

4.3. АППРОКСИМАЦИЯ ИДЕАЛЬНЫХ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ARC-ФИЛЬТРОВ

Аппроксимация идеальных амплитудно-частотных (АЧХ) (рис. 3) или фазо-частотных (ФЧХ) характеристик ARC-фильтров сводится к виду

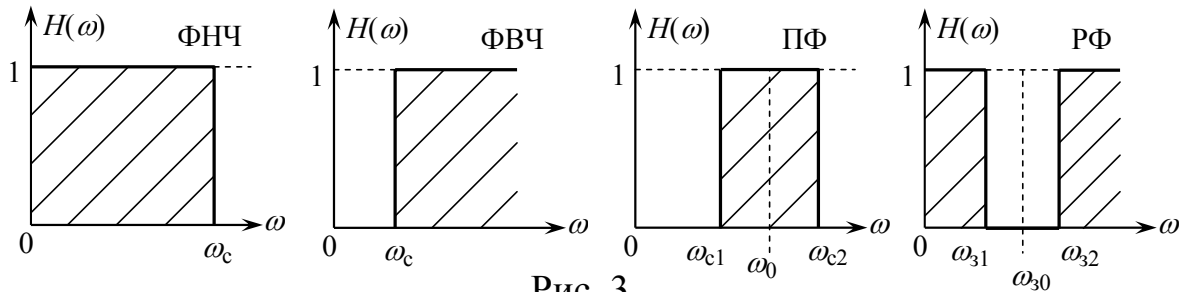


Рис. 3

таких коэффициентов $c_0, b_i, c_i; Q$ и H_0 (коэффициент усиления при нулевой частоте для ФНЧ) полиномов $H(p)$ (1.3), которые обеспечивают в том или ином смысле (например, среднеквадратичного отклонения) приближение к желаемой АЧХ и ФЧХ соответствующего фильтра (ФНЧ – фильтр нижних частот; ФВЧ – фильтр верхних частот; ПФ – полосно-пропускающий фильтр; РФ – полосно-задерживающий фильтр) (см. рис. 3).

Фильтр Баттерворта (тип В)

В фильтре Баттерворта нормированная АЧХ имеет вид

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\Omega^{2n} + 1}}, \quad (1.5)$$

где $\Omega = \omega/\omega_c$ – относительная (безразмерная) частота; ω_c – частота среза; n – порядок фильтра.

Все производные функции Баттерворта по частоте от первой до $(2n-1)$ -й включительно в точке $\omega \neq 0$ равны нулю. Поэтому фильтр Баттерворта называют фильтром с **максимально плоской АЧХ**.

Фильтр Чебышева (тип Т)

В фильтре Чебышева аппроксимирующая функция выбирается так, чтобы в полосе пропускания фильтра получить отклонение его АЧХ от идеальной, не превышающее некоторой заданной величины ε . За пределами же полосы пропускания фильтр должен иметь возможно меньший коэффициент передачи $H(\Omega)$.

При таких исходных условиях наилучшей оказывается аппроксимация вида

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 + T_n^2(\Omega)}}, \quad (1.6)$$

где ε – некоторый постоянный коэффициент, определяющий неравномерность АЧХ фильтра в полосе пропускания $\Delta\omega_n$, а $T_n(\Omega)$ – полином Чебышева первого рода n -го порядка.

В полосе пропускания Функция $H(\Omega)$ колеблется между уровнями 1 и $\sqrt{1/(1+\varepsilon)^2}$, причем число таких колебаний («волн» на графике АЧХ) тем больше, чем выше порядок фильтра. Поскольку амплитуда всех этих колебаний одинакова, то фильтр Чебышева называют также **фильтром равноволновых пульсаций АЧХ**.

Инверсный фильтр Чебышева (тип I)

В инверсном фильтре Чебышева АЧХ монотонно изменяется в полосе пропускания $\Delta\omega_n$ и пульсирует в полосе задерживания $\Delta\omega_z$. Эта АЧХ описывается соотношением

$$H(\Omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 T_n^2(1/\Omega)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(1/\Omega)}}. \quad (1.7)$$

В полосе задерживания $\Delta\omega_z$ функция $H(\Omega)$ пульсирует между значениями 0 и $\varepsilon/\sqrt{1+\varepsilon^2}$.

