Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Дисциплина «Математическое программирование»

Отчёт по лабораторной работе №3

Студент: Лобанов В. Д.

ФИТ 2 курс 3 группа

Минск 2023

**Задание №2**

Для определения нижней границы множества воспользуемся операцией редукции или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент.  
di = min(j) dij

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 10 | 26 | M | 5 | 5 |
| **2** | 5 | M | 20 | 63 | 79 | 5 |
| **3** | 7 | 15 | M | 86 | 54 | 7 |
| **4** | 22 | 53 | 20 | M | 15 | 15 |
| **5** | 98 | 71 | 52 | 18 | M | 18 |

Затем вычитаем di из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 5 | 21 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 15 | 58 | 74 |
| **3** | 0 | 8 | M | 79 | 47 |
| **4** | 7 | 38 | 5 | M | 0 |
| **5** | 80 | 53 | 34 | 0 | M |

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:  
dj = min(i) dij

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 5 | 21 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 15 | 58 | 74 |
| **3** | 0 | 8 | M | 79 | 47 |
| **4** | 7 | 38 | 5 | M | 0 |
| **5** | 80 | 53 | 34 | 0 | M |
| dj | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины di и dj называются константами приведения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 0 | 16 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 10 | 58 | 74 |
| **3** | 0 | 3 | M | 79 | 47 |
| **4** | 7 | 33 | 0 | M | 0 |
| **5** | 80 | 48 | 29 | 0 | M |

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:  
H=∑di +∑dj  
H=5+5+7+15+18+0+5+5+0+0=60  
Элементы матрицы dij соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j.  
Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей nxn с неотрицательными элементами dij ≥ 0  
Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город.

Длина маршрута определяется выражением:  
F(Mk)=∑dij

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом dij.

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 0(3) | 16 | M | 0(0) | 0 |
| **2** | 0(10) | M | 10 | 58 | 74 | 10 |
| **3** | 0(3) | 3 | M | 79 | 47 | 3 |
| **4** | 7 | 33 | 0(10) | M | 0(0) | 0 |
| **5** | 80 | 48 | 29 | **0(87)** | M | 29 |
| dj | 0 | 3 | 10 | 58 | 0 | 0 |

d(1,2) = 0 + 3 = 3; d(1,5) = 0 + 0 = 0; d(2,1) = 10 + 0 = 10; d(3,1) = 3 + 0 = 3; d(4,3) = 0 + 10 = 10; d(4,5) = 0 + 0 = 0; d(5,4) = 29 + 58 = 87;  
Наибольшая сумма констант приведения равна (29 + 58) = 87 для ребра (5,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества (5,4) и (5\*,4\*).  
Исключение ребра (5,4) проводим путем замены элемента d54 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 16 | M | 0 | 0 |
| **2** | 0 | M | 10 | 58 | 74 | 0 |
| **3** | 0 | 3 | M | 79 | 47 | 0 |
| **4** | 7 | 33 | 0 | M | 0 | 0 |
| **5** | 80 | 48 | 29 | M | M | 29 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 58 | 0 | 87 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(5\*,4\*)=60+87=147  
Включение ребра (5,4) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d45 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла. В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** |  | di |
| **1** | M | 0 | 16 | 0 |  | 0 |
| **2** | 0 | M | 10 | 74 |  | 0 |
| **3** | 0 | 3 | M | 47 |  | 0 |
| **4** | 7 | 33 | 0 | M |  | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di +∑dj =0  
Нижняя граница подмножества (5,4) равна:

H(5,4)=60+0=60≤147  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (5,4) меньше, чем подмножества (5\*,4\*), то ребро (5,4) включаем в маршрут с новой границей H =60  
Определяем ребро ветвления.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | M | 0(3) | 16 | **0(47)** | 0 |
| **2** | 0(10) | M | 10 | 74 | 10 |
| **3** | 0(3) | 3 | M | 47 | 3 |
| **4** | 7 | 33 | 0(17) | M | 7 |
| dj | 0 | 3 | 10 | 47 | 0 |

d(1,2) = 0 + 3 = 3; d(1,5) = 0 + 47 = 47; d(2,1) = 10 + 0 = 10; d(3,1) = 3 + 0 = 3; d(4,3)=7+10=17;  
Наибольшая сумма констант приведения равна (0 + 47) = 47 для ребра (1,5).

Исключение ребра (1,5).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | M | 0 | 16 | M | 0 |
| **2** | 0 | M | 10 | 74 | 0 |
| **3** | 0 | 3 | M | 47 | 0 |
| **4** | 7 | 33 | 0 | M | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 47 | 47 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(1\*,5\*) = 60 + 47 = 107  
Включение ребра (1,5) проводится путем исключения всех элементов 1-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент d51 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла. В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 0 | M | 10 | 0 |
| **3** | 0 | 3 | M | 0 |
| **4** | 7 | 33 | 0 | 0 |
| dj | 0 | 3 | 0 | 3 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di +∑dj =3  
Нижняя граница подмножества (1,5) равна:  
H(1,5)=60+3=63≤107  
Чтобы исключить подциклы, запретим следующие переходы: (4,1),  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (1,5) меньше, чем подмножества (1\*,5\*), то ребро (1,5) включаем в маршрут с новой границей H =63

Определяем ребро ветвления.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 0(10) | M | 10 | 10 |
| **3** | 0(0) | 0(30) | M | 0 |
| **4** | M | 30 | **0(40)** | 30 |
| dj | 0 | 30 | 10 | 0 |

d(2,1) = 10 + 0 = 10; d(3,1) = 0 + 0 = 0; d(3,2) = 0 + 30 = 30; d(4,3) = 30 + 10 = 40;  
Наибольшая сумма констант приведения равна (30 + 10) = 40 для ребра (4,3).  
Исключение ребра (4,3).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 0 | M | 10 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | M | 0 |
| **4** | M | 30 | M | 30 |
| dj | 0 | 0 | 10 | 40 |

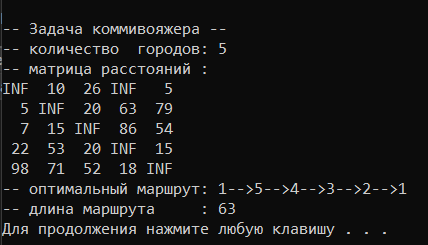
Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(4\*,3\*)=63+40=103  
Включение ребра (4,3) проводится путем исключения всех элементов 4-ой строки и 3-го столбца, в которой элемент d34 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла. В результате получим другую сокращенную матрицу (2 x 2), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | di |
| **2** | 0 | M | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di +∑dj =0  
Нижняя граница подмножества (4,3) равна:  
H(4,3)=63+0=63≤103  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (4,3) меньше, чем подмножества (4\*,3\*), то ребро (4,3) включаем в маршрут с новой границей H =63  
В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (2,1) и (3,2). В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:  
(5,4),(4,3),(3,2),(2,1),(1,5). Длина маршрута равна F(Mk) = 63

**Задание №2**

Проверка правильности решения:



**Вывод**: Мы освоили общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решили задачу о коммивояжере данным методом, сравнили полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.