Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le thème général de cette année est celui de l'approximation des fonctions continues par des polynômes. Le problème proposait d'étudier pour une fonction continue sur un intervalle $f\colon I \to \mathbb{R}$ la convergence uniforme vers f des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de plus en plus dense de points de I.

Dans une première partie, on établit que les polynômes de Tchebychev réalisent le maximum de la norme sur $[-1,1]$ de la convergence uniforme parmi les polynômes unitaires de degré donné.

La deuxième partie approfondit l'étude de la norme de la convergence uniforme en donnant des majorations faisant intervenir les dérivées d'ordre supérieur. Ces majorations permettent d'établir la convergence uniforme de nombreux développements de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

La troisième partie donne une présentation du phénomène de Runge (1901). Pour une fonction continue $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ et pour des familles finies d'éléments de l'intervalle $[-1,1]$ de plus en plus denses, la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange de f peut ne pas converger uniformément vers f. L'exemple classique ici utilisé est celui de la courbe d'Agnesi $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha^2+x^2}$ pour un paramètre $\alpha > 0$ assez petit.

Le sujet fait ainsi appel à un large spectre de notions du programme de PC : polynômes et leurs racines, fonctions trigonométriques, primitives, intégrales généralisées, suites de fonctions, séries entières. De plus le problème imposait de retourner souvent à des résultats acquis plus haut dans le texte, demandant au candidat de garder une bonne vue d'ensemble de son travail.

Analyse globale des résultats

Les familles de points et les équations où elles interviennent requièrent un soin particulier de la part des candidats : indéxation, récurrence (ou non), bornes. Cela n'a pas toujours été le cas. On note par contre une bonne familiarité avec l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, familles libres, produit scalaire).

Comme l'année dernière, les principales faiblesses sont plutôt à rechercher dans le domaine de l'analyse. On a ainsi pu relever que les candidats peinent à justifier la convergence d'intégrale et se montrent souvent fort maladroits quant à l'utilisation des propriétés des séries entières. Même certaines questions élémentaires s'avèrent problématiques dans beaucoup de copies. Ici concrètement pour montrer que $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est $\mathcal{C}^\infty$, ou pour trouver une primitive de $t \mapsto \ln(\alpha^2+t^2)$. Ce type de questions qui furent des classiques paraissent négligées.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Dans ce qui suit nous commentons le traitement des questions en omettant les moins abordées.

I Étude de deux familles de polynômes

Q1. Quelques rares copies montrent une méconnaissance des critères à vérifier pour justifier qu'une fonction de deux variables est un produit scalaire. Trop de candidats pensent que les éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont de degré $n-1$ et en viennent à affirmer que si un polynôme de degré $n-1$ admet n racines, alors il est nul. Très peu de copies mentionnent le fait que $P \mapsto \big(P(a_1),\dots,P(a_n)\big)$ réalise une injection de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$, la somme des carrés fournissant un produit scalaire dans ce dernier.

Q2. Question presque classique pour la plupart des candidats.

Q3. Cette question et la précédente sont sans conteste les plus faciles de l'énoncé.

Q4. Attention, de même que toute matrice inversible n'est pas triangulaire, une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ n'est pas nécessairement en degrés échelonnés. Rappelons que comme le dit le programme de PCSI, « toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre ». Trop de candidats ont perdu du temps à le redémontrer.

Q5. L'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée en termes de produit scalaire est souvent redémontrée au prix d'une nouvelle perte de temps. Dans cette question et la précédente on fera attention à la différence entre « orthogonale » et « orthonormée ».

Q6. Une question beaucoup moins abordée que les précédentes et avec bien peu de succès. Il semble difficile pour les candidats de penser à considérer le terme de degré $n-1$ dans la formule de la question précédente. Quelques utilisations de la dérivée $(n-1)$-ème.

