المدرسة العليا للتربية والتكوين
ECOLE SUPERIEURE D'EDUCATION ET DE FORMATION
جامعة شعيب الدكالي
Université Chouaïb Doukkali

Statistique descriptive et Initiation à la probabilité

Filières: Mathématiques

Pr. D.El Moutawakil - Pr. A.Cheddour

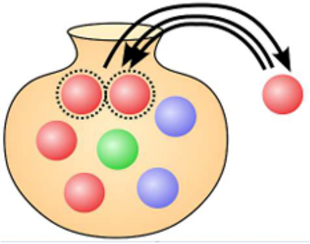
Année universitaire: 2025-2026

Introduction :

L'objectif de cette section est de compter le nombre d'éléments, appelé cardinal, d'un ensemble fini donné. Nous allons apprendre à répondre à des questions aussi diverses telles que :

- **De combien de façons peut-on asseoir 5 personnes autour d'une table ronde ?**

- **De combien de façons, dans une urne, peut-on tirer simultanément 2 boules parmi 7 boules ?**
- **Même question pour un tirage successif et sans remise.**
- **Même question pour un tirage successif et avec remise.**



- **Combien y a-t-il de résultats différents, en tenant compte de l'ordre, lorsqu'on lance deux dés, et on veut obtenir une somme égale à 7?**

- **Combien un ensemble fini de cardinal n possède-t-il de parties de cardinal $p \leq n$?**

  Pour $n = 3$, on donne l'exemple suivant :

E	$= \{a,\ b,\ c\}$
$\mathcal{P}(E)$	$= \{\ E,\ \varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},$
	$\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{c, a\}\ \}$

Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	**ensemble vide**
Ω	**ensemble plein**
$\{\omega\}$	**singleton de** Ω
A	**partie de** Ω
$\omega \in A$	ω **appartient à A**
$\overline{A}$	**complémentaire de** A **dans** Ω

Rappels sur les ensembles

Notations	**Vocabulaire**
$A \cup B$	**réunion de** A **et** B
$A \cap B$	**intersection de** A **et** B
$A \setminus B$	**intersection de** A **et** $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	A **et** B **disjoints**
$A \subseteq B$	A **inclus dans** B
$A \times B$	**produit cartésien de** A **et** B

Exemples :

Ensemble	Définition	$A = \{a, b\},\ B = \{b, c\},\ \Omega = \{a, b, c\}$
$\overline{A}$	$\{x \in \Omega;\ x \notin A\}$	$\{c\}$
$A \cup B$	$\{x \in \Omega;\ x \in A$ **ou** $x \in B\}$	$\{a, b, c\}$
$A \cap B$	$\{x \in \Omega;\ x \in A$ **et** $x \in B\}$	$\{b\}$
$A \setminus B$	$\{x \in \Omega;\ x \in A$ **et** $x \notin B\}$	$\{a\}$
$A \times B$	$\{(x, y);\ x \in A$ **et** $y \in B\}$	$\{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$

Problème de Combinatoire

Proposition

Soient A, B et C des parties d'un ensemble Ω.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ **et** $A \cup B = B$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$ $\qquad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$
- **Lois de Morgan :**

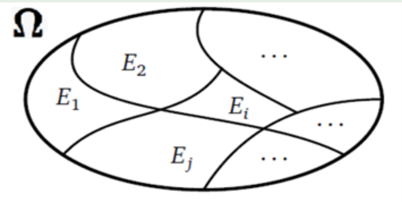
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Définition

La famille $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ est une partition de Ω ssi :

$$\begin{cases} \forall i \neq j : \quad E_i \cap E_j = \varnothing, \\ \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \end{cases}$$



Exemple :

Si $E \subset \Omega$, alors $\{E, \overline{E}\}$ est une partition de Ω car $E \cap \overline{E} = \varnothing$ et $E \cup \overline{E} = \Omega$.

L'indicatrice d'une partie :

Définition

L'indicatrice d'une partie A d'un ensemble E est définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } x \in A, \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

Proposition :

Pour tous A et B des parties de E on a :

$$\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A,$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B.$$

Cardinal d'un ensemble fini :

Définition

Le nombre fini d'éléments d'un ensemble dénombrable E est appelé cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$. Dans le cas contraire, on dit que E est infini.

Exemples :

- **Par convention,** $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.
- **Pour tous** $m, n \in \mathbb{Z}$ **avec** $m \leq n$, **l'ensemble** $\{m, \ldots, n\}$ **est fini de cardinal** $n - m + 1$.
- $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = +\infty$, **où** $\mathbb{N}$ **est l'ensemble des entiers naturels.**

Caractérisation du cardinal par l'indicatrice :

Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors,

$$\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in E} \chi_A(x).$$

Preuve : Il suffit de voir que :

$$\sum_{x \in E} \chi_A(x) = \sum_{x \in A} \chi_A(x) + \sum_{x \in E \setminus A} \chi_A(x)$$

$$= \sum_{x \in A} 1 + \sum_{x \in E \setminus A} 0$$

$$= \mathrm{card}(A).$$

Cardinal et union :

Théorème

Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints, alors $A \cup B$ est fini et :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Preuve :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \sum_{x \in E} \chi_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} (\chi_A(x) + \chi_B(x))$$

$$= \sum_{x \in E} \chi_A(x) \; + \; \sum_{x \in E} \chi_B(x)$$

$$= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Proposition

Soient A, B, C **et** $A_1, \ldots, A_n$ **des parties d'un ensemble fini** E**. Alors,**

1. $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.
2. $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.
3. **Formule de Poincaré :**

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

4. **Si** $A_1, \ldots, A_m$ **sont** m **ensembles finis deux à deux disjoints, alors** $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ **est fini et :**

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \text{card}(A_i).$$

5. **Si** $A_1, \ldots, A_n$ **sont** n **ensembles finis quelconques, alors** $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ **est fini et :**

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{card}(A_i).$$

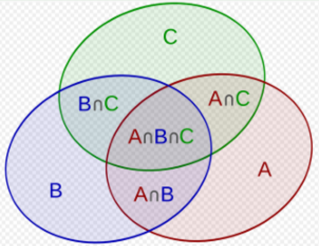
Preuve :

1. A **et** $\overline{A}$ **sont disjoints et on a :** $E = A \cup \overline{A}$**, donc** $\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(\overline{A})$**.**
2. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ **et l'union est disjointe.**
3. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ **et l'union est disjointe.**
4. **Par récurrence sur** n**.**
5. **Par récurrence sur** n**.**

Proposition : formule de Poincaré pour trois ensembles

Soient A, B et C trois ensembles finis. Alors,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) \\ &\quad - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$



Preuve : Il suffit d'appliquer le résultat précédent pour deux ensembles.

