

TD3 – Algèbre 2 – POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES –

Exercice 1.

- (1) Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

- (2) Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$(1) A(X) = X^4 + 1$$

$$(2) B(X) = X^3 - 2$$

$$(3) C(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Exercice 3. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de :

- (1) $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $B = X^2 + X + 1$ à l'ordre 2.

- (2) $A = X^6 + 2X^2 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ à l'ordre 4.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Calculer $P - P'$ puis en déduire que tous les racines de P sont simples.

Exercice 5.

- (1) Montrer que les racines communes dans \mathbb{C} de deux polynômes sont exactement ceux de leur PGCD.
 (2) Montrer deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racines communes dans \mathbb{C} .
 (3) Soient $P = X^6 + X^4$ et $Q = X^{25} - X + 1$.
 (a) Quelles sont les racines de P dans \mathbb{C} ?
 (b) En déduire que P et Q sont premiers entre eux.

Exercice 6. Soit F la fraction définie par

$$F(X) = \frac{X^2 + 1}{X^4 + X^2 + 1}.$$

- (1) Écrire la forme de la décomposition en éléments simples (DES) de F dans $\mathbb{R}(X)$.
 (2) En utilisant la parité de F et l'unicité de la DES, déterminer la relation entre les coefficients de sa décomposition.
 (3) Calculer les coefficients de cette décomposition.

Exercice 7. Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

- (1) Dans $\mathbb{C}(X)$:

$$(a) \frac{1}{(X^2 + 1)^2}$$

$$(b) \frac{X^3 - 4X^2 + 2X + 1}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$$

(2) Dans $\mathbb{R}(X)$:

$$(a) \frac{X - 1}{(X^2 - 1)^2}$$

$$(b) \frac{X^8}{(X^2 + X + 1)^3}$$

$$(c) \frac{X^3}{(X^4 + X^2 + 1)^2}$$

Exercice 8. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction suivante :

$$F(X) = \frac{50}{(X - 1)(X + 2)^2(X^2 + 1)}.$$