

# Mathématiques

Chaque candidat admissible au concours Centrale-Supélec 2024 a passé deux épreuves de mathématiques lors de ses oraux, chacune d'elles ayant sa spécificité propre.

## Présentation des épreuves

### Épreuve de mathématiques 1

L'épreuve de mathématiques 1 est une épreuve sans préparation d'une durée d'environ 30 minutes. L'usage de la calculatrice est autorisé mais dans les faits très rare.

Les candidats se voient proposer un exercice qui comporte peu de questions, certaines pouvant être données au fur et à mesure de l'épreuve et en fonction de l'avancée du candidat. L'exercice est progressif et dans son début très proche du cours. Il est tout à fait possible d'avoir une bonne note sans avoir répondu à toutes les questions. Le sujet proposé est avant tout un support pour évaluer les connaissances des candidats sur plusieurs parties du programme et sa faculté à mener un dialogue réfléchi avec l'interrogateur.

Dans le même but l'interrogateur peut être amené à poser quelques questions en dehors de l'exercice, ce sans corrélation avec le niveau de la prestation du candidat.

### Épreuve de mathématiques 2

L'épreuve de Maths 2 est une épreuve de mathématiques utilisant l'outil informatique. Un ordinateur équipé des environnements de développement Pyzo et Spyder est mis à disposition des candidats. Des fiches d'aide présentant différentes fonctions Python pouvant être utiles sont fournies lors de l'épreuve sous forme papier ainsi que sous forme d'un fichier Pdf présent sur l'ordinateur. Ces fiches sont consultables en ligne sur le site du concours. Les candidats disposent d'une préparation d'une demi-heure puis sont interrogés pendant 25 minutes environ. L'outil informatique peut être employé pour effectuer des calculs, des tracés de courbes ou de surfaces, étudier des exemples numériques correspondant à un problème théorique donné, effectuer des calculs matriciels (par exemple résoudre un système linéaire ou rechercher les éléments propres d'une matrice), simuler une expérience aléatoire, émettre des conjectures... Dans cette épreuve, le jury évalue la capacité des candidats à aborder de manière constructive les notions du programme de mathématiques de la filière PSI, à choisir la meilleure représentation d'un objet pour résoudre un problème donné, à organiser de manière claire un calcul complexe. La capacité à s'exprimer et la rigueur de la démarche sont aussi prises en compte dans la notation.

## Analyse globale des résultats

### Épreuve de mathématiques 1

Les candidats dans leur immense majorité connaissent le format de l'épreuve et sont à l'aise durant leur oral. Cette année encore l'oral de mathématique 1 a permis de classer ces derniers de façon efficace, tant sur leurs connaissances du programme que sur leur capacité à les mobiliser pour résoudre des problèmes en interaction avec l'examinateur. L'épreuve de mathématiques 1, avec 12,20 de moyenne et un écart type d'environ 3,50, a fort bien tenu son rôle.

Le niveau des candidats est en légère hausse par rapport à l'année passée, notamment, et nous y reviendrons, par une connaissance répandue des grands théorèmes de l'analyse de seconde année et des résultats d'algèbre linéaire sur la réduction.

La diminution du nombre de candidats très faibles, amorcée depuis quelques années, semble se poursuivre, l'écrit filtre donc de façon satisfaisante les candidats.

À l'opposé, comme l'an passé, le jury a interrogé un nombre non négligeable de candidats particulièrement brillants, autonomes, dominant le cours et qui viennent presque sans aide à bout de l'exercice.

Entre ces deux extrêmes nous trouvons des candidats qui nous sont apparus plutôt bien formés, maîtrisant de façon satisfaisante les résultats du cours et les techniques usuelles. Le besoin qu'ils ont d'être guidés et plus encore la manière dont ils tirent profit de l'aide de l'examineur et interagissent avec ce dernier contribuent à les classer.

Le jury adresse ses félicitations à la majorité des candidats pour le sérieux de leur travail et louer leurs enseignants pour la qualité de leur préparation. Une fois encore les classes préparatoires ont démontré leur efficacité.

