ПОСТРОЕНИЕ ЛАЧХ И ЛФЧХ ФИЛЬТРА ПРИ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЯХ ФУНКЦИИ *H*(*p*)

Как отмечалось, если среди корней полиномов *M*(*p*) и *N*(*p*) переда-точной функции *H*(*p*) (см. (3)) имеется комплексно-сопряженная пара вида , то в выражениях (7)…(9) передаточных функций появит-ся множитель вида $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c$

$$(p-p_1)(p-p_2) = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega_c^2 = p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 =$$

$$= \omega_0^2(\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\alpha}{\omega_0^2}p + 1) = \frac{1}{\tau_2^2}(\tau_2^2 p^2 + \tau_1 p + 1),$$

где $\tau_2 = 1/\omega_0;\ \tau_1 = 2\alpha/\omega_0^2;\ \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}$.

Заменив $p = j\omega$, получим комплексный множитель

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}\, e^{j\operatorname{arctg}[2\alpha\omega/(\omega_0^2-\omega^2)]}$$

или

$$(1/\tau_2^2)(1 - \tau_2^2\omega^2 + j\tau_1\omega) = (1/\tau_2^2)\sqrt{(1-\tau_2^2\omega^2)^2 + \tau_1^2\omega^2}\, e^{j\operatorname{arctg}[\tau_1\omega/(1-\tau_2^2\omega^2)]}.$$

Его участие в усилении (ослаблении) сигнала выразится так:

$$L(\omega) = \pm 20\lg\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \pm 20\lg(1/\tau_2^2)\sqrt{(1-\tau_2^2\omega^2)^2 + \tau_1^2\omega^2},$$

где знак " + " относится к комплексной паре нулей полинома *M*(*p*), а знак " - " - к комплексной паре полюсов полинома *N*(*p*) функции *H*(*p*).

Асимптота на низкой частоте (ω → 0) соответствует постоянному числу

$$L_1(\omega \to 0) \approx \pm 20\lg\omega_0^2 = \pm 40\lg\omega_0 = \pm 40\lg(1/\tau_2)$$

(это горизонтальная линия на уровне на двойной логариф-мической сетке), а асимптота на высокой частоте (ω → ∞) $\pm 40\lg(1/\tau_2)$

$$L_2(\omega \to \infty) \approx \pm 20\lg\omega^2 = \pm 40\lg\omega,$$

т. е. это также прямая линия, но с наклоном ±40 дБ/дек, проведенная из точки ω_1. Сопрягающую частоту можно найти, приравняв эти две асимп-тоты, т. е. .

$$L_1(\omega \to 0)_{\omega=\omega_1} = L_2(\omega \to \infty)_{\omega=\omega_1};\quad \pm 40\lg\omega_0 = \pm 40\lg\omega_1$$

Откуда $\omega_1 = \omega_0 = 1/\tau_2$, что равно расстоянию полюса или нуля p_1 от начала координат комплексной плоскости $p = \sigma + j\omega$ (рис. 9, *а*).

Максимальное отклонение действительной ЛАЧХ комплексной пары от асимптотической характеристики составляет не 3 дБ, как для случая вещественных корней, а

$$\Delta L(\omega_1) = \pm 20[\lg 2\alpha\omega_0 - \lg\omega_0^2] = \pm 20\lg(\tau_1/\tau_2)$$

(для комплексной пары полюсов , а для комплексной пары нулей Δ).

$\Delta L(\omega'_1) = 20\lg(\tau'_2/\tau'_1)L(\omega_1) = 20\lg(\tau_1/\tau_2)$

Если отношение $2\alpha'/\omega'_0 = \tau'_1/\tau'_2$ мало, то его логарифм будет большим отрицательным числом. В предельном случае, когда комплексно-сопряжён-ная пара p_3 и $\hat{p}_3$ (см. рис. 9, *а*) находится на оси $j\omega$ ($\alpha'_3 = 0$), $\Delta L(\omega'_1) = \infty$.

На рис. 9, *б* показано возможное влияние пары комплексно-сопряженных полюсов полинома $N(p)$, точнее, коэффициента затухания α', на ослабление сигнала. Очевидно, когда комплексно-сопряженные полюса или нули не очень близки к оси $j\omega$ комплексной плоскости $p = \sigma + j\omega$, асимптотические величины достаточно хорошо аппроксимируют ЛАЧХ.

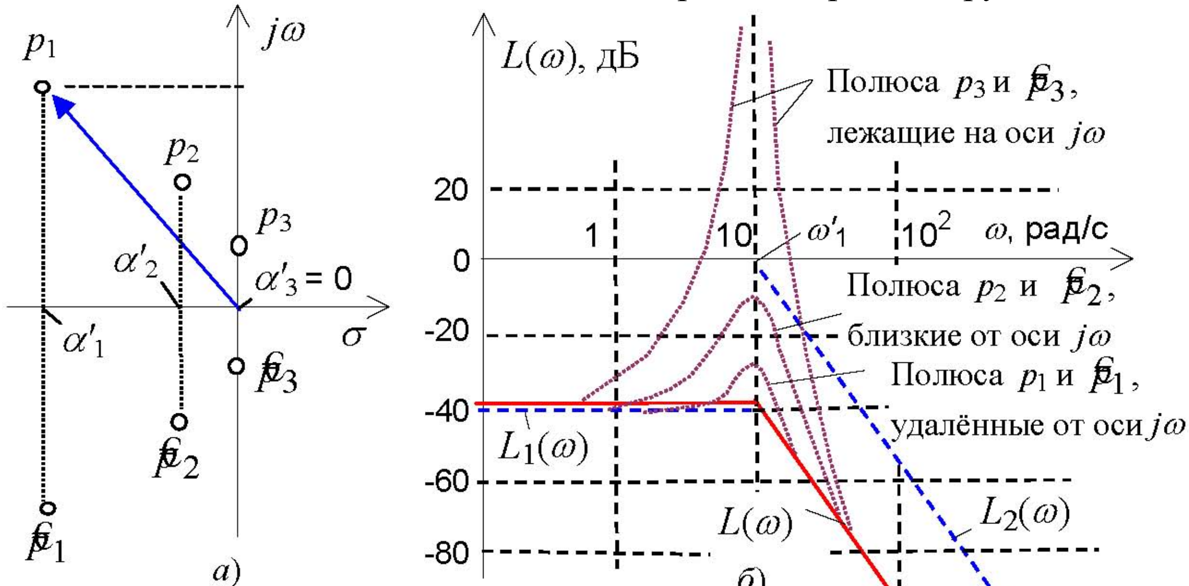

Рис. 9

Вклад в сумму ФЧХ от комплексного сомножителя:

$$\Psi(\omega) = \pm\mathrm{arctg}[2\alpha\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)] = \pm\mathrm{arctg}[\tau_1\omega/(1 - \tau_2^2\omega^2)].$$

Угол $\Psi(\omega)$ изменяется в пределах от 0 до $\pm\pi$ (при $\omega = \omega_1 = \omega_0 = 1/\tau_2$, $\Psi(\omega_1) = \pm\pi/2$), где знак "плюс" - для сомножителя в числителе переда-точной функции $H(p)$, а знак "минус" - для сомножителя в знаменателе.

Пример 5. Построить на двойной логарифмической сетке ЛАЧХ *RLC*-фильтра третьего порядка (рис. 10), где $L_1 = L_2 = C = R = 1$ (все параметры имеют единичные значения).

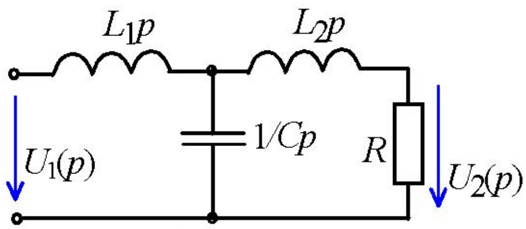

Рис. 10

Решение. 1. Находим передаточ-ную функцию фильтра

$$H_u(p)=U_2(p)/U_1(p)=\frac{1}{L_1L_2Cp^3/R+L_1Cp^2+(L_1+L_2)p/R+1}, \qquad (14)$$

имеющую три корня: действительный p_1 =- 0,5698 и пару комплексно-сопряженных $p_{2,3}$ = - 0,2151 ± j1,3071.

Тогда

$$H_u(p)=\frac{1}{(p+0{,}5698)(p^2+0{,}4302p+1{,}7548)}=$$

$$=\frac{1}{(1{,}7548p+1)(0{,}5698p^2+0{,}245p+1)},$$

где τ'_1 = 1,7548 с; τ''_1 = 0,245 с и = 0,5698 с τ'^{22}_2 (= 0,7548 с). τ'_2

2. Начальная точка имеет координаты: ω = 1, L(1) = 0, поэтому низкочастотная асимптота L_0(ω) совпадает с осью частот.

3. Сопрягающие частоты: ω'_1 = 1/τ'_1 = 0,5698 рад/с (наклон меняется на - 20 дБ/дек); ω'_2 = 1/τ'_2 = 1,3248 рад/с (наклон меняется на - 40 дБ/дек).

4. Строим ЛАЧХ фильтра (рис. 11), суммируя ЛАЧХ отдельных его звеньев, т. е.

$$L(\omega) = L_0(\omega) + L_1(\omega) + L_2(\omega).$$

5. Отклонение асимптотической ЛАЧХ от действительной кривой на частоте ω'_2

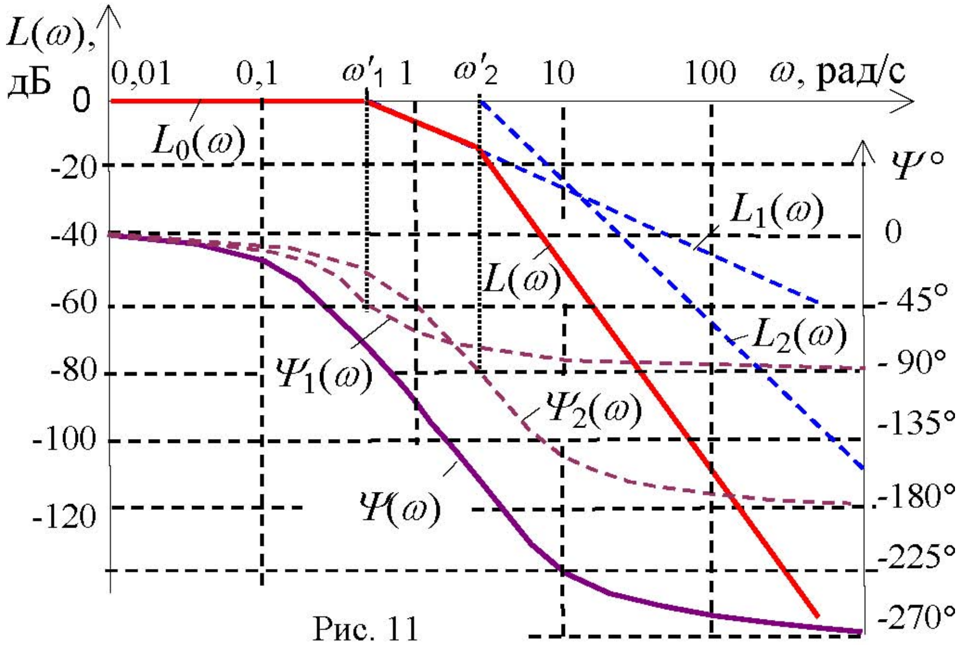

Рис. 11

$20\lg(\tau'_2/\tau''_1) = 20\lg(0{,}7548/0{,}245) = 9{,}77$ дБ.

6. Строим ЛФЧХ фильтра (см. рис. 11)

$\Psi(\omega) = \Psi_1(\omega) + \Psi_2(\omega)$,

где $\Psi_1(\omega) = -\operatorname{arctg}(1{,}7548\omega)$; $\Psi_2(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{0{,}245\omega}{1-0{,}5698\omega^2}\right)$.

Внимание! При $\omega = \omega'_1$, $\Psi_1 = -45°$; при $\omega = \omega'_2$, $\Psi_2 = -90°$.