Листок 5

Неравномерная сложность

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторый сложностной класс, а $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Классом $\mathcal{C}/g(n)$ называется множество языков L, для которых

– существует МТ M из класса, определяемого $\mathcal{C}$,

– существует последовательность слов $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, причём $|\alpha_n| = g(n)$,

– $x \in L$ тогда и только тогда, когда $M(x, \alpha_{|x|}) = 1$.

По определению $\mathcal{P}/\mathrm{poly} = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \mathcal{P}/n^j = \bigcup\limits_{i,j=0}^{\infty} \mathrm{DTIME}(n^i)/n^j$.

Сравним отдельно $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$ и $\mathcal{NP}$.

$L \in \mathcal{NP}$, если: существует полиномиальная ДМТ M, и существует полином $q(n)$, такие, что

$$\forall x \left((x \in L) \Leftrightarrow \exists y \left(y \in \Sigma^{q(|x|)} \wedge M(x, y) = 1\right)\right)$$

$L \in \mathcal{P}/\mathrm{poly}$, если: существует полиномиальная ДМТ M, и существует полином $q(n)$, такие, что

$$\forall n \exists \alpha_n \in \Sigma^{q(n)}\ \forall x \left((x \in L) \Leftrightarrow M(x, \alpha_{|x|}) = 1\right)$$

Схемная сложность

Схемой из функциональных элементов называется ориентированный граф без циклов, каждая вершина которого помечена одной из меток: вход, выход, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, **или ещё что-нибудь**. Это не очень-то строгое определение, но в некоторых случаях (при определении некоторых классов/решении некоторых задач) стандартного множества связок не хватает.

Для разумного определения вычислимости на метки стоит наложить следующие ограничения:

– вход – это вершина с входной степенью 0,

– есть лишь одна вершина с меткой выход, её выходная степень 0,

– $\neg$ – это вершина с входной степенью 1,

– для $\wedge$ и $\vee$ можно как наложить ограничение на входную степень (fan-in 2), так и не накладывать никакого ограничения вовсе (unbounded fan-in).

Если схема C содержит n входов, она может естественным образом принимать ($C(x) = 1$) или отвергать ($C(x) = 0$) любое битовое слово x длины n. Для распознавания языка понадобится много схем – по одной на каждую возможную длину слова.

Последовательность схем $\{C_n\}$ (у схемы C_n есть n входных вершин) распознаёт язык $L \subset \{0,1\}^*$, если при всех $x \in \{0,1\}^*$ выполнено $x \in L$ тогда и только тогда, когда $C_{|x|}(x) = 1$.

Размером схемы (SIZE) называется количество вершин в соответствующем графе. Глубиной схемы (DEPTH) называется длина самого длинного пути из входной вершины в выходную. Размером (глубиной) последовательности схем называется такая функция f, что размер (глубина) схемы номер n в последовательности есть $f(n)$.

Классом $\mathrm{SIZE}(f(n))$ называется множество языков, которые распознаются последовательностью схем размера $O(f(n))$.

Класс языков, распознаваемых схемами полиномиального размера $\mathrm{PSIZE} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{SIZE}(n^i)$

Классом $\mathcal{NC}^d$ называется класс языков, распознаваемых последовательностью схем одновременно **полиномиального размера** и глубины $O(\log^d n)$, в которых fan-in вершин $\vee$ и $\wedge$ равен 2, $\mathcal{NC} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{NC}^i$.

По аналогии классом $\mathcal{AC}^d$ называется класс языков, распознаваемых последовательностями схем полиномиального размера и глубины $O(\log^d n)$, с неограниченным fan-in $\vee$ и $\wedge$, $\mathcal{AC} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{AC}^i$

Равномерные схемы

Скажем, что последовательность схем $\{C_n\}$ из класса схем $\mathcal{S}$ равномерно вычислима в классе $\mathcal{C}$, если существует МТ из класса $\mathcal{C}$, которая на входе 1^n выдаёт кодировку схемы C_n. Писать будем $\mathcal{C}$-UNIFORM-$\mathcal{S}$.

К примеру, язык L лежит в классе $\mathcal{P}$-UNIFORM-$\mathcal{NC}^1$, если существует последовательность схем $\{C_n\}$ и существует ДМТ M такие, что:

– M работает за полиномиальное время,

– на входе 1^n машина M выдаёт ответ C_n,

– C_n имеют полиномиальный размер и логарифмическую глубину,

– $\{C_n\}$ распознают язык L.

По аналогии определяются, скажем, $\mathcal{P}$-UNIFORM-PSIZE, $\mathcal{L}$-UNIFORM-$\mathcal{AC}$ и т.д.

Задачи

Задача 5.1:

Доказать, что

1) $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}/\mathrm{poly}$,

2) $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}/\mathrm{poly}$ и даже $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}/1$,

3) $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$ содержит разрешимый язык, не принадлежащий $\mathcal{P}$.

Задача 5.2:

Доказать, что если в определении $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$ ограничиться полиномиально вычислимыми α (т.е. такими, что существует полиномиальная ДМТ на входе n выдающая α_n), такое ограничение даст класс $\mathcal{P}$.

Задача 5.3:

1) Язык называется унарным, если все его слова имеют вид 1^k. Доказать, что любой унарный язык принадлежит $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$

2) Пусть язык L обладает следующим свойством: любые два слова x и y одинаковой длины либо оба принадлежат L, либо оба не принадлежат L. Доказать, что $L \in \mathcal{P}/\mathrm{poly}$.

3) Язык L называется разреженным, если существует полином p такой, что $\forall n |L \cap \{0,1\}^n| \leqslant p(n)$. Доказать, что любой разреженный язык принадлежит $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$

4) Язык L называется плотным, если существует полином p такой, что $\forall n\, |\overline{L} \cap \{0,1\}^n| \leqslant p(n)$. Доказать, что любой плотный язык принадлежит $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$

Задача 5.4:

Доказать, что $\mathcal{P}/O(2^n) = \mathrm{ALL}$ – множество всех языков.

Задача 5.5:

Доказать, что $\mathcal{P}/\mathrm{poly} = \mathrm{PSIZE}$.

Задача 5.6:

Доказать, что класс $\mathcal{P}/\mathrm{poly}$ не изменится, если в качестве размера схемы вместо числа вершин брать число рёбер.

Задача 5.7:

Докажите, что $\mathcal{NC}^d \subset \mathcal{AC}^d \subset \mathcal{NC}^{d+1}$

Докажите, что $\mathcal{NC} = \mathcal{AC}$.

Докажите, что $\mathcal{NC}^0 \neq \mathcal{AC}^0$.

Включения верны как для равномерных, так и для неравномерных классов.

Задача 5.8:

По аналогии с SIZE можно было бы определить полиномиальный, логарифмический и т.д. DEPTH (это не $\mathcal{NC}$, там есть ограничение и на размер, и на глубину). Покажите, что такие определения малополезны, доказав, что $\mathrm{ALL} = \mathrm{DEPTH}(1)$.

Задача 5.9:

Докажите, что

1) $\mathcal{P}$-uniform-$\mathcal{NC} \subset \mathcal{P}$,

2) $\mathcal{L}$-uniform-$\mathcal{NC}^1 \subset \mathcal{L}$,

3) $\mathcal{NL} \subset \mathcal{L}$-uniform-$\mathcal{AC}^1$