Chapitre 3 : Continuité d'une fonction à variable réelle

Limite & Continuité

Définition : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$. On dit que :

1. f admet une limite ℓ en x_0, que l'on notera $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in I, (x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\backslash \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.)$$

2. f admet une limite ℓ à droite en x_0, que l'on notera $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$. si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in I, (x \in]x_0, x_0 + \alpha[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.)$$

3. f admet une limite ℓ à gauche en x_0, que l'on notera $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in I, (x \in]x_0 - \alpha, x_0[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.)$$

Proposition : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Alors, f admet une limite en x_0 si et seulement si, f admet une limite à droite et à gauche en x_0.

Définition : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est
1. continue en $x_0 \in I$ si, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. continue à droite en $x_0 \in I$ si, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
3. continue à gauche en $x_0 \in I$ si, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Proposition : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est continue en x_0 si, et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0.

Remarque : La définition de la continuité de f en un point a est équivalente à :
1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_{\varepsilon,a} > 0, \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow | f(x) - f(a | < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_{\varepsilon,a} > 0, \forall x \in I, (x \in]a-\alpha, a+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[)$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_{\varepsilon,a} > 0$, tel que $f(]a-\alpha, a+\alpha[) \subset] f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$.
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_{\varepsilon,a} > 0$, tel que $]a-\alpha, a+\alpha [\subset f^{-1}(]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[)$.
5. l'image réciproque, par f, de tout intervalle ouvert de centre $f(a)$ contient un intervalle ouvert de centre a.

Définition : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **séquentiellement continue** en a si, $\forall (x_n) \subset I$, on a

$$(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n \right) \right)$$

Proposition : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$, alors :

$$f \text{ continue en } a \Longleftrightarrow f \text{ séquentiellement continue en } a.$$

Preuve :
1. La condition est nécessaire. En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé, d'après la continuité de f en a, il existe $\alpha > 0$, tel que $|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Soit maintenant (x_n) une suite de I convergente vers a, pour le $\alpha > 0$ ci-avant, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq N$ on a $|x_n - a| < \alpha$. Par suite, on obtient $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Ainsi, on a montré que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

D'où $f(x_n)$ converge vers $f(a)$ et par suite f est séquentiellement continue en a.
2. La condition est aussi suffisante. On raisonne par contraposée. Supposons que f est non continue en a, donc

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists x_\alpha \in I, \quad |x_\alpha - a| < \alpha \text{ et } \quad |f(x_\alpha) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

En donnant à α successivement les valeurs $\frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on construit ainsi une suite $x_n \in I$ telle que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, on construit ainsi une suite (x_n) de I qui converge vers a mais la suite image $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(a)$. D'où la fonction f n'est pas séquentiellement continue en a.

Définition : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite :
1. **(séquentiellement)** continue sur I, si elle séquentiellement continue en tout point de I.
2. **(localement)** continue sur I, si elle continue en tout point de I. C'est à dire,

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_{\varepsilon,x} > 0, \quad \forall y \in I, \quad |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

3. **uniformément continue** sur I, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_{\varepsilon} > 0, \quad \forall x \in I, \quad \forall y \in I, \quad |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Proposition : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$, alors f uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ continue sur I.

Remarque : La réciproque est fausse sauf si I est un intervalle fermé et borné.

1. La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur]0, 1]. En effet, supposons qu'elle est uniformément continue sur $]0, 1]$, soit $\varepsilon > 0$ fixe, $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall x, y \in]0, 1], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = \frac{2}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n}$ alors il existe N, tel que $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \alpha, \forall n \geq N$, c qui implique que $|f(x_n) - f(y_n)| = \frac{n}{2} < \varepsilon, \forall n \geq N$, absurde.
D'où la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur]0, 1]. Remarquons que l'intervalle]0, 1] n'est pas fermé.

2. La fonction e^x n'est pas uniformément continue sur $[1, +\infty[$. Comme précédemment, supposons qu'elle est uniformément continue sur $[1, +\infty[$, soit $\varepsilon > 0$ fixe, $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall x, y \in [1, +\infty[, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \alpha$ et posons, pour tout $n \geq N, x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$ alors $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \alpha \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, or $|f(x_n) - f(y_n)| = e^n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{e^n}{n} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \to +\infty \,\text{car}\, n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \to 1$, absurde.
D'où la fonction e^x n'est pas uniformément continue sur $[1, +\infty[$. Remarquons que l'intervalle $[1, +\infty[$ n'est pas borné.

