宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/25

Ramsey增长模型

从索洛模型出发

- 从索洛模型中，我们对于“稳态”（steady state），“过渡路径”（transition path）等概念有了一定的了解

- 索洛模型的核心假设是固定的储蓄率，这一假设并不符合现实

- 今天我们进一步扩展，在一个新古典主义的框架内，让经济行为人能够自由选择储蓄的多少，在这个框架内分析经济增长

Ramsey-Cass-Koopmans 模型

- 简称 Ramsey 模型，或者新古典增长模型（Neoclassical growth model）

- 本课为了和索洛模型加以区分，有时将Ramsey模型简称为新古典增长模型，但严格来说索洛模型也可以归类为新古典主义的增长模型范畴

- 社会计划者的版本最早由英国经济学家Frank Ramsey在1928年创立，竞争均衡的版本由美国经济学家 David Cass 和荷兰经济学家 Tjalling Koopmans 在1965年提出

模型设定-家庭

- 无限期模型，$t = 0,1,2,\ldots$
- 代理家庭的效用函数为：

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

其中 $0 < \beta < 1$

- 假设代理家庭每期的劳动供给为$N_t = 1$，初始的资本总量为K_0

模型设定-生产函数

- 生产函数满足规模效应不变（CRS），且科技水平不变， $A_t = A$

$$Y_t \ = F(K_t, N_t)$$

- 资源约束：

$$C_t + I_t = Y_t$$

- 资本的转移规律：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

有点眼熟…

- 就是一个带有劳动、资本的无限期模型

- 从社会计划者的角度看，优化问题是:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t, N_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \\
\text{s.t.} \quad & C_t + I_t = F(K_t, N_t) \\
& N_t = 1 \\
& K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t
\end{aligned}
$$

简化优化问题

- 代入$N_t = 1$

$$\max_{\{C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t = F(K_t, 1)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

- 简化预算约束，定义$f(K_t) = F(K_t, 1)$

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

解优化问题（顺便复习

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

- 无限期模型，每期有一个预算约束，因此每期需要一个拉格朗日系数
- 拉格朗日系数可以乘 β^t，相当于把第t期预算约束放松带来的效用折到第0期；也可以不乘，此时拉格朗日系数的含义不同，不影响结果

拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \left(f(K_t) - C_t - K_{t+1} + (1-\delta)K_t\right)$$

- 一阶导数:

$$\begin{aligned}
[C_t]: &\quad \beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0 \\
[K_{t+1}]: &\quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta)) = 0 \\
[\lambda_t]: &\quad f(K_t) - C_t - K_{t+1} + (1-\delta)K_t = 0
\end{aligned}$$

- 最后是否对拉格朗日系数求导都无所谓，因为最后一个一阶导数就是预算约束。
- 另外，社会计划者决定的变量是K_{t+1}，因为第0期 K_0给定, 社会计划者选择 K_1; 第1期选择K_2; 依次类推。

解出模型

- 前两个一阶导数联立，找到我们的“老朋友”——欧拉方程

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

- 如何解释欧拉方程?

- 另外一个公式：资源约束

$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

稳态分析

- 问题：这个经济体是否存在稳态？

- 如果有的话，稳态存在于二维空间(C^*, K^*)。与索洛模型不同，储蓄率不再固定，资本水平变化可能导致消费-储蓄权衡之间的变化

- 我们假设一些具体的函数形式，做进一步分析

$$
\begin{aligned}
u(C_t) &= \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
F(K_t, N_t) &= AK_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \Rightarrow f(K_t) = AK_t^{\alpha}
\end{aligned}
$$

稳态分析

- 不论是否在稳态，经济体都满足欧拉方程和资源约束

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

- 稳态时，这两个方程可以写作：

$$\begin{aligned} u'(C^*) &= \beta u'(C^*)(f_k(K^*) + 1 - \delta) \\ C^* + (K^* - (1-\delta)K^*) &= f(K^*) \end{aligned}$$

解出稳态

代入函数形式

$$
\begin{aligned}
(C^*)^{-\gamma} &= \beta (C^*)^{-\gamma}(\alpha A (K^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\
C^* + (K^* - (1-\delta)K^*) &= A(K^*)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

从第一个方程，我们可以解出稳态的资本水平

$$
K^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

代入第二个方程，找到稳态消费

$$
C^* = A(K^*)^{\alpha} - \delta K^*
$$

提问：为何此时依然满足 $I^* = \delta K^*$?

图像分析

- 上次我们画出K_{t+1}和 K_t 的关系，从而找到了索洛模型中的稳态
- 这次我们画出K_t 和 C_t 的关系，把K_t 放在横轴， C_t 放在纵轴。我们先找到这个稳态，再分析它是否满足局部稳定性（local stability）
- 这幅图也叫做 Phase diagram（相图，相态图），描述了两种变量的变化关系

Phase diagram - Overview

- 我们在图上画出两条线:
  - 第一条：所有满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合
  - 第二条：所有满足$K_{t+1} = K_t$的点(K_t, C_t)的组合

