Chapitre 2 : Suites numériques

1. Définition de la limite d'une suite

Définition. On appelle suite numérique (réel) toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On pose $u(n) = u_n$. u_n s'appelle le terme général de la suite.

On dit que v est une sous-suite d'une suite u lorsque $v = u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Une suite u se note traditionnellement $u = (u_n)_{n \geq 0}$ (ou, plus simplement, (u_n)) et une sous-suite $v = u \circ \varphi = (u_{\varphi_n})_{n \geq 0}$.

Remarque. La sous-suite φ vérifie, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. En effet, par récurrence, on a $\varphi(0) \geq 0$ car φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Supposons que $\varphi(n) \geq n$, comme φ est strictement croissante $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ donc, $\varphi(n+1) > n \Rightarrow \varphi(n+1) \geq n+1$.

Définition. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une limite ℓ quand n tend vers l'infini si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

ou de façon équivalente,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]\,\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[, \quad \forall n \geq N$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et converge vers ℓ. On note

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Définition. On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand n tend vers l'infini si

$$\forall M > \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \geq M \quad \text{(resp. } u_n \leq -M \text{).}$$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

Théorème. La limite d'une suite est unique.

Preuve : Supposons que (u_n) admet deux limites notées ℓ_1 et ℓ_2. Soit $\varepsilon > 0$, pour $\varepsilon/2$, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon/2$$

ceci d'une part.

D'autre part, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2$ alors $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, on choisit un

$$N_2 \geq N_1, \;\; \forall n \geq N_2 \geq N_1, \;\; |u_n - \ell_2| < \varepsilon/2.$$

Ce qui nous conduit au résultat suivant grâce à l'inégalité triangulaire

$$|\ell_2 - \ell_1| = |(u_n - \ell_1) - (u_n - \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

On a donc obtenu que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\ell_2 - \ell_1| < \varepsilon$$

D'où l'égalité $\ell_2 = \ell_1$. Par suite, la limite, quand elle existe, est unique.

Proposition. La suite $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ et la suite $u_n = n \to +\infty$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\varepsilon} < N \Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon$, pour tout $n \geq N$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Soit $M > 0$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M < N$, alors pour tout $n \geq N$, on a $n > M \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Proposition. Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ alors toute sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ de (u_n) est convergente et converge vers la même limite ℓ.

Preuve : Soient (u_n) une suite convergente de limite ℓ et $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ une sous-suite de (u_n). Pour $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$, comme φ est strictement croissante alors $\forall n \geq N \; \varphi(n) > \varphi(N) \geq N$, donc, $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$. D'où $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

Remarque. Si une suite (u_n) admet une sous-suite non convergente ou deux suites convergentes vers deux limites différentes alors la suite (u_n) n'est pas convergente.

Proposition. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite alors, u_n est convergente si, et seulement si, les deux sous-suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont convergentes et ont la même limite.

Proposition. Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ, alors la suite $(|u_n|)$ est convergente et a pour limite $|\ell|$. La réciproque est fausse sauf si $\ell = 0$.

Preuve : Rappelons que dans $\mathbb{R}$ on a une deuxième inégalité triangulaire sous la forme,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. D'après la deuxième inégalité triangulaire, on on obtient,

$$\forall n \geq N, \quad ||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$

Si $\ell = 0$, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow ||u_n| - 0| = |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

Remarque. S_i (u_n) est bornée alors il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$

Preuve : Comme (u_n) est bornée, ils existent m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. Posons $A = \max(-m, M)$, on a donc, $u_n \leq M \leq A$ et $-u_n \leq -m \leq A$. Donc, $|u_n| \leq A$. D'où le résultat.

Proposition. Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse en général.

Preuve : Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ, alors pour $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| < 1$, donc $\forall n \geq N, |u_n| < |\ell| + 1$, Posons $A = \max(|u_0|, |u_0|, \ldots, |u_N|)$ (toute partie fini de $\mathbb{R}$ admet un plus petit et un plus grand élément car elle est en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$).

Posons maintenant $M = \max(A, |\ell| + 1)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. D'où la suite (u_n) est bornée.

Remarque. La suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais non convergente.

