Mathématiques

Présentation des épreuves

Informations communes aux épreuves 1 et 2

Les candidats patientent en salle d'attente et sont appelés par l'examinateur à l'heure précise inscrite sur leur convocation, convocation qu'ils doivent lui présenter avec une pièce d'identité. Il est demandé aux candidats d'avoir un stylo personnel pour signer la liste d'émargement. Ce protocole n'a posé aucun problème, mais trop de candidats perdent beaucoup de temps à fermer leur sac, chercher leurs documents, éteindre leur téléphone (qui aurait dû être éteint dès l'entrée en salle d'attente) : l'oral dure 30 minutes dès l'appel de leur nom ! À ce propos, il n'est donc pas convenable (ni très courtois) d'afficher devant l'examinateur un compte à rebours partant de 30 minutes dès le début de la prise de parole.

De plus, l'heure de passage n'est pas flexible et un candidat arrivant en retard, même de quelques minutes, ne peut pas être accepté. Il convient donc aux candidats d'être présents en avance en salle d'attente et de prévoir le délai nécessaire pour éviter tout problème lié aux transports ou à la recherche des salles dans l'enceinte du bâtiment. Les incidents à ce sujets sont toutefois extrêmement rares.

Oral 1 de Mathématiques (sans préparation)

L'épreuve consiste en un oral de 30 minutes sans préparation. Le sujet est généralement composé de trois questions. La première consiste, le plus souvent, en une question de cours (rappeler une définition, l'énoncé d'un théorème, une courte démonstration) ou en un calcul ou démonstration simple et classique. La deuxième question entre dans le vif du sujet, mais met en œuvre des mécanismes de difficulté raisonnable. La dernière question est plus ardue et nécessite une réflexion mathématique plus profonde. Compte tenu du niveau de difficulté de certaines questions, l'examinateur propose des indications sans que le candidat en soit pénalisé. Ces indications sont normalisées sur chaque sujet, elles font partie intégrante de l'énoncé que possède chaque examinateur, même si le candidat n'y a pas accès sur la feuille qu'il tient entre les mains. Il faut donc bien comprendre que les sujets diffusés par les candidats sont transmis sous forme brute, sans indications, ce qui peut donner une vue déformée du déroulement de l'oral.

Oral 2 de mathématiques (avec `Python`)

Cette épreuve consiste en un exercice unique, en général volontairement long. Signalons cependant qu'il n'est nullement nécessaire de résoudre l'exercice en totalité pour obtenir une excellente note. Le candidat dispose d'une demi-heure de préparation pendant laquelle il a un accès libre à `Python` via l'interface `Pyzo`. Pendant la demi-heure suivante, les résultats obtenus sur ordinateur sont discutés, tandis que la résolution des questions théoriques se fait au tableau. L'usage des outils informatiques est présent dans la totalité des sujets et une question est systématiquement placée vers le début de l'énoncé à cet effet.

Les seules connaissances exigibles sont celles du programme officiel d'informatique des classes préparatoires. Des documents d'aide (sous forme papier et numérique), fournis à tous les candidats et librement téléchargeables sur le site du concours Centrale-Supélec, présentent les fonctions des bibliothèques `numpy`, `scipy` et `matplotlib` qui pourront être utiles sans pour autant être exigibles. L'évaluation tient alors compte de la capacité des candidats à s'approprier ces éléments, puis d'en analyser les résultats. Dans tous les cas, outre la maitrise des connaissances théoriques, l'examinateur prend grandement en compte dans son évaluation la qualité de communication du candidat.

Il est à noter qu'il s'agit avant tout d'une épreuve de mathématiques et non d'informatique. L'outil informatique n'est présent que pour conjecturer ou illustrer des résultats. La maitrise de cet outil est évidemment prise en compte dans l'évaluation globale des candidats mais dans une part moindre que celle des compétences mathématiques. Néanmoins, un candidat ne faisant pas le moindre effort pour traiter les questions de programmation sera fortement pénalisé.