Phase Diagram – Step 1

- 所有满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合

欧拉方程描述了跨期的消费之间的关系：

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

满足$C_{t+1} = C_t$的点是：

$$1 = \beta(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

这条线的形状？

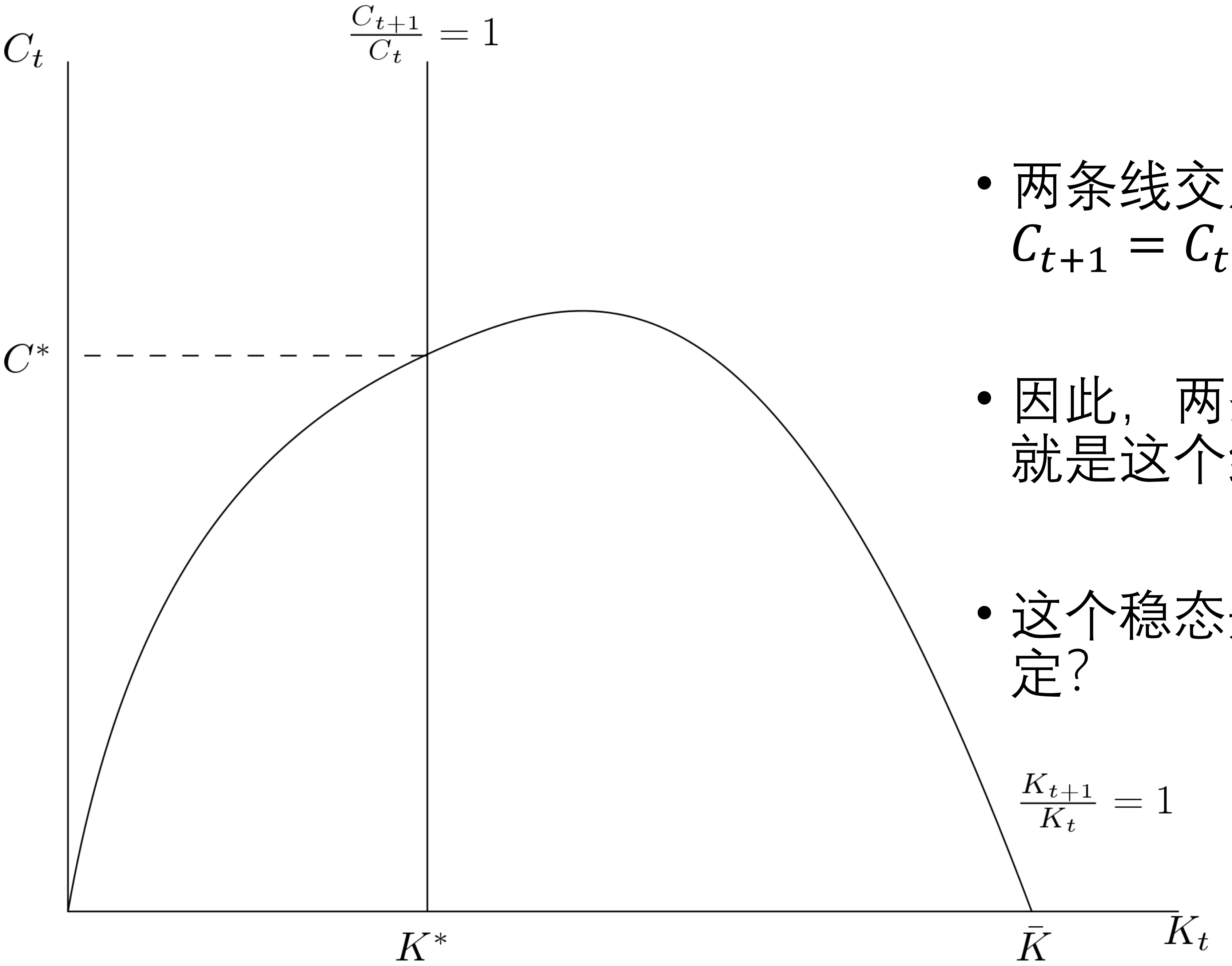
Phase Diagram – Step 2

- 满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合是一条直线， $K_t = K^*$
- 再找出：所有满足$K_{t+1} = K_t$的点(K_t, C_t)的组合
- 资源约束：

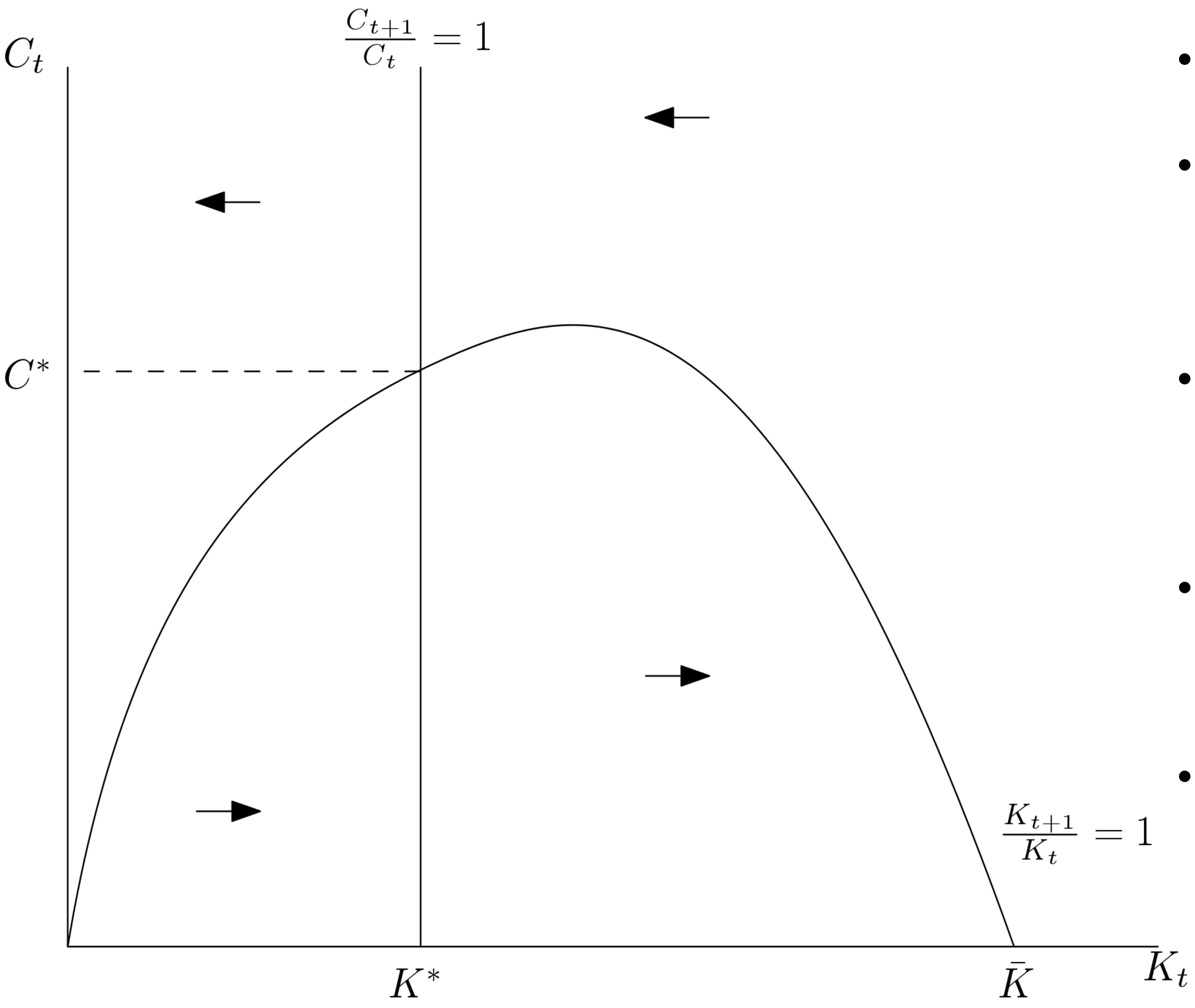
$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = AK_t^{\alpha}$$

