Бонусная задача 4

Ковалев Алексей

Требуется доказать, что формула
$$\exists u \forall x \exists y A(u,x,y) \tag{1}$$
общезначима тогда и только тогда, когда общезначима формула
$$\exists u \Big(\forall x \left(\exists y A(u,x,y) \to P(u,x) \right) \to \forall x P(u,x) \Big) \tag{2}$$
Сначала преобразуем формулу (2). Она эквивалентна формулам
$$\exists u \Big(\exists x \left(\exists y A(u,x,y) \land \neg P(u,x) \right) \lor \forall x P(u,x) \Big)$$
$$\exists u \exists x \big(\exists y A(u,x,y) \land \neg P(u,x) \big) \lor \exists u \forall x P(u,x) \tag{3}$$
Будем доказывать, что (1) общезначима тогда и только тогда, когда общезначима (3).
В одну сторону: пусть формула (1) общезначима, а формула (3) – нет. Тогда существует интерпритация, на которой формула (3) ложна. Если формула (3) ложна, то вторая часть дизъюнкции также ложна, то есть формула $\forall u \exists x \neg P(u,x)$ истинна в этой интерпритации. Формула (1) также истинна в этой интерпритации. Но тогда и первая часть дизъюнкции, то есть формула $\exists u \exists x \big(\exists y A(u,x,y) \land \neg P(u,x) \big)$ будет истинна в этой интерпритации, так как найдется u, при котором $\forall x \exists y A(u,x,y)$ истинна в этой интерпритации, а для него найдется x, при котором $\neg P(u,x)$ истинна в этой интерпритации. Значит сама формула (3) истинна в этой интерпритации, что приводит к противоречию. То есть если формула 1 общезначима, то и (3) общезначима.
В другую сторону: пусть формула (3) общезначима. Она истинна на всех интерпритациях, в том числе и на тех, где вторая часть ложна, то есть $\forall u \exists x \neg P(u,x)$ истинна. Далее рассматриваем именно такие интерпритации. Если при этом формула $\exists u \forall x \exists y A(u,x,y)$ ложна, то есть $\forall u \exists x \neg \big(\exists y A(u,x,y) \big)$ истинна, мы можем выбрать предикат $P(u,x)$, таким что он ложен и истинен тогда же, когда и формула $\exists y A(u,x,y)$, так как при этой интерпритации вторая часть дизъюнкции в (3) ложна. Но тогда первая часть формулы (3) имеет вид $\exists u \exists x \big(\exists y A(u,x,y) \land \neg \exists y A(u,x,y) \big)$, то есть тождественно ложна. Значит формула (3) не общезначима, что приводит к противоречию. Значит если формула (3) общезначима, то и (1) общезначима.
Получается, что (1) общезначима тогда и только тогда, когда (3) общезначима. Формула (3) эквивалентна формуле (2), то есть формула (1) общезначима тогда и только тогда, когда формула (2) общезначима. $\square$