宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/6

Money-in-Utility 模型

Money-in-Utility (MIU) Model

- 为什么要持有货币？

- 答：因为持有货币让人幸福！

~~（等于没说？~~

Sidrauski (1967) 将货币引入了新古典增长模型

模型假设

- 无限期模型，一个代理行为人，每期效用函数为$u(c_t, m_t)$， 其中消费为c_t，实际货币需求量为

$$m_t = \frac{M_t}{P_t}$$

- 生产函数为 $y_t = f(k_t)$， 资本折旧率$0 < \delta < 1$

投资

代理行为人可以选择三种投资方式：

- 持有货币M_t，下一期得到同样多的货币M_t
- 持有名义债券B_t，下一期得到$B_t(1+i_t)$的现金
- 投资实业I_t，下一期得到实际资本回报 $I_t(1+r_t)$

政府

- 这里简化政府的预算约束，政府可以通过调整货币储备的方式为社会提供财富转移：

$$M_t - M_{t-1} = P_t T_t$$

T_t 可以是正或负，这里T_t代表政府的转移支付（Transfer），不代表税收

- 如果我们假设政府发行货币的成本为0，那么这里的 $M_t - M_{t-1}$ 可以理解为铸币税（Seigniorage），即政府通过印制货币获得的实际收入。
- 实际生活中，货币存在铸造成本，铸币税 = 货币面值 - 货币铸造成本
- 在我们的假设中，政府通过补贴的方式，把铸币税获得的收入还给代理人

背景12.1 – 铸币税的形式

- Seigniorage，来自法语seigneuriage, “right of the lord (seigneur) to mint money”
- 例如：在制作金币、银币的时候可以在里面掺入其他金属，使得重量相等，而实际用到的贵金属含量大大减少；
- 美元的印刷成本：

Denomination	Printing Costs
$1 and $2	6.2 cents per note
$5	10.8 cents per note
$10	10.8 cents per note
$20	11.2 cents per note
$50	11.0 cents per note
$100	14.0 cents per note

预算约束

- 在去中心化的社会中，代理家庭的预算约束是：

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = R_t^k k_t + (1 + i_{t-1})B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t + \Pi_t$$

- 代理公司的问题是：

$$\Pi_t = \max_{k_t^d} \quad P_t f\left(k_t^d\right) - R_t^k k_t^d$$

R_t 是名义租金

预算约束- 2

- 公司最大化利润:

$$f'\left(k_t^d\right) = \frac{R_t^k}{P_t} = r_t^k$$

- 资本市场出清:

$$k_t^d = k_t$$

- 将 $\Pi_t = P_t f(k_t) - R_t^k k_t$ 放入代理人的预算约束:

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = P_t f(k_t) + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t$$

预算约束-3

3种储蓄方式：投资、持有货币、债券

- 从社会计划者的角度分析，每期的预算约束是

$$c_t + I_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_t}{P_t} = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})B_{t-1} + M_{t-1}}{P_t} + T_t$$

$$I_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta)$$

- 我们可以定义通货膨胀率π_t为

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi_t$$

- 那么可以重新将预算约束写为：

$$c_t + \boxed{k_{t+1} - (1-\delta)k_t} + m_t + b_t = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_{t-1})} + T_t$$

社会计划者的问题

$$\max_{c_t, m_t, b_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t)$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + m_t + b_t = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_{t-1})} + T_t$$

- 写出拉格朗日函数（略）
- 一阶导数:

$$\boxed{\begin{array}{ll} [c_t] & \beta^t u_c(c_t, m_t) = \lambda_t \\ [k_{t+1}] & \lambda_{t+1}[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] - \lambda_t = 0 \end{array}}$$

$$[m_t] \quad \beta^t u_m(c_t, m_t) - \lambda_t + \frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_t} = 0$$

$$\boxed{[b_t] \quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}\frac{1+i_t}{1+\pi_t} = 0}$$

消掉 λ 可以得到欧拉方程

两个欧拉方程

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$ 用于投资

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})\frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$ 用于债券

- 这个经济体内有多种储蓄手段...
- 如果不存在套利机会，那么名义债券和实际投资的的回报率应该相等...

$$f'(k_{t+1}) + (1-\delta) = 1 + r_t = \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 这个实际利率和名义利率之间的关系，叫做费雪公式（费舍尔公式，Fisher Equation），经常会写作

$$r_t = i_t - \pi_t$$

这里应用了$\ln(1+x) \approx x$ 的关系（作业附加题）

持有现金的原因

- 还有一个公式

$$u_m(c_t, m_t) + \beta \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{1+\pi_t} = u_c(c_t, m_t)$$

- 如果现金不出现在效用函数中，那么第一项为0；此时应该有

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1}{1+\pi_t}$$

通胀影响

- 但是名义债券的欧拉方程为

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 除非名义利率为0，否则这两者不可能同时联立，因为名义债券的回报率高于现金 $i_t > 0$

实际货币需求

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}$$

$$u_m(c_t, m_t) + \beta \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{1 + \pi_t} = u_c(c_t, m_t)$$

联立可得:

$$\boxed{\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1 + i_t}}$$

当名义利率升高的时候，会发生什么变化?