- 当$K_{t+1} = K_t = K$时，意味着$C_t = AK^{\alpha} - \delta K$
- 这是一条拱形的弧线，通过(0,0)以及横轴上$\overline{K}$点， $\overline{K}$满足

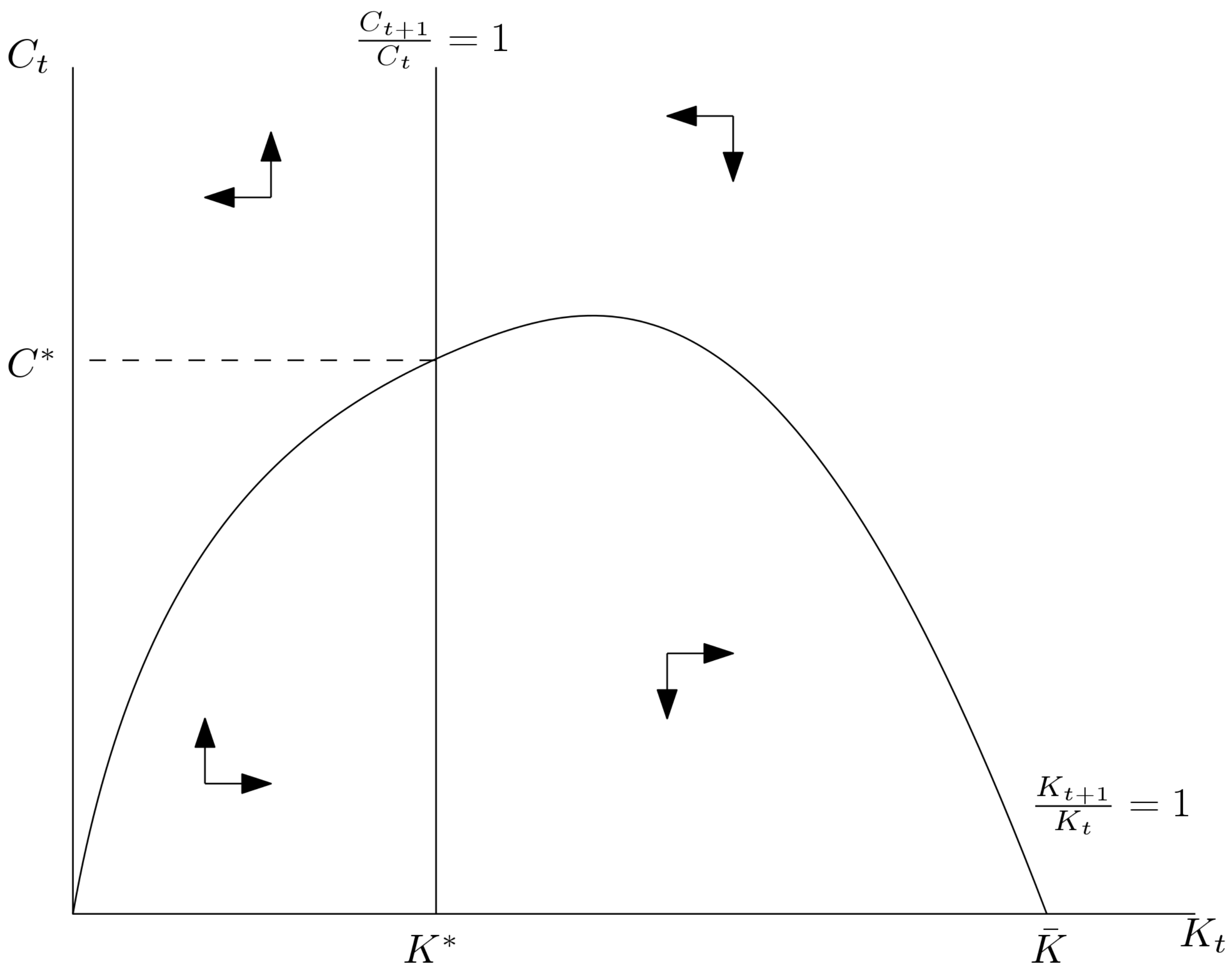
$$A\overline{K}^{\alpha} - \delta\overline{K} = 0$$



