

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЦФ

Рекурсивный цифровой фильтр (РЦФ) с бесконечной импульсной характеристикой $g(k)$ описывается в общем случае системной функцией

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} / \left(1 + \sum_{m=1}^{M-1} b_m z^{-m} \right) \quad (19)$$

и разностным уравнением

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x(k-n) - \sum_{m=1}^{M-1} b_m y(k-m), \quad k=0, 1, 2, \dots, M \geq N.$$

Для решения аппроксимационной задачи (т. е. для расчёта коэффициентов a_k и b_m системной функции $H(z)$ РЦФ по заданным требованиям к АЧХ) используются три класса методов:

- прямые методы расчёта в z -плоскости;
- методы, использующие алгоритмы оптимизации;
- методы преобразования аналогового фильтра в цифровой фильтр.

После определения коэффициентов функции $H(z)$ следует выбрать структуру фильтра (например, последовательную каскадную, состоящую из биквадратных звеньев) и рассчитать разрядности отсчётов входного сигнала (8...16 двоичных разрядов и более), коэффициентов системной функции и внутренних кодов фильтра. Как отмечалось, при расчёте и моделировании ЦФ на ПЭВМ с микропроцессором Pentium используются 32-х разрядные числа с двойной точностью, что позволяет не учитывать эффекты, связанные с конечной разрядностью регистров фильтров.

Исходными данными для решения аппроксимационной задачи при проектировании РЦФ (как и НЦФ) являются граничные частоты ω_n и ω_z полос пропускания и задерживания, а также величины α_{max} и α_{min} .

Для расчёта избирательных РЦФ наиболее широко используется один из методов третьего класса: **метод билинейного преобразования**. С помощью этого метода передаточная функция $H(p)$ устойчивого аналогового фильтра-прототипа (АФ-прототипа) преобразуется в системную функцию $H(z)$ цифрового рекурсивного фильтра.

Достоинством метода билинейного преобразования является то, что системная функция $H(z)$ РЦФ определяется с помощью простых формул из передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра. При этом выходной сигнал РЦФ приближённо совпадает с выходным сигналом аналогового фильтра-прототипа при одинаковых произвольных входных сигналах. Однако при билинейном преобразовании (при переходе от аналогового фильтра к цифровому) имеет место **деформация шкалы частот**, которую обычно компенсируют перед началом расчёта АФ-прототипа с помощью предискажений в аналоговом фильтре.

Билинейное преобразование представляет собой конформное преобразование точек p -плоскости в точки z -плоскости и использует замену переменной p в передаточной функции $H(p)$ АФ-прототипа:

$$p = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \gamma \frac{z - 1}{z + 1} \left(\text{обратное соотношение } z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p} \right), \quad (20)$$

где γ - некоторый постоянный коэффициент, величина которого не меняет формы преобразования. Во многих случаях применяют $\gamma = 2/\Delta t$. В данной работе значение коэффициента γ вычисляется с использованием исходных данных ЦФ для внесения частотных предсказаний в АФ-прототип.

Итак, системная функция ЦФ

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = \gamma \frac{z-1}{z+1}}.$$

Для различения "аналоговых" и "цифровых" частот угловую "аналоговую" частоту будем обозначать Ω , а "цифровую" - ω .

Преобразование (20) позволяет сопоставить каждой точке комплексной p -плоскости ($p = \sigma + j\Omega$) определённую точку z -плоскости ($z = e^{(\sigma + j\omega)\Delta t}$).

Билинейное преобразование обладает свойством, при котором мнимая ось ($p = j\Omega$ для $-\infty < \Omega < \infty$) p -плоскости отображается на z -плоскости **одним обходом окружности** радиуса $r = |z| = 1$ (рис. 11, а). Действительно, если подставить в (20) $z = e^{j\omega\Delta t}$:

$$\begin{aligned} p = j\Omega &= \gamma \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{1 + e^{j\omega\Delta t}} = \gamma \frac{2j \sin(\omega\Delta t / 2)}{2 \cos(\omega\Delta t / 2)} = j\gamma \operatorname{tg}(\omega\Delta t / 2) = \\ &= 1 \cdot e^{j\varphi(\Omega)} = r \cdot e^{j\varphi(\Omega)}, \end{aligned}$$

то для точек z , находящихся на единичном круге ($r = 1$), $\bar{\sigma}\Delta t = 0$, а частоты Ω и ω связаны соотношением

$$\Omega = \gamma \operatorname{tg}(\omega \Delta t / 2) \text{ [обратное соотношение } \omega = (2/\Delta t) \cdot \operatorname{arctg}(\Omega/\gamma)], \quad (21)$$

которое графически показано на рис. 11, б.

