

# Peubah acak ganda

Friday, 25 October 2024 07:38

- Fungsi  $p(x, y)$  dikatakan fungsi massa peluang bersama dari peubah acak diskret  $X$  dan  $Y$  jika:

- $0 \leq p(x, y) \leq 1$  untuk  $\forall (x, y)$

- $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$

- Untuk  $(x, y) \in A$

$$P[(x, y) \in A] = \sum_{(x, y) \in A} p(x, y)$$

- Fungsi massa peluang marginal bagi peubah acak  $X$  diperoleh dari menjumlahkan  $p(x, y)$  pada semua nilai  $y$ :

$$g(x) = \sum_y p(x, y)$$

- Fungsi massa peluang marginal bagi peubah acak  $Y$ :

$$h(y) = \sum_x p(x, y)$$

## Ilustrasi fmp-ganda

### Ilustrasi 1:

Dari sebuah kotak yang berisi 3 bola merah, 4 bola putih, dan 5 bola biru diambil 2 bola secara acak. Jika  $X$  dan  $Y$  menunjukkan masing-masing adalah banyaknya bola merah dan putih yang terambil. Tentukan:

- Fungsi massa peluang bersama dari  $X$  dan  $Y$
- Fungsi peluang marginal bagi  $X$
- Fungsi peluang marginal bagi  $Y$
- $P(X \leq 1, Y \leq 1)$

c. Fungsi marginal  $Y$

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$h(y) = P(Y = y)$
		0	1	2	
$y$	0	$\frac{10}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{3}{66}$	$\frac{28}{66}$
	1	$\frac{20}{66}$	$\frac{12}{66}$	0	$\frac{32}{66}$
	2	$\frac{6}{66}$	0	0	$\frac{6}{66}$
$g(x) = P(X = x)$		$\frac{36}{66}$	$\frac{27}{66}$	$\frac{3}{66}$	1

b. Fungsi marginal  $X$

6

Contoh Soal Acak Ganda

Soal Peluang Ganda

$$P(M, P) \Rightarrow P(0, 0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{4}{0} \binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{10}{66}$$

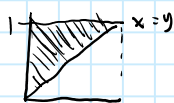
$y \backslash x$	0	1	2
0			
1		0	
2		0	0

Fungsi marginal:

$$g(x) = \begin{cases} \sum_y f(x, y), & \text{diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, & \text{kontinu} \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \sum_x f(x, y), & \text{diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx, & \text{kontinu} \end{cases}$$

$$p(y, x) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$$h(y) = \int_0^y 10xy^2 dx = \left( 5y^2x^2 \right)_0^y = 5y^4$$

$$f(x|y=1/2) = \frac{10xy^2}{5y^4} = \frac{2x}{y^2} = 8x$$

$$P\left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \mid y = \frac{1}{2}\right) = \int_{1/3}^{1/2} 8x dx = \left( 4x^2 \right)_{1/3}^{1/2} = 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{9}$$

Fungsi marginal

$$g(x) = \begin{cases} \sum_y f(x, y) & \text{diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy & \text{kontinu} \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \sum_x f(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \end{cases}$$

## FUNGSI KEPEKATAN PELUANG BERSAMA

- Fungsi  $f(x, y)$  merupakan fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak kontinu  $X$  dan  $Y$ , jika:

- $0 \leq f(x, y) \leq 1$  untuk  $\forall(x, y)$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

- Untuk  $(x, y) \in A$

$$P[(x, y) \in A] = \iint_{(x, y) \in A} f(x, y) dx dy$$

- Fungsi sebaran (kumulatif):

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) ds dt$$

- Fungsi kepadatan marginal** untuk  $X$  diperoleh dengan integrasi  $f(x, y)$  terhadap semua nilai  $y$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

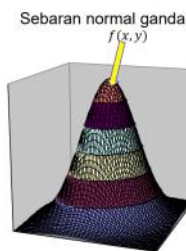
- Fungsi kepadatan marginal** untuk  $Y$  diperoleh dengan integrasi  $f(x, y)$  terhadap semua nilai  $x$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

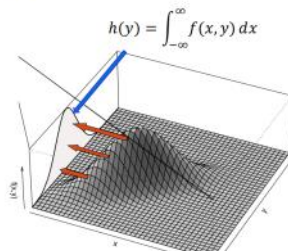
Sebaran Peubah Acak Ganda

Anik Djuraidah

### Fkp bersama dan marginal



Sebaran Peubah Acak Ganda



Anik Djuraidah

## SEBARAN PELUANG BERSYARAT

- Jika  $X$  dan  $Y$  adalah **peubah acak diskret** dengan fmp bersama  $p(x, y)$ , maka fmp bersyarat  $X$  pada  $Y = y$ :

$$P(X = x|y) = \frac{p(x, y)}{h(y)}$$

dengan  $h(y)$  adalah fmp marginal bagi  $Y$  dan  $h(y) > 0$

- Fmp bersyarat  $Y$  pada  $X = x$ :

$$P(Y = y|x) = \frac{p(x, y)}{g(x)}$$

dengan  $g(x)$  adalah fmp marginal bagi  $X$  dan  $g(x) > 0$

- Jika  $X$  dan  $Y$  adalah **peubah acak kontinu** dengan fkp bersama  $f(x, y)$ , maka fkp bersyarat  $X$  pada  $Y = y$ :

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$

dengan  $h(y)$  adalah fkp marginal bagi  $Y$  dan  $h(y) > 0$

- Fkp bersyarat  $Y$  pada  $X = x$ :

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

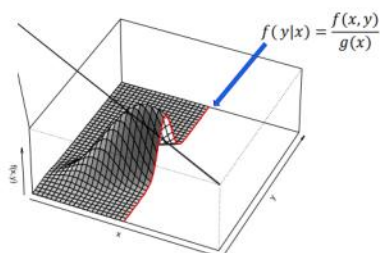
dengan  $g(x)$  adalah fkp marginal bagi  $X$  dan  $g(x) > 0$

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_a^b f(x, y) dy}$$

Sebaran Peubah Acak Ganda

Anik Djuraidah

### Fungsi kepadatan bersyarat (kontinu)



## PEUBAH ACAK SALING BEBAS

- Misalkan peubah acak **diskret**  $(X, Y)$  mempunyai fmp bersama  $p(x, y)$ , dan fmp marginal bagi  $X$  dan  $Y$  berturut-turut  $g(x)$  dan  $h(y)$ .