Preuve : On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 1 \to 1$ et $u_{2n+1} = -1 \to -1$. Donc, $u_n = (-1)^n$ admet deux sous-suites qui n'ont pas la même limite, par suite u_n n'est pas convergente.

Remarque Si une suite admet une sous-suite non bornée alors elle n'est pas convergente.

Proposition. Soit u_n une suite convergente vers $\ell > 0$, telle que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\inf \{u_n, n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ respectivement, alors leur somme $(u_n + v_n)$ est convergente et a pour limite $\ell_1 + \ell_2$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, pour $\varepsilon/2$, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$ alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon/2$ d'une part. D'autre part, $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2$ (on choisit un $N_2 \geq N_1$), $|v_n - \ell_2| < \varepsilon/2$. On obtient, grâce l'inégalité triangulaire, $\forall n \geq N_2$,

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_1)| = |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 + \ell_2$$

Proposition. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \neq 0$ et convergente vers $\ell \neq 0$, alors la suite $(1/u_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite $1/\ell$.

Preuve : On a $|u_n| > 0 \to |\ell| > 0$, d'où $\exists \alpha > 0$, tel que $\inf \{|u_n|, n \in \mathbb{N}\} \geq \alpha$. Soit $\varepsilon > 0$, pour $\alpha|\ell|\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que, $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \alpha\varepsilon|\ell|$, ce qui donne

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell u_n|} \leq \frac{|u_n - \ell|}{|\ell|\alpha} < \varepsilon.$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} u_n}$$

Proposition. Soit (u_n) une suite telle que $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$), alors

$$u_n \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \to +\infty \quad \left(\text{resp} \quad \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$$

Preuve : Supposons que $u_n \to 0$, soit $M > 0$, pour $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, n \geq N \Rightarrow 0 < u_n < \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{u_n}$. D'où, $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.

Réciproquement, Supposons que $\frac{1}{u_n} \to +\infty$, soit $\varepsilon > 0$, pour $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, n \geq N \Rightarrow 0 < M < \frac{1}{u_n} \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{M} = \varepsilon$. D'où, $u_n \to 0$

Corolaire. Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| \searrow 0$, alors $\frac{1}{|u_n|} \to +\infty$.

Proposition. Soit (u_n) une suite telle que $u_n > 0$, alors ($u_n \to \ell \Rightarrow \ell \geq 0$.)

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell < 0$, pour $\varepsilon = -\ell/2, \exists N, \forall n \geq N$,

$$\frac{\ell}{2} < u_n - \ell < -\frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\ell < u_n - \ell < \frac{\ell}{2} < 0.$$

Donc, $\forall n \geq N, u_n < 0$. Contredit l'hypothèse $u_n > 0$. D'où, ($u_n > 0, u_n \to \ell \Rightarrow \ell \geq 0$.)

Remarque. La limite reste positive même si $u_n > 0$, qu'à partir d'un certain rang n_0 i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Proposition. (Comparaison) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ_1 et ℓ_2 respectivement alors si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$ alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Le résultat reste valable si on suppose que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, c'est à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < v_n$.

Preuve : Comme $u_n < v_n$, à partir d'un certain rang, alors $w_n = v_n - u_n > 0$, à partir d'un certain rang, comme u_n et v_n sont convergentes alors w_n est convergente et $\lim_{n\to+\infty} w_n \geq 0$. Or

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2 - \ell_1 \geq 0$$

D'où le résultat, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n < v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Proposition. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et v_n une suite telle que $v_n \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $v_n \to +\infty$.

Preuve : Soit $M > 0$, comme $u_n \to +\infty, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n > M$, comme $v_n \geq u_n$ alors $\forall n \geq N, v_n > M$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Proposition. Soient (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\forall c \in \mathbb{R}, u_n + c \to +\infty$.

Preuve : Si $c > 0$, $u_n+c \geq u_n$ et comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + c) = +\infty$. Si $c < 0$, soit $M > 0$, pour $M - c > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M - c, \forall n \geq N$, par suite $u_n + c > M, \forall n \geq N$ d'où $\lim_{n\to+\infty}(u_n + c) = +\infty$.