Définition : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b.

Proposition (Théorème de Heine) : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors :

$$f \text{ continue sur } [a, b] \Leftrightarrow f \text{ uniformément continue sur } [a, b].$$

Preuve : On procède par contra-posée, supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, c'est-à-dire, en particulier,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2 \text{ tels que } \left(|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \right)$$

Les suites, (x_n) et (y_n) étant bornées (dans $[a, b]$), donc admettent des sous suites convergentes, qu'on continue de les noter (x_n) et (y_n), vers une même limite notée x, car $\lim_{n \to +\infty} x_n - y_n = 0$. On a donc, $x_n \to x$ et $y_n \to x$ mais $f(x_n)$ ou $f(y_n)$ ne converge pas vers $f(x)$ car $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ne peuvent pas avoir la même limite ($|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$). Donc, f n'est pas séquentiellement continue sur $[a, b]$, donc elle n'est pas continue sur $[a, b]$. D'où le théorème.

Définition : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne de rapport L ou tout simplement L-lipschitzienne, si il existe $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Si, de plus $0 < L < 1$, f est dite strictement contractante.

Proposition : Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Preuve : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Montrons que f est uniformément continue, soit alors $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{L}$, alors

$$\forall x, y \in I, \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\alpha = \varepsilon.$$

D'où f est uniformément continue.

Remarque : La réciproque est fausse en général. En effet, la fonction $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

En effet, on commence par remarquer que la fonction $\sqrt{x}$ est sous-additive, c'est à dire :

$$\forall a,b \geq 0, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Comme x et y jouent le même rôle, on peut supposer, par exemple, $x \leq y$. Par suite,

$$\sqrt{y}-\sqrt{x} = \sqrt{x+(y-x)}-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y-x}-\sqrt{x} = \sqrt{y-x}$$

On a utilisé l'inégalité avec $a = x$ et $b = y - x$. On a montré que,

$$\forall x,y \in [0,+\infty[, \quad |\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq \sqrt{y-x}.$$

Soit maintenant, $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \varepsilon^2$, alors pour tout $x, y \geq 0$,

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq \sqrt{y-x} < \sqrt{\alpha} = \varepsilon.$$

D'où la fonction $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$. Mais la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,+\infty[$ (en fait elle ne l'est pas sur les intervalles de la forme $[0,\varepsilon]$). En effet, supposons qu'elle est L - L lipschitzienne donc on aura en particulier $\forall x > 0, \quad \sqrt{x} \leq Lx$ (on a pris $y = 0$). On trouve alors que $\forall x > 0, 1 \leq L\sqrt{x}$. Ce qui n'est pas toujours vrai, il suffit de prendre $x = \frac{1}{n^2}$ pour s'en convaincre car on obtient que $\forall n \geq 1, n \leq L$, contredit le lemme d'Archimède. Par suite $\sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur tout intervalle de la forme $[0,\varepsilon]$. Par contre, elle est L lipschitzienne sur tout intervalle de la forme $[A,+\infty[$ il suffit de remarquer qu'on a

$$\forall x,y \in \Big[A,+\infty\Big[, \quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{A}}|x-y|$$

Propriétés algébriques

Le lemme suivant est simple à vérifier en distinguant les cas $x \leq y$ et $y < x$:

Lemme : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\min(x,y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}, \quad \text{et } \max(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

Proposition : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient f et g deux fonctions définis de $I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en $a \in I$ alors

1. $|f|$ est continue en a,
2. $f+g$ est continue en a,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ est continue en a,
4. $f \times g$ est continue en a,
5. si $g(a) \neq 0$) alors f/g est continue en a,
6. $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont continues en a.

