Université Chouaib Doukkali
Ecole Supérieure de l'Éducation et de Formation (ESEF) - El Jadida

Année Universitaire : 2025-2026
Filière : Enseignement des Mathématiques
Module : Analyse 1 - Semestre : 1

Fiche d'exercices N° 1

Exercice 1.

Le maximum de deux nombres x,y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. *De même on notera* $\min(x,y)$ *le plus petit des deux nombres x,y. Démontrer que :*

$$\max(x,y) = \frac{x+y+\mid x-y\mid}{2}, \quad \min(x,y) = \frac{x+y-\mid x-y\mid}{2}$$

Exercice 2.

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}, \quad]0,1[\cap\mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, \ n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 3.

On pose

$$A = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2}, \ p,q\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Après avoir justifier leurs existences, calculer $\sup A$ *et* $\inf A$. *A admet-elle un élément maximal ou minimal.*

Exercice 4.

Soit f *une application croissante de* $[0,1]$ *dans lui même. On considère l'ensemble*

$$E = \{x\in[0,1], \ f(x)\geqslant x\}$$

1. *Montrer que E possède une borne supérieure b.*
2. *Montrer que* $f(b) = b$. *(Indication : On pourra étudier les deux cas :* $f(b) > b$ *et* $f(b) < b$.*)*

Exercice 5.

On considère la partie de $\mathbb{R}$ *suivante :*

$$\mathrm{A} = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

Déterminer, s'ils existent, $\sup \mathrm{A}, \inf \mathrm{A}, \min \mathrm{A}, \max \mathrm{A}$.

Exercice 6.

On considère la partie de $\mathbb{R}$ *suivante :*

$$\mathrm{A} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Déterminer $\sup A$ *et* $\inf A$. *(Indication : Faire un dessin représentant les points de A.)*

Exercice 7.

Calculer, quand c'est possible, le maximum, le minimum, la borne supérieure, la borne inférieure et le diamètre des ensembles suivants,

1. $\left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1};\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ 2. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m};\ n \in \mathbb{N}^*;\ m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 8.
Soit x un réel.

1. *Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.*
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{E(x)+E(2x)+E(3x)+...+E(nx)}{n^2}$. Donner un encadrement simple de $n^2 \times u_n$, qui utilise $\sum_{k=1}^{n} k$.*
3. *En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.*
4. *En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 9.
Montrer que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. *(Représentation décimale d'un nombre réel)*
1. Soit x un nombre réel.

(a) Montrer qu'il existe une suite unique d'entiers naturels $(p_n)_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n 10^{-n} \leqslant x < (p_n + 1)\, 10^{-n}$$

Les nombres $u_n = p_n 10^{-n}$ et $v_n = (p_n + 1)\, 10^{-n}$ sont appelés valeurs décimales approchées de x d'ordre n par défaut et par excès respectivement.

(b) En déduire que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ p_n 10 \leqslant p_{n+1} < (p_n + 1)\, 10$$

(c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies ci-dessus sont adjacentes et préciser leur limite.