АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦФ

Цифровой фильтр - это вычислительное устройство (физическая система или программа для ПЭВМ), реализующее заданный алгоритм избирательной обработки сигналов в реальном масштабе времени. Другими словами, цифровой фильтр - это дискретная система, которая преобразует последовательность $x(k)$ отсчётов входного сигнала в последовательность $y(k)$ отсчётов выходного сигнала.

Линейный цифровой фильтр, работающий во временной области, в общем виде описывается линейным разностным уравнением N-го порядка

$$y(k\Delta t) + \sum_{m=1}^{M-1} b_m y(k\Delta t - m\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x(k\Delta t - n\Delta t),\ k = 0, 1, 2, \ldots, M \geq N,$$ где

N, M, a_n, b_m - постоянные фильтра; k - номер отсчёта входной последовательности (сигнала) $x(k\Delta t)$; $\Delta t = 1/f_\partial$ и f_∂ - шаг и частота дискретизации аналогового сигнала.

Максимально допустимый шаг Δt_{max}, соответственно минимальную частоту $f_{\partial.min}$ дискретизации входного сигнала $x(t)$ выбирают на основе теоремы отсчётов (теоремы Котельникова) [4, с. 257]:

$$\Delta t_{max} = 1/2f_m;\ f_{\partial.min} = 1/\Delta t_{max} = 2f_m,$$

где f_m - максимальная частота спектра сигнала $x(t)$, определяемая на основе, например, энергетического критерия [4, с. 243].

Для уменьшения влияния перекрытия соседних спектров, обусловленных дискретизацией аналогового сигнала $x(t)$, минимальную частоту дискретизации $f_{\partial.min}$ увеличивают в 3…5 раз, т. е $f_\partial = (6…10)f_m$.

Для преобразования и обработки сигналов и изображений используют различные частоты дискретизации. Так, в системах связи $f_\partial = 8$ кГц, в звукотехнике $f_\partial = 40…48$ кГц, в системах обработки *ТВ*-изображений $f_\partial = 14$ МГц. В современном цифровом оборудовании телецентров приняты следующие стандарты на частоту дискретизации: для обработки сигналов $f_\partial = 48$ кГц; для передачи сигналов по каналу связи $f_\partial = 32$ кГц; для лазерного проигрывателя $f_\partial = 44{,}1$ кГц.

С целью упрощения расчётов и возможности сопоставления частотных характеристик различных фильтров принимают шаг дискретизации $\Delta t = 1/\hat{f}_\partial = 1$. Тогда нормированная частота дискретизации $\hat{f}_\partial = 1$ Гц, а частоту сигнала (или частоты его спектральных составляющих и помех) выражают в долях от частоты $\hat{f}_\partial$, т. е. $\hat{f} = (0…0{,}5)\hat{f}_\partial$; при этом **нормированная** (цифровая) частота $w = \hat{f}/\hat{f}_\partial = 0…0{,}5$. Зная ненормированную частоту дискретизации f_∂, нетрудно восстановить реальную шкалу частот, используя выражение $f = w f_\partial$.

В общем случае выходной сигнал $y(k)$ (при $\Delta t = 1$) в текущий момент времени $k\Delta t$ определяется значением входного сигнала $x(k)$ в тот же момент времени k, значениями входного и выходного сигналов в предшествующие моменты времени $k - n$ ($n > 0$) и описывается **разностным уравнением** вида

$$\begin{aligned} y(k) = {} & a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + \ldots + a_{N-1} x[(k-(N-1)] - \\ & - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) - \ldots - b_{M-1} y[(k-(M-1)],\ M \geq N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(k - n)$ и $y(k - m)$ - задержанные соответственно на n и m отсчётов входной и выходной сигналы.

Все реальные сигналы являются каузальными (причинными). При их математическом описании удобно совмещать начало отсчёта аргумента $k = 0$ с началом сигнала и считать, что он равен нулю при значении аргумента k, меньшем нуля, т. е. $x(-k) = 0.$ Соответственно $y(-k) = 0,$ т. к. на выходе устойчивого фильтра не может появиться сигнал, опережающий первый отсчёт $x(0)$ входного сигнала.

