Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le problème introduit la notion de produit infini et l'utilise pour obtenir divers résultats. On passe ainsi en revue de nombreux cas assez classiques de produits infinis qui illustrent bien la puissance du procédé.

La partie I contient des résultats préliminaires qui seront utilisés dans la suite. Elle aboutit à la limite
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$
L'exercice est relativement classique pour $z = 1$ mais ici z est un nombre complexe. Les questions sont en fait assez difficiles.

La partie II étudie le produit de Wallis, on calcule ainsi $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$. Elle se conclut par la démonstration du théorème de Borel-Cantelli.

La partie III est plus théorique, puisqu'on y donne des propriétés de convergence et dérivabilité de fonctions définies par des produits infinis $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x))$ sous les hypothèses de convergence uniforme des séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n|$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'}{1+f_n}$, cette dernière ayant vocation à être la dérivée logarithmique du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n)$.

La partie IV applique ce qui précède pour obtenir l'égalité
$$\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$
L'application n'est pas directe et passe par des questions assez techniques (partie IV.B). Elle se conclut par l'utilisation de la dérivée logarithmique pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

La partie V donne quelques premières applications à la fonction Γ, se terminant par la formule
$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}e^{\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$
en passant par l'égalité $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Analyse globale des résultats

S'agissant d'un sujet difficile dès les premières questions, seule une grosse dizaine de questions ont été traitées par une majorité d'étudiants, d'autres notamment la sous-partie IVB ne sont quasiment pas abordées.

Globalement, on peut regretter un gros manque de rigueur dans un grand nombre de copies. En particulier, les récurrences sont globalement mal rédigées, aussi bien dans l'énoncé initial de la proposition que dans la phase d'hérédité, sans parler de la phrase de conclusion, inexistante dans la plupart des copies.

De même des inégalités de base ne sont apparemment pas bien assimilées. Nous disons « apparemment » car il est bien souvent difficile de dire si le candidat fait un usage sincère de certaines formules dans le seul but d'obtenir le résultat demandé. La partie I et notamment la première question a donné lieu à des erreurs très nombreuses et a montré que l'inégalité triangulaire n'était pas maitrisée par les étudiants ou plutôt que ceux-ci préféraient faire comme s'ils avaient le résultat même si l'inégalité utilisée était clairement fausse. Cette attitude se retrouve régulièrement dans les copies, notamment quand il y a des égalités à démontrer avec des télescopages ou des égalités successives à prendre en compte. Les points de suspension font office de démonstration souvent sans les valeurs initiales (notamment dans les questions 7 et 8). On peut déplorer ce manque de rigueur. On peut aussi s'étonner de voir un problème de mathématiques implicitement réduit pour chaque question à une recherche de la formule donnant une solution immédiate.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I - Résultats préliminaires

I.A

Q1. Seulement 10 % de réussite, ce qui est rare pour une première question. Une récurrence est possible, de même que tranformer le produit en somme, mais les deux méthodes demandent du soin. On voit hélas plus souvent des formules du type $|a-b| \leqslant |a|-|b|$.

Q2. Le cas $n=1$ est bien maitrisé, encore faut-il convenablement l'articuler au cas général.

I.B

Q3. La question parait familière mais ne le serait vraiment que si t était réel. C'est le principal sujet de confusion, menant à une utilisation abusive du développement de Taylor ou de l'inégalité des accroissements finis.

Q4. La formule algébrique $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ est trop rarement évoquée, comme si le problème devait ne comporter que des considérations d'analyse. Ici encore l'inégalité des accroissements finis ne pourrait être évoquée que si on se ramenait à l'étude de la fonction d'une variable réelle $t \mapsto (a+t(b-a))^n$.

Q5. Une certaine réussite, avec toutefois des passages un peu rapides de $|e^z|$ à $e^{|z|}$ ainsi que des hésitations au sujet du max.

Q6. Question facile.

II - Exemples de calcul de produit infini

II.A

Q7. Ceux qui aperçoivent le télescopage des termes oublient souvent de considérer ensuite les rangs impairs dans le deuxième cas.

II.B

Q8. Un classique relativement bien connu. Des erreurs toutefois dans l'intégration par parties.

