Exercice 4

Une course oppose 20 concurrents, dont Mohammed.

1. **Combien y-a-t-il de podiums possibles ?**
2. **Combien y-a-t-il de podiums possibles où Mohammed est premier ?**
3. **Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Mohammed fait partie ?**
4. **On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?**

Solution de l'exercice 4

1. **Un podium est un classement ordonné des 3 premiers. Soit $E = \{P_1, P_2, \ldots, P_{20}\}$ l'ensemble des concurrents. On tire sans remise et en tenant compte de l'ordre 3 concurrents parmi 20. Le nombre de podiums possibles est** $A_{20}^3 = 6840$.
2. **Si Mohammed est premier, il reste 19 concurrents pour occuper les deux autres places, en tenant compte de l'ordre.**
   Ainsi, le podium se compose de Mohammed en première place et de 2 concurrents choisis parmi les 19 restants pour les 2^{e} et 3^{e} places. Donc $A_1^1 \times A_{19}^2 = 342$ **podiums avec Mohammed en première place.**

Exercices

3. **Mohammed peut être en 1^{re}, 2^{e} ou 3^{e} place. Puisque les trois places du podium sont distinctes, on considère donc $\{M, \overline{M}, \overline{M}\}$ et on permute les positions. D'où le nombre total de podiums contenant Mohammed est**

$$3 \times A_1^1 \times A_{19}^2 = 1026.$$

4. **On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun, donc le premier, le deuxième et le troisième reçoivent la même récompense, ce qui implique que l'ordre n'a plus d'importance. Il s'agit donc de choisir 3 concurrents parmi 20 sans répétition et sans ordre, ce qui correspond à une combinaison de 3 éléments parmi 20. D'où**

$$C_{20}^3 = 1140$$

distributions de récompenses possibles.

Exercice 5

1. **Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?**
2. **Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.**

Solution de l'exercice 5

1. **Puisque les chaises des deux tables sont numérotées, toutes les places sont distinctes. Chaque personne peut être assise sur n'importe laquelle des 7 chaises, sans aucune condition supplémentaire. On peut donc imaginer que les deux tables ne forment qu'un seul ensemble de 7 chaises distinctes. Ainsi, placer 7 personnes sur 7 chaises distinctes revient simplement à permuter les 7 personnes. D'où $7! = 5040$.**

Solution de l'exercice 5

3. - **MATHS**
     Toutes les lettres sont distinctes. Il s'agit donc d'une permutation de 5 éléments parmi 5, et le nombre d'anagrammes est
     $$5! = 120.$$
   - **RIRE**
     La lettre R se répète 2 fois, les autres lettres $\{$I,E$\}$ sont distinctes. On utilise la formule pour les lettres répétées :
     $$\frac{4!}{2! \times 1! \times 1!} = 12.$$
   - **ANANAS**
     On a la lettre A qui se répète 3 fois, la lettre N qui se répète 2 fois, et la lettre S qui se répète 1 fois. Le nombre d'anagrammes est :
     $$\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60.$$

Exercice 6

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 de chimie (tous distincts). De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. **Si les livres doivent être groupés par matières.**
2. **Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.**

Solution de l'exercice 6

1. **On a 4 livres de mathématiques (M), 6 livres de physique (P) et 3 livres de chimie (C), tous distincts. En considérant chaque matière comme un bloc, on peut d'abord permuter les trois blocs de matières sur l'étagère, puis permuter les livres à l'intérieur de chaque bloc. Ainsi, le nombre total de rangements est le produit du nombre de permutations des blocs et des permutations des livres de chaque matière, c'est-à-dire** $3! \times 4! \times 6! \times 3! = 622080$.
2. **On considère le bloc des mathématiques comme un seul élément. Dans ce cas, on a 1 bloc M + 6 livres de physique (P) + 3 livres de chimie (C), c'est-à-dire 10 éléments au total. Les 10 éléments peuvent être permutés de 10! façons, et à l'intérieur du bloc de mathématiques, les 4 livres peuvent être arrangés de 4! façons. On conclut donc que le nombre total de rangements est** $10! \times 4! = 87091200$.

Exercice 7

Soit E l'ensemble à 12 éléments : $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. **Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :**
   - 1.1 a **et** b.
   - 1.2 a **mais pas** b.
   - 1.3 b **mais pas** a.
   - 1.4 **ni** a**, ni** b.
2. **En déduire la relation :**

$$C_{12}^{5} = C_{10}^{3} + 2C_{10}^{4} + C_{10}^{5}.$$

Solution de l'exercice 7

1. 1.1 **Puisque l'ordre n'a pas d'importance, les parties de E à 5 éléments qui contiennent a et b sont de la forme**

$$\{a, b, x_1, x_2, x_3\} \quad \textbf{avec } x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j.$$

Il y a donc 10 éléments restants pour choisir 3 éléments, d'où le nombre de parties $C_1^1 C_1^1 C_{10}^3 = C_{10}^3$.

