ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЦФ

Проектирование НЦФ сводится к синтезу его системной функции $H(z)$, при которой АЧХ $H(w)$ фильтра удовлетворяет поставленным в исходных данных требованиям.

Почти во всех приложениях используются НЦФ с точно линейной ФЧХ. Существуют четыре вида НЦФ с линейной ФЧХ, отличающиеся характером системной функции $H(z)=\sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$:1) N - нечётное, $a_k = a_{N-k-1}$ (симметричные коэффициенты); 2) N - чётное, $a_k = a_{N-k-1}$ (симметричные коэффициенты); 3) N - нечётное, $a_k = -a_{N-k-1}$ (антисимметричные коэффициенты); 4) N - чётное, $a_k = -a_{N-k-1}$ (антисимметричные коэффициенты). В данной работе рассматриваются НЦФ первого вида.

Методы расчёта НЦФ тесно связаны с принятым критерием аппроксимации. В зависимости от использованного критерия их можно разбить на три группы. Первая группа соответствует среднеквадратическому критерию, вторая - наилучшему равномерному (чебышевскому) критерию и третья - иным редко используемым критериям аппроксимации. Первая группа включает методы разложения в ряд Фурье и наименьших квадратов (методы частотной выборки), вторая - алгоритм Ремеза и некоторые другие сравнительно редко используемые алгоритмы.

Метод разложения в ряд Фурье проще других методов (особенно при $N > 5000\ldots10000$), поскольку для его реализации требуется наименьший объём вычислений. Это единственный метод, позволяющий получить аналитические выражения (формулы) для коэффициентов фильтра, что очень удобно при теоретических исследованиях его характеристик. Основной недостаток этого метода заключается в том, что получаемая в результате расчёта точность аппроксимации АЧХ не является наилучшей с точки зрения минимальной среднеквадратической ошибки в одном и более частотных диапазонах по сравнению с двумя другими методами.

Метод коэффициентов Фурье предполагает переход непосредственно от идеальной амплитудно-частотной функции $H(w)$ (рис. 8, *а*), периодической и симметричной относительно $w=0$, к разложению по тригонометрическим функциям (в ряд Фурье) [4, с. 228]. От коэффициентов ряда Фурье легко можно перейти к фактическим коэффициентам функции $H(z)$.

Итак, комплексный ряд Фурье $H(e^{j2\pi w})$ периодической функции $H(w)$ при нечётном N и симметричных коэффициентах $a_k = a_{N-k-1}$

$$H(e^{j2\pi w}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk2\pi w} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos(k2\pi w)\,, \qquad (13)$$

где коэффициенты ряда Фурье c_k (рис. 8, *б*) определяются по формуле

$$c_k = 2\int_{-0,5}^{0,5} H(w)\, e^{jk2\pi w} dw = 4\int_{0}^{w_n} H(w)\,\cos(k2\pi w) dw = \frac{2}{\pi k}\sin 2 w_n \pi k, \qquad (14)$$

а соответствующий ряд Фурье

$$H(e^{j2\pi w}) = 2w_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin 2w_n \pi k}{\pi k} \cos k2\pi w. \tag{15}$$

Поскольку $z = e^{j2\pi w}$, выполнив замену переменных, получим

$$H(e^{j2\pi w}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) z^{-k}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что коэффициенты c_k совпадают с отсчётами $g(k)$ импульсной характеристики НЦФ. Однако прямое использование формул приводит к физически нереализуемым фильтрам, т. к. порядок фильтра N оказывается бесконечным и суммирование начинается от отсчёта $k = -\infty$.

На практике нужны конечные фильтры, поэтому мы вынуждены отбрасывать все коэффициенты c_k с индексами после некоторого значения $\pm L = \pm (N - 1)/2$ (рис. 8, *г*). Из теории рядов известно, что с увеличением числа членов ряда N аппроксимируемая функция представляется точнее.

Однако простое усечение ряда Фурье приводит к **явлению Гиббса**, которое проявляется в виде выбросов (до 9%) в зоне пропускания сигнала и пульсаций АЧХ (рис. 8, *в*). Максимальная амплитуда пульсаций АЧХ не уменьшается с увеличением N, а уменьшается лишь ширина выброса.

