金融市场学第二次作业参考答案

1、(现金流折现估值)考虑这样一个产品：当你 30 岁时你可以与某保险公司签约，次年起，你每年向保险公司支付 30000 元，直到 50 岁。51 岁开始，保险公司向你每年返还 21000 元，直到你 70 岁，并在你 51 岁到 70 岁之间提供大病险保障，报销此阶段的一切医疗费用，假设每 5 年（55 岁、60 岁）向你支付 50000 元。当前的无风险利率为 5%，回答下列问题。

（1）考虑这一保险在现金流上的价值，你认为是否合算？

（2）上述保费缴纳方法被称为“期交”还有一种方法叫做“趸交”，如果你选择趸交，你可以在你 45 岁时一次性支付 660000 元，享受的权利也发生相应变化，由于 45 岁时的身体状况肯定不如 30 岁，保险公司只能报销你此后发生医疗费用的 60%，假设在此情况下保险的权益仍从你 50 岁开始生效，计算这一保险在现金流上的价值

（1）

$$\begin{aligned}PV=&-30000\times\left(\frac{1}{5\%}-\frac{1}{5\%(1+5\%)^{20}}\right)+21000\times\left(\frac{1}{5\%}-\frac{1}{5\%(1+5\%)^{20}}\right)\times\frac{1}{(1+5\%)^{20}}\\&+50000\times\left(\frac{1}{(1+5\%)^{25}}+\frac{1}{(1+5\%)^{30}}+\frac{1}{(1+5\%)^{35}}+\frac{1}{(1+5\%)^{40}}\right)\\&=-373866.31+98634.40+42500.81=-232731.1\end{aligned}$$

从现金流价值上考虑，这一保险不合算。

（2）

$$\begin{aligned}PV=&-660000\times\frac{1}{(1+5\%)^{15}}+21000\times\left(\frac{1}{5\%}-\frac{1}{5\%(1+5\%)^{20}}\right)\times\frac{1}{(1+5\%)^{20}}+50000\\&\times 60\%\times\left(\frac{1}{(1+5\%)^{25}}+\frac{1}{(1+5\%)^{30}}+\frac{1}{(1+5\%)^{35}}+\frac{1}{(1+5\%)^{40}}\right)\\&=-193336.4\end{aligned}$$

写出保险在 45 岁现值也可以

2、（债券的全价和净价）某种债券面值 100 元，期限 10 年，票面利率 8%，债券发行时市场利率为 8%，5 年后市场利率水平变为 10%且此后保持不变，债券到期一次性还本付息。

（1）假定该债券持有人在持有 8 年后将其出售，债券的全价与净价应分别为多少？

（2）如果其它条件不变（同样持有 8 年后出售），只是付息方式改为每年支付一次利息，那么债券的全价与净价应分别为多少？

（3）假设该债券每季度付息一次（付息日分别为每年 1 月 15 日、4 月 15 日、7 月 15 日、10 月 15 日），到期日为 2020 年 1 月 15 日，其持有人在 2018 年 3 月 20 日将其出售，此时债券的全价与净价应分别为多少？

（1）

本题算出全价即可，此类债券一般直接按照全价计价，算净价意义不大。

$$P=\frac{100\times(1+8\%\times 10)}{(1+10\%)^2}=148.76$$

这是单利计算结果，复利计算结果 178.42 也算分

（2）

$$P=\frac{100}{(1+10\%)^2}+\frac{100\times 8\%}{1+10\%}+\frac{100\times 8\%}{(1+10\%)^2}=96.53$$

（3）

$$全价=\left(\sum_{i=0}^{7}\frac{100\times 8\%/4}{(1+10\%/4)^{i}}+\frac{100}{(1+10\%/4)^{7}}\right)\times\frac{1}{(1+10\%/4)^{26/90}}=98.12$$

$$净价=全价-100\times 8\%\times\frac{1}{4}\times\frac{64}{90}=96.70$$

3、(债券收益率)某公司发行 5 年到期的债券，票面面额为 1000 元，售价为 960 元，票面利率 7%，半年付息一次。试计算：

(1)当期收益率？

(2)到期收益率？

(3)持有 3 年后，将该债券以 992 元的价格出售，则该投资者的年有效收益率为多少？

(1)

$$\mathrm{i}=\frac{C}{P}\times 2=\frac{1000\times 3.5\%}{960}\times 2=7.29\%$$

(2)

$$\mathrm{P}=\mathrm{C}\times\mathrm{PA}\left(\frac{y}{2},10\right)+\frac{F}{(1+y/2)^{10}}$$

$$960=35\times\frac{1}{\frac{y}{2}}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{10}}\right)+\frac{1000}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{10}}$$

$$y=7.99\%$$

(3)

$$960=35\times\mathrm{PA}\left(\frac{R}{2},6\right)+\frac{992}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^{6}}$$

$$R=8.29\%$$

$$\left(1+\frac{R}{2}\right)^{2}-1=8.46\%$$

4、(债券的久期)假设债券面值为 F，到期时间为 T，每年付息 m 次，每次付息 C 元，市场利率为 y。

(1)试计算债券的久期及修正久期，并说明修正久期与债券价格之间的关系。

(2)假设债券投资组合中拥有 N 种债券，其中第 i 种债券的投资数量为 ni、价格为 Pi，且收益率曲线平行移动，试证明债券投资组合的久期是这 N 种债券修正久期的加权平均，并指出权重的含义。

(3)试证明修正久期与连续复利情形下久期的一致性(提示：考虑连续复利收益率与年复利 m 次的年复利率之间的关系)。

(1)

$$P=\sum_{i=1}^{mT}\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}$$

$$D=\frac{1}{P}\times\left[\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\cdot\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+T\cdot\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right]$$

$$D_m=\frac{1}{P}\times\left[\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\cdot\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+T\cdot\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right]\times\frac{1}{1+\frac{y}{m}}$$

$$\frac{dP}{dy}=-\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\cdot\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i+1}}-T\cdot\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT+1}}=-P\cdot D_m$$

