画像工学特論課題 2

1次元データのフーリエ変換

エネルギー環境システム専攻修士課程1年 26213167
和田拓弥

(1) DFT

与えられた3つの1次元データ， Data 1, Data 2, Data 3について可視化したものを以下に示す.

入力 [1]:

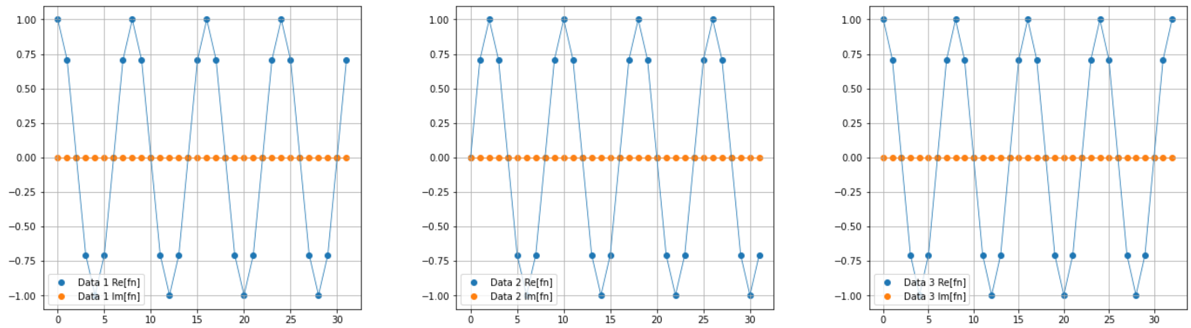
```
# import library
%matplotlib inline
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
```

入力 [2]:

```
# read data
data1 = pd.read_csv("data1.csv", delimiter=',')
data2 = pd.read_csv("data2.csv", delimiter=',')
data3 = pd.read_csv("data3.csv", delimiter=',')
```

入力 [3]:

```
# graph data
fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=3, sharex=False, figsize=(22.0, 6.0))
plt.subplots_adjust(wspace=0.3)

axes[0].plot(data1["x_n"], data1["Re{f_n}"], linewidth=0.8)
axes[1].plot(data2["x_n"], data2["Re{f_n}"], linewidth=0.8)
axes[2].plot(data3["x_n"], data3["Re{f_n}"], linewidth=0.8)

axes[0].scatter(data1["x_n"], data1["Re{f_n}"], label="Data 1 Re[fn]")
axes[1].scatter(data2["x_n"], data2["Re{f_n}"], label="Data 2 Re[fn]")
axes[2].scatter(data3["x_n"], data3["Re{f_n}"], label="Data 3 Re[fn]")

axes[0].plot(data1["x_n"], data1["Im{f_n}"], linewidth=0.8)
axes[1].plot(data2["x_n"], data2["Im{f_n}"], linewidth=0.8)
axes[2].plot(data3["x_n"], data3["Im{f_n}"], linewidth=0.8)

axes[0].scatter(data1["x_n"], data1["Im{f_n}"], label="Data 1 Im[fn]")
axes[1].scatter(data2["x_n"], data2["Im{f_n}"], label="Data 2 Im[fn]")
axes[2].scatter(data3["x_n"], data3["Im{f_n}"], label="Data 3 Im[fn]")

axes[0].legend(loc='lower left', fontsize=10)
axes[1].legend(loc='lower left', fontsize=10)
axes[2].legend(loc='lower left', fontsize=10)

axes[0].grid()
axes[1].grid()
axes[2].grid()

plt.show()
```



Data 1, Data 2, Data 3について，これらは全て4周期ほどの周期関数であり，Data 1, Data 2はそれぞれ波長が8で位相差が90°，Data 3はData 1に1点加わり，始点と終点のデータの重複がある．

これらについて，以下で定義した離散フーリエ変換(以下DFT)を行った．

$$F_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-i\frac{2\pi nm}{N})$$

ここでF_mの実部と虚部は別々に計算し，$\exp(-i\frac{2\pi nm}{N})$ は nm を N で割った N 通りの余りを格納した配列について，予め計算することより処理負荷を低減した． また，波数 k_m は以下のように定義した．

$$k_m = \frac{2\pi nm}{N\Delta x}$$

入力 [4]:

