МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Семинар №9. Кратчайшие пути в графах (2)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. В городе есть n пунктов обмены валюты. В связи с глобальным мировым кризисом, вызванным коронавирусом, каждый обменник готов принять только одну валюту и конвертировать её в другую (тоже строго определённую) по своему курсу. Определите, можно ли обладая изначальной суммой в 1 рубль бесконечно обогатиться? Асимптотика: $O(n^2)$.

2. Помогут ли алгоритмы Флойда или Форда—Беллмана для поиска простого пути максимального веса между двумя вершинами?

3. Пусть в графе нет отрицательных циклов. Попробуем модифицировать алгоритм Дейкстры для работы с отрицательными весами рёбер.

а) Почему нельзя просто увеличить веса всех рёбер на большую константу, чтобы сделать их все неотрицательными?

б) Пусть каждой вершине v приписан некий потенциал $\varphi(v)$. Заменим вес ребра (u, v) на $cost(u, v) + \varphi(u) - \varphi(v)$. Как изменяются кратчайшие пути в графе с новыми весами? С помощью одного запуска алгоритма Форда-Беллмана введите подходящие потенциалы (то есть такие, что все новые веса неотрицательны). Затем за n запусков алгоритма Дейкстры найдите кратчайшие расстояния между всеми парами вершин. Полученный алгоритм — алгоритм Джонсона.

4. Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный граф. Транзитивным замыканием G называется граф $G^* = (V, E^*)$, где $E^* = \{(u, v) \mid \text{в графе } G \text{ есть путь из } u \text{ в } v\}$. Найдите G^* за $O(n^3/w)$, где w — длина машинного слова.

5. Приведите пример графа, на котором значения, находимые алгоритмом Флойда, экспоненциально быстро растут.

6. Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах, а также перестановка его вершин $p_1, \ldots, p_n$. Для каждого i определите сумму расстояний между всеми парами вершин в графе, получающемся из исходного после удаления вершин $p_1, \ldots, p_i$ со всеми инцидентными им рёбрам. Асимптотика: $O(n^3)$.

7. Пусть загадан массив $a_1, \ldots, a_n$, а также дано q ограничений к нему. Каждое ограничение имеет вид $a_l + \ldots + a_r < k$ или $a_l + \ldots + a_r > k$. Параметры l, r, k могут быть разными в разных ограничениях. Определите, совместны ли эти ограничения, то есть существует ли хотя бы один загаданный массив с такими свойствами?

1. Заведите по вершине для каждой валюты. Проводите рёбра, соответствующие обменникам. Нужно найти цикл, достижимый из вершины, соответствующей рублям, произведение весов рёбер в котором больше 1.
2. Предложенные алгоритмы не следят за простотой путей и не могут их обеспечивать.
3. Создайте новую вершину v_0 и проведите из неё рёбра нулевого веса в остальные вершины графа. Запустите алгоритм Форда—Беллмана из неё. Пусть $\varphi(u) = dist(v_0, u)$, то есть насчитанное кратчайшее расстояние до u. Покажите, как с помощью такого потенциала можно пересчитать веса всех рёбер так, чтобы они стали неотрицательными, а веса всех путей изменились предсказуемо.
4. Примените алгоритм Флойда, используйте битовые операции.
5. Проведите рёбра веса -1 между всеми вершинами.
6. Решите задачу с конца. Добавляйте вершины по одной и пересчитывайте все кратчайшие расстояния, как в алгоритм Флойда.
7. Каждое условие можно переписать в виде $s_i - s_j \leqslant k$, где $s_i = a_1 + \ldots + a_i$. Проведём тогда ребро (i, j) веса k. Тогда решение существует, если и только если в построенном графе нет циклов отрицательного веса.