习题答案

习 题 一

1. $P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$.(例 1.2)

$P(A)=\frac{7}{15}$, $P(B)=\frac{8}{15}$.(例 1.3)

2. $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{27}$;

$P(D)=\frac{1}{9}$; $P(E)=\frac{2}{9}$; $P(F)=\frac{8}{9}$;

$P(G)=P(H)=P(I)=\frac{8}{27}$;

$P(J)=\frac{1}{27}$; $P(K)=\frac{2}{27}$.

3. $C_{13}^2/C_{52}^2=\frac{1}{17}$.

4. $P\{$至少有两件次品$\}\approx 0.82$.

5. (1) $\frac{1}{5}$; (2) $\frac{3}{5}$; (3) $\frac{3}{10}$.

习 题 二

1. $\frac{19}{130}\approx 0.146$.

4. $132/169\approx 0.781$.

5. 0.219.

6. 0.994.

7. $P(全红)=\frac{1}{8}$;　　$P(全黄)=P(全白)=\frac{1}{64}$;

$P(色全同)=\frac{5}{32}$;　　$P(全不同)=\frac{3}{16}$;

$P(不全同)=\frac{27}{32}$;　　$P(无红)=\frac{1}{8}$;

$P(\text{无黄})=P(\text{无白})=\frac{27}{64}$;

$P(\text{无红且无黄})=\frac{1}{64}$;

$P(\text{全红或全黄})=\frac{9}{64}$;

$P(\text{无红或无黄})=\frac{17}{32}$.

8. $$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(BC)+P(ABC).$$

习　题　三

1. 0.902.
2. $P(A+BC)=0.328$.
3. 96.5%.
4. $P_1=\frac{1}{10}$, $P_2=\frac{3}{5}$.
5. 0.124.
6. $\frac{5}{13}$.

习　题　四

1. 0.973; 0.25.
2. 0.145 8; 5/21.
3. $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{9}$.

习　题　五

1. $(0.99)^4=0.960\,6$;　$C_4^1(0.01)(0.99)^3=0.038\,8$;
   $C_4^2(0.01)^2(0.99)^2=0.000\,6$;　$C_4^3(0.01)^3\cdot 0.99\approx 0$;
   $C_4^4(0.01)^4\approx 0$.
2. 0.104.
3. (1) 0.923;　(2) 0.177.

4. $\dfrac{(\lambda p)^l}{l!}e^{-\lambda p}$.

习 题 六

1. $P\{X=k\}=C_5^k C_{95}^{20-k}/C_{100}^{20}(k=0,1,2,3,4,5)$.

2. $P\{X=k\}=C_{30}^k(0.8)^k(0.2)^{30-k}(k=0,1,\cdots,30)$.

3. $P\{X=k\}=(0.2)^{k-1}\cdot 0.8(k=1,2,\cdots)$.

4.

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{9}{44}$	$\dfrac{9}{220}$	$\dfrac{1}{220}$

5. $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}(k=1,2,\cdots)$.

6. $P\{X=k\}=C_{13}^k C_{39}^{5-k}/C_{52}^5(k=0,1,\cdots,5)$.

7. 0.090 2.

8. 0.029 8; 0.021 4.

9. $k=\begin{cases}[\lambda] & \text{如果 } \lambda \text{ 不是整数}\\ \lambda-1,\lambda & \text{如果 } \lambda \text{ 是整数}\end{cases}$

习 题 七

1. (1) $C=2$;　　(2) 0.4.

2. (1) $C=\dfrac{1}{\pi}$;　　(2) $\dfrac{1}{3}$.

3. (1) $C=\dfrac{1}{2}$;　　(2) $\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$.

4. 0.952 2; 0.817 2.

5. 1.96, 1.65, 2.58; 1.65.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$.

7. $p_Y(y)=\dfrac{2e^y}{\pi(e^{2y}+1)}$, $-\infty<y<+\infty$.

