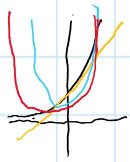
BAB 14 : rangkuman metode differensial euler dan heun

Saat pembuatan rangkuman dan pembahasan ini, belum ada materi tentang runge-kutta baik di class mau pun di archive

Review deret taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3$$



x_r : nilai x pada iterasi ke r
x_{r+1} : nilai x satu iterasi setelah r
y_r : nilai y pada iterasi ke r
y_{r+1} : nilai y satu iterasi setelah r

$x_{r+1} = x_r + h$
↳ besar perbedaan antara nilai

Perubahan deret taylor ke rumus umum gradien (turunan)

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{y'(x_r)}{1}(x_{r+1} - x_r) + \frac{y''(t)}{2}(x_{r+1} - x_r)^2, \quad x_r \le t \le x_{r+1}$$

$$y'(x_r) = \frac{y(x_{r+1}) - y(x_r)}{x_{r+1} - x_r}$$

bentuk baku :
$y' = f(x_r, y_r)$
$h = x_{r+1} - x_r$
$y(x_r) = y_r$
$y(x_{r+1}) = y_{r+1}$

$f(x_r, y_r) = \frac{y_{r+1} - y_r}{h}$
$h f(x_r, y_r) = y_{r+1} - y_r$
$y^{(0)}_{r+1} = y_r + h f(x_r, y_r)$ euler
↳ mengaproximasi nilai turunan

hasil turunan pakai euler

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}\left[f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y^{(0)}_{r+1})\right] \quad \text{heun}$$

↳ memperkecil galat dari metode euler

5. **[20 Poin]** Diketahui PDB

$y' = \frac{xy+2y}{x^2+x}$, dan diketahui pula pada bentuk baku $y = f(x)$, fungsi tersebut memiliki nilai y= 0, jika diberikan x = 0, dan nilai y = 1 jika diberikan x = 1

a. Tentukan nilai $y(0.1)$, dengan sebelumnya mengkonversi terlebih dahulu PDB di atas ke dalam bentuk umum/baku $y = f(x)$

b. Gunakan metode ***Heun*** untuk menghitung $y(0.1)$ dengan ukuran langkah h=0.05 (2 iterasi, dimulai dari x=1)

c. Perlihatkan galat dari hasil nomor b, bila dibandingkan dengan hasil eksak/aktual pada nomor a. berikan kesimpulan Anda

•> $h = -0.05$

$n = \frac{0,1 - 1}{-0,05} = \frac{-0.9}{-0.05} = 18$

$x_0 = 1$
$x_1 = 0,95$
$x_2 = 0.90$
$\vdots$
$x_{18} = 0.1$

•> $y(0,95) = y(1) - h\left(\frac{1 \cdot y(1) + 2y(1)}{1^2 + 1}\right)$

- Dalam hal ini, $f(x, y) = x + y$, dan penerapan metode Euler pada PDB tersebut menjadi

$$y_{r+1} = y_r + 0.05(x_r + y_r)$$

Langkah-langkah:

$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$x_1 = 0.05 \rightarrow y_1 = y_0 + 0.05(x_0 + y_0) = 1 + (0.05)(0 + 1)$
$= 1.0050$

$x_2 = 0.10 \rightarrow y_2 = y_1 + 0.05(x_1 + y_1) = 1.0050 +$
$(0.05)(0.05 + 1.0050) = 1.05775$

Jadi, $y(0.10) \approx 1.05775$.
Bandingkan dengan nilai solusi sejatinya,
$y(0.10) = 1.1103$
sehingga galatnya adalah = 1.1103 - 1.05775 = 0.05255

$\cdot\!>$ $h = 0.05$
$x_0 = 0$
$x_1 = 0.05$
$x_2 = 0.1$
$y(0) = 1$

$\cdot\!>$ $y_1^{eul} = y_0 + h(x_0 + y_0)$
$= 1 + 0.05(0+1)$
$= 1.05$

$\rightarrow$ $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[x_0 + y_0 + x_1 + y_1]$
$= 1 + 0.025(1 + 0.05 + 1.05)$
$= 1.0525$

$y_2 = 1.0525 + 0.05(0.05 + 1.0525)$
$= 1.107625$

$\rightarrow$ $y_2 = 1.0525 + 0.025(0.05 + 1.0525 + 0.1 + 1.107625)$
$= 1.1102513$

$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$\cdot\!>$ $k_1 = h(x_0 + y_0)$
$= 0.05(0+1) = 0.05$

$\cdot\!>$ $k_2 = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_1}{2})$
$= 0.05(0.025 + 1 + 0.025$
$= .05375$

$\cdot\!>$ $k_3 = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_2}{2}$
$= 0.05(0.025 + 1 +$
$= 0.05259375$

$\cdot\!>$ $k_4 = h(x_0 + h + y_0 + k_3)$
$= 0.05(0.05 + 1 + .05259375)$
$= 0.055130$

$\cdot\!>$ $y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left[\begin{array}{l} .05 + 2(.05375) \\ +2(.052599) + .055130 \end{array}\right]$
$= 1.529909$

$x_1 = 0.05$
$y_1 = 1.529909$

$\cdot\!>$ $k_1 = h(x_1 + y_1)$
$= .05(.05 + 1.529909)$
$= 0.078720$

$\cdot\!>$ $k_2 = h(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{k_1}{2})$
$= .05(.075 + 1.529909 + \frac{.078720}{2}$
$= 0.081938$

$\cdot\!>$ $k_3 = h(x_1 + \frac{h}{2} + y_1 + \frac{k_2}{2})$
$= .05(.075 + 1.529909 + \frac{.081938}{2}$
$= 0.082019$

$\cdot\!>$ $k_4 = h(x_1 + h + y_1 + k_3)$
$= 0.05(0.1 + 1.529909 + .082019)$
$= 0.0853219$

$$\Rightarrow \quad y(0.1) = 1.529909 + \frac{1}{6}\left(\begin{matrix} .078720 + 2(.081938) \\ 2(.082019) + .085322 \end{matrix} \right)$$