Analyse globale des résultats

Cette session 2022 est la deuxième session organisée après la crise sanitaire qui ne nous a pas permis d'interroger en 2020. Globalement les candidats connaissent le format des épreuves, le temps de préparation, les exigences ; seul un nombre très faible de candidats échappent à cette constatation. Si nous avons eu la chance de voir d'excellentes prestations, le jury dans sa globalité note un recul sensible du niveau cette année. Cela peut par exemple s'expliquer par le contrecoup des conséquences scolaires et psychologiques des confinements, mais aussi par le nombre plus important d'admissibles cette année. Précisément, par rapport aux sessions précédentes, le jury observe davantage de candidats ne connaissant pas leur cours, ou refusant de chercher ou d'exposer des idées en décrétant qu'ils ne savent pas faire le sujet. Ainsi, les écarts continuent de se creuser entre les excellents candidats, qui maitrisent les notions de MPSI et de MP, et montrent de belles qualités de raisonnement mathématique, et les candidats ne connaissant pas les définitions des objets concernés dans les sujets, y compris les plus courants, et pour lesquels le moindre calcul est insurmontable.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury propose ici quelques conseils afin de permettre aux candidats d'améliorer leur prestation.

Qualité de l'oral

Le jury est sensible aux prestations soignant la qualité de l'oral. On entend par là plusieurs choses.

La gestion de la parole. Un candidat mutique, qui écrit ses réponses au tableau, dos tourné, ne saurait laisser une bonne impression sur les compétences attendues. À l'inverse, un candidat trop volubile n'écrivant aucune étape dans ses raisonnements a vite fait de noyer l'examinateur.

La réactivité est une compétence attendue lors de l'oral. Il s'agit d'écouter les remarques et conseils de l'examinateur et de savoir rebondir sur ceux-ci. Le fait de couper la parole à l'examinateur dès que ce dernier tente de mettre sur la voie un candidat en difficulté n'est pas évalué de façon positive.

Le choix du niveau de langue. Certains candidats se permettent des « Okay, ça marche », des « Ouais » ou s'expriment en parlant de « C'te fonction ». Dans un autre registre, l'utilisation abusive de la locution « du coup » (ou pire : « donc du coup ») est à proscrire. Cependant, le jury note une agréable amélioration dans ce sens, preuve que les candidats lisent les rapports. Pour compléter ces remarques, nous signalons que « on a que », comme « on a que f est paire », sont grammaticalement incorrects.

La précision du vocabulaire employé. Le pronom démonstratif « ça », par exemple, est vague, l'examinateur n'est pas censé deviner ce qu'il recouvre quand le candidat énonce que « ça converge ». De plus, dire qu'une série de fonctions converge est bien trop ambigu, puisqu'il existe plusieurs modes de convergence et que ce mode dépend de l'intervalle considéré. Un autre exemple vu cette année est celui de la série numérique $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$: que penser d'un candidat qui explique sa convergence par « du coup ça converge par croissances comparées » ? Enfin, nous rappelons qu'une fonction continue sur un intervalle ne possède pas *une*, mais *des* primitives, qu'une fonction bornée n'a pas un seul majorant et qu'une matrice carrée n'est pas annulée par un seul polynôme.

Il serait également bon que les candidats connaissent l'alphabet grec : confondre Φ et Ψ, n'avoir aucune idée du nom de la lettre Ω, et appeler *ksi* la lettre χ ne fait pas très bonne impression.

Stratégies pour un oral

On attend des candidats autonomie, réactivité, vivacité et interaction avec l'examinateur. À connaissances équivalentes, il va de soi que la préférence du jury ira vers un candidat dynamique et réactif plutôt que vers un candidat taciturne qui ne recherche pas l'interaction et ne suit pas les indications.

