

Mathématiques

Présentation des épreuves

Informations communes aux épreuves 1 et 2

Les candidats patientent en salle d'attente et sont appelés par l'examineur à l'heure inscrite sur leur convocation, convocation qu'ils doivent lui présenter avec une pièce d'identité. Il est demandé aux candidats d'avoir un stylo personnel pour signer la liste d'émargement. Ce protocole n'a posé aucun problème, mais trop de candidats perdent beaucoup de temps à fermer leur sac, chercher leurs documents, éteindre leur téléphone (qui aurait dû être éteint dès l'entrée en salle d'attente) : l'oral dure 30 minutes, ainsi que la préparation s'il y a lieu, dès l'appel de leur nom ! À ce propos, il n'est donc pas convenable, ni très courtois, d'afficher devant l'examineur un compte à rebours de 30 minutes dès le début de la prise de parole.

De plus, l'heure de passage n'est pas flexible et un candidat arrivant en retard, même de quelques minutes, ne peut pas être accepté. Il convient donc que les candidats soient présents en avance en salle d'attente et prévoient le délai nécessaire pour éviter tout problème lié aux transports ou à la recherche des salles dans l'enceinte du bâtiment. Les incidents à ce sujet sont toutefois extrêmement rares.

Oral 1 de Mathématiques (sans préparation)

L'épreuve consiste en un oral de 30 minutes sans préparation. Le sujet est généralement composé de trois questions. Pour cette session 2023, la première question a consisté exclusivement en une question de cours « pur » : rappeler une définition, l'énoncé d'un théorème voire une courte démonstration ; les compétences de calcul ou de recherche sont mobilisées à partir de la deuxième question mettant en œuvre des mécanismes de difficulté raisonnable. La dernière question est plus ardue et nécessite une réflexion mathématique plus profonde. Compte tenu du niveau de difficulté de certaines questions, l'examineur propose des indications sans que le candidat en soit pénalisé. Ces indications sont normalisées sur chaque sujet, elles font partie intégrante de l'énoncé que possède chaque examinateur, même si le candidat n'y a pas accès sur le sujet qui lui est remis. Il faut donc bien comprendre que les sujets diffusés par les candidats sont transmis sous forme brute, sans indication, ce qui peut donner une vue déformée du déroulement de l'oral.

Oral 2 de mathématiques (avec Python)

Chaque épreuve consiste en un exercice unique, en général volontairement long. Signalons cependant qu'il n'est nullement nécessaire de résoudre l'exercice en totalité pour obtenir une excellente note. Les candidats disposent d'une demi-heure de préparation pendant laquelle ils ont un accès libre à **Python** *via* l'interface **Pyzo**. Pendant la demi-heure suivante, les résultats obtenus sur ordinateur sont discutés, tandis que la résolution des questions théoriques se fait au tableau. L'usage des outils informatiques est présent dans la totalité des sujets et une question est systématiquement placée vers le début de l'énoncé à cet effet.

Des documents d'aide (sous forme papier et numérique), fournis à tous les candidats et librement téléchargeables sur le site du concours Centrale-Supélec, présentent les fonctions des bibliothèques **numpy**, **scipy** et **matplotlib** qui pourront être utiles sans pour autant être exigibles. L'évaluation tient alors compte de la capacité des candidats à s'appropriier ces éléments, puis d'en analyser les résultats. Dans tous les cas, outre la maîtrise des connaissances théoriques, l'examineur prend grandement en compte dans son évaluation la qualité de communication du candidat.

Il est à noter qu'il s'agit avant tout d'une épreuve de mathématiques et non d'informatique. L'outil informatique n'est présent que pour conjecturer ou illustrer des résultats. La maîtrise de cet outil est évidemment prise en compte dans l'évaluation globale des candidats mais dans une part moindre que celle des compétences mathématiques. Néanmoins, un candidat ne faisant pas le moindre effort pour traiter les questions de programmation sera fortement pénalisé.

Analyse globale des résultats

Cette session 2023 a permis de constater une stabilisation du niveau des candidats après la période mouvementée due à la crise sanitaire de 2020, et somme toute un retour à la normale. Globalement, les candidats connaissent le format des épreuves, le temps de préparation, les exigences ; seul un nombre très faible de candidats échappe à cette constatation. S'il y a eu de très bonnes prestations, le jury note en 2023 une diminution sensible du nombre de candidats excellents. Le nombre de candidats très faibles semble constant.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Nous proposons ici quelques conseils afin de permettre aux candidats d'améliorer leur prestation.

Qualité de l'oral

Le jury est sensible aux prestations soignant la qualité de l'oral. On entend par là plusieurs choses.

