北京大学数学科学学院期末考试

20 19 -20 20 学年第 二 学期

考试科目： 概率统计B　　　**考试时间：** 2020 年 6 月 20 日
姓　　名:______________　　　**学　　号:**______________
本试题共 八 **道大题，满分** 100 **分**

本试卷可能用到的上分位点：

(1). 标准正态分布：$Z_{0.05} = 1.65, Z_{0.025} = 1.96$.

(2). t分布：$t_{0.05}(14) = 1.761$, $t_{0.025}(14) = 2.145$, $t_{0.05}(15) = 1.753$, $t_{0.025}(15) = 2.131$, $t_{0.05}(16) = 1.746$, $t_{0.025}(16) = 2.120$.

(3). F分布：$F_{0.025}(53, 41) = 1.813$, $F_{0.025}(54, 42) = 1.800$,$F_{0.05}(53, 41) = 1.645$, $F_{0.05}(54, 42) = 1.635$; $F_{0.025}(41, 53) = 1.773$, $F_{0.025}(42, 54) = 1.763$,$F_{0.05}(41, 53) = 1.616$, $F_{0.05}(42, 54) = 1.608$.

1. （15分） 假设一道作业题目同学得到正确解答的概率是80%. 而对于一个正确的答案， 被判为“对”的概率是90%; 对于一个错误的答案，被判为“错”的概率是95%. 试问：
   a. 一位同学这道题目被判为“对”的概率有多大？
   b. 如果一位同学被判为“错”，那么他/她被冤枉的概率有多大？

2. （10分） 将n只球放入M个盒子，假设每只球独立地放置，并且它落入每个盒子是等可能的。假设第一个盒子中有X个球，第二个盒子中有Y个球。
   a. 求X的均值，
   b. 求X与Y的协方差。 (提示: 若第i只球进入第一个盒子，则令$X_i = 1$;否则令$X_i = 0$.)

3. （10分） 假设 X 服从泊松分布, 参数为λ, 在$X = n$的条件下, Y的条件分布列为二项分布$B(n, 0.5)$.
   a. 求Y的边缘分布列,
   b. 求$P(X = n|Y = k)$, 其中$0 \le k \le n$.

4. （15分） 设随机变量X与Y独立同分布，都服从参数为λ的指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$。
   a. 求X的期望和方差;
   b. 记$W = \min(X, Y)$. 求W的密度函数;
   c. 令
   $$Z = \begin{cases} 2X + 1, \text{如果 } X \ge Y; \\ 5Y, \text{如果 } X < Y, \end{cases}$$
   求$E(Z)$。

5. （20分）设总体$X \sim U(\theta, 2\theta)$, 其中$\theta > 0$是未知参数。设$X_1, \cdots, X_n$为取自该总体的简单随机样本，求$\theta$的 矩估计和极大似然估计以及它们的均值。

6. （10分）设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本， μ和σ^2未知。试给出σ^2的置信水平为$1 - \alpha$的置信区间，并求区间长度的期望。

7. （10分）某学校概率统计课程由两位老师分别开设，甲班54人，乙班42人，现比较两班的成绩。若甲、乙班平均分分别为 83.39, 81.38, 样本方差分别为105.75,119.21. 假设甲、乙班成绩都服从正态分布。试根据数据判断，

   a. 能否认为甲、乙两班成绩的方差不同；

   b. 能否认为甲、乙两班成绩的均值不同；

8. （10分）若合金钢的碳含量x和强度y满足回归模型$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, 其中$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$相互独立。 现收集了16组数据$(x_i, y_i)$，求得$\overline{x} = 0.13$, $\overline{y} = 45.78$, $l_{xx} = 0.30$, $l_{xy} = 25.50$, $l_{yy} = 2432.45$.

   a. 建立y 关于x 的一元线性回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$;

   b. 求出x 在0.15 时对应的 y 的95%置信区间。