Соотношение между выходным и входным сигналами в ЦФ обычно представляют в z-области в виде **системной (передаточной)** функции ЦФ

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^{M\text{-}1} b_m z^{-m}} =$$

$$= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}, \qquad (2)$$

где $z = e^{p\Delta t}$; $N - 1 \geq 0$; $M - 1 \geq 1$.

Общее описание ЦФ уравнениями (1) и (2) позволяет создать набор алгоритмов, которые непосредственно используют для реализации ЦФ в виде специального устройства (на базе специализированных микропроцессоров типа DSP-5600x, DSP-5630x, TSP-320xx и др.) или в виде программ для ПЭВМ [6]. Этот набор алгоритмов создаётся путём варьирования величин N, M, a_n и b_m.

Для реализации какой-либо заранее выбранной функции типа (1) или (2) можно подобрать множество цифровых фильтров, составленных на основе трёх элементов [4, с. 268]: сумматора (условное обозначение на схемах $\oplus$), умножителя ($\triangleright$) и элемента задержки ($\boxed{\Delta t}$), соотношения между входом $x(k)$ и выходом $s(k)$ которых:

$$s_{\oplus}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x(k-n); \quad s_{\triangleright}(k) = a_n x(k); \quad s_{\Delta t}(k) = x(k-1).$$

На рис. 2, *а* представлена прямая структура **рекурсивного фильтра** (РЦФ), согласно которой для расчёта выходного сигнала $y(k)$ (см. выражение (1)) используются по меньшей мере одно значение входного сигнала $x(k)$ и одно из полученных ранее значений выходного сигнала $y(k - m)$, $m = 1, 2,\ldots$ (т. е. у РЦФ не все коэффициенты b_m равны нулю). Эта структура содержит один сумматор, умножители и $N + M - 2$ элементов задержки (для создания цепей, соответствующих числителю и знаменателю системной функции (2), используют отдельные элементы задержки).

Кроме прямых структур часто используют прямую каноническую, каскадную (последовательную) каноническую, параллельную каноническую и комбинации четырёх структур. Под **канонической** реализацией подразумевают форму, при которой число элементов задержки Δt равно порядку системной функции (т. е. равно наивысшей степени полинома знаменателя (числителя) системной функции $H(z)$, рис. 2, *б*). В данной работе будет использована прямая *каскадная каноническая форма реализации* ЦФ, имеющая минимальное число элементов задержки и состоящая из i биквадратных звеньев (рис. 3, *а*). В этой структуре выходная последовательность предшествующего звена фильтра является входной для последующего звена, а эквивалентная системная функция $H(z)$ равна произведению системных функций $H_k(z)$ отдельных биквадратных звеньев (см. рис. 2, *в*):