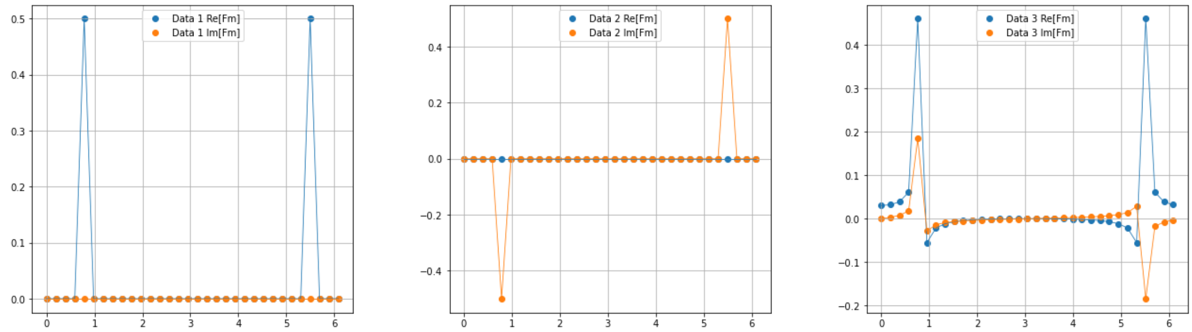
```
# define DFT function
def dft(data, mode="dft"):
    N = len(data.iloc[:, 0])
    L = (data.iloc[1, 0] - data.iloc[0, 0]) * N

    ReFm = [0] * N
    ImFm = [0] * N

    dk = 2 * np.pi / L
    km = [dk * m for m in range(N)]

    ReWp = [np.cos(2 * np.pi * n / N) for n in range(N)]
    ImWp = [np.sin(2 * np.pi * n / N) for n in range(N)]

    if mode == "dft":
        for m in range(N):
            for n in range(N):
                ReFm[m] += data.iloc[n, 1] * ReWp[(n * m) % N] + data.iloc[n, 2] * ImWp[(n * m) % N]
                ImFm[m] += -data.iloc[n, 1] * ImWp[(n * m) % N] + data.iloc[n, 2] * ReWp[(n * m) % N]
            ReFm[m] /= N
            ImFm[m] /= N

    elif mode == "idft":
        for m in range(N):
            for n in range(N):
                ReFm[m] += data.iloc[n, 1] * ReWp[(n * m) % N] - data.iloc[n, 2] * ImWp[(n * m) % N]
                ImFm[m] += data.iloc[n, 1] * ImWp[(n * m) % N] + data.iloc[n, 2] * ReWp[(n * m) % N]

    return km, ReFm, ImFm
```

入力 [5]:

```
# DFT calculation
km1, ReFm1, ImFm1 = dft(data1)
km2, ReFm2, ImFm2 = dft(data2)
km3, ReFm3, ImFm3 = dft(data3)
```

入力 [6]:

```
# graph DFT results
fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=3, sharex=False, figsize=(22.0, 6.0))
plt.subplots_adjust(wspace=0.3)

axes[0].plot(km1, ReFm1, linewidth=0.8)
axes[1].plot(km2, ReFm2, linewidth=0.8)
axes[2].plot(km3, ReFm3, linewidth=0.8)

axes[0].scatter(km1, ReFm1, label="Data 1 Re[Fm]")
axes[1].scatter(km2, ReFm2, label="Data 2 Re[Fm]")
axes[2].scatter(km3, ReFm3, label="Data 3 Re[Fm]")

axes[0].plot(km1, ImFm1, linewidth=0.8)
axes[1].plot(km2, ImFm2, linewidth=0.8)
axes[2].plot(km3, ImFm3, linewidth=0.8)

axes[0].scatter(km1, ImFm1, label="Data 1 Im[Fm]")
axes[1].scatter(km2, ImFm2, label="Data 2 Im[Fm]")
axes[2].scatter(km3, ImFm3, label="Data 3 Im[Fm]")

axes[0].legend(loc='upper center', fontsize=10)
axes[1].legend(loc='upper center', fontsize=10)
axes[2].legend(loc='upper center', fontsize=10)

axes[0].grid()
axes[1].grid()
axes[2].grid()

plt.show()
```



上図はそれぞれのデータに対するDFTの結果を示したグラフである． Data 1, Data 2の結果を比べた際，ともに $k_m = 0.79, 5.50$ にピークを有する結果が得られた．ピーク値については正負の違いはあるものの，ともに大きさ0.5のピークを有する． この結果から，Data 1とData 2が同じ周期性を有することがわかる．