8. $\begin{cases} p_Y(y)=\dfrac{2\left(\dfrac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}y^{k-1}\mathrm{e}^{-\frac{ky^2}{2}} & ,y>0 \\ 0 & ,y\leqslant 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} p_Y(y)=\dfrac{4\sqrt{2}}{a^3\sqrt{\pi}m^{\frac{3}{2}}}\sqrt{y}\mathrm{e}^{-\frac{2y}{ma^2}} & ,y>0 \\ 0 & ,y\leqslant 0. \end{cases}$

10. 0.240 3.

11. $p_V(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{2}{9\pi}\right)^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} & \dfrac{\pi a^3}{6}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi b^3}{6} \\ 0. & \text{其他} \end{cases}$

12. $p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} & |x|<R \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

13. (1) 0.864 7, 0.049 8;

(2) $p(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$

14. (1) $F(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant -1 \\ \dfrac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2} & -1<x<1 \\ 1 & x\geqslant 1 \end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0\leqslant x<1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\leqslant x<2 \\ 1 & x\geqslant 2 \end{cases}$

15. $\sigma\leqslant 31.25$.

习　题　八

1. $E(X)=11$.

2. 甲机床次品数的期望为 1,乙机床次品数的期望为 0.9.

3. $E(X)=1.25$.

4. $E(X)=nM/N$.

5. $E(X)=\frac{6}{5}$.

6. $E(X)=44.64$.

7. $[1-(1-p)^{10}]/p$.

习　题　九

1. $E(X)=\frac{2}{3}$.

2. 0.

3. 0.

4. $E(X^n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ \sigma^n(n-1)!! & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$

5. $\pi(b+a)(b^2+a^2)/24$.

6. 0.

习　题　十

1. 33; 0.312 5.

2. $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{R^2}{2}$.

4. $p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\mathrm{e}^{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $y>0$;

   $E(Y)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$;

   $D(Y)=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$.

5. (1) $A=\frac{1}{\sigma^2}$;

   (2) $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\left(E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\right)$;

   (3) $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$.

6. 注意到 $E(X)=m+1$, $D(X)=m+1$, 用切比雪夫不等式即可证

得.

7. $E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $D(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$.

8. $E(X)=\frac{r}{p}$; $D(X)=\frac{rq}{p^2}$.

习题十一

1. 不独立.

2. $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)} & (x,y)\in D,\\ 0 & \text{其他};\end{cases}$

$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b,\\ 0 & \text{其他};\end{cases}$

$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{d-c} & c<y<d,\\ 0 & \text{其他};\end{cases}$

X 与 Y 相互独立.

3. (1) $c=\frac{3}{\pi R^3}$;

(2) $\frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$.

4. (1) $c=\frac{1}{\pi^2}$;　　(2) $\frac{1}{16}$;

(3) 独立.

5. (1) $A=\frac{1}{2}$;

(2) $p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{其他};\end{cases}$

Y 与 X 同分布.

6. 0.96.

7. $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi ab} & (x,y)\in D,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

8. (1) $p(x,y)=\frac{1}{\sqrt{3}\pi}e^{-\frac{2}{3}[(x-3)^2-(x-3)y+y^2]}$,

$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$, $p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

(2) $p(x,y)=\frac{4}{\sqrt{3}\pi}e^{-\frac{8}{3}[(x-1)^2-(x-1)(y-1)+(y-1)^2]}$,

$p_X(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(x-1)^2}$, $p_Y(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(y-1)^2}$.

(3) $p(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2+4(y-2)^2]}$,

$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$, $p_Y(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(y-2)^2}$.

习 题 十 二

1. $p_Z(z)=\begin{cases}(e-1)e^{-z} & z\geqslant 1,\\ 1-e^{-z} & 0<z<1,\\ 0 & z\leqslant 0.\end{cases}$

4. $p_{\min(X,Y)}(z)=2[1-F(z)]p(z)$.