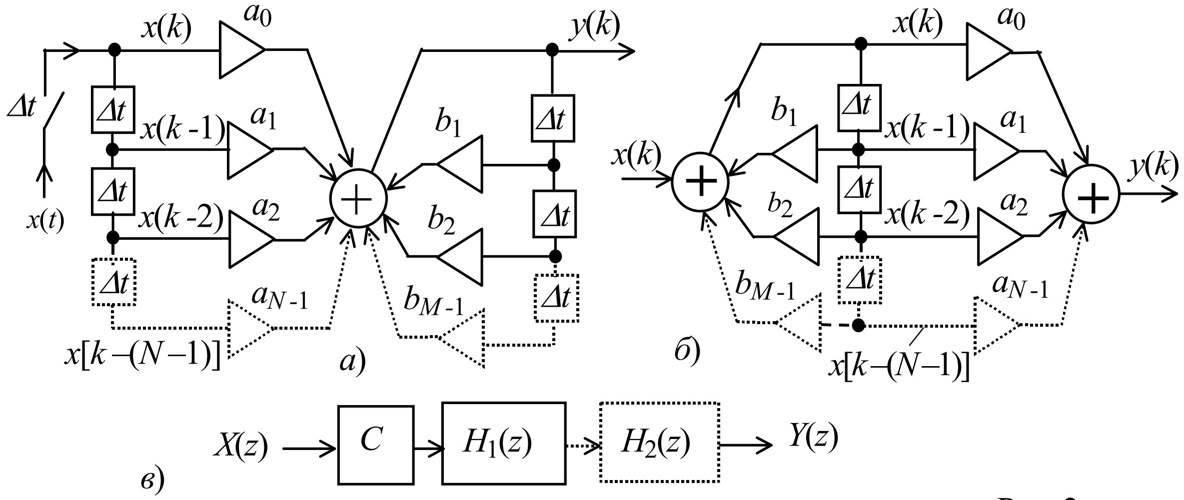
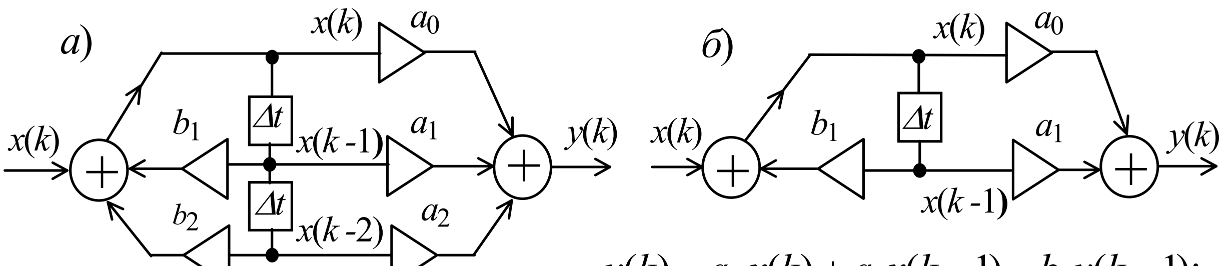


Рис. 2

$$H(z) = Y(z)/X(z) = C\prod_{k=1}^{i} H_k(z),\ \ C \neq 0$$

$$H(z) = C\prod_{k=1}^{i} H_k(z) = \prod_{k=1}^{i} C_k \frac{a_{0k} + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}},\ \ C_k \neq 0. \qquad (3)$$

Постоянный коэффициент $C = C_1C_2...C_i$ определяют из условия $H(0) = 1$ (затухание сигнала на нулевой частоте равно нулю).



$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) - b_1y(k-1);$$

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) +$$
$$+ a_2x(k-2) - b_1y(k-1) - b_2y(k-2);$$

$$H(z) = C\frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}$$

Импульсная функция звена 1-го порядка

$$g(k) = g_{0.k}(k) + g_{1.k}(k),\ \text{где}$$
$$g_{0.k}(k) = a_0(-b_1)^k,\ k = 0, 1, 2, ...;$$
$$g_{1.k}(k) = a_1(-b_1)^{k-1},\ k = 1, 2, 3, ...;$$
$$H(z) = C(a_0 + a_1z^{-1})/(1 + b_1z^{-1})$$

Рис. 3

Возможно, что в сомножителях $H_k(z)$ некоторые коэффициенты равны нулю и, следовательно, отдельные звенья ЦФ могут быть реализованы более простой структурой, чем структурой, показанной на рис. 3, *а*. Например, при $a_2 = b_2 = 0$ получим звено 1-го порядка (рис. 3, *б*).

При $M = 0$ ($b_m = 0$, см. (1) и рис. 2) получается прямая структура **нерекурсивнго фильтра** (НЦФ) (рис. 4, *а*). Выходной сигнал НЦФ в момент $t = k\Delta t$ зависит только от отсчёта $x(k)$ и некоторого числа предшествующих ему членов последовательности N - 1 входных отсчётов, т. е.