Чтобы избежать его, применим прямоугольную **свёртывающую функцию** $v(k)$ (рис. 8, *е*), посредством которой коэффициенты c_k умножаются на множители функции $v(k)$ при $|k| \le L$ и на нуль при $|k| > L$ (рис. 8, *з*). Этот процесс в свою очередь приводит к сглаживанию передаточной функции $H''(w) = H'(w) * V(w)$ (рис. 8, *ж*). Следовательно, множители функции $v(k)$ представляют собой **весовую** функцию, умножаемую на коэффициенты ряда Фурье. В данном преобразовании эта весовая функция (или "окно") сначала создаёт явление Гиббса, а затем осуществляет сглаживание АЧХ НЦФ. Однако при этом **увеличивается ширина переходной полосы** и ухудшаются избирательные свойства (степень разграничения полос пропускания и задерживания) фильтра.

Если, например, вместо прямоугольной весовой функции (прямоугольного "окна") использовать треугольное "окно", весовые функции Хемминга, Блэкмана или Кайзера, то это уменьшит колебательный характер у окончательной передаточной функции, но одновременно увеличит в два и более раза ширину промежуточной полосы. Отметим, что прямоугольное "окно" обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию требуемой АЧХ при заданной величине N в сравнении с другими "окнами".

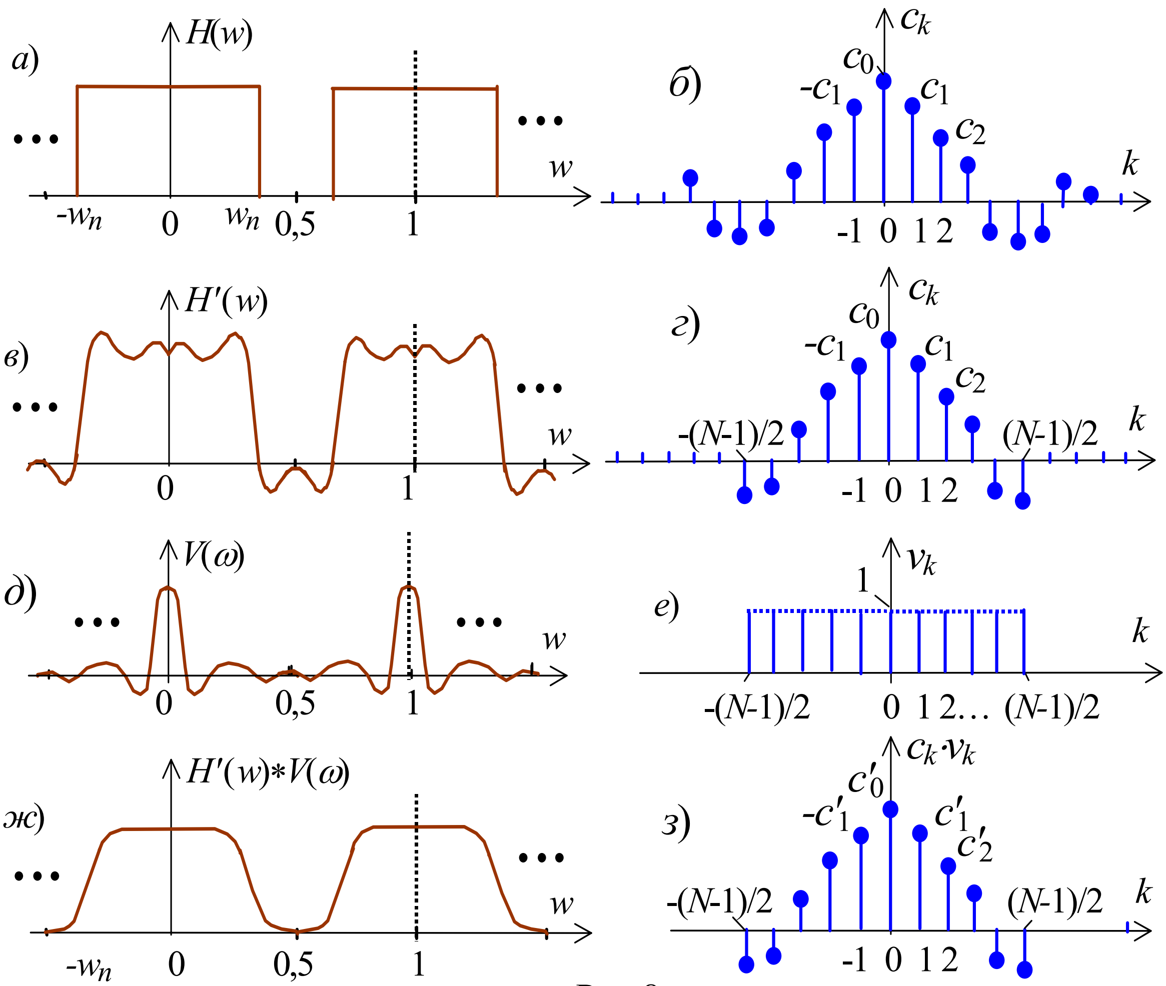

Рис. 8

Для физической реализации НЦФ необходимо ограниченную последовательность коэффициентов c_k Фурье (см. рис. 8, *г*) сдвинуть вправо на L отсчётов. В этом случае комплексная передаточная функция НЦФ может быть рассчитана по формуле

$$H'(e^{j2\pi w}) = \left[\sum_{k=-L}^{L} c_k \cos k2\pi w\right] e^{-jL2\pi w} = H'(w)e^{-j\Psi(w)},\ \ 0 < w < 0{,}5.$$

После умножения коэффициентов c_k ряда Фурье на коэффициенты прямоугольной весовой функции $v(k)$ получим модифицированную передаточную функцию (см. рис. 7, *ж*)

$$H''(e^{j2\pi w}) = \left[\sum_{k=-L}^{L} c_k \frac{\sin(\pi k / L)}{\pi k / L} \cos k2\pi w\right] e^{-jL2\pi w} = a_0 + a_1 e^{-j2\pi w} + \ldots$$

