Logique, Ensembles et Applications

21 octobre 2024

1.2 Notions de logique

Définition 1

Une expression est un ensemble d'objets mathématiques possédant une signification (dans l'univers des mathématiques)

Exemples : ABC est un triangle, x^2+5, une suite (u_n).

Définition 2

Une proposition est l'expression d'un fait mettant en relation des objets mathématiques bien définis. Elle peut être vraie ou fausse selon les hypothèses auquelles elle est assugettie,

Exemples : ABC est un triangle isocèl, x^2+5 admet une solution entière, la suite (u_n) est convergente.

Définition 3

Un axiome est une proposition que l'on admet vraie, sans démonstration.

Exemple : (Cinquième postulat d'Euclide) Par un point extérieur une droite D passe une droite et une seule parllèlle à D.

Définition 4

Un théorème est une proposition importante dont il faut établir la véracité, par un raisonnement logique usant des des axiomes et des résultats qui lui sont antéreurs.

Exemples :

1. Théorème de Pytaghore : Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2+AC^2=BC^2$
2. Une fonction réelle dérivable est continue

Définition 5

Une conjecture est une propostion que l'on estime vraie, sans parvenir à la démontrer.

Exemple :

1. (La conjecture de FERMAT) L'équation $x^n + y^n = z^n$, n'a pas de solution x, y, z entiers naturel non tous nuls, pour $n \geq 3$. (Cette conjecture date du XVIIe siècle et elle a été démontrée récemment, en 1994, qu'elle est vraie).

Connecteurs logiques

La négation d'une poposition

Notons que la logique ne présente que deux valeurs de verité : Vrai ou faux, on dit aussi 1 ou 0

Définition 6

Soit P une proposition. La négation de P notée $\bar{P}$ (lire "Non P ") est définie par la table de vérité suivante :

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

La conjonction

Définition 7

Le connecteur logique **ET** porte sur deux propositions. La proposition (P et Q) notée $P \wedge Q$ est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies. La proposition $P \wedge Q$ est fausse dans les autres cas. Elle est formullée par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction

Définition 8

Le connecteur logique **OU** porte sur deux propositions. La proposition (P ou Q) notée $P \vee Q$ est fausse si les deux propositions sont simultanément fausses, la proposition $P \vee Q$ est vraie dans les autres cas. Elle est formullée par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'implication

Définition 9

Le connecteur logique : "**Si...alors**", porte sur deux propositions. La proposition (Si P alors Q) ou encore P implique Q, notée $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition P vraie et la proposition Q fausse, la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie dans les autres cas.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition 10

On dit que P est équivalente à Q et on note $P \Leftrightarrow Q$ si, $P \Rightarrow Q$ ET $Q \Rightarrow P$.On a $P \Leftrightarrow Q$ est représentée par la table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exercice :

Montrer que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$.

Remarques :

1. On notera que "faux" implique tout ce que l'on veut...
2. Lorsque l'on a $P \Rightarrow Q$, on dit que Q est une condition nécessaire à P, et que P est une condition suffisante à Q. On lit aussi, P si et seulement si Q

Exemple :

Par exemple un triangle équilatéral est nécessairement isocèle. Pour montrer qu'un triangle est isocèle, il est suffisant qu'il soit équilatéral mais cela n'est pas nécessaire.

Résultats sur les connecteurs

Proposition 1

Soient P, Q et R trois propossitions, alors

1. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
2. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
3. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$,

On peut écrire alors : $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$.

Proposition 2

Soient P, Q et R trois propossitions, alors

1. $P \vee P \Leftrightarrow P$.
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.
3. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \vee Q$. On peut écrire alors : $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

Proposition 3

Soient P, Q et R trois propossitions, alors :

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$.
2. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$.
3. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
4. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
5. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

Les quantificateurs

Définition 11

Un quantificateur permet de préciser le domaine de validité d'une proposition. Le symbole $\forall$ qui signifie : "quel que soit ou pour tout représente le quantificateur universel.

Définition 12

Le symbole $\exists$ qui signifie il existe au moins un représente le quantificateur existentiel.

Exemple

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2$ est positif.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$, tel que $x^2 - 2 = 0$,

Remarque

L'ordre des quantificateurs dans une propostion P est déterminant dans sa portée mathématique.

Exemples

1. La proposition : $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0$, est une proposition vraie.
2. La proposition $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}$, tel que $x + y = 0$, est une proposition fausse.

Lorsque quantificateur $\forall$ figure dans une propostion P, il devient quantificateur $\exists$ dan $\bar{P}$
Exemple
$P : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -2$ et $\bar{P} : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -2$.