Nombre de parties d'un ensemble :

Théorème

Si E **est un ensemble fini de cardinal** n**, et** $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties de** E **défini par :**$\mathcal{P}(E) = \{A,\ A \subset E\}$. **Alors :**

$$\text{card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^{\text{card}(E)} = 2^n.$$

Exemple :

Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**, alors** $\mathcal{P}(E)$ **a** $2^5 = 32$ **parties qui sont :**

- **l'ensemble vide** $\varnothing$**,**
- **5 singletons :** $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$,
- **10 paires :** $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\ldots$, $\{2, 3\}$, **...,**
- **10 triplets :** $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, **...,**
- **5 ensembles à 4 éléments :** $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, **...,**
- **et** E **tout entier :** $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Cardinal et produit cartésien :

Théorème

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles finis et non vides, alors

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$$

est un ensemble fini et

$$\text{card}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \text{card}(E_i).$$

Exemple :

Pour $n = 2$**, si** $E_1 = \{a, b\}$ **et** $E_2 = \{1, 2, 3\}$**, alors :**

$$\mathrm{card}(E_1 \times E_2) = 2 \times 3 = 6,$$

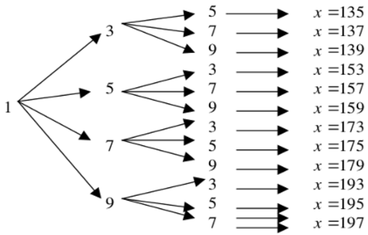
$$E_1 \times E_2 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Application : Le nombre des nombres de trois chiffres commençant par un qu'on peut écrire avec des chiffres impairs tous distincts est :

$$1 \times 4 \times 3 = 12.$$

On peut schématiser ce calcul par l'arborescence suivante :

$E_1 = \{1\}, \qquad E_2 = \{3, 5, 7, 9\}, \qquad E_3 = \{\textbf{le reste des chiffres impairs}\}$



Principe de multiplication : **L'analyse combinatoire est l'étude mathématique de la manière de ranger des objets.**

Principe: **Soit ξ une expérience qui comporte 2 étapes : la $1^{\text{ère}}$ étape qui a p_1 résultats possibles et chacun de ces résultats donne lieu à p_2 résultats possibles lors de la $2^{\text{ème}}$ étape. Alors l'expérience ξ a $p_1 \times p_2$ résultats possibles.**

Remarque 1: **Le principe multiplicatif peut s'énoncer ainsi : si un événement A peut se produire de p façons possibles et si un événement B peut se produire de q façons possibles, alors la réalisation de A suivie de B peut se produire de $p \times q$ façons possibles.**

Remarque 2: **Le principe de multiplication se généralise au cas où l'expérience ξ comporte n étapes. Le nombre de résultats possibles est alors :**

$$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n.$$

Principe de multiplication

Exemple :

1. **On lance une pièce de monnaie deux fois successivement. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Réponse :** $2 \times 2 = 2^2$.
2. **On veut former des mots de 3 lettres distinctes (ayant un sens ou non !). Combien a-t-on de possibilités ? Réponse : On a**
   - **26 possibilités de choisir la 1ère lettre.**
   - **25 possibilités de choisir la 2ème lettre.**
   - **24 possibilités de choisir la 3ème lettre.**

   Ainsi, le nombre de mots possible est : $26 \times 25 \times 24$.
3. **Une urne contient quatre boules 1R, 1B, 1N, 1V. On effectue 2 tirages successifs avec remise. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Réponse :** $4 \times 4 = 16$.

Conséquence : Si une expérience ξ consiste à répéter n fois de façon indépendante une même expérience qui a p résultats possibles, alors ξ a $p^n = \underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n \text{ fois}}$ issues possibles.

Arrangements avec répétition :

Soient E un ensemble non vide de cardinal fini n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $p \in \mathbb{N}$. On appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n tout p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire tout élément du produit cartésien

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}.$$

Exemple : **Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ alors**

- **(1,2,3) est un arrangement de 3 éléments parmi 10.**
- **(0,9,8,9) est un arrangement de 4 éléments parmi 10.**
- **(1,2,1,3,4,2) est un arrangement de 6 éléments parmi 10.**

Remarque :

- **Dans un arrangement avec répétition, les p objets de la liste ne sont pas nécessairement tous distincts.**
- **Cela correspond à un tirage avec remise et avec ordre.**

Nombre d'arrangements avec répétition :

Soit un arrangement avec répétition de p éléments parmi n.

- **Pour choisir le 1^{er} élément on a n possibilités.**
- **Pour choisir le $2^{\text{ème}}$ élément on a n possibilités.**

$$\vdots$$

- **Pour choisir le $p^{\text{ème}}$ élément on a n possibilités.**

En conséquence du principe de multiplication, le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est n^p.

Arrangements avec répétition

Propriété

Soit E un ensemble fini à n éléments (i.e. $\mathrm{Card}(E) = n$). Alors on a :

$$\mathrm{Card}(E^p) = n^p.$$

Exemple :

1. **Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors on a : $3^2 = 9$ (2-uplets) de E avec répétitions :**

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

2. **On lance une pièce de monnaie 2 fois successivement. Combien a-t-on de résultats possibles ? L'univers des éventualités est $\Omega^2 = \{FF, FP, PF, PP\}$ avec $\Omega = \{F, P\}$.**
Réponse : $\mathrm{Card}(\Omega^2) = 2^2 = 4$.

2. **Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?**
   Réponse : **Chaque réponse correspond à un tirage avec remise et avec ordre : pour chaque question, les 4 choix restent possibles, et l'ordre des réponses compte. Ainsi, le nombre de réponses possibles est :** 4^{15}.

