Chapitre 4 : Dérivabilité d'une fonction à variable réelle

1. Dérivée en un point, fonction dérivée

Définition 1 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a,b[$, et soit $x_0 \in]a,b[$. On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \to 0$, ou de manière équivalente, si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \to x_0$. Cette limite est notée $f'(x_0)$ (ou aussi $\frac{df}{dx}(x_0)$) et est appelée dérivée (ou parfois aussi nombre dérivé) de f en x_0. Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé taux d'accroissement de f en x_0.*

Avec les notations de la définition, si M_0 est le point $(x_0, f(x_0))$ du graphe de f, et M le point $(x, f(x))$, le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ désigne la pente de la droite (M_0M) dans un repère orthonormé. Lorsque f est dérivable en x_0, ce rapport admet une limite lorsque $x \to x_0$, et cette limite est la pente de la tangente au graphe de f au point M_0.

Proposition 2 *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$, alors*

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Longrightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

Définition 3 *On dit que f est dérivable sur $]a,b[$ lorsque f est dérivable en tout point de $]a,b[$. Dans ce cas la fonction $x \to f'(x)$, définie sur $]a,b[$, est appelée fonction dérivée de f et est notée f'.*

2. Dérivées à gauche, à droite

Définition 4 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a,b\,[$, et soit $x_0 \in]\,a,b[$.*
1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si le rapport

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Cette limite est notée $f'_d(x_0)$. Nous dirons que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à droite en a.
2. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si le rapport

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Cette limite est notée $f'_g(x_0)$. Nous dirons que f est dérivable sur]a,b] lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à gauche en b.
3. Nous dirons que f est dérivable sur $[a,b]$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ à droite en a et à gauche en b et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Proposition 5 *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in]\,a,b\,[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à la fois gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

3. Graphe et tangente

1. Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in]\,a,b[$. Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Lorsque les dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales, on introduit la notion de demi-tangente. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite (ou à gauche) au point $(x_0, f(x_0))$. Les équations de ces droites sont respectivement :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0) \quad \text{et} \quad y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0).$$

Si f est continue en x_0, mais n'est pas dérivable en x_0, et

$$\text{si } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

ou si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

alors, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphe de f en x_0 admet une tangente parallèle à $\vec{j}$.

4. Règles de calcul

Proposition 6 *Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en x_0. Alors :*

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

2. La fonction $f + g$ est dérivable en x_0 et

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3. La fonction fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0).$$

4. Si de plus, $g(x_0) \neq 0$, la fonction f/g est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Proposition 7 (Dérivation des fonctions composées) *$f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

5. Extremum d'une fonction

Définition 8 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.*
1. On dit que x_0 est un minimum local de f dans I, s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \quad f(x_0) \leq f(x)$$

2. On dit que x_0 est un maximum local de f dans I, s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \quad f(x_0) \geq f(x)$$

3. On dit que x_0 est un extremum local de f dans I, s'il est soit un maximum local soit un minimum local de f dans I.

Définition 9 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.*
1. On dit que x_0 est un minimum global de f dans I, si

$$\forall x \in I, \quad f(x_0) \leq f(x)$$

2. On dit que x_0 est un maximum global de f dans I, si

$$\forall x \in I, \quad f(x_0) \geq f(x)$$

3. On dit que x_0 est un extremum global de f dans I, s'il est soit un maximum global soit un minimum global de f dans I.

Remarque 10 *1. Notons que : L'existence des extremums globaux d'une fonction f continue sur un intervalle fermé borné est garantie par Le théorème de Weierstrass.*
2. Une fonction peut avoir plusieurs extremums locaux.
3. La fonction n'est pas nécessairement dérivable, voire même continue, au point où elle admet un extremum. Par exemple, $x \to |x|$ admet un minimum global en $x_0 = 0$ et n'est pas dérivable en ce point.

Théorème 11 *Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in]a, b[$ est un extremum local de f et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. x_0 est un minimum local de f dans $]a, b[$, ouvert, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset]a, b[\Rightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

Donc,

$$x \in]x_0 - \alpha, x_0 \left[\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \right.$$

et

$$x \in]x_0, x_0 + \alpha \left[\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \right.$$

et comme f est dérivable en x_0 alors les dérivés à gauche et à droite existent et sont égales, en passant à la limite, on trouve que $f'_g(x_0) \leq 0$ et $f'_d(x_0) \geq 0$ ce qui prouve le théorème.

6. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Théorème 12 (Rolle) *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Démonstration. D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum globaux sur $[a,b]$, notés m et M respectivement. Si $m=M$, alors f est constante sur [a, b], donc f' est nulle sur tout $]a,b[$ et c'est fini. Si $m\neq M$, alors, sachant que $f(a)=f(b)$, l'un au moins de ces deux extrémums est atteint en un point c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$. Mais alors, c est un extremum local intérieur à $[a,b]$, donc $f'(c)=0$. □

Théorème 13 *Soit P un polynôme réel ayant au moins n racines réelles distinctes, avec $n\geq 2$. Alors son polynôme dérivé P' a au moins $n-1$ racines réelles distinctes.*

Démonstration. Soient $a_1<a_2<\cdots<a_n$ les racines de P rangées par ordre croissant. On applique le Théorème de Rolle à la fonction P sur chacun des intervalles $[a_1,a_2],\cdots,[a_{n-1},a_n]$, ce qui donne $n-1$ points distincts en lesquels P' est nul. □

Théorème 14 (Accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur]a,b[, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Démonstration. Soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x)=f(x)-f(a)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

Alors g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. De plus $g(a)=0=g(b)$. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction g, il existe donc $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$. Or,

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Par suite,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Théorème 15 *Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors,*

1. *$f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est constante sur I.*
2. *$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est croissante sur I.*
3. *$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est décroissante sur I.*
4. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, alors f est strictement croissante sur I.*
5. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration.

