

Mathématiques

Présentation du sujet

L'épreuve de Mathématiques est un oral de 30 minutes, sans temps de préparation. Elle vise à évaluer la maîtrise des différents outils vus en cours, la capacité à élaborer une solution structurée et argumentée, la capacité à réagir aux indications et enfin la prise d'initiative.

L'épreuve de Mathématiques Informatique fait appel à l'outil informatique. Le format est de 30 minutes de préparation (temps d'installation du candidat inclus) puis 30 minutes d'interrogation. Le sujet est constitué d'un problème dont les questions sont de difficulté progressive et où l'outil informatique permet d'établir des conjectures que les candidats devront démontrer. Ceux-ci disposent d'un ordinateur sur lequel est installée la distribution `Pyzo` pour la programmation en `Python`.

Dans chaque épreuve, tous les examinateurs posent le même sujet au même moment. Le jury évalue ainsi généralement une dizaine de candidats sur une même planche, ce qui permet de faciliter l'harmonisation de la notation.

Analyse globale des résultats

Les prestations répondent globalement aux attentes du jury même si celui-ci souhaiterait davantage de vivacité de la part des candidats, en particulier pour s'emparer plus efficacement des indications données par l'examineur et des consignes fournies par l'énoncé. Le jury encourage donc les futurs candidats à être encore plus dynamiques et à bien répondre aux sollicitations. Ces indications permettent aux candidats de se valoriser en apportant des précisions sur un outil utilisé ou en justifiant la méthode de démonstration choisie.

Comme les années précédentes, le jury remarque une grande hétérogénéité dans la maîtrise des notions mathématiques. Quelques candidats font preuve d'une remarquable maîtrise des différents concepts, mais ceux-ci sont moins nombreux que les années passées. À l'inverse, trop de candidats n'ont qu'une connaissance approximative des définitions et théorèmes-clés du programme.

Les candidats sont bien préparés à l'épreuve de Mathématiques Informatique. La majorité mène un travail d'expérimentation numérique et de conjecture en préparation. Toutefois, nombreux sont ceux qui ne lisent pas suffisamment le sujet et qui codent des fonctions déjà disponibles après importation de bibliothèques dédiées. Le jury rappelle que l'outil informatique mis à disposition des candidats est destiné à être utilisé pendant la préparation et durant l'exposé, l'implémentation des codes ne se fera donc pas sur papier ou au tableau.

Pour chacune des deux épreuves, le jury est attentif à la qualité du raisonnement mathématique des candidats, ainsi qu'au soin qu'ils prennent à communiquer leurs idées et résultats de manière claire et précise. Il faut veiller en ce sens à une gestion plus soignée du tableau pour certains.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Généralités

Les planches sont un support permettant au jury d'évaluer les compétences des candidats. La résolution complète de l'exercice n'est en aucun cas un objectif. Pour l'épreuve de Mathématiques Informatique, quelques rares candidats continuent à faire l'impasse sur l'outil informatique et certains vont même jusqu'à ne pas saisir les instructions fournies dans le sujet ; cet évitement est vain : ils seront invités à faire les

saisies durant le temps d'évaluation. Certains d'entre eux insistent de manière prononcée pour sauter une ou plusieurs questions afin d'aller présenter un point qu'ils ont pu aborder en préparation. Cette stratégie n'est pas appropriée. En effet, l'évaluation porte notamment sur l'aptitude des candidats à aborder une difficulté technique, à proposer des stratégies, être attentif aux indications et les mettre en œuvre.

Comme les années passées, le calcul reste un point faible chez de nombreux candidats par manque de rigueur et d'efficacité. Les notions de première année sont globalement moins bien maîtrisées, alors qu'elles font pleinement partie du champ d'évaluation.

Le jury est sensible à la rigueur manifestée dans les raisonnements classiques (récurrences, absurde, analyse-synthèse...). Durant l'épreuve orale, qui reste beaucoup plus fluide que l'épreuve écrite, il importe d'exprimer clairement tout raisonnement un peu élaboré avec une présentation au tableau structurée et organisée.

