

经济学原理第十五次作业

2024 年 12 月 24 日星期二提交

作业提交时，所有图表请按以下要求制作：

1. 作图工整清晰，图表不得过小；
2. 每张图须明确交代 x 轴和 y 轴的指代；
3. 非常鼓励用彩色铅笔作图（但不建议颜色太多，可以考虑虚线和断点线）。

一、2×2 简单博弈

1. 考虑美国和苏联在古巴导弹危机之后的协定。两国协商销毁苏联在古巴部署的核武器，但是美国对苏联是否会销毁核武一事仍心存疑虑。假设两国同时行动，苏联选择销毁或者保留核武器，而美国决定是否派出间谍去打探苏联的行动。（为简单起见，我们不考虑美国是否保留武器、苏联是否派间谍的问题）如果苏联保留核武器而美国没有派出间谍，那么苏联的收益是 5，美国的收益是 -5；而如果苏联保留核武器一事被美国发现，将是严重的国际丑闻，此时苏联将获得 -5 的收益而美国的收益为 5。如果苏联放弃核武，不论美国是否派出间谍，其获得的收益均为 0，此时美国不派间谍的收益是 0，派出间谍收益是 -2。

a) 请给出此博弈的收益矩阵。

美国	苏联		
		保留	不保留
	窃听	<u>5</u> , -5	-2, <u>0</u>
	不窃听	-5, <u>5</u>	<u>0</u> , 0

注：每个收益矩阵中第一个数为美国的收益，第二个数为苏联的收益。

b) 请说明此博弈没有（纯策略）纳什均衡。根据“纳什定理”，此博弈是否存在别的均衡（即混合策略纳什均衡）？（此题无需求解混合策略纳什均衡）

两国面临对方不同决策时的最佳应对（best response）如上表所示（带下划线的数字）。我们可以看出，给定任意的一个结果，总有一方有激励选择偏离。因此，此博弈不存在纯策略纳什均衡。根据纳什定理，有限博弈必然存在纳什均衡，因此，这一博弈必定存在混合策略纳什均衡。

c) 毫无疑问，美国选择不窃听，苏联选择销毁核武对全世界人民而言是最理想的结果。下列几种做法中，哪些可以使这一结果成为纳什均衡？哪些可以使其成为帕累托有效的结果？

i. 核武器保存成本上升，不管美国是否窃听，苏联保留核武器都会再损失 10 单位的收益。

此时，收益矩阵如下。显然，（不窃听，不保留）构成纳什均衡，同时也是帕累托有效的结果。另外，由于保留核武的成本上升较大，销毁核武成了苏联的占优策略（dominant strategy）。

美国	苏联		
		保留	不保留
	窃听	<u>5</u> , -15	-2, <u>0</u>
	不窃听	-5, -5	<u>0</u> , <u>0</u>

ii. 美国派出的间谍会面临人身安全的威胁，因此无论苏联是否保留，派出间谍都会使美国损失 10 单位收益。

此时，收益矩阵如下。此博弈的纳什均衡是（不窃听，保留）；（不窃听，不保留）虽不是纳什均衡，却仍为帕累托有效的结果。

美国	苏联		
		保留	不保留
	窃听	<u>-5</u> , -5	-12, <u>0</u>
	不窃听	<u>-5</u> , <u>5</u>	<u>0</u> , 0

iii. 苏联面临其他国家的核威胁，因此保留核武器的收益增加 10 单位，无论美国是否派出间谍。

由于保留核武的收益增加较大，因此保留核武成了苏联的占优策略。此时，美国必然选择窃听。因此，（窃听，保留）构成纳什均衡，同时也是帕累托有效的结果。而（不窃听，不保留）不再是帕累托有效的结果：双方在（不窃听，不保留）下的收益均为 0，而在（窃听，保留）下双方的收益将上升至 5。

美国	苏联		
		保留	不保留
	窃听	<u>5</u> , <u>5</u>	-2, 0
	不窃听	-5, <u>15</u>	<u>0</u> , 0

二、3×3 简单博弈

2. 在景园大陆上，有三个不同势力：桃花源、煎饼国与学宿同盟，以合作为目标的桃花源与以竞争为源动力的煎饼国就景园大陆的未来走向持有不同的看法，而学宿同盟则主要考虑否卷入前两者的讨论。考虑三个势力之间的同时博弈，在收益对 (s_1, s_2, s_3) 中的 s_1 代表桃花源收益、 s_2 代表煎饼国收益、 s_3 代表学宿同盟收益，请问选项之中说法正确的有：