- 两条线交点处，同时满足 $C_{t+1} = C_t$ 和 $K_{t+1} = K_t$
- 因此，两条线的交点(K^*, C^*)就是这个经济体的一个稳态
- 这个稳态是否满足局部性稳定？

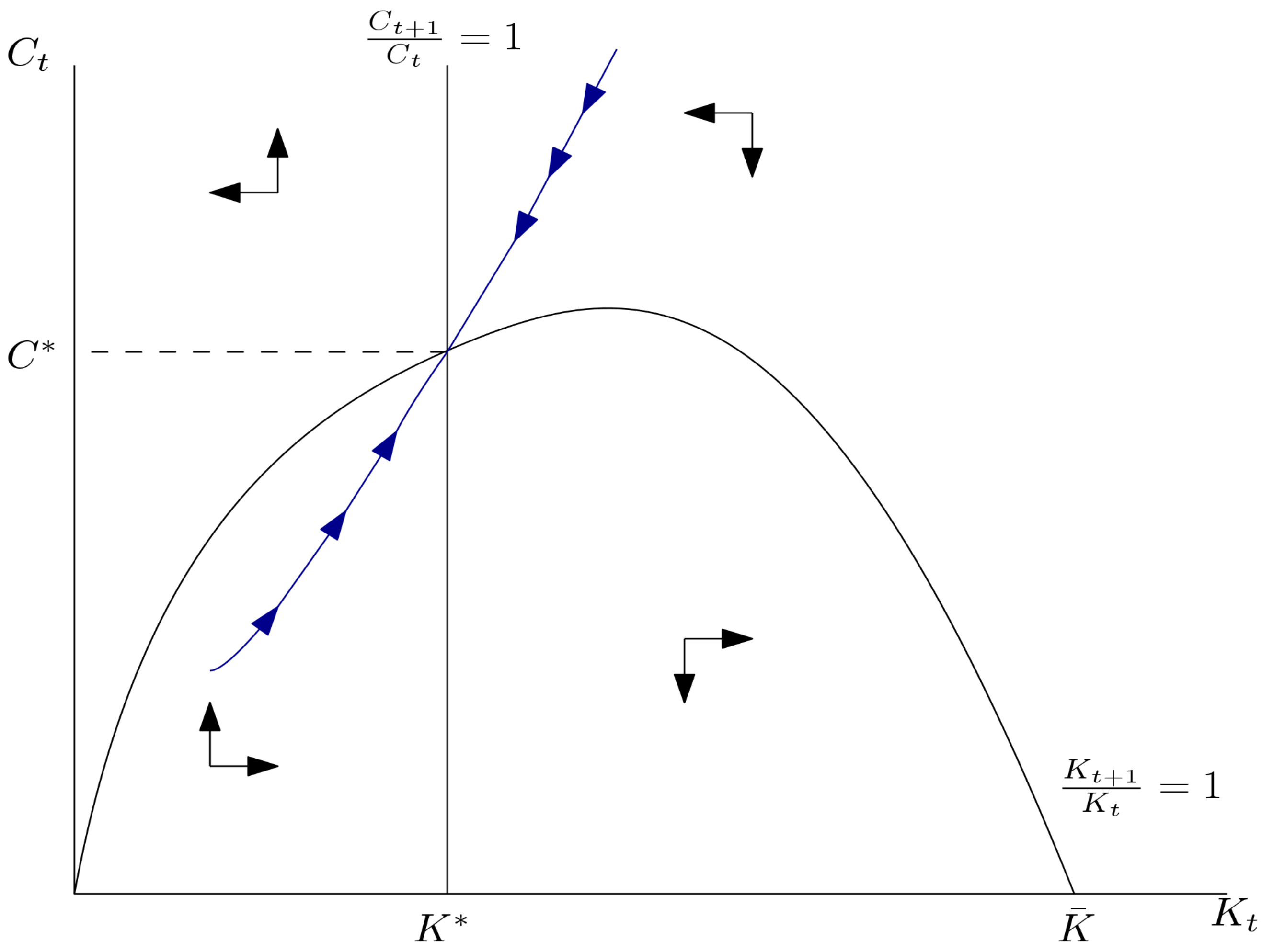


- 这两条线将第一象限划分为四个部分
- 我们可以讨论经济体从各个部分出发，是否会收敛到稳态水平
- 如果经济体起始点在弧线$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$之下，资本会发生怎样的变化？
- 此时：消费少于能够使得资本不变的水平，意味着投资过多，下一期资本增加
- 弧线之上相反，消费过多，资本减少