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + ... + a_{N-1} x[(k-(N-1)]. \quad (4)$$

Например, в случае пяти ненулевых коэффициентов a_n с одинаковыми значениями имеем пятиточечную сглаживающую функцию

$$y(k) = [x(k-2) + x(k-1) + x(k) + x(k+1) + x(k+2)]/5,$$

а если взять коэффициенты $a_{n-2} = a_{n+2} = -3$, $a_{n-1} = a_{n+1} = 12$ и $a_n = 17$, то получим формулу сглаживания по методу наименьших квадратов

$$y(k) = [-3x(k-2) + 12x(k-1) + 17x(k) + 12x(k+1) - 3x(k+2)]/35.$$

Системная функция:

прямой структуры НЦФ (см. рис. 4, *а*)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_{N-1} z^{-(N-1)}; \quad (5)$$

каскадной структуры НЦФ (звеньев 2-го порядка, см. рис. 4, *б*)

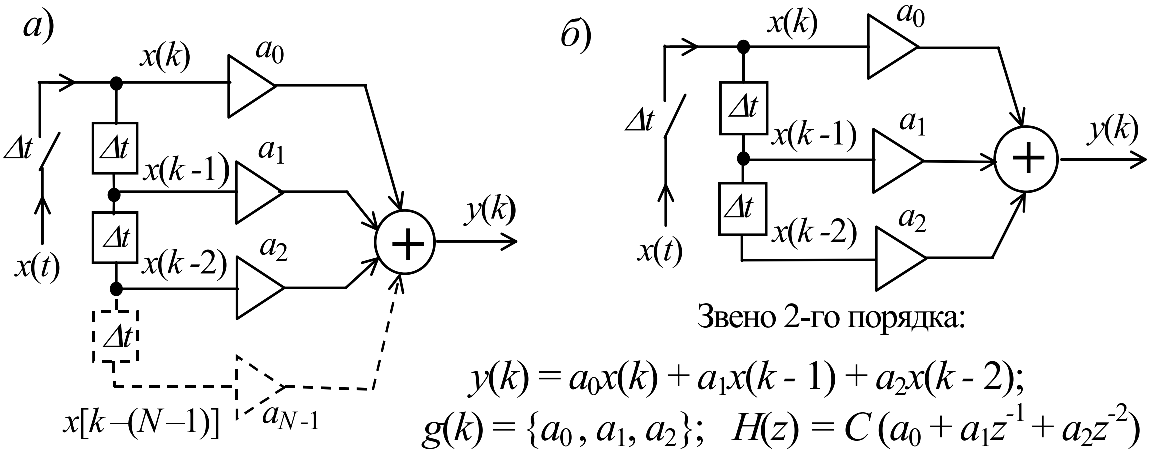
$$H(z) = C \prod_{k=1}^{i} H_k(z) = C \prod_{k=1}^{i} (a_{0k} + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}).$$

Чтобы получить **импульсную** функцию $g(k)$ ЦФ, нужно на его вход подать единичный импульс $\overline{\delta}(k)$, т. е. положить $x(k) = \overline{\delta}(k)$. Тогда импульсные функции $g(k)$ НЦФ и РЦФ соответственно равны (см. (4) и (1)):

$$g(k) = a_0 \overline{\delta}(k) + a_1 \overline{\delta}(k-1) + a_2 \overline{\delta}(k-2) + ... + a_{N-1} \overline{\delta}[(k-(N-1)]; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g(k) = a_0 \overline{\delta}(k) + a_1 \overline{\delta}(k-1) + a_2 \overline{\delta}(k-2) + ... + a_{N-1} \overline{\delta}[(k-(N-1)] - \\ - b_1 g(k-1) - b_2 g(k-2) - ... - b_{M-1} g[(k-(M-1)], M \geq N. \end{aligned} \quad (7)$$

Принципиальное различие между нерекурсивными и рекурсивными фильтрами заключается в свойствах их импульсных характеристик. В первом случае импульсная характеристика содержит конечное число отсчётов, не превышающем N, а во втором,



Звено 2-го порядка:

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2);$$

$$g(k) = \{a_0, a_1, a_2\}; \quad H(z) = C(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

Рис. 4

благодаря обратной связи, число отсчётов теоретически бесконечно велико. В связи с этим нерекурсивные фильтры часто называют **КИХ-фильтрами** (фильтры с конечной импульсной характеристикой), а рекурсивные - **БИХ-фильтрами** (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой).