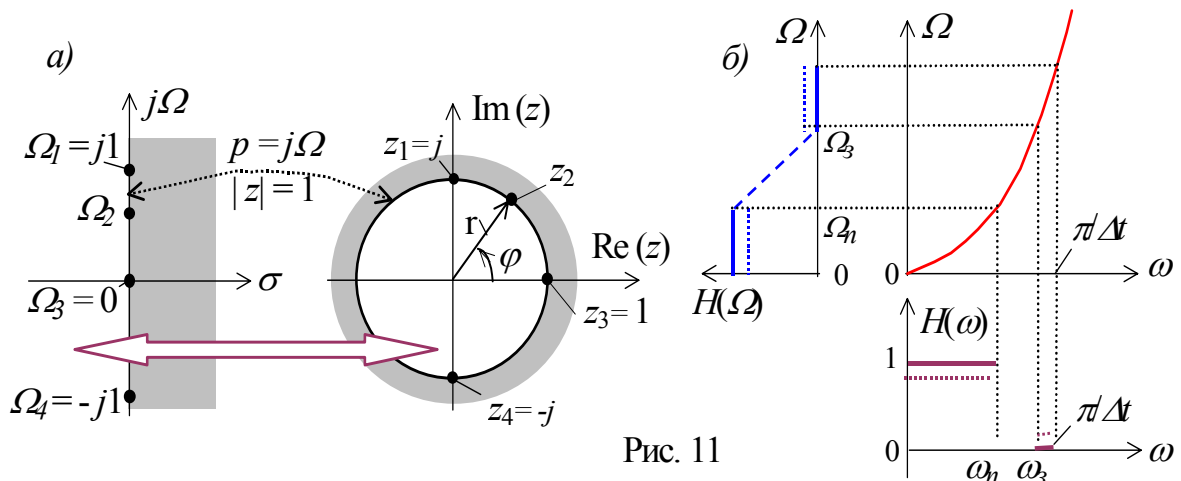


Рис. 11

Фазовый угол φ (см. рис. 11, а) на z -плоскости легко определить из обратного соотношения (20): при $z = (\gamma + p)/(\gamma - p)$ и $p = j\Omega$

$$z = \frac{\gamma + j\Omega}{\gamma - j\Omega} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} e^{j \arctg(\Omega/\gamma)}}{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} e^{-j \arctg(\Omega/\gamma)}} = 1 \cdot e^{j 2 \arctg(\Omega/\gamma)} = e^{j \varphi(\Omega)},$$

или из (21): $\varphi(\Omega) = \omega \Delta t = 2 \arctg(\Omega/\gamma)$.

При монотонном изменении Ω от $-\infty$ до $+\infty$ фазовый угол φ монотонно изменяется от $-\pi$ до $+\pi$. В частности, для $\Omega_3 = 0$ имеем $z = e^{j0} = 1$ (на вещественной оси z -плоскости), для $\Omega = \pm \infty$ получаем $z = e^{\pm j\pi} = -1$.

Из рис. 11, а видно, что положительная и отрицательная мнимые оси из p -плоскости отображаются соответственно в верхнюю и нижнюю половины единичной окружности на z -плоскости.

Известно, что все полюсы передаточной функции устойчивого аналогового фильтра расположены в левой половине p -плоскости; он при преобразовании будет давать устойчивый РЦФ. Границей устойчивой работы цепи аналогового фильтра является мнимая ось $j\Omega$ ($\sigma = 0$), цифрового - единичная окружность с центром в точке $z = 0$.

Так как мнимая ось p -плоскости отображается на единичную окружность z -плоскости, то все максимумы и минимумы АЧХ $H(\Omega)$ АФ-прототипа сохраняются и в АЧХ $H(\omega)$ ЦФ. Сохраняется также и неравномерность АЧХ для соответствующих диапазонов частот (см. рис. 11, б).

Таким образом, билинейное преобразование $p = \gamma(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$ отображает левую полуплоскость p во внутреннюю область ($|z| < 1$), а правую (заштрихованную на рис. 11, а) - во внешнюю (также заштрихованную) область единичной окружности на плоскости z . Полюсы функции $H(z)$ устойчивой дискретной системы должны располагаться только внутри круга единичного радиуса, нули же могут быть расположены в любой точке плоскости z .

Хотя билинейное преобразование может быть эффективно использовано для отображения кусочно-постоянных АЧХ из p -плоскости на z -плоскость (сохраняя масштаб по оси ординат), деформация шкалы частот будет проявляться в искажениях ФЧХ фильтра, особенно в области высоких частот (см. рис. 11, б). Если бы нас, например, интересовал ЦФ нижних частот с линейной фазовой характеристикой, то мы не смогли бы получить такой фильтр, применив билинейное преобразование к аналоговому фильтру нижних частот с линейной фазовой характеристикой.

Деформацию частотной шкалы (см нелинейное соотношение (21) между "аналоговыми" частотами Ω и "цифровыми" частотами ω : $\Omega = \gamma \tg(\omega \Delta t/2) = \gamma \tg(\pi w)$, где $w = \omega/\omega_0 = f/f_0$ - нормированная "цифровая" частота) учитывают при расчёте РЦФ посредством соответствующего выбора коэффициента γ . Так, для получения РЦФ нижних частот с граничной

частотой ω_n полосы пропускания надо в качестве прототипа использовать нормированный аналоговый фильтр с нормированной частотой среза $\Omega_c = \Omega_n = 1$. Тогда $\Omega_n = \gamma \operatorname{tg}(\omega_n \Delta t / 2) = \gamma \operatorname{tg}(\pi \omega_n) = 1$, откуда

$$\gamma = 1/\operatorname{tg}(\omega_n \Delta t / 2) = \operatorname{ctg}(\omega_n \Delta t / 2) = \operatorname{ctg}(\pi \omega_n). \quad (22)$$

Процедуры расчёта аналоговых фильтров хорошо отработаны; значения основных параметров, описывающих АЧХ классических аналоговых фильтров, вычислены и протабулированы. Так, в справочнике [5] по расчёту аналоговых фильтров приведены таблицы коэффициентов передаточных функций $H(p)$ нормированных фильтров нижних частот с ограниченным количеством комбинаций величин α_{max} (или $|p|$ %) для полиномиальной аппроксимации Баттерворта, Чебышева, Золотарёва-Кауэра.

В данной работе ограничимся рассмотрением фильтра Чебышева типа T , АЧХ которого является равноволновой (колеблется между уровнями 1 и $1 - \varepsilon$) в полосе пропускания и монотонно убывающей в полосе задерживания (см. кривую 2, рис. 7, а).

Функция, аппроксимирующая квадрат $H^2(\Omega)$ требуемой АЧХ фильтра Чебышева, имеет вид

$$H^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_n)} \quad \text{или} \quad \alpha(\Omega) [\text{дБ}] = -10 \lg(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_n)),$$

где полином Чебышева $T_N(\Omega) = \cos(N \cdot \arccos \Omega)$, $-1 \leq \Omega \leq 1$;

$T_N(\Omega) = \operatorname{ch}(N \cdot \operatorname{Arccch} \Omega)$ вне указанного интервала, причём

$$T_0(\Omega) = 1; \quad T_1(\Omega) = \Omega; \quad T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1; \quad T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega;$$

$$T_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 - 1; \quad T_5(\Omega) = 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega \quad \text{и т. д.};$$

Ω - "аналоговая" угловая частота; Ω_n - граничная частота полосы пропускания аналогового фильтра нижних частот; N - порядок фильтра (обычно равный 2...8); $\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_{max}} - 1} = 0,1...1$ (α_{max} в дБ) - коэффициент неравномерности затухания в полосе пропускания.

Квадрат АЧХ $H^2(\Omega)$ колеблется в интервале между 1 и $1/(1+\varepsilon^2)$ в полосе пропускания, равен 1 в точке $\Omega = 0$, когда N нечётно; когда N чётно, он равен $1/(1+\varepsilon^2)$ в точке $\Omega = 0$ и в точке $\Omega = \Omega_n$.

Методы проектирования аналоговых фильтров по заданным требованиям к АЧХ основаны на использовании таблиц и номограмм, приводимых в справочниках. Формулировка требований к аналоговому фильтру- прототипу определяется билинейным преобразованием и структурой используемого справочника по расчёту аналоговых фильтров. Для определения передаточной функции $H(p)$ АФ-прототипа используем номограммы и таблицы справочника [5], относящиеся к фильтрам с характеристиками Чебышева типа T невысоких порядков. В справочнике [5] приводятся для аналоговых ФНЧ **нормализованные передаточные функции**, т. е. имеющие частоту среза $\Omega_n = 1$ рад/с.

Рассмотрим алгоритм определения передаточной функции аналогового фильтра-прототипа нижних частот с характеристикой Чебышева типа T по справочным таблицам и номограммам. В качестве исходных данных должны быть заданы (или предварительно вычислены): Ω_n ; α_{max} - максимально допустимый коэффициент затухания в полосе пропускания $0 \dots \Omega_n$; Ω_3 ; α_{min} - гарантированное затухание на граничной частоте Ω_3 полосы задерживания.

Алгоритм определения функции $H(p)$ включает следующие этапы:

а) определяется модуль коэффициента отражения $|p|\%$ по заданной величине α_{max} (в полосе пропускания от 0 до Ω_n) по формуле

$$|p|\% = 100 \sqrt{1 - e^{-0,23026 \alpha_{max}}}$$

(обратное соотношение $\alpha_{max} = -10 \lg(1 - \rho^2)$, дБ; $p = |p|\%/100$) и выбирается из таблицы 1 ближайшее меньшее значение $|p|\%$;

Таблица 1

$ p \%$	5	10	15	25	50
α_{max} , дБ	0,0109	0,0436	0,0988	0,2803	1,25

б) определяется вспомогательный параметр L с помощью величин α_{min} и $|p|\%$ по общей номограмме (см. рис. 12);

в) определяется порядок N передаточной функции фильтра типа T с помощью заданной нормированной величины Ω_3 в полосе задерживания (от частоты $\Omega = \Omega_3$ до $\Omega = \infty$) и полученной величины L (см. рис.13);

г) записывается передаточная функция $H(p)$ фильтра в общем виде

$$H(p) = \begin{cases} 1/[C \prod_{i=1}^{N/2} (p^2 - 2a_i p + a_i^2 + b_i^2)], & N - \text{чётное}; \\ 1/[C(p - a_0) \prod_{i=1}^{(N-1)/2} (p^2 - 2a_i p + a_i^2 + b_i^2)], & N - \text{нечётное}. \end{cases} \quad (23)$$

Коэффициент C вводится для нормирования АЧХ к единице при $\Omega = 0$ (и соответственно $p = 0$);

д) определяются численные значения коэффициентов C , a_i и b_i передаточной функции $H(p)$ из таблиц (см. табл. 2) с учётом величин N и $|p|\%$;

е) записывается передаточная функция $H(p)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева с численными значениями коэффициентов.