$\frac{dP}{P}=-D_m\cdot dy$，在收益率曲线微量平行移动时有近似处理$\frac{\Delta P}{P}=-Dm\cdot\Delta y$

于是修正久期表示当收益率曲线微量平行移动Δy时，债券价格相对于收益率曲线移动幅度的变动幅度

(2)

$$P_{portfolio}=\sum_{i=1}^{N}P_iN_i$$

$$\frac{dP_{portfolio}}{dy}=\sum_{i=1}^{N}\frac{dP_i}{dy}N_i$$

$$\frac{dP_{portfolio}}{dy}\cdot\frac{1}{P_{portfolio}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{dP_i}{dy}\frac{1}{P_i}\cdot\frac{N_iP_i}{P_{portfolio}}$$

$$D_{portfolio}=\sum_{i=1}^{N}D_m^i\cdot\frac{N_iP_i}{P_{portfolio}}$$

于是债券投资组合的久期是这 N 种债券修正久期的加权平均，权重为投资组合中对应债券投资额的比重

(3)

设市场利率y对应的连续复利利率为$\widetilde{y}$

$$\left(1+y/m\right)^{m}=e^{\widetilde{y}}$$

$$m\cdot ln\left(1+\frac{y}{m}\right)=\widetilde{y}$$

两边取微分

$$\frac{1}{1+\frac{y}{m}} \cdot dy = d\widetilde{y}$$

$$连续复利下的久期\widetilde{D} = -\frac{dP}{d\widetilde{y}} \cdot \frac{1}{P}$$

$$\frac{dP}{P} = -\widetilde{D} \cdot d\widetilde{y} = -\widetilde{D} \cdot \frac{1}{1+\frac{y}{m}} \cdot dy$$

$$年计息\ m\ 次情形下的久期\ D = -\frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P} \cdot \left(1+\frac{y}{m}\right)$$

$$\frac{dP}{P} = -D \cdot \frac{1}{1+\frac{y}{m}} \cdot dy$$

于是$D = \widetilde{D}$，连续复利情形下的久期与年计息 m 次情形下的久期一致

5、（可转债分析）某可转债面值 100 元，票面利率 3%（每年付息一次），剩余期限 5 年，转股价 20 元，正股当前价格 22 元，市场利率为 5%。求：

（1）纯债价值；

（2）转换价值；

（3）若当前可转债市场价格为 105 元，计算其转换溢价率，并分析溢价原因。

（1）**纯债价值**：

按市场利率 5%折现未来现金流：

- 利息现值：3 × [1 - (1.05)^{-5}]/0.05 ≈ 3 × 4.3295 ≈ **12.99 元**
- 本金现值：100 × (1.05)^{-5} ≈ **78.35 元**
- 纯债价值 ≈ 12.99 + 78.35 ≈ **91.34 元**

（2）**转换价值**：

可转股数 = 100/20 = 5 股，价值 = 5 × 22 = **110 元**

（3）**转换溢价率**：

= (市价 - 转换价值)/转换价值 × 100%

= (105 - 110)/110 × 100% ≈ **-4.55%**（折价 4.55%）

溢价原因分析：

尽管转换价值高于市价（折价），可能因可转债尚未进入转股期、市场预期正股下跌，或债券部分价值较低（市场利率 5%高于票面利率 3%）导致整体价格偏低。

6、（债券的价格性质）试证明如下定理：

A.对于给定的收益率变动幅度，债券的息票率与债券价格的波动幅度成反比关系。换言之，息票率越高，债券价格的波动幅度越小。

B.当市场预期收益率变动时，债券的到期时间与债券价格的波动幅度成正比关系。

本题有很多种证明方法，数学表达上不一定严谨，但只要能体现出其中的金融学原理即可（A）

$$P=\sum_{i=1}^{mT}\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}$$

$$\left|\frac{dP}{P}\right|=D\bullet\frac{1}{1+\frac{y}{m}}\bullet\left|dy\right|$$，债券价格波动幅度与 D 成正比

$$D=\left[\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\bullet\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+T\bullet\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right]\Big/\left[\sum_{i=1}^{mT}\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right]$$

$$\frac{dD}{dC}=\frac{1}{(\ldots)^{2}}\bullet\left[\left(\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\bullet\frac{1}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}\right)\bullet\left(\sum_{i=1}^{mT}\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right)-\left(\sum_{i=1}^{mT}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}\right)\right.$$
$$\left.\bullet\left(\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\bullet\frac{C}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}+T\bullet\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{(\ldots)^{2}}\bullet\left[\left(\sum_{i=1}^{mT}\frac{i}{m}\bullet\frac{1}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}\right)-\left(\sum_{i=1}^{mT}\frac{T}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{i}}\right)\right]\bullet\left[\frac{F}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{mT}}\right]$$

$T\geq\frac{i}{m}$，在 $i\neq mT$ 时严格取不等号，于是 $\frac{dD}{dC}<0$，D 与 C 成反比

于是 C 与 $\left|\frac{dP}{P}\right|$ 成反比关系，息票率越高，债券价格的波动幅度越小

（B）

$$P=\frac{F}{e^{rT}}$$

$$\frac{dP}{dr}=-T\times\frac{F}{e^{rT}}$$

$$\left|\frac{dP}{P}\right|=T\bullet\left|dr\right|$$

于是当收益率变动时，零息票债券的到期时间与其价格的波动幅度成正比关系

附息债券可看做一揽子零息票债券，于是当到期时间延长时，其到期时间与其价格的波动幅度也成正比关系