

Mathématiques

Présentation des épreuves

Informations communes aux épreuves 1 et 2

Les candidats patientent en salle d'attente et sont appelés par l'examineur à l'heure inscrite sur leur convocation, convocation qu'ils doivent lui présenter avec une pièce d'identité. Il est demandé aux candidats d'avoir un stylo personnel pour signer la liste d'émargement. Ce protocole n'a posé aucun problème, mais trop de candidats perdent encore beaucoup de temps à fermer leur sac, chercher leurs documents, éteindre leur téléphone (qui aurait dû être éteint dès l'entrée en salle d'attente comme le demande le mot laissé au tableau) : l'oral dure 30 minutes, ainsi que la préparation s'il y a lieu, dès l'appel de leur nom. À ce propos, il n'est donc pas convenable, ni très courtois, d'afficher devant l'examineur un compte à rebours de 30 minutes dès le début de la prise de parole.

De plus, l'heure de passage n'est pas flexible et un candidat arrivant en retard, même de quelques minutes, ne peut pas être accepté. Le jury conseille donc aux candidats d'être présents en avance en salle d'attente et de prévoir le délai nécessaire pour éviter tout problème lié aux transports ou à la recherche des salles dans l'enceinte du bâtiment. Les incidents à ce sujet sont toutefois extrêmement rares.

Oral 1 de Mathématiques (sans préparation)

L'épreuve consiste en un oral de 30 minutes sans préparation. Le sujet est généralement composé de trois questions. Comme pour la session 2023, la première question a consisté exclusivement en une question de cours « pur » : rappeler une définition, l'énoncé d'un théorème voire une courte démonstration ; les compétences de calcul ou de recherche sont mobilisées à partir de la deuxième question mettant en œuvre des mécanismes de difficulté raisonnable et classiques. La dernière question est plus ardue et nécessite une réflexion mathématique plus profonde. Compte tenu du niveau de difficulté de certaines questions, l'examineur propose des indications sans que les candidats en soient pénalisés. Ces indications sont normalisées sur chaque sujet, elles font partie intégrante de l'énoncé que possède chaque examinateur, même si les candidats n'y ont pas accès sur la feuille qu'il tient entre les mains. Il faut donc bien comprendre que les sujets diffusés par les candidats sont transmis sous forme brute, sans indication, ce qui peut donner une vue déformée de ce qui est attendu par le jury.

Oral 2 de mathématiques (avec Python)

Cette épreuve consiste en un exercice unique, en général volontairement long. Signalons cependant qu'il n'est nullement nécessaire de résoudre l'exercice en totalité pour obtenir une excellente note. Les candidats disposent d'une demi-heure de préparation pendant laquelle ils ont un accès libre à **Python** via l'interface **Pyzo**. Pendant la demi-heure suivante, les résultats obtenus sur ordinateur sont discutés, tandis que la résolution des questions théoriques se fait au tableau. L'usage des outils informatiques est présent dans la totalité des sujets et une question est systématiquement placée vers le début de l'énoncé à cet effet.

Des documents d'aide (sous forme papier et numérique), fournis à tous les candidats et librement téléchargeables sur le site du concours Centrale-Supélec, présentent les fonctions des bibliothèques **numpy**, **scipy** et **matplotlib** qui pourront être utiles sans pour autant être exigibles. L'évaluation tient alors compte de la capacité des candidats à s'appropriier ces éléments, puis d'en analyser les résultats. Dans tous les cas, outre la maîtrise des connaissances théoriques, l'examineur prend grandement en compte dans son évaluation la qualité de communication des candidats.

Il est à noter qu'il s'agit avant tout d'une épreuve de mathématiques et non d'informatique. L'outil informatique n'est présent que pour conjecturer ou illustrer des résultats. La maîtrise de cet outil est évidemment prise en compte dans l'évaluation globale des candidats mais dans une part moindre que celle des compétences mathématiques. Néanmoins, un candidat ne faisant pas le moindre effort pour traiter les questions de programmation sera fortement pénalisé.

