ТРЯП 10

Ковалев Алексей

1. Пусть язык $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ над алфавитом $\Sigma = \{a, b, c\}$. Чтобы доказать, что язык $\overline{L}$ является КС-языком, разобьем этот язык на 3 подмножетсва:

1. L_1 – слова вида bw и cw, где $w \in \Sigma^*$
2. L_2 – слова вида $a^n b^m c^k$, где $n \neq m$ или $m \neq k$ или $n \neq k$
3. L_3 – слова, начинающиеся на a, но непридставимые в виде $a^n b^m c^k$

Язык L_1 задается грамматикой с аксиомой S_1

$$S_1 \to bX|cX;\ X \to aX|bX|cX|\varepsilon$$

так как правило $X \to aX|bX|cX|\varepsilon$ задает любое слово из Σ^*, и любое слово, задаваемое грамматикой начинается с b или c.
Язык L_2 задаеся грамматикой с аксиомой S_2

$$S_2 \to aAPC|PbBC|AQcC|AbBQ$$
$$A \to aA|\varepsilon;\ B \to bB|\varepsilon;\ C \to cC|\varepsilon$$
$$P \to aPb|\varepsilon;\ Q \to bQc|\varepsilon$$

Правилом $P \to aPb|\varepsilon$ могут быть получены слова вида $a^n b^n$ и только они, правилом $Q \to bQc|\varepsilon$ – слова вида $b^n c^n$ и только они. Значит правило $S_2 \to aAPC$ задает слова вида $a^n b^m c^k$, где $n > m$, k – любое. Аналогично $S_2 \to PbBC$; $S_2 \to AQcC$ и $S_2 \to AbBQ$ задают $a^n b^m c^k$, где $m > n$, k – любое; $a^n b^m c^k$, где $m < k$, n – любое, и $a^n b^m c^k$, где $m > k$, n – любое, соответственно. Значит эта грамматика задает только слова из L_2. Ясно также, что любое слово из L_2 может быть задано этой грамматикой (надо лишь понять, какое из неравенств $n < m$; $n > m$; $k < m$; $m > k$ выполнено и воспользоавться соответствующее число раз правилами). Значит L_2 действитвельно задается этой грамматикой.
Язык L_3 задается грамматикой с аксиомой S_3

$$S_3 \to aY$$
$$Y \to AbBCaX|ABcCaX|ABcCbX$$

где A, B, C и X такие же, как и выше. Любое слово, заданное грамматикой, имеет вид $a^{n+1} b^{m+1} c^k aw$; $a^{n+1} b^m c^{k+1} aw$ или $a^{n+1} b^m c^{k+1} bw$, где $w, v \in \Sigma^*$; $n, m, k \in \mathbb{N}_0$, причем n, m, k – произвольные. Все эти слова не могут быть представлены как $a^n b^m c^k$. Любое слово из L_3 может быть задано этой грамматикой, так как все они принадлежат к одному из видов слов, указанных выше. Значит L_3 задается этой грамматикой.
Языки L_1, L_2 и L_3 являются КС-языками, значит их объединение также является КС-языком. При этом $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \overline{L}$, значит $\overline{L}$ действительно является КС-языком.

2.

(a) Покажем, что $L = \{w : |w|_a \geqslant |w|_b \geqslant |w|_c\}$ не является КС-языком. Воспользуемся отрицанием леммы о накачке: $\forall N \in \mathbb{N}$ выберем $a^N b^N c^N \in L$. Тогда для любого разбиения $w = uxyzv$, такого что $|xz| \geqslant 1$ и $|xyz| \leqslant N$ слово xyz не содержит одновременно и a, и c. Возможны следующие случаи

1. $|xz|_a > 0$ и $|xz|_c = 0$. Тогда при $i = 0$ в слове $ux^iyz^iv = uyv$ букв a меньше, чем букв c, то есть оно не лежит в L.
2. $|xz|_c > 0$ и $|xz|_a = 0$. Тогда при $i \geqslant 2$ в слове ux^iyz^iv букв c больше, чем букв a, то есть оно не лежит в L.
3. $|xz|_c = 0$ и $|xz|_a = 0$, то есть $|xz|_b > 0$. Тогда при $i = 0$ в слове $ux^iyz^iv = uyv$ букв c больше, чем букв b, то есть оно не лежит в L.

То есть в любом из случаев выполнено отрицание леммы о накачке. Значит L не является КС-языком.

(b) Покажем, что язык $L = \{wtw^R : |w| = |t|\}$ над алфавитом $\{a, b\}$ не является КС-языком. Заметим для начала, что все слова из L имеют длину, кратную 3. Воспользуемся теперь отрицанием леммы о накачке: $\forall N \in \mathbb{N}$ выберем $a^N ab^{N-1}a^N \in L$. Тогда для любого разбиения $uxyzv$, такого что $|xz| \geqslant 1$ и $|xyz| \leqslant N$ слово xyz не содержит одновременно и a части слова до первой b, и a из части слова после первой b (будем обозначать их a_1 и a_2 соответственно). Возможны следующие случаи

1. $|xz|_{a_1} > 0$ и $|xz|_b = 0$. Тогда при $i \geqslant 2$ в слове ux^iyz^iv для максимального по длине w выполняется $|w| = |w^R| = N$, $|t| \geqslant N + 1$, то есть оно не лежит в языке.
2. $|xz|_{a_2} > 0$ и $|xz|_b = 0$. Тогда при $i = 0$ в слове $ux^iyz^iv = uyv$ для максимального по длине w выполняется $|w| = |w^R| < N$, $|t| > N$, то есть оно не лежит в языке.
3. $|xz|_b > 0$; $|xz|_{a_1} = 0$ и $|xz|_{a_2} = 0$. Тогда при $i \geqslant 2$ для максимального по длине w выполняется $|w| = |w^R| = N$, $|t| > N$, то есть оно не лежит в языке.
4. $|xz|_{a_1} > 0$ и $|xz|_b > 0$. Тогда если в x или z есть подстрока ab, то при $i \geqslant 2$ слово ux^iyz^iv не лежит в языке, иначе при $i \geqslant 2$ в слове ux^iyz^iv для максимального по длине w выполняется $|w| = |w^R| = N$, $|t| > N$, то есть оно также не лежит в языке.
5. $|xz|_{a_2} > 0$ и $|xz|_b > 0$. Тогда если в x или z есть подстрока ba, то при $i \geqslant 2$ слово ux^iyz^iv не лежит в языке, иначе при $i \geqslant 3$ в слове ux^iyz^iv для максимального по длине w выполняется $|w| = |w^R| = N + 1$, $|t| > N + 1$, то есть оно также не лежит в языке.

То есть в любом из случаев выполнено отрицание леммы о накачке. Значит L не является КС-языком.

3. Построим приведенную грамматику для грамматики

$$S \to Ba|Sc|Cb;\ B \to aS|bB|c;\ C \to Dd;\ D \to DaD|SbC$$

Минусы в таблицы означают, что символы бесплодны, плюсы – не бесплодны.

S	B	C	D
$-$	$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$-$
$+$	$+$	$-$	$-$

Бесполдные символы – C и D. Недостижимый символ – d. Значит приведенная грамматика – это $(\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, где множество правил P имеет вид

$$S \to Ba|Sc;\ B \to aS|bB|c$$

4. Морфизм $\varphi : \{a, b, c\}^* \to \{a, b\}^*$ определяется из $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = a$. Тогда для языка $L = \{a^n b^n a^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ обратный морфизм $\varphi^{-1}(L) = \{(a|c)^n b^n (a|c)^n : n \in \mathbb{N}_0\}$.