		学宿同盟		介入 煎饼国	
		守序		中立	混乱
桃花源	善良	<u>5</u> , <u>1</u> , <u>3</u>		4, 3, <u>4</u>	3, <u>5</u> , <u>5</u>
	中立	4, <u>3</u> , 3		<u>5</u> , <u>1</u> , <u>4</u>	4, <u>3</u> , <u>4</u>
	邪恶	3, <u>5</u> , 3		4, 3, 3	<u>5</u> , <u>1</u> , <u>3</u>
		学宿同盟		回避 煎饼国	
		守序		中立	混乱
桃花源	善良	<u>3</u> , <u>1</u> , <u>3</u>		<u>3</u> , <u>3</u> , 3	1, <u>6</u> , <u>3</u>
	中立	<u>3</u> , <u>3</u> , <u>4</u>		<u>3</u> , <u>1</u> , <u>4</u>	<u>3</u> , <u>3</u> , 3
	邪恶	1, <u>6</u> , <u>5</u>		<u>3</u> , <u>3</u> , <u>4</u>	<u>3</u> , <u>1</u> , <u>3</u>

- A. 该博弈中纯策略纳什均衡数量为 3。
- B. 给定其他条件不变，若学宿同盟“介入”策略收益全部变为 3，“回避”策略的收益全部变为 5，此时纯策略纳什均衡的数量会增加。
- C. 若桃花源和煎饼国分别主动放弃“邪恶”与“守序”策略，这个时候模型中没有纯策略纳什均衡。
- D. 若此时桃花源在任何情况下都在自己的三个策略中无差异，而煎饼国与学宿同盟的收益不变，此时煎饼国与学宿同盟的策略对（混乱，介入）将构成一个纯策略纳什均衡
- E. 从当前博弈收益矩阵来看，任何一方不存在其占优策略，即不存在某一策略的收益至少不少于其他策略所获得的收益。

【BDE】

A 选项错误，当前情形下纯策略纳什均衡仅有一个，即（中立，守序，回避）；
 B 选项正确；C 选项错误，如果分别拿掉“邪恶”与“守序”策略，那么（中立，混乱，介入）为一个纯策略纳什均衡；D 选项正确；E 选项正确。

三、伯特兰德模型的扩展

注：这一部分练习中，我们思考伯特兰德模型的不同拓展。伯特兰德模型最重要的结论是企业会进行非常残酷的价格竞争，最终每个企业获得零利润。我们希望研究这一结论在放宽模型中不同假设后是否依然成立。

3. 以下练习中我们放宽企业生产边际成本相同的假设。

有两家生产相同煎饼的企业，其生产的固定成本为 0。一家企业的边际成本为 5 元，而另一家企业生产煎饼的边际成本为 10 元。市场中有一单位消费者。消费者完全理性：他们永远选择价格较低的煎饼进行购买；当煎饼价格相同时，他们从两家企业中等概率随机购买。本题中我们假设货币是无限可分的。

a) 伯特兰德模型中的均衡 (5, 5) 是否仍然是纳什均衡？请说明理由。

不是。因为此时边际成本为 10 元的企业将面临亏损。

b) 请计算此模型下的所有纳什均衡，并计算厂商的利润。

事实上，当两家企业生产的边际成本不相等时，伯特兰德模型不存在纯策略纳什均衡。为了叙述的方便，我们记边际成本更低的企业为企业 1，其均衡定价为 p_1 ；成本更高的企业为企业 2，其均衡定价为 p_2 。

引理 1: $p_1 < 5$, $p_2 < 10$ 不可能是均衡。

证明：如果这一定价策略为均衡，那么价格更低的卖家将获得一定的市场份额（全部或者一半），此卖家将获得负利润。此时，我们可以让它将定价策略改为其边际成本。此时，无论如何，它都将获得零利润。此卖家有偏离均衡的激励。证毕。

引理 2: $p_1 > 5$, $p_2 > 10$ 不可能是均衡。

证明：

情形 1: 如果此时 $p_1 = p_2 = p > 10$ ，那么企业 2 的利润为 $(p-10)/2$ 。企业 2 可以通过将价格降为 $2/3 \times p + 1/3 \times 10$ 以获得整个市场，此时的利润变为： $2/3 \times (p-10) > (p-10)/2$ 。因此，企业 2 有偏离均衡的激励。

情形 2: 如果此时 $p_1 \neq p_2$ ，那么价格更高的一方获得零利润。不妨假定 $p_1 > p_2$ 。此时企业 1 可以通过收取 p_2 和企业 2 平分市场并获得正利润。因此，企业 2 有偏离均衡的激励。