3. **Tirage successif avec remise (échantillon non exhaustif). Une urne contient 6 boules. On effectue 2 tirages successifs avec remise. Combien y a-t-il de résultats possibles ?**
   Réponse : **Chaque tirage a 6 issues possibles, et les tirages sont indépendants (tirage avec remise et avec ordre). Donc le nombre de résultats possibles est :** 6^2.

Arrangements sans répétition

Définition

Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle arrangement sans répétition de p éléments parmi n tout sous-ensemble ordonné de E ayant p éléments deux à deux distincts.
Autrement dit, tout p-uplet ordonné $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors :

- **abc, bac, cab, bcd, dca sont des arrangements de 3 éléments parmi 4.**
- **abcd, abdc, bacd, dbca sont des arrangements de 4 éléments parmi 4.**
- **aab n'est pas un arrangement (sans répétition) de 3 éléments parmi 4.**

Arrangements sans répétition

Remarque :

- **Dans un arrangement sans répétition, les p objets de la liste sont tous distincts.**
- **Cela correspond à un tirage sans remise et avec ordre.**

Le nombre d'arrangements sans répétition et le symbole A_n^p :

Soit un arrangement sans répétition de p éléments parmi n.

- **Pour choisir le 1^{er} élément on a n possibilités.**
- **Pour choisir le $2^{\text{ème}}$ élément on a $n-1$ possibilités.**
- **...**
- **Pour choisir le $p^{\text{ème}}$ élément on a $n-p$ possibilités.**

En conséquence, par le principe de multiplication :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p).$$

Définition

Pour n un entier naturel non nul, on définit la factorielle de n, notée $n!$, par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarque :

- **Par convention $0! = 1$.**
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \times n!.$

Exemples :

$$1! = 1, \qquad 2! = 2 \times 1 = 1, \qquad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \ldots$$

Arrangements sans répétition

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ **et** $p \in \mathbb{N}$**. Alors le nombre d'arrangements sans répétition de** p **éléments d'un ensemble de cardinal** n **est**

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \textbf{si } p > n, \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-(p-1)) & \textbf{si } p \leq n. \end{cases}$$

Avec $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1$ **et** $0! = 1$**.**

Exemple :

1. **Nous avons 3 enfants. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir sur un banc de deux places ?**
   Réponse : **Chaque façon de s'asseoir est un arrangement de 2 éléments parmi 3. Le nombre de possibilités est** $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$.

Arrangements sans répétition

2. **On veut former des nombres de trois chiffres différents parmi les chiffres : $2, 3, 5, 6, 7$. Combien a-t-on de possibilités ?**
   Réponse : Chaque nombre est un arrangement de 3 éléments parmi 5. Le nombre de possibilités est donc

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

3. **Une urne contient 6 boules. On effectue un tirage successif et sans remise de 3 boules. Combien a-t-on de possibilités ?**
   Réponse :

$$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Permutations

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle permutation tout arrangement sans répétition des n éléments de E.

De l'étude des arrangements, on déduit immédiatement que le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est $A_n^n = n!$, et que toute permutation s'identifie à une bijection :

$$\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow E.$$

Exemple :

1. **Si $E = \{1, 2, 3\}$, les permutations de E sont :**

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

Le nombre de permutations est : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$

Permutations

2. **Combien y a-t-il de nombres à trois chiffres choisis parmi les chiffres $1, 2, 3$?**
   Réponse : **Chaque nombre est une permutation de ces trois chiffres. Il y en a donc $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.**
3. **De combien de façons peut-on répartir 7 personnes sur 7 chaises ?**
   Réponse : **Désignons par $p_1, p_2, \ldots, p_7$ les 7 personnes et posons $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement de 7 éléments de E, c'est-à-dire une permutation de E. Il y en a $7! = 5040$.**

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E de cardinal p.

Exemple : **Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors les parties :**

1. **$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{d, c\}$ et $\{d, a\}$ sont des combinaisons de deux éléments de E.**
2. **$\{a, b, c\}$, $\{a, c, d\}$, $\{d, c, b\}$ et $\{b, d, a\}$ sont des combinaisons de trois éléments de E.**

Remarque :

1. **Il est essentiel de noter que dans une combinaison :**
   - **On ne tient pas compte de l'ordre, les parties $\{a, b, c\}$, $\{c, a, b\}$ et $\{b, c, a\}$ sont les mêmes.**
   - **Les éléments sont deux à deux distincts.**
2. **Une combinaison correspond à un tirage sans remise et sans ordre.**

Combinaisons

Notation : **On note $C_n^p := \binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.**

Théorème

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à :

$$C_n^p = \begin{cases} 0, & \textbf{si } p > n, \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}, & \textbf{si } p \leq n. \end{cases}$$

Exemple :

1. **Si $E = \{1, 2, 3\}$, les combinaisons de E à deux éléments sont : $\{$1,2$\}$, $\{$1,3$\}$ et $\{$2,3$\}$. L'ordre ne compte pas ici : par exemple (1,2) et (2,1) sont identiques. Le nombre de combinaisons est :**

$$C_3^2 = 3.$$

2. De combien de façons différentes peut-on choisir 4 étudiants parmi 10 ? Réponse : C_{10}^{4} façons différentes.
3. Combien de groupes de 4 élèves peut-on former d'une classe de 30 élèves ? Réponse : Chaque groupe possible est une combinaison de 4 éléments parmi 30. Le nombre de groupes possibles est : $C_{30}^{4} = 27405$.

Exemple : Quand on effectue un tirage simultané (au même temps) de p boules d'une urne qui contient n boules ($p \leq n$), alors toute possibilité est une combinaison de p éléments parmi n.

