تمرين شامل حول المجاميع و الجداءات في المتتاليات العددية :

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_0 = 2$$
$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

١) أحسب $u_1 \cdot u_2$

٢) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب: $v_n = u_n + 1$.

- بين أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n.
- أحسب بدلالة n مايلي :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$$

$$P''_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times v_n$$

$$P''_n = v^2_0 + v^2_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v^2_n$$

$$S_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sqrt{v_n}$$

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n}$$

الحل :

١) **حساب** $u_1 \cdot u_2$

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 5$$
$$u_2 = 2u_1 + 1 = 11$$

٢) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب: $v_n = u_n + 1$.

- اثبات أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

+ (v_n) اذا و فقط اذا كان $v_{n+1} = qv_n$

+ لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية اساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 2 + 1 = 3$.

- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n.

➢ $v_n = 3 \times 2^n$

➢ $u_n = v_n - 1 = 3 \times 2^n - 1$

حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$

$$S_n = 3\left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right) = -3\left(1 - 2^{n+1}\right) = -3 + 6 \times 2^n$$

- حساب بدلالة n المجموع

$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$$

نعلم أن : $v_n = u_n + 1$ و منه $u_n = v_n - 1$ اذن :

اي أن :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 - 1 \\ + \\ u_1 = v_1 - 1 \\ + \\ . \\ . \\ . \\ + \\ u_n = v_n - 1 \end{cases}$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n \underbrace{-1 - 1 \ldots\ldots - 1}_{n+1 \text{ مـــرة}}$$

اذن :

$$S'_n = S_n + (-1)(n+1)$$
$$S'_n = S_n - n - 1 \cdot$$

- حساب $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times v_n$

لحساب هذا الجداء نكتب كل الحدود بدلالة الحد الأول و الأساس :

$$P_n = v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (v_0 \times q^n)$$

$$P_n = \underbrace{v_0 \times v_0 \times \ldots\ldots\ldots \times v_0}_{n+1 \text{ مـــرة}} \times \left[q \times q^2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times q^n\right]$$

$$P_n = (v_0)^{n+1} \times \left[q^{1+2+\ldots\ldots\ldots+n}\right] = 3^{n+1} \times (2)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

حساب $S''_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

$$S''_n = v_0 + (v_0 \times q) + (v_0 \times q^2) + \dots + (v_0 \times q^n)$$

$$= v_0\left[q \times q^2 \times \dots \times q^n\right]$$

$$= v_0\left[q^{1+2+\dots+n}\right] = 3 \times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

حساب $:S_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \dots + \sqrt{v_n}$

$$S_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} \dots + \sqrt{v_n}$$

$$S_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_0 \times q} + \sqrt{v_0 \times q^2} \dots + \sqrt{v_0 \times q^n}$$

$$= \sqrt{v_0} + \sqrt{v_0}\sqrt{q} + \sqrt{v_0}\sqrt{q^2} + \dots + \sqrt{v_0}\sqrt{q^n}$$

$$= \sqrt{v_0}\left(1 + \sqrt{q} + \sqrt{q^2} + \dots + \sqrt{q^n}\right)$$

مجموع حدود متتالية هندسية ذات الأساس $\sqrt{q}$

و عليه فان

$$S_n = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} \dots + \sqrt{v_n}$$

$$S_n = \sqrt{3}\left[\frac{1 - \sqrt{2}^{(n+1)}}{1 - \sqrt{2}}\right]$$

حساب $:S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0 \times q} + \frac{1}{v_0 \times q^2} + \dots + \frac{1}{v_0 \times q^n}$$

$$S_n = \frac{1}{v_0}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n}\right]$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q}$

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

رسالة الى كل من استفاد من التمرين :

ان وجدت خطأ الرجاء مراسلتي عبر صفحتي :

https://www.facebook.com/mathmondedz

<u>لا تنس نشر الملف في كل مكان كي يستفيد منه أكبر عدد ممكن من التلاميذ و الأساتذة</u>

<u>لا تنسوني و والدي الكريمين بالدعاء</u>