

# 宏观经济学

李伦

北京大学经济学院

2025/3/27

# 竞争均衡版本的新古典增长模型

- 简单描述一下竞争均衡版本的新古典增长模型
- 一个有限期模型（ $T$ 期之后结束），加入了一个不等式约束，为了帮助大家理解横截性条件
- 与有限期的社会计划者版本等价

# 模型假设

- 有限期模型,  $t = 0, 1, \dots, T$

- 代表家庭:

$$U = \sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t)$$

- 每期劳动力供给为1, 初始资本量 $K_0$
- 代表公司的生产函数:  $F(K, N, A)$ , 规模报酬不变 (CRS)
- 代表公司由家庭拥有, 利润 $\Pi_t$  分配给家庭

# 竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值 $\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^T$ ，以及工资、租金的取值 $\{r_t, w_t\}_{t=0}^T$ ：

1. 给定 $r_t, w_t$ ，代理家庭选择 $C_t, K_{t+1}, N_t^S$  来满足以下优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{C_t, K_{t+1}, N_t^S} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t) \\ \text{s.t.} \quad & C_t + I_t \leq w_t N_t^S + r_t K_t + \Pi_t \\ & N_t^S = 1 \\ & K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \\ & K_{t+1} \geq 0 \\ & K_0 \text{ given} \end{aligned}$$

# 竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值  $\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^T$ ，以及工资、租金的取值  $\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^T$ ：

1. 给定  $r_t, w_t$ ，代理家庭选择  $C_t, K_{t+1}, N_t^s$  来满足以下优化问题：
2. 给定  $r_t, w_t$ ，代理公司选择  $K_t^d, N_t^d$  来最大化利润：

$$\max_{K_t^d, N_t^d} F(K_t^d, N_t^d, A_t) - w_t N_t^d - r_t^k K_t^d$$

# 竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值 $\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^T$ ，以及工资、租金的取值 $\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^T$ ：

1. 给定 $r_t, w_t$ ，代理家庭选择 $C_t, K_{t+1}, N_t^s$ 来满足以下优化问题：
2. 给定 $r_t, w_t$ ，代理公司选择 $K_t^d, N_t^d$ 来最大化利润：
3. 所有市场出清：

$$\begin{aligned} C_t + I_t &= F(K_t, N_t, A_t) \\ N_t^s &= N_t^d \\ K_t^s &= K_t^d \end{aligned}$$

# 公司的优化问题

- 公司只需最大化每期的利润，无需考虑跨期问题

$$\max_{K_t, N_t} F(K_t, N_t, A_t) - w_t N_t - r_t^k K_t$$

- 一阶导数

$$[K_t]: F_K(K_t, N_t, A_t) = r_t^k$$

$$[N_t]: F_N(K_t, N_t, A_t) = w_t$$

- 生产函数规模报酬不变，具有如下性质：

$$F(K_t, N_t, A_t) = F_K(K_t, N_t, A_t)K_t + F_N(K_t, N_t, A_t)N_t$$

$$F(K_t, N_t, A_t) = r_t^k K_t + w_t N_t$$

- 因此，公司利润每期均为  $\Pi_t = 0$

# 家庭的优化问题

- 和之前一样，劳动供给=1
- 可以简化家庭预算约束为：

$$C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

- 家庭的优化问题简化为：

$$\begin{aligned} \max_{C_t, K_{t+1}} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t) \\ \text{s.t.} \quad & C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t \\ & K_{t+1} \geq 0 \end{aligned}$$

- 注意：此时我们没有要求 $I_t \geq 0$ ；最后几期时，家庭可以将资本品用作消费



# 解出家庭问题

- 这里有一个不等式的约束条件,  $K_{t+1} \geq 0$ ;
- 最后一期, 代表家庭或许不愿在下期持有任何资本;
- 我们把这个额外的约束条件放入拉格朗日函数当中:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} & \sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t) \\ & + \sum_{t=0}^T \lambda_t ((1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t - C_t - K_{t+1}) \\ & + \sum_{t=0}^T \mu_t K_{t+1}\end{aligned}$$

# 家庭问题：一阶导数

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} \sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t) \\ & + \sum_{t=0}^T \lambda_t ((1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t - C_t - K_{t+1}) \\ & + \sum_{t=0}^T \mu_t K_{t+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[C_t]: & \quad \beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0 \\ [K_{t+1}]: & \quad -\lambda_t + \mu_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}^k - \delta) = 0, \quad \text{if } 0 \leq t \leq T-1 \\ [K_{T+1}]: & \quad -\lambda_T + \mu_T = 0 \\ [\lambda_t]: & \quad C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t\end{aligned}$$