データの周期性について，偶関数であれば実部に正のピークが，奇関数であれば虚部に正負の異なるピークが表れる結果が得られるが，単にデータの周期性を判断する際には，$k_m < \frac{k_N}{2}$ の範囲において，以下で定義されるパワースペクトルに注目すれば十分である．

$$S(k) = \mathrm{Re}[F_m]^2 + \mathrm{Im}[F_m]^2$$

データの重複があるData 3については，$N\Delta x$ が周期の整数倍と一致しないため，ピーク近傍に誤差としてその影響が表れている．

(2) 逆DFT

Data 2に関するDFTの結果に対して，以下で定義した逆フーリエ変換(以下IDFT)を行った．なおプログラムは先程のDFTの計算過程で既に実装している．

$$f_n = \sum_{n=0}^{N-1} F_m \exp(i\frac{2\pi nm}{N})$$

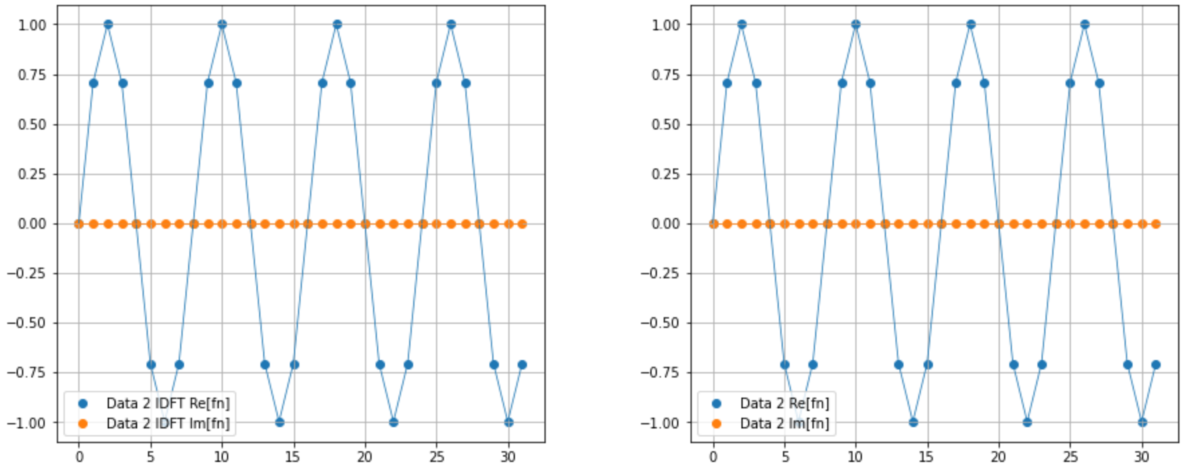
$$x_n = \frac{2\pi n}{N\Delta k}$$

入力 [7]:

```
# set Data 2 DFT result
data2_DFT = pd.DataFrame(
    {'k_m': km2,
     'Re{F_m}': ReFm2,
     'Im{F_m}': ImFm2}
)

# IDFT calculation
xn2, Refn2, Imfn2 = dft(data2_DFT, mode="idft")
```

入力 [8]:

```
# graph IDFT result
fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, sharex=False, figsize=(15.0, 6.0))
plt.subplots_adjust(wspace=0.3)

axes[0].plot(xn2, Refn2, linewidth=0.8)
axes[1].plot(data2["x_n"], data2["Re{f_n}"], linewidth=0.8)

axes[0].scatter(xn2, Refn2, label="Data 2 IDFT Re[fn]")
axes[1].scatter(data2["x_n"], data2["Re{f_n}"], label="Data 2 Re[fn]")

axes[0].plot(xn2, Imfn2, linewidth=0.8)
axes[1].plot(data2["x_n"], data2["Im{f_n}"], linewidth=0.8)

axes[0].scatter(xn2, Imfn2, label="Data 2 IDFT Im[fn]")
axes[1].scatter(data2["x_n"], data2["Im{f_n}"], label="Data 2 Im[fn]")

axes[0].legend(loc='lower left', fontsize=10)
axes[1].legend(loc='lower left', fontsize=10)

axes[0].grid()
axes[1].grid()

plt.show()
```



上図の結果は，Data2についてIDFTを行った結果と元のデータを示したものである． 上図より元の周期関数が再現されたことがわかる．

(3) DFTを用いた補間

上記のData 2にDFTしたものを，さらにIDFTにより内部補間した結果を示す．ここで補間後の実空間のデータ数は条件より元のデータ数32の4倍である128である．

サンプリング定理から波数 k_m について，

$$k_m \leq \frac{\pi}{\Delta x}$$

今回は補間により Δx が $\frac{1}{4}$ 倍となることから k_m も4倍にする必要がある． ここで波数空間は実空間とは異なりピークが立つ位置，すなわち波数自体の値に意味がある．故に必要な波数成分を残しつつ，高周波側にゼロの値を持つ配列を作成することでこれを達成した． 具体的な配列操作については，元の波数配列について中央

に必要格納数を満たす配列を新たに追加した.