1.2 **Les parties de E à 5 éléments qui contiennent** a **mais pas** b **sont de la forme**

$$\{a, x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \textbf{avec } x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j.$$

Il y a donc 10 éléments restants pour choisir 4 éléments, d'où le nombre de parties $C_1^1 C_{10}^4 = C_{10}^4$.

1.3 **Les parties de E à 5 éléments qui contiennent** b **mais pas** a **sont de la forme**

$$\{b, x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \textbf{avec } x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j.$$

D'où le nombre de parties $C_1^1 C_{10}^4 = C_{10}^4$.

Solution de l'exercice 7

1. 1.4 **Les parties de E à 5 éléments qui contiennent ni a ni b sont de la forme**

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \quad \textbf{avec } x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j.$$

Il y a donc 10 éléments restants pour choisir 5 éléments, d'où le nombre de parties C_{10}^{5}.

2. **Soit B l'ensemble de toutes les parties de E ayant 5 éléments**

$$B = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \mid x_i \in E,\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j\}.$$

On partitionne B en quatre sous-ensembles selon la présence de a et b. Soit A_1 l'ensemble des parties de E à 5 éléments qui

contiennent à la fois a et b

$$A_1 = \left\{\{a, b, x_1, x_2, x_3\} \mid x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j\right\}.$$

A_2 **l'ensemble des parties de** E **à 5 éléments qui contiennent** a **mais pas** b

$$A_2 = \Big\{ \{a, x_1, x_2, x_3, x_4\} \;\Big|\; x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j \Big\}.$$

A_3 **l'ensemble des parties de** E **à 5 éléments qui contiennent** b **mais pas** a

$$A_3 = \Big\{ \{b, x_1, x_2, x_3, x_4\} \;\Big|\; x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j \Big\}.$$

A_4 **l'ensemble des parties de** E **à 5 éléments qui ne contiennent ni** a **ni** b

$$A_4 = \Big\{ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \;\Big|\; x_i \in E \setminus \{a, b\},\ x_i \neq x_j \textbf{ pour tout } i \neq j \Big\}.$$

Donc $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \qquad$ **pour tout** $i \neq j$. **Alors**

$$\text{card}(B) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) + \text{card}(A_4).$$

D'après la question 1, on obtient $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$.

Exercice 8

Un livre comporte 14 chapitres.

1. **Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?**
2. **Pour $k \in [3:14]$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.**
3. **En déduire que :**

$$C_{14}^{3} = C_{13}^{2} + C_{12}^{2} + \cdots + C_{3}^{2} + C_{2}^{2}.$$

Solution de l'exercice 8

1. **On souhaite choisir 3 chapitres parmi les 14 du livre. Comme l'ordre n'importe pas et qu'il s'agit d'un choix simultané, on utilise les combinaisons. Le nombre de choix possibles est** C_{14}^3.
2. **Pour** $k \in \{3, \ldots, 14\}$, **si** k **est le plus grand numéro choisi, les deux autres chapitres doivent être choisis parmi les** $\{1, \ldots, k-1\}$, **donc le nombre de choix est** $C_1^1 C_{k-1}^2 = C_{k-1}^2$.
3. **Posons, pour tout** $k \in \{3, \ldots, 14\}$, A_k **l'ensemble des choix de** 3 **chapitres dont le plus grand numéro est exactement** k, **c'est-à-dire**

$$A_k = \Big\{\{a, b, k\} \;\Big|\; 1 \leq a < b \leq k-1 \;\Big\}.$$

On note E **l ensemble de tous les choix possibles de** 3 **chapitres parmi les** 14, **c'est-à-dire**

$$E = \Big\{\{a, b, c\} \;\Big|\; 1 \leq a < b < c \leq 14\Big\}.$$

Montrons que les ensembles A_k sont deux à deux disjoints. Soient $k \neq k'$ et supposons qu'il existe un triplet $\{a, b, c\}$ appartenant à $A_k \cap A_{k'}$ (avec $a < b < c$). Alors $c = \max\{a, b, c\} = k$ et aussi $c = k'$, d'où $k = k'$, contradiction. Ainsi, pour $k \neq k'$,

$$A_k \cap A_{k'} = \varnothing.$$

De plus chaque triplet de E a un plus grand élément compris entre 3 et 14, donc

$$E = \bigcup_{k=3}^{14} A_k.$$

Comme l'union est disjointe, on obtient

$$\text{card}(E) = \sum_{k=3}^{14} \text{card}(A_k).$$

Solution de l'exercice 8

D'après les questions 1 et 2, on a

$$\mathrm{card}(E) = C_{14}^3 \qquad \textbf{et} \qquad \mathrm{card}(A_k) = C_{k-1}^2.$$

Finalement

$$C_{14}^3 = C_{13}^2 + C_{12}^2 + \cdots + C_3^2 + C_2^2.$$