Cependant Il réitère mot pour mot les mêmes réserves que celles du précédent rapport :

- les candidats ont du mal à représenter les situations qu'ils rencontrent ; ils ne font quasiment jamais spontanément de dessins ou schémas, pourtant une figure claire peut résumer les hypothèses du problème, exposer rapidement les notations introduites et aider à résoudre l'exercice ;
- le cours de première année est souvent oublié, que ce soit le calcul asymptotique, les théorèmes fondamentaux sur les fonctions d'une variable réelle ou l'algèbre linéaire de base, par des candidats par ailleurs solides sur le programme de seconde année ;
- les très rares notions de géométrie restées au programme telles celles de tangente à une courbe ou de plan tangent à une surface, données par une équation cartésienne, sont souvent ignorées tandis que certains candidats peinent même à écrire dans le plan l'équation d'une droite ;
- certains candidats cherchent systématiquement à utiliser les grands résultats de PSI pour éviter de réfléchir à des solutions adaptées au problème et souvent du reste simples.

Ils est regrettable que ces réserves renouvelées portent précisément sur des qualités scientifiques qui dépassent largement le cadre des seules mathématiques et qui constituent des savoirs et savoirs faire scientifiques fort utiles à de futurs ingénieurs.

La prochaine session mettra l'accent sur ces lacunes par des sujets évaluant un éventail plus large de connaissances et de compétences et des questions annexes, portant sur les points les moins connus du programme.

Reste à espérer que les candidats du concours 2025 auront entre temps lu et tenu compte de ce rapport et que les précédentes remarques sortiront du prochain rapport.

## Épreuve de mathématiques 2

La majorité des candidats a compris le principe de l'épreuve de Maths 2 et beaucoup ont pris la peine de se familiariser avec les fiches d'aide disponibles pour l'épreuve 2.

Le jury est relativement satisfait des performances des candidats : la moyenne sur l'épreuve est d'environ 11,5 avec un écart type de 3,3. La majorité des candidats a été capable – parfois avec un peu d'aide – de répondre à l'étude numérique proposée et apporter des éléments de preuve mathématique, certains candidats le faisant de manière très autonome. Ces excellentes prestations sont un peu en diminution par rapport aux années précédentes. Par contre, le jury déplore des prestations faibles aussi bien au niveau

de l'emploi de l'outil informatique que de la maîtrise des questions mathématiques posées. Le réflexe de tester ses codes informatiques n'est curieusement pas du tout systématique, et une très grande partie des candidats ne sait pas comment n'exécuter qu'une partie des codes. Les moins habiles ne savent pas exécuter d'instructions dans la console, ou ignorent qu'il faut fermer la fenêtre graphique avant de relancer l'exécution de leur code.

Il est très rare que l'étudiant soit mutique. En revanche, le jury regrette que de nombreux candidats se contentent de proposer des pistes pour répondre aux questions, et n'entament une rédaction qu'à partir du moment où l'examineur valide une de ces propositions. Un peu plus d'initiative de la part de ces candidats est attendue.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite donner quelques conseils et mises en garde aux futurs candidats. Certains figuraient déjà dans les précédents rapports, d'autres non. Il conseille aux candidats de la prochaine session de lire également les rapports des deux années précédentes.

Pour bien préparer ces épreuves, il faut tout d'abord travailler le cours, celui de seconde année, comme celui de première trop souvent oublié, puis les techniques usuelles. Un candidat qui connaît son cours et sait comment aborder les problèmes classiques est assuré d'avoir une note fort convenable. Toutes les notions du cours de seconde année de PSI, mais aussi du cours de première année (intersection entre les programmes de MPSI et de PCSI), doivent être connues. Certains candidats utilisent des notions qui ne sont pas au programme de PSI mais qui le sont dans d'autres filières (typiquement la compacité, le lemme des noyaux), alors même qu'ils en ignorent d'autres au programme. Les exercices ont été spécifiquement préparés pour la filière PSI et ne demandent pas de connaissances hors programme.

