x^{2j} равен $\sum\limits_{k+i=2j} a_i a_k$. Если $a_j = 1$, то коэффициент равен $1 + 2 \sum\limits_{k+i=2j;\ k>i} a_i a_k$. Отсюда можно очень просто извлечь ответ.

5. Пусть $dp(n, h)$ — число нужных деревьев. Из определения практически моментально следует, что

$$dp(n,h) = \sum_{a+b=n-1} dp(a,h-1) \cdot dp(b,h-1) + dp(a,h-1) \cdot dp(b,h-2) + dp(a,h-2) \cdot dp(b,h-1).$$

Если представлять набор значений $dp(\cdot, h)$ как строку-многочлен, то h-я строка может быть найдена из $(h-1)$-й и $(h-2)$-й двумя перемножениями многочленов.

6. Первый способ — бинарно возвести матрицу в степень.

Второй способ — переходить от a_n к a_{2n}. Пусть мы знаем выражение a_n через первые s членов рекурренты: $a_n = \sum\limits_{i=0}^{s-1} c_i a_i$. Для $2n$ можно записать $a_{2n} = \sum\limits_{i=0}^{s-1} c_i a_{n+i}$ (для этого можно представить, что первые члены рекурренты есть $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+s-1}$).

Расписывая каждое a_{n+i} внутри суммы, получим

$$a_{2n} = \sum_{i=0}^{s-1} c_i \sum_{j=0}^{s-1} c_j a_{i+j} = \sum_{i,j} c_i c_j a_{i+j}.$$

Возведя c (как многочлен) в квадрат, мы получим выражение a_{2n} через члены $a_0, \ldots, a_{2s-2}$. Теперь нужно просто “прокинуть” коэффициенты на члены с меньшими номерами. Наивно это можно сделать за $\Theta(s^2)$, что вместе с квадратичным перемножением многочленов даст уже асимптотику $\Theta(s^2 \log n)$.

Наконец, если рассмотреть характеристический многочлен $P = x^s - b_{s-1} x^{s-1} - \ldots - b_0 x^0$, то $\alpha_s x^s$ после взятия остатка по модулю P даст как раз нужное разложение по $x^0, \ldots, x^{s-1}$. Поэтому протакливание можно осуществить за $\Theta(s \log s)$ делением многочленов.

7. При каждой степени y стоит многочлен по x, проведите над ним преобразование Фурье; затем нужно рассмотреть многочлены от y. То есть сначала выполняем преобразование Фурье по столбцам, затем по строкам. После этого значение (i, j)-го элемента равно значению в точке $x = \omega_x^i, y = \omega_y^j$. Затем таблицы можно перемножить поточечно и выполнить обратное преобразование сначала для строк, затем для столбцов.

8.

а) Составим многочлен P степени m, в котором j-й коэффициент равен 1, если и только если j делится на какое-то из a_i, иначе коэффициент равен 0. Такой многочлен можно построить за $O(m \log m)$, поскольку $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{m}{j} = O(m \log m)$. Тогда нужно проверить, что многочлен P^2 (обрубленный на x^m) не содержит положительных коэффициентов при каких-то новых степенях x.

б) Нужно лишь проверить, что коэффициент при x^{a_i} равен 2.

9. Если P_n — многочлен, k-коэффициент которого равен ответу для квадрата $n \times n$ и k действий, то при $k \geqslant 1$ верно, что $[x^k]P_n = \sum\limits_{a+b+c+d=k-1} [x^a]P_{\frac{n-1}{2}} \cdot [x^b]P_{\frac{n-1}{2}} \cdot [x^c]P_{\frac{n-1}{2}} \cdot [x^d]P_{\frac{n-1}{2}}$, где $[x^k]P$ — коэффициент при x^k в многочлене P. Поэтому для перехода от $\frac{n-1}{2}$ к n нужно всего лишь возвести некий многочлен в 4-ю степень.