Exercice 9

Soit A, B, C des événements définis sur le même espace probabilisé. Exprimer en utilisant les symboles des opérations sur les événements ci-dessous :

1. **A seul se réalise.**
2. **A et B se réalisent mais pas C.**
3. **A, B, C se réalisent simultanément puis aucun des trois ne se réalise simultanément.**
4. **Au moins un des événements se réalise.**
5. **Un seul événement se réalise.**
6. **Au moins deux événements se réalisent.**
7. **Deux événements au plus se réalisent.**
8. **Deux événements et deux seulement se réalisent.**

Solution de l'exercice 9

1. **A seul se réalise :**
$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$
2. **A et B se réalisent mais pas C :**
$$A \cap B \cap \overline{C}.$$
3. **A, B, C se réalisent simultanément puis aucun des trois :**
$$A \cap B \cap C, \qquad \overline{(A \cup B \cup C)}.$$
4. **Au moins un des événements se réalise :**
$$A \cup B \cup C.$$
5. **Un seul événement se réalise (exactement un) :**
$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).$$

6. **Au moins deux événements se réalisent :**

$$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

7. **Deux événements au plus se réalisent :**

$$\overline{(A \cap B \cap C)}.$$

8. **Deux événements et deux seulement se réalisent (exactement deux) :**

$$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C).$$

Exercice 10

On considère une urne qui contient 8 boules vertes et 6 boules rouges.
On tire 5 boules de l'urne successivement et sans remise.

1. **Calculer les probabilités suivantes :**
    1. **On obtient des boules vertes.**
    2. **On obtient une première boule verte, les deux suivantes rouge et les deux dernières vertes.**
    3. **On obtient au plus une boule rouge.**
    4. **On obtient deux boules vertes et trois boules rouges.**
2. **Reprendre les questions de 1 avec un tirage successif avec remise.**
3. **Reprendre les questions de 1 avec un tirage simultané.**

Solution de l'exercice 10

1. 1. **On obtient des boules vertes.** $P(A) = \frac{A_8^5}{A_{14}^5}$.
   2. **On obtient une première boule verte, les deux suivantes rouge et les deux dernières vertes.**

   $$P(B) = \frac{A_8^1\, A_6^2\, A_7^2}{A_{14}^5}.$$

   3. **On obtient au plus une boule rouge.**

   $$P(C) = \frac{A_8^5 + 5 \times A_6^1 A_8^4}{A_{14}^5}.$$

   4. **On obtient deux boules vertes et trois boules rouges.**

   $$P(D) = \frac{10 \times A_8^2 A_6^3}{A_{14}^5}.$$

Solution de l'exercice 10

2. 1. **On obtient des boules vertes.** $P(A) = \frac{8^5}{14^5}$.
   2. **On obtient une première boule verte, les deux suivantes rouge et les deux dernières vertes.**

$$P(B) = \frac{8^1 \times 6^2 \times 8^2}{14^5}.$$

   3. **On obtient au plus une boule rouge.**

$$P(C) = \frac{8^5 + 5 \times 6^1 \times 8^4}{14^5}.$$

   4. **On obtient deux boules vertes et trois boules rouges.**

$$P(D) = \frac{10 \times 8^2 \times 6^3}{14^5}.$$

Solution de l'exercice 10

3.
   1. **On obtient des boules vertes.** $P(A) = \frac{C_8^5}{C_{14}^5}.$
   2. **On obtient une première boule verte, les deux suivantes rouge et les deux dernières vertes.**

      On ne peut pas considérer l'ordre dans un tirage simultané. Cette situation n'a de sens que pour un tirage successif.

   3. **On obtient au plus une boule rouge.**

$$P(C) = \frac{C_8^5 + C_6^1 C_8^4}{C_{14}^5}.$$

   4. **On obtient deux boules vertes et trois boules rouges.**

$$P(D) = \frac{C_8^2 C_6^3}{C_{14}^5}.$$

Exercice 11

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes différentes. On note A l'événement: "la première lampe est défaillante" et B l'événement: "la deuxième lampe est défaillante". Des essais ont montré que:

$$p(A) = 0,55, \quad p(B) = 0,3 \quad \textbf{et} \quad p(A \cap B) = 0,165.$$

1. **Les événements A et B sont-ils incompatibles?**
2. **Les événements A et B sont-ils indépendants?**
3. **Exprimer et calculer la probabilité de l'événement "au moins une des deux lampes est défaillante".**
4. **Exprimer et calculer la probabilité de l'événement "les deux lampes fonctionnent".**
5. **Exprimer et calculer la probabilité de l'événement "la première lampe fonctionne et la deuxième est défaillante".**

Solution de l'exercice 11

1. **Les événements A et B sont-ils incompatibles ? On a $P(A \cap B) = 0,165 \neq 0$, donc $A \cap B \neq \varnothing$ Ainsi A et B ne sont pas incompatibles.**
2. **Les événements A et B sont-ils indépendants ?**

   $$P(A) \times P(B) = 0,55 \times 0,3 = 0,165$$

   Comme $P(A \cap B) = 0,165$, donc les événements sont indépendants.
3. **Probabilité qu'au moins une lampe soit défaillante c a d l'événement $A \cup B$**

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   $$P(A \cup B) = 0,55 + 0,3 - 0,165 = 0,685$$

Solution de l'exercice 11

4. **Probabilité que les deux lampes fonctionnent c a d l'événement $\overline{A} \cap \overline{B}$**

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,685 = 0,315$$

5. **Probabilité que la première lampe fonctionne et la deuxième est défaillante c a d l'événement $\overline{A} \cap B$**

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,165 = 0,135$$

Exercice 12

On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i. Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :

$$p_2 = 0,05,\ p_3 = 0,2,\ p_4 = 0,25,\ p_5 = 0,155,\ p_6 = 0,12.$$

1. **Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 1 ?**
2. **Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?**

Solution de l'exercice 12

1. **Probabilité de la face 1 On a**

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

donc

$$p_1 = 1 - (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) = 0,225$$

2. **Probabilité d'obtenir un nombre impair**

$$\begin{aligned} P(\{1,3,5\}) &= P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) \\ &= p_1 + p_3 + p_5 \\ &= 0,225 + 0,2 + 0,155 \\ &= 0,58 \end{aligned}$$

Exercice 13

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un récepteur.