- Peubah acak  $X$  dan  $Y$  disebut bebas jika dan hanya jika:

$$p(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

untuk  $\forall(x, y)$

- Misalkan peubah acak **kontinu**  $(X, Y)$  mempunyai fkp bersama  $f(x, y)$ , dan fkp marginal bagi  $X$  dan  $Y$  berturut-turut  $g(x)$  dan  $h(y)$ .

- Peubah acak  $X$  dan  $Y$  disebut bebas jika dan hanya jika:

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

untuk  $\forall(x, y)$

untuk  $f(x, y)$

$$E(x) = \sum_{x} \sum_{y} x f(x, y)$$

$$= \iint x f(x, y) dx dy$$

$$E(x) = \sum_x \sum_y x f(x, y) \quad \text{diskrit}$$

$$\iint x f(x, y) dy dx \quad \text{kontinu}$$

$$E(x|y) = \sum_{x} x f(x|y) \quad E(y|x) = \sum_{y} y f(y|x)$$

$$= \int x f(x|y) dx \quad = \int y f(y|x) dy$$

$\rho(x, y)$  = korelasi (density)

$\text{cov}(x, y)$  = Covarian (spread)

$$\text{cov}(x, y) = E[xy] - E[x]E[y]$$

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}}$$

$$\text{Var}(x) = \mu^2 - E[x^2]$$

$$E(x) = \iint x f(x, y) dy dx$$

covarian

$$\text{cov}(x, y) = E[xy] - E[x] \cdot E[y]$$

$$\text{Var}(x) = \mu^2 - E[x^2]$$

korelasi

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}}$$

5. Suatu toko makanan sehat menjual dua merk beras merah (misalkan merk A dan merk B).

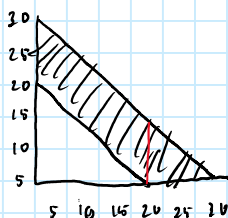
Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya stok (kg) merk A dan Y menyatakan banyaknya stok (kg) merk B dan mempunyai sebaran peluang bersama sebagai berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{untuk } 20 \leq x + y \leq 30, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{untuk } (x, y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

a) Gambarkan daerah fungsi  $f(x, y)$  dan tentukan nilai  $k$ .

b) Tentukan peluang stok beras merah merk B lebih kecil dari merk A, yaitu  $P(Y < X)$ .

a)  $20 \leq x + y \leq 30 \rightarrow y \leq 30 - x$  dan  $y \geq 20 - x$



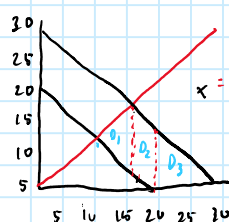
$$k \left( \int_0^{20} \int_{20-x}^{30-x} xy dy dx + \int_{20}^{30} \int_0^{30-x} xy dy dx \right) = 1$$

$$k \left( \frac{70000}{3} + 3750 \right) = 1$$

$$k \cdot \frac{81250}{3} = 1$$

$$k = \frac{3}{81250}$$

b)  $P(Y < X)$



Walid Nadirul Ahnaf  
66401231109

$$D_1: 10 \leq x \leq 15$$

$$20 - x \leq y \leq x$$

$$\int_{10}^{15} \int_{20-x}^x xy dy dx$$

$$D_2: 15 \leq x \leq 20$$

$$20 - x \leq y \leq 30 - x$$

$$\int_{15}^{20} \int_{20-x}^{30-x} xy dy dx$$

$$D_3: 20 \leq x \leq 30$$

$$0 \leq y \leq 30 - x$$

$$\int_{20}^{30} \int_0^{30-x} xy dy dx$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{10}^{15} \int_{20-x}^x \frac{3}{81250} (xy) dy dx + \int_{15}^{20} \int_{20-x}^{30-x} \frac{3}{81250} (xy) dy dx + \int_{20}^{30} \int_0^{30-x} \frac{3}{81250} (xy) dy dx \\
 & \frac{8}{65} + \frac{31}{130} + \frac{9}{65} = \frac{16+31+18}{130} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Diketahui p.a. X dan Y mempunyai fungsi massa peluang bersama berikut:

y \ x	1	2	3	
1	2/36	2/36	3/36	7/36
2	1/36	10/36	3/36	14/36
3	4/36	5/36	6/36	15/36
	7/36	17/36	14/36	

- Apakah p.a X dan Y saling bebas?
- Hitung Cov(X,Y)

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$E(X) = \sum_x \sum_y x \cdot p(x,y)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \left( \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + 3 \left( \frac{4}{36} \right) \right) + 2 \left( \frac{2}{36} + \frac{10}{36} + 3 \left( \frac{5}{36} \right) \right) \\
 &\quad + 3 \left( \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + 6 \left( \frac{6}{36} \right) \right)
 \end{aligned}$$