均衡条件

- 债券市场均衡:

$$b_t = 0$$

- 货币市场均衡:

$$m_t^d = \frac{M_t}{P_t}$$

- 产品市场均衡:

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) = y_t$$

稳态的存在

- 是否存在一个稳态（steady state），此时经济体内的资本和消费都不随时间变化？

$$k_{t+1} = k_t = k^*$$
$$c_{t+1} = c_t = c^*$$

- 为简化分析，我们假设实际货币供给$m_t = M_t/P_t = m^*$ 处在一个稳态。

稳态时的投资、消费与资本

因为投资满足下列条件

$$I_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta)$$

如果$k_{t+1} = k_t = k^*$,那么$I^* = \delta k^*$

- 产品市场均衡:

$$c^* = f(k^*) - I^* = f(k^*) - \delta k^*$$

- 欧拉公式:

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$
$$\beta(f'(k^*) + 1 - \delta) = 1$$

m_t和m_{t+1},c_t和c_{t+1}相同，则这两个相同

能够找到稳态时的资本k^*.

例子

$$u(c,m) = \ln c + \ln m$$
$$f(k) = k^{\alpha}$$
$$\Rightarrow \beta(\alpha(k^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta) = 1$$
$$k^* = \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$
$$c^* = (k^*)^{\alpha} - \delta k^*$$

长期来看，稳态消费、资本的大小不受货币、利率等因素影响（货币中立）

讨论：货币中立是否总是成立？（separable preferences, labor market, etc）

稳态时的货币需求

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1 + i_t}$$

$$\frac{c^*}{m^*} = \frac{i\,*}{1 + i\,*}$$

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} \quad \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1 + i^*}{1 + \pi^*}$$

$$m^* = c^* \frac{1 + \pi^*}{1 + \pi^* - \beta}$$

稳态时的通胀与货币增长

假设货币供给以稳定的速度 μ 增长:

$$M_{t+1} = (1+\mu)M_t$$

那么，实际货币供给处在稳态意味着

$$\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}} = \frac{M_t}{P_t}$$

$$\frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$$

$$1+\mu = 1+\pi^*$$

$$\Rightarrow \pi^* = \mu$$

稳态时的名义利率水平为

央行通过改变名义利率改变货币增长

$$1+i^* = (1+f'(k^*)-\delta)(1+\mu)$$

μ是外生的，由央行决定。而Π是无法人为决定的，在稳态条件下，政府通过μ来促进价格调整至Π和μ相等

最优通胀率？

$$m^* = c^* \frac{1+\pi^*}{1+\pi^*-\beta} = c^* \left(1 + \frac{\beta}{1+\pi^*-\beta}\right)$$

- 通货膨胀不影响稳态时的消费，只会影响稳态的实际货币量
- 最优的通胀水平应该越小越好，政府可以通过调节货币增长速度来使得通胀最小
- 因为名义利率不能小于0，最优的货币增长速度满足

$$i^* = 0$$
$$1 = (1 + f'(k^*) - \delta)(1+\mu)$$
$$\mu = \frac{1}{1 + f'(k^*) - \delta} - 1$$

或者表示为$\mu \approx -r^*$

- 设定名义利率为0的政策建议也被称为弗里德曼原则（Friedman Rule）

一些问题

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = P_t f(k_t) + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t$$

- 提问：如果把政府财政预算 $M_t - M_{t-1} = P_t \mathcal{T}_t$ 代入到这个预算约束中，岂不是现金M_t, M_{t-1}就消掉了？

- 没错！实际上，如果考虑到债券市场出清（$B_t = 0$），预算约束可以写为：

$$P_t c_t + P_t I_t = P_t f(k_t)$$

$$C + I = Y$$

计划经济中不需要货币和债券

这也是为什么实际生产环节不依赖货币的原因！（货币中性）

完整的政府预算约束

- 我们也可以假设政府的职能更加完善，例如政府可以发行债券，有税收 $\mathbb{T}_t$ 和支出G_t
- 政府完整的预算约束可以写作

$$P_t G_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t = P_t \mathbb{T}_t + M_t - M_{t-1} + B_t$$

