Université Chouaib Doukkali
Ecole Supérieure de l'Éducation et de Formation (ESEF) - El Jadida

Année Universitaire : 2025-2026
Filière : Enseignement des Mathématiques
Module : Analyse 1 - Semestre : 1

Fiche d'exercices N° 2

Exercice 1.

Montrer que la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ *est bornée.*

Exercice 2.

Étudier la suite $u=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3.
Montrer que pour tout réel x, la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]$$

où $[.]$ *est la partie entière, converge vers* $\frac{x}{2}$

Exercice 4.

Montrer que, pour tout réel $\alpha>1$*, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n\geqslant 1,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

est convergente.

Exercice 5.
Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite de réels positifs qui vérifie :*

$$\forall n\geqslant 1,\quad u_{n+1}\leqslant u_n+\frac{1}{n^2}$$

alors cette suite est convergente.

Exercice 6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{Z}$*. Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si, seulement si, elle est stationnaire.*

Exercice 7.
1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=l$*, alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$*. La réciproque est-elle vraie ?*

2. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=l$*, alors, pour toute application* $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *strictement croissante, on a* $\lim_{n\to+\infty}(u_{\varphi(n)}-u_n)=0$.

3. Montrer que les suites $u=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $w=(\ln(n))_{n\geqslant 1}$ *sont divergentes.*

4. Montrer que si $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ *est une fonction telle que la fonction* $g:x\mapsto xf(x)$ *soit minorée par un réel* $\lambda>0$*, alors la suite réelle* $u=\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)\right)_{n\geqslant 1}$ *est divergente.*

Exercice 8.
1.Montrer que la suite $u = (\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

2. Montrer que les suites réelles $u = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont divergentes.*

3. Étudier, de manière plus générale, les suites $u = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$*, où* θ *est un réel fixé.*

Exercice 9.
1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante, il en est de même de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des moyennes de Césaro définie par* $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l*, alors la suite* $\left(\frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes harmoniques converge aussi vers* l.

Exercice 10.

Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*
1. $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

2. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$
convergent vers la même limite.