

Всюду в этом листке (если не оговорено иное)  $n$  означает количество вершин в графе, а  $m$  — количество рёбер.

1. Покажите, что алгоритм 0-K-bfs можно реализовать, используя всего  $K + 1$  очередь.
2. Назовём рёбра, пройденные алгоритмом bfs, древесными. Как тогда выглядит дерево? Как могут выглядеть все остальные рёбра?
3. Почему для поиска максимальной длины простого пути между двумя вершинами нельзя поступить следующим образом: умножить веса всех рёбер на  $(-1)$  и запустить алгоритм Дейкстры?
4. Почему для поиска кратчайшего пути между двумя вершинами в графе с отрицательными рёбрами нельзя поступить следующим образом: увеличить веса всех рёбер на одну большую константу и запустить алгоритм Дейкстры?
5. Стоимостью пути можно считать не сумму всех весов входящих в него рёбер, а некие другие функции. Покажите, как (и можно ли вообще) модифицировать алгоритм Дейкстры для следующих функций стоимости пути:
  - а) максимальный среди весов используемых рёбер;
  - б) произведение весов рёбер (все веса имеют вес хотя бы 1);
  - в) конкатенация строк, написанных на рёбрах;
  - г) минимальный среди весов используемых рёбер, только теперь стоимость пути нужно максимизировать.
6. В городе ходят электрички между некоторыми парами станций. Каждый маршрут (скажем,  $i$ -й) соединяет две станции  $u_i$  и  $v_i$ , электрички по нему ездят с некоторой частотой  $f_i \mid f$  (то есть  $f_i$  является делителем некоторого числа  $f$ ), первая из них отправляется в момент времени  $s_i < f_i$ , каждая едет  $t_i$  минут, а проезд стоит  $c_i$  рублей. При этом запрещено стоять на месте (то есть ждать электричку нельзя, можно только быстро пересесть). Определите, за какое минимальное время можно попасть из 1-го города в  $n$ -й и сообщите минимальное количество потраченных рублей в таком случае. Путешествие начинается в момент времени 0. Асимптотика:  $O(fm \cdot \log(fn))$ .
7. Даны две перестановки:  $\sigma, \tau \in S_n$ . За одну операцию можно обратить порядок следования элементов на некотором подотрезке  $\pi$  (то есть  $\pi(l), \dots, \pi(r)$  превратить в  $\pi(r), \dots, \pi(l)$ ). Найдите минимальное число операций для превращения  $\pi$  в  $\tau$ .
8. На шахматной доске  $n \times n$  в некоторой клетке расположен конь. Для каждой клетки найдите минимальное число шагов коня для её достижения. Асимптотика:  $O(n^2)$ .

1. Введите циклический порядок на этих очередях.
2. Есть ли рёбра между несоседними слоями?
3. Алгоритм Дейкстры работает лишь с неотрицательными весами рёбер.
4. Стоимость пути изменится на величину, зависящую от числа рёбер в нём.
5. В задачах о минимизации стоимости, стоимость пути должна (не строго) увеличиваться при приклеивании ребра. Также кратчайший путь от  $s$  до  $t$  должен быть кратчайшим путём от  $s$  до всех промежуточных вершин пути.
6. В качестве состояния рассмотрите пару (город, время прибытия в него по модулю  $f$ ).
7. Расстояние не превосходит  $n - 1$ . Запустите двусторонний **bfs**, а перестановки как-нибудь захешируйте.
8. Запустите классический **bfs**.