Université Chouaib Doukkali
Ecole Supérieure de l'Éducation et de Formation (ESEF) - El Jadida

Année Universitaire : 2025-2026
Filière : Enseignement des Mathématiques
Module : Analyse 1 - Semestre : 1

Fiche d'exercices N° 4

Exercice 1. *En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les calculer les limites suivantes :*

1. $\lim_{x\to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, a, $b \in \mathbb{R}_+^*$.
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$.

Exercice 2. *Soit f une fonction réelle dérivable sur $[1,+\infty[$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(1)$.*

En utilisant le théorème Rolle, montrer qu'il existe un nombre réel $c > 1$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 3. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que l'on :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mid \sin x \mid \leqslant \mid x \mid$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant \exp x$.
3. $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) < x$.

Exercice 4. *Soient f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I et k une constante réelle positive.*
1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in I$, $\mid f'(x) \mid \leqslant k$
2. $\forall (x,x') \in I^2$, $\mid f(x) - f(x') \mid \leqslant k \mid x - x' \mid$

2. Montrer que si $I = [a,b]$, $a < b$, et que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f vérifie la propriété 1..

Exercice 5. *Déterminer la dérivée $n-$ième de la fonction réelle f définie par $f(x) = x^3 \exp x$, et calculer $f^{(n)}(0)$.*

Exercice 6. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$ avec f' continue en 0 et en 1 . On définit g sur $[0,1]$ par*

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

g est-elle continue ? dérivable ? Si non, quelle(s) hypothèse(s) faut-il ajouter pour que ce soit le cas ?

Exercice 7. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et A l'ensemble*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } f(x) \leqslant y\}.$$

Montrer que A est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$. Étudier la réciproque.