Développements limités usuels

1 Développements limités au voisinage de 0 de fonctions de classe C^∞ obtenus en appliquant la formule de Taylor-Young.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+o(x^6) \qquad e^x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^7) \qquad \mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6) \qquad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7) \qquad \cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6) \qquad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6+o(x^6)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+o(x^6)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256}-\frac{21x^6}{1024}+o(x^6)$$

$$\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\frac{7x^5}{256}-\frac{21x^6}{1024}+o(x^6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}-\frac{63x^5}{256}+\frac{231x^6}{1024}+o(x^6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}+\frac{63x^5}{256}+\frac{231x^6}{1024}+o(x^6)$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}^*,\ (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4+o(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n) \quad \text{où } \forall p\in\mathbb{N},\ \binom{\alpha}{p}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-p+1)}{p!}$$

Observons que, lorsque $\alpha\in\mathbb{N}$, la fonction considérée est polynomiale et la partie régulière du $DL_n(0)$ coïncide avec la fonction dès que l'ordre n du DL est supérieur ou égal à α.

Par ailleurs, appliqué pour $\alpha\leftarrow -1$, $\alpha\leftarrow\frac{1}{2}$ et $\alpha\leftarrow -\frac{1}{2}$, ce dernier DL redonne 3 des 6 DL précédents.

2 Développements limités obtenus par intégration.

$$\begin{array}{llll}
\ln(1+x) & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^6}{6}+o(x^6) & (\ln(1+x))'=\dfrac{1}{1+x} \\
 & \underset{x\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n) & \\
\ln(1-x) & \underset{x\to 0}{=} & -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^6}{6}+o(x^6) & (\ln(1-x))'=-\dfrac{1}{1-x} \\
 & \underset{x\to 0}{=} & -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n) & \\
\mathrm{Arctan}(x) & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^6) & (\mathrm{Arctan}(x))'=\dfrac{1}{1+x^2} \\
 & \underset{x\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) & \\
\mathrm{Arcsin}(x) & \underset{x\to 0}{=} & x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{8}\dfrac{x^5}{5}+o(x^6) & (\mathrm{Arcsin}(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 & \underset{x\to 0}{=} & x+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) & \\
\mathrm{Arccos}(x) & \underset{x\to 0^+}{=} & \dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}(x) \quad \text{en } 0^+\text{, à droite en } 0 & \\
\mathrm{Argth}(x) & \underset{x\to 0}{=} & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^6) & (\mathrm{Argth}(x))'=\dfrac{1}{1-x^2} \\
 & \underset{x\to 0}{=} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) & \\
\mathrm{Argsh}(x) & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{8}\dfrac{x^5}{5}+o(x^6) & (\mathrm{Argsh}(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
 & \underset{x\to 0}{=} & x+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) &
\end{array}$$

Ces développements limités peuvent être complétés par le développement généralisé suivant (qui peut apparaître comme le développement limité à droite de 0, en 0^+, de $x\mapsto\dfrac{\mathrm{Argch}(1+x)}{\sqrt{x}}$) :

$$\mathrm{Argch}(1+x)\underset{x\to 0^+}{=}\sqrt{2}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2}}{12}x\sqrt{x}+\frac{3\sqrt{2}}{160}x^2\sqrt{x}-\frac{5\sqrt{2}}{896}x^3\sqrt{x}+\frac{35\sqrt{2}}{18432}x^4\sqrt{x}+o(x^5)$$

3 Compléments.

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{th}(x) & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}+o(x^8) \\
\tan(x) & \underset{x\to 0}{=} & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+o(x^8)
\end{array}$$