ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

Численное решение уравнений с частными производными методом конечных разностей

Оператор конечных разностей
Основная идея (суть) метода сеток
Замена дифференциального уравнения разностным
Устойчивость решения
Методы решения систем линейных алгебраических уравнений
Неустранимая погрешность при решении СЛАУ
Число обусловленности матрицы

Постановка задачи Дирихле. Найти функцию $U(x,y)$, которая внутри некоторой плоской области G удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

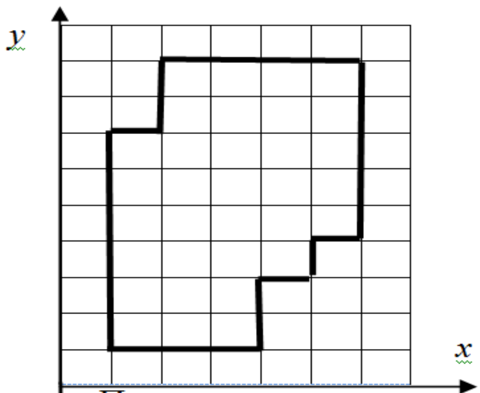
а на границе области Γ условию

$$U(x,y)\big|_{\Gamma}=f(x,y), \tag{2}$$

где $f(x,y)-$ заданная непрерывная функция.

Решение задачи $U(x,y)$ *описывает распространение тепла внутри области* G *при известной температуре* $f(x,y)$ *на границе области.*

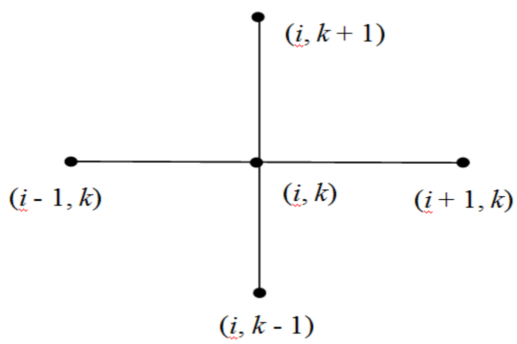
Метод сеток, или метод конечных разностей, является одним из самых распространенных методов численного решения уравнений математической физики. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными выражениями. Найдем приближенное решение уравнения Лапласа методом сеток. Проведем прямые $x=ih$, $y=kh$, где h − выбранный шаг сетки; $i,k-$ целые числа. Заменяем область G сеткой, а границу области Γ замкнутой ломаной линией Γ^*



Построение сетки

Точки пересечения прямых называются *узлами*. Значения неизвестной функции $U(x,y)$ в узлах сетки обозначим $U_{i,k}=U\left(x_i,y_k\right)=U(ih,kh)$.

Узел называется *внутренним*, если он принадлежит области G. Узел считается *граничным*, если он не является внутренним. Каждый граничный узел должен иметь среди четырех соседних узлов хотя бы один внутренний, иначе он исключается из сетки.



В каждом узле границы Γ^* зададим значение функции $f(x, y)$, равное значению функции $f(x, y)$ в ближайшей точке границы Γ. При этом в граничных узлах $U(B_k) = U(B) = f(B)$.

Значения неизвестной функции будем рассматривать только в узлах сетки, которые принадлежат $G + \Gamma^*$.

В каждом внутреннем узле заменим частные производные конечно-разностными выражениями

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\, y=kh} = \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2};$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\, y=kh} = \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h^2}.$$

Подставим в уравнение (1) и сократим на h^2:

$$U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k} + U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1} = 0.$$

Получаем систему (конечно-разностные уравнения) вида

$$U_{i,k} = \frac{1}{4}\left(U_{i-1,k} + U_{i+1,k} + U_{i,k-1} + U_{i,k+1}\right). \tag{3}$$

Количество уравнений системы (3) равно количеству неизвестных и равно количеству внутренних узлов. Система (3) совместна и имеет единственное решение, которое дает приближенное значение решения $U(x, y)$.

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным оценивается неравенством $\left|R_{i,k}\right| \le \frac{h^2}{6} \max_G \left\{\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right\}$.

Погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, складывается из трех погрешностей:

- *погрешности замены ДУ разностным;*
- *погрешности аппроксимации краевых условий;*
- *погрешности, получаемой в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.*

Задание. Применяя метод сеток, найти решение уравнения Лапласа (1) внутри области G, ограниченной кривой Γ:

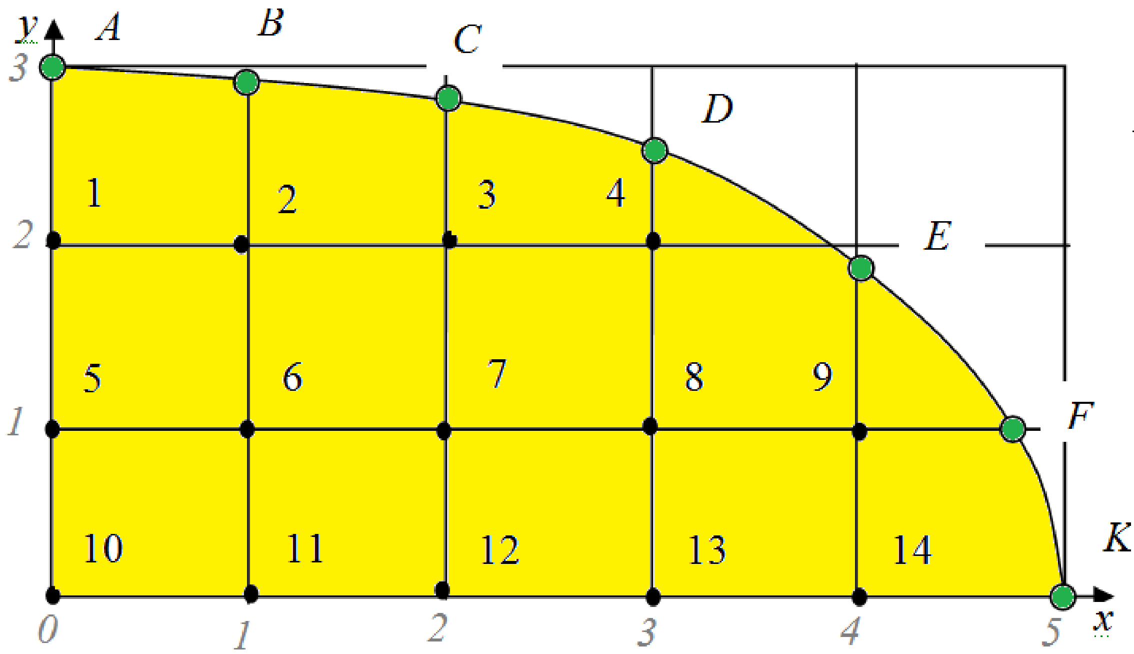
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \tag{4}$$

если на границе Γ решение удовлетворяет условию

$$U(x, y)\big|_{\Gamma} = 0{,}5|x| + |y|. \tag{5}$$

Решение.

Так как область симметрична относительно начала координат, найдем решение только в первой четверти. Возьмем шаг $h = 1$ и построим сетку, которая покрывает область, ограниченную эллипсом.



$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,$$

первая четверть

на границе

$$U(x,y)|_{\Gamma}=0{,}5|x|+|y|.$$

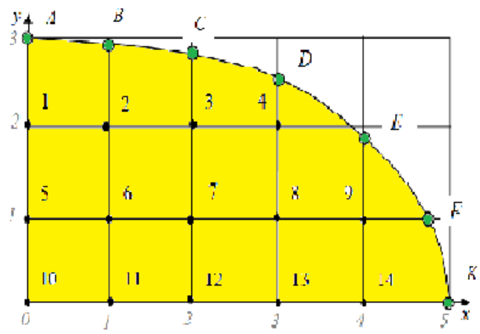
Внутренние узлы занумерованы, граничные обозначены буквами.

Вычислим значения функции $U(x,y)$ в обозначенных граничных точках сетки. Полученные значения поместим в таблицу.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Граничные условия**							
2	Точки	A	B	C	D	E	F	K
3	x	0	1	2	3	4	4,714	5
4	y	3	2,9394	2,7495	2,4	1,8	1	0
5	$U(x,y)\|_{\Gamma}$	3	3,4394	3,7495	3,9	3,8	3,357	2,5
6								

Например, для точки C имеем $x=2$, а соответствующее неизвестное значение y найдем из условия (4), пользуясь в Excel формулой =3*КОРЕНЬ(1-D3*D3/25), значение функции $U(x,y)$ в этой точке =0,5*ABS(D3)+ABS(D4).