При этом структура и коэффициенты системной функции $H(z)$ НЦФ однозначно связаны с коэффициентами импульсной функции $g(k)$ фильтра, а в РЦФ эти связи выражены неявным образом. Отсчёты импульсной функции $g(k)$ РЦФ, имеющей вид неогра-ниченно-протяжённой последовательности, можно определить (используя свойства линейности и задержки z-преобразования) посредством суммирования соответствующих отсчётов импульсных функций звеньев 2-го порядка.

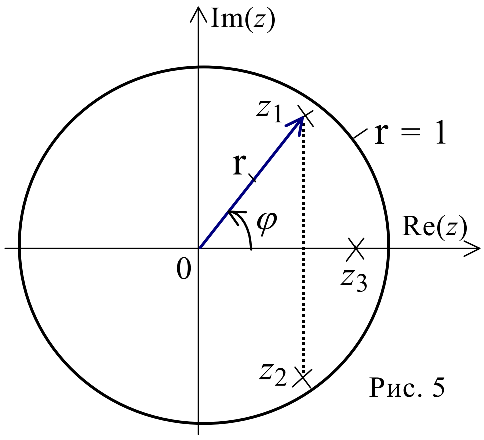


Рис. 5

Если полином знаменателя системной функции $H(z)$ имеет вещественные коэффициенты, то его корни (полюсы) лежат либо на вещественной оси z-плоскости (например, полюс z_3), либо образуют комплексно-сопряжённые пары (например, полюсы z_1 и z_2, рис. 5).

При определении нулей и полюсов в z-плоскости целесообразно преобразовать функцию $H(z)$ к виду без отрицательных степеней z, т. е.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2}.$$

Откуда комплексно-сопряжённая пара полюсов

$$z_{1,2} = -b_1/2 \pm j\sqrt{b_2 - b_1^2/4} = \mathrm{r}e^{\pm j\varphi} = \mathrm{r}\cos\varphi \pm j\mathrm{r}\sin\varphi.$$

Приравняв вещественные и мнимые части

$$-b_1/2 = \mathrm{r}\cos\varphi;\ \sqrt{b_2 - b_1^2/4} = \sqrt{b_2 - \mathrm{r}^2\cos^2\varphi} = \mathrm{r}\sin\varphi,$$ получим:

$$\mathrm{r} = \sqrt{b_2};\ \varphi = -\arccos(b_1/2\mathrm{r}) = -\arccos(b_1/2\sqrt{b_2}) = -\mathrm{arctg}\sqrt{4b_2/b_1^2 - 1}$$

$$g(k) = g_0(k) + g_1(k) + g_2(k),$$

(обратные соотношения: $b_1 = -2\mathrm{r}\cos\varphi$ и $b_2 = \mathrm{r}^2$).

где $g_0(k) = a_0 \mathrm{r}^k \dfrac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}$, $k = 0,1,2,\ldots;$ $g_1(k) = a_1 \mathrm{r}^{k-1} \dfrac{\sin(k\varphi)}{\sin\varphi}$, $k = 1,2,3,\ldots;$

Тогда импульсная функция звена 2-го порядка РЦФ

При $a_0 = 1$ и $a_1 = a_2 = 0$ системная функция

$H(z) = 1/(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = z^2 / z^2 + b_1 z + b_2$, а его реакция на единич-

$$g_2(k) = a_2 \mathrm{r}^{k-2} \frac{\sin(k-1)\varphi}{\sin\varphi},\ k = 2, 3, 4, \ldots.$$

$$g(k) = \mathrm{r}^k \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

ный импульс $\bar{\delta}(k)$ при нулевых начальных условиях

Выражение импульсной функции звена 1-го порядка РЦФ приведено на рис. 3, *б*.

