Algèbre 1 - Série 1

Filière: SMA, Année: 2025/2026

A. Achak

Exercice 1 *Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :*

1. *f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).*
2. *f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2 *Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.*

1. *(dans cette question, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*
   (a) *f est la fonction nulle.*
   (b) *L'équation $f(x) = 0$ a une solution.*
   (c) *L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.*
   (d) *f est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *(dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle)*
   (a) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
   (b) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
   (c) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

Exercice 3 *Montrer que $x = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un entier.*

Exercice 4 *Calculer, pour tout entier naturel n, la somme :*

$$I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$$

Exercice 5 *A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :*

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Exercice 6 *Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection (encore notée f) de I sur $J = f(I)$ à déterminer puis préciser f^{-1} :*

1. *$f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.*
2. *$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.*

Exercice 7 *A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :*

1. *$(A \triangle B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.*
2. *$A \triangle B = B \triangle A$.*
3. *$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.*
4. *$A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.*
5. *$A \triangle C = B \triangle C \Leftrightarrow A = B$.*

Exercice 8 *Soient E un ensemble puis A une partie de E. Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on pose $\varphi_A(X) = X \cap A$ et $\psi_A(X) = X \cup A$. Montrer que*

1. *φ_A injective $\Leftrightarrow \varphi_A$ surjective $\Leftrightarrow A = E$.*
2. *ψ_A injective $\Leftrightarrow \psi_A$ surjective $\Leftrightarrow A = \emptyset$.*

Exercice 9 *Soient f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application de F vers un ensemble G. Montrer que : ($g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective $\Leftrightarrow g$ surjective $\Leftrightarrow g$ surjective $\Leftrightarrow f$).*

Exercice 10 *Soit f une application d'un ensemble non vide E dans lui-même telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.*

Exercice 11 *f est une application d'un ensemble E dans lui-même. Montrer que :*

1. (a) *f est injective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(X)) = X$.*
   (b) *f est injective $\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.*
2. *f est surjective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E), f(f^{-1}(X)) = X$.*

Exercice 12
1. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications telles que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.*
2. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications telles que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.*
3. *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.*

Exercice 13 *Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E. Soit $f : \mathcal{P}(E) \to (\mathcal{P}(E))^2$.*

$$X \mapsto (X \cup A, X \cup B)$$

1. *Montrer que f n'est pas surjective.*
2. *Montrer que f injective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.*

Exercice 14 *Soit E un ensemble. La différence symétrique de deux parties F et G de E est la partie, notée $F \Delta G$, définie par :*

$$F \Delta G = (F \cap G) \cup (F \cap G).$$

1. *Montrer que, pour toutes parties F et G,*
$$F \Delta G = (F \cup G) \cap F \cap G.$$
2. *Vérifier que, pour toutes parties F et G, la fonction indicatrice de $F \Delta G$ est égale à*
$$I_F + I_G - 2 I_F I_G.$$