Составим конечно-разностные уравнения (3) (*помним о симметрии области*)



$$U_1=\frac{1}{4}[U(A)+2U_2+U_5]=\frac{1}{4}(3+2U_2+U_5);$$

$$U_2=\frac{1}{4}[U(B)+U_1+U_3+U_6]=\frac{1}{4}(3{,}4394+U_1+U_3+U_6);$$

$$U_3=\frac{1}{4}[U(C)+U_2+U_4+U_7]=\frac{1}{4}(3{,}7495+U_2+U_4+U_7);$$

$$U_4=\frac{1}{4}[U(D)+U_3+U(E)+U_8]=\frac{1}{4}(7{,}7+U_3+U_8);$$

$$U_5=\frac{1}{4}(U_1+2U_6+U_{10});$$

$$U_6=\frac{1}{4}(U_2+U_5+U_7+U_{11})$$

$$U_7=\frac{1}{4}(U_3+U_6+U_8+U_{12})$$

$$U_8=\frac{1}{4}(U_4+U_7+U_9+U_{13});$$

$$U_9=\frac{1}{4}[U(F)+U_8+U(E)+U_{14}]=\frac{1}{4}(7{,}157+U_8+U_{14});$$

$$U_{10}=\frac{1}{4}(2U_5+2U_{11});$$

$$U_{11}=\frac{1}{4}(2U_6+U_{10}+U_{12});$$

$$U_{12} = \frac{1}{4}\left(2U_7 + U_{11} + U_{13}\right); \qquad U_{14} = \frac{1}{4}\left[2U_9 + U_{13} + U(K)\right] = \frac{1}{4}\left(2{,}5 + 2U_9 + U_{13}\right).$$

$$U_{13} = \frac{1}{4}\left(2U_8 + U_{12} + U_{14}\right);$$

Слагаемые, содержащие неизвестные переменные, запишем слева, а свободные члены справа. В результате получим систему алгебраических уравнений, которую решим матричным методом по формуле $X = A^{-1}B$.

В нашем случае матрица A − матрица коэффициентов при неизвестных − записана в диапазоне ячеек A9:N22, матрица B − столбец свободных членов − записана в ячейках P9:P22

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
7	**Коэффициенты при неизвестных**															**Св. члены**	
8	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14			
9	1	-0,5	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0,750	
10	-0,25	1	-0,25	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0	0	0		0,860	
11	0	-0,25	1	-0,25	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0	0		0,937	
12	0	0	-0,25	1	0	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0		1,925	
13	-0,25	0	0	0	1	-0,5	0	0	0	-0,25	0	0	0	0		0,000	
14	0	-0,25	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0	0	-0,25	0	0	0		0,000	
15	0	0	-0,25	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0	0	-0,25	0	0		0,000	
16	0	0	0	-0,25	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0	0	-0,25	0		0,000	
17	0	0	0	0	0	0	0	-0,25	1	0	0	0	0	-0,25		1,789	
18	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	0	1	-0,5	0	0	0		0,000	
19	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0		0,000	
20	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1	-0,25	0		0,000	
21	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1	-0,25		0,000	
22	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1		0,625	
23																	

Замечание. Вообще говоря, непосредственное решение системы при большом числе узлов оказывается слишком громоздким. На практике более удобны итерационные методы решения, которые учитывают специальный вид таких систем и оказываются удобными для реализации на ЭВМ.

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Выделим область соответствующего размера (диапазон A25:N38) для записи обратной матрицы. Вызовем формулу массива

$$f_x \rightarrow \textit{Математические} \rightarrow \textit{МОБР} \rightarrow \textit{ОК}.$$

Зададим адреса матрицы A A8:N22 и нажмем Ctrl + Shift + Enter для выполнения действия.

Умножим матрицу A^{-1} на B и результат запишем в ячейках P25:P38. Для этого выделим диапазон ячеек P25:P38. Вызовем формулу массива

$$f_x \rightarrow \textit{Математические} \rightarrow \textit{МУМНОЖ} \rightarrow \textit{ОК}.$$

Зададим адреса перемножаемых матриц A25:N38 и P9:P22 и нажмем Ctrl + Shift + Enter для выполнения действия.

