# Mathématiques

## Présentation du sujet

L'épreuve de mathématiques 1 est un oral de 30 minutes, sans temps de préparation. Elle vise à évaluer la maitrise des différents outils vus en cours, la capacité à élaborer une solution structurée et argumentée, la capacité à réagir aux indications et enfin la prise d'initiative.

L'épreuve de mathématique 2 fait appel à l'outil informatique. Le format est de 30 minutes de préparation (temps d'installation du candidat inclus) puis 30 minutes d'interrogation. Le sujet est constitué d'un problème dont les questions sont de difficulté progressive et où l'outil informatique permet d'établir des conjectures que le candidat devra démontrer. Celui-ci dispose d'un ordinateur sur lequel sont installés la distribution `Pyzo` pour la programmation en `Python` et le logiciel `Scilab`.

Dans chaque épreuve, tous les examinateurs posent le même sujet au même moment. Le jury évalue ainsi généralement 10 candidats sur une même planche, ce qui permet de faciliter l'harmonisation de la notation.

## Analyse globale des résultats

Conscient des conditions particulières des deux années de préparation pour une majorité des candidats, le jury de l'épreuve de mathématiques 1 remarque une difficulté pour certains à mettre en place des méthodes classiques et citer clairement les hypothèses des théorèmes fondamentaux.

Les candidats sont mieux préparés à l'épreuve de mathématiques 2 que l'an passé. La majorité mène un travail d'expérimentation numérique et de conjecture en préparation.

Les prestations répondent globalement aux attentes du jury même si celui-ci souhaiterait davantage de vivacité de la part des candidats, en particulier pour s'emparer plus efficacement des indications données par l'examinateur. Le jury encourage donc les futurs candidats à être encore plus dynamiques et à l'écoute : trop de passivité, une attitude attentiste ou à l'inverse la non prise en compte des avertissements de l'examinateur mèneront à une note faible, reflétant parfois peu le réel potentiel du candidat. En réponse à une question ouverte concernant des stratégies à envisager, le candidat doit éviter de répondre en fermant l'échange avec un « je ne sais pas » ou « je ne vois pas ».

Comme les années précédentes, le jury remarque une grande hétérogénéité dans la maitrise des notions mathématiques. Quelques candidats font preuve d'une remarquable maitrise des différents concepts, mais ceux-ci sont moins nombreux que les années passées. À l'inverse, trop de candidats n'ont qu'une connaissance approximative des définitions et théorèmes-clés du programme : sur des exercices-types, ce type de lacune est lourdement pénalisant.

Pour chacune des deux épreuves, le jury est attentif à la qualité du raisonnement mathématique des candidats, ainsi qu'au soin qu'ils prennent à communiquer leurs idées et résultats de manière claire et précise. Il faut veiller en ce sens à une gestion plus soignée du tableau pour certains.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### Généralités

Les planches sont un support permettant au jury d'évaluer les compétences des candidats. La résolution complète de l'exercice n'est en aucun cas un objectif. Pour l'épreuve de mathématiques 2, quelques rares candidats continuent à faire l'impasse sur l'outil informatique et certains vont même jusqu'à ne pas saisir les instructions fournies dans le sujet ; cet évitement est vain : ils seront invités à faire les saisies durant le temps d'évaluation. Certains d'entre eux insistent parfois lourdement pour sauter une ou plusieurs questions afin d'aller présenter un point qu'ils ont pu aborder en préparation. Cette stratégie n'est pas appropriée. En effet, l'évaluation porte notamment sur l'aptitude du candidat à aborder une difficulté technique, à proposer des stratégies, être attentif aux indications et les mettre en œuvre. Enfin, quelques candidats commentent parfois la pertinence du sujet ou des questions du jury ce qui parait parfois assez incongru.

Comme les années passées, le calcul reste un point faible chez de nombreux candidats par manque de rigueur et d'efficacité et les notions de première année sont globalement moins bien maitrisées, alors qu'elles font pleinement partie du champ d'évaluation.

Le jury est sensible à la rigueur manifestée dans les raisonnements classiques (récurrences, absurde...). Durant l'épreuve orale, qui reste beaucoup plus fluide que l'épreuve écrite, il importe d'exprimer clairement tout raisonnement un peu élaboré avec une présentation au tableau structurée et organisée.