左边：支出项，包括政府购买(实际），偿还到期的债券（名义），给代理人的补贴（实际）

右边：收入项，包括税收（实际），铸币税的收入（名义），新增发的债券（名义）

新的预算约束

如果存在政府支出，税收，那么此时行为人的预算约束为

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = R_t k_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t + \Pi_t - P_t \mathbb{T}_t$$

代入公司利润的表达式$\Pi_t = P_t f(k_t) - R_t k_t$：

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = P_t f(k_t) + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t - P_t \mathbb{T}_t$$

代入完整的政府预算约束，可以把预算约束简化为：

$$P_t G_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t = P_t \mathbb{T}_t + M_t - M_{t-1} + B_t \quad \text{[Gov. BC]}$$

$$P_t c_t + P_t I_t + P_t G_t = P_t f(k_t)$$

$$C + I + G = Y$$

Friedman Rule

$$\frac{u_m(c_t,m_t)}{u_c(c_t,m_t)} = 1 - \frac{1}{1+i_t}$$

当 i = 0 时，$u_m(c_t,m_t)=0$，在理论上意味着货币供给量此时达到了使得效用最高的水平

- 问题：是否意味着 $m=\infty$？
- 取决于我们如何设定$u(c,m)$的函数形式，比如一些论文会假设实际货币量大于某一常数 $\bar{M}$ 时，货币的边际效用降低为0。

Cash in Advance 模型

Cash in Adcance 模型 (货币先行模型)

- 最早由美国经济学家Robert W. Clower提出，此处大大简化
- 无限期模型
- 代理行为人，每期可以选择消费c_t，劳动供给l_t ,储蓄B_t ,现金M_t.
- 效用函数为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln\left(c_t\right) + \ln(1 - l_t)\right)$$

- 生产函数

$$y_t = l_t$$

CIA 模型 - 2

- 政府可以向代理行为人转移支付现金 τ_t，可以代表补贴 (+) 或税收(-):

$$M_t - M_{t-1} = \tau_t$$

- 代理行为人的预算约束

$$P_t c_t + M_t + B_t = M_{t-1} + (1 + i_{t-1})B_{t-1} + \tau_t + w_t l_t + \Pi_t$$

公司的优化问题

- 公司的优化问题:

$$\max_{l_t} \quad \Pi = P_t y_t - w_t l_t$$

$$\Rightarrow P_t = w_t, y_t = l_t$$

- 公司的劳动需求曲线是水平的；在$w_t = P_t$ 这个工资水平，雇多少人都一样（反正利润=0）
- 规模报酬不变（Constant return to scale， CRS）

持有现金的原因

$$P_t c_t + M_t + B_t = M_{t-1} + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + \tau_t + P_t y_t$$

- 同样的问题又来了：为什么要持有现金？
- 答案："Cash in advance"！

$$P_t c_t \leq M_{t-1}$$

- 需要用现金买东西！而且只能用上一期剩下的现金余额来购买。
- 这里我们只考虑等号成立的情况，即

$$P_t c_t = M_{t-1}$$

代理人的问题

$$\max_{\{c_t, l_t, B_t, M_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln(c_t) + \ln(1 - l_t)\right)$$

s.t.

$$P_t c_t = M_{t-1}$$

$$P_t c_t + M_t + B_t = M_{t-1} + (1 + i_{t-1})B_{t-1} + \tau_t + P_t y_t$$

$$y_t = l_t$$

政府

我们假设政府的货币政策是:

$$M_t = M_{t-1}(1+\mu) = M_{t-1} + \tau_t$$

市场出清

- 货币市场:

$$M_t^d = M_t^s$$

- 商品市场:

$$c_t = y_t$$

- 债券市场:

$$B_t = 0$$

解模型

$$\mathcal{L}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\ln(c_t)+\ln(1-l_t)\right)+\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\,\kappa_t(M_{t-1}-P_tc_t)+$$
$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\,\lambda_t(M_{t-1}+(1+i_{t-1})B_{t-1}+P_tl_t+\tau_t-P_tc_t-M_t-B_t)$$

- 一阶导数

$$[c_t]\qquad \beta^t\frac{1}{c_t}-\beta^t(\kappa_t+\lambda_t)P_t=0$$
$$[l_t]\qquad -\beta^t\frac{1}{1-l_t}+\beta^t\lambda_tP_t=0$$
$$[B_t]\qquad -\beta^t\lambda_t+\beta^{t+1}\lambda_{t+1}(1+i_t)=0$$
$$[M_t]\qquad -\beta^t\lambda_t+\beta^{t+1}(\kappa_{t+1}+\lambda_{t+1})=0$$

