

**TD3 – Algèbre 2 –** POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES –

**Exercice 1.**

- (1) Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tel que  $a \neq b$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .

- (2) Soient  $a \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)^2$  en fonction de  $P(a)$  et  $P'(a)$ .

**Exercice 2.** Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

(1)  $A(X) = X^4 + 1$

(2)  $B(X) = X^3 - 2$

(3)  $C(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

**Exercice 3.** Effectuer la division suivant les puissances croissantes de :

(1)  $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$  par  $B = X^2 + X + 1$  à l'ordre 2.

(2)  $A = X^6 + 2X^2 + X^3 + 1$  par  $B = X^3 + X^2 + 1$  à l'ordre 4.

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ . Calculer  $P - P'$  puis en déduire que tous les racines de  $P$  sont simples.

**Exercice 5.**

- (1) Montrer que les racines communes dans  $\mathbb{C}$  de deux polynômes sont exactement ceux de leur PGCD.  
(2) Montrer deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  ou de  $\mathbb{C}[X]$  sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racines communes dans  $\mathbb{C}$ .  
(3) Soient  $P = X^6 + X^4$  et  $Q = X^{25} - X + 1$ .  
(a) Quelles sont les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ ?  
(b) En déduire que  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux.

**Exercice 6.** Soit  $F$  la fraction définie par

$$F(X) = \frac{X^2 + 1}{X^4 + X^2 + 1}.$$

- (1) Écrire la forme de la décomposition en éléments simples (DES) de  $F$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .  
(2) En utilisant la parité de  $F$  et l'unicité de la DES, déterminer la relation entre les coefficients de sa décomposition.  
(3) Calculer les coefficients de cette décomposition.

**Exercice 7.** Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

- (1) Dans  $\mathbb{C}(X)$  :

$$(a) \frac{1}{(X^2 + 1)^2}$$

$$(b) \frac{X^3 - 4X^2 + 2X + 1}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$$

(2) Dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$(a) \frac{X - 1}{(X^2 - 1)^2}$$

$$(b) \frac{X^8}{(X^2 + X + 1)^3}$$

$$(c) \frac{X^3}{(X^4 + X^2 + 1)^2}$$

**Exercice 8.** Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction suivante :

$$F(X) = \frac{50}{(X - 1)(X + 2)^2(X^2 + 1)}.$$