Эллиптический фильтр (тип E)

У эллиптического фильтра АЧХ характеризуется равномерными пульсациями как в полосе пропускания $\Delta\omega_n$, так и в полосе задерживания $\Delta\omega_z$.

Фильтр Бесселя (тип BS)

В фильтре Бесселя аппроксимируется не АЧХ, а ФЧХ фильтра с целью получения одинакового запаздывания выходного сигнала u_2 относительно входного u_1 для всех гармоник спектра, лежащих в полосе пропускания. При этом форма входного сигнала претерпевает (на выходе фильтра) наименьшие искажения.

Сравнительный анализ характеристик фильтров B, T, I, E и BS

Выбор типа ARC-фильтра зависит от предъявляемых требований к его частотным (АЧХ или ФЧХ) или временным (переходной, импульсной функциям, или времени задержки сигнала) характеристикам.

Ниже будут представлены указанные характеристики рассматриваемых типов фильтров и дан краткий их сравнительный анализ.

Анализ частотных характеристик фильтров

На рис. 4 показаны примеры АЧХ фильтров нижних частот (ФНЧ) четвертого порядка типов *B*, *T*, *I*, *E* и *BS*.

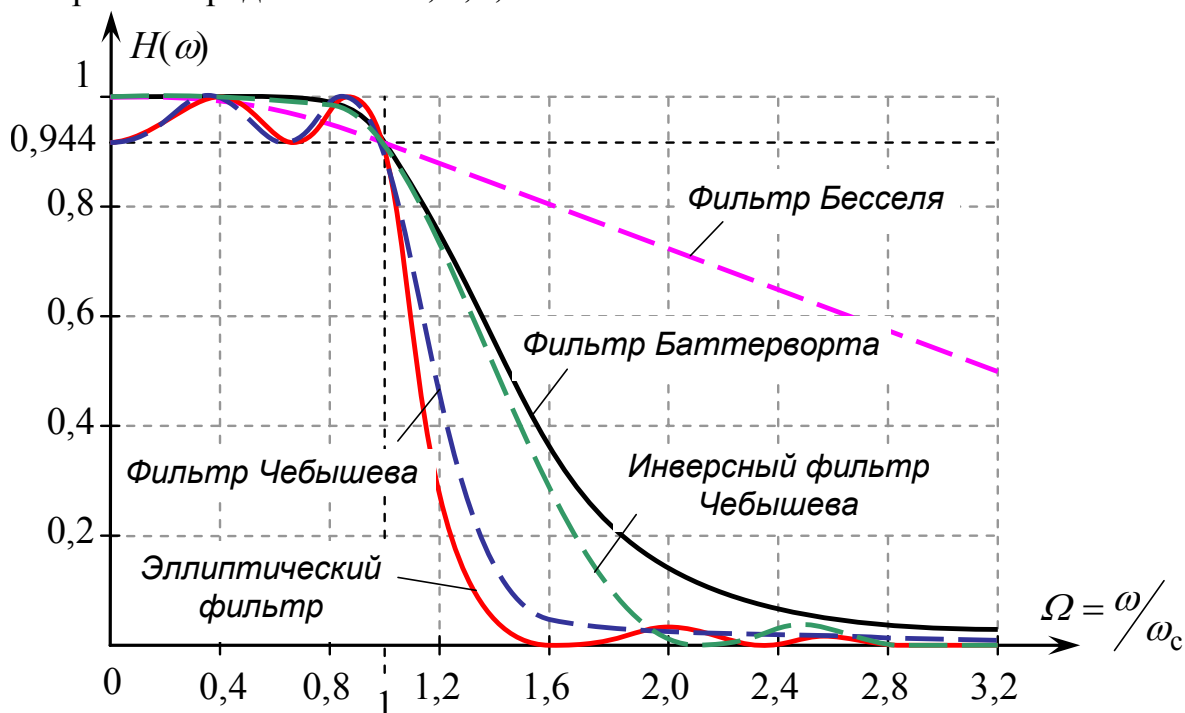


Рис. 4

АЧХ фильтра Чебышева и эллиптического фильтра имеют пульсации в полосе пропускания, размах которых равен 0,5 дБ, а АЧХ инверсного фильтра Чебышева и эллиптического фильтра имеют в полосе задерживания пульсации, вершины которых лежат на уровне -40 дБ.