1. Si f est constante alors f' est nulle sur I. Réciproquement, supposons que f' est nulle sur I, soient $a, b \in I$ avec $a < b$, alors par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = 0$$

donc $f(b) = f(a)$, ce qui montre que f est constante.

2. Supposons f croissante, et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout h nous avons,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

(en effet, si $h > 0$ alors $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$, et si $h < 0$ alors $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$). On en déduit par passage à la limite que $f'(x_0) \geq 0$. Réciproquement, soient $a, b \in I$ avec $a < b$, alors par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0$$

donc $f(a) \leq f(b)$, ce qui montre que f est croissante. □

Proposition 16 *Soit f une application dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, (respectivement $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$) et si f' s'annule en un nombre fini de points de $]a, b[$ alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).*

Théorème 17 (Dérivation des fonctions réciproques) *Soit $I =]a, b[$ et f une fonction réelle dérivable dans $I. Si f'(x) > 0($ respectivement $f'(x) < 0)$ pour tout $x \in I$, alors*

1. *f admet une limite à droite en a dans $\overline{\mathbb{R}}$ (notée α) et une limite à gauche en $b \in \overline{\mathbb{R}}$ (notée β),*

2. *f est une bijection de I sur $J =]\alpha, \beta[$ (respectivement sur $J =]\beta, \alpha[$),*
3. *la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est dérivable sur J et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'((f^{-1})(y))} \quad \textit{avec} \quad y = f(x)$$

En particulier, f^{-1} est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) et nous avons

$$\lim_{y\to\alpha} f^{-1}(y) = a \quad \textit{et} \quad \lim_{y\to\beta} f^{-1}(y) = b$$

respectivement,

$$\lim_{y\to\alpha} f^{-1}(y) = b \quad \textit{et} \quad \lim_{y\to\beta} f^{-1}(y) = a$$

Proposition 18 **(Régle de l'Hopital)** *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I telles que $f(a) = g(a) = 0$ avec $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a et si $g'(a) \neq 0$, alors la limite de f/g existe en a et*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Définition 19 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dérivable sur I. Si f' est dérivable en $x_0 \in I$, sa dérivée est notée $f''(x_0)$ et est appelée dérivée seconde de f en x_0. Si f' est dérivable sur I, nous dirons que f est deux fois dérivable sur I. Nous utilisons aussi la notation $f' = f^{(1)}$ et $f'' = f^{(2)}$. Plus généralement, si $f^{(n-1)}$ est dérivable (en un point x_0 ou sur I) nous définissons la dérivée n-ième de f par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.*
Par convention, il est utile, dans certaines formules, de poser $f^{(0)} = f$.
f est sera dite de classe C^n sur I ou $f \in C^n(I)$ si f est n fois dérivable sur I et f^n est continue sur I.f est dite de classe C^∞ sur I ou $f \in C^\infty(I)$ si $f \in C^n(I)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 20 *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables en x_0. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont n fois dérivables en x_0 et*

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0) + \mu g^{(n)}(x_0)$$

et Formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=1}^{k=n} C_k^n f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)$$

Théorème 21 *Soient I un intervalle ouvert, f une fonction n fois dérivable dans I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

Démonstration. *Si $h = 0$, c'est vrai. Fixons $h \neq 0$ et posons $x = x_0 + h$. Nous cherchons donc à montrer l'existence d'un réel c strictement compris entre x_0 et x tel que l'on ait*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f^{(1)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

On introduit la fonction g définie par

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^k(t) - K(x-t)^n$$

où K est un réel choisi de telle façon que $g(x_0) = 0$.

Suite de la Démonstration *Il est clair que $g(x) = 0$. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que K est de la forme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ pour un certain c. Vu les hypothèses, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle pour trouver c (strictement compris entre x_0 et x) tel que $g'(c) = 0$. En calculant g', on trouve*

$$g'(t) = (x-t)^{n-1} \left(-\frac{f^n(t)}{(n-1)!} + Kn \right)$$

L'égalité $g'(c) = 0$ se traduit donc par :

$$K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 22 *Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, et soit $f \in C^n(I)$. Alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0 , telle que*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Démonstration. *Il suffit de poser*

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}\left(x_0 + \theta h\right) - f^{(n)}\left(x_0\right)\right)$$

Dans la formule de Taylor-Lagrange

$\square$

Corollaire 23 *Si P est une fonction polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$, définie par $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_d x^d$ $(a_d \neq 0)$, alors $P^{(d+1)} = 0$, et*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{k=d} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

En particulier, nous avons $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.