Le jury remarque que certains candidats sont parfois bloqués par la méconnaissance de résultats élémentaires de première année voire de terminale, quelques exemples : un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle, l'expression des racines  $n^e$  de l'unité (et factorisation sur le corps  $\mathbf{C}$  de  $X^n - 1$ ), reconnaître une primitive simple, écrire correctement une hypothèse de récurrence, utiliser une formule trigonométrique, travailler avec des exponentielles complexes, exprimer un vecteur dans une base ortho-normée, trouver le maximum d'un trinôme du second degré...

Les interrogateurs attendent des candidats qu'ils ne contentent pas d'écrire au tableau, mais qu'ils se retournent de temps à autre, soient dynamiques, proposent des stratégies de résolution et écoutent leurs remarques. Quand l'examineur pose une question intermédiaire, c'est souvent une indication, il faut en tenir compte et ne pas hésiter à l'écrire pour bien la visualiser. Vouloir s'entêter dans une méthode alors que l'examineur suggère d'en changer ne peut que nuire au candidat.

Il est attendu des candidats qu'ils fassent preuve de rigueur et de précision. Quand ils appliquent un théorème ils doivent en citer et en vérifier toutes les hypothèses. Ainsi, exprimer qu'une matrice est diagonalisable en écrivant  $A = PDP^{-1}$ , sans autre commentaire, témoigne d'un manque de précision notamment sur le corps de base ; de même parler de la continuité de  $f$  « sur  $0\ 1$  », n'a pas de sens, les candidats doivent spontanément préciser la nature de l'intervalle, ouvert, fermé etc. ; pour montrer la convergence d'une série par majoration, il faut mentionner la positivité de son terme général, et prendre la même précaution avec une intégrale ; écrire un développement en série entière d'une fonction usuelle doit être accompagné du domaine de validité. Dans le même ordre d'idée, le recours très fréquent à des expressions comme « c'est continu », ou « ça converge », etc. est à bannir au profit de phrases comportant un sujet précis : la fonction est continue, la suite converge ou la série converge. Enfin dans l'étude d'une convergence d'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , confondre comme on le voit trop souvent, le nombre  $f_n(x)$  et la fonction  $f_n$  est non seulement fautif, mais occasionne des fautes majeures qui pénalisent le candidat.

Sur le plan du raisonnement, il est primordial que l'examineur sache celui qui est retenu par les candidats qui, à l'oral, ne sont pas tenus, comme à l'écrit, de tout rédiger ; néanmoins ils doivent informer

l'interrogateur du type de raisonnement qu'ils mènent : raisonnement par équivalence, raisonnement par double implication, raisonnement par récurrence. De la même façon si la quantification des variables obéit à l'oral à des exigences moins strictes qu'à l'écrit, les candidats doivent au moins oralement informer l'examineur du statut de chacune d'elle. Rappelons que pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, il faut partir d'un élément quelconque de cet ensemble : par exemple, pour montrer que toutes les valeurs propres d'une matrices sont positives, on commence par écrire ou dire « soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice ». Cette année encore les candidats se précipitent sur une preuve par analyse-synthèse. Rappelons que ce type de raisonnement est approprié pour montrer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique mais n'est pas la panacée universelle.

D'une manière générale, les candidats n'illustrent pas assez leur propos par des dessins, des figures ou des schémas. Le jury encourage et apprécie le recours spontané à des illustrations graphiques, notamment pour illustrer des théorèmes comme celui de Rolle ou des valeurs intermédiaires, présenter des méthodes comme la comparaison série-intégrale, visualiser la tangente à une courbe ou le plan tangent à une surface.

En début d'épreuve, la lecture, la copie quasi intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale à l'oral du sujet constituent une perte de temps ; les membres du jury interrogent toujours en ayant l'énoncé de l'exercice, et les candidats sont invités à entrer d'emblée dans le vif du sujet.

### Utilisation du logiciel

Dans l'ensemble, la syntaxe de base du langage Python est bien maîtrisée ainsi que les rudiments d'algorithme nécessaires pour l'épreuve ce qui est un point positif. C'est moins vrai pour l'utilisation des outils d'ingénierie numérique. Sur ce point, le jury avait pour consigne d'être particulièrement disposé à faire preuve de pédagogie. Voici quelques conseils qui pourront aider les candidats dans leur préparation.