综上所述， $p_1 > 5$, $p_2 > 10$ 不可能是均衡，证毕。

引理 3: $p_1 < 5$, $p_2 > 10$ 不可能是均衡。

证明：毫无疑问，此时企业 1 获得整个市场，但面临亏损。企业 1 可以

通过将价格定为其边际成本以获得零利润。矛盾！

引理 4: $p_1 > 5$, $p_2 < 10$ 不可能是均衡。

证明:

情形 1: 如果企业 1 获得整个市场, 必定有 $p_1 < p_2$ 。此时, 企业 1 可以将价格提升到 $(p_1 + p_2)/2$ 来保证获得整个市场并且增加利润。矛盾！

情形 2: 如果企业 2 获得整个或部分市场。此时, 企业 2 获得负利润。毫无疑问, 企业 2 可以将价格上升至其边际成本以获得零利润。矛盾！

最后, 我们需要检验 $p_1 = 5$ 或 $p_2 = 10$ 不可能是均衡。推理过程与之前非常类似。不再赘述。

注 1: 证明均衡不存在是比找到均衡更繁琐也更困难的一项工作。我们需要检查可能出现的每一种情形并找到企业偏离均衡的策略。

注 2: 这里均衡不存在的原因是因为企业面临的需求曲线是非连续的。一个合理的猜测是企业 1 将获得整个市场而企业 2 获得零利润。但是, 如果此时企业 2 的定价为 10, 企业 1 的定价可以无限逼近 10 以不断增加利润。然而, 企业 1 却无法将价格定为 10。一旦如此, 企业 1 将与企业 2 平分市场, 利润瞬间下降。正是由于伯特兰德企业面临需求的这种非连续性最终导致了纳什均衡的不存在。

4. 以下练习中我们对企业的定价加以限制。现实生活中, 企业是面临一定的定价限制的。比方说, 企业只能以某一最小的间隔制定价格。举个例子, 煎饼的价格间隔不能小于分: 一个煎饼的价格不能是 4.999 元, 而只能是 4.98 元, 4.97 元。

有两家生产相同产品的企业。企业完全同质, 其生产的固定成本为 0, 边际成本为 5 元。市场中有一单位的消费者。消费者完全理性: 他们永远选择价格更低的产品进行购买; 当产品价格相同时, 他们从两家企业中等概率随机购买。

假定厂商无法随意的定价: 企业只能以 $5 + k\Delta$ 的形式定价, 其中 k 必须是整数 (即 k 可以为 -3, -2, -1, 0, 1, 2 等等)。而 $\Delta > 0$ 是一个给定的数。

- a) 伯特兰德模型中的均衡 (5, 5) 是否仍为纳什均衡? 请说明理由。

是。在两家厂商同质的前提下, 如果对方定价在 5, 此时无论是定价在 5, 还是提价都是零利润。因此 (5, 5) 是纳什均衡。

- b) 模型中是否存在其他的纳什均衡？如果存在，请找出所有的纳什均衡并计算厂商的利润。如果不存在，请说明理由。

除了 $(5, 5)$ ，模型仍然存在第二个纳什均衡 $(5+\Delta, 5+\Delta)$ 。因为此时每家企业的利润为 $\Delta/2$ ，如果提价其利润为 0，如果降价至 5，它的利润也变为 0。因此，企业没有偏离均衡的激励。

与此同时，还存在第三个纳什均衡 $(5+2\Delta, 5+2\Delta)$ 。此时，每家企业的利润为 Δ 。同样地，如果其中一家企业提价，其利润下降为 0。如果企业将价格降至 $5+\Delta$ ，它将占据整个市场，然而此时的利润仍然为 Δ 。如果企业将价格降至 5，其利润下降为 0。此时，企业仍然没有偏离均衡的激励。

- c) 如果存在多于两个均衡，请问哪些均衡是帕累托有效的？我们能否用帕累托有效的标准对模型所有的均衡进行排序？

由于均衡具有对称性（此模型中不存在非对称的均衡），每家企业在均衡时获得的利润相同，因此我们可以用帕累托有效的标准对均衡进行排序。事实上， $(5, 5)$ 、 $(5+\Delta, 5+\Delta)$ 和 $(5+2\Delta, 5+2\Delta)$ 下每家企业的利润分别为 0、 $\Delta/2$ 以及 Δ 。因此，三个均衡中只有 $(5+2\Delta, 5+2\Delta)$ 这个均衡是帕累托有效的。