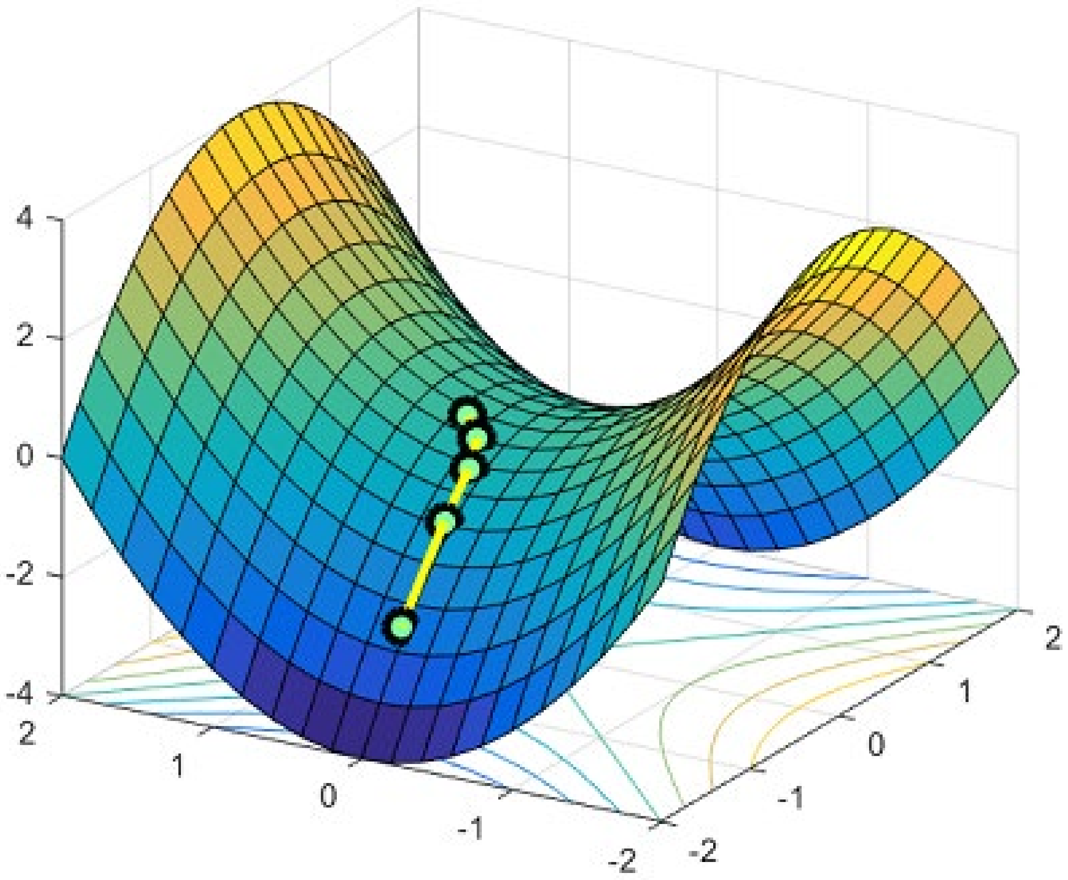
- 如果选择资本K_{t+1}在直线$\dfrac{C_{t+1}}{C_t}=1$右边会如何?
- 此时：投资高于使得消费保持不变的水平，意味着消费将会下降
- 之所以分析K_{t+1}，是因为K_t是状态变量，非t期能够决定

马鞍路径（Saddle path）



- 这里我们发现，只有相图的两个区域可能存在收敛
- 边界时的情况？
- 在这个系统中，仅能通过一条唯一的路径(K_t, C_t)趋近稳态，这条路径也被称为马鞍路径（saddle path）

马鞍路径



- 系统仅仅在特定的方向存在稳定性，局部稳定性不成立
- 小碗 vs 马鞍

马鞍路径的唯一性

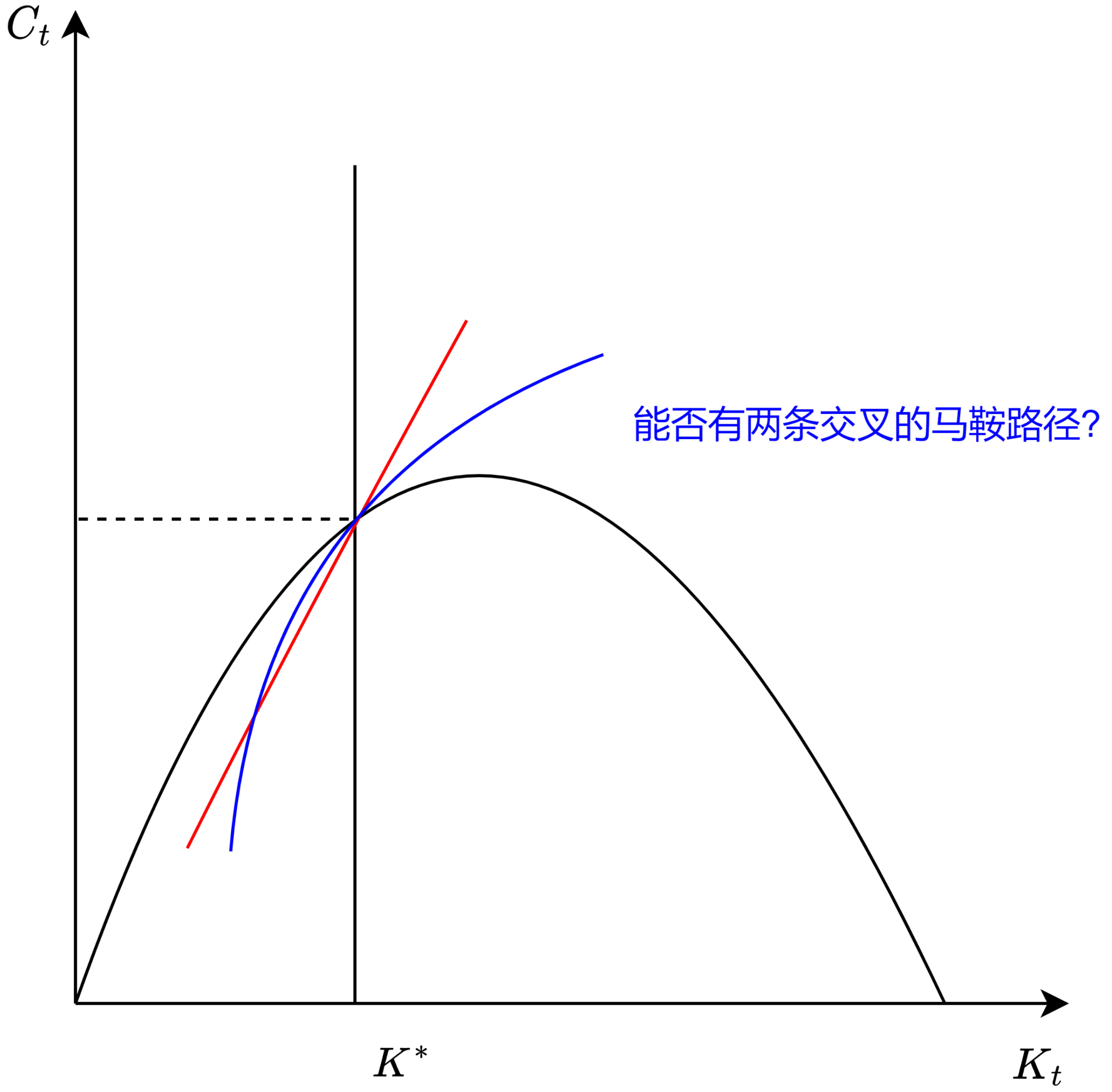
在交点处，给定C_t, K_t，资源约束决定了投资I_t以及下期资本K_{t+1}的大小：