АЧХ фильтров нормированы: на частоте среза $\omega_c = 1$ рад/с спад АЧХ равен 0,5 дБ [$H(\omega) = 0,944$].

Из рис. 4 видно, что наибольшую скорость (интенсивность) спада АЧХ в переходной области (между полосами пропускания $\Delta\omega_n$ и задерживания $\Delta\omega_z$) имеет эллиптический фильтр. Далее следуют АЧХ фильтров Чебышева, инверсного Чебышева и Баттерворта. Наихудшая сравнительная АЧХ у фильтра Бесселя.

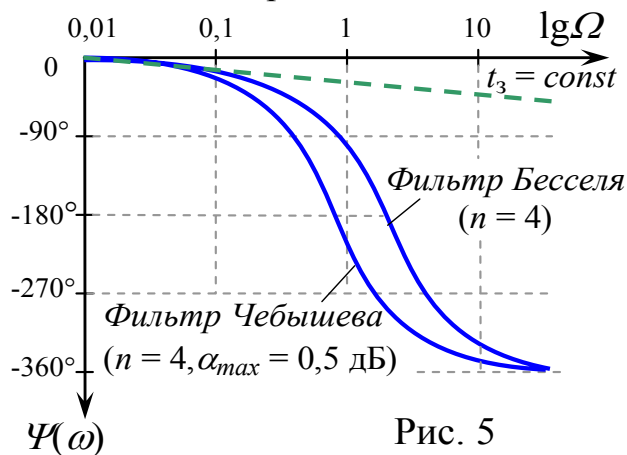


Рис. 5

Что касается ФЧХ фильтров, то здесь наблюдается закономерность: чем лучше АЧХ, тем хуже ФЧХ и наоборот.

Для иллюстрации этой закономерности на рис. 5 представлены ФЧХ $\psi(\omega)$ фильтров Бесселя и Чебышева, из которого следует, что гармонический сигнал, про-

шедший через фильтр Чебышева, запаздывает по фазе значительно больше (особенно при частотах, близких к ω_c), чем при его прохождении через фильтр Бесселя.

Анализ временных характеристик фильтров

Временные характеристики фильтров (переходная $h(t)$ и импульсная $g(t)$) нелинейно связаны с частотными характеристиками. Однако, если измерять фазовый сдвиг Ψ гармоник спектра входного сигнала в долях периода T их колебаний, то, например, постоянство времени запаздывания всех гармоник в полосе пропускания равносильно линейной частотной зависимости фазового сдвига $\Psi = \omega t_3$ выходного сигнала u_2 относительно входного u_1 (рис. 1.6, а).