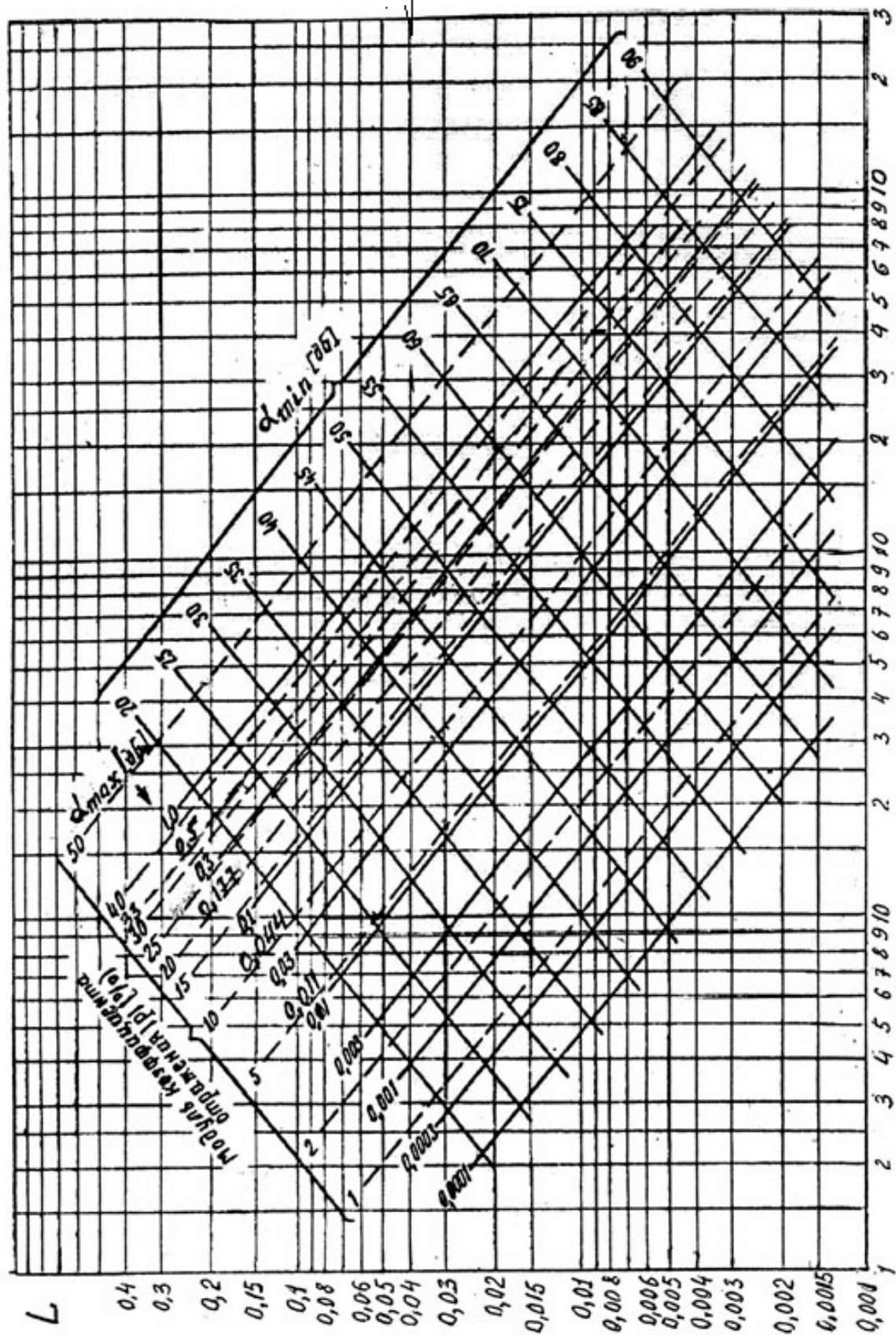


Рис. 12

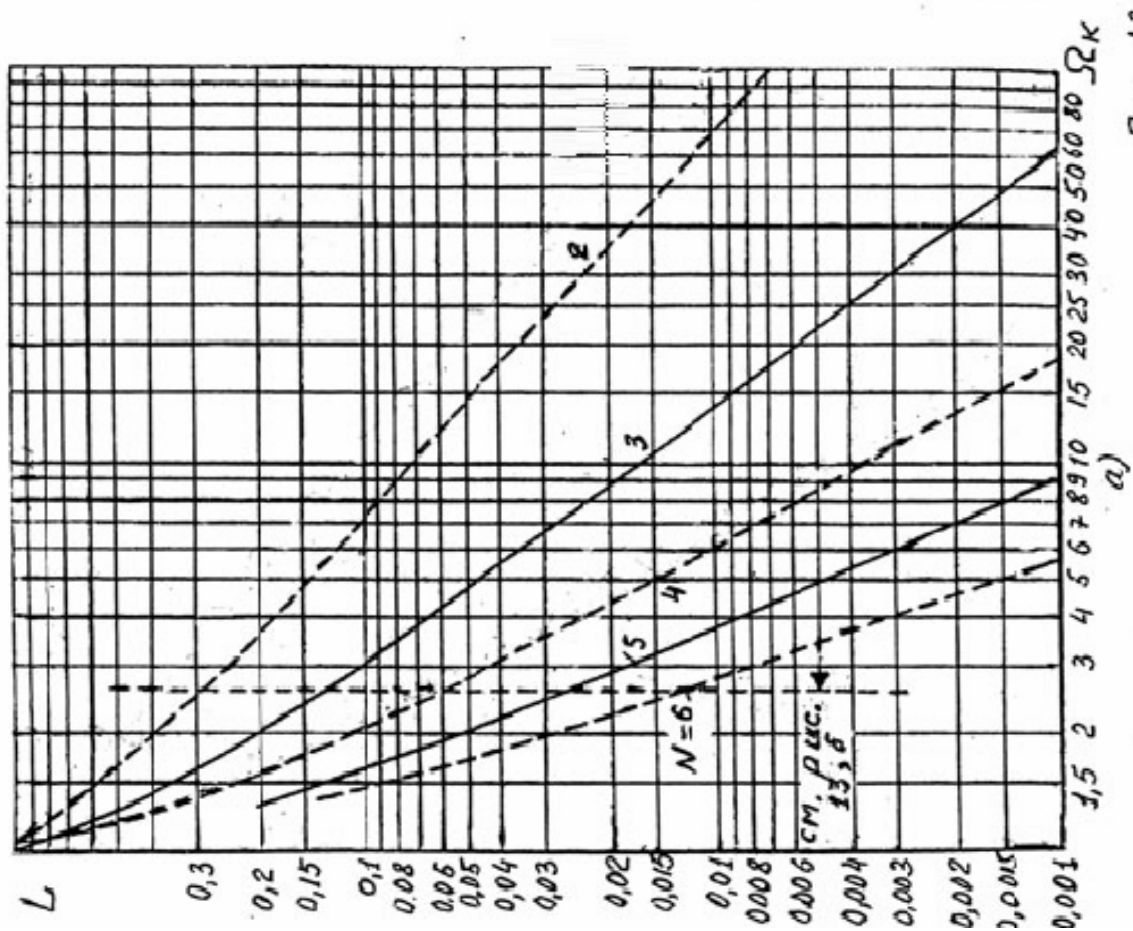
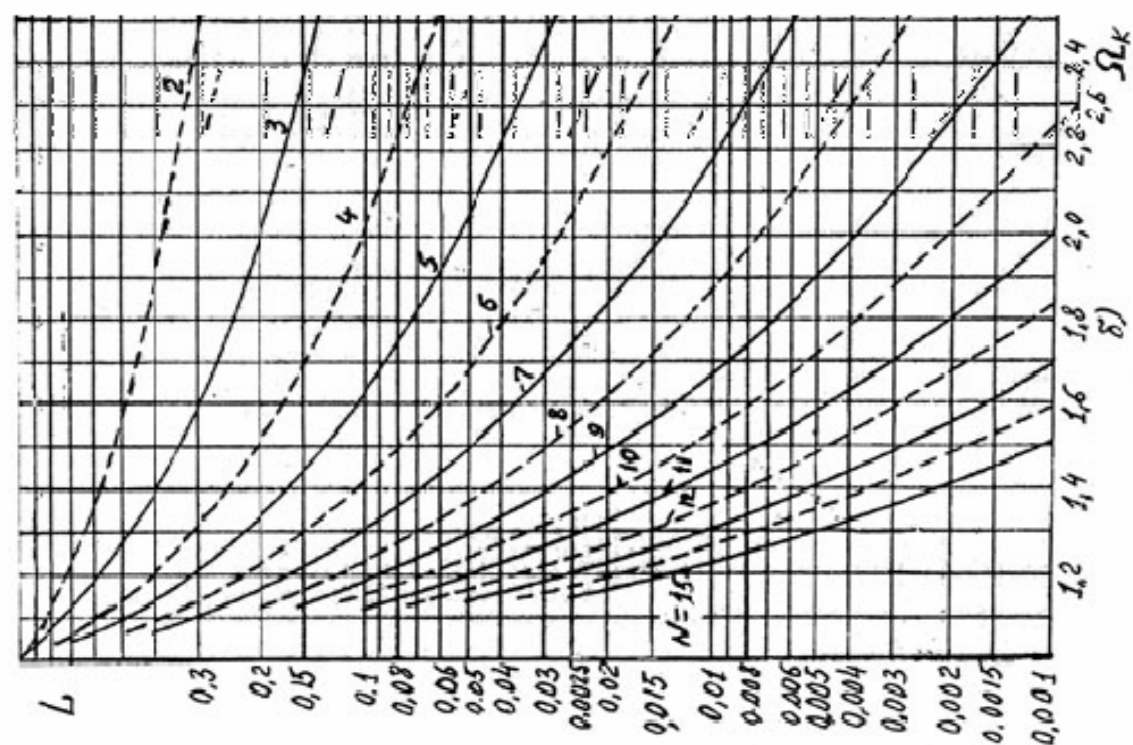