$$+ a_L e^{-jL2\pi w} + a_{L-1} e^{-j(L+1)2\pi w} + \ldots + a_1 e^{-j(2L-1)2\pi w} + a_0 e^{-j2L2\pi w} =$$

$$= H''(w)e^{j\Psi(w)},\ \ 0 < w < 0{,}5, \qquad (17)$$

где $L = (N - 1)/2$; a_k - коэффициенты импульсной характеристики $g(k)$ фильтра, определяемые по формулам: $a_0 = c'_L$; $a_L = c'_0$; $a_k = c'_{L-k}$, $k = 1, 2, \ldots, L$.

Как отмечалось, передаточная функция $H(e^{j2\pi w})$ и АЧХ $H(w)$ НЦФ являются периодическими функциями частоты с периодом, определяемым процессом дискретизации импульсной функции $g(k)$ фильтра с соответствующими ему частотными искажениями. Поэтому на практике передаточная функция имеет смысл только в интервале $-0,5 < w < +0,5$, а АЧХ $H(w)$ не имеет смысла за пределами $w = 0,5$.

Если выполняется условие $a_k = a_{N-k-1}$, то ФЧХ НЦФ

$$\Psi(w) = -L2\pi w = -N\pi w, \qquad (18)$$

т. е. ФЧХ нерекурсивного фильтра с симметричными коэффициентами (можно показать, что и при чётном N, а также при несимметричных коэффициентах $a_k = -a_{N-k-1}$) является линейной периодической функцией с областью определения для циклической частоты w от -0,5 до 0,5. Поэтому при достижении границ указанного диапазона на графике ФЧХ наблюдается скачок от $-\pi$ до $+\pi$ (см. рис. 6, *б*).

В соответствии с полученными выражениями(13)…(!8) разработана программа DNF, с помощью которой по заданным требованиям к АЧХ можно определить минимальный порядок НЦФ нижних частот и провести анализ его временных и частотных характеристик. Все вычисления ведутся с числами конечной длины, определяемой разрядностью микропроцессора типа Pentium. Разрядность чисел равна 64 битам (вычисления ведутся с двойной точностью), что позволяет не проводить анализ влияния ограничений разрядности чисел на точность выходных отсчетов. Кроме того, числа с плавающей запятой обеспечивают равномерную относительную точность.