Remarque : (Tirages avec remise et sans ordre). Quand on effectue un tirage de p boules avec remise et sans ordre d'une urne qui contient n boules, alors le nombre de tirages différents est :

$$C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Combinaisons

Proposition

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_n^0 = C_n^n = 1 \quad \textbf{et} \quad C_n^1 = n.$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [0:n], \qquad C_n^p = C_n^{n-p}.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in [1:n], \qquad p\, C_n^p = n\, C_{n-1}^{p-1}.$
4. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n.$

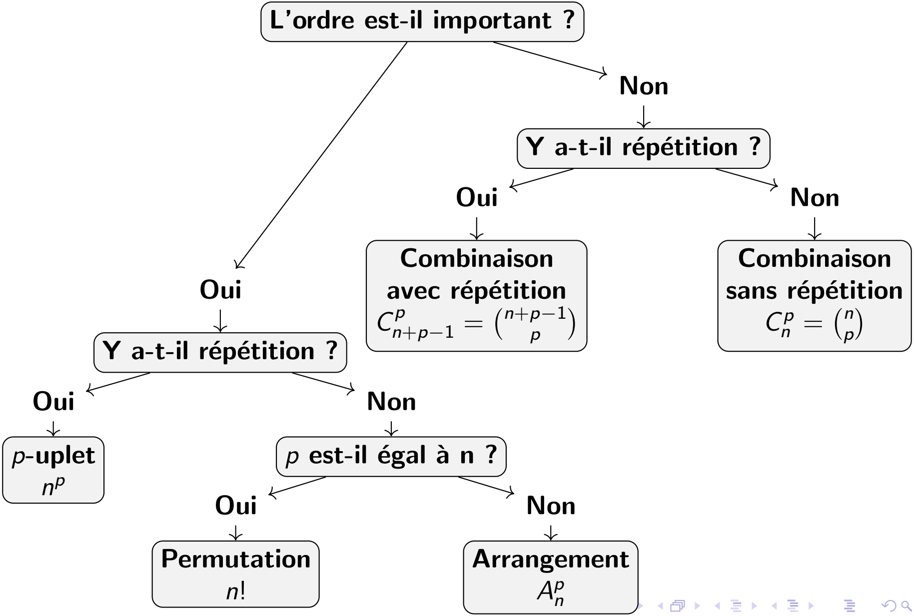
Preuve :

- **Pour 1, 2 et 3, utiliser la formule :**

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

- **Pour 4, utiliser un raisonnement par récurrence.**

Conclusion


L'ordre est-il important ?
Oui
Non
Y a-t-il répétition ?
Oui
Non
p-uplet
n^p
p est-il égal à n ?
Oui
Non
Permutation
$n!$
Arrangement
A_n^p
Y a-t-il répétition ?
Oui
Non
Combinaison avec répétition
$C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p}$
Combinaison sans répétition
$C_n^p = \binom{n}{p}$

1) On tire simultanément (en même temps) deux boules dans une urne qui contient 4 boules rouges, 2 boules bleues et 1 boule verte.

- **De combien de façon peut-on :**
  $A =$ (**Tirer deux boules de même couleurs**).

$$A = (2R) \textbf{ ou } (2B) \implies \text{card}(A) = C_4^2 + C_2^2 = 7.$$

$$A = \{R_1R_2,\ R_1R_3,\ R_1R_4,\ R_2R_3,\ R_2R_4,\ R_3R_4,\ B_1B_2\}.$$

- **De combien de façon peut-on :**
  $B =$ (**Tirer une seule boule rouge**).

$$B = (1R \textbf{ et } 1\bar{R}) \implies \text{card}(B) = C_4^1 \times C_3^1 = 12.$$

$$B = \{R_1V_1,\ R_1B_1,\ R_1B_2,\ R_2V_1,\ R_2B_1,\ R_2B_2,\ \ldots\}.$$

2) On tire maintenant successivement et sans remise deux boules.

$$A = (2R) \textbf{ ou } (2B) \implies \text{card}(A) = A_4^2 + A_2^2 = 14 = 7 \times 2.$$

$$A = \{R_1R_2,\ R_2R_1,\ R_1R_3,\ R_3R_1,\ \ldots\}.$$

$$B = (1R \textbf{ et } 1\bar{R}) \textbf{ ou } (1\bar{R} \textbf{ et } 1R) \implies \text{card}(B) = 2 \times A_4^1 \times A_3^1 = 24.$$

$$B = \{R_1V_1,\ V_1R_1,\ R_1B_1,\ B_1R_1,\ \ldots\}.$$

3) On tire maintenant successivement et avec remise deux boules.

$$A = (2R) \textbf{ ou } (2B) \textbf{ ou } (2V) \implies \text{card}(A) = 4^2 + 2^2 + 1^2 = 21.$$

$$A = \{R_1R_1,\ \ldots,\ V_1V_1,\ R_1R_2,\ R_2R_1,\ R_1R_3,\ R_3R_1,\ \ldots\}.$$

$$B = (1R \textbf{ et } 1\bar{R}) \textbf{ ou } (1\bar{R} \textbf{ et } 1R) \implies \text{card}(B) = 2 \times 4^1 \times 3^1 = 24.$$

$$B = \{R_1V_1,\ V_1R_1,\ R_1B_1,\ B_1R_1,\ \ldots\}.$$

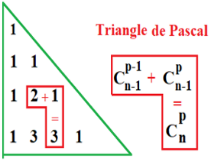
Proposition (formule du triangle de Pascal)

$$\forall\, n \geq 2, \quad \forall\, 1 \leq p \leq n-1, \qquad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p.$$

Preuve : Utiliser la formule :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	C_0^0					
1	C_1^0	C_1^1				
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2			
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3		
	....etc					



Théorème (Formule du binôme de Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

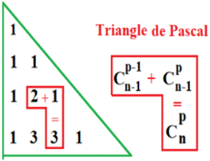
Exemple :

$$n = 0 : \quad (a+b)^0 = 1$$

$$n = 1 : \quad (a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$n = 2 : \quad (a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$$

$$n = 3 : \quad (a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$$



Formule du binôme de Newton

Preuve :

Par récurrence sur l'entier n : Lorsque $n = 0$, on a :

$$(a+b)^0 = 1 = C_0^0 a^0 b^0.$$

Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\
&= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \;+\; b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k \;+\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}.
\end{aligned}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^k \left(C_n^k + C_n^{k-1} \right) + b^{n+1}$$ **(Triangle de Pascal)**

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Remarque

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^k (1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (1)^{n-k} (1)^k = (1-1)^n = 0.$

