Chapitre 1 : Nombres réels

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Axiome (Axiomes de Peano) Il existe un ensemble d'éléments entiers, noté $\mathbb{N}$, vérifiant les propriétés suivantes,

1. $\mathbb{N}$ contient un élément appelé zéro et noté 0 ,
2. il existe une application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dite application successeur, vérifiant les propriétés suivantes :
   (a) $0 \notin s(\mathbb{N}), 0$ n'est le successeur d'aucun entier,
   (b) s est injective, deux nombres entiers qui ont même successeur sont égaux,
   (c) Si une partie A de $\mathbb{N}$ est telle que $0 \in A$ et $s(A) \subset A$, alors $A = \mathbb{N}$. (Principe de récurrence)

Remarque On pose $s(n) = n + 1$.

Proposition (Principe de récurrence, deuxième forme) Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :

1. $P(0)$ est vraie, (initialisation)
2. pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, (hérédité).

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}, \quad a + c = b$$

Proposition (Admis) ($\mathbb{N}, \leq$) est totalement ordonné et

1. Toute partie de $\mathbb{N}$, non vide, admet un plus petit élément,
2. Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide est majorée si et seulement si, elle est finie,

3. $\mathbb{N}$ n'est pas fini, par suite n'est pas majoré.

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Proposition (Voir cours d'algèbre) $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps, c'est à dire : 1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe additif,
(a) la loi + est associative, $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$, (l'addition est associative),
(b) la loi + est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x+y = y+x$, l'addition est commutative,
(c) la loi + admet un élément neutre, il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 + x = x + 0 = x$,
(d) tout élément de $\mathbb{R}$ admet un symétrique pour la loi + , c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = 0$

2. $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe multiplicatif,
(a) la loi $\times$ est associative, $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$, (la multiplication est associative),
(b) la loi $\times$ admet un élément neutre, il existe un élément $1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \times x = x \times 1 = x$,
(c) tout élément de $\mathbb{R}$ admet un inverse pour la loi $\times$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$, la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + .

Remarque $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, c'est à dire que la loi de multiplication est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = yx$. Il en découle, en particulier, la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication car $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, la commutativité de la multiplication donne $(x + y)z = z(x + y)$ puis la distributivité de multiplication par rapport l'addition donne $(x + y)z = z(x + y) = zx + zy$, une autre fois la commutativité de la multiplication donne $(x + y)z = z(x + y) = zx + zy = xz + yz$. D'où la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication.

Définition On définit sur $\mathbb{R}$, la relation, " $\leq$ ", par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$$

Proposition

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$$

Proposition : $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné et la relation d'ordre est compatible avec l'addition dans $\mathbb{R}$ et la multiplication dans $\mathbb{R}^+$. C'est à dire,

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \text{ et } z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$$
$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^+, \quad x \leq y \text{ et } z \leq t \Rightarrow xz \leq yt$$

Théorème $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x < n.$$

Preuve : Pour $x \leq 0$, le résultat est trivial car $0 \in \mathbb{N}$ convient pour tous les $x \leq 0$. Pour $x > 0$, raisonnons par l'absurde et supposons que la propriété annoncée est fausse, c'est à dire sa négation est vraie, autrement dit,

$$\exists x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq x$$

$\mathbb{N}$ est donc majoré. Contradiction, d'où le résultat.

Corolaire : $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y < nx$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Proposition Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un entier relatif unique $n \in \mathbb{Z}$, appelé partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$. tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Ou d'une manière équivalente,

$$x - 1 < E(x) \leq x.$$

Preuve : Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $E(x) = x$, soit $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Commençons par le cas où $x \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x < p$, autrement dit, la partie $A = \{k \in \mathbb{N}, \quad x < k\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide, par suite elle admet un plus petit élément unique. Comme $\min(A) - 1 \notin A$ alors on a,

$$\min(A) - 1 \leq x < \min(A)$$

Par suite $E(x) = \min(A) - 1$. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ par suite, $x \notin \mathbb{Z}$, on a $E(-x) < -x < E(-x) + 1$, d'où $-E(-x) - 1 < x < -E(-x)$. C'est à dire que $E(x) = -E(-x) - 1$

Proposition : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. C'est à dire que, $\forall x < y,]x, y[\cap\mathbb{Q} \neq \emptyset$.
Démonstration : Comme $y - x > 0$ et $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier $q > 0$ tel que $\frac{1}{q} < y - x$ d'une part, d'autre part $\exists n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* : qx < n\}$ est donc non vide. Comme $A \subset \mathbb{N}$, il possède un minimum. Notons $p = \min A$. On a donc $p - 1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx + 1$ et $x < \frac{p}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$. D'où le résultat.