Рис. 13

Таблица 2

Фильтры-прототипы Чебышева типа T (2-го...6-го порядков)

$$\mathbf{TO2:} \quad H(p) = 1/[C(p^2 - 2a_1p + a_1^2 + b_1^2)]$$

$ p \%$	C	$-a_1$	$\pm b_1$
5	0,10012523	2,1794494718	2,2912878475
10	0,20100756	1,5000000138	1,6583124073
15	0,30343304	1,1902380715	1,3844305
25	0,51639778	0,8660254040	1,1180339888
50	1,1547005	0,5	0,8660254038

$$\mathbf{TO3:} \quad H(p) = 1/[C(p - a_0)(p^2 - 2a_1p + a_1^2 + b_1^2)]$$

$ p \%$	C	i	$-a_i$	$-a_{i+1}$	$\pm b_{i+1}$
5	0,20025047	0	1,5633880273	0,7816940137	1,6072159226
10	0,40201513	0	1,1717182911	0,5858591455	1,3340512791
15	0,60686608	0	0,9721338860	0,4860669430	1,2078009850
25	1,03279560	0	0,7433421107	0,3716710553	1,0790820730
50	2,30940110	0	0,4532218472	0,2266109236	0,9508194004

$$\mathbf{TO4:} \quad H(p) = 1/[C \prod_i^2 (p^2 - 2a_i p + a_i^2 + b_i^2)]$$

$ p \%$	C	i	$-a_i$	$\pm b_i$	$-a_{i+1}$	$\pm b_{i+1}$
5	0,40050094	1	0,4050275555	1,3452476518	0,9778230177	0,5572198221
10	0,80403025	1	0,3138479999	1,1948459178	0,7576960978	0,4949213841
15	1,2137322	1	0,2648393341	1,1235472968	0,6393787122	0,4638852830
25	2,0655911	1	0,2062835572	1,0498570027	0,4980125615	0,4347407450
50	4,6188022	1	0,1282831330	0,9444071347	0,3097028796	0,4036126513

$$\mathbf{TO5:} \quad H(p) = 1/[C(p - a_0) \prod_i^2 (p^2 - 2a_i p + a_i^2 + b_i^2)]$$

$ p \%$	C	i	$-a_i$	$\pm b_i$	$-a_{i+1}$	$\pm b_{i+1}$
5	0,80100180	0	0,8063906936	-	0,6523837753	0,7550846730
		2	0,2491884284	1,2219526653	-	-
10	1,6080605	0	0,6550473506	-	0,5137640989	0,6962923890
		2	0,1962404236	1,1266247516	-	-
15	2,4274643	0	0,5402488996	-	0,4370705410	0,6680791260
		2	0,1669460912	1,0809747330	-	-
25	4,1311822	0	0,4245017665	-	0,3434291432	0,6383527983
		2	0,1311782600	1,0332001312	-	-
50	9,2376043	0	0,2664476315	-	0,2155606620	0,6082922358
		2	0,0823368462	0,9842375126	-	-

Таблица 2 (Продолжение)

$$\mathbf{TO6:} \quad H(p) = 1/[C \prod_i^3 (p^2 - 2a_i p + a_i^2 + b_i^2)]$$

$ p \%$	C	i	$-a_i$	$\pm b_i$	$-a_{i+1}$	$\pm b_{i+1}$
5	1,6020038	1 3	0,1693090834 0,6318701016	1,1542411045 0,3092779717	0,4625610181 -	0,8449631326 -
10	3,2161210	1 3	0,1345398201 0,5021094516	1,0886352022 0,2916989232	0,3675696295 -	0,7969362789 -
15	4,8549287	1 3	0,1149705044 0,4290757640	1,0569383677 0,2832057820	0,3141052595 -	0,7737325856 -
25	8,2623645	1 3	0,0907744202 0,3387747482	1,0236117584 0,2742759440	0,2480003280 -	0,7493358144 -
50	18,475209	1 3	0,0572662135 0,2137204182	0,9892871773 0,2650787002	0,1564543048 -	0,7242084770 -