TD 3 : Espérance

Exercice 1. Pour F, il suffit d'écrire les définitions puis de dérouler les calculs.

$$\mathbb{E}[F] = \sum_{k=60}^{64} k \cdot \mathbb{P}[F = k] = 60 \cdot \frac{1}{20} + 61 \cdot \frac{1}{4} + 62 \cdot \frac{2}{5} + 63 \cdot \frac{1}{4} + 64 \cdot \frac{1}{20} = \boxed{62}$$

Ici, on préférera utiliser la définition de la variance sous la forme suivante $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ plutôt que sous la forme $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ pour avoir des petites valeurs dans la somme et rendre le calcul moins fastidieux.

$$Var(F) = \sum_{k=60}^{64} (k - \mathbb{E}[F])^2 \cdot \mathbb{P}[F = k] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{20} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{2}{5} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{20} = \boxed{0.9}$$

Ensuite, pour étudier C, on pourrait faire la même chose en remplaçant la table des valeurs prises par F par celles prises par C. Mais il y a beaucoup plus rapide en utilisant les propriétés de bases du cours (linéarité de l'espérance).

$$\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[\frac{5}{9}(F - 32)] = \frac{5}{9}\mathbb{E}[F - 32] = \frac{5}{9}(\mathbb{E}[F] - 32) = \frac{5}{9} \cdot 30 = \boxed{\frac{50}{3}}$$

$$Var(C) = Var(\frac{5}{9}(F - 32)) = \left(\frac{5}{9}\right)^2 Var(F - 32) = \frac{25}{81} \cdot Var(F) = \frac{25 \cdot 9}{81 \cdot 10} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

Exercice 2. Eugène Ionesco nous apprend que les êtres humains peuvent se tranformer en rhinocéros, et ce à vitesse grandissante. Au premier jour, il n'y a qu'un seul rhinocéros. Puis chaque jour, il y en 3 fois plus que la veille. De plus, il y a en tout 3^n individus (humains ou rhinocéros) dont vous faites partie. Les individus qui se tranforment chaque jour sont choisis alétoirement (uniforme). Soit X le nombre de jour avant que vous ne vous transformiez en rhinocéros. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 3. On se donne une boule bleue et n boules vertes. On joue au jeu suivant : on tire successivement deux boules *avec* remise. Deux cas :

— on perd $(n+1)^2$ euros si les boules sont de la même couleur,

— et on gagne $2(n+1)^2$ euros sinon.

Soit X le gain.

1. Quelle est la loi de probabilité de X.

   La probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est la somme des probabilités des deux événements disjoints “obtenir deux boules bleues" et “obtenir deux boules vertes". Comme le tirage s'effectue avec remise, on a :

   $\mathbb{P}[BB] = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$ et $\mathbb{P}[VV] = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

   Donc : $\mathbb{P}[\text{Même couleur}] = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$

   Et : $\mathbb{P}[\text{Couleurs différentes}] = 1 - \mathbb{P}[\text{Même couleur}] = \frac{2n}{(n+1)^2}$

TD 3 : Espérance

---

2. Montrer que $\mathbb{E}[X] = -n^2 + 4n - 1$.

$$\mathbb{E}[X] = (-(n+1)^2) \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2} + 2(n+1)^2 \cdot \frac{2n}{(n+1)^2} = -n^2 - 1 + 4n$$

3. Dans quels cas gagne-t-on de l'argent ?
On gagne de l'argent (en moyenne) quand l'espérance est positive. Pour déterminer les valeurs de n correspondantes, on calcule les racines de ce trinôme :
$\Delta = 4^2 - 4 \cdot -1 \cdot -1 = 12$, donc $n_0 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} = 2 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{12} \simeq 0.27$ ou 3.73.
Pour $n = 1, 2, 3$, l'espérance du gain est donc positive.

4. Si on peut choisir le nombre de boules vertes, que choisit-on ?
On cherche la valeur de n qui maximise notre espérance. Pour cela, on cherche le maximum de la fonction $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.
$f'(x) = -2x + 4$, qui s'annule en $x = 2$. Cette valeur correspond au maximum de la fonction, donc on voudra choisir $n = 2$ boules vertes.

Exercice 4. On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit $0,3$.

1. On lance 10 fois la pièce. Soit $k \in [\![0;10]\!]$. Quelle est la probabilité d'obtenir k fois pile ? Combien de piles obtient-on en moyenne ?
Cette expérience est modélisée par une loi binômiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$. On a $k \in [\![0;10]\!]$.
La loi de probabilité est donc : $\mathbb{P}[X = k] = \binom{10}{k} 0.3^k \cdot 0.7^{10-k}$
(Probabilité d'obtenir k piles et $10 - k$ faces dans un ordre donné : $0.3^k \cdot 0.7^{10-k}$. Il y a $\binom{10}{k}$ ordres possibles. La probabilité d'obtenir k piles et $10 - k$ faces est donc la somme des probabilités de ces $\binom{10}{k}$ événements disjoints de même probabilité : $\mathbb{P}[X = k] = \binom{10}{k} 0.3^k \cdot 0.7^{10-k}$.)
On obtient en moyenne $\mathbb{E}[X]$ succès, avec $\mathbb{E}[X] = np = 10 \times 0.3 = 3$.

2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?
Cette expérience se modélise par une loi géométrique de paramètre $p = 0.3$.
La loi de probabilité est donc : $\mathbb{P}[X = n] = 0.7^{n-1} \cdot 0.3$.
On lance en moyenne $\mathbb{E}[X]$ fois avant d'obtenir pile, avec $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p} = \dfrac{10}{3}$.