Analyse globale des résultats

Cette session 2024 confirme la stabilisation du niveau des candidats déjà mentionnée à la session 2023. Globalement, les candidats connaissent le format des épreuves, le temps de préparation et les exigences attendues. Seul un petit nombre de candidats a un niveau très en dessous de ce que l'on peut espérer à un oral d'admission ; *a contrario* il y a eu un nombre significatif de bonnes prestations. Cette année le jury observe avec grand plaisir le retour des oraux de qualité exceptionnelle, oraux qui n'avaient pas été remarqués en 2023.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury propose ici quelques conseils afin de permettre aux candidats d'améliorer leurs prestations.

Qualité de l'oral

Le jury est sensible aux prestations soignant la qualité de l'oral. On entend par là plusieurs choses.

La gestion de la parole

Un candidat qui reste mutique malgré les demandes répétées de l'examineur, qui écrit ses réponses au tableau, dos tourné, ne saurait laisser une bonne impression sur les compétences attendues. À l'inverse, un candidat trop volubile n'écrivant aucune étape dans ses raisonnements a vite fait de noyer l'examineur.

La réactivité

Elle est une compétence attendue lors de l'oral. Il s'agit d'écouter les remarques et conseils de l'examineur et de savoir rebondir sur ceux-ci. Le fait de couper la parole à l'examineur dès que ce dernier tente de mettre sur la voie un candidat en difficulté n'est pas évalué de façon positive. Cette situation s'est encore quelquefois rencontrée dans la session 2024, et a terni quelques oraux prometteurs.

Le choix du niveau de langue

Il convient de s'exprimer dans un français correct lors d'un oral, y compris en mathématiques. Il n'est pas acceptable de répondre « ah ouais okay » à un examinateur, par exemple. Si le jury note une amélioration globale concernant l'usage abusif de la locution « du coup » (ou sa pénible variante « donc du coup »), il regrette toujours la forte recrudescence du barbarisme « on a que », comme dans « on a que f est paire » qui aurait tout avantage à disparaître. L'expression « il vient que » n'est pas plus correcte.

La précision du vocabulaire employé

Le pronom démonstratif « ça », par exemple, est vague, l'examineur n'est pas censé deviner ce qu'il recouvre quand le candidat énonce « ça converge ». De plus, dire qu'une série de fonctions converge est bien trop ambigu, puisqu'il existe plusieurs modes de convergence et que ce mode dépend de l'intervalle considéré. Enfin, nous rappelons qu'il convient de déterminer *une* et non *la* primitive d'une fonction continue sur un intervalle, qu'une fonction bornée n'a pas un seul majorant et qu'une matrice carrée n'est pas annulée par un seul polynôme.

Il serait également bon que les candidats connaissent l'alphabet grec : éviter soigneusement de prononcer le nom de fonctions s'appelant Φ ou Ψ , n'avoir aucune idée du nom de la lettre Ω , et appeler *ksi* (voire x) la lettre χ ne fait pas très bonne impression.

Stratégies pour un oral

En plus des connaissances mathématiques, le jury attend des candidats autonomie, réactivité, vivacité et interaction avec l'examineur. À connaissances équivalentes, il va de soi que la préférence du jury ira vers un candidat dynamique et réactif plutôt que vers un candidat taciturne qui ne recherche pas l'interaction et ne suit pas les indications.

Il n'est pas pertinent de lire le sujet intégralement, voire de le recopier au tableau. L'examineur a le sujet sous les yeux, il s'agit donc de ne pas perdre de temps inutilement. Beaucoup de candidats pensent bien faire en présentant le sujet par « Ceci est un sujet d'algèbre », etc. Cette introduction est peut-être demandée dans d'autres disciplines, mais le jury de mathématiques n'en voit pas l'utilité.

Certains candidats, lorsqu'ils proposent une idée, attendent l'approbation de l'examineur avant de se lancer. Il faut savoir faire preuve d'initiative sans se faire « tenir la main » à chaque tentative.

