Relations binaires et Applications

Azzedine Achak

4 décembre 2023

0.1 Introduction

Les relations, comme le mot l'indique, sont d'une importance majeur dans le monde des sciences, notamment mathématiques. Le développement des sciences est du en grande partie à la comparaison des comportements, des grandeurs, des états ... des objets, en mathématiques, en physique, dans les sciences de la vie, de la terre...

La manière formelle rigoureuse avec laquelle on peut définir par exemple la relation $<$ dans l'ensemble $\{1, \sqrt{2}, 2, 3\}$ est l'ensemble des couples

$$\{(1, \sqrt{2}), (1, 2), (1, 3), (\sqrt{2}, 2), (\sqrt{2}, 3), (2, 3)\}$$

Cet ensemble détermine complètement la relation $<$ sur$\{1, \sqrt{2}, 2, 3\}$.

0.2 relations binaires

Définition 1

Soit E un ensemble non vide. On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur E toute partie du produit cartésien $E \times E$. Cette partie s'appelle le graphe de la relation $\mathcal{R}$, on le note $G_{\mathcal{R}}$

On dit qu'un élément $x \in E$ est en relation avec un autre élément $y \in E$, par la relation $\mathcal{R}$, si le couple $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$, on note $x\mathcal{R}y$.

Si le couple $(x, y) \notin G_{\mathcal{R}}$, on dit que l'élément x n'est pas en relation avec l'élément y. On écrit alors,

$$\forall (x, y) \in E \times E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in G_{\mathcal{R}}$$

0.3 Exemples

1. Soit E un ensemble, $=$ est une relation binaire sur E, son graphe est $\{(x, x) \mid x \in E\}$
2. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensembles de toutes les parties de E, l'inclusion est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ définie par, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$, en particulier $\forall A \in \mathcal{P}(E), (\emptyset, A) \in G_{\mathcal{R}}$.
3. Sur $\mathbb{R}$, on a les relations binaires usuelles, $\leq, \geq, <, > \ldots$
4. Sur $\mathbb{Z}$, on a la relation binaire "divisibilité", définie par : $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m$ divise n. En particulier $\forall n \in \mathbb{Z}, n\mathcal{R}n$. Mais si $m\mathcal{R}n$ ceci n'implique pas forcément que $n\mathcal{R}m$.

0.3.1 Propriétés

Définition 2

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble non vide E.

1. La relation $\mathcal{R}$ est dite réflexive $si \forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
2. La relation $\mathcal{R}$ est dite symétrique si $\forall x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$.
3. La relation $\mathcal{R}$ est dite transitive si $\forall x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$
4. La relation $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si $\forall x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.

0.4 Remarques

1. Une relation binaire non symétrique n'est pas forcément anti-symatrique, par exemple la "divisibilité sur $\mathbb{N}$, elle anti-symétrique mais elle n'est pas symétrique.
2. Une relation binaire symétrique, anti-symétrique et réfléxive est la relation "égalité".

0.4.1 Relation d'équivalence

Définition 3

Une relation binaire sur un ensemble non vide E est dite relation d'équivalence si elle esr à la fois réflexive, symétrique et transitive. Une relation d'équivalence est notée, $\equiv$, ou $\sim$, ou $\approx \ldots$

2. *Si* $\equiv$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, et $a \in E$, la classe d'équivalence de a notée $\bar{a}$ ou cl(a), est la partie de E définie par :

$$\bar{a} = \mathrm{cl}(a) = \{x \in E \mid x \equiv a\}.$$

3. L'ensemble quotient d'une relation d'équivalence $\equiv$ sur E, noté $E/\equiv$ est

$$E/\equiv = \{\bar{a} \mid a \in E\}$$

Proposition 1

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\equiv$. Alors,

1. $\forall a, b \in E, a \equiv b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.
2. $\forall a, b \in E$ on a : $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ ou bien $\bar{a} = \bar{b}$
3. Les classes d'équivalences (distnctes) $\bar{a}, a \in E$, formeent une partition de E.