# 库恩-塔克条件 (Kuhn-Tucker Conditions)

- 带有不等式约束的优化问题，除了一阶导数，我们还需要一个额外的条件：

$$\begin{aligned}\mu_t K_{t+1} &= 0 \\ K_{t+1} &\geq 0 \\ \mu_t &\geq 0\end{aligned}$$

- 如果不等式约束是“刚性”的（等号成立），此时放松该约束条件，会增加效用，拉格朗日系数为正，拉格朗日系数与等式约束条件的乘积为0；
- 如果不等式约束是“软性”的（不等号成立），此时放松该约束条件，不会增加任何效用，拉格朗日系数为0，拉格朗日系数与不等式约束的乘积依然为0。

# 最后一期

- 在最后一期，因为

$$\mu_T = \lambda_T = \beta^T u'(C_T) > 0$$

- Kuhn Tucker Condition:

$$\mu_T K_{T+1} = 0 \Rightarrow K_{T+1} = 0$$

- 在无限期模型中，这个条件变成：

$$\lim_{\{t \rightarrow \infty\}} \beta^t u'(C_t) K_{t+1} = 0$$

这就是我们没有说到的横截性条件（transversality condition）； 马鞍路径是同时满足欧拉方程，资源约束与横截性条件的路径。

# 最后一期之前

- 我们知道初始资本量  $K_0 > 0$ , 那么  $\mu_0 = 0$
- 在  $t < T$  期, 代入  $\lambda_t = \beta^t u'(C_t)$ ,  $\mu_t = 0$ , 可以得到欧拉方程:

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(1 + r_{t+1}^k - \delta)$$

- 公司最大化利润意味着:

$$\begin{aligned} F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) &= r_{t+1}^k \\ w_t + R_t K_t &= F(K_t, 1, A_t) \end{aligned}$$

# 整理结果

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) + 1 - \delta)$$
$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = F(K_t, 1, A_t)$$

- 这两个条件（欧拉方程，资源约束）和之前社会计划者的版本相同
- 此外，我们多了一个约束条件， $K_{T+1} = 0$ ，这就可以帮助我们找出满足这一条件的最优路径 $\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^T$

# 参考

- QuantEcon, [Cass-Koopmans Model](#)

# 帶有人口、科技增长的Ramsey 模型

$$\begin{aligned}N_t &= N_0(1 + g_N)^t \\ A_t &= A_0(1 + g_A)^t\end{aligned}$$

- 和之前一样，我们假设技术进步为劳动加强型

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha}$$

假设效用函数为  $u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$



# 社会计划者问题：平衡增长路径

$$\begin{aligned} \max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ \text{s.t.} \quad & C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha} \\ & N_{t+1} = (1+g_N)N_t \\ & A_{t+1} = (1+g_A)A_t \\ & K_0, N_0, A_0 \text{ given} \end{aligned}$$

- 欧拉方程、资源约束变为

$$\begin{aligned} C_t^{-\gamma} &= \beta C_{t+1}^{-\gamma} (\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} (A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} + 1 - \delta) \\ C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t &= K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

# 解出稳态变量

- 由于 $A_t$ ,  $N_t$  在增长, 我们像之前一样, 把所有变量除以有效劳动 (normalize by effective labor)

- 新的资源约束

$$c_t + k_{t+1}(1 + g_A)(1 + g_N) - (1 - \delta)k_t = k_t^\alpha$$

- 把欧拉方程写作:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^\gamma = \beta \left( \alpha \left( \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} \right)^{\alpha-1} + 1 - \delta \right)$$

# 解出稳态变量

- 新的欧拉方程为：

$$\left( \frac{c_{t+1}(1 + g_A)(1 + g_N)}{c_t} \right)^\gamma = \beta(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

- 那么，和之前类似，我们可以解出 $k^*$  和  $c^*$  的稳态水平：

$$k^* = \left( \frac{\alpha\beta}{(1 + g_N + g_A)^\gamma - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$c^* = (k^*)^\alpha - (g_A + g_N + \delta)k^*$$

# 模型比较：新古典与索洛增长模型

- 新古典增长模型与索洛模型最大的区别在于，前者放松了储蓄率固定这一假设
- 那么，在新古典增长模型中，稳态水平的储蓄率是多少呢？
- 回到最基本的例子， $N = 1$ ， $A$ 固定不变。稳态的资本、消费水平是：

$$K^* = \left( \frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$C^* = A(K^*)^\alpha - \delta K^*$$

# 模型比较：新古典与索洛增长模型

- 因为  $Y^* = A(K^*)^\alpha$ , 我们有

$$\begin{aligned}\frac{C^*}{Y^*} &= \frac{A(K^*)^\alpha - \delta K^*}{A(K^*)^\alpha} \\ &= 1 - \frac{\delta}{A} (K^*)^{1-\alpha}\end{aligned}$$

- 储蓄率为

$$s = \frac{\delta}{A} (K^*)^{1-\alpha}$$

- 如果要承担更高的稳态资本水平，储蓄率也需要提高！

# 模型比较：新古典与索洛增长模型

- 代入 $K^*$ 的表达式:

$$K^* = \left( \frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$\Rightarrow s^* = \frac{\alpha \beta \delta}{1 - \beta(1 - \delta)}$$

- 提问：为何这里的储蓄率和索洛模型中的黄金规则储蓄率 (golden rule savings rate) 不同？

# 储蓄率的比较

$$s^* = \frac{\alpha\beta\delta}{1 - \beta(1 - \delta)}$$

- 答案：discount factor,  $\beta$
- 在索洛模型中，我们假设家庭将固定比例的收入用来储蓄，从而计算出稳态的消费水平  $C^*$
- 黄金规则储蓄率是索洛模型中使得稳态消费水平最高的储蓄率；  $s^{GR} = \alpha$
- 新古典增长模型中的家庭更聪明（也更缺乏耐心）——对于他们来说，现在和未来消费的边际效用水平是不同的。

**(提示：当  $\beta = 1$  时，两种模型在稳态的储蓄率相等)**

# 储蓄率的比较

- 如果有人口、科技增长，新古典增长模型中的储蓄率如何计算？
- 上节课：

$$k^* = \left( \frac{\alpha\beta}{(1 + g_N + g_A)^\gamma - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$c^* = (k^*)^\alpha - (g_A + g_N + \delta)k^*$$

$$\frac{c^*}{y^*} = 1 - (g_A + g_N + \delta)(k^*)^{1-\alpha}$$



# 储蓄率的比较

$$\begin{aligned}s &= (g_A + g_N + \delta)(k^*)^{1-\alpha} \\ &= \frac{\alpha\beta(g_A + g_N + \delta)}{(1 + g_A + g_N)^\gamma - \beta(1 - \delta)}\end{aligned}$$

当 $\gamma = 1, \beta = 1$ 时, 这个储蓄率依然等于  $s^{GR} = \alpha$

# Ramsey增长模型的贡献

- 索洛模型中，储蓄率被假设为外生，储蓄与资本增长的决策过程在一个“黑匣子”中。
- Ramsey增长模型通过假设家庭的效用函数，打开了“黑匣子”，并在一般均衡的框架内分析了储蓄率的决定因素（和效用、科技水平、人口增长都存在潜在关系）。
- 为现代宏观经济学提供了一个基础的研究框架，可以让研究者在此基础上进一步探讨增长的来源（如人力资本的积累，内生增长模型等）。

# 新古典主义增长模型的局限

- 和索洛模型一样，在平衡增长路径上，人均收入的增长取决于科技水平  $A$  的变化。
- 科技水平  $A$  也被称为 全要素生产率（Total factor productivity, TFP），是决定长期增长的关键要素。
- 新古典增长模型并未对TFP增长的来源加以探讨，而是假设它由外生因素导致。

# 内生增长模型

# 什么决定了科技增长？

- 索洛模型和Ramsey模型中，科技增长完全来自于外生因素（模型中看做给定的因素）
- Paul Romer 在1990 年的文章 “Endogenous Technological Change” (Journal of Political Economy) 中，对科技增长的来源提出了新的理论。
- 在这个模型中，科技增长是一个内生变量，由模型中代理人在均衡下的行为决定。

# 内生科技变化：Romer 模型

- 一个简化的版本：
- 生产函数：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} (x_1^\alpha + \dots + x_A^\alpha) = L_Y^{1-\alpha} \sum_{i=1}^A x_i^\alpha$$

- $L_Y$  : 从事生产的劳动人口数量
- $x_i$  : 类型  $i$  的资本品

# 内生科技变化：Romer 模型

$$Y = L_Y^{1-\alpha} (x_1^\alpha + \dots + x_A^\alpha) = L_Y^{1-\alpha} \sum_{i=1}^A x_i^\alpha$$

- 假设  $0 < \alpha < 1$ ，即每种资本品的边际回报递减
- $A$  被假设为资本品的种类。如果  $A$  为固定，那么随着资本积累，每种资本品的边际回报递减，增长最终会趋向于0；
- 在Romer 模型中， $A$  是一个**内生变量**。

# 科技增长与发明创造

- 经济体中有 $L_A$ 数量的人口从事科研工作(R&D)，这些工作者不断地进行发明创造，研发新的资本品。
- 资本品的种类随时间增长的函数为：

$$\dot{A} = \gamma L_A^\lambda A^\phi$$

- $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}$ ，代表发明创造的速度
- $L_A$ ：从事科学研究的人口数量
- $\lambda$ ：衡量科研工作者的边际产出
- $A^\phi$ ：“Giants shoulders” effect，代表目前的科技水平对于科技增长速度的正向影响



# 劳动分配

总人口为 $L$ ，分配至生产、科研两个环节。为了简化，我们假设从事科研的人口比例  $s_A$  给定（Romer的模型中将 $s_A$ 作为内生变量）

$$L = L_A + L_Y$$

$$L_A = s_A L$$

假设人口增长速度为 $n$ :

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

# 总生产函数

- 定义总资本量  $K$  为：

$$K = \sum_{i=1}^A x_i$$

- 这里有  $A$  种资本品参与生产过程，这些资本品扮演的角色都是一样的，因此公司对每种资本品的需求量相等： $x_i = \bar{x}$ 。那么：

$$K = A\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{K}{A}$$

- 生产函数变为：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} A \bar{x}^\alpha \Rightarrow Y = (AL_Y)^{1-\alpha} K^\alpha$$

# 生产函数

生产函数的形式和之前见到的形式类似：

$$Y = (AL_Y)^{1-\alpha} K^\alpha$$

假设储蓄率为固定（简化假设）：

$$\dot{K} = s_k Y - \delta K$$

# 增长核算

把生产函数重新写作

$$Y = (As_Y L)^{1-\alpha} K^\alpha$$

此处  $s_Y = 1 - s_A$

增长核算：

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (1 - \alpha) \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s}_Y}{s_Y} + \frac{\dot{L}}{L} \right) + \alpha \frac{\dot{K}}{K}$$

在平衡增长路径上， $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K}$ ，生产人口比例不变（ $\dot{s}_Y = 0$ ，（人口增长速度为  $n$ ，可以解得

$$\left( \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} \right)^* = \frac{\dot{A}}{A}$$

# 平衡增长路径

- 在平衡增长路径上,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = g_A + n$$

- 也可以计算平衡增长路径上的资本产出比:

$$\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s_k}{n + g_A + \delta}$$

# 增长速度

和索洛最大的不同：  $A$  由模型内生决定

$$\dot{A} = \gamma L_A^\lambda A^\phi$$

那么  $A$  的增长速度为

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma (s_A L)^\lambda A^{\phi-1}$$

在平衡增长路径上，科技的增长速度恒定，那么等式右边的增长速度为0

$$\lambda \left( \frac{\dot{L}}{L} \right) + (\phi - 1) \left( \frac{\dot{A}}{A} \right) = 0$$

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda n}{1 - \phi}$$

# 决定长期科技增长的因素

- 在平衡增长路径上，科技以 $g_A$ 的速度增长

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda n}{1 - \phi}$$

- 这一增长速度受三方面因素影响：

1.  $\lambda$ ：随着科技人员的增加，科研活动的边际回报递减； $\lambda$  越小， $g_A$  越小
2.  $\phi$ ：“巨人的肩膀”对现有科研活动的影响； $\phi$  越大， $g_A$  越大
3.  $n$ ：人口的增长速度； $n$  越大， $g_A$  越大

# 人口对科技增速的影响？

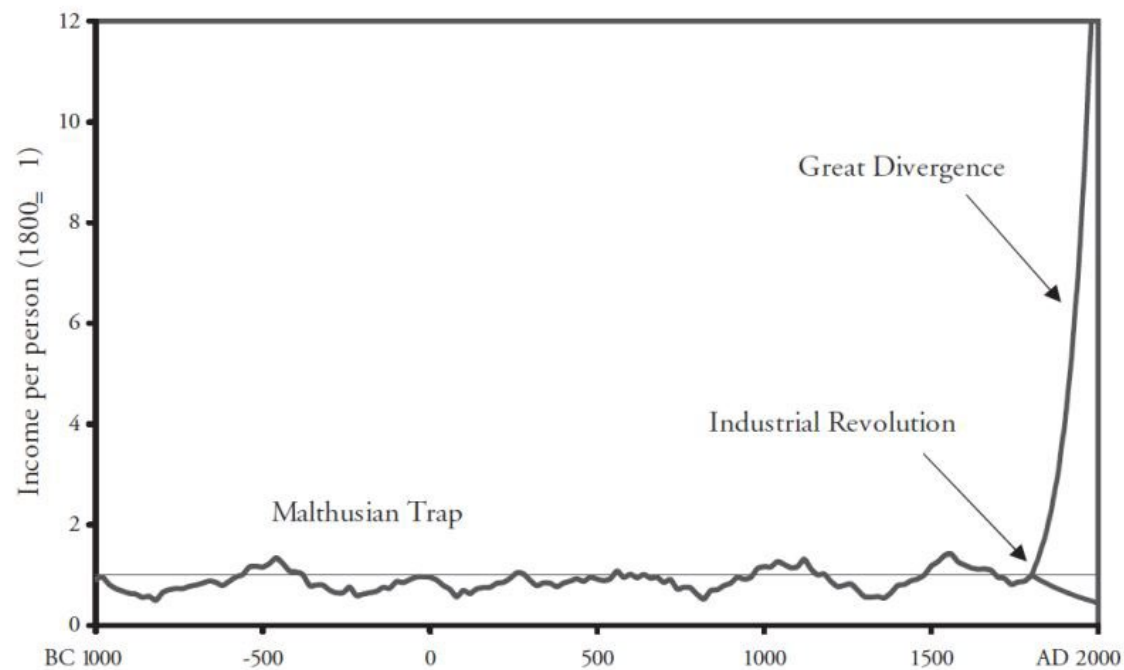
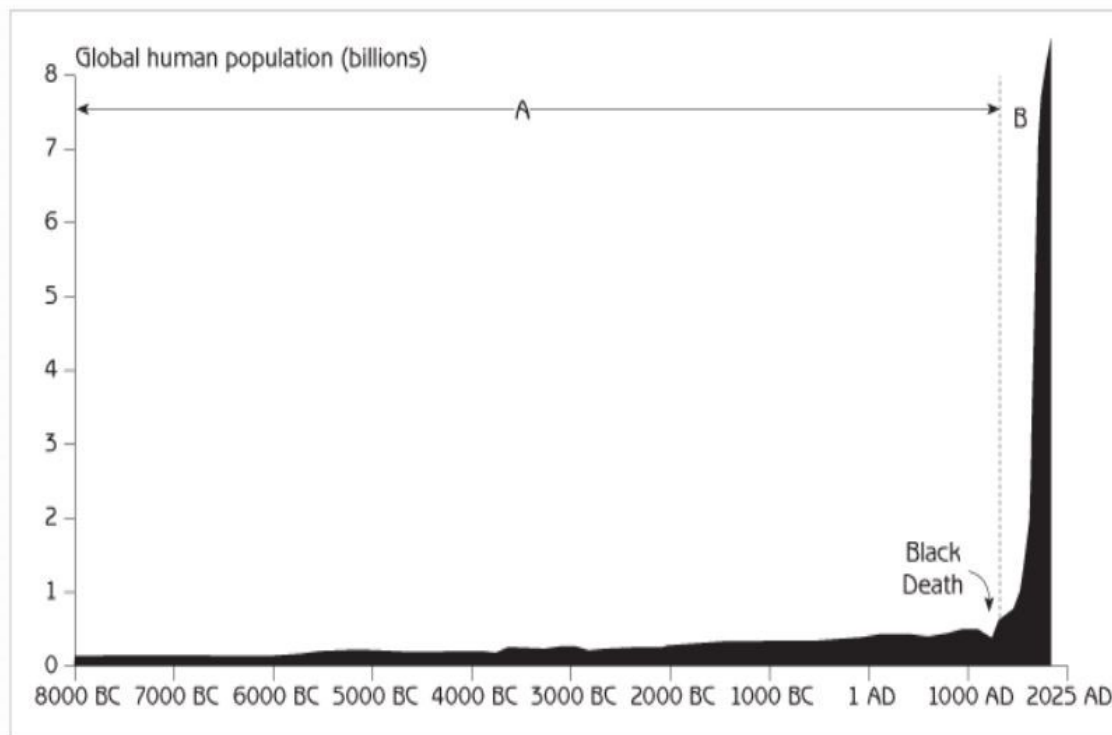


Figure 1.1 World economic history in one picture. Incomes rose sharply in many countries after 1800 but declined in others.