Exercice 1

1. **Montrer que pour tous** $p, n \in \mathbb{N}$ **:**

$$\frac{n}{p}\, C_{n-1}^{p-1} + \frac{n-p+1}{p}\, C_n^{p-1} - 2\, C_n^p = 0.$$

2. **Calculer pour tous** $0 \leq k \leq p \leq n$ **:**

$$C_n^p\, C_p^k - C_n^k\, C_{n-k}^{p-k}.$$

3. **Calculer** $(1+i)^3$ **et** $(1-i)^6$ **où** $i^2 = -1$**.**

Exercice 2

Une urne contient cinq boules rouges numérotées : $0, 0, 0, 1, 1$**, trois boules vertes numérotées** $0, 1, 2$ **et deux boules jaunes numérotées** $0, 2$**.**

1. **Dans un tirage successif et sans remise de trois boules, de combien de façon peut-on tirer :**
   - $A =$ (**Trois boules de même couleur**).
   - $B =$ (**Trois boules de couleurs différentes deux à deux**).
   - $C =$ (**Exactement deux boules rouges**).
   - $D =$ (**Au moins deux boules vertes**).
   - $E =$ (**Au plus une boule jaune**).
   - $F =$ (**Trois boules portant le même numéro**).

- $G =$ (**Trois boules de même couleur et portant le même numéro**).
- $H =$ (**Trois boules de couleurs différentes deux à deux et portant le même numéro**).
- $I =$ (**Exactement deux boules de même couleur portant des numéros impairs**).
- $J =$ (**Trois boules portant des numéros dont le produit est nul**).

3. **Refaire les mêmes calculs pour un tirage successif et avec remise.**
4. **Refaire les mêmes calculs pour un tirage simultané.**

Exercice 3

Une urne (A) contient cinq boules noires, deux boules vertes et une boule rouge.
Une autre urne (B) contient deux boules noires et une boule verte.
On tire simultanément deux boules de l'urne (A) et une boule de l'urne (B). De combien de façon peut-on tirer :

1. Ω : **(Trois boules).**
2. C : **(Trois boules vertes).**
3. D : **(Exactement deux boules vertes).**
4. E : **(Au moins une boule verte).**
5. F : **(Au plus une boule verte).**

Exercice 4

Une course oppose 20 concurrents, dont Mohammed.

1. **Combien y-a-t-il de podiums possibles ?**
2. **Combien y-a-t-il de podiums possibles où Mohammed est premier ?**
3. **Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Mohammed fait partie ?**
4. **On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?**

Exercice 5

1. **Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?**
2. **Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.**

Exercice 6

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 de chimie (tous distincts). De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. **Si les livres doivent être groupés par matières.**
2. **Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.**

Exercice 7

Soit E l'ensemble à 12 éléments : $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. **Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :**
   - 1.1 a **et** b.
   - 1.2 a **mais pas** b.
   - 1.3 b **mais pas** a.
   - 1.4 **ni** a, **ni** b.

2. **En déduire la relation :**

$$C_{12}^{5} = C_{10}^{3} + 2C_{10}^{4} + C_{10}^{5}.$$

Exercice 8

Un livre comporte 14 chapitres.

1. **Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?**
2. **Pour** $k \in [3:14]$**, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels** k **est le plus grand numéro des chapitres choisis.**
3. **En déduire que :**

$$C_{14}^{3} = C_{13}^{2} + C_{12}^{2} + \cdots + C_{3}^{2} + C_{2}^{2}.$$

Introduction :

Dans des domaines très différents : scientifique, médical, politique, etc., on s'intéresse à de nombreux phénomènes dans lesquels apparaît souvent l'effet du hasard. Ces phénomènes sont caractérisés par le fait que les résultats des observations varient d'une expérience à l'autre.

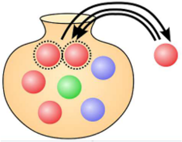
Nous présentons dans cette section une définition fréquentiste puis une définition axiomatique de la notion de probabilité. Ceci va nous permettre de quantifier le caractère aléatoire de la réalisation d'un événement dans une expérience aléatoire où il est impossible de prévoir son résultat.

Vocabulaires :

- **Expérience aléatoire = expérience dont on ne peut pas prédire a priori son résultat.**
- **Réalisation = un résultat possible de l'expérience aléatoire.**
- **Espace fondamental ou univers Ω = l'ensemble de tous les résultats possibles.**
- **Événement = sous-ensemble de Ω.**
- **Éventualité = événement à un seul élément.**

Exemples :

1. **On tire au hasard et simultanément deux boules dans une urne qui contient quatre boules rouges, deux boules bleues et une boule verte.**



L'univers est l'ensemble de tous les couples de boules possibles,

$$\Omega = \{(R_1, R_2),\ (R_1, R_3),\ (R_2, R_3),\ (R_1, V_1), \ldots\}.$$

Donc $\mathrm{card}(\Omega) = C_7^2 = 21.$

L'événement $A =$ **(obtenir une boule bleue et une boule verte) est**

$$A = \{(B_1, V_1),\ (B_2, V_1)\} \Longrightarrow \mathrm{card}(A) = C_2^1 \times C_1^1 = 2.$$

Exemples :

2. **On lance une pièce de monnaie deux fois.**

$$\Omega = \{(P,P),(F,P),(P,F),(F,F)\}$$
$$\Longrightarrow \text{card}(\Omega) = 2^2 = 4.$$

L'événement $A =$ (obtenir pile une seule fois) est

$$A = \{(F,P),(P,F)\} \Longrightarrow \text{card}(A) = 2.$$

3. **On lance un dé une seule fois.**

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Longrightarrow \text{card}(\Omega) = 6.$$

L'événement $A =$ (obtenir un nombre pair) est

$$A = \{2,4,6\} \Longrightarrow \text{card}(A) = 3.$$

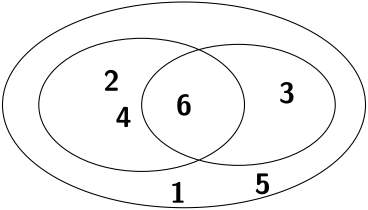
- **L'union :** $A \cup B$ **est réalisée dès que** A **ou** B **est réalisé.**
- **L'intersection :** $A \cap B$ **est réalisée dès que** A **et** B **sont réalisés conjointement.**

Par exemple, dans un lancer de dé, si l'événement $A =$ **(obtenir un nombre pair) et l'événement** $B =$ **(obtenir un multiple de 3), alors**

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad A \cap B = \{6\}, \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}.$$

On a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$



- **Incompatibilité :** **Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles (disjoints).**
- **La différence :** $A \setminus B$ **est réalisé quand A est réalisé et que B ne l'est pas.**
- **Le complémentaire $\overline{A}$:** **C'est l'événement $\Omega \setminus A$. On le note aussi A^c. Dans l'exemple du lancer de dé, pour $A = \{2, 4, 6\}$, on a $\overline{A} = \{1, 3, 5\} =$ (obtenir un nombre impair).**
- $\mathcal{P}(\Omega)$ **: L'ensemble de toutes les parties (ou sous-ensembles) de Ω. Si par exemple on lance une pièce de monnaie une seule fois alors $\Omega = \{P, F\}$ et $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \Omega\}$ et on a** $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^2 = 4$.