Lorsque l'examineur émet un doute sur une partie d'un raisonnement en demandant « en êtes-vous sûr ? », c'est qu'il y a une erreur : Le jury ne cherchera pas à poser de telles questions pièges. Pourtant, certains candidats continuent de croire que c'est un piège et répondent « oui, je suis sûr » sans même avoir pris le temps de la réflexion : le jury n'utilisera jamais de telles pratiques. Ajoutons qu'une erreur relevée ne fait pas nécessairement baisser la note, à condition de prendre le temps de la rectifier convenablement : le droit à l'erreur existe, surtout pendant l'épreuve sans préparation. Néanmoins, les erreurs de calcul à répétition et la mauvaise maîtrise des règles vues au collège concernant les exposants, les parenthèses, la factorisation sont évaluées en conséquence, ainsi que les erreurs graves et répétées de logique : négation d'une implication, d'une conjonction, confusion entre condition nécessaire et condition suffisante.

Le tableau est un outil essentiel de l'oral. Il ne s'agit ni d'un brouillon – nombre de candidats écrivent dans tous les sens possibles – ni d'une copie. Il est en revanche apprécié que les éléments essentiels de logique s'y retrouvent (introduction des variables, symboles d'implication ou d'équivalence, quantificateurs, prédicat des récurrences). **Par ailleurs, il serait bienvenu de penser à ne pas se tenir entre son texte et l'examineur.**

Les candidats lisent parfois trop vite les sujets, surtout ceux de l'épreuve 1. Ne pas avoir lu que la première question était indépendante de la deuxième, ne pas utiliser les indications (rédigées pour aider le candidat), oublier que l'on suppose $\lambda = 0$ dans la question 2, se tromper sur ce qu'il faut démontrer, confondre une notation présentée dans le sujet avec une autre vue pendant l'année, entraînent des pertes de temps fâcheuses.

Le hors programme

Les examinateurs passent beaucoup de temps à élaborer des sujets calibrés et conformes au programme officiel. Il n'est donc pas souhaitable que les candidats fassent appel à des notions hors programme pour tenter de rendre triviale une question, ce qui serait de toute façon mal considéré : l'oral est avant tout une évaluation de réactivité et de réflexion. Le nouveau programme entré en vigueur depuis deux ans a réintroduit les notions de matrice symétrique positive et de norme subordonnée (entre autres). En conséquence, la tentation du hors programme est devenue beaucoup plus rare.

Compétences mathématiques

Le jury interroge systématiquement sur les définitions des objets rencontrés. Il s'agit donc d'être irréprochable sur les connaissances du cours telles que la démonstration de l'équivalence à la matrice J_r des

matrices de rang r , ou celle de l'inégalité de Markov, tout comme la définition d'une variable aléatoire discrète ou celle d'une \mathbf{K} -algèbre. Pour la session 2024, le jury est unanime : le cours n'est pas assez bien restitué et handicape considérablement les candidats qui l'ont oublié. Le jury continuera inlassablement d'interroger dessus. Nous diffuserons une liste non exhaustive des questions de cours posées à cette session.

Algèbre

Le cours d'algèbre linéaire de deuxième année est généralement bien maîtrisé. Si les polynômes d'endomorphismes sont toujours source de confusion ($\text{Ker} P$ si P est un polynôme, etc.), on peut constater qu'ils n'embarrassent que les candidats les plus faibles.

Sans conteste, les questions de cours portant sur les structures algébriques sont celles qui départagent significativement les bons candidats des plus faibles. La notion de \mathbf{K} -algèbre reste toujours mal comprise pour beaucoup de candidats : la relation de compatibilité $\lambda \cdot (a \times b) = (\lambda \cdot a) \times b = a \times (\lambda \cdot b)$ est systématiquement oubliée. Pourtant c'est en partie grâce à elle que \times peut être qualifiée de bilinéaire, la distributivité ne suffisant pas.

Pour finir sur une note optimiste, le jury note que les candidats connaissent bien la définition des matrices symétriques positives ainsi que leur caractérisation spectrale qui ont été au centre de nombreux sujets en 2024.

Analyse

Comme toujours, les compétences en calcul ne sont pas toujours satisfaisantes. Les manipulations algébriques, simplifications, factorisations, etc. se font au mieux très lentement. Le jury invite les candidats à s'entraîner inlassablement, dès le début de la première année.

L'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$, même dans le cas simple d'une fonction f croissante, pose des problèmes à de nombreux candidats, les raisonnements démontrant la convergence ou la divergence de la suite étant très souvent incomplets, confus, ou faux.