0.1 Les grands types de raisonnements

Le raisonnement déductif

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant :

Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{Z}$ est impair , alors n^2 est impair. En effet écrivons $n = 2m+1$, pour un certain $m \in \mathbb{Z}$,

$$x^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2\left(2m^2 + 2m\right) + 1$$

Donc x^2 est impair.

Le raisonnement par l'absurde

Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

On veut montrer que P est vraie. Si $\bar{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$, en effet sinon, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + a + 1 \leq 0$, d'où $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 0$, ceci est absurde. Donc, P est vraie.

Le raisonnement par contraposée

Repose sur l'équivalence suivante : soient P et Q deus propositions, alors

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

Exemple :

Si un entier naturel n dont le chiffre des unités en base dix est 7, alors n n'est pas un carré parfait.

Raisonnons par contraposée. Supposons que n est un carré parfait, montrons que le chiffre des unités de n ne peut être 7. Ecrivons $n = 10r + s$, pour certains $r, s \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq 9$, $n^2 = 100r^2 + 20rs + s^2$. Or le chiffre des unités de s^2 est exactement celui de n^2. Il reste maintenant à examiner les chiffres de unités de s qui sont respectivement : $0; 1; 4; 9; 6; 5; 6; 9; 4; 1$, et 7 ne figure pas parmi ces derniers.

Le raisonnement par récurrence

Soit P_n une propostion dépendante de $n \in \mathbb{N}$,
Si P_{n_0} est vraie, et pour tout $n \geq n_0, P_n$ vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ est vraie, alors P_n est vraie $\forall n \geq n_0$.

Ensembles

Nous allons définir sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E des opérations de partie complémentaire, d'intersection et de réunion.

L'ensemble E étant donné et $A, B, C, \cdots$ désignant des parties de E (donc des éléments de $\mathcal{P}(E)$), on définit les ensembles suivant.

- le complémentaire de A dans E est l'ensemble noté $C_E A$, ou $E \backslash A$ (lire E moins A) ou $\bar{A}$ des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (x \notin A))$$

ou encore par :

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

- L'intersection de A et B, notée $A \cap B$:

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

ou encore :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit alors que A et B sont disjointes.
Par exemple A et $\bar{A}$ sont disjointes.

- La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E :

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

ou encore :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- La différence de A et B, notée $A \backslash B$:

$$(x \in A \backslash B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

ou encore :

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ainsi $\bar{A} = E \backslash A$.

– La différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B$:

$$(x \in A \Delta B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))$$

Par exemple, on a $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta E = \bar{A}$.

Théorème 1

Soient E un ensemble et $A, B, C, \cdots$ des sous-ensembles de E. On a :

1. commutativité :

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \Delta B = B \Delta A$$

2. associativité :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

3. distributivité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. différence symétrique :

$$A \Delta A = \emptyset$$
$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$
$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$
$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

5. négations :

$$\bar{\bar{A}} = A$$
$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \Leftrightarrow ((x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \cdots \wedge (x \in A_n))$$

et :

$$(x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \Leftrightarrow ((x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \cdots \vee (x \in A_n))$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

l'intersection et :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

la réunion.
On vérifie facilement que pour tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset A_j \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Définition 13

On dit qu'une famille $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ de parties d'un ensemble E forme une partition de E si les A_k sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que $A_k \cap A_j = \emptyset$ pour $1 \leq k \neq j \leq n$ de réunion égale à E, soit $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$.
Dans le cas où (A_1, A_2) forme une partition de E, on a nécessairement $A_2 = \overline{A_1}$.

Définition 14

Étant donné deux ensembles E et F, on appelle produit cartésien de E par F l'ensemble $E \times F$ des couples (x, y) formés d'un élément x de E et d'un élément y de F.

Exercice Montrer que l'ensemble :

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

0.1.1 Applications. Notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité

Les notations E, F, G désignent des ensembles.

Définition 15

On appelle application, ou fonction, de E dans F (ou de E vers F) toute partie Γ du produit cartésien $E \times F$ telle que :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F \mid (x, y) \in \Gamma.$$

En notant f une application de E dans F , on notera pour tout $x \in E, f(x)$ l'unique élément de F tel que $(x, f(x)) \in \Gamma$ et on dira que $f(x)$ est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f.

On dira aussi que E est l'ensemble de départ (ou l'ensemble de définition), F l'ensemble d'arrivée et Γ le graphe de l'application f.