S'il est bon de placer le sujet dans son contexte, il n'est pas pertinent de le lire intégralement, voire de le recopier au tableau. L'examinateur a le sujet sous les yeux, il s'agit donc de ne pas perdre de temps inutilement.

Lorsque l'examinateur émet un doute sur une partie d'un raisonnement en demandant « en êtes-vous sûr ? », c'est qu'il y a une erreur dans 99 % des cas. Pourtant, la réponse qui arrive le plus souvent chez de nombreux candidats est un « oui, je suis sûr » sans même avoir pris le temps de la réflexion. Ajoutons qu'une erreur relevée ne fait pas nécessairement baisser la note, à condition de prendre le temps de la rectifier convenablement : le droit à l'erreur existe, surtout pendant l'épreuve sans préparation.

Le tableau est un outil essentiel de l'oral. Il ne doit pas s'agir d'un brouillon (nombre de candidats écrivent dans tous les sens possibles !). Il ne doit pas s'agir non plus d'une copie. Il est en revanche apprécié que les éléments essentiels de logique s'y retrouvent (introduction des variables, symboles d'implication ou d'équivalence, quantificateurs, prédicat des récurrences). Par ailleurs, il serait bienvenu de penser à ne pas se tenir entre son texte et l'examinateur.

Les candidats lisent parfois trop vite les sujets, surtout ceux de l'épreuve 1. Ne pas avoir lu que la première question était indépendante de la deuxième, se tromper sur ce qu'il faut démontrer, confondre une notation présentée dans le sujet avec une autre vue pendant l'année, sont des causes de perte de temps fâcheuses qui ont été encore observées à cette session 2022.

Pour l'épreuve 2, le temps de préparation doit être mis à profit pour préparer *aussi* les questions de mathématiques : le candidat ne doit pas passer 30 minutes à programmer.

Le hors programme

Les examinateurs passent beaucoup de temps à élaborer des sujets calibrés et conformes au programme officiel. Il n'est donc pas souhaitable que le candidat fasse appel à des notions hors programme pour tenter de rendre triviale une question, ce qui serait de toute façon mal considéré : l'oral est avant tout une évaluation de réactivité et de réflexion, pas un sondage de connaissances encyclopédiques. Le jury note toutefois que la plupart des candidats réagissent très bien aux demandes de précision quand ils évoquent, ici une « norme d'algèbre », ou là « le théorème de Dunford ».

Compétences mathématiques

Le jury interroge systématiquement sur les définitions des objets rencontrés. Il s'agit donc d'être irréprochable sur les connaissances du cours telles que la démonstration de l'équivalence à la matrice J_r des matrices de rang r, ou celle de l'inégalité de Markov, tout comme la définition d'une variable aléatoire discrète ou celle d'une $\mathbb{K}$-algèbre.

Algèbre

Le cours d'algèbre linéaire de deuxième année est généralement bien maitrisé. On note toutefois une gêne persistante sur les polynômes d'endomorphismes : il n'est pas rare de voir passer des $P(u(x))$ en lieu et place de $P(u)(x)$ et l'endomorphisme $(PQ)(u)$ laisse souvent les candidats dans l'embarras. Cette année, certains candidats parlent sans gêne du noyau d'un polynôme P, défini comme étant l'ensemble des vecteurs x tels que $P(x) = 0$ (*sic*). Le jury demandera toujours des précisions dès qu'il aura le moindre doute.

Sans conteste, les questions de cours portant sur les structures algébriques sont les plus délicates pour les candidats. La notion de $\mathbb{K}$-algèbre reste incomprise pour beaucoup de candidats, ils pensent aussi que la multiplication de l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la composition. La notion d'idéal, pourtant très présente dans le cours d'algèbre générale et celui d'algèbre linéaire, n'a pas été à l'honneur cette année : même en redonnant sa définition plusieurs fois, certains candidats ne savent pas montrer que l'ensemble des multiples d'un polynôme donné est un idéal de l'anneau des polynômes. De façon plus anecdotique, montrer qu'une partie F d'un sous-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel a posé quelques problèmes quand le candidat essayait de montrer que « $1_E \in F$ » (*sic*).