La gestion de la parole. Un candidat mutique, qui écrit ses réponses au tableau, dos tourné, ne saurait laisser une bonne impression sur les compétences attendues. À l'inverse, un candidat trop volubile n'écrivant aucune étape dans ses raisonnements a vite fait de noyer l'examineur.

La réactivité est une compétence attendue lors de l'oral. Il s'agit d'écouter les remarques et conseils de l'examineur et de savoir rebondir sur ceux-ci. Le fait de couper la parole à l'examineur dès que ce dernier tente de mettre sur la voie un candidat en difficulté n'est pas évalué de façon positive. Cette situation s'est rencontrée quelquefois dans la session 2023, et a terni quelques oraux pourtant prometteurs.

Le choix du niveau de langue. Il convient de s'exprimer dans un français correct lors d'un oral, y compris en mathématiques. Le jury note une amélioration constante sur ce point, preuve que les candidats lisent les rapports. Il note en particulier un effort certain sur la limitation de l'expression « du coup » (ou sa variante « donc du coup »), mais souligne la recrudescence dommageable de la locution « on a que », comme dans « on a que f est paire », qui n'est pas grammaticalement correcte.

La précision du vocabulaire employé. Le pronom démonstratif « ça », par exemple, est vague, l'examineur n'est pas censé deviner ce qu'il recouvre quand le candidat énonce « ça converge ». De plus, dire qu'une série de fonctions converge est bien trop ambigu, puisqu'il existe plusieurs modes de convergence et que ce mode dépend de l'intervalle considéré. Enfin, nous rappelons qu'il convient de déterminer *une* et non *la* primitive d'une fonction continue sur un intervalle, qu'une fonction bornée n'a pas un seul majorant et qu'une matrice carrée n'est pas annulée par un seul polynôme.

Il serait également bon que les candidats connaissent l'alphabet grec : confondre Φ et Ψ , n'avoir aucune idée du nom de la lettre Ω , et appeler *ksi* (voire x) la lettre χ ne fait pas très bonne impression.

Stratégies pour un oral

En plus des connaissances mathématiques, on attend des candidats autonomie, réactivité, vivacité et interaction avec l'examineur. À connaissances équivalentes, il va de soi que la préférence du jury ira vers

un candidat dynamique et réactif plutôt que vers un candidat taciturne qui ne recherche pas l'interaction et ne suit pas les indications.

Il n'est pas pertinent de lire le sujet intégralement, voire de le recopier au tableau. L'examineur a le sujet sous les yeux, il s'agit donc de ne pas perdre de temps inutilement. Beaucoup de candidats pensent bien faire en présentant le sujet par « Ceci est un sujet d'algèbre », etc. Cette introduction est peut-être demandée dans d'autres disciplines, mais le jury de mathématiques n'en voit pas l'utilité.

Certains candidats, lorsqu'ils proposent une idée, attendent l'approbation de l'examineur avant de se lancer. Il faut savoir faire preuve d'initiative sans se faire « tenir la main » à chaque tentative.

Lorsque l'examineur émet un doute sur une partie d'un raisonnement en demandant « en êtes-vous sûr ? », c'est qu'il y a une erreur dans 99 % des cas. Pourtant, la réponse qui arrive le plus souvent chez de nombreux candidats est un « oui, je suis sûr » sans même avoir pris le temps de la réflexion. Ajoutons qu'une erreur relevée ne fait pas nécessairement baisser la note, à condition de prendre le temps de la rectifier convenablement : le droit à l'erreur existe, surtout pendant l'épreuve sans préparation. Néanmoins, les erreurs de calcul à répétition et la mauvaise maîtrise des règles concernant les exposants, les parenthèses, la factorisation sont évaluées en conséquence.

Le tableau est un outil essentiel de l'oral. Il ne s'agit ni d'un brouillon (nombre de candidats écrivent dans tous les sens possibles !) ni d'une copie. Il est en revanche apprécié que les éléments essentiels de logique s'y retrouvent (introduction des variables, symboles d'implication ou d'équivalence, quantificateurs, prédicat des récurrences). Par ailleurs, il serait bienvenu de penser à ne pas se tenir entre son texte et l'examineur.

Les candidats lisent parfois trop vite les sujets, surtout ceux de l'épreuve 1. Ne pas avoir lu que la première question était indépendante de la deuxième, se tromper sur ce qu'il faut démontrer, confondre une notation présentée dans le sujet avec une autre vue pendant l'année, entraînent des pertes de temps fâcheuses.

