

ПОСТРОЕНИЕ ЛАЧХ И ЛФЧХ ФИЛЬТРА ПРИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЯХ ФУНКЦИИ $H(p)$

Ограничимся рассмотрением фильтров, передаточные функции которых могут быть приведены к одному из трех видов:

$$H(p) = H_0 \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)(\tau_3 p + 1)}{(\tau'_1 p + 1)(\tau'_2 p + 1)(\tau'_3 p + 1)}; \quad (7)$$

$$H(p) = H_0 \frac{p^n (\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)(\tau_3 p + 1)}{(\tau'_1 p + 1)(\tau'_2 p + 1)(\tau'_3 p + 1)}; \quad (8)$$

$$H(p) = H_0 \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)(\tau_3 p + 1)}{p^n (\tau'_1 p + 1)(\tau'_2 p + 1)(\tau'_3 p + 1)}; \quad (9)$$

где H_0 - коэффициент усиления; τ_k и τ'_k - постоянные времени отдельных звеньев фильтра.

Чтобы оценить поведение функции $L(\omega)$ фильтра в целом, необходимо сложить кривые $L_k(\omega)$ всех его звеньев, включая горизонтальную линию $20 \lg H_0$. Каждый член уравнения (6), происходящий от действительного полюса или нуля, способствует общему ослаблению или усилению выходного сигнала: каждый полюс обусловит отрицательный наклон за сопрягающей частотой, а каждый нуль - положительный наклон.

Построение ЛАЧХ $L(\omega)$ фильтров, имеющих передаточные функции видов (7)...(9), выполняют в следующей последовательности:

1. Определяют **начальную точку** $L(1)$ с координатами на сетке:

$$\omega = 1 \text{ и } L(1) = 20 \lg H_0.$$

2. Вычисляют сопрягающие частоты $\omega_k = 1/\tau_k$ и $\omega'_k = 1/\tau'_k$ и отмечают их на логарифмической оси частот.

3. Через начальную точку проводят низкочастотную асимптоту до пересечения с вертикалью, проходящей через первую (наименьшую) частоту сопряжения ω_1 или ω'_1 :

- для вида (7) горизонтально (параллельно оси частот), т. к. отсутствует множитель p^n ;

- для вида (8) с наклоном $+20n$ дБ/дек, т. к. имеем множитель p^n в числителе;

- для вида (9) с наклоном $-20n$ дБ/дек, т. к. имеем множитель p^n в знаменателе.

4. Дальнейшее построение асимптотической ЛАЧХ ведут следующим образом. При достижении отрезком ЛАЧХ $L(\omega)$ вертикали, проведенной через сопрягающую частоту, наклон асимптоты изменяют:

- на $+20$ дБ/дек, если сопрягающая частота принадлежит числителю функции $H(p)$;

- на $+20n$ дБ/дек при n -кратных нулях;
- на -20 дБ/дек, если сопрягающая частота принадлежит знаменателю функции $H(p)$;
- на $-20n$ дБ/дек при n -кратных полюсах.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика $\Psi(\omega)$ для рассматриваемой функции $H(p)$ определяется как сумма ФЧХ отдельных звеньев:

$$\Psi(\omega) = \Psi_1(\omega) + \Psi_2(\omega) + \Psi_3(\omega) + \dots + \Psi'_2(\omega) + \Psi'_3(\omega) + \dots, \quad (10)$$

где $\Psi_1(\omega) = \pi/2$, если есть множитель p в числителе; $\Psi_1(\omega) = -\pi/2$, если есть множитель p в знаменателе; $\Psi_1(\omega) = \pm n\pi/2$, если в числителе или в знаменателе множитель p имеет степень n (знак определяет место нахождения множителя p (в числителе или в знаменателе)); $\Psi_2(\omega) = \arctg(\tau_1\omega)$, $\Psi_3(\omega) = \arctg(\tau_2\omega)$, ... (для множителей в числителе); $\Psi'_2(\omega) = \arctg(\tau'_1\omega)$, $\Psi'_3(\omega) = \arctg(\tau'_2\omega)$... (для множителей в знаменателе).

Пример 2. Построить ЛАЧХ (диаграмму Бode) и ЛФЧХ для полосового фильтра (рис. 5) с параметрами:

$R_1 = R_2 = R = 1$ кОм;

$C_1 = C_2 = C = 1$ мкФ.

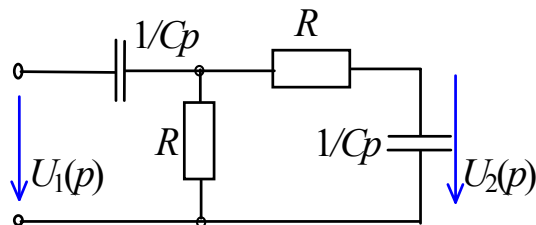


Рис. 5

Решение. 1. Определим передаточную функцию фильтра, используя любой метод расчета (МУН, МКТ, правило делителя тока и др.):

$$H_u(p) = U_2(p) / U_1(p) = \frac{\tau p}{\tau^2 p^2 + 3\tau p + 1} = 10^{-3} \frac{p}{10^{-6} p^2 + 3 \cdot 10^{-3} p + 1},$$

где $\tau = RC = 10$ мс.

2. Разложив знаменатель на множители $(10^{-6} p^2 + 3 \cdot 10^{-3} p + 1 = 10^{-6}(p - p_1)(p - p_2))$, где $p_1 = -0,382 \cdot 10^3$ 1/с; $p_2 = -2,62 \cdot 10^3$ 1/с), получим

$$H_u(p) = 10^{-3} \frac{p}{(2,62 \cdot 10^{-3} p + 1)(0,383 \cdot 10^{-3} p + 1)}, \quad (11)$$

где $H_0 = 10^{-3}$; $\tau'_1 = 2,62 \cdot 10^{-3}$ с; $\tau'_2 = 0,382 \cdot 10^{-3}$ с.

3. Сопрягающие частоты $\omega'_1 = 1/\tau'_1 = 382$ рад/с и $\omega'_2 = 1/\tau'_2 = 2620$ рад/с обратны по величине коэффициентам (постоянным времени) при $p = j\omega$ в выражении (11). Отметим начальную точку с координатами: $\omega = 1$, $L(1) = 20\lg H_0 = 20\lg 10^{-3} = -60$ дБ и сопрягающие частоты ω'_1 и ω'_2 на оси частот (рис. 6, а).

5. Из уравнения (11) видно, что RC-фильтр (см. рис. 5) состоит из одного дифференцирующего, двух интегрирующих звеньев первого порядка и одного усилительного звена. ЛАЧХ $L_0(\omega)$ (см. рис. 6, а) усилительного звена представляет собой прямую, удаленную от оси частот на рас-

стояние $20\lg H_0 = 20\lg 10^{-3} = -60$ дБ. ЛАЧХ $L_1(\omega)$ дифференцирующего звена представляет прямую, имеющую наклон $+20$ дБ/дек и пересекающую ось частот при частоте $\omega = 10^3$ рад/с. Характеристики $L_2(\omega)$ и $L_3(\omega)$ проведены от соответствующих частот среза ω'_1 и ω'_2 с наклоном -20 дБ/дек.

Проведя алгебраическое сложение ординат ЛАЧХ $L_k(\omega)$ отдельных звеньев, получим результирующую ЛАЧХ $L(\omega)$ фильтра в виде сопрягающихся друг с другом прямолинейных отрезков (см. сплошные отрезки линий на рис. 6, а):

- отрезок $L_1(\omega)$ проходит от начальной точки $L(1)$ до вертикальной линии, проведенной через сопрягающую частоту ω'_1 ;

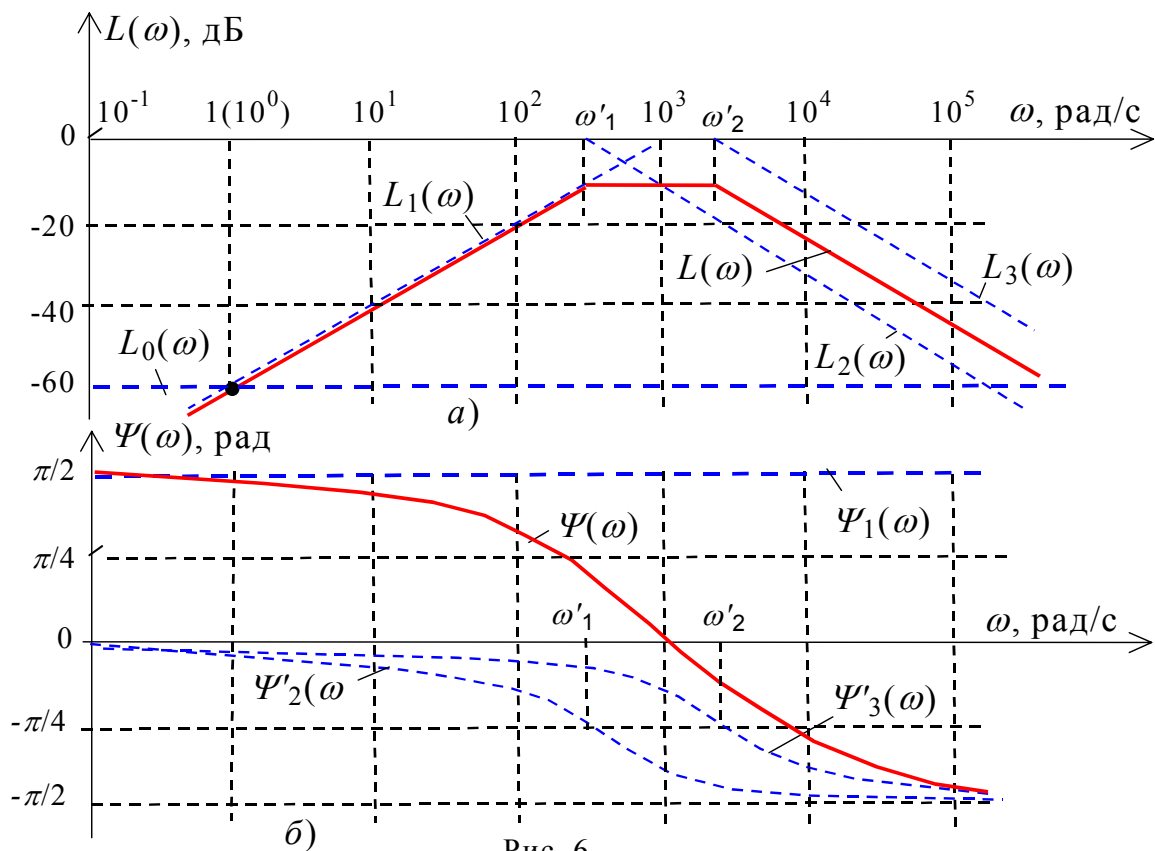


Рис. 6

- при частоте $\omega = \omega'_1$ добавляется наклон на -20 дБ/дек, поэтому отрезок асимптотической характеристики проходит параллельно оси частот от сопрягающей частоты ω'_1 до вертикальной линии, проведенной через вторую сопрягающую частоту ω'_2 ;

- при частоте ω'_2 имеет место дополнительный наклон на -20 дБ/дек.

6. График ЛФЧХ $\Psi(\omega) = \Psi_1(\omega) + \Psi'_2(\omega) + \Psi'_3(\omega)$, где $\Psi_1(\omega) = \pi/2$; $\Psi'_2(\omega) = \arctg(\tau'_1 \omega) = \arctg(2,62 \cdot 10^{-3} \omega)$; $\Psi'_3(\omega) = \arctg(\tau'_2 \omega) = \arctg(0,382 \cdot 10^{-3} \omega)$, представлен на рис. 6, б.

Примечание. При частотах, меньших первой сопрягающей частоты ω'_1 , ЛАЧХ фильтра представляет собой прямую линию, проведенную с

наклоном, равным $\pm 20n$ дБ/дек, т. к. при $\omega < \omega'_1$ ЛАЧХ $L_k(\omega)$ всех остальных звеньев имеют нулевые наклоны. Эта линия должна быть проведена так, чтобы при $\omega = 1$ рад/с её ордината равнялась $20\lg H_0$.

Пример 3. Построить ЛАЧХ фильтра, имеющего передаточную функцию вида

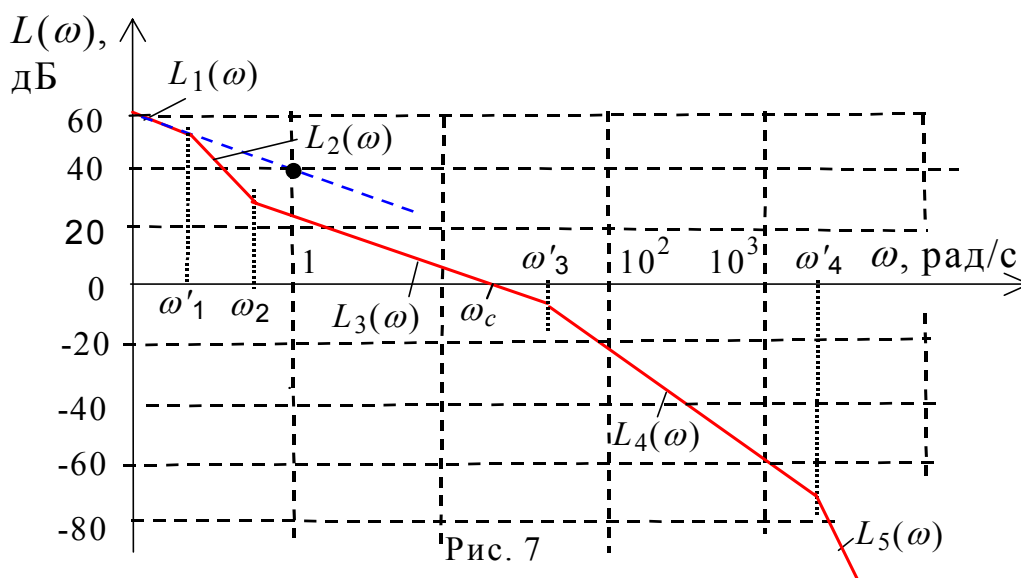
$$H(p) = 100 \frac{(1,25p + 1)^2}{p(5p + 1)^2 (0,02p + 1)(0,005p + 1)}. \quad (12)$$

Решение. 1. Определим сопрягающие частоты, которые обратны по величине коэффициентам (постоянным времени) в выражении (12). Имеем: $\omega'_1 = 0,2$ рад/с; $\omega_2 = 0,8$ рад/с; $\omega'_3 = 50$ рад/с; $\omega_4 = 200$ рад/с. Отметим их на оси частот (рис. 7).

2. ЛАЧХ усилительного звена $L_0(\omega) = 20\lg H_0 = 20\lg 100 = 40$ дБ.

3. Через точку с координатами: $\omega = 1$ рад/с, $L(1) = 40$ дБ проводим низкочастотную асимптоту $L_1(\omega)$ с наклоном, равным наклону ЛАЧХ интегрирующего звена, т. е. - 20 дБ/дек, т. к. ЛАЧХ $L_k(\omega)$ остальных звеньев при $\omega < \omega'_1$ имеют нулевые наклоны.

4. При $\omega = \omega'_1 = 0,2$ рад/с на низкочастотную асимптоту $L_1(\omega)$ накладывается ЛАЧХ двух апериодических звеньев с одинаковыми постоянными времени, имеющая наклон - 40 дБ/дек. Поэтому характеристика $L(\omega)$ в интервале $\omega'_1 < \omega < \omega_2$ имеет наклон - 60 дБ/дек.



5. При $\omega = \omega_2 = 0,8$ рад/с начинает сказываться эффект двух дифференцирующих звеньев с одинаковыми постоянными времени. Поэтому наклон $L(\omega)$ в интервале $\omega_2 < \omega < \omega'_3$ равен -20 дБ/дек.

6. При $\omega = \omega'_3 = 50$ рад/с наклон возрастает до - 40 дБ/дек, а при $\omega = \omega_4 = 200$ рад/с - ещё на - 20 дБ/дек и становится равным - 60 дБ/дек.

Частота ω_c , соответствующая амплитуде $H(\omega_c) = 1$ (см. точку пересечения ЛАЧХ $L(\omega)$ с осью частот), называется **частотой среза** фильтра, а диапазон частот от 0 до ω_c характеризует **полосу пропускания** фильтра.

Частотные характеристики $L(\omega)$ и $\Psi(\omega)$ используют для оценки качества фильтра, например, таких показателей как полоса пропускания сигнала, колебательность, запас устойчивости по фазе и амплитуде. Рекомендуемые запасы устойчивости:

по фазе $\gamma = 30^\circ \dots 40^\circ$, по амплитуде $m = - (8 \dots 10)$ дБ.

Пример 4. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ фильтра, передаточная функция которого при $H_0 = 100$ 1/с; $\tau'_1 = 0,1$ с; $\tau'_2 = 0,004$ с имеет вид

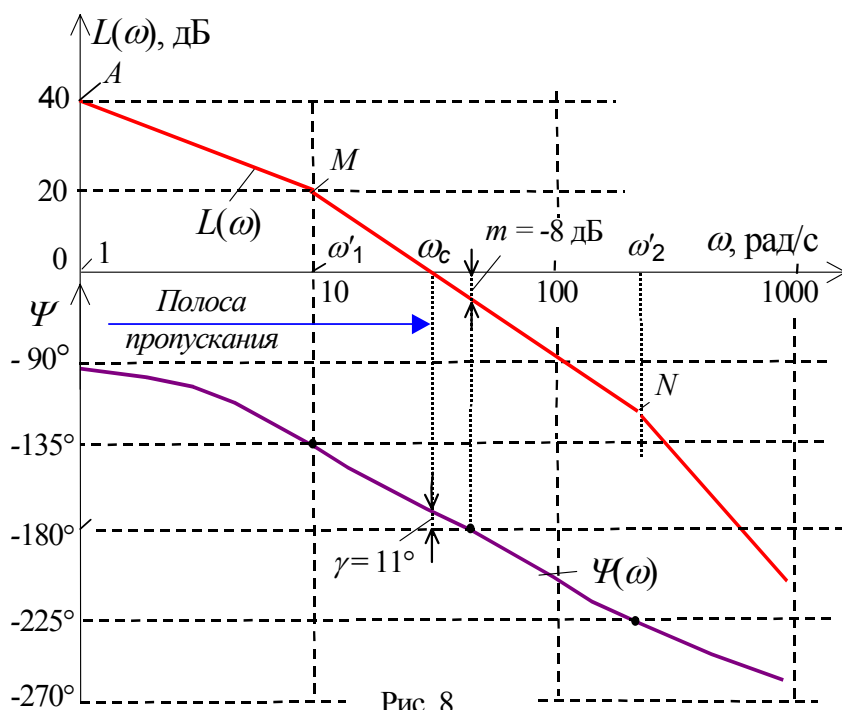
$$H(p) = 100 \frac{1}{p(0,1p + 1)(0,004p + 1)}. \quad (13)$$

Решение. 1. Для построения $L(\omega)$ и $\Psi(\omega)$ определим значения сопрягающих частот $\omega'_1 = 1/\tau'_1 = 10$ рад/с, $\omega'_2 = 1/\tau'_2 = 250$ рад/с и отметим их на оси частот (рис. 8).

2. На частоте $\omega = 1$ рад/с отметим значение $20\lg 100 = 40$ дБ.

3. Через полученную точку A проведём низкочастотную асимптоту AM ЛАЧХ интегрирующего звена с наклоном -20 дБ/дек до пересечения с вертикалью, проведенной через первую частоту сопряжения $\omega'_1 = 10$ рад/с.

4. В точке M ЛАЧХ претерпевает излом вниз на 20 дБ/дек, определяемый апериодическим звеном с постоянной времени τ'_1 . Результирующая ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек пойдёт до пересечения в точке N с вертикалью, проведенной через вторую частоту сопряжения $\omega'_2 = 250$ рад/с. Начиная с точки N , ЛАЧХ фильтра имеет наклон -60 дБ/дек, т. к. на этой частоте дополнительный наклон даёт апериодическое звено с постоянной времени τ'_2 .



5. Для построения ЛФЧХ воспользуемся уравнением

$$\Psi(\omega) = -\pi/2 - \arctg(0,1\omega) - \arctg(0,004\omega),$$

используя которое рассчитаем и отметим на графике фазовые углы Ψ для отдельных частот ω входного сигнала.

Из рис. 8 видно, что при заданных параметрах фильтр имеет запас устойчивости по амплитуде $m = -8$ дБ, а по фазе только $\gamma = 11^\circ$, и, следовательно, не обладает необходимой устойчивостью. Поэтому его характеристики надо скорректировать путём введения корректирующего устройства. При этом следует иметь в виду, что изменение ЛАЧХ на каждые ± 20 дБ пропорционально изменению фазовой характеристики на $\pm 90^\circ$.