Pour ce qui est des connaissances de MPSI, le jury déplore comme chaque année des lacunes importantes sur les nombres complexes. Cette année, la résolution de $e^z = -1$ dans $\mathbb{C}$, qui constituait la première question d'un sujet, a paralysé bon nombre de candidats, alors que la difficulté était bien ailleurs.

Analyse

Les relations asymptotiques posent souvent des difficultés. Rappelons aussi qu'en général, $f(x) \sim g(x)$ n'entraine pas $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ et que $u_n \sim v_n$ n'implique pas $(u_n)^n \sim (v_n)^n$. Lors de cette session 2022, il a été observé des lacunes importantes dans une simple étude de fonction, telle que $f : x \mapsto \frac{2x}{1+e^x}$.

- Même si l'ensemble de définition a été correctement trouvé, il n'est pas suffisant de dire que f est continue « comme quotient de fonctions continues » comme le montre l'exemple élémentaire de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Cacher les précisions d'une argumentation derrière l'évocation des « théorèmes généraux » n'a jamais été évalué positivement par le jury. Le jury invite les candidats à rester modérés sur l'usage de cette locution trop vague.
- Chercher un équivalent, quand $x \to +\infty$, de $1 - x + e^{-x}$ a parfois nécessité des acrobaties calculatoires montrant des lacunes rédhibitoires.
- Le jury reste bienveillant sur les éventuelles étourderies, cependant, se tromper sur la simplification de $e^x - (e^x + xe^x)$ (vue en $+xe^x$) ne met pas le jury dans de bonnes dispositions.

Il n'est pas rare de devoir souffler aux candidats que $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx$ est une intégrale à paramètre, et qu'il serait peut-être judicieux d'utiliser les théorèmes les concernant pour justifier la continuité de F. Certaines prestations ont permis d'observer que l'hypothèse de domination (ou sa version locale) n'est pas toujours bien comprise.

Pour les fonctions réelles d'une variables réelles, signalons que le théorème des valeurs intermédiaires ne donne que l'existence de solutions à une équation, pas l'unicité comme semblent le croire beaucoup de candidats. De plus, le calcul d'intégrales donne de plus en plus de mal : trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a donné lieu à des résultats surprenants. Il est de plus en plus rare de voir un calcul correct de plus de quatre lignes de bout en bout.

Le calcul différentiel est toujours une source d'angoisse pour les candidats, qui ne le voient désormais qu'en deuxième année depuis la réforme de 2014. La différentielle d'une composée $f \circ g$ n'est pas maitrisée, ni sous la forme $df(g(x)) \circ dg(x)$ (le $\circ$ devient souvent $\times$, le dg se place à gauche de df, etc.), ni sous la forme avec le gradient lorsque g est à une variable et f à valeurs réelles, ni sous la forme appelée « règle de la chaine » dans le cas des dérivées partielles. Avec les nouveaux programmes qui prévoient la réintroduction des fonctions de deux variables dès la première année, nous espérons que le calcul différentiel sera mieux maitrisé à la session 2023, d'autant plus que le concept d'extrémum lié et la formule de Taylor à l'ordre 2 associée aux matrices symétriques définies positives feront leur entrée.

Probabilités

Les sujets de probabilités forment un pourcentage non négligeable des sujets d'une session. Le jury note cette année un embarras plus présent que les sessions précédentes. La définition du concept de variable aléatoire discrète ne donne pas toujours satisfaction. Lors de cette session 2022, un candidat a même avoué ne pas avoir retenu l'adjectif « discrète » de son cours. Enfin, beaucoup de candidats font des raisonnements « à la main » en expliquant vaguement en quoi la formule proposée est correcte, alors qu'une justification par la formule des probabilités totales aurait été claire et rigoureuse.