Le hors programme

Les examinateurs passent beaucoup de temps à élaborer des sujets calibrés et conformes au programme officiel, qui est nouveau pour cette session 2023. Il n'est donc pas souhaitable que les candidats fassent appel à des notions hors programme pour tenter de rendre triviale une question, ce qui serait de toute façon mal considéré : l'oral est avant tout une évaluation de réactivité et de réflexion. Le nouveau programme entré en vigueur cette année a réintroduit les notions de matrice symétrique positive et de norme subordonnée (entre autres). En conséquence, la tentation du hors programme est devenue beaucoup plus rare.

Compétences mathématiques

Le jury interroge systématiquement sur les définitions des objets rencontrés. Il s'agit donc d'être irréprochable sur les connaissances du cours telles que la démonstration de l'équivalence à la matrice J_r des matrices de rang r , ou celle de l'inégalité de Markov, tout comme la définition d'une variable aléatoire discrète ou celle d'une \mathbb{K} -algèbre.

Algèbre

Le cours d'algèbre linéaire de deuxième année est généralement bien maîtrisé. Si les polynômes d'endomorphismes sont toujours source de confusion ($P(u(x))$ en lieu et place de $P(u)(x)$, etc.), on peut constater qu'ils n'embarrassent que les candidats les plus faibles.

Sans conteste, les questions de cours portant sur les structures algébriques sont celles qui départagent significativement les bons candidats des plus faibles. La notion de \mathbb{K} -algèbre reste toujours mal comprise pour beaucoup de candidats : la relation de compatibilité $\lambda \cdot (a \times b) = (\lambda \cdot a) \times b = a \times (\lambda \cdot b)$ est

systématiquement oubliée. Pourtant c'est en partie grâce à elle que \times peut être qualifiée de bilinéaire, la distributivité ne suffisant pas. Les candidats ont peiné à expliquer pourquoi $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ)$ n'était pas un anneau. La notion d'idéal, pourtant très présente dans le cours d'algèbre générale et celui d'algèbre linéaire, n'a toujours pas été expliquée de façon satisfaisante cette année. Plus étonnant encore, les axiomes définissant la structure de groupe sont confondus avec le critère permettant de montrer qu'une partie d'un groupe est un sous-groupe.

Pour finir sur une note optimiste, le jury note que les candidats connaissent bien la définition des matrices symétriques positives ainsi que leur caractérisation spectrale.

Analyse

Comme toujours, les compétences en calcul ne sont pas toujours satisfaisantes. Si $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, l'expression factorielle de $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, que l'on note habituellement $\binom{\frac{1}{2}}{n}$, a amené des calculs longs et compliqués, montrant des lacunes graves telles que « $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) = 2 \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$ ». Ne pas voir de différence entre $\alpha - n + 1$ et $\alpha - (n + 1)$ est aussi problématique.

Dans le même ordre d'idée, des calculs basiques comme un produit de Cauchy, une interversion de sommes dont les bornes ne sont pas fixes, une décomposition en éléments simples de fractions rationnelles comportant des pôles autres que simples, la résolution d'une suite récurrente linéaire double, voire une étude de fonction élémentaire, ne sont pas bien maîtrisés ou sont bien trop lents.

La manipulation des inégalités est cruciale dans les applications du théorème de convergence dominée. C'est malheureusement l'occasion d'observer des lacunes sur la comparaison de réels : si les candidats connaissent bien, quand on leur rappelle, la règle

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left[(c \geq 0 \wedge a \leq b) \Rightarrow ac \leq bc \right],$$

ils ont du mal à voir qu'elle intervient pour majorer $\ln(x)e^{-(1+x^2)t^2}$ si x évolue dans un segment de \mathbb{R}_+^* .

L'étude des suites récurrentes, même simples (associées à une fonction croissante), est souvent extrêmement difficile : les candidats n'ont pas le réflexe de définir et d'étudier la fonction associée, les raisonnements sont souvent confus ou parcellaires, et le simple fait de demander une étude graphique succincte prend un temps déraisonnable.

Cette année, les questions demandant de définir la notion de rayon de convergence d'une série entière ont été mal traitées. Cette définition est le plus souvent confondue avec l'un des critères qui le caractérisent. Quand on invite les candidats à parler de borne supérieure, il n'est pas rare de voir des $\sup\{z \in \mathbb{C} \mid \dots\}$.

L'usage des nombres complexes en analyse pose parfois quelques problèmes, révélant des lacunes de première année : le module de $e^{i\theta}$, quand θ est réel, n'est pas évident pour certains candidats.

Le calcul différentiel reste une source de confusions pour les candidats, malgré son introduction *via* les fonctions de deux variables réelles en première année. Il a été par exemple difficile d'expliquer que la continuité de df n'avait aucun rapport avec celle de $df(a)$; certains candidats justifiaient donc la classe \mathcal{C}^1 d'une fonction f en disant que, pour tout a , $df(a)$ est continue car « linéaire en dimension finie ». La formule correcte de Taylor-Young à l'ordre 2 faisant intervenir la hessienne a rarement été obtenue.