La notion de borne supérieure (ou inférieure) est toujours délicate. Les candidats sont en difficulté quand le jury demande d'expliquer ce que signifie « passer au sup ».

Beaucoup de candidats utilisent le théorème des accroissements finis avec f de classe \mathcal{C}^1 sur tout $[a; b]$ comme hypothèse alors que f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ suffit, en particulier quand on leur demande de citer le théorème. Un de ses nombreux corollaires, le théorème de la limite de la dérivée, n'est pas bien maîtrisé.

La manipulation des inégalités est cruciale dans les applications du théorème de convergence dominée. C'est malheureusement l'occasion d'observer des lacunes sur la comparaison de réels : si les candidats connaissent bien, quand on leur rappelle, la règle

$$\forall (a, b, c) \in \mathbf{R}^3, \left[(c \geq 0 \text{ et } a \leq b) \Rightarrow ac \leq bc \right],$$

ils ont du mal à voir qu'elle intervient pour majorer $\ln(x)e^{-(1+x^2)t^2}$ si x évolue dans un segment de \mathbf{R}_+^* .

Le calcul différentiel reste une éternelle source de confusions pour les candidats, malgré son introduction *via* les fonctions de deux variables réelles en première année. La matrice hessienne a été franchement oubliée, et la différence entre df et $df(a)$ n'est pas très bien comprise. Le calcul de la dérivée d'une fonction de la forme $t \mapsto f(ta + (1-t)b)$, en utilisant le gradient de f , a souvent posé d'énormes difficultés.

De manière plus générale, demander une interprétation géométrique de notions élémentaires, tant en algèbre (isométries, projections orthogonales, angles et nombres complexes) qu'en analyse (gradient, convexité) laisse souvent les candidats dans l'embarras : pour illustrer le concept de projection orthogonale sur un sous-espace d'un espace euclidien, le jury ne comprend pas pourquoi plusieurs candidats

dessinent une patate. De même, dessiner une sphère de \mathbf{R}^3 pour mettre en évidence sa connexité par arcs reste trop délicat.

Probabilités

Les concepts de variable aléatoire, de tribu, de probabilité ne sont pas toujours définis de façon rigoureuse. Il est alors périlleux de démontrer qu'une somme aléatoire $\sum_{n=1}^N X_n$ (avec N, X_1, X_2, \dots des variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N}^*) est une variable aléatoire.

Trop de candidats veulent démontrer une relation en expliquant vaguement qu'elle provient du protocole, alors que le jury attend une démonstration claire utilisant la formule des probabilités totales dans un système complet d'événements soigneusement choisis.

Les candidats passent souvent à la limite pour des probabilités de réunions et d'intersections infinies en écrivant même des produits infinis sans penser à utiliser les théorèmes sur les suites monotones d'événements.

Lorsque des variables aléatoires suivent des lois usuelles (géométrique, binomiale), les candidats sont souvent en peine de le justifier précisément.

Rigueur dans l'exposé et l'écriture des mathématiques

Si un oral se prête davantage à un exposé écrit allégé au tableau, il convient de conserver une certaine rigueur dans l'utilisation des symboles mathématiques, et d'énoncer les définitions ou théorèmes dans une syntaxe correcte.