5. $p_1(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0,\\ 0 & z\leqslant 0;\end{cases}$

$p_2(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0,\\ 0 & z\leqslant 0;\end{cases}$

$p_3(z)=\begin{cases}\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}) & z>0,\\ 0 & z\leqslant 0.\end{cases}$

6. (1) $\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z} & ,z>0\\ 0 & ,z\leqslant 0\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}\frac{1}{120}y^5e^{-y} & ,y>0\\ 0 & ,y\leqslant 0.\end{cases}$

习题十三

1. $E(Z)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

3. $A=\frac{1}{\pi}$;σ_{XX},σ_{YY}都不存在.

4. $\rho=\frac{1}{2}$.

5. $E(X_1\cdot X_2)=4$.

6. $D(X+Y)=85$, $D(X-Y)=37$.

7. $1-e^{-\frac{k^2}{2}}$.

9. $\rho_{XY}=\begin{cases}0 & n\text{ 偶},\\ \dfrac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}} & n\text{ 奇}.\end{cases}$

习题十四

1. X,Y,Z 独立同分布,密度是$\begin{cases}p(t)=e^{-t} & ,t>0\\ 0 & ,t\leqslant 0.\end{cases}$

2. $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$

3. $\begin{cases}p(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}u^2e^{-\frac{1}{2}u^2} & ,u>0\\ 0 & ,u\leqslant 0.\end{cases}$

4. $E(Y)=\mu$, $D(Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.

5. $\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从参数为 $m,\eta/n^{\frac{1}{m}}$的韦布尔分布.

6. $E(X)=M\left[1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n\right]$.

7. $E(X)=\sum_i p_i$, $D(X)=\sum_i p_i 1-p_i$.

8. $E(X+Y+Z)=1$, $D(X+Y+Z)=3$.

习 题 十 五

1. 对一切非负整数 n,

$$P(X=K\mid X+Y=n)=\begin{cases}0, & K>n\\ C_n^k\dfrac{\lambda_1^K\lambda_2^{n-K}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}, & K=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

2. 小猫到达地面的时间的期望是 10 h.

4. 该商店一天的平均营业额是 60 000 元.

习 题 十 六

2. $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_i(x_i-\mu)^2$.

3. $\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_i x_i$.

4. $\hat{\lambda}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$; $\tilde{\lambda}=\dfrac{2}{n}\sum\limits_i x_i$.

5. $[15.06-0.24,15.06+0.24]$, $[15.06-0.15,15.06+0.15]$.

6. $[1\,234.4,1\,283.6]$, $[1\,247.6,1\,270.4]$.

7. $[-2.565,3.315]$, $[-2.751,3.501]$.

8. $[2\,760.8,2\,857.2]$.

9. $[1\,485.7,1\,514.3]$, $[13.8,36.5]$.

10. $[2.690,2.720]$.

11. $n\geqslant 15.37\sigma^2/L^2$.

12. $[-0.001,0.005]$.

习 题 十 七

1. 相容$(1.095<1.96)$.

2. 没发现不正常$(0.05<2.306)$.

3. 有显著性差异$(2.45>2.262)$.

4. 没发现有系统偏差$(0.465\,9<2.447)$.

5. 可以认为偏大$(15.68>15.5)$.

6. 无显著性差异$\left(\dfrac{1}{3.85}<2.13<4.30\right)$.

7. 有显著性差异(5.98>2.021).

8. 有显著性差异(4.06>2.262).

9. 无显著性差异(1.86<2.101).

10. 可以认为是匀称的(5.125<16.9).

11. 有显著性差异,新法好(-2.06<-1.833).

习题十八

1. 回归直线方程:$\hat{y}=188.99+1.867x$.

2. 显著($\alpha=0.05$),(7.55>5.32).

3. $x=65$ 时 $\hat{y}=310$,预报区间[256,365],$\alpha=0.05$.

习题十九

1. (1) 第3号条件:上升温度800℃,保温时间8 h,出炉温度500℃.