TD 3 : Espérance

Exercice 6. Soit X variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$
2. $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$ (à justifier)

Exercice 7. Soit X la variable aléatoire correspondante au nombre de vraies informations sur une journée. L'énoncé nous dit qu'en moyenne, 1% parmi 200 informations sont vraies chaque jour. Donc on a $\mathbb{E}[X] = 2$. De plus, X correspond à la quantité d'un évènement rare. On peut donc modéliser X par une loi de Poisson de paramètre λ puisque l'espérance d'une loi de Poisson est son paramètre.

1. $\mathbb{P}[X = 2] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^2}{2!} = 2e^{-2} \simeq 0,27$
2. $\mathbb{P}[X \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] - \mathbb{P}[X = 1] = 1 - e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^1}{1!} = 1 - 3e^{-2} \simeq 0,59$

Soit Y la variable pour Coyote News. Pour les mêmes raisons, il s'agit d'une loi de Poisson de paramètre 1. On peut écrire le nombre de vraies informations données par les deux chaînes en une journée comme $Z = X + Y$. La somme de deux lois de Poisson de paramètres λ et μ est une loi de Poisson dont le paramètre $\lambda + \mu$. Donc Z est ici de paramètre 3. On a donc :

$$\mathbb{P}[Z = 3] = e^{-3}\frac{3^3}{3!} = \frac{9}{2}e^{-3} \simeq 0,22$$

Exercice 8. Plusieurs méthodes :

1$^{\text{ère}}$ méthode Si on note X le gain, $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=-1}^{3} k \cdot \mathbb{P}[X = k]$. On a :

— $\mathbb{P}[X = -1] = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3$ car chaque dé a 5 chances sur 6 d'être différent de x.

— $\mathbb{P}[X = 1] = \dbinom{3}{1} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$ car un dé a une chance sur 6 d'être correct, et il faut choisir un dé parmi les 3 pour être correct.

— $\mathbb{P}[X = 2] = \dbinom{3}{2} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^2$ ici il faut choisir les deux dés corrects

— $\mathbb{P}[X = 3] = \left(\dfrac{1}{6}\right)^3$

On peut éviter d'en calculer une en utilisant la question 1 de l'Exercice 1.

Donc $\mathbb{E}[X] = \dfrac{(-1) \cdot 5^3 + (3 \cdot 5^2) + 2 \cdot (3 \cdot 5) + 3 \cdot 1}{6^3} = \boxed{-\dfrac{17}{216}}$

TD 3 : Espérance

2ème méthode : On décompose le gain en $X = Y + Z$ avec :

Y **:** ce que l'on gagne avec la première règle : k points si k sont corrects,

Z **:** le gain avec la deuxième règle : on perd un point si aucun dé n'est correct.

On décompose encore $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ gains pour chaque dé.

— $\mathbb{E}[Z] = -1 \cdot \mathbb{P}[\text{aucun dé correct}] = -\dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$

— $\mathbb{E}[Y_k] = k \cdot \mathbb{P}[k \text{ dés corrects}] = k \cdot \binom{3}{k}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3-k}$

— Donc : $\mathbb{E}[Y_1] = \dfrac{25}{72}$, $\mathbb{E}[Y_2] = \dfrac{5}{36}$, $\mathbb{E}[Y_3] = \dfrac{1}{72}$, et $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{25+10+1}{72} = \dfrac{1}{2}$

— $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] = \dfrac{1}{2} - \dfrac{125}{216} = \boxed{-\dfrac{17}{216}}$

Ce jeu n'est donc pas une très bonne idée sauf si vous rendez une copie presque blanche...

Exercice 9. La distribution est uniforme donc la probabilité qu'un patient choisisse un médecin particulier est de $p = \dfrac{1}{3}$. Soit X le nombre de médecins qui recoivent au moins un patient. X ne peut prendre que 3 valeurs possibles : $1, 2$ ou 3. On a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{3} k \cdot \mathbb{P}[X = k]$$

Il nous suffit donc de calculer les différentes probabilités :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=1] &= \mathbb{P}[(m_1 \text{ reçoit les } 3) \text{ ou } (m_2 \text{ reçoit les } 3) \text{ ou } (m_3 \text{ reçoit les } 3)] \\
&= 3 \cdot \mathbb{P}[(m_1 \text{ reçoit les } 3)] \quad (\text{car les 3 événements sont disjoints}) \\
&= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}[X = 3] = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$ car le deuxième patient 2 possibilités sur 3 de ne pas choisir le même médecin que le premier patient, et le troisième patient a 1 possibilté sur 3 de ne pas choisir les deux médecins choisis par les deux premiers patients.

$\mathbb{P}[X = 2] = 1 - \mathbb{P}[X = 1] - \mathbb{P}[X = 3] = \dfrac{2}{3}$

Donc $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{9} + 2 \cdot \dfrac{2}{3} + 3 \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{57}{27} = \dfrac{19}{9}$

Autre méthode :

On peut aussi décomposer $X = X_1 + X_2 + X_3$, avec $X_i = \begin{cases} 0 \text{ si le médecin ne reçoit personne} \\ 1 \text{ si il reçoit au moins un patient} \end{cases}$

Il suffit de calculer $\mathbb{E}[X_i]$ puis d'utiliser la linéarité de l'espérance.

TD 3 : Espérance

Encore une autre méthode :

On peut considérer $Y = 3 - X$ le nombre de médecins ne recevant personne.

Exercice 10. Un joueur joue contre un casino à pile ou face. Il mise la première fois une somme x. Le principe du jeu est le suivant :

— Si le joueur gagne, il empoche deux fois la mise et arrête de jouer.

— Si le joueur perd, le casino empoche la mise et le joueur retente sa chance en doublant sa mise précédente.

1. Quelle est l'espérance du gain du joueur ?
2. Le casino interdit de miser plus de mille fois la mise initiale. Quelle est l'espérance du gain du joueur ?