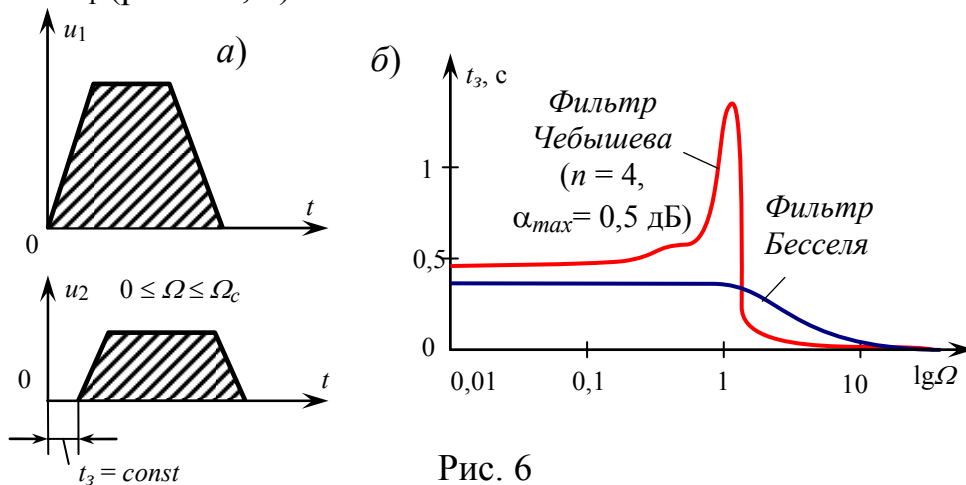


Рис. 6

Для сравнения на рис. 6, б приведены характеристики времени запаздывания $t_3 = d\Psi/d\omega$ тех же фильтров Чебышева и Бесселя, ФЧХ которых представлены на рис. 5 (шкала частот имеет логарифмический масштаб). Фильтр Бесселя обеспечивает наилучшее приближение реальной ФЧХ $\Psi(\omega)$ к идеальной линейной зависимости (рис. 5), соответствующей постоянному запаздыванию ($t_3 = \text{const}$) в полосе пропускания.

Зависимость времени запаздывания $t_3(\omega)$ от частоты фильтра для фильтра Бесселя имеет такой же вид, как АЧХ для фильтра Баттерворта (см. рис. 4), так как здесь использована аппроксимация Баттерворта для функции групповой задержки $t_3(\omega)$.

На рис. 7. представлены переходные $h(t)$ характеристики ФНЧ Баттерворта, Чебышева и Бесселя 6-го порядка, которые характеризуют способность или неспособность пропускать сигналы со спектром, лежащим в полосе пропускания $\Delta\omega_n$, без искажения его формы (искажение формы вызывается неодинаковыми фазовыми сдвигами отдельных гармоник спектра сигнала).

Характеристики нормированы приведением точки с ослаблением 3 дБ к частоте $\omega_c = 1$ рад/с.

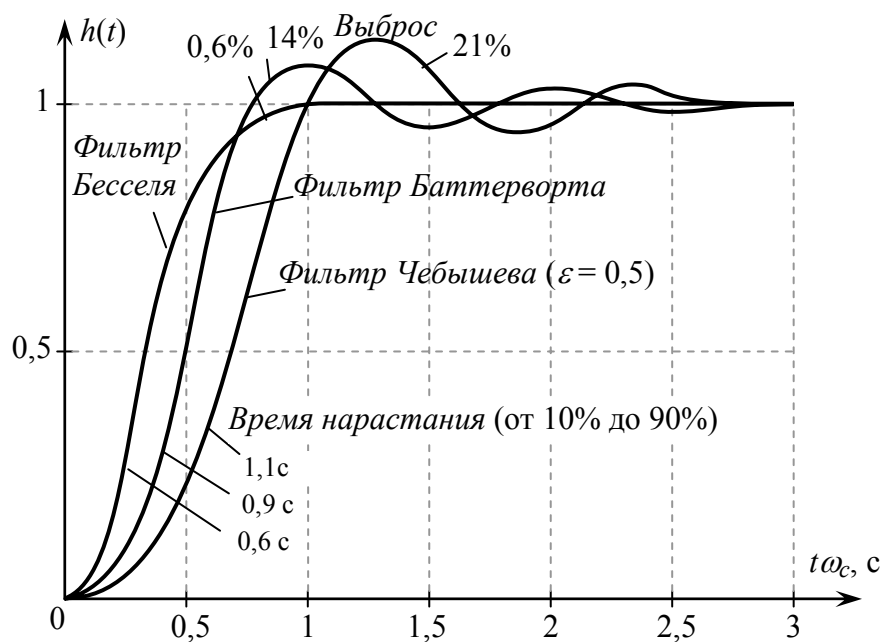


Рис. 7

Фильтр Бесселя обладает очень хорошими свойствами во временной области по сравнению с фильтрами Баттерворта и Чебышева, поэтому желательно применять фильтр Бесселя, несмотря на его сравнительно плохую характеристику затухания (см. рис. 4).

Фильтр Чебышева при его весьма подходящей АЧХ имеет наихудшие параметры во временной области из всех этих трех типов фильтров.

Время нарастания выходного сигнала мало зависит от порядка и типа фильтра и составляет приблизительно $1/3f_c$, где f_c – частота среза в герцах.