ビッグデータ解析 (A1)
第 2 回レポート
固有値と固有ベクトル

2600200087-2
Oku Wakana
奥 若菜

Oct.24 2022

1　対称行列 A の固有値 α, β を求めよ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \times 2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$ のとき，$\lambda = 2, -3$ より

固定値は $\alpha = 2, \beta = -3$

2　固有値に対応する，大きさ１の固有ベクトルを求めよ

固有値 $\alpha = 2$ について，$A\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{p}$ に値を当てはめると

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x + 2y = 2x$$

$$2x - 2y = 2y$$

双方の式から，

$$y = \frac{1}{2}x$$

よって固有値 $\alpha = 2$ の固有ベクトルは，$t \neq 0$ として

$$\overrightarrow{p_\alpha} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{p_\beta} = t \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

固有値 $\beta = -3$ について，$A\overrightarrow{p} = -3\overrightarrow{p}$ に値を当てはめると

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x + 2y = -3x$$

$$2x - 2y = -3y$$

双方の式から，

$$y = -2x$$

よって固有値 $\alpha = 2$ の固有ベクトルは，$t \neq 0$ として

$$\overrightarrow{p_\beta} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{p_\beta} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

3　固有ベクトルが直交していることを示せ

固有ベクトルの内積を求める

$$\overrightarrow{p_\alpha} \cdot \overrightarrow{p_\beta} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= t^2 \{2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)\}$$

$$= 0$$

よって，内積が 0 であるため直行する