- On attend de candidats sortant de MPSI/MP qu'ils maîtrisent un minimum le langage mathématique de la logique classique, et celui de la théorie (dite naïve) des ensembles. En 2024, il est arrivé que le connecteur \Rightarrow soit réduit à une virgule, que la négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne soit pas connue, même en aidant le candidat, et que l'écriture en compréhension ou en extension des ensembles soit problématique.
- Lorsque le candidat souhaite utiliser un raisonnement par la contraposée ou par l'absurde, il est souhaitable qu'il le précise, au moins oralement, avant de l'entamer. À ce propos, nous rappelons que la négation de « la suite (u_n) tend vers l'infini » n'est pas « la suite (u_n) a une limite finie ».
- Une définition ne saurait être restituée par « pour moi, une tribu, c'est quand on regarde les événements ».
- De même, un théorème ne se limite pas à sa conclusion seule.
- En analyse spécifiquement, les examinateurs doivent systématiquement demander les justifications permettant de faire les calculs (convergence, absolue convergence, indépendance de variables aléatoires, etc.) qui ne sont que très rarement données par les candidats sans injonction. Cela est évidemment pénalisant.
- La seule définition donnée par le programme officiel du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels r de \mathbf{R}_+ tels que $(a_n r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.
- Présenter les objets et quantifier une assertion est indispensable. Ainsi, quand on demande l'énoncé du théorème de Bézout, on obtient le plus souvent : « $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $a \wedge b = 1$. Alors $au + bv = 1$, avec $u, v \in \mathbf{Z}$ ». On voit ici que la préposition *avec* sert de joker pouvant jouer le rôle de \forall ou de \exists selon le contexte ; elle est donc à proscrire. Par exemple « $\sin x < x$ avec $x > 0$ » : le « avec » joue pour « pour ».

tout $x > 0$ » ; ou encore « f est surjective donc $y = f(x)$ avec x dans E » le « avec » joue pour « il existe x dans E ».

- Bien que d’une importance moindre, l’écriture « $\exists x \in E$ tel que (ou t.q.) $P(x)$ » n’est pas correcte : les quantificateurs ne sont pas des abréviations (page 6/36 du programme de MPSI). De même, l’écriture « $\forall x \in E$ on a $P(x)$ » n’est pas conforme. Il en va de même de « $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ ».

Compétences informatiques

Comme depuis déjà quelques sessions, une grande majorité des candidats est bien au fait du format et des spécificités de l’épreuve de mathématiques-informatique. Il reste quelques candidats n’ayant traité (ou même essayé de traiter) aucune question en **Python**, ce qui est comme toujours fortement sanctionné, tant dans l’évaluation que dans le temps imparti à l’exposé mathématique, puisqu’une part non négligeable de l’oral sera alors dévolue à essayer de programmer les premières questions de **Python**.

- Comme il est rappelé tous les ans depuis la création de l’épreuve, celle-ci est bien une épreuve de mathématiques. Les trente minutes de préparation ne doivent pas être intégralement passées à programmer, loin de là.
- Les candidats ont en général une assez bonne maîtrise de la syntaxe du langage **Python**, mais une part non négligeable d’entre eux ne teste pas son code pendant le temps de préparation : on passe alors un temps précieux à déboguer des erreurs de syntaxe et des fautes de frappe au lieu de parler du fond du programme.
- Beaucoup de candidats n’ont pas de recul sur l’exploitation des résultats numériques, en particulier concernant les flottants : que dire d’une matrice dont les coefficients sont de l’ordre de 10^{-15} ? Du graphe d’une fonction qui semble nulle mais où les échelles sont de l’ordre de 10^{12} ? Est-il judicieux de calculer $\binom{100}{98}$ avec des factorielles ? Dans le même ordre d’idée, pour calculer une somme de termes faisant intervenir une factorielle ou un coefficient binomial, il faut penser absolument que chaque terme s’obtient à partir du précédent, pour éviter trop d’erreurs d’arrondis. Lorsqu’il s’agit de calculer la somme d’une série, les candidats sont souvent bien en peine d’expliquer leurs choix quant au nombre de termes à calculer pour obtenir une approximation raisonnable du résultat.
- Le jury regrette que, contrairement à l’an passé, les candidats ne semblent plus faire grand cas de la complexité de leurs algorithmes, en particulier lorsque ceux-ci sont récursifs.

Conclusion

Le jury retrouve avec plaisir quelques prestations excellentes, disparues en 2023, et ne déplore qu’un nombre très réduit d’orateurs très faibles. Le premier point à améliorer reste les questions de cours « pur » qui n’ont, encore cette année, pas donné satisfaction. Certaines prestations montrent que les candidats peuvent acquérir un haut niveau durant leur deux, voire trois, années de préparation, grâce à leur travail et l’implication de leurs professeurs qui les mènent au sommet. Le jury espère que ce rapport permettra aux candidats d’aborder les oraux de mathématiques en ayant clairement conscience des erreurs à éviter et de cerner ce qui leur permettra de se mettre en valeur.