- d) 1 分硬币是币值最小的货币，而铸造一枚 1 分硬币的成本早已超过其币值。有人因此建议废止 1 分硬币的流通。如此一来，5 分硬币将成为币值最小的货币。此举会对每家企业的利润会造成怎样的影响（考虑帕累托有效的均衡）？

在这个问题里， Δ 由 0.01 增至 0.05，因此每家企业在帕累托有效的均衡状态下的利润可以提高至原来的 5 倍，从 0.01 增加到 0.05。

四、古诺模型

5. 此练习中我们放宽古诺模型里只有两家企业的假设。

古诺模型中，我们假定市场中有 N 家企业，其中 $N \geq 1$ 。将企业依次记为 $i = 1, 2, \dots, N$ 。每家企业完全同质，企业的固定成本为零，生产的边际成本为 $MC = 4$ 。市场的需求曲线为 $P = 16 - Q$ 。企业之间只进行数量竞争。

- a) 请计算垄断下 ($N = 1$)，市场的价格 P^m ，企业的产量 Q^m ，以及垄断企业的利润。

企业的需求曲线为：

$$P = 16 - Q$$

因此，边际收益曲线为：

$$MR = 16 - 2Q$$

联立 MC 和 MR 解得，企业最优产量为 6 单位，均衡的价格为 10 元。

此时，企业的利润为：

$$\Pi = (P^m - 4) \times Q^m = 36$$

- b) 请计算完全竞争下，市场的价格 P^* ，市场的产量 Q^* ，以及企业的利润。

完全竞争情况下价格等于边际成本，因此：

$$P^* = MC = 4$$

市场的产量为 12 单位，均衡的价格为 4 元。

每家企业的利润为：

$$\pi_i = (P^* - 4) \times q_i^* = 0$$

事实上，在完全竞争下，企业的长期利润必然为 0。

- c) 请计算市场有 N 家企业时，每家企业的均衡产量 $q_i^\#$ ，市场的价格 $P^\#$ ，市场的产量 $Q^\#$ ，每家企业的利润，以及所有企业利润的总和。

为了叙述的方便，令 $q_{-i} = \sum_{j=1}^N q_j - q_i$ ，即 q_{-i} 为除了企业 i 以外所有企业产量的总和。（注：这一记号在博弈论中会经常用到）

给定其他企业的策略，企业 i 面临的需求曲线为：

$$P = (16 - q_{-i}) - q_i$$

因此，其边际收益曲线为：

$$MR = (16 - q_{-i}) - 2q_i$$

企业利润最大化必定有： $MC = MR$ ，化简可得企业 i 的最佳应对曲线 (best response):

$$q_i = \frac{12 - q_{-i}}{2}$$

以上式子对所有企业都成立。由此可以联立解得企业的均衡产出：

$$q_i^\# = \frac{12}{N+1}, i = 1, 2, \dots, N, N \geq 2$$

市场的总供给量为:

$$Q^{\#} = \sum_{i=1}^N q_i^{\#} = \frac{N}{N+1} \times 12$$

市场的均衡价格为:

$$P^{\#} = 16 - Q^{\#} = \frac{4N + 16}{N + 1}$$

每家企业的利润为:

$$\pi_i = (P^{\#} - 4) \times q_i^{\#} = \left(\frac{12}{N+1} \right)^2$$

所有厂商的利润为:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \pi_i = N \times \left(\frac{12}{N+1} \right)^2$$

- d) 当 N 趋向于无穷大时, 每家企业的均衡产量 q_i^{\dagger} , 市场的价格 P^{\dagger} , 市场的产量 Q^{\dagger} , 每家企业的利润, 以及所有企业利润的总和会发生什么变化。

经过简单的计算可知, 当 N 趋向于无穷大时, 每家企业的均衡产量趋向于 0, 而市场的均衡产量趋向于完全竞争下的产量 12。市场价格趋向于完全竞争下的价格 4。每家企业的利润趋向于完全竞争下的利润 0, 市场中所有企业的总利润也趋向于 0。

$$q_i^{\dagger} = \lim_{N \rightarrow \infty} q_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{12}{N+1} = 0$$

$$Q^{\dagger} = \lim_{N \rightarrow \infty} Q = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N+1} \times 12 = 12$$

$$\pi_i^{\dagger} = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{N+1} \right)^2 = 0$$

$$\Pi^{\dagger} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pi = \lim_{N \rightarrow \infty} N \times \left(\frac{12}{N+1} \right)^2 = 0$$

$$P^{\dagger} = \lim_{N \rightarrow \infty} P = \frac{4N + 16}{N + 1} = 4$$