- **La probabilité qu'il achète un téléviseur est de 0,6.**
- **La probabilité qu'il achète un récepteur lorsqu'il a acheté un téléviseur est de 0,4.**
- **La probabilité qu'il achète un récepteur lorsqu'il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.**

1. **Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur et un récepteur ?**
2. **Quelle est la probabilité qu'il achète un récepteur ?**
3. **Sachant que le client achète un récepteur, quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?**

Solution de l'exercice 13

On a

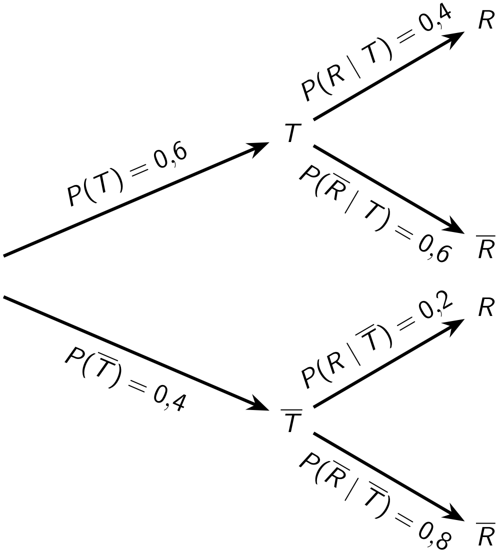
- T **: le client achète un téléviseur**
- R **: le client achète un récepteur**

1. Probabilité qu'il achète un téléviseur et un récepteur
On a

$$\begin{aligned} P(T \cap R) &= P(R \mid T)P(T) \\ &= 0,24. \end{aligned}$$

2. Probabilité qu'il achète un récepteur
On utilise la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R) = P(R \cap T) + P(R \cap \overline{T}) &= P(T)P(R \mid T) + P(\overline{T})P(R \mid \overline{T}) \\ &= 0,32. \end{aligned}$$


$P(T) = 0,6$
T
$P(R \mid T) = 0,4$
R
$P(\overline{R} \mid T) = 0,6$
$\overline{R}$
$P(\overline{T}) = 0,4$
$\overline{T}$
$P(R \mid \overline{T}) = 0,2$
R
$P(\overline{R} \mid \overline{T}) = 0,8$
$\overline{R}$

Solution de l'exercice 13

3. Probabilité qu'il achète un téléviseur sachant qu'il achète un récepteur
On applique la formule de Bayes

$$P(T \mid R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0,24}{0,32} = 0,75 = 0,75$$

Exercice 14

Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99% (i.e. test positif parmi les malades), mais il y a 0,2% de chances que le test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée malade sans l'être).

1. **Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?**
2. **Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?**

Solution de l'exercice 14

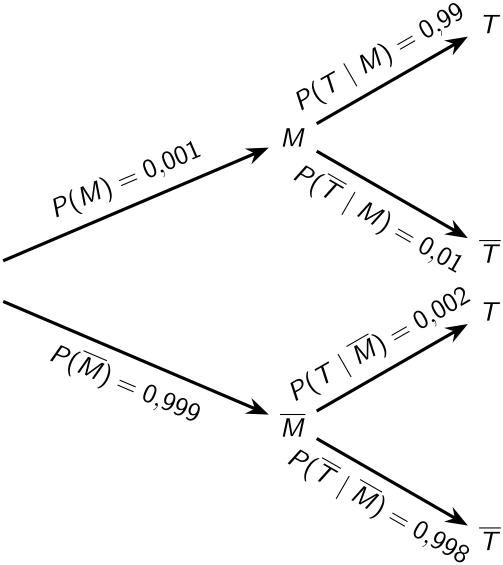
On a les événements suivants

- M **: la personne est malade.**
- $\overline{M}$ **: la personne n'est pas malade.**
- T **: le test est positif.**
- $\overline{T}$ **: le test est négatif.**

Donc, on a

$$\begin{aligned} P(M) &= 0{,}001, & P(\overline{M}) &= 0{,}999, \\ P(T \mid M) &= 0{,}99, & P(T \mid \overline{M}) &= 0{,}002, \\ P(\overline{T} \mid M) &= 0{,}01, & P(\overline{T} \mid \overline{M}) &= 0{,}998. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 14



Solution de l'exercice 14

1. Probabilité d'être réellement malade si le test est positif
On applique la formule de Bayes

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T \mid M)P(M) + P(T \mid \overline{M})P(\overline{M})}$$

2. Probabilité d'être malade si le test est négatif

$$P(M \mid \overline{T}) = \frac{P(\overline{T} \mid M)P(M)}{P(\overline{T} \mid M)P(M) + P(\overline{T} \mid \overline{M})P(\overline{M})}$$