Preuve : On va montrer que les fonctions ci-dessus sont séquentiellement continues. Soit donc une suite $(a_n) \subset I$ telle que $a_n \to a$, comme f et g sont continues elles sont donc séquentiellement continues, par suite $f(a_n) \to f(a)$ et $g(a_n) \to g(a)$, d'après les résultats sur les opérations sur les limites des suites on a alors,
1. $|f(a_n)| \to |f(a)|$ donc $|f|$ est séquentiellement continue en a, d'où $|f|$ est continue en a,
2. $f(a_n)+g(a_n) \to f(a)+g(a)$ donc $f+g$ est séquentiellement continue en a, d'où $f+g$ est continue en a,
3. $f(a_n) \times g(a_n) \to f(a) \times g(a)$ donc $f \times g$ est séquentiellement continue en a, d'où $f \times g$ est continue en a,
4. Si $g(a) \neq 0, g(a_n) \neq 0$, à partir d'un certain rang, et on a $f(a_n)/g(a_n) \to f(a)/g(a)$ donc f/g est sequentiellement continue en a, d'où f/g est continue en a,
5. Comme $\min(f(a_n), g(a_n)) = \frac{f(a_n)+g(a_n)}{2} - \frac{|f(a_n)-g(a_n)|}{2}$ alors

$$\min(f(a_n), g(a_n)) \to \frac{f(a)+g(a)}{2} - \frac{|f(a)-g(a)|}{2} = \min(f(a), g(a))$$

par suite $\min(f,g)$ est séquentiellement continue en a, d'où $\min(f,g)$ est continue en a. Par le même raisonnement on conclut que $\max(f,g)$ est continue en a.

Proposition (Composée de fonctions continues) : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $f: I \to \mathbb{R}$ et $g: f(I) \to \mathbb{R}$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Preuve : Là aussi on va montrer que la fonction composée $g \circ f$ est séquentiellement continue. Soit donc une suite $(a_n) \subset I$ telle que $a_n \to a$, comme f est continue en a alors $f(a_n) \to f(a)$ et comme g est continue en $f(a)$ alors $g(f(a_n)) \to g(f(a))$. Donc, $g \circ f$ est séquentiellement continue en a, par suite elle est continue en a.

Les résultats de la proposition suivantes découlent de façon évidente des résultats précédents,
Proposition : On a,
1. Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$,
2. La fonction $f(x)=x$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est même 1-Lipschitzienne,
3. La fonction $f(x)=|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est même 1-Lipschitzienne,
4. Toute fonction Lipschitzienne sur un intervalle est uniformément continue sur cet intervalle,
5. Les polynômes, $P(x)=\sum_{1\leq k\leq n} a_k x^k$ sont continues sur $\mathbb{R}$,

6. Les fonctions rationnelles, $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q de ses polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ privé des pôles de la fraction F.

Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $a, b \in I$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y=f(c)$. En particulier, si $f(a)f(b)\leq 0$ alors il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$.

Preuve : Posons $A=\{x\in[a,b], \quad f(x)<y\}$, A est non vide, $a\in A$, et majorée donc admet une borne supérieure notons $c=\sup A\in[a,b]$, il existe alors une suite $(x_n)\subset A$ telle que $x_n\to c$, comme $f(x_n)<y$ et f est continue alors $f(x_n)\to f(c)$ et puisque $f(x_n)<y$ alors $f(c)\leq y$. Ceci d'une part, d'autre part, comme $c<b$, car $f(b)>y$, la suite $c_n=c+\frac{b-c}{2n}$ est telle que $c<c_n<b, \forall n\geq 1$, par suite $y\leq f(c_n)$, comme $c_n\to c$ et f est continue alors $f(c_n)\to f(c)\Rightarrow y\leq f(c)$. On a montré alors qu'on a $f(c)\leq y\leq f(c)$. d'où $f(c)=y$.

En particulier si $f(a)f(b)<0$, ça veut dire qu'ils sont de signe différent, par suite $0\in[f(a),f(b)]$ si $f(a)\leq 0$ et $f(a)\geq 0$ ou $0\in[f(b),f(a)]$ si $f(b)\leq 0$ et $f(b)\geq 0$. D'après ce qui précède, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$.

Corrolaire : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction continue alors $f(I)$ est un intervalle de plus on a, $]\inf f(I),\sup f(I)[\subset f(I)$.

Proposition : Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f([a,b]) =$

$[m, M]$ et il existe $x_m \in [a, b]$ et $x_M \in [a, b]$ tels que

$$f(x_m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = m,$$

et

$$f(x_M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,h]} f(x) = M.$$

Preuve : Posons $M = \sup f([a, b])$ donc il existe une suite (x_n) de points de $[a, b]$ telle que $f(x_n) \to M$, d'après Bolzano, (x_n) admet une sous suite convergente vers $x_M \in [a, b] f$ est continue l'image de la sous suite converge vers $f(x_M)$ et comme la suite et la sous suite ont la même limite on conclut que $M = f(x_M) = \sup f([a, b]) = \max f([a, b])$.
De même on montre qu'il existe $x_m \in [a, b]$ tel que $f(x_m) = \inf f([a, b]) = \min f([a, b])$.