Approche fréquentiste des probabilités :

Cette approche est basée sur l'étude expérimentale des phénomènes aléatoires. Ainsi la probabilité est obtenue comme limite de fréquences observées expérimentalement, (à condition de stabilisation).

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire du lancer d'une pièce de monnaie équilibrée. Deux résultats sont possibles : $\{P, F\}$**. On a l'intuition d'avoir une chance sur deux d'avoir** $\{P\}$ **et une chance sur deux d'avoir** $\{F\}$**, ce que l'on traduira par : la probabilité d'avoir** $\{P\}$ **est égale à** $\frac{1}{2} = 0.5$ **et celle d'avoir** $\{F\}$ **est égale à** $\frac{1}{2} = 0.5$**, et on écrit :**

$$P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

Cette intuition peut être expliquée de la façon suivante : lorsqu'on effectue un nombre n suffisamment grand de lancers de la pièce, on pense obtenir à peu près le même effectif n_1 de $\{P\}$ que l'effectif n_2 de $\{F\}$, avec $n_1 + n_2 = n$. Considérant les fréquences d'apparition :

$$f_1 = \frac{n_1}{n} \qquad \textbf{et} \qquad f_2 = \frac{n_2}{n}.$$

On pense donc avoir : $f_1 \approx f_2$, avec $f_1 + f_2 = 1$. Ce qui donne :

$$f_1 \approx \frac{1}{2} \qquad \textbf{et} \qquad f_2 \approx \frac{1}{2}.$$

On signale que :

$$0 \leq f_1 \leq 1, \qquad 0 \leq f_2 \leq 1 \qquad \textbf{et} \qquad f_1 + f_2 = 1.$$

Voici les résultats obtenus lors de lancers successifs de la pièce :

Nombre de lancers	40	50	100	200	400	1000
Nombre de pile	21	27	51	102	203	490
Nombre de face	19	23	49	98	197	510
Fréquence de pile	0,525	0,540	0,510	0,510	0,508	0,490
Fréquence de face	0,475	0,460	0,490	0,490	0,492	0,510

On voit donc que les fréquences relatives sont en cours de stabilisation au fur et à mesure que le nombre de lancers augmente, étant donné que la marge d'erreur diminue.

Remarque

Il est important de dire que l'approche fréquentiste d'une probabilité dans une longue suite d'expériences (répétées dans des conditions uniformes et à mesure de stabilisation de la fréquence relative) doit être utilisée lorsqu'on ne peut pas calculer la valeur théorique de la probabilité d'un événement. Cependant, puisqu'on ne peut pas répéter infiniment une expérience aléatoire, la fréquence obtenue n'est jamais suffisamment précise pour atteindre exactement la probabilité théorique.

Axiomatique de Kolmogorov (1930)

Définition

Soit Ω un espace fondamental associé à une expérience aléatoire. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

- **Axiome 1 : pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,** $\quad 0 \leq P(A) \leq 1.$
- **Axiome 2 :**
$$P(\Omega) = 1 \quad \textbf{(événement certain)}.$$
- **Axiome 3 : Si $(A_n)_n$ est une suite d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints, alors**
$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$$

On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Remarque

Rigoureusement, une probabilité P n'est souvent définie que sur un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ appelé tribu, notion issue de la théorie de la mesure qui est ici hors programme.

Dans ce cours on notera $\mathcal{A}$ à la place de $\mathcal{P}(\Omega)$ pour garder en mémoire que $\mathcal{A}$ ne contient pas en général toutes les parties de Ω. En pratique on prendra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ce qui d'ailleurs est tout à fait possible dès que Ω est dénombrable.

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **un espace probabilisé.**

1. **Pour tout** $A \in \mathcal{A}$, $\quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\varnothing) = 0 \quad$ **(événement impossible).**
3. **Pour tous** $A, B \in \mathcal{A}$, **si** $A \subset B$ **alors**
   $$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \quad \text{et} \quad P(A) \leq P(B).$$

Preuve :

1. $\Omega = A \cup \overline{A}$ **et l'union disjointe implique :**
   $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$.
   D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. **Dans (1), on prend** $A = \Omega$, **alors** $\overline{A} = \varnothing$.
3. **On a** $B = A \cup (B \setminus A)$, **union disjointe,**
   d'où $\quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
   De plus, $P(B \setminus A) \geq 0$, **donc** $P(A) \leq P(B)$.

Probabilités et Union :

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **un espace probabilisé.**

1. **Pour tous** $A, B \in \mathcal{A}$**, on a :** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**.**
2. **Soit** $(A_i)_{i=1,..,n}$ **une suite des événements de** $\mathcal{A}$**, alors**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Preuve :

1. **Il suffit d'utiliser l'axiome (3) aux unions disjointes :**

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B),$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

2. **Par récurrence, il suffit de voir que pour $n = 2$, on a :**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B).$$

Exemple important : (probabilité uniforme et équiprobabilité)
Posons : $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$ **et** $p_i = p(\{w_i\})$. **Alors** $0 < p_i \leq 1$ **et**

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{w_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

et pour tout événement $A \subseteq \Omega$**, on a :** $P(A) = \displaystyle\sum_{k, w_k \in A} p_k$.

