Основные алгоритмы 2

Ковалев Алексей

18 февраля 2022 г.

1. (a) $238x + 385y = 133,\ \gcd(238, 385) = 7,\ 7 \mid 133 \Rightarrow$ решение существует

x	y	$238x + 385y = 133$
0	1	385
1	0	238
-1	1	147
2	-1	91
-3	2	56
5	-3	35
-8	5	21
13	-8	14
-21	13	7

$$(-21,\ 13,\ 7) \cdot \frac{133}{7} = (-399,\ 247,\ 133)$$
$$238 \cdot (-399) + 247 \cdot 247 = 133$$
$$(-399,\ 247) \text{ – частное решение}$$
$$34 \cdot (-399) + 55 \cdot 247 = 19$$
$$x = 55n + 41,\ y = -34n + 9, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(55n + 41,\ -34n + 9), n \in \mathbb{Z}$

(b) $143x + 121y = 52, \gcd(143, 121) = 11, 11 \nmid 55 \Rightarrow$ решений нет

Ответ: $\varnothing$

2.

$$68x + 85 \equiv 0 \pmod{561}$$
$$68x + 85 = 561y,\ y \in \mathbb{Z}$$
$$561y - 68x = 85$$
$$\gcd(561, 68) = 17,\ 17 \mid 85$$

x	y	$561y - 68x = 85$
1	0	561
0	1	-68
1	8	17

$$(1,\ 8,\ 17) \cdot \frac{85}{17} = (5,\ 40,\ 85)$$
$$561 \cdot 5 - 68 \cdot 40 = 85$$
$$33 \cdot 5 - 4 \cdot 40 = 5$$
$$x = 33n + 7, y = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}$$
$$x = 33n + 7,\ n \in [0,\ 16]$$

Ответ: $33n + 7, n \in [0,\ 16]$

3.

$$7^{13} \mod 167$$
$$7^2 = 49$$
$$7^4 = 2401 \equiv 63$$
$$7^8 \equiv 128$$
$$7^{13} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7 \equiv 128 \cdot 63 \cdot 7 \equiv -39 \cdot 63 \cdot 7 \equiv 61 \cdot 63 \equiv -164 \equiv 2$$

Ответ: 2

4. Сложность: алгоритм рекурсивный, причем глубина рекурсии $\log_2 x = n$. На каждом шаге рекурсии на арифметические операции требуется $O(n)$ операций $\Rightarrow$ общая сложность составляет $O(n \log x) = O\left(n^2\right)$.
Корректность: будем проводить доказательство по индукции.
<u>База:</u> $x = 0$ – очевидно, что алгоритм работает
<u>Переход:</u> пусть алгоритм работает для $\left(\left[\frac{x}{2}\right],\ y\right)$, причем $r < q$ – инвариант.

$$\left[\frac{x}{2}\right] = qy + r \Rightarrow 2 \cdot \left[\frac{x}{2}\right] = 2qy + 2r$$

- $2 \mid x$:
$$2 \cdot \left[\frac{x}{2}\right] = x = 2qy + 2r$$
Если $2r \geq y$:
$$x = (2q+1)y + (2r - y)$$
То есть q увеличилося на 1, r уменьшилось на q. Теперь $r < q$, в q лежит частное.
- $2 \nmid x$:
$$2 \cdot \left[\frac{x}{2}\right] = x - 1 = 2qy + 2r$$
$$x = 2qy + 2r + 1$$
Если $2r + 1 \geq q$:
$$2r + 1 \geq y :$$
$$x = (2q+1)y + (2r + 1 - y)$$
То есть q увеличилося на 1, r уменьшилось на q. Теперь $r < q$, в q лежит частное.

То есть после перехода инвариант верен, в q – частное, в r – остаток, значит алгоритм работает $\square$
Ответ: $O\big(n^2\big)$

5. (a)
$$T_1(n) = T_1(n-1) + cn = T_1(n-2) + cn + c(n-1) = \ldots = c\sum_{k=4}^{n} k = \Theta\big(n^2\big)$$
Ответ: $\Theta\big(n^2\big)$

(c)
$$T_2(n) = T_2(n-1) + 4T_2(n-3),\ n \geq 3$$
$$x^n = x^{n-1} + 4x^{n-3}$$
$$x^3 = x^2 + 4$$
$$x = 2;\ x = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2};\ x = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2};$$
$$T_2(n) = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)^n + \gamma \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)^n$$
$$T_2(1) = T_2(2) = T_2(3) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4};\ \beta = -\frac{1}{8} - \frac{3i}{8\sqrt{7}};\ \gamma = -\frac{1}{8} + \frac{3i}{8\sqrt{7}}$$

$$T_2(n) = 2^{n-2} + \left(-\frac{1}{8} - \frac{3i}{8\sqrt{7}}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{8} + \frac{3i}{8\sqrt{7}}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)^n =$$

$$= 2^{n-2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^n}\left(\left(-1 + \frac{3i}{\sqrt{7}}\right)\left(-1 - i\sqrt{7}\right)^n - \left(1 + \frac{3i}{\sqrt{7}}\right)\left(-1 + i\sqrt{7}\right)^n\right)$$

$$A = \left(-1 + \frac{3i}{\sqrt{7}}\right)\left(-1 - i\sqrt{7}\right)^n = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(-i\sqrt{7})^{n-k} + \frac{3i}{\sqrt{7}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(-i\sqrt{7})^{n-k}$$

$$B = \left(1 + \frac{3i}{\sqrt{7}}\right)\left(-1 + i\sqrt{7}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(i\sqrt{7})^{n-k} + \frac{3i}{\sqrt{7}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(i\sqrt{7})^{n-k}$$

$$T_2(n) = 2^{n-2} + \frac{1}{2^{n+3}}(A - B)$$

$$A - B = 2^{3n/2+1}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(n \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - 2^{3n/2+1}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(n \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right) +$$

$$+ 2^{3n/2+1} \cdot \frac{3}{\sqrt{7}}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos\left(n \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(n \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)$$

$$A - B = -2^{3n/2+1}\cos\left(n \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{\pi n}{2}\right) + 2^{3n/2+1}\frac{3}{\sqrt{7}}\sin\left(n \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \Theta\left(2^{3n/2+1}\right)$$

$$T_2(n) = 2^{n-2} + \frac{\Theta\left(2^{3n/2+1}\right)}{2^{n+3}} = \Theta(2^n)$$

Ответ: $T_2(n) = \Theta(2^n)$

(b)

$$T_2(n) = \Theta(2^n) \Rightarrow \log T_2(n) = \Theta(2^n) \quad \square$$