Q9. La puissante formule de Stirling est certes connue mais c'est la notion d'équivalent qui est finalement mal assimilée dans bien des cas. On voit beaucoup de $(n+1)^{n+1} \sim n^{n+1}$ (comme conséquence de $n+1 \sim n$) sans voir la contradiction avec la question 6.

II.C

Q10. Certains candidats ont mieux réussi cette question de probabilité même si le reste à l'ordre n de la série divergente est parfois considéré à tort.

Q11. La question n'est réussie que dans les meilleures copies. On voit beaucoup d'erreurs de raisonnement sur l'additivité, ou l'indépendance d'événements qui ne le sont pas.

III - Étude d'une fonction définie par un produit infini

III.A

De nombreux candidats ne voient pas l'utilité de la convergence uniforme pour montrer la continuité et peinent d'ailleurs à l'établir.

Q12. La continuité de R_0 est rarement aperçue. La difficulté de la question est évidemment que M ne doit dépendre ni de n ni de x.

Q13. Une question assez réussie mais des errreurs encore une fois sur l'inégalité triangulaire avec bien trop de $|P_n(x) - P_{n+1}(x)| \leqslant |P_n(x)| - |P_{n+1}(x)|$.

Q14. Une question souvent mal faite et mal comprise. La convergence uniforme est une notion qui pose de grandes difficultés.

Q15. On voit trop souvent l'argument que P est continue comme produit de fonctions continues. Repasser au logarithme semble ici contre-intuitif et de fait presqu'aucune copie ne montre que P ne s'annule pas.

III.B

Q16. La plupart des candidats ne comprend pas qu'il suffit de vérifier les conditions d'application de la sous-partie précédente.

Q17. Variations et limites sont en général convenablement devinées mais la justification complète est extrêmement rare.

III.C

Q18. Question correctement traitée.

Q19. Des réponses globalement confuses, comme à la question 14. Les candidats tentent de justifier leur propos par les termes « convergence uniforme » et « continuité » non sans un certain désordre. La confusion entre ce qui s'applique à une fonction et à une suite de fonctions est fréquente.

IV - Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A

Q20. Question généralement bien traitée mais de façon parfois maladroite. On ne remarque pas toujours qu'il s'agit de la partie réelle d'un élément de $\mathbb{C}[X]$. Le mot « coefficient dominant » est souvent absent.

Q21. Question peu abordée.

Q22. La « symétrie » des racines est rarement justifiée.

Q23. Question généralement bien traitée mais par un tiers des candidats seulement.

Q24. Une question assez facile mais peu traitée. On voit des logarithmes de nombres complexes. Certains candidats ne pensent pas à utiliser le début du problème.

IV.B et C

Des questions très peu abordées. Le théorème de la double limite (**Q29.**) n'aura eu qu'une poignée d'utilisateurs. La partie suivante semble alors jouer un rôle de rattrapage.

V - Autour de la fonction Γ

V.A

Q32. La domination n'est pas toujours bien définie. De plus l'argument demande de séparer les cas $t \geqslant 1$ et $0 < t \leqslant 1$, ce dernier étant souvent oublié.

Q33. Une question assez bien traitée, ce qui est rare pour une question située si loin dans l'énoncé : un candidat sur trois a la moyenne des points à cette question. On voit tout de même rarement traitée la question de la convergence de l'intégrale en 0.

Q34. Une question plus technique où la culture des candidats a sans doute joué un rôle. Des erreurs communes : domination par une fonction dépendant de n, absence de justification de la domination. La définition de la suite de fonctions avec une fonction indicatrice n'apparait que dans les bonnes copies.

Q35. Peu abordée mais bien réussie. La persévérance est récompensée.

V.B

Seule la question 37 est régulièrement abordée, mais elle n'est que partiellement réalisée. La majorité des candidats n'obtient pas mieux que l'encadrement $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$ et s'en contente pour conclure.

Conclusion

Notons que dans beaucoup de questions la difficulté était de mêler technicité algébrique et intuition analytique. Les étudiants paraissent particulièrement maladroits lorsqu'il faut ainsi combiner des parties du programme relativement éloignées.

La difficulté du sujet a dès lors produit des copies moins longues qu'à l'accoutumée, minorant certains défauts relevés les années précédentes.