Définition 16

Soit f une application de E dans F. Pour toute partie A de E, l'image de A par f est le sous ensemble de F noté $f(A)$ et défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Pour toute partie B de F, l'image réciproque de B par f est le sous ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ et défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

On a donc, pour tout $y \in F$:

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \mid y = f(x)$$

et pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé l'image de f.

Exemple On a $f(\emptyset) = \emptyset, f(\{x\}) = \{f(x)\}$ pour tout $x \in E, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$.

Exemple Pour $f : x \mapsto x^2$ avec $E = F = \mathbb{R}$, on a $f^{-1}\{0\} = \{0\}, f^{-1}\{-1\} = \emptyset$ et $f^{-1}\{1\} = \{-1, 1\}$.

Théorème 2

Soit f une application de E dans F. Pour toutes parties A, B de E et C, D de F, on a :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
6. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
7. $f^{-1}(\bar{C}) = \overline{f^{-1}(C)}$

Exercice Vérifier sur un exemple que l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ n'est pas toujours vérifiée.

Solution Considérer $f : x \mapsto \sin(x)$ avec $A = [-\pi, \pi]$ et $B = [0, 2\pi]$. On a :

$$f(A \cap B) = f([0, \pi]) = [0, 1] \subsetneqq f(A) \cap f(B) = [-1, 1].$$

Définition 17

Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G. La composée de f par g est la fonction de E dans G notée $g \circ f$ et définie par :

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Ce qui peut se schématiser par :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Définition 18

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est :

1. injective (ou que c'est une injection) si deux éléments distincts de E on deux images distinctes dans F, soit :

$$x_1 \neq x_2 \text{ dans } E \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ dans } E$$

2. surjective (ou que c'est une surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent dans E, soit :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x)$$

3. bijective (ou que c'est une bijection) si elle est à la fois injective ou surjective.

Une injection $\Leftrightarrow$ tout élément de y a au plus un antécédent par f $\Leftrightarrow$ pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution x dans E $\Leftrightarrow$ si x_1 et x_2 sont deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

Une surjection $\Leftrightarrow$ pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution x dans E $\Leftrightarrow f(E) = F$.

Une bijection $\Leftrightarrow$ tout élément de y a un unique antécédent par f, $\Leftrightarrow$ pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$ a une et une seule solution x dans E, ce qui permet de définir l'application réciproque de f, notée f^{-1}, de F dans E par :

$$\left(y \in F \text{ et } x = f^{-1}(y)\right) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y = f(x)).$$

Cette application f^{-1} est une bijection de F dans E.

$f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

Définition 19

On appelle permutation d'un ensemble E toute bijection de E dans lui même.
On note en général $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E.

Exemple L'application $x \mapsto x^2$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, mais non injective. Elle bijective de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice Montrer qu'une application f strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective.

Théorème 3

Soient E, F, G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective (la composée de deux injections est une injection).
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective (la composée de deux surjections est une surjection).
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective (la composée de deux bijections est une bijection) et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice Soient E, F, G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
3. si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective ;
4. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Théorème 4

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. S'il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$, alors f est injective.
2. S'il existe une application h de F dans E telle que $f \circ h = Id_F$, alors f est surjective.
3. S'il existe deux applications g et h de F dans E telles que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$, alors f est bijective et $g = h = f^{-1}$.

Exercice Soient E un ensemble et f une application de E dans E. Montrer que f est injective si, et seulement si, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour toutes partie A et B de E.

Exercice Soient E un ensemble et f une application de E dans E. Montrer que f est bijective si, et seulement si, $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ pour toute partie A de E.

Solution Supposons f bijective. Un élément y de E est dans $f(\bar{A})$ si, et seulement si, il s'écrit $y = f(x)$ où x est uniquement déterminé dans $\bar{A}$, ce qui implique $y \notin f(A)$ (sinon $y = f(x') = f(x)$ avec $x' \in A$ et $x = x' \in A$, ce qui contredit $x \in \bar{A}$). On a donc $f(\bar{A}) \subset$

$\overline{f(A)}$. Si $y \notin f(A)$, il s'écrit $y = f(x)$ (f est bijective) et $x \notin A$, donc $y \in f(\bar{A})$.On a donc $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ et $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

Supposons que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ pour toute partie A de E. En particulier, on a $f(E) = f(\bar{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \bar{\emptyset} = E$ et f est surjective. Si $x \neq x'$ dans E, en remarquant que $x' \in \overline{\{x\}}$, on a $f(x') \in f(\overline{\{x\}}) = \overline{\{f(x)\}}$ et $f(x) \neq f(x')$. Donc f est injective.