- Il convient de se familiariser avec l'environnement Pyzo ou Spyder avant de passer l'épreuve : télécharger le logiciel, repérer où sont l'éditeur et la console, comment les utiliser, être à même de n'exécuter qu'une partie de son script pour corriger une erreur ou obtenir de nouveaux résultats, savoir faire des aller-retour dans l'emploi de l'éditeur et de la console (l'usage de `print` n'est pas une fatalité).
- Il est recommandé aux futurs candidats d'être plus vigilants aux messages d'erreur renvoyés par le logiciel lors de l'exécution d'un script : ils peuvent permettre de corriger de nombreuses fautes de syntaxe ou de mieux comprendre l'utilisation des fonctions proposés dans l'aide Python. Il convient de prêter une attention toute particulière aux parenthèses. Il faut faire attention à ne pas commettre de fautes de frappe dans les imports si on emploie ceux mentionnés dans l'aide.
- Les feuilles d'aide sont disponibles sur le site du concours et peuvent permettre tout au long de l'année de préparation d'illustrer de manière concrète le cours de mathématiques. La différence est nette entre les candidats connaissant les fiches d'aide proposée par le concours et ceux les découvrant pendant la demi-heure de préparation.
- Il faut être vigilant sur les bornes dans les `range`, sur les initialisations des variables avant les boucles ainsi que les terminaisons des boucles `while`. Il faut aussi faire attention aux indentations et à la façon de tester une égalité. D'une manière générale, les candidats doivent avoir une idée de la complexité de leurs calculs.
- Les candidats semblent mieux sensibilisés aux problèmes liés à l'utilisation de nombres à virgule flottante. Rappelons que les calculs en Python sont soumis à des imprécisions dont il faut tenir compte dans l'interprétation des résultats.
- La programmation des suites définies par une relation de récurrence est généralement bien menée. On notera cependant la présence de candidats qui ont utilisé des fonctions récursives de complexité

exponentielle, ou des listes pour le stockage d'information alors qu'un dictionnaire permet d'avoir une meilleure complexité.