Q7. Un exercice très classique mais où seul un quart des copies donnent une solution correcte, la question des indices s'avérant souvent insurmontable. Notons qu'une preuve plus élémentaire est possible comme conséquence de la relation de Pascal $\binom{n}{2p} = \binom{n-1}{2p-1} + \binom{n-1}{2p}$ en mettant à part les cas $p=0$ et $2p=n$.

Q8. Trop de confusion entre terme de plus haut degré et coefficient du terme de plus haut degré. Rappelons qu'une somme de polynômes de degré n n'est pas forcément de degré n.

Q9. Une question presque classique, au moins dans sa forme. Si la plupart des copies présentent un début de récurrence, elles se perdent souvent dans des calculs trop compliqués, parfois fantaisistes avec des produits qui deviennent des sommes par exemple. La formule de Moivre parait bien mal connue.

Q10. Il est essentiel de montrer, au moins ici mais aussi plus loin à la question 13, que les réels considérés sont distincts.

Q11. Une question difficile mais relativement bien traitée par ceux (une moitié des candidats) qui l'ont abordée.

Q12. Question facile, au moins pour ceux qui n'en avaient pas été détournés par les précédentes.

Q13. Question technique pourtant souvent traitée, mais certains candidats se sont perdus en développant. Le fait que les z_k sont ordonnés et distincts est très rarement évoqué pour conclure, la question 10 semblant avoir joué ce rôle dans l'esprit de certains.

Q14. Une question difficile et qui demandait de compléter ce qui avait été fait à la question précédente (signe de $Q(z_k)$).

Q15. Des réponses très confuses. Certains candidats se sont égarés en voulant transformer Q en un polynôme de degré $n-2$. Certains candidats ont eu du mal à appliquer la question 6 avec un degré de plus.

II Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

Q16. L'idée de la récurrence est aperçue par la plupart des candidats mais une partie d'entre eux invoquent le théorème des valeurs intermédiaires. Ici encore il convenait de raisonner sur des points rangés en ordre croissant.

Q17. Une question abordée par seulement une moitié des candidats. Des traitements corrects mais le choix de K et le cas de $x = a_i$ sont souvent éludés cependant.

Q18. Beaucoup d'échec à cette question abordée par la moitié des candidats. Des erreurs sur le sup et la majoration de $|W(x)|$, ainsi que dans la manipulation des valeurs absolues. Trop de multiplications membre à membre d'inégalités où les signes des membres sont inconnus.

Q19. Beaucoup de candidats oublient de calculer M_n pour conclure.

Q20. Une question originale dont se sont détournés la plupart des candidats. Notons que la convergence uniforme sur tout borné des sommes partielles $s_n(x)$ du développement classique de $\exp(x)$, avec clairement $s_n(x) < \exp(x)$ pour tout $x > 0$, donnait le résultat demandé en considérant les polynômes $s'_n(x) = \exp(a_0)s_n(x - a_0)$ pour n'importe quel choix de $a_0 < a$.

Q21. À noter que beaucoup de candidats ont évoqué un développement en série entière sur $]-1, 1[$ pour justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La formule demandée ensuite provenait de la dérivation k fois de l'équation $g \circ \tan(t) = t$ pour $g = \arctan$ vérifiant $g' = f$. Quelle que soit la méthode, on voit de grosses erreurs de calcul, la plupart des candidats ne sachant pas dériver une composée de fonctions.

Q22. Une autre application presque immédiate du critère établi à la question 18, mais qui n'a été comprise que par très peu de candidats.

Q23. Un traitement correct dans l'ensemble.

Q24. Une question facile également mais moins abordée.

Q25. La difficulté de la question ne doit pas conduire à des arguments difficilement crédibles, comme de dire qu'une inégalité entre fonctions entraine la même inégalité entre leurs dérivéees ! Ici la dérivation des séries entières dans leur disque ouvert de convergence donnait facilement $\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leqslant \dfrac{C}{r^n} \sum_{k \geqslant n} \dbinom{k}{n} \left|\dfrac{x}{r}\right|^{k-n}$ par Q24 et on pouvait reconnaitre dans le $\sum$ le cas de $f = g$, puis appliquer Q23.