De manière générale, la connaissance du cours est primordiale, ainsi que le travail d'articulation entre cours et exercices. Ainsi, en cas de blocage à une question, le jury attend des candidats que ceux-ci puissent néanmoins présenter quelques méthodes standard de résolution liées au thème traité.

Les candidats sont parfois déstabilisés par le format sans préparation de l'épreuve 1. Le jury les encourage à s'entrainer pendant l'année à ce type d'épreuve, qui nécessite plus d'efficacité et de réflexes, d'autant que le sujet est souvent construit de manière à laisser l'initiative aux candidats.

### Algèbre / Algèbre linéaire

Le jury souhaite attirer l'attention des futurs candidats sur des thèmes fréquemment abordés et erreurs souvent commises : différentes caractérisations du groupe orthogonal, clarté du lien entre inversibilité et déterminant, formulaire sur la trace et le déterminant, différents critères de diagonalisabilité et méthodes de diagonalisation (autres que par le polynôme caractéristique), lien entre trace et valeurs propres, déterminants des matrices triangulaires, identification du spectre d'une matrice triangulaire, dimensions mises en jeu dans le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé, pleine exploitation de la théorie de la dimension dans les problèmes de bijectivité ou de bases, mention parfois nécessaire du cadre de dimension finie, différence entre projection orthogonale et endomorphisme orthogonal, liens entre matrices symétriques réelles et endomorphismes symétriques et symétries. Il convient également de bien faire la différence entre matrices équivalentes par lignes/colonnes et matrices semblables. La manipulation des nombres complexes est un obstacle majeur pour certains candidats.

### Analyse

Lors des planches d'analyse, le jury a souvent constaté d'importants manques de rigueur : inégalité triangulaire erronée, oubli de la positivité dans des théorèmes de convergence, en particulier lors d'utilisation d'équivalents, inégalités fantaisistes en présence de signes alternés ou sans valeurs absolues, formules incorrectes (somme des termes d'une suite géométrique, expression développée du produit de deux sommes), rédaction imprécise pour montrer qu'une série ou intégrale converge ou encore pour appliquer la règle de d'Alembert, confusion sur les liens entre convergence absolue et convergence pour une intégrale ou une série. Le jury attend des candidats qui recherchent une solution développable en série entière d'une équation différentielle une rédaction rigoureuse et la capacité de justifier leurs calculs par les modes de convergence des séries entières.

Le jury rappelle aussi que les propriétés et définitions des fonctions de référence doivent être connues : fonctions trigonométriques, fonctions puissances (réelles ou entières), fonctions trigonométriques réciproques, fonctions hyperboliques. Les candidats qui rencontrent des difficultés sur ces différents points sont encore trop nombreux.

L'analyse asymptotique est un point faible chez grand nombre de candidats : la recherche d'un équivalent ou d'une domination est souvent bloquante, peu savent invoquer et détailler le théorème des croissances comparées. Ces difficultés s'accroissent par exemple lors de vérifications d'une hypothèse de domination pour une intégrale à paramètre. Lors de l'étude d'une intégrale, le jury a droit en général à une formulation du type « on regarde s'il y a un problème en... puis en... » ; la continuité par morceaux de l'intégrande et l'identification de l'intervalle d'intégration avec ouverture ou fermeture des bornes est presque systématiquement omise. Peu de candidats connaissent la définition du rayon de convergence d'une série entière et un grand nombre pensent qu'il y a convergence normale sur le disque ouvert de convergence.

Des erreurs persistent dans l'esprit de certains candidats : une suite réelle positive décroissante convergerait nécessairement vers 0, le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sous hypothèse de convergence uniforme pourrait s'appliquer sur un intervalle quelconque, une série entière convergerait normalement sur tout son intervalle ouvert de convergence... Pour une fonction de la variable réelle définie par morceaux, l'étude de la continuité de la fonction se résume parfois à l'étude évidente de la continuité sur chaque morceau sans observer les limites à gauche et à droite aux bords.

En ce qui concerne le cours et ses applications directes, les candidats doivent maitriser tout particulièrement les définitions de convergence (suites, séries, intégrales), normes, produits scalaires et convergence uniforme, s'engager de manière autonome dans un plan d'étude de suite récurrente linéaire d'ordre un ou une comparaison série-intégrale, connaitre mieux les propriétés des fonctions usuelles ainsi que les propriétés des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle. Pour démontrer qu'une intégrale est convergente, citer un argument global de continuité est attendu : trop de candidats n'en font pas mention, et certains ne connaissent pas les intégrales de référence, l'exemple de Riemann étant parfois appliqué sur $R_+$. Pour l'étude des séries numériques, effectuer des opérations sans précaution sur des séries divergentes est lourdement sanctionné. L'étude de la convergence normale d'une série de fonctions devrait être en général menée avant l'étude souvent plus délicate de sa convergence uniforme. Plutôt que de se ramener au théorème de convergence dominée systématiquement et parfois laborieusement, l'application directe des théorèmes d'intégration terme à terme d'une série de fonctions devrait être privilégiée.

Enfin, le calcul différentiel reste difficile pour la majorité. Très peu de candidats parviennent à justifier qu'une fonction est de classe $C^1$. La notion d'extremum global ou local reste floue, et le théorème relatif aux fonctions continues sur une partie fermée bornée est mal restitué dans ses hypothèses. Montrer qu'une fonction de deux variables n'est pas majorée sur $R^2$ pose parfois de grandes difficultés chez certains candidats. Le lien entre point critique et extremum n'est pas clair (ni dans un sens ni dans l'autre, les hypothèses topologiques étant souvent oubliées), et la règle de la chaine pas toujours maitrisée.

Les quelques notions concernant les arcs paramétrés sont dans l'ensemble méconnues : point régulier, tangente en un point régulier, arcs plans. Ces points sont au programme et ne doivent pas être négligés.

### Probabilités

Le jury incite les candidats à mieux connaitre les formules des probabilités totales et composées (énoncés avec les hypothèses), à savoir identifier un système complet d'événements adapté à une situation donnée, à ne pas confondre événements incompatibles et indépendants, à savoir décrire les événements de manière ensembliste, et à mieux reconnaitre les lois de probabilités classiques dans les situations concrètes d'exercices, à mieux comprendre l'usage du théorème de transfert. Il importe que les candidats comprennent le sens de ce qu'ils rédigent : il arrive trop fréquemment que certains écrivent des choses aberrantes comme la probabilité d'une variable aléatoire ou même d'une intersection de variables aléatoires avant de rectifier, suite à la question de l'interrogateur, en écrivant proprement des événements avec les variables aléatoires concernées. L'impression d'ensemble en est évidemment altérée.

### L'outil informatique

Les candidats doivent s'efforcer d'écrire des programmes dans lesquels leurs notations sont aussi conformes que possible à celles du sujet. Court-circuiter les questions informatiques n'est pas une stratégie viable : celles-ci visent à établir des conjectures et sans celles-ci, un candidat se retrouve rapidement bloqué. L'autonomie est en hausse et de plus en plus de candidats parviennent à écrire un code fonctionnel durant la préparation et à l'exploiter. Pour gagner encore en aisance, on recense les points suivants : savoir commenter rapidement une partie du code, faire un usage adapté du `print` (pertinent dans l'éditeur mais pas dans la console, exception faite des polynômes), ne pas se bloquer devant un `[warning]` produit par `python`, oser poser $X = Polynomial([0, 1])$ pour manipuler les polynômes selon l'usage courant, savoir simuler des lois classiques comme une loi uniforme et en particulier une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

## Conclusion

Une grande partie des candidats est bien préparée et propose une prestation de qualité. Le jury rappelle que les compétences évaluées se développent par un travail régulier et approfondi des programmes de première et deuxième années, et qu'une maitrise des définitions et résultats fondamentaux est indispensable. Afin de mettre pleinement en valeur ce travail, le jury encourage les futurs candidats à plus de vivacité et de rigueur et leur conseille de consulter les précédents rapports où ils trouveront d'autres conseils pour leur préparation.