$$K_{t+1} = f(K_t) + (1-\delta)K_t - C_t$$

给定C_t, K_{t+1}，欧拉方程唯一决定了下期消费C_{t+1}的大小：

$$u'(C_{t+1}) = \frac{\beta\left(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta)\right)}{u'(C_t)}$$

因此，通过同一点(K_t, C_t)的路径有且只有一条。



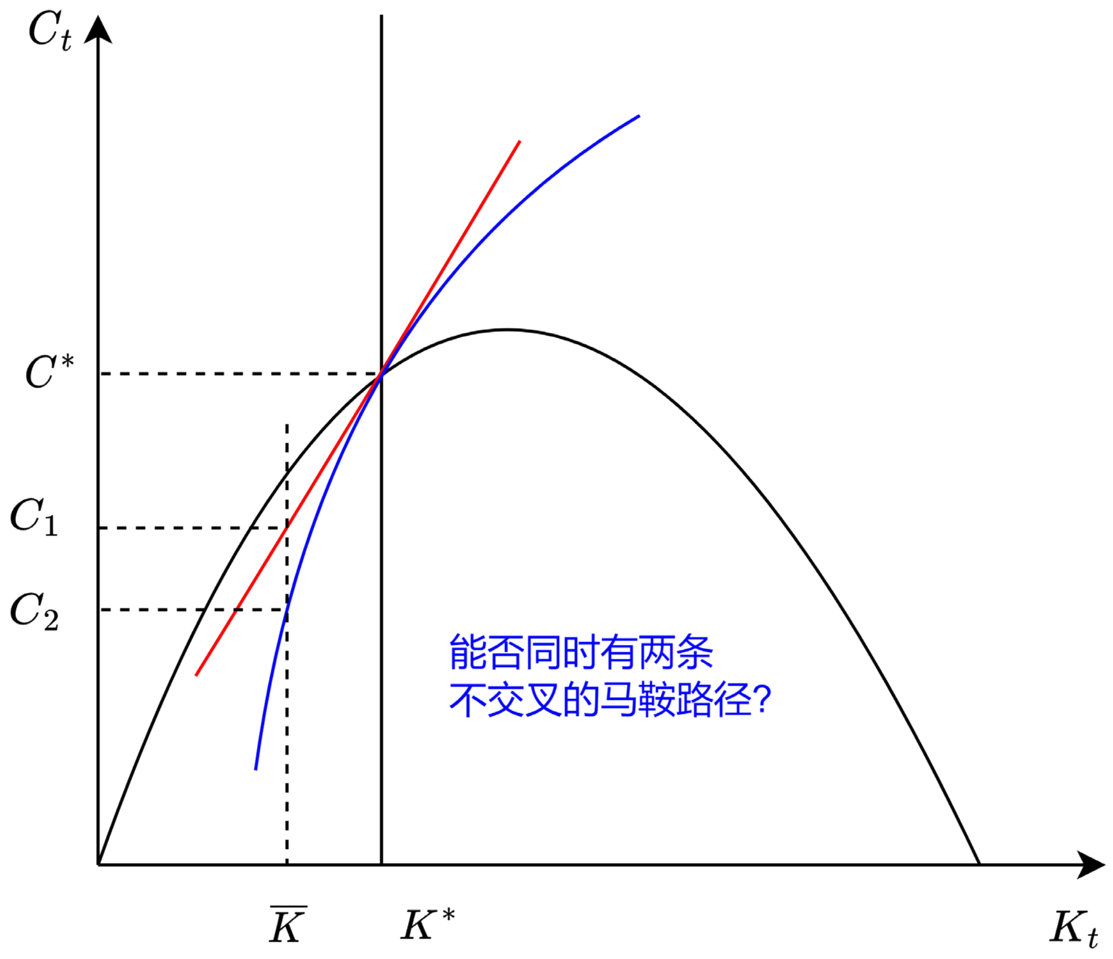
马鞍路径的唯一性-2

假设存在两条不交叉的马鞍路径，使得在同一资本水平$K_t = \overline{K}$下，存在两个消费水平C_1, C_2 分别处在两条马鞍路径上。此时根据资源约束