Q26. Une question délicate par son appel à la question 18, les candidats ayant en outre les plus grandes difficultés à majorer.

Q27. Même commentaire avec cette fois la question 8, la question n'étant que très peu abordée.

III Phénomène de Runge

Q30. Une des dernières questions très abordées (avec la suivante) mais avec un taux d'échec important. On doit ici déplorer à quel point l'existence d'une intégrale impropre s'avère un problème difficile dès qu'on s'écarte des cas les plus connus. Le fait que ce soit la borne 1 et non la borne 0 qui fasse problème apportant un supplément de déstabilisation. Mais on voit aussi tout simplement des candidats qui déclarent que f étant continue sur $[0, 1[$, elle y est intégrable. Des difficultés également dans le calcul de dérivée que certains ont tenté pour établir la décroissance. Notons que dans le cas présent une justification plus élémentaire était facile.

Q31. Une question relativement bien réussie.

Q32. Il est surprenant que si peu de candidats arrivent à calculer l'intégrale de $t \mapsto \ln(a^2 + t^2)$ entre 0 et 1. Ce n'est pas forcément l'intégration par partie qui fait problème, mais ensuite la primitive de $t \mapsto t^2/(a^2 + t^2)$. À l'inverse quelques candidats avouent sincèrement que leurs primitives sont fournies par la calculette autorisée.

Q33. Très peu de réussite (moins d'un candidat sur 10) à cette question qui demande a priori de retourner à la notion de limite et à prendre l'initiative de calculer la limite de J_α en 0^+. Noter qu'une approche plus élémentaire pouvait consister à noter la décroissance de $\alpha \mapsto J_\alpha$ (évidente dès la définition ou en Q31) et à évaluer quelques valeurs, $\alpha = 0{,}5$ convenant.

Q34. Si la comparaison des intégrales d'une fonction monotone et d'une fonction en escalier est connue, il fallait ici un peu de soin dans la gestion des indices. Cette question, placée loin dans l'énoncé, a été bien peu tentée alors qu'on pouvait attendre au moins une tentative de figure. On voit de fait très peu d'illustration graphique dans les copies, quelle que soit la question (cf. questions 13 et 16).

Q35. Le seul point difficile consiste à s'assurer que $\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$ tend bien vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci n'a été aperçu que par quelques dizaines de candidats.

Q36. Cette question par contre a été mieux comprise par les quelques candidats qui l'ont abordée.

Q37. L'argument le plus simple pour la parité de R_n demandait d'invoquer l'unicité des polynômes d'interpolation même si la définition de base du I pouvait donner le résultat au prix d'un peu plus d'effort.

Conclusion

Le sujet a permis de sonder très largement les connaissances des candidats. Comme on l'a dit plus haut, il en ressort que les principales faiblesses se situent dans le domaine de l'analyse.

Pour ce qui relève de la forme au sens large, on aimerait rappeler à nouveau cette année quelques points.

La *présentation* semble bien s'améliorer du fait de l'officialisation d'une minoration en cas de manquement grave. Par contre on ne saurait trop conseiller aux candidats d'user de *concision*. Moins peut être mieux. Un problème comme celui de cette année ne demande pas d'utiliser 8 copies doubles dont parfois beaucoup de pages blanches, ce type d'excès n'étant pas connu pour impressionner favorablement les correcteurs.

Plus important, on ne saurait trop insister à l'inverse sur la nécessité de *rédiger* ses arguments. La plupart des questions ne se résolvent pas par un simple calcul sans commentaire. Enfin la *sincérité* des calculs et des raisonnements ne devrait faire aucun doute, en particulier quand le résultat ou la conclusion de la question sont fournis par l'énoncé.