- Quand on demande une valeur numérique avec une certaine précision, il faut être capable de justifier que le résultat proposé respecte cette précision. C'est surtout le cas si on essaie de donner une estimation de la somme d'une série numérique (ce qui implique alors de majorer un reste).
- Les fonctions `quad` et `solve` ne s'emploient qu'avec des fonctions d'une variable. Si on veut les employer avec des fonctions dépendant d'autres paramètres, il faut alors les utiliser en définissant une fonction à l'intérieur d'une fonction. Cela a pu surprendre certains candidats, mais un exemple – qui concerne une intégrale à paramètre – est donné dans l'aide.
- Les tracés sont globalement maîtrisés. Les erreurs les plus fréquentes sur ce point sont d'employer la commande `plot` avec des listes n'ayant pas le même nombre de termes ou de confondre abscisse et ordonnée. La commande `show()` permet de faire afficher plusieurs tracés sur une même figure : attention le résultat peut être affiché dans une fenêtre en arrière-plan et bloquer le reste de l'exécution d'un script.  
Le jury regrette que les commentaires sur les graphiques obtenus soit aussi pauvres : c'est dommage car l'interprétation d'un graphique peut donner lieu à de nombreuses conjectures. Il faut que les candidats pensent à regarder les échelles sur les axes lors des sorties graphiques et pensent à les utiliser.
- Le jury est globalement satisfait de l'utilisation de la commande `odeint` pour les tracés de solution d'équation différentielle. Rappelons que le premier élément du tableau de temps `T` est celui sur lequel porte la condition initiale. Cela peut poser des difficultés quand on demande d'effectuer le tracé d'une solution d'une équation différentielle sur un intervalle  $I$  lorsque la condition initiale est prise en un temps situé à l'intérieur de  $I$ .
- La manipulation des tableaux `numpy` est globalement satisfaisante. Il est recommandé de savoir extraire des lignes ou des colonnes de tels tableaux. Certains candidats ignorent que le produit matriciel ne s'effectue pas grâce au symbole `*` ou `**` pour les puissances.
- L'utilisation du logiciel en algèbre linéaire demeure souvent délicate. L'utilisation du rang d'une matrice n'est pas souvent utilisée alors qu'elle permet de répondre simplement à de nombreuses questions. Trop de candidats n'ont pas compris ce que renvoie la commande `eig` du module `numpy.linalg` et en particulier ne savent pas extraire un vecteur propre associé à une valeur propre donnée (rappelons que ces vecteurs se lisent dans les colonnes de la seconde matrice renvoyée par la commande mentionnée ci-dessus et qu'un exemple montrant comment extraire un tel vecteur figure dans l'aide ).  
De plus, cette commande renvoie toujours un résultat même lorsqu'une matrice n'est pas diagonalisable. La commande `eig` ne permet donc pas de répondre simplement à la question de la diagonalisabilité d'une matrice connaissant ses valeurs propres, il faut en plus étudier la dimension des sous espaces propres (ce qui est assez simple en utilisant des rangs) ou encore utiliser un polynôme annulateur scindé à racines simples (et là encore, le logiciel peut faire le calcul).
- Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pose problème à une proportion non négligeable de candidats. Certains se lancent dans des calculs au tableau ou sur feuille, forcément fastidieux, alors que l'outil informatique est particulièrement indiqué dans ce cas. On peut conseiller au candidat pour arriver au résultat de bien décomposer les étapes de l'algorithme et d'avoir défini au préalable des fonctions calculant le produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
- En probabilités, les simulations numériques sont généralement bien menées. Cependant, peu de candidats pensent à citer la loi faible des grands nombres (ou Bienaymé-Tchebychev) pour justifier le fait qu'une moyenne de variables aléatoires indépendantes de même loi donne un résultat proche de

l'espérance avec une grande probabilité. On entend trop souvent que la moyenne est « plus ou moins » la définition de l'espérance.

## Analyse

Le cours de calcul différentiel est dorénavant dans son ensemble maîtrisé, cependant la partie **d) applications géométriques** du chapitre calcul différentiel est soit bien peu connue soit totalement ignorée. Ceci est dommage pour les réfractaires puisque d'une part les exercices portant sur cette partie sont souvent simples, proches du cours et devraient permettre aux candidats d'avoir une bonne note, d'autre part car il s'agit de connaissances transverses d'une grande importance dans les sciences.

La recherche de primitives usuelles n'est ni naturelle ni aisée pour beaucoup d'étudiants.

La maîtrise des développements limités est loin d'être acquise par tous les candidats. Rappelons que pour donner le développement limité d'une composée  $f \circ g$  de deux applications, on commence par celui de  $g$ .

La formule de Taylor avec reste intégral est mieux connue cette année il est important de comprendre l'efficacité de cette formule pour obtenir des résultats globaux (par exemple des inégalités).

La structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est parfois ignorée.

Les séries entières posent encore de grosses difficultés. Le jury rappelle aux candidats, que la règle de d'Alembert (revenue au programme) n'est pas le seul outil pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Très peu d'étudiants ont par exemple le réflexe de dire :  $(a_n)_{n \geq 0}$  est borné donc le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est supérieur ou égal à 1. Le lien entre les rayons de convergence de deux séries et ceux de leur série produit ou somme est très mal connu. Enfin la définition même du rayon de convergence n'est pas toujours connue.

Il est à noter des confusions fréquentes sur le vocabulaire : majorée, majorée en valeur absolue, bornée. Du reste les candidats omettent souvent les valeurs absolues, pourtant nécessaires lorsqu'il s'agit de montrer la convergence d'intégrales ou de séries. Dans  $\mathbf{C}$  l'omission du module conduit à des inégalités entre complexes.

Pour étudier une intégrale impropre, les étudiants ne regardent souvent que les bornes (même si c'est inutile) sans se demander au préalable sur quel domaine la fonction est continue ou continue par morceaux.