Applications

Proposition : Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

Preuve : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impaire, posons $\deg(P) = 2p+1$, donc P peut s'écrire comme $P(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_{2p+1} \neq 0$, alors $\lim_{x \to \mp\infty} P(x) = \mp\infty$ si $a_{2p+1} > 0$ et $\lim_{x \to \mp x} P(x) = \pm\infty$ si $a_{2p+1} < 0$. Donc $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ d'où l'existence d'une racine réelle de P.

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors on a

$$f \text{ coercive } \left(\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty \right) \Rightarrow f \text{ admet un minimum global.}$$

Preuve : Il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 0$. Sinon f est alors négative sur $\mathbb{R}$ contredit l'hypothèse de coercivité. Comme $\lim_{|x \to +\infty} f(x) = +\infty) \Rightarrow f$, pour $A = f(x_0), \exists B > 0$, tel que $|x| > B \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ et par suite $|x_0| \leq B$. Comme

$$\inf_{\mathbb{R}} f(x) = \min \left(\inf_{|x| \leq B} f(x), \inf_{|x| > B} f(x) \right)$$

et $|x_0| \leq B$ alors $\inf_{\mathbb{R}} f(x) = \inf_{|x| \leq B} f(x)$ et comme f et continue alors elle atteint sa borne inférieure sur l'intervalle $[-B, B]$, il existe donc $c \in [-B, B]$ tel que $f(c) = \min_{[-B,B]} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$. Si, en plus f est dérivable alors

$f'(c) = 0$.

Corolaire Tout polynôme de degré paire admet soit un minimun global soit un maximum global.

Preuve : Tout polynôme, P, de degré paire est coercitif si son coefficient dominateur est positif, donc il admet un minimum global, sinon c'est $-P$ qui est coercitif, par suite admet un minimum global ce qui implique que P admet un maximum global.

Proposition (Théorème de la moyenne) : Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in]\,a,b\,[$. Alors il existe $c_1 \in]\,a,b[$ qui réalise la moyenne arithmétique de f pour les $f(x_k)$ c'est à dire que

$$f(c_1) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Si en plus, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{*+}$, alors il existe $c_2 \in]\,a,b[$ qui réalise la moyenne géométrique de f pour les $f(x_k)$ c'est à dire que

$$f(c_2) = \sqrt[n]{f(x_1)\,f(x_2)\cdots f(x_n)}$$

il existe $c_3 \in]\,a,b[$ qui réalise la moyenne harmonique de f pour les $f(x_k)$ c'est à dire que

$$f(c_3) = \frac{n}{\frac{1}{f(x_1)} + \cdots + \frac{1}{f(x_n)}}$$

Proposition (Théorèmes du point fixe)
1. Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ admet un point fixe. C'est-à-dire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie, $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < |x - y|$. Alors f admet wn point fixe unique.
3. Toute fonction strictement contractante admet un point fixe unique.
Preuve :
1. Posons $g(x) = f(x) - x$ alors g est continue, somme de deux fonctions continues, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = c$.

2. Posons $g(x) = |x - f(x)|$ alors g est continue à valeurs positives elle atteint sa borne inférieure sur $[a,b]$, posons c le point où cette borne est atteinte,

c'est à dire $g(c) = \min_{[a,b]} g(x)$, alors $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$ car sinon $g(f(c)) = \mid f(c) - f(fc)) \mid < |c - f(c)| = g(c)$ ce qui veut dire que $g(c)$ n'est pas le minimum contradiction. d'où $f(c) = c$. Ce point fixe est unique car si on suppose qu'il existe un autre point fixe $d = f(d)$ on doit avoir $|d - c| = |f(d) - f(c)| < |d - c|$ absurde. D'où l'unicité du point fixe.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement contractante, c'est à dire qu'il existe $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $x_0 \in I$, posons $x_{n+1} = f(x_n)$, la suite vérifie,

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}| \leq k|x_{n-1} - x_{n-2})| \leq k^{n-1}|x_1 - x_0|$$

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, alors

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

Utilisons l'inégalité précédente on obtient que,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq k^{n+p-1}|x_1 - x_0| + k^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \cdots + k^n|x_1 - x_0|$$

Par suite,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0| \sum_{i=0}^{p-1} k^i = k^n|x_1 - x_0| \frac{1 - k^p}{1 - k} \leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| < \varepsilon$, car la suite tend vers 0 , $(0 < k < 1)$. La suite (x_n) est don de Cauchy, elle converge vers $x \in \mathbb{R}$, puisque f est continue $f(x_n) \to f(x)$ or $f(x_n) = x_{n+1}$ est une sous-suite de (x_n) donc elle converge vers la même limite donc $f(x_n) \to f(x)$ et par unicité de limite on conclut que $f(x) = x$. D'où l'existence de points fixe pour f.