Compétences informatiques

Comme depuis déjà quelques sessions, une grande majorité des candidats est bien au fait du format et des spécificités de l'épreuve de mathématiques 2. On peut néanmoins noter plusieurs soucis qui persistent année après année.

- Comme il est rappelé tous les ans depuis la création de l'épreuve, celle-ci est bien une épreuve de mathématiques. Les trente minutes de préparation ne doivent pas être intégralement passées à programmer, loin de là.
- Les candidats ont en général une assez bonne maitrise de la syntaxe du langage `Python`, mais une part non négligeable d'entre eux ne teste pas son code pendant le temps de préparation : on passe alors un temps précieux à débugger des erreurs de syntaxe et des fautes de frappe au lieu de parler du fond du programme.
- Malgré les mises en garde des années précédentes, la double ou triple récursivité sévit encore. On a même vu des programmes avec un nombre quadratique d'appels récursifs. Certes, le jury n'attend évidemment pas des algorithmes hautement optimisés vu le temps de préparation accordé aux candidats, mais un minimum de recul sur la complexité des algorithmes présentés est nécessaire. On peut espérer que les techniques de programmation dynamique qui seront vues dans le nouveau programme d'informatique tronc commun de deuxième année améliorent ce point à l'avenir.
- Encore trop de candidats n'ont une connaissance que très partielle de l'aide mémoire Python mis à leur disposition, on a parfois l'impression qu'ils le découvrent le jour de l'épreuve. Certains codent la méthode des rectangles pour calculer une intégrale (même si le domaine d'intégration est $]0, +\infty[$!) alors que la fonction `quad` du module `scipy` est décrite avec plusieurs exemples dans l'aide. De même, le module `numpy.Polynomial` est souvent difficile d'utilisation lorsqu'on ne l'a jamais expérimenté.
- Les erreurs de précision avec les flottants sont encore souvent mal comprises, et en général peu ou pas du tout prises en compte. On a entendu d'un candidat à qui on posait la question « pourquoi obtient-on 1.67×10^{-16} au lieu de 0 ? » la réponse « parce que Python est programmé bizarrement ». Dans le même ordre d'idée, calculer $\binom{200}{100}$ et utilisant la division flottante de 200! par $100!^2$ n'est pas forcément la meilleure chose à faire.

Quelques algorithmes qui reviennent souvent mériteraient d'être plus spécifiquement préparés.

- Savoir calculer le *pgcd* de deux nombres entiers a et b, autrement qu'en testant tous les nombres de 1 à $\max(a, b)$.
- Savoir programmer un test de primalité élémentaire.
- Savoir estimer une probabilité ou une espérance.
- Savoir quoi tracer pour évaluer un paramètre (par exemple, pour conjecturer la valeur de α quand $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$, tracer la suite (u_n) et des courbes du type $n \mapsto \frac{1}{n^\alpha}$ pour un grand nombre de valeurs de α n'est pas très pertinent).

Les modules d'algèbre linéaire sont en général beaucoup mieux maitrisés. Il faut dire que programmer soi-même un algorithme de réduction est assez délicat : les candidats n'ont alors pas le choix de se tourner vers le formulaire ; ils devraient avoir ce même réflexe en analyse et en probabilités.

Conclusion

Une légère baisse globale sur les prestations de cette année est à signaler, sans qu'elle soit toutefois alarmante ; elle devrait s'expliquer par les contextes particuliers qui ont émaillé la scolarité des candidats. Le jury recommande un effort sur l'apprentissage du cours. Les excellentes prestations montrent que les candidats peuvent acquérir un très haut niveau pendant leur deux, voire trois, années de préparation, grâce à leur travail et l'implication de leurs professeurs qui les mènent aux sommets. Nous espérons que ces quelques remarques permettront aux candidats d'aborder les oraux 1 et 2 de mathématiques en ayant clairement conscience des erreurs à éviter et de cerner ce qui leur permettra de se mettre en valeur.