$$K_{t+1} - K_t = K_{t+1} - \overline{K}$$

$$= f(\overline{K}) + (1-\delta)\overline{K} - C_t$$

C_2点对应的下期资本$K_{2,t+1}$大于C_1点对应的下期资本$K_{1,t+1}$



马鞍路径的唯一性-3

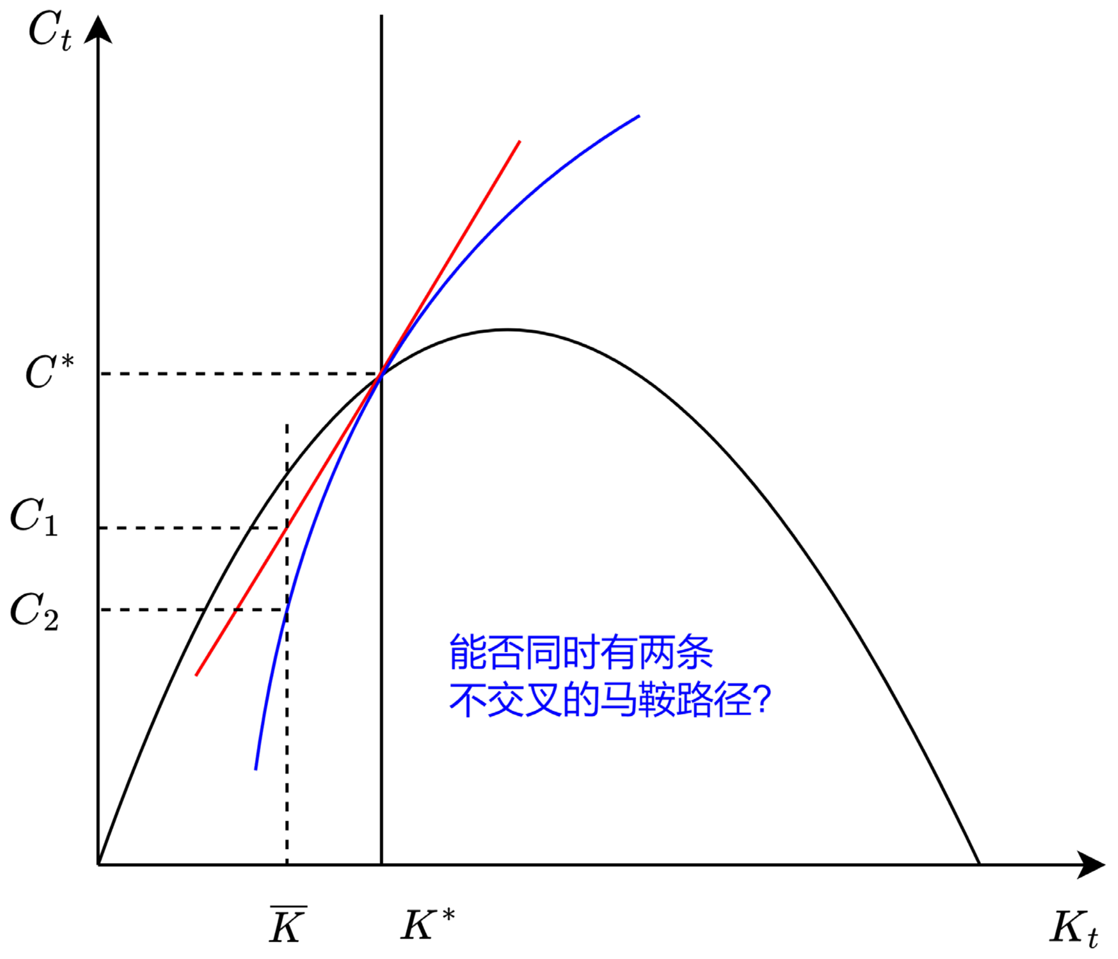
根据欧拉方程,

$$\frac{u'(C_t)}{u'(C_{t+1})} = \beta(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