稳态分析

- 像之前一样，我们聚焦于这个经济体的一个稳态均衡，此时消费、劳动、名义利率都处在稳定水平：

$$c_t = c^*,\ \ l_t = l^*,\ \ i_t = i$$

- 稳态（steady state）是经济长期所处的一个平衡状态，分析稳态不代表经济体永远会处在稳态（例如生产函数发生冲击，各个经济指标会从稳态发生偏离）
- 证明稳态存在与否，这不在我们的考察范围。

稳态时的一阶条件

$$[c_t] \qquad \frac{1}{c^*} = (\kappa_t + \lambda_t)P_t$$

$$[l_t] \qquad \frac{1}{1 - l^*} = \lambda_t P_t$$

$$[B_t] \qquad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1 + i)$$

$$[M_t] \qquad \lambda_t = \beta(\kappa_{t+1} + \lambda_{t+1})$$

$$\frac{1}{(1 - l^*)P_t} = \frac{1}{(1 - l^*)P_{t+1}}\beta(1 + i)$$

$$\frac{1 + i}{1 + \pi_t} = \frac{1}{\beta}$$

稳态时的通胀率

- CIA 约束，意味着当消费处于稳态时，实际货币需求也处在稳态

$$P_t c^* = M_{t-1}$$

- 此时，通胀率可以表达为

$$1 + \pi_t = \frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{M_t}{M_{t-1}} = 1 + \mu$$

- 和之前一样，通胀率=货币增长速度

稳态消费

$$[c_t] \qquad \frac{1}{c^*} = (\kappa_t + \lambda_t)P_t$$

$$[l_t] \qquad \frac{1}{1 - l^*} = \lambda_t P_t$$

$$[B_t] \qquad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1 + i)$$

$$[M_t] \qquad \lambda_t = \beta(\kappa_{t+1} + \lambda_{t+1})$$

$[c_{t+1}], [l_t] \Rightarrow$

$$\frac{1}{(1 - l^*)P_t} = \beta \frac{1}{c^* P_{t+1}}$$

产品市场均衡：$c^* = y^* = l^*$

$$\Rightarrow \frac{P_{t+1}}{P_t} = \beta \frac{1 - c^*}{c^*}$$

$$1 + \mu = \beta \frac{1 - c^*}{c^*}$$

稳态消费 - 2

解出稳态消费（劳动）水平：

$$c^* = \frac{\beta}{1+\mu+\beta} = l^*$$

此处，货币增长速度（通胀率）对稳态消费会产生影响！（货币不再是超中性）

原因：通胀率对劳动供给产生了影响；

- 今天的消费由手中持有的现金限制，劳动收入只能通过储蓄，用作明天的消费
- 当通胀率升高时，明天的消费变得更加昂贵，劳动的边际回报降低
- 均衡条件下，减少劳动，使得收入减少

最优货币政策

- 是否存在一个政府的货币政策，能够使得代理行为人的效用最大化？
- 回忆代理人的效用函数：

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c) + \log(1-l)\right)$$

- 产品市场出清：$c = y = l$，效用函数变为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c) + \log(1-c)\right) = \frac{1}{1-\beta}\left(\log(c) + \log(1-c)\right)$$

最优货币政策 - 2

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c) + \log(1-c)\right) = \frac{1}{1-\beta}\left(\log(c) + \log(1-c)\right)$$

- 解出使得这一表达式最优的消费，$\hat{c} = 1/2$
- 放入稳态消费的表达式：

$$\frac{1}{2} = \frac{\beta}{1+\beta+\mu}$$

$$\hat{\mu} = \beta - 1$$

最优名义利率

回忆名义利率的表达式：

$$\frac{1+i}{1+\pi_t} = \frac{1}{\beta}$$

当$\pi = \mu = \beta - 1$时，$i =?$

Friedman rule!

弗里德曼定理

- 在这个模型里，代理人**必须**要持有一种劣等储蓄品（货币），从而实现交易的目的;
- 当名义利率为0时，货币和债券的回报率相等，代理人可以持有任意数额的货币，无需背负额外的成本（利息）；
- 从代理人的角度，持有货币的边际利益在于货币带来的“流动性”，而边际成本是放弃的利率。当边际成本为0时，代理人会持有足够多的现金，使得他能够满足所有的流动性需求，直至他持有更多货币的边际收益为0;
- 从社会的角度，这是最优的结果，因为政府增发货币的边际成本约等于0。