入力 [9]:

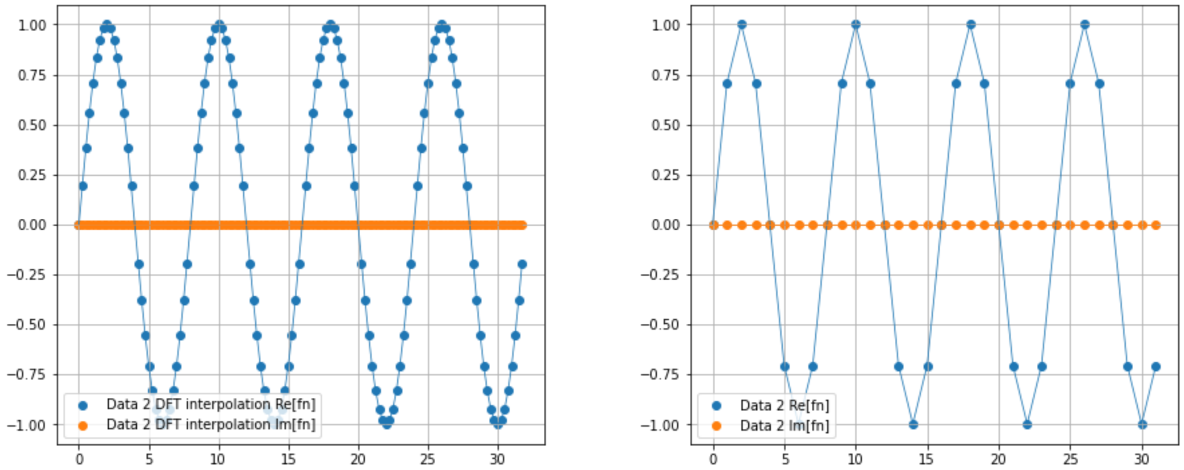
```
# define DFT interpolation function
def dft_interpolate(data):
    N = len(data.iloc[:, 0]) * 4
    dx = data.iloc[1, 0] - data.iloc[0, 0]

    xn = np.linspace(data.iloc[0, 0], data.iloc[-1, 0] + dx, N + 1)[:-1]

    Refn = [0] * N
    Imfn = [0] * N

    _ReFm2 = [0] * N
    _ImFm2 = [0] * N

    ReWp = [np.cos(2 * np.pi * n / N) for n in range(N)]
    ImWp = [np.sin(2 * np.pi * n / N) for n in range(N)]

    _, _ReFm, _ImFm = dft(data)

    _ReFm2[:int(N / 4 / 2)], _ReFm2[N - int(N / 4 / 2):] = _ReFm[:int(N / 4 / 2)], _ReFm[int(N / 4 / 2):]
    _ImFm2[:int(N / 4 / 2)], _ImFm2[N - int(N / 4 / 2):] = _ImFm[:int(N / 4 / 2)], _ImFm[int(N / 4 / 2):]

    for m in range(N):
        for n in range(N):
            Refn[m] += _ReFm2[n] * ReWp[(n * m) % N] - _ImFm2[n] * ImWp[(n * m) % N]
            Imfn[m] += _ReFm2[n] * ImWp[(n * m) % N] + _ImFm2[n] * ReWp[(n * m) % N]

    return xn, Refn, Imfn
```

入力 [10]:

```
# DFT interpolation
xn2_i, Refn2_i, Imfn2_i = dft_interpolate(data2)
```

入力 [11]:

```
# graph DFT interpolation result
fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, sharex=False, figsize=(15.0, 6.0))
plt.subplots_adjust(wspace=0.3)

axes[0].plot(xn2_i, Refn2_i, linewidth=0.8)
axes[1].plot(data2["x_n"], data2["Re{f_n}"], linewidth=0.8)

axes[0].scatter(xn2_i, Refn2_i, label="Data 2 DFT interpolation Re[fn]")
axes[1].scatter(data2["x_n"], data2["Re{f_n}"], label="Data 2 Re[fn]")

axes[0].plot(xn2_i, Imfn2_i, linewidth=0.8)
axes[1].plot(data2["x_n"], data2["Im{f_n}"], linewidth=0.8)

axes[0].scatter(xn2_i, Imfn2_i, label="Data 2 DFT interpolation Im[fn]")
axes[1].scatter(data2["x_n"], data2["Im{f_n}"], label="Data 2 Im[fn]")

axes[0].legend(loc='lower left', fontsize=10)
axes[1].legend(loc='lower left', fontsize=10)

axes[0].grid()
axes[1].grid()

plt.show()
```



入力 [11]: