ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЦЕПЕЙ

Одним из методов исследования цепей (RLC-фильтров) является расчёт, построение и анализ их частотных характеристик. Частотные характеристики линейной цепи отражают её реакцию на гармоническое воздействие и, в общем виде, определяются её **комплексной передаточной функцией** (**комплексным коэффициентом передачи**), получаемой из выражения (1) после замены оператора $p = j\omega$ и несложных преобразований, т. е.

$$H(j\omega) = H(p)_{p=j\omega} = H(\omega)e^{j\Psi(\omega)}, \tag{4}$$

где $H(\omega) = |H(j\omega)|$ - модуль комплексного коэффициента передачи цепи, а его график - **амплитудно-частотная характеристика** (АЧХ) цепи; $\Psi(\omega) = \arg H(j\omega)$ **-** аргумент комплексного коэффициента передачи цепи, а его график - **фазо-частотная характеристика** (ФЧХ) цепи.

Характеристики $H(\omega)$ и $\Psi(\omega)$ позволяют определить реакцию цепи при подаче на её вход гармонического сигнала с постоянной амплитудой U_{1m} и изменяющейся угловой частотой ω.

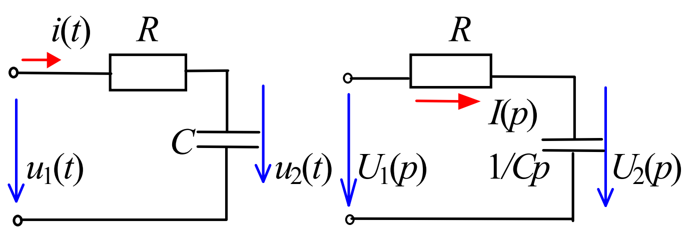
Иногда строят на комплексной плоскости Jm-Re годограф $H(j\omega)$ - **амплитудно-фазо-частотную характеристику** (АФЧХ) цепи, который представляет собой геометрическое место точек конца вектора $H(\omega)$, получаемых при изменении угловой частоты ω входного сигнала от 0 до ∞.

Наряду с фазо-частотной характеристикой $\Psi(\omega)$ рассчитывают и строят характеристику "**времени задержки**", определяемую как производную ФЧХ по угловой частоте ω, т. е. $\tau(\omega) = -d\Psi(\omega)/d\omega$.

Нахождение частотных характеристик цепей, составленных из малого числа элементов, как правило, не вызывает затруднений. Для цепей, образованных большим числом элементов, целесообразно пользоваться приёмами общей теории четырёхполюсников и теории сигнальных графов.

В данной работе рассматриваются задачи по нахождению и построению частотных характеристик пассивных фильтров, составленных из малого числа элементов (от 2 до 12) и представляющих собой цепи с сосредоточенными постоянными параметрами.

Пример 1. Рассчитать и построить АФЧХ, АЧХ и ФЧХ RC-звена первого порядка (рис. 2, *а*).



а) Рис. 2 б)

Решение. Передаточную функцию по напряжению $H_u(p)$ удобно записать, используя операторную схему замещения звена (рис. 2, *б*):

$$H_u(p) = U_2(p)/U_1(p) = \frac{1}{Cp}\frac{I(p)}{(R+1/Cp)I(p)} = \frac{1}{\tau p+1},$$ где $\tau = RC$.

Заменив $p = j\omega$, получим комплексный коэффициент передачи звена

$$H_u(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{-j\mathrm{arctg}\,\omega\tau} = H_u(\omega) \cdot e^{-j\Psi(\omega)},$$

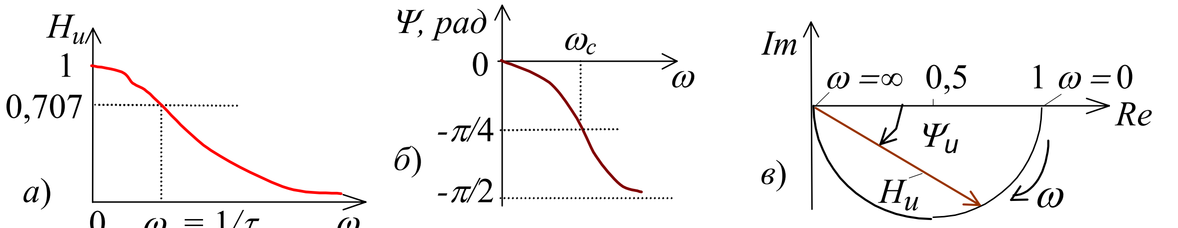


Рис. 3

где $H_u(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$ - АЧХ (рис. 3, *а*) и $\Psi(\omega)$ = - arctg$\omega\tau$ - ФЧХ апериодического звена (рис. 3, *б*).

Построенная на рис. 3, *в* АФЧХ звена $H(j\omega)$ представляет собой полуокружность с радиусом 0,5.

Анализ графиков показывает, что с увеличением частоты ω амплитуда U_{2m} выходного напряжения уменьшается; при частоте ω, равной **частоте среза** $\omega_c = 1/\tau$, коэффициент $H_u(\omega) = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$. С увеличением частоты ω отставание по фазе выходного сигнала от входного увеличивается от 0 до - $\pi/2$; при частоте $\omega = \omega_c$ фазовый угол $\Psi(\omega_c) = -\pi/4$.

Построение частотных характеристик упрощается, если **прологарифмировать** функцию $H(j\omega) = H(\omega)e^{j\Psi(\omega)}$:

$$\ln(H(j\omega)) = \ln H(\omega) + j\Psi(\omega). \qquad (5)$$

Зависимость ln$H(\omega)$ от lg(ω), т. е. ln$H$(lgω), называют **логарифмической амплитудно-частотной характеристикой** (ЛАЧХ), а зависимость $\Psi(\omega)$ от lg(ω), т. е. Ψ(lgω), называют **логарифмической фазо-частотной характеристикой** (ЛФЧХ) звена. Практически вместо ln$H(\omega)$ в неперах [Нп] принимают $L(\omega)$ = 20lg$H(\omega)$, где коэффициент 20 введен для получения результата в децибелах [дБ]. Зависимость между коэффициентами $H(\omega)$ и $L(\omega)$ приведена в таблице 1.

Таблица 1

$H(\omega)$	0,01	0,1	$1/\sqrt{2}$	1	10	100	1000	10000
$L(\omega)$ = =20lg$H(\omega)$, дБ	-40	-20	-3	0	20	40	60	80

Из таблицы 1 следует, что ЛАЧХ $L(\omega)$ имеет знак "минус" при $H(\omega)<1$ (т. е. при ослаблении входного сигнала) и $L(\omega) > 0$ при усилении сигнала.

При построении графика ЛАЧХ $L(\omega)$ по горизонтальной оси (рис. 4) откладывают равномерные отрезки lgω, но на самой оси записывают значения частоты $\omega = 10^n$, где n = … -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Интервал частот, на концах которого частоты отличаются в 10 раз, называют **декадой**, а интервал частот, на концах которого частоты отличаются в 2 раза, называют **октавой**. Таким образом, единицей частоты является декада, реже октава.

Примечание. Обратите внимание, что частоте $\omega = 1$ соответствует ноль (0) на логарифмической оси абсцисс ($\lg\omega$), а частоте $\omega = 0$ соответству-

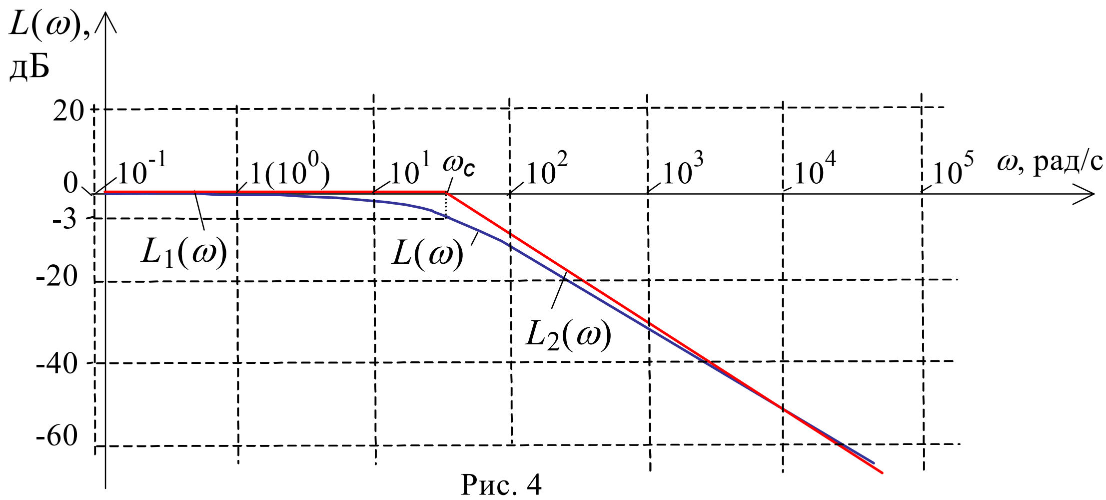


Рис. 4

ет бесконечность (- ∞). В области малых значений ω и $L(\omega)$ их изображения по осям **растягиваются**, а в области больших значений - **сжимаются**.

Место проведения вертикальной оси $L(\omega)$ выбирается **произвольно** (см. рис. 4), т. е. её можно перемещать по горизонтали.

Рассчитаем и построим ЛАЧХ $L(\omega)$ RC-звена (см. рис. 2) на двойной логарифмической сетке (рис. 4):

$$L(\omega) = 20\lg(1/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}) = -\,20\lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\,.$$

При $\omega << \tau$, ЛАЧХ $L(\omega) \approx 0$; при $\omega_c = 1/\tau$, $L(\omega_c) = -20\lg\sqrt{2} = -3$ дБ; при $\omega >> \omega_c$, $L(\omega) \approx -20\lg(\tau\omega) = -\,20\lg\tau - 20\lg\omega \approx -20\lg\omega$, т. е. при больших частотах ($\omega >> \omega_c$) ЛАЧХ $L(\omega)$ убывает практически по прямой с наклоном -20 дБ/дек.

Обычно ЛАЧХ $L(\omega)$ простых звеньев (при $H_0 = 1$) представляют двумя **прямыми асимптотическими линиями**: горизонтальной линией $L_1(\omega)$, проведенной по оси абсцисс от частоты $\omega \approx 10^{-2}\ldots10^{-1}$ рад/с до частоты среза $\omega_c = 1/\tau$, и линией $L_2(\omega)$, проведенной из точки ω_c под углом +20 (или -20) дБ/дек (см. рис. 4). Линии $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ "сопрягаются" (пересекаются) в точке ω_c, называемой **сопрягающей** частотой (в данном примере сопрягающая частота ω_c совпадает с частотой среза). Максимальное отклонение ЛАЧХ $L(\omega)$ от асимптотической ЛАЧХ (от линий $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$) имеет место при частоте среза ω_c и равно $L(\omega_c) = -\,20\lg\sqrt{2} \approx -3$ дБ.

При $H_0 \neq 1$ горизонтальную асимптоту $L_1(\omega)$ проводят на уровне $20\lg H_0$ (параллельно оси абсцисс) до вертикали, проведённой через точку

ω_c, а линию $L_2(\omega)$ - из точки пересечения асимптоты $L_1(\omega)$ с вертикалью под углом +20 (или -20) дБ/дек.

Приближенное представление функции $L(\omega)$ прямолинейными отрезками называется **диаграммой Боде** (по имени автора).

Обычно фильтры реализуют в виде звеньев первого и второго порядков, соединённых по каскадной (последовательной) схеме. В этом случае передаточную функцию фильтра представляют произведением передаточных функций отдельных звеньев, т. е.

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)\ldots H_n(\omega).$$

Тогда ЛАЧХ фильтра

$$L(\omega) = 20\lg H(\omega) = 20\lg H_1(\omega) + 20\lg H_2(\omega) + \ldots + 20\lg H_n(\omega) =$$
$$= L_1(\omega) + L_2(\omega) + \ldots + L_n(\omega). \qquad (6)$$

При этом сразу обнаруживается преимущество перехода к логарифмам: операции умножения заменяются операциями сложения; каждый множитель нуля (корня полинома числителя $M(p)$ выражения (2)) и множитель полюса (корня полинома знаменателя $N(p)$) входит в формулу (6) в виде отдельного слагаемого. Преимущества применения ЛАЧХ в задачах аппроксимации следуют из того, что значения АЧХ чисто реактивных элементов (звеньев) L и C либо прямо, либо обратно пропорциональны частоте ω, иначе говоря, имеют вид функций $H(\omega) = H_0\omega$ и $H(\omega) = H_0/\omega$ (H_0 - коэффициент усиления звена).

В соответствии с этим ЛАЧХ этих звеньев, равные

$$L(\omega) = 20\lg H_0 + 20\lg\omega \ \text{ и } \ L(\omega) = 20\lg H_0 - 20\lg\omega,$$

представляются на двойной логарифмической сетке прямыми наклонными линиями, проведенными под углом +20 дБ/дек и -20 дБ/дек через точку с координатами: $\omega = 1$ и $L(1) = 20\lg H_0$.

Аналогичные характеристики звеньев, содержащих не только реактивные, но и активные элементы, будут, конечно, отличаться от прямых; однако аппроксимация таких характеристик отрезками прямых даёт лучшие результаты, чем аппроксимация отрезками прямых исходных амплитудных характеристик $H(\omega)$.

Форма записи передаточной функции $H(p)$ и особенности построения ЛАЧХ на двойной логарифмической сетке зависят от вида корней полиномов $M(p)$ и $N(p)$ (числителя и знаменателя функции $H(p)$): только действительные отрицательные или среди корней есть комплексно-сопряженные.