Если системная функция РЦФ представлена в виде выражения (2), то импульсную функцию $g(k)$ (см. (7)) фильтра записывают, пользуясь следующим мнемоническим правилом:

- коэффициенты a_n при $\bar{\delta}(k-n)$ равны коэффициентам числителя функции $H(z)$ при z^{-k}, $k = 0, 1, 2,\ldots, N - 1$;

- коэффициенты b_m при $g(k-m)$ равны коэффициентам знаменателя (с обратным знаком) функции $H(z)$ при z^{-k}, $k = 1, 2,\ldots, M - 1$.

Например, для звена 2-го порядка РЦФ с системной функцией $H(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})/(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$ импульсная функция

$$g(k) = a_0 \overline{\delta}(k) + a_1 \overline{\delta}(k-1) + a_2 \overline{\delta}(k-2) - b_1 g(k-1) - b_2 g(k-2).$$

Для трёхзвенного РЦФ с системной функцией

$$H(z) = \frac{a_{01} + a_{11} z^{-1} + a_{21} z^{-2}}{1 + b_{11} z^{-1} + b_{21} z^{-2}} \cdot \frac{a_{02} + a_{12} z^{-1} + a_{22} z^{-2}}{1 + b_{12} z^{-1} + b_{22} z^{-2}} \cdot \frac{a_{03} + a_{13} z^{-1} + a_{23} z^{-2}}{1 + b_{13} z^{-1} + b_{23} z^{-2}} =$$

$$= \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + A_3 z^{-3} + A_4 z^{-4} + A_5 z^{-5} + A_6 z^{-6}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + B_3 z^{-3} + B_4 z^{-4} + B_5 z^{-5} + B_6 z^{-6}},$$

где $A_0 = a_{01} a_{02} a_{03}$; $A_1 = a_{01} a_{02} a_{13} + a_{01} a_{12} a_{03} + a_{11} a_{02} a_{03}$;
$A_2 = a_{01} a_{02} a_{23} + a_{01} a_{12} a_{13} + a_{11} a_{02} a_{13} + a_{01} a_{22} a_{03} + a_{11} a_{12} a_{03} + a_{21} a_{02} a_{03}$;
$A_3 = a_{01} a_{12} a_{23} + a_{11} a_{02} a_{23} + a_{01} a_{22} a_{13} + a_{11} a_{12} a_{13} + a_{21} a_{02} a_{13} + a_{11} a_{22} a_{03} +$
$+ a_{21} a_{12} a_{03}$; $A_4 = a_{01} a_{22} a_{23} + a_{11} a_{12} a_{23} + a_{21} a_{02} a_{23} + a_{11} a_{22} a_{13} + a_{21} a_{12} a_{13} +$
$+ a_{21} a_{22} a_{03}$; $A_5 = a_{11} a_{22} a_{23} + a_{21} a_{12} a_{23} + a_{21} a_{22} a_{13}$; $A_6 = a_{21} a_{22} a_{23}$;
$B_1 = b_{13} + b_{12} + b_{11}$; $B_2 = b_{23} + b_{12} b_{13} + b_{11} b_{13} + b_{22} + b_{11} b_{12} + b_{21}$;

$$B_3 = b_{12} b_{23} + b_{11} b_{23} + b_{22} b_{13} + b_{11} b_{12} b_{13} + b_{21} b_{13} + b_{11} b_{22} + b_{21} b_{12};$$

$$B_4 = b_{22} b_{23} + b_{11} b_{12} b_{23} + b_{21} b_{23} + b_{11} b_{22} b_{13} + b_{21} b_{12} b_{13} + b_{21} b_{22};$$

$$B_5 = b_{11} b_{22} b_{23} + b_{21} b_{12} b_{23} + b_{21} b_{22} b_{13}; \; B_6 = b_{21} b_{22} b_{23},$$

расчёт отсчётов импульсной функции можно вести, пользуясь выражением

$$g(k) = A_0 \overline{\delta}(k) + A_1 \overline{\delta}(k-1) + A_2 \overline{\delta}(k-2) + \ldots + A_6 \overline{\delta}(k-6) -$$
$$- B_1 g(k-1) - B_2 g(k-2) - \ldots - B_6 g(k-6).$$