Donc, une probabilité P **sur** Ω **est une pondération** $(p_i)_{i \in [1:n]}$ **des éléments de cet ensemble telle que :**

- **Pour tout** $i \in [1 : n]$, $0 \leq p_i \leq 1$,
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

En particulier, dans le cas où les symétries font que tous les résultats possibles $w_1, \ldots, w_n$ **ont la même pondération :** $p = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$ **(c'est-à-dire sont équiprobables), alors,**

$$P(A) = \sum_{k, w_k \in A} p = p \times \text{card}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

On dit alors que la probabilité P **est uniforme et que tous les événements sont équiprobables. En fait, en pratique**

$$P(A) = \frac{\textbf{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\textbf{nombre total de cas possibles}}.$$

Exemple : **Dans un lancer d'un dé équilibré, on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $p_k = \frac{1}{6}$ pour tout $k \in [1:6]$. Si l'événement $A =$ (obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3), alors $A = \{4, 6\}$ et par suite :**

$$P(A) = P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

On peut aussi écrire :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Exemple :

1. **On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules dans une urne qui contient cinq boules rouges, trois boules vertes et une boule noire. Les boules sont indiscernables au toucher. Calculer la probabilité de l'événement** $A =$ (**obtenir deux boules rouges**).

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \frac{10}{21}.$$

2. **Dans le cas d'un tirage successif et avec remise, on obtient :**

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3 \times 5^2 \times 4^1}{9^3} = \frac{100}{243}.$$

3. **Dans un tirage simultané, on obtient :**

$$P(A) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{10}{63}.$$

Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **un espace probabilisé et** A **un événement de** $\mathcal{A}$ **avec** $P(A) \neq 0$**. On appelle probabilité conditionnelle, qu'on note par** P_A **ou** $P(\cdot|A)$**, la probabilité définie pour tout événement** B **de** $\mathcal{A}$ **par :**

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Proposition

$(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ **est un espace probabilisé.**

Preuve : **Il suffit de montrer que P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.**

1. $A \cap B \subseteq A \implies P(A \cap B) \leq P(A) \implies 0 \leq P_A(B) \leq 1.$
2. $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$
3. **Soit $(B_n)_n$ une suite des événements deux à deux disjoints dans $\mathcal{A}$.**

$$P_A\left(\bigcup_n B_n\right) = \frac{P\left(A \cap \left(\bigcup_n B_n\right)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right)}{P(A)}$$
$$= \sum_n \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \sum_n P_A(B_n),$$

car les $(A \cap B_n)_n$ sont deux à deux disjoints et P est une probabilité.

Théorème des probabilités composées

Soit $(A_i)_{i\in[1:n]}$ **une suite des événements de** $\mathcal{A}$ **tels que** $P(A_1\cap ...\cap A_{n-1})>0$**, alors**

$$P(A_1\cap...\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_2\cap A_1)\times...\times P(A_n|A_{n-1}\cap...\cap A_1).$$

Preuve :

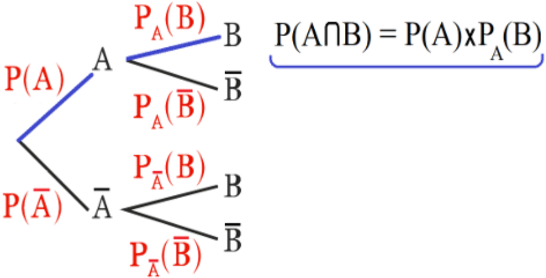
$$\begin{aligned}
&P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_2\cap A_1)\times\cdots\times P(A_n|A_{n-1}\cap\cdots\cap A_1)\\
&=P(A_1)\times\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}\times\frac{P(A_3\cap A_2\cap A_1)}{P(A_2\cap A_1)}\times\cdots\times\frac{P(A_n\cap\cdots\cap A_1)}{P(A_{n-1}\cap\cdots\cap A_1)}\\
&=P(A_1\cap\cdots\cap A_n).
\end{aligned}$$

Remarque

Pour $n = 2$**, on trouve :**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A).$$

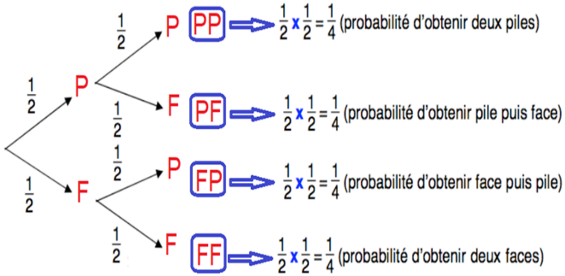
On peut aussi suivre le même chemin pour : $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$ **et** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.



Exemple: **On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois successives. Soit $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$.**
On a

$$P(\{PF\}) = \frac{\text{card}(\{PF\})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{4},$$

ou bien $P(\{PF\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. On suit le même chemin pour les autres éventualités de Ω.



Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **un espace probabilisé,** I **une partie de** $\mathbb{N}$ **et** $(A_n)_{n\in I}$ **une famille des événements de** $\mathcal{A}$**. On dit que ces événements sont mutuellement indépendants ssi pour toute partie** J **finie et non vide de** I **:**

$$P\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J} P(A_n).$$

Cas particuliers :

1. **Trois événements** A, B **et** C **sont dits mutuellement indépendants si :**
   $P(A\cap B) = P(A)P(B)$, $\quad P(A\cap C) = P(A)P(C)$,
   $P(B\cap C) = P(B)P(C)$, $\quad$ **et** $\quad P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
2. **On dit deux événements** A **et** B **sont indépendants si :**

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B).$$

Remarque

- **Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$.**
- **Si A et B sont indépendants, alors ($\overline{A}$ et B) ou (A et $\overline{B}$) ou ($\overline{A}$ et $\overline{B}$) le sont aussi.**

Exemple : Nous jetons un dé équilibré et nous considérons les deux événements : $A = \{1,3,5\}$ (le résultat est impair) et $B = \{1,2,3,4\}$ (le résultat est ≤ 4). Alors,

$$A = \{1,3,5\} \implies P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$B = \{1,2,3,4\} \implies P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$A \cap B = \{1,3\} \implies P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

On a : $P(A \cap B) = \frac{1}{3} = P(A) \times P(B)$ donc A et B sont indépendants.