(2) 第8号条件:品种为南二矮5号,插植密度20万棵/亩,施肥量每亩5斤纯氮.

(3) 第6号条件:pH 9~10,加凝聚剂,用NaOH作沉淀剂,加$CaCl_2$,用浓的废水.

2. (1) 可能好的配合:上升温度:800℃,保温时间8 h,出炉温度400℃.

(2) 可能好的配合:品种为窄叶青8号,插植密度30万棵/亩.施肥量10斤/亩纯氮.

(3) 可能好的配合:pH 9~10,用NaOH做沉淀剂,凝聚剂和$CaCl_2$都不用加.(废水浓度稀、浓都可以,看需要而定.)

习题二十

3. λ 的贝叶斯估计是 $\dfrac{\alpha+\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\beta+n}$.

4. θ 的贝叶斯估计是 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1}{n-2}$.

5. 贝叶斯检验是:当 $\mu^*>\theta_0$ 时接受假设 H_2;当 $\mu^*<\theta_0$ 时接受假设

H_1；当 $\mu^* = \theta_0$ 时接受 H_1 或 H_2 均可．这里 $\mu^* = (\mu_0 + n\sigma_0 \bar{X})/(1 + n\sigma_0^2)$，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$．

6．全部决策共有九个．具体内容及相应的风险如下

δ(决策)		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9
x (地层结构)	0	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
	1	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
$R(\theta,\delta)$ (风险)	θ_0	12	7.6	9.6	5.4	1	3.0	8.4	4.0	6
	θ_1	0	4.9	3.5	2.1	7	5.6	1.5	6.4	5

δ_4 是 minimax 决策．若先验分布 $\xi(\theta_0)=0.2$，$\xi(\theta_1)=0.8$，则 δ_1 是相应的贝叶斯决策．

参考书目

[1] Гнепенко Б В. 概率论教程. 丁寿田译. 北京：高等教育出版社，1956

[2] Fisz M. 概率论及数理统计. 王福保译. 上海：上海科学技术出版社，1962

[3] 赵仲哲. 概率论讲义. 北京大学油印本，1957

[4] 王梓坤. 随机过程论. 北京：科学出版社，1965

[5] 中国科学院数学研究所概率统计室. 回归分析方法. 北京：科学出版社，1974

[6] 浙江大学数学系高等数学教研组. 概率论与数理统计. 北京：高等教育出版社，1979

[7] 汪仁官. 概率论引论. 北京：北京大学出版社，1994

[8] 钱敏平，叶俊. 随机数学. 北京：高等教育出版社，2000

[9] 茆诗松，周纪芗. 概率论与数理统计(第二版). 北京：中国统计出版社，2000

[10] 陈家鼎，孙山泽，李东风. 数理统计学讲义. 北京：高等教育出版社，1993

[11] Ross S M. A First Course in Probability (6^{th}Ed.). 影印版，北京：中国统计出版社，2003

[12] Groebner D F et al. Business Statistics: A Decision-making Approach. 影印版. 北京：中国统计出版社，2003

[13] Rosner B. Fundamentals of Biostatistics (4^{th} Ed.). Belmont: Wadsworth Publishing Company. 1995

[14] Casella G, Berger R L. Statistical Inference. 影印版，北京：机械工业出版社，2002

[15] Brockwell P J, Davis R A. 时间序列的理论与方法.第2版.田铮译.北京:高等教育出版社与 Springer 出版社,2001
[16] Rao B L. Nonparametric Functional Estimation. Washington: Academic Press, 1983
[17] 韦博成,鲁国斌,史建清.统计诊断引论.南京:东南大学出版社,1991
[18] 陈家鼎.生存分析与可靠性引论.合肥:安徽教育出版社,1993
[19] 陈家鼎.序贯分析.北京:北京大学出版社,1995
[20] 北京大学数学系试验设计组.电视讲座:正交试验法,1979