Proposition. Soient (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et v_n une suite minorée, alors la suite $u_n + v_n \to +\infty$.

Preuve : Comme (v_n) est minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $m \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, donc $u_n + m \leq u_n + v_n$, or comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + m) = +\infty$ et comme $u_n + m \leq u_n + v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

Proposition. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors la suite (u_n) est minorée.

Preuve : Soit $M = 1 > 0$, comme $u_n \to +\infty, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, u_n > 1$, comme $\{u_n, n \leq N\}$ est fini il admet un élément minimal, notons $u_{n_0} = \min\{u_n, n \leq N\}$ alors alors $(\min(1, u_{n_0}) \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. D'où u_n est minorée.

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} v_n$, alors la suite $u_n + v_n \to +\infty$.

Preuve : Comme $v_n \to +\infty$ alors elle est minorée par suite, $u_n + v_n \to +\infty$.

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et v_n bornée, alors la suite $u_n v_n \to 0$.

Preuve : Comme (v_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|v_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $u_n \to 0$, alors pour $\frac{\varepsilon}{M} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Comme $|u_n v_n| < M\,|u_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \forall n \geq N$, il vient alors $u_n v_n \to 0$.

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$ alors la suite produit $(u_n v_n)$ est convergente et a pour limite $\ell_1\ell_2$.

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) a pour limite $\lambda\ell_1$. $\quad (v_n = \lambda, \forall n \in \mathbb{N}.)$

Preuve : u_n est une suite convergente donc bornée. Posons $M = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$ et $A = \max(M, |\ell_2|)$. Soit $\varepsilon > 0$, pour $\varepsilon/2A$, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$ alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon/2A$ d'une part et $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |v_n - \ell_2| < \varepsilon/2A$, d'autre part.

$\forall n \geq \max(N_1, N_2)$, on a,

$$\begin{aligned} | u_n v_n - \ell_1 \ell_2 | &= | u_n (v_n - \ell_2) + \ell_2 (u_n - \ell_1) | \\ &\leq | u_n || v_n - \ell_2 | + | \ell_2 || u_n - \ell_1 | \\ &< M \frac{\varepsilon}{2A} + | \ell_2 | \frac{\varepsilon}{2A} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n \times \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell_1 \ell_2$$

Théorème.(Théorème des gendarmes) Soient $(u_n), \quad (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq w_n \leq v_n$$

Si (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite ℓ, alors (w_n) est convergente de limite ℓ elle aussi.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, comme $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_1, \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

et $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$. Donc, $\forall n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, on a $\ell - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell - \varepsilon$. Ainsi, $w_n \to \ell$.

2. Suites monotones

Définition. Une suite (u_n) est dite
1. Croissante (resp. à partir d'un certain rang) si $u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, (resp. $\forall n \geq n_0$),
2. Décroissante (resp. à partir d'un certain rang) si $u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, (resp. $\forall n \geq n_0$).
3. Monotone si elle est soit croissante soit décroissante.

Théorème.(Théorème de la convergence monotone)
1. Toute suite (u_n) croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente et converge vers sa borne supérieure $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$).
2. Toute suite (u_n) croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). C'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad \left(\text{resp. } \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \right)$$

Preuve : Soit (u_n) une suite,

1. supposons que (u_n) est croissante et majorée, donc, d'après le théorème de la borne supérieure, l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure notée M. D'antre part, par le théorème de la caractérisation de la borne supérieure on a,
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad M - \varepsilon < u_N \leq M$, comme u_n est croissante alors $\forall n \geq N$, $u_N \leq u_n \leq M$, on a alors montré que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad 0 < M - u_n < \varepsilon$$

C'est à dire que,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Supposons maintenant que u_n est une suite décroissante minorée, alors, ($-u_n$) est une suite croissante et majorée, donc converge vers sa borne supérieure. D'autre part, on sait que $\sup \{-u_n : n \in \mathbb{N}\} = -\inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Donc, on a montré que,

$$-\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (-u_n) = \sup \{-u_n : n \in \mathbb{N}\} = -\inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

