Université Chouaib Doukkali
ESEF, EL Jadida
Filière : Enseignement Secondaire

Année Universitaire 2025-2026
Durée : 1h30min
Prof. A. RIKOUANE

Contrôle d'Algèbre 2

La clarté de la rédaction, la présentation des calculs et la précision de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (6 pts).

Soit $E = [0, 1]$. On définit une loi $*$ sur E par :

$$\forall x, y \in E; \quad x * y = x + y - xy.$$

(1) Montrer que $(E, *)$ est un monoïde commutatif.

(2) Quels sont ses éléments symétrisables ?

(3) Quels sont ses éléments réguliers ?

Exercice 2 (8 pts).

(1) Soit $(G, .)$ un groupe, on rappelle que son centre est défini par

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa,\ \forall x \in G\}.$$

   (a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

   (b) Montrer que $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ abélien.

(2) Soit $g \in G$, on considère l'application $\phi : G \longrightarrow G$ définie par $\phi(x) = gxg^{-1}$ pour tout $x \in G$.

   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de groupes.

   (b) Déterminer $\ker\phi$ le noyau de ϕ. Le morphisme ϕ est-il injectif ?

   (c) Montrer que ϕ est un automorphisme de G.

Exercice 3 (4 pts).

Soient $(A, +, \times)$ et $(A, +', \times')$ deux anneaux. soit $\phi : A \to A'$ un morphisme d'anneaux.

(1) Montrer que $\ker\phi$ est un idéal de $(A, +, \times)$.

(2) On définit sur $A/\ker\phi$ deux lois de compositions internes notées par $+$ et $\times$ par :

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in A/\ker\phi,\ \overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y} \text{ et } \overline{x} \times \overline{y} := \overline{x \times y}.$$

Montrer que $(A/\ker\phi, +, \times)$ est un anneau.

Exercice 4 (2 pts).

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif de caractéristique $p > 0$. Montrer que pour tout $x, y \in K$, on a

$$(x + y)^p = x^p + y^p.$$