

Fiche d'exercices N° 3

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)}.$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}.$

Exercice 2.

Étudier la continuité de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ \cos(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Étudier la continuité de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.

Montrer que la fonction χ (dite fonction de Dirichlet) définie sur \mathbb{R} par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est continue en aucun point de \mathbb{R} .

Exercice 5.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, $(a, b) \in I^2$. Montrer que, si $f(a) \leq f(b)$ alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 6.

Soit f une application définie et continue sur l'intervalle $I = [0, 1]$ à valeurs dans I . Montrer que f admet un point fixe dans I .

Exercice 7.

Montrer que les fonctions réelles suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}$

2. $g(x) = \sin(x)$

sont uniformément continues sur leurs domaines de définitions.

Exercice 8.

La fonction sinus cardinal, notée sinc , définie, pour tout réel non nul u par :

$$\text{sinc } u = \frac{\sin u}{u}$$

Montrer que la fonction sinc est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} .