0.5 Exemples :

1. Sur un ensemble non vide, la relation "égalité" est une relation d'équivalence.
2. Le parallélisme sur un l'ensemble des droites du plan affine est une relation d'équivalence.
3. Sur un ensemble de personnes, la relation "a le même âge que" est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence est l'ensemble des personnes ayant le même d'ge.
4. Sur l'ensemble des nombres réels non nuls $\mathbb{R}^*$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}^*$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$,

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de même signe}$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et l'ensemble quotient est $E/\mathcal{R} = \{\overline{+1}, \overline{-1}\}$. On a $\overline{+1} = \mathbb{R}_+^*$ et $\overline{-1} = \mathbb{R}_-^*$

5. Congruence sur $\mathbb{Z}$.

Soit $n \in Z$ fixé. Sur $\mathbb{Z}$ on définit la relation, dite de congruence modulo n, par : $\forall u, v \in \mathbb{Z}$

$$u \equiv v \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u - v = kn.$$

$\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. La division euclidienne sur $\mathbb{Z}$ (voir chapitre 3) montre que l'ensemble quotient est formé de n classes : $\bar{0}, \ldots, \overline{(n-1)}$. En particulier si $n = 0, \mathbb{Z}/\equiv = \mathbb{Z}$, et si $n = 1, \mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}\}$.

0.5.1 Relation d'ordre

Définition 4

Une relation binaire sur un ensemble non vide E est dite relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, anti-symétrique et transitive. Une relation d'ordre est notée généralement $\leq, \geq, \preceq, \ll \ldots$ On note $(E, \preceq)$ l'ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preceq$, on dit : $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné.

2. Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est dite d'ordre total, si $\forall a, b \in E$, on $aa \preceq b$ ou $b \preceq a$. On dit que $(E, \preceq)$ est totalement ordonné. Lorsque $(E, \preceq)$ n'est pas totalement ordonné, on dit qu'il est partiellement ordonné.
3. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Deux éléments $a, b \in E$ sont dit incomparables si : ni $a \preceq b$ ni $b \preceq a$, ils sont dit comparables dans le cas contraire.
4. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. La relation $\prec$ définie par : $\forall a, b \in E$,

$$a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \text{ et } a \neq b$$

est anti-symétrique et transitive, elle est dite la relation d'ordre strict associée à la relation d'ordre $\preceq$.

0.6 Exemples :

1. La relation usuelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est d'ordre total.
2. Soit E un ensemble non vide. La relation $\subseteq$ (inclusion) est d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Elle n'est pas d'ordre total si $\text{card}(E) \geq 2$.
3. Sur $\mathbb{N}$ soit la relation binaire "divisibilité" définie par : $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$m \mid n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = km,$$

est une relation d'ordre paritiel.
On lit $m \mid n$: m divise n, on dit aussi que n est un multiple de m.
La relation "divisibilité" n'est pas d'ordre sur $\mathbb{Z}$, elle n'est pas anti-symétrique.

0.6.1 Majorant, minorant, élémnet minimal, maximal

Définition 5

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1. On dit que A est majorée (pour $\preceq$) si : $\exists M \in E$ tel que $\forall x \in A$, on a $x \preceq M$. Un tel M est appelé un majorant de A. Si de plus $M \in A$, on dit que M est le plus grand élément de A, il est appelé maximum de A, on le note $\text{Max}(A)$..
2. On dit que A est minorée (pour $\preceq$) si : $\exists m \in E$ tel que $\forall x \in A$, on a $m \preceq x$. Un tel m est appelé un minorant de A. Si de plus $m \in A$, on dit que m est le plus petit élément de A, il est appelé minimum de A, on le note $\min(A)$.
3. On dit que A est bornée (pour $\preceq$) si A admet un minorant et un majorant. On dit aussi si elle est à la fois minorée et majorée.
4. Le plus grand des minorants de A, lorsqu'il existe, est appelé la borne inférieure de A, on le note $\inf(A)$.
5. Le plus petit des majorants de A, lorsqu'il existe, est appelé la borne supérieure de A, on le note $\sup(A)$.

Théorème 1

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E. Si A possède un plus petit (resp. un plus grand) élément, il est unique.

Définition 6

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1. Un élémént $a \in A$ est dit minimal de A si, $\forall x \in A, x \preceq a \Rightarrow a = x$.
2. Un élémént $b \in A$ est dit maximal de A si, $\forall x \in A, b \preceq x \Rightarrow b = x$.

Remarque : Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E. Si $\min(A)$ existe, alors $\min(A) = \inf(A)$ et $\min(A)$ est un élément minimal de A. Si $\text{Max}(A)$ existe alors $\text{Max}(A) = \sup(A)$ et $\text{Max}(A)$ est un élément minimal de A

Exemples :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élémént pour l'ordre usuel.
2. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, soit $A = [0, 1[$, alors $\inf(A) = \min(A) = 0$ et $\sup(A) = 1$
3. Soit ($\mathbb{N}, |$) ordonné par la divisibilité. Soit $A = \{4, 6, 8, 12, 25, 28\}$, alors $\inf(A) = 1$ et $\sup(A) = 4200, 25$ est un élément minimal et maximal de $A, 6$ est minimal mais il n'est pas maximal de A.