Théorème(Théorème de la borne supérieure) : Le théorème suivant est à admettre (sans démonstration). Dans $\mathbb{R}$ les deux propriétés suivantes sont vraies et sont équivalentes
1. Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.
2. Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

Remarque : Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et bornée alors $A \subset [\inf(A), \sup(A)]$

Proposition : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, alors on a 1. Si $A \subset B$ et B est bornée alors A est bornée et

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \inf A \geq \inf B$$

2. Si A et B sont bornées alors $A \cup B$ est bornée et on a

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \text{ et } \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$$

Preuve : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$,
1. Comme B est non vide et bornée, d'après la remarque précédente, $B \subset [\inf(B), \sup(B)]$, or $A \subset B \Rightarrow A \subset [\inf(B), \sup(B)]$. C'est à dire que $\inf(B)$ est un minorant de A et $\sup(B)$ est un majorant de A, donc comme A est bornée et on a $\inf(B) \leq \inf(A)(\inf(A)$ est le plus grand des minorants de $A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)(\sup(A)$ est le plus petits des majorants de A).

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure) : Soit A une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $M = \sup A$,
2. M est le plus petit des majorants de A,
3. M est un majorant de A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Preuve : En effet, 1. $\Rightarrow$ 2. C'est la définition de la borne supérieure,
2. $\Rightarrow$ 3.M est un majorant de A et puisque c'est le plus petit alors pour tout $\varepsilon > 0, M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A c'est à dire qu'il existe un élément de A qui est plus grand que $M - \varepsilon$. D'où le résultat.
3 . $\Rightarrow$ 1. On a donc M est un majorant et tout autre élément plus petit que M n'est plus un majorant de A ce qui veut dire qu'effectivement $M = \sup A$.

Proposition (Caractérisation de la borne inférieure) : Soit A une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $m = \inf A$,

2. m est le plus grand des minorants de A,

3. m est un minorant de A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Proposition Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Posons $-A = \{-x, \quad x \in A\}$. 1. Si A est majorée alors $-A$ est minorée et on a

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

2. Si A est minorée alors $-A$ est majorée et on a

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

3. Si A est bornée alors $-A$ est bornée et on a

$$\sup(A) = -\inf(-A), \quad \text{et} \quad \inf(A) = -\sup(-A)$$

Preuve : $A \subset \mathbb{R}$ non-vide,
1. A est majorée donc $\sup A$ existe. Soit $y \in (-A), \exists x \in A$ tel que $y = -x$, comme $\forall x \in A$, $x \leq \sup A$, alors $-\sup A \leq -x = y, \forall y \in -A$. Par suite, $-A$ est minorée par $-\sup A$, donc admet une borne inférieure et $-\sup A \leq \inf(-A)$. Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne supérieure de A, il existe

$x \in A$ tel que, $\sup A - \varepsilon < x \leq \sup A$ donc $-\sup A \leq -x < -\sup A + \varepsilon$ et comme $-x \in -A$ par la propriété de la caractérisation de la borne inférieure, $-\sup A$ est un minorant de $-A$ et il existe un élément de $-A$ entre $-\sup A$ et $-\sup A + \varepsilon$ donc on a bien $\inf(-A) = -\sup A$.
2. A est minorée donc $\inf A$ existe. Soit $y \in (-A), \exists x \in A$ tel que $y = -x$, comme $\forall x \in A, \inf A \leq x$, alors $y = -x \leq -\inf A, \forall y \in -A$. Par suite, $-A$ est majorée par $-\inf A$, donc admet une borne supérieure et $\sup(-A) \leq -\inf A$. Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne inférieure de A, il existe $x \in A$ tel que, $\inf A \leq x \leq \inf A + \varepsilon$ donc $-\inf A - \varepsilon \leq -x < -\inf A$.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et bornée, on définit diamètre de A, qu'on le note $\delta(A)$, par $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} |x - y|$.

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et bornée, on a $\delta(A) = \sup A - \inf A$.

Preuve : Commençons par remarquer que $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} |x-y| = \sup_{x,y\in A}(x-y)$. Car $\{|x - y|, \quad x, y \in A\} \subset \{x - y, \quad x, y \in A\} \cup \{y - x, \quad x, y \in A\}$, d'où $\delta(A) \leq \max\left(\sup_{x,y\in A}\{x- y, \quad x, y \in A\}, \sup_{x,y\in A}\{y - x, \quad x, y \in A\}\right)$. Comme x et y jouent le même rôle on conclut que $\sup_{x,y\in A}\{x-y, \quad x, y \in A\} = \sup_{x,y\in A}\{y-x, \quad x, y \in A\}$. D'où $\delta(A) \leq \sup_{x,y\in A}\{x-y, \quad x, y \in A\}$. D'autre part, comme $x - y \leq |x - y|$ alors $\sup_{x,y\in A}\{x - y, \quad x, y \in A\} \leq \delta(A)$.

Comme $\delta(A) = \sup_{x,y\in A}(x - y) = \sup\{x + (-y), x \in A, -y \in -A\}$, alors on d'après les résultats précédents,

$$\delta(A) = \sup(A + (-A)) = \sup A + \sup(-A) = \sup A - \inf A.$$