De manière plus générale, demander une interprétation géométrique de notions élémentaires, tant en algèbre (isométries, projections orthogonales, angles et nombres complexes) qu'en analyse (gradient, convexité) laisse souvent les candidats sans réponse.

Probabilités

Le jury note cette année, comme pour la session 2022, un embarras plus présent que les sessions précédentes. Rares sont les candidats sachant définir le concept de variable aléatoire, de tribu, de probabilité : cette dernière est souvent comprise comme une fonction de l'univers dans $[0, 1]$.

Les candidats passent souvent à la limite pour des probabilités de réunions et d'intersections infinies en écrivant même des produits infinis sans penser à utiliser les théorèmes sur les suites monotones d'événements.

Lorsque des variables aléatoires suivent des lois usuelles (géométrique, binomiale), les candidats sont souvent en peine de le justifier précisément.

Rigueur dans l'exposé et l'écriture des mathématiques

Si un oral se prête davantage à un exposé écrit allégé au tableau, il convient de conserver une certaine rigueur dans l'utilisation des symboles mathématiques, et d'énoncer les définitions ou théorèmes dans une syntaxe correcte.

- Une définition ne saurait être restituée par « pour moi, une tribu, c'est quand on regarde les événements ».
- De même, un théorème ne se limite pas à sa conclusion seule.
- En analyse spécifiquement, les examinateurs doivent systématiquement demander les justifications permettant de faire les calculs (convergence, absolue convergence, indépendance de variables aléatoires, etc.) qui ne sont que très rarement données par les candidats sans injonction. Cela est évidemment pénalisant.
- La seule définition donnée par le programme officiel du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels r de \mathbb{R}_+ tels que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- Présenter les objets et quantifier une assertion est indispensable. Ainsi, quand on demande l'énoncé du théorème de Bézout, on obtient le plus souvent : « $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \wedge b = 1$. Alors $au + bv = 1$, avec $u, v \in \mathbb{Z}$ ». On voit ici que la préposition *avec* sert de joker pouvant jouer le rôle de \forall ou de \exists selon le contexte ; elle est donc à proscrire.
- Bien que d'une importance moindre, l'écriture « $\exists x \in E$ tel que (ou t.q.) $P(x)$ » n'est pas correcte : les quantificateurs ne sont pas des abréviations (page 6/36 du programme de MPSI). De même, l'écriture « $\forall x \in E$ on a $P(x)$ » n'est pas conforme. Il en va de même de « $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ».

Compétences informatiques

Comme depuis déjà quelques sessions, une grande majorité des candidats est bien au fait du format et des spécificités de l'épreuve de mathématiques-informatique. Nous regrettons cette année un nombre bien plus important de candidats n'ayant traité (ou même essayé de traiter) aucune question en **Python**, ce qui est comme toujours fortement sanctionné, tant dans l'évaluation que dans le temps imparti à l'exposé mathématique, puisqu'une part non négligeable de l'oral sera alors dévolue à essayer de programmer les premières questions de **Python**.

- Comme il est rappelé tous les ans depuis la création de l'épreuve, celle-ci est bien une épreuve de mathématiques. Les trente minutes de préparation ne doivent pas être intégralement passées à programmer, loin de là.
- Les candidats ont en général une assez bonne maîtrise de la syntaxe du langage **Python**, mais une part non négligeable d'entre eux ne teste pas son code pendant le temps de préparation : on passe

alors un temps précieux à déboguer des erreurs de syntaxe et des fautes de frappe au lieu de parler du fond du programme.

- Le jury note qu'une majorité de candidats ont de meilleures notions des complexités des algorithmes que les années précédentes. Cependant, la double récursivité inutile sévit encore. Pourtant, à la question « ne pourrait-on pas améliorer sa complexité ? », les candidats donnent souvent une réponse satisfaisante (« on pourrait mémoriser la fonction ») : que ne l'avaient-ils pas fait avant ?

Conclusion

Si le jury avait noté une légère baisse du niveau pour la session 2022, il note un léger mieux en 2023, ce qui est de bon augure. On remarque toutefois moins d'excellents candidats. Les questions de cours « pur » n'ont pas donné satisfaction : nous recommandons encore cette année un effort sur l'apprentissage du cours. Certaines prestations montrent que les candidats peuvent acquérir un haut niveau durant leur deux, voire trois, années de préparation, grâce à leur travail et l'implication de leurs professeurs qui les mènent au sommet. Nous espérons que ce rapport permettra aux candidats d'aborder les oraux de mathématiques en ayant clairement conscience des erreurs à éviter et de cerner ce qui leur permettra de se mettre en valeur.