D'où le résultat,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

2. Supposons que (u_n) est une suite strictement croissante et non majorée. Comme u_n est non majorée alors,

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } u_N > M$$

Comme (u_n) est strictement croissante alors $\forall n \geq N$, on a $u_n > u_N \geq M$. Ainsi, a montré que,

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > M \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Si (u_n) est strictement décroissante non minorée alors $(-u_n)$ est strictement croissante non majorée d'où

$$-\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Preuve : Comme v_n est décroissante et u_n est croissante alors $v_n - u_n$ est décroissante et converge vers 0 , d'après le lemme précédent, $v_n - u_n \geq 0$, donc $u_n \leq v_n$, pour tout $n \geq 0$. Ceci d'une part, d'autre part, u_n est croissante majorée par v_0 et v_n est décroissante minorée par u_0 (remarquer que $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq v_n \leq \ldots v_0$.) Donc, u_n et v_n sont convergentes vers ses bornes supérieure et inférieure respectivement, on les note ℓ_1 et ℓ_2, comme $\forall n, u_n \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq v_n$, on a $\forall n, 0 \leq \ell_2 - \ell_1 \leq v_n - u_n$, or $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Par suite $\ell_2 = \ell_1$. D'où le résultat,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$$

Théorème. (Les segments emboités) Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que
1. $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$,
2. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,
3. $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ alors

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\geq 0} [a_n, b_n] = \{\ell\}$$

Preuve : Le deuxième point des hypothèses la suite a_n est croissante et la suite b_n est décroissante et par le troisième point on conclut que a_n et b_n sont adjacentes, par le théorème précédent elles sont convergentes vers la même limite qu'on la note ℓ telle que $a_n \leq \ell \leq b_n$, c'est à dire $\{\ell\} \subset [a_n, b_n]$, $\forall n$, donc $\{\ell\} \subset \bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n]$. Pour l'inclusion inverse, soit $\lambda \in \bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n]$, donc $a_n \leq \lambda \leq b_n, \forall n \geq 0$, par passage à la limite, on trouve que $\ell \leq \lambda \leq \ell$, par suite $\lambda = \ell$, ce qui donne $\bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n] \subset \{\ell\}$, d'où le résultat, par double inclusion,

$$\bigcap_{n\geq 0} [a_n, b_n] = \{\ell\}$$

Corolaire. Le théorème de la convergence monotone $\Rightarrow$ le théorème des segments emboités.

3. Suites de Cauchy

Définition. Une suite (u_n) est de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon > 0), \quad (\exists N \in \mathbb{N}), \quad (\forall p, q \in \mathbb{N}), \quad (p \geq N, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Ou de façon équivalente

$$(\forall \varepsilon > 0), \quad (\exists N \in \mathbb{N}), \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \quad (n \geq N \Rightarrow |u_{n+k} - u_n| < \varepsilon$$

Proposition. Toute suite convergente est de Cauchy.
Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ, montrons qu'elle est de Cauchy, soit $\varepsilon > 0$, pour $\varepsilon/2$ et comme $u_n \to \ell, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Soit $p, q \geq N$, alors on a

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Remarque. Dans la pratique on aura à montrer qu'une suite n'est pas de Cauchy, c'est à dire montrer que

$$(\exists \varepsilon > 0), \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad (\exists p_n, q_n \in \mathbb{N}), \quad (p_n \geq n, q_n \geq n \Rightarrow |u_{p_n} - u_{q_n}| \geq \varepsilon$$

Exemple. On donne un exemple des suites qui ne sont pas de Cauchy et un autre des suites de Cauchy,

1. La suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, avec $0 < \alpha \leq 1$, n'est pas de Cauchy, en effet,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{n}{(2n)^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} \to +\infty$$

si $0 < \alpha < 1$ et $\frac{1}{2}$ si $\alpha = 1$.

Proposition : Toute suite de Cauchy est bornée. La réciproque est fausse en général.
Preuve : Fixons $\varepsilon = 1$, par exemple, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N+1, ||u_n| - |u_N| < 1$, ce qui donne que $|u_n| < |u_N| + 1$. Posons ensuite, $M = \max\{|u_0|, |u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$. on a alors, $\forall n, |u_n| \leq M$. D'où la suite u_n est bornée.