# 平衡增长路径上的科技水平

在平衡增长路径上，科技水平增速等于

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma(s_A L)^\lambda A^{\phi-1} = \frac{\lambda n}{1-\phi}$$

可以从上式解出平衡增长路径上的科技水平

$$A^* = \left( \frac{\gamma(1-\phi)}{\lambda n} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} (s_A L)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

# 科技增速的变化

如果我们把科技增速定义为

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \gamma(s_A L)^\lambda A^{\phi-1}$$

那么我们也可计算“科技增速”的增速

$$\frac{\dot{g}_A}{g_A} = \lambda n - (1 - \phi)g_A$$

如果科技增速快于平衡增长路径上的增速 ( $g_A > \frac{\lambda n}{1-\phi}$ ), (此时增速会放缓; 反之亦然  
(为什么?))

# 平衡增长路径上的人均产出

生产函数 $Y = (AL_Y)^{1-\alpha} K^\alpha$  代入 $L_Y = (1 - s_A)L$ , 整理得到

$$\frac{Y}{L} = (1 - s_A) \left( \frac{K}{Y} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A$$

由于稳态的资本产出比为

$$\left( \frac{K}{Y} \right)^* = \frac{s_k}{n + g_A + \delta} = \frac{s_k}{n + \frac{\lambda n}{1-\phi} + \delta}$$

我们能解出（下页）：

# 平衡增长路径上的人均产出

- 平衡增长路径水平上的人均GDP ☹

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^* = (1 - s_A) \left( \frac{s_K}{n + \frac{\lambda n}{1 + \phi} + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} \left( \frac{\gamma(1 - \phi)}{\lambda n} \right)^{\frac{1}{1 - \phi}} (s_A L)^{\frac{\lambda}{1 - \phi}}$$

# 最优的人力分配

- 目前我们假设科研人员的比例 $s_A$ 为固定。
- 能否找到一个最优的人力分配方案，使得人均GDP达到最高？
  - 增加科研人员的坏处：这些人员不参与到最后品的生产环节
  - 增加科研人员的好处：可以实现更快的科技增长

# 最优人力分配

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^* = (1 - s_A) \left( \frac{s_K}{n + \frac{\lambda n}{1 + \phi} + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} \left( \frac{\gamma(1 - \phi)}{\lambda n} \right)^{\frac{1}{1 - \phi}} (s_A L)^{\frac{\lambda}{1 - \phi}}$$

- 形式:

$$Y/L = X(1 - s_A)(s_A)^Z$$

- 可以找到一个最优的人力分配水平, 使得人均GDP最高; 解出

$$s_A = \frac{\lambda}{1 - \phi + \lambda}$$

# 内生增长模型：总结

- 科技增长速度与人口增长水平有关，与研究者的边际产出有关
- 从前人身上学习的效率，也对科技增长速度有影响
- 此外，人口的在增长速度也对于科技增长速度有贡献
- Romer的模型发现，如果研究者的比例 $s_A$ 是内生决定的，其数量会小于社会最优的数量

# 研究人员不处于最优水平的原因

- 研究人员对于科技的贡献提高了人均GDP，但是科学创新也带来了两种外部性：
  - 正外部性：giants shouder effects；研究人员没有考虑到自己的研究对于未来生产效率的正向提高
  - 负外部性：由于 $\lambda < 1$ ，过多的研究人员会使得边际研究产出下降
- 研究人员的最优比例，取决于这两种外部性的大小。如果  $\frac{\lambda}{1-\phi} = 1$ ，最优的研究人员比例为50%



# 经济增长的其他来源

- 教育（人力资本）
- AI?
- 生产方式的改变
- 其他?

参考：

- Romer, P. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy* 98, 71-102
- Whelan, K. (2014). MA Macroeconomics, Lecture 12