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
24	**Обратная матрица**															**Решение**	
25	1,505	1,176	0,524	0,222	0,844	1,170	0,697	0,365	0,133	0,351	0,559	0,365	0,204	0,084		3,350	U1
26	0,588	1,767	0,702	0,277	0,584	1,191	0,765	0,407	0,148	0,279	0,532	0,379	0,220	0,092		3,475	U2
27	0,262	0,702	1,527	0,513	0,345	0,759	0,893	0,525	0,186	0,180	0,375	0,380	0,254	0,110		3,621	U3
28	0,111	0,277	0,513	1,282	0,167	0,375	0,492	0,616	0,210	0,091	0,197	0,232	0,240	0,113		3,718	U4
29	0,844	1,169	0,690	0,334	2,208	2,297	1,259	0,645	0,238	0,845	1,172	0,701	0,375	0,153		3,449	U5
30	0,585	1,191	0,759	0,375	1,148	2,837	1,469	0,739	0,271	0,586	1,195	0,771	0,421	0,173		3,489	U6
31	0,349	0,765	0,893	0,492	0,629	1,469	2,315	1,076	0,387	0,350	0,770	0,910	0,555	0,236		3,543	U7
32	0,182	0,407	0,525	0,616	0,323	0,739	1,076	1,941	0,656	0,184	0,414	0,550	0,708	0,341		3,552	U8
33	0,067	0,148	0,186	0,210	0,119	0,271	0,387	0,656	1,377	0,069	0,157	0,217	0,324	0,425		3,486	U9
34	0,702	1,117	0,720	0,364	1,690	2,343	1,399	0,737	0,275	1,857	1,739	0,898	0,454	0,182		3,469	U10
35	0,559	1,064	0,750	0,395	1,172	2,390	1,539	0,829	0,313	0,869	2,306	1,095	0,534	0,212		3,489	U11
36	0,365	0,758	0,761	0,465	0,701	1,543	1,820	1,099	0,434	0,449	1,095	1,938	0,839	0,318		3,509	U12
37	0,204	0,439	0,508	0,481	0,375	0,842	1,111	1,416	0,649	0,227	0,534	0,839	1,711	0,590		3,462	U13
38	0,084	0,184	0,220	0,225	0,153	0,346	0,471	0,682	0,851	0,091	0,212	0,318	0,590	1,360		3,233	U14
39																	
40						**Приближенное решение задачи**											
41						3	3,44	3,75	3,9								
42						3,35	3,48	3,62	3,72	3,8							
43						3,45	3,49	3,54	3,55	3,49	3,36						
44						3,47	3,49	3,51	3,46	3,23	2,5						
45																	

Приближенное решение задачи записано в ячейках F41:K44, причем граничные значения выделены цветом.

О неустранимой погрешности при решении линейных систем

Известно, что источниками неустранимой погрешности являются не только округления при выполнении машинных операций, но также ошибки, содержащиеся в исходных данных.

Обусловленность линейного ограниченного оператора

Определение. Пусть A – линейный ограниченный оператор и существует обратный (линейный) ограниченный оператор A^{-1}, причем операторы A и A^{-1} определены в нормированных пространствах. Тогда

$$\boxed{\mu_A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|}.$$

*называется **числом обусловленности матрицы** A.*

Эта величина определяет, насколько сильно погрешности входных данных могут повлиять на решение операторного уравнения. Грубо говоря, чем меньше число обусловленности, тем лучших результатов следует ожидать при приближенном решении операторного уравнения.

Если значение μ_A является умеренным ($\mu_A \sim 1 \div 10$), то ошибки входных данных слабо сказываются на решении и система в этом случае называется ***хорошо обусловленной***. Если μ_A велико ($\mu_A \geq 10^3$), то система ***плохо обусловлена***, решение ее сильно зависит от ошибок в правых частях и коэффициентах.

О нормах матриц смотри материал в ТЕМЕ 2.

Норма матрицы, определенная как *максимум сумм модулей элементов строк матрицы*

$$\|A\|_c = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (6)$$

является согласованной и подчиненной равномерной норме вектора $\|\bar{x}\|_c = \max_{i=1,n} |x_i|$, определенной как максимум модулей компонент.

Норма матрицы, определенная как *максимум сумм модулей элементов столбцов* $\|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ является согласованной и подчиненной норме вектора $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, определенной как сумма модулей компонент (норме Минковского).

Для рассматриваемого задания число обусловленности матрицы A по норме (6) равно $\mu_A = 7{,}239$. Следовательно, система хорошо обусловлена.