De manière générale, la connaissance du cours est primordiale, ainsi que le travail d'articulation entre cours et exercices. En cas de blocage à une question, le jury attend des candidats que ceux-ci puissent néanmoins présenter quelques méthodes standard de résolution liées au thème traité.

Les candidats sont parfois déstabilisés par le format sans préparation de l'épreuve de Mathématiques. Le jury les encourage à s'entraîner pendant l'année à ce type d'épreuve, qui nécessite plus d'efficacité et de réflexes, d'autant que le sujet est souvent construit de manière à laisser l'initiative aux candidats.

Algèbre / Algèbre linéaire

Le jury souhaite attirer l'attention des futurs candidats sur des thèmes fréquemment abordés et erreurs souvent commises : différentes caractérisations du groupe orthogonal, clarté du lien entre inversibilité et déterminant, formulaire sur la trace et le déterminant, différents critères de diagonalisabilité et méthodes de diagonalisation (autres que par le polynôme caractéristique), lien entre trace et valeurs propres, déterminants des matrices triangulaires, identification du spectre d'une matrice triangulaire, dimensions mises en jeu dans le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé, pleine exploitation de la théorie de la dimension dans les problèmes de bijectivité ou de bases, mention parfois nécessaire du cadre de dimension finie, liens entre matrices symétriques réelles et endomorphismes autoadjoints, confusions entre projecteurs orthogonaux et isométries vectorielles, ou entre endomorphisme auto-adjoint et symétrie, non-conformité de la formule générale d'une famille orthonormalisée par le procédé de Gram-Schmidt, faiblesse dans l'analyse des colonnes d'une matrice pour y détecter des éléments de réponse sur le rang, calcul d'un déterminant (règle de Sarrus à bannir) ou ses éléments propres. La manipulation des nombres complexes est un obstacle majeur pour certains candidats.

Analyse

Lors des planches d'analyse, le jury a souvent constaté d'importants manques de rigueur : inégalité triangulaire erronée, oubli de la positivité dans des théorèmes de convergence, en particulier lors d'utilisation d'équivalents, inégalités fantaisistes en présence de signes alternés ou sans valeur absolue, formules incorrectes (somme des termes d'une suite géométrique, expression développée du produit de deux sommes), rédaction imprécise pour montrer qu'une série ou intégrale converge, confusion sur les liens entre convergence absolue et convergence pour une intégrale ou une série.

Le jury rappelle aussi que les propriétés et définitions des fonctions de référence doivent être connues : fonctions trigonométriques, fonctions puissances (réelles ou entières), fonctions trigonométriques réciproques, fonctions hyperboliques. Les candidats qui rencontrent des difficultés sur ces différents points sont encore trop nombreux.

L'analyse asymptotique est un point faible chez grand nombre de candidats : la recherche d'un équivalent ou d'une domination est souvent bloquante. Ces difficultés s'accroissent par exemple lors de vérifications

d'une hypothèse de domination pour une intégrale à paramètre. Lors de l'étude d'une intégrale, le jury a droit en général à une formulation du type « on regarde s'il y a un problème en ... puis en ... ». Peu de candidats connaissent la définition du rayon de convergence d'une série entière et quelques-uns pensent encore qu'il y a convergence normale sur le disque ouvert de convergence.

Des erreurs persistent dans l'esprit de certains candidats : une suite réelle positive décroissante convergerait nécessairement vers 0, le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sous hypothèse de convergence uniforme pourrait s'appliquer sur un intervalle quelconque, ...

En ce qui concerne le cours et ses applications directes, les candidats doivent maîtriser tout particulièrement les définitions de convergence (suites, séries, intégrales), normes, produits scalaires et convergence uniforme, s'engager de manière autonome dans un plan d'étude de suite récurrente linéaire d'ordre deux ou une comparaison série-intégrale, connaître mieux les propriétés des fonctions usuelles ainsi que les propriétés des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle. Pour l'étude des séries numériques, effectuer des opérations sans précaution sur des séries divergentes est sanctionné. L'étude de la convergence normale d'une série de fonctions devrait être en général menée avant l'étude souvent plus délicate de sa convergence uniforme.

Le jury rappelle que l'utilisation de l'intégration par parties ou du changement de variable peut permettre non seulement de déterminer la valeur d'une intégrale mais également sa nature. Ces deux théorèmes sont d'ailleurs rarement justifiés comme il convient. De plus, pour étudier les limites des intégrales à paramètre, on rappelle qu'il est important de ne pas oublier la valeur absolue pour l'hypothèse de domination ainsi qu'effectuer cette majoration sur un voisinage adéquat du paramètre (En particulier, pour obtenir une limite en $+\infty$, il ne faut surtout pas effectuer la domination du paramètre sur un segment).

Enfin, le calcul différentiel reste souvent une partie mal comprise du programme. Très peu de candidats parviennent à justifier qu'une fonction est de classe C^1 voire continue. La notion d'extremum global ou local reste floue, et le théorème relatif aux fonctions continues sur une partie fermée bornée est mal restitué dans ses hypothèses. Montrer qu'une fonction de deux variables n'est pas majorée sur \mathbb{R}^2 pose parfois de grandes difficultés chez certains candidats. Le lien entre point critique et extremum n'est pas clair (ni dans un sens ni dans l'autre, les hypothèses topologiques étant souvent oubliées), et la règle de la chaîne pas toujours maîtrisée.

Probabilités

Le jury incite les candidats à mieux connaître les formules des probabilités totales et composées (énoncés avec les hypothèses), à savoir identifier un système complet d'événements adapté à une situation donnée, à ne pas confondre événements incompatibles et indépendants, à savoir décrire les événements de manière ensembliste, à reconnaître les lois de probabilités classiques dans les situations concrètes d'exercices et à mieux comprendre l'usage du théorème de transfert. Il importe que les candidats comprennent le sens de ce qu'ils rédigent : il arrive trop fréquemment que certains écrivent des choses aberrantes comme la probabilité d'une variable aléatoire ou même d'une intersection de variables aléatoires avant de rectifier, suite à la question de l'interrogateur, en écrivant proprement des événements avec les variables aléatoires concernées. L'impression d'ensemble en est évidemment altérée.

Le conditionnement donne souvent lieu à des expressions vides de sens comme des événements ou des variables conditionnés. La fluidité de l'argumentation orale permet pourtant de mieux illustrer son propos par des schémas, des exemples ou des mises en situation qui évitent ces fautes de sens.

Les images de variables aléatoires doivent d'avantage être prises en compte afin de mieux identifier les domaines de sommation de certaines formules de probabilité.

Les schémas de Bernoulli sont souvent invoqués mais rarement bien présentés ce qui donne l'impression que l'on cherche à forcer l'identification faite entre certaines lois.

Outil informatique pour l'épreuve de Mathématiques-Informatique

Les sujets proposent systématiquement un ensemble de bibliothèques à importer avec souvent un module spécifique pour la résolution du sujet.

Il convient que les candidats prennent en compte ces importations pour coder plus efficacement leurs scripts. Les tracés de fonctions ou suites ainsi que l'affichage de données numériques servent à la détermination de certaines conjectures que seul l'outil informatique permet d'illustrer. Les candidats sont invités à une plus grande prise d'initiative pour corriger les erreurs qui relèvent de maladresse de syntaxe. Les bibliothèques fournissent souvent des fonctions clef en main qui permettent d'accéder rapidement à la caractéristique ciblée. À charge des candidats de bien structurer les données fournies pour ainsi présenter les résultats numériques de manières lisible et exploitable. La partie interprétation et justification des approximations faites est un élément important dans cette phase de conjecture.

Conclusion

Une grande partie des candidats est bien préparée et propose une prestation de qualité. Le jury rappelle que les compétences évaluées se développent par un travail régulier et approfondi des programmes de première et deuxième années, et qu'une maîtrise des définitions et résultats fondamentaux est indispensable. Afin de mettre pleinement leur travail en valeur, le jury encourage les futurs candidats à plus de vivacité et de rigueur dans la présentation de leur épreuve orale.