Théorème (Bolzano - Weierstrass) : Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Corrolaire : Le théorème des segments emboités $\Rightarrow$ le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème ($\mathbb{R}$ est complet) : C'est-à-dire une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Lemme : Si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente elle est aussi convergente vers la même limite.

Preuve du Lemme : Soit (u_n) une suite de Cauchy, supposons qu'elle admet une sous-suite, notée $u_{\varphi(n)}$, convergente vers une limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, pour $\frac{\varepsilon}{2}$, d'une part il existe N_1 tel que $\forall p, q \geq N_1, |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'autre part, il existe N_2, tel que $\forall n \geq N_2, \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors pour tout $n \geq N$ on a $\varphi(n) \geq n \geq N$ et

$$|u_n - \ell| = \left|\left(u_n - u_{\varphi(n)}\right) + \left(u_{\varphi(n)} - \ell\right)\right| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Preuve du Théorème : Soit (u_n) une suite de Cauchy, (u_n) est bornée et d'après le théorème de Bolzano, (u_n) admet une sous-suite convergente et comme elle est de Cauchy on conclut, par le lemme précédent, qu'elle est convergente.

Corrolaire : Le théorème de Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow \mathbb{R}$ est complet.

Proposition : $\mathbb{R}$ est complet $\Rightarrow$ le théorème de la borne supérieure.

Théorème (Caractérisation de $\mathbb{R}$) : Les assertions suivantes sont équivalentes.
1. (Théorème de la convergence monotone) Toute suite croissante majorée converge.
2. (Théorèmes des segments emboités) Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.
3. (Théorème de Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.
4. ($\mathbb{R}$ est complet) Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente.
5. (Théorème de la borne supérieure) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Valeurs d'adhérence

Définition (Valeurs d'adhérence) : On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), si $\forall \varepsilon > 0,]\,\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon\,[$ contient une infinité de terme de la suite (u_n). Ceci est équivalent à dire que,

$$(\forall \varepsilon > 0), (\forall n \in \mathbb{N})\, (\exists k_n \geq n, u_{k_n} \in]\,\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[)$$

Proposition : λ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si, et seulement si, il existe une sous-suite extraite (u_{φ_n}) de (u_n) qui converge vers λ.

Preuve : λ est une valeur d'adhérence, pour $\varepsilon = 1$, et $n = 1$ $\exists n_1 > 1$ tel que $|u_{n_1} - \lambda| < 1$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = n_1, \exists n_2 > n_1$ tel que $|u_{n_2} - \lambda| < \frac{1}{2}$, ainsi pour $\frac{1}{k}$ on construit une suite u_{n_k}, sous-suite de (u_n), telle que $n_k > n_{k-1}$ et $|u_{n_k} - \lambda| < \frac{1}{k}$ comme $\frac{1}{k} \to 0$, quand $k \to +\infty$, la sous-suite $(u_{n_k}) \to \lambda$.

Proposition : Toute suite convergente admet sa limite comme unique valeur d'adhérence.
Preuve : Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ, soit λ une valeur d'adhérence de (u_n), il existe donc une sous-suite de u_n qui converge vers λ. Comme (u_n) est convergente, toutes ses sous-suites sont convergentes et ont même limite, c'est à dire que $\lambda = \ell$. Donc, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de u_n.

Remarque :
1. Si deux suites extraites d'une suite ne convergent pas vers la même limite alors la suite n'est pas convergente.
2. Si une suite admet plus qu'une seule valeur d'adhérence alors elle n'est pas convergente.

Proposition Soit (u_n) une suite bornée alors u_n est convergente si, et seulement si, elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

Applications

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}$ majorée alors $M = \sup A$ si, et seulement si, M est un majorant de A et il existe une suite (x_n) de points de A telle que $x_n \to M$.

Preuve : Tout d'abord A est supposé majoré donc admet une borne supérieure. La condition est nécessaire, en effet si $M = \sup A$, par définition de la borne supérieure, M est un majorant de A, d'autre part, par la caractérisation de la borne supérieure on a, en prenant pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in A$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < x_n \leq M,$$

ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.