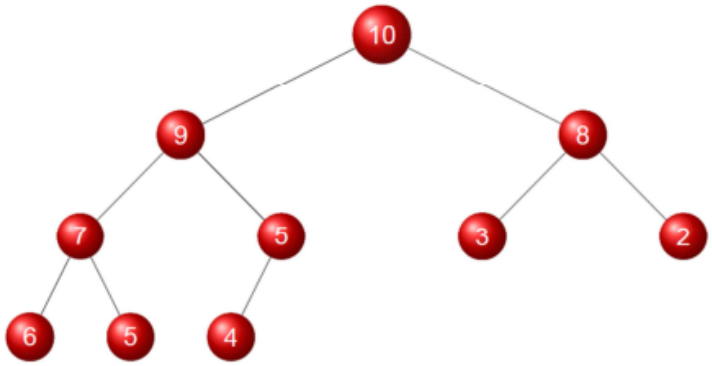
Struktury Danych i Złożoność Obliczeniowa
ĆWICZENIA 2

Kopiec:
Kopiec to drzewo binarne, czyli takie, gdzie każdy rodzic ma maksymalnie 2 potomków. W kopcu wszystkie poziomy głębokości poza ostatnim są w pełni wypełnione. Ostatni poziom głębokości zawsze jest dosunięty do lewej strony.

Istnieją dwa rodzaje kopców:

- *Maksymalny* - gdzie wartość rodzica jest większa lub równa wartości potomków
- *Minimalny* - gdzie wartość rodzica jest mniejsza lub równa wartości potomków

Element w pierwszym rzędzie nazywamy korzeniem kopca. Kopiec najczęściej jest stosowany jako kolejka priorytetowa, gdzie chcemy mieć szybki dostęp do maksymalnego/minimalnego elementu.



Złożoności dla kopca:

- *Dodawanie elementu* - $O(\log n)$
- *Usuwanie elementu* - $O(\log n)$

- *Tworzenie kopca* - $O(n \log n)$ lub $O(n)$ dla algorytmu Floyda
- *Wyszukiwanie* - $O(n \log n)$, bo musimy zdejmować z kopca elementy, aż do znalezienia

Dodawanie do kopca:
Dodawanie do kopca polega na włożeniu elementu na pierwszą wolną pozycję w ostatnim rzędzie. Następnie przeprowadzamy naprawę kopca w górę, aby przywrócić odpowiednie zależności między rodzicami a potomkami. W związku z wymogiem naprawy kopca operacja dodania elementu ma złożoność: $O(\log n)$.

Usuwanie z kopca:
W miejsce usuniętego elementu wstawiamy ostatni dodany do kopca element. Następnie naprawiamy kopiec w dół.

Implementacja kopca w tablicy:
Najpopularniejszy sposób komputerowej implementacji kopca. Taka reprezentacja ma pewne ciekawe zależności między indeksami swoich elementów:

$$\textit{INDEKS RODZICA}$$
$$r = [\tfrac{1}{2}(i-1)]$$

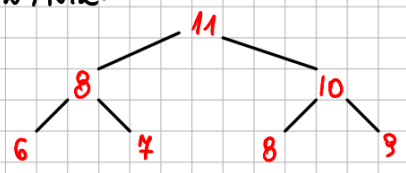
$$\textit{INDEKSY POTOMKÓW}$$
$$p_1 = 2i + 1 \text{ lub } p_2 = 2i + 2$$

Algorytm dodawania elementu:

1) Oznacz rodzica, jeżeli nie ma rodzica to zakończ
2) Sprawdź, czy rodzic i potomek spełniają relację
   - Jeżeli tak, to zakończ
   - Jeżeli nie, to zamień miejscami rodzica z potomkiem
3) Powtórz

0	1	2	3	4	5	6
11	8	9	6	7	8	10
11	8	10	6	7	8	9
11	8	10	6	7	8	9

WYNIK:



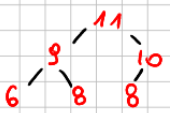
Algorytm usuwania elementu:

1) Usuń element i w jego miejsce wpisz element z ostatniej pozycji.
2) Oznacz rodzica i jego potomków.
3) Sprawdź czy zachowane są relacje rodzic-potomek:
   - Jeżeli nie, to zamień miejscami rodzica z mniejszym (minimalnym) lub większym (mniejszym) potomkiem
   - W przeciwnym wypadku przejdź do kolejnego elementu
4) Przejdź do 2

$\frac{4-1}{2} = 1\frac{1}{2}$

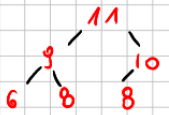
naprawa w dół

0	1	2	3	4	5	6
11	8	10	6	~~X~~	8	9
11	8	10	6	9	8	
(11)	8	10	6	9	8	
11	(8)	10	6	9	8	
11	9	10	6	(8)	8	



naprawa w górę

0	1	2	3	4	5	6
11	8	10	6	~~X~~	8	9
11	8	10	6	9	8	
11	(8)	10	6	9	8	
(11)	9	10	6	8	8	



Algorytm naprawy kopca Floyda:

1) Bierzemy ostatniego rodzica
2) Sprawdzamy, czy zachowane są relacje rodzic - potomkowie
   - Jeżeli nie, zamieniamy miejscami rodzica z mniejszym (minimalny) lub większym (maksymalny) potomkiem. Zachowujemy zaznaczenie na przemieszczonym rodzicu
   - Jeżeli tak, to idziemy do poprzedniego rodzica.
3) Powrót do kroku 2

0	1	2	3	4	5	6
11	8	10	6	X	9	9
11	8	10	6	9	8	
11	8	10	6	9	8	
11	9	10	6	8	8	
11	9	10	6	8	8	

Ostatni rodzic:

$$\left[\frac{5-1}{2}\right] = \left[\frac{4}{2}\right] = 2$$