Théorème des probabilités totales

Soient $(B_i)_{i\in[1:n]}$ **une partition de** Ω **et** B **un événement quelconque de** $\mathcal{A}$. **Alors,**

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i\cap B)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\times P(B|B_i).$$

Preuve :

$$P(B)=P(\Omega\cap B)=P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\cap B\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i\cap B)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i\cap B)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\times P(B|B_i).$$

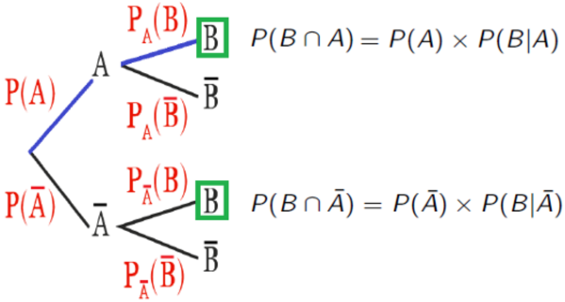
Cas particulier ($n=2$)

$$P(B)=P(B_1)\times P(B|B_1)+P(B_2)\times P(B|B_2).$$

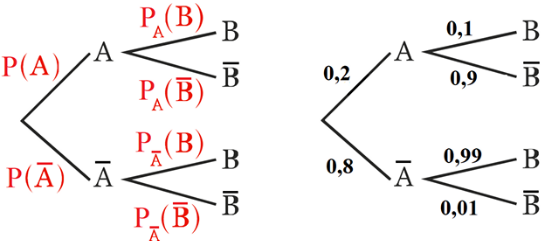
Exemple $(n = 2, B_1 = A, B_2 = \overline{A})$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) \times P(B|A) + P(\overline{A}) \times P(B|\overline{A}).$$

Un arbre de probabilité pondéré permet d'illustrer aisément cette situation :



Application :



1. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0.2 \times 0.1 = 0.02$
2. $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0.8 \times 0.01 = 0.008$

On applique maintenant le théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(\overline{A}) \times P(B|\overline{A}) = (0.2 \times 0.1) + (0.8 \times 0.99) = 0.812.$$

Théorème de Bayes

Soient $(B_i)_{i\in[1:n]}$ **une partition de** Ω **et** B **un événement quelconque de** $\mathcal{A}$ **tel que** $P(B) > 0$**. Alors pour tout** $i \in [1:n]$**, on a :**

$$P(B_i|B) = \frac{P(B_i) \times P(B|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \times P(B|B_j)}.$$

Preuve : On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle et le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_i|B) &= \frac{P(B_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B_i) \times P(B|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \times P(B|B_j)}. \end{aligned}$$

Exemple : Supposons qu'une population d'adultes soit composée de 30% de fumeurs (B_1) et de 70% de non-fumeurs (B_2). Notons B l'événement = (mourir d'un cancer du poumon). Supposons en outre que la probabilité de mourir d'un cancer du poumon est égale à $P(B|B_1) = 20\%$ si l'on est fumeur et de $P(B|B_2) = 1\%$ si l'on est non-fumeur. Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité d'avoir été fumeur si on est mort d'un cancer du poumon notée $P(B_1|B)$:

On a : $P(B_1) = 0.3$, $P(B_2) = 0.7$ et $\Omega = B_1 \cup B_2$. Donc,

$$P(B_1|B) = \frac{P(B_1) \times P(B|B_1)}{P(B_1) \times P(B|B_1) + P(B_2) \times P(B|B_2)} \approx 0.9.$$

Le théorème des probabilités totales nous donne :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(B_i) \times P(B|B_i) = P(B_1) \times P(B|B_1) + P(B_2) \times P(B|B_2) \approx 0.13.$$

Exercice 9

Soit A, B, C des événements définis sur le même espace probabilisé. Exprimer en utilisant les symboles des opérations sur les événements ci-dessous :

1. A **seul se réalise.**
2. A **et** B **se réalisent mais pas** C**.**
3. A, B, C **se réalisent simultanément puis aucun des trois ne se réalise simultanément.**
4. **Au moins un des événements se réalise.**
5. **Un seul événement se réalise.**
6. **Au moins deux événements se réalisent.**
7. **Deux événements au plus se réalisent.**
8. **Deux événements et deux seulement se réalisent.**

Exercice 10

On considère une urne qui contient 8 boules vertes et 6 boules rouges.
On tire 5 boules de l'urne successivement et sans remise.

1. **Calculer les probabilités suivantes :**
   1. **On obtient des boules vertes.**
   2. **On obtient une première boule verte, les deux suivantes rouge et les deux dernières vertes.**
   3. **On obtient au plus une boule rouge.**
   4. **On obtient deux boules vertes et trois boules rouges.**
2. **Reprendre les questions de 1 avec un tirage successif avec remise.**
3. **Reprendre les questions de 1 avec un tirage simultané.**

Exercice 11

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes différentes. On note A l'événement: "la première lampe est défaillante" et B l'événement: "la deuxième lampe est défaillante". Des essais ont montré que:

$$p(A) = 0,55, \quad p(B) = 0,3 \quad \textbf{et} \quad p(A \cap B) = 0,165.$$

1. **Les événements A et B sont-ils incompatibles?**
2. **Les événements A et B sont-ils indépendants?**
3. **Exprimer et calculer la probabilité de l'événement "au moins une des deux lampes est défaillante".**
4. **Exprimer et calculer la probabilité de l'événement "les deux lampes fonctionnent".**
5. **Exprimer et calculer la probabilité de l'événement "la première lampe fonctionne et la deuxième est défaillante".**

Exercice 12

On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i. Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :

$$p_2 = 0,05, \ p_3 = 0,2, \ p_4 = 0,25, \ p_5 = 0,155, \ p_6 = 0,12.$$

1. **Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 1 ?**
2. **Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?**

Exercice 13

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un récepteur.

- **La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.**
- **La probabilité pour qu'il achète un récepteur quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.**
- **La probabilité pour qu'il achète un récepteur quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.**

1. **Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un récepteur ?**
2. **Quelle est la probabilité pour qu'il achète un récepteur ?**
3. **Le client achète un récepteur. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?**

Exercice 14

Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99% (i.e. test positif parmi les malades), mais il y a 0,2% de chances que le test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée malade sans l'être).

1. **Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?**
2. **Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?**