L'énoncé du théorème des valeurs intermédiaire est mal maîtrisé et pour de nombreux candidats et polluée par des hypothèses de monotonie.

L'égalité des accroissements finis est ignorée de beaucoup de candidats. Les deux théorèmes d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions au programmes sont de natures différentes : l'un s'applique à des fonctions définies sur un segment et nécessite la convergence uniforme, l'autre à des fonctions définies sur un intervalle quelconque et se contente d'une convergence simple de la série. Beaucoup de candidats mélangent ces deux résultats.

## Algèbre

Il est bon d'avoir à l'esprit l'hypothèse et la conclusion : en traduisant correctement l'une et l'autre, il n'y a parfois qu'un pas pour conclure.

Il est important de connaître les polynômes d'interpolation de Lagrange, notamment leur expression.

Il ne faut pas confondre somme directe et supplémentaire, et maîtriser la définition de  $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k$  souvent utilisée mais rarement comprise.

On note une faible utilisation et maîtrise du théorème du rang. Du reste la notion de rang et de rang d'une matrice est souvent floue et confuse chez les candidats.

Les manipulations élémentaires de matrices carrées d'ordre 2 ou 3 donnent parfois lieu à de grandes difficultés. Au delà des résultats théoriques, le jury attend des candidats une maîtrise technique dans des cas concrets et simples. Dans le même ordre d'idée, les matrices de rang un posent des problèmes aux candidats.

La définition géométrique d'une projection ou d'une symétrie, liée à la donnée de deux espaces supplémentaires, pose des problèmes à beaucoup de candidats. Le cas particulier des projections orthogonales et des symétries orthogonales n'est pas non plus toujours maîtrisé.

Dans le domaine de la réduction des endomorphismes, le polynôme caractéristique n'est pas l'alpha et l'oméga, l'existence d'un polynôme scindé à racines simples est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, un résultat très peu employé et parfois ignoré est qu'un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  est annulateur. L'expression des coefficients remarquables du polynôme caractéristique est floue chez trop de candidats.

Dans le chapitre sur les espaces euclidiens, il faut avoir compris l'efficacité des bases orthonormées, en particulier pour écrire les coordonnées d'un vecteur ainsi que l'expression du produit scalaire et se garder de généraliser cette expression dans une base quelconque. L'inégalité de Cauchy-Schwarz ne doit pas donner lieu à des hésitations.

## Probabilités

Le dénombrement est très insuffisamment maîtrisé par de nombreux candidats. Les futurs candidats sont invités à travailler ce point utile dans le cadre des probabilités uniformes.

Le chapitre des probabilités semble avoir un statut particulier pour les candidats qui oublient trop souvent les hypothèses des théorèmes employés : ainsi est-il difficile d'avoir celles de l'inégalité de Markov ou la définition d'un système complet d'événements.

Trop de candidats mélangent les objets probabilistes dont ils ont une vision très confuse et dont ils ignorent la définition précise. le jury conseille aux futurs candidats de bien assimiler les fondements de la discipline.

Il est préférable de ne pas commencer par une égalité de probabilités mais par une égalité entre événements. Ceci permet d'éviter les fréquentes confusions entre les différents objets en probabilités.

De nombreuses inversions des inégalités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que des étudiants n'ont pas réfléchi au sens de cette formule, pourtant cruciale.

Le jury note trop d'hésitations sur l'expression de la covariance.

## Conclusion

Le jury est, cette année encore, assez satisfait des résultats mais regrette un manque de connaissance précise du cours. Il note cependant qu'une grande majorité des candidats a compris les objectifs de ces épreuves : le jury n'est pas là pour piéger les candidats mais bien au contraire pour évaluer au mieux leurs connaissances.

De très bonnes prestations ont été réalisées par des candidats maîtrisant parfaitement les outils pratiques et théoriques mis à leur disposition. Le jury encourage tous les futurs candidats à utiliser de manière régulière l'outil informatique pour appréhender de manière plus concrète les notions théoriques étudiées en cours de mathématiques.