Pour l'unicité, supposons que f admet un autre point fixe noté y donc $f(y) = y$, comme f est strictement contractante alors

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < |x - y| \quad 0 < k < 1$$

si $y \neq x$ on obtient une contradiction, donc la limite de la suite itérée (x_n) est le seul point fixe de f.

Fonctions en escalier

Définition Une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision de l'intervalle $[a, b]$: $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ et des nombres réels c_k tels que que $g(x) = c_k$ pour tout $x \in]a_{k-1}, a_k[$ et $1 \leq k \leq n$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle compact peut être approchée uniformément sur cet intervalle par une fonction en escalier. Autrement dit : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue, il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \eta$ et définissons la subdivision a_k de $[a, b]$ par $a_0 = a$ et $a_k = a_0 + k\frac{b-a}{n}, 1 \leq k \leq n$. Soit alors la fonction en escalier g définie par,

$$g(x) = f(a_k), \quad \forall x \in [a_k, a_{k+1}[, 0 \leq k \leq n-1 \text{ et } g(b) = f(b).$$

Pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}[$, on a

$$|x - a_k| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - g(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon$$

Suites récurrentes

Proposition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $D \subset I$ tel que $f(D) \subset D$ (on dit que D est stable par f). On définit la suite $(u_n)_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, a suite, u_n, est bien définie, de plus, si $u_n \to \ell \in I$ alors ℓ est un point fixe de f, i.e. $f(\ell) = \ell$.

Proposition : Si le signe de fonction $x \to f(x) - x$ est constant su un intervalle stable pour f, nous trouvons a sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet si : 1. $\forall x \in D, f(x) - x \geq 0$ alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ et (u_n) est croissante. 2. $\forall x \in D, f(x) - x \leq 0$ alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ et (u_n) décroissante.

Dans cette partie, on regarde ce qui se passe lorsque la fonction f est monotone.

Proposition : Soit $f : I \to I$ une fonction croissante. Alors toute suite récurrente $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ associé à f est monotone. Ainsi,
1. si $u_1 \geq u_0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :
2. si $u_1 \leq u_0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition : Soit $f : I \to I$ une fonction décroissante. Alors les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f sont monotones. L'une étant croissante l'autre décroissante.

Cas des fonctions affines $f(x) = ax + b$

Dans ce cas, $f(x) = ax + b$, on obtient une suite arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

On peut distinguer trois cas,

1. Cas $b = 0$, donc $u_{n+1} = au_n$. $(u_n)_{n\in N}$ est alors géométrique de raison a, par suite $u_n = a^n u_0$. (u_n) converge si, et seulement si, $|a| < 1$.
2. Cas $b \neq 0$ et $a = 1$, donc $u_{n+1} = u_n + b$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors arithmétique de raison b, par suite $u_n = u_0 + nb$. (u_n) diverge.
3. Cas $b \neq 0$ et $a \neq 1$, on pose $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique de raison a, par suite $v_n = a^n v_0$ par suite $u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} \cdot (u_n)$ converge vers $\frac{b}{1-a}$ si, et seulement si, $|a| < 1$.

Les points fixes de f sont les racines d'un polynôme de degré deux, trois cas se présentent,

1. **Cas où f admet deux points fixes (réels)** α et β, on pose $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ alors v_n est géométrique de raison $k = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta}$. (u_n) converge vers α si $|k| < 1$ et vers β si $|k| > 1$.
2. **Cas où f admet un seul point fixe** α, on pose $v_n = \frac{1}{u_n-a}$ alors v_n est géométrique de raison $k = \frac{c}{a-c\alpha}$. (u_n) converge vers α si $|k| < 1$.
3. **Cas où f n'admet pas de points fixes (les solutions de $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ sont complexes**, la suite ne converge pas.