K_{t+1}越大，$f_k(K_{t+1})$越小，$\frac{C_{t+1}}{C_t}$ 越小。

因此，C_2点对应的消费增速$\frac{C_{2,t+1}}{C_{2,t}}$小于$C_1$

点对应的消费增速$\frac{C_{1,t+1}}{C_{1,t}}$

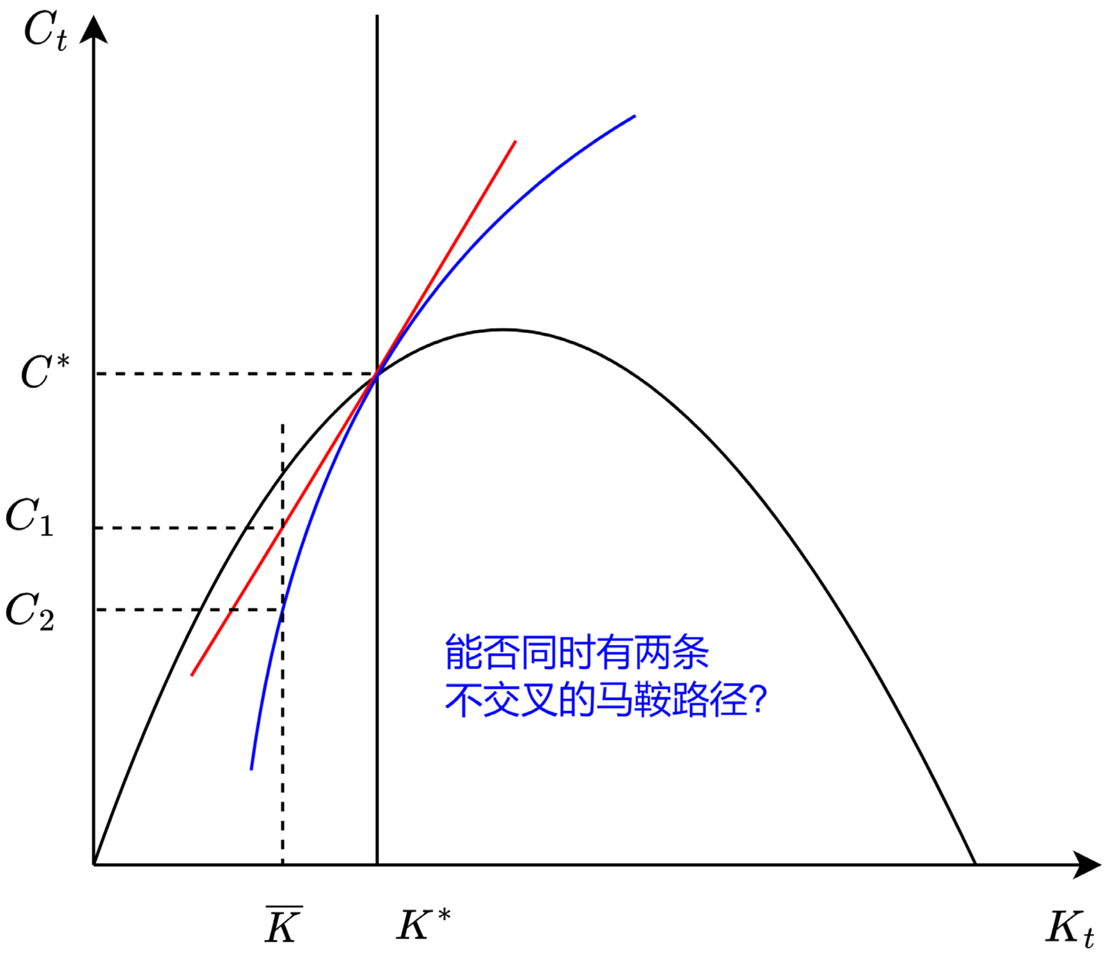


马鞍路径的唯一性-4

总结:

- C_2点的投资增速大于C_1点的投资增速
- C_2点的消费增速小于C_1点的消费增速

根据以上观察，如果C_1, C_2同时存在马鞍路径，通过C_2点的马鞍路径的斜率应当小于通过C_1点的马鞍路径斜率。而这两条路径不可能收敛于同一点。



相图（Phase Diagram）的含义

- 在已知(K_t, C_t)的情况下，告诉我们(K_{t+1}, C_{t+1}) 的位置
- 一阶差分方程（First-order difference equation）
- 假设$u(c) = \ln c$

$$K_{t+1} = AK_t^{\alpha} + K_t(1-\delta) - C_t$$

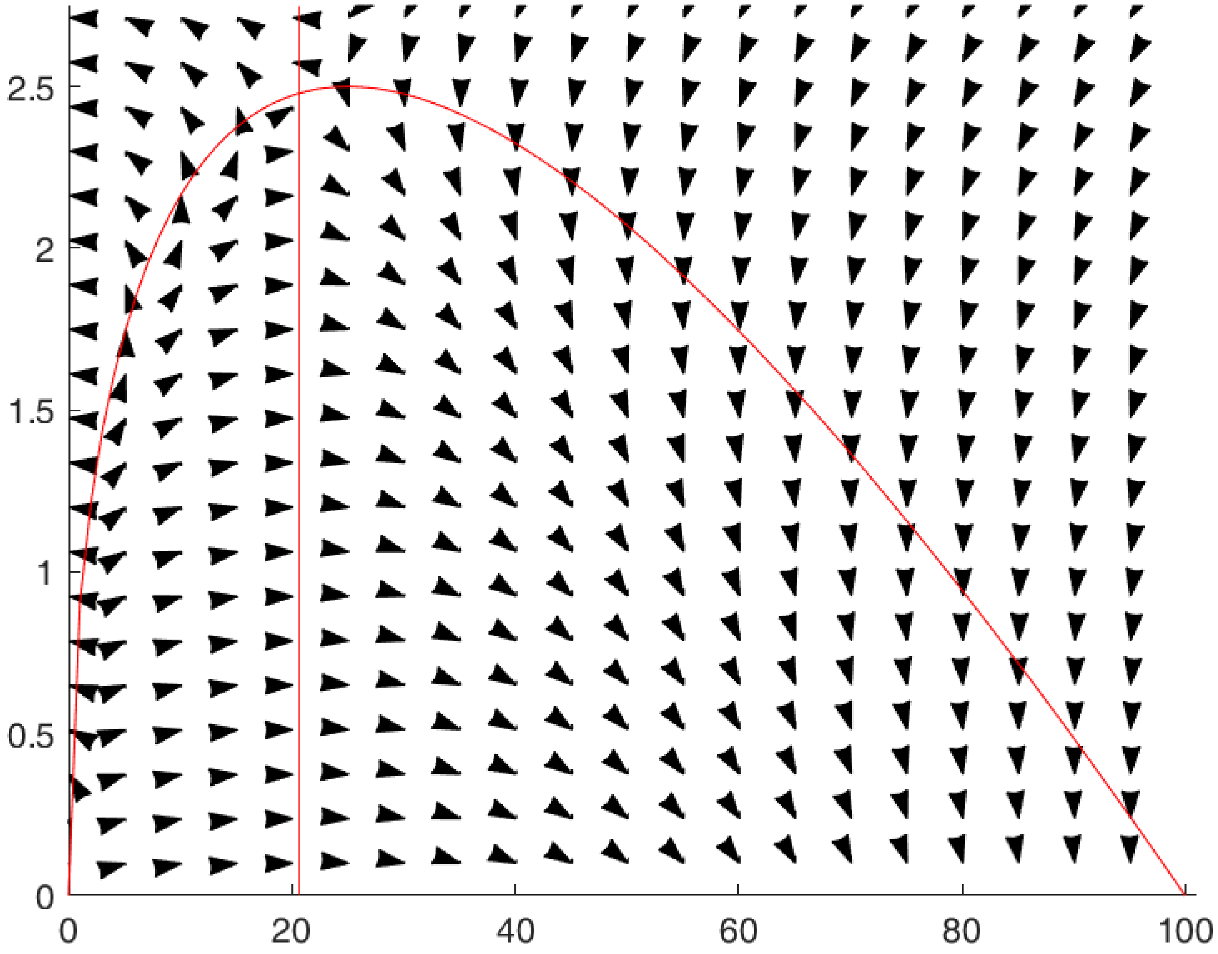
$$C_{t+1} = \beta(\alpha AK_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta)C_t$$

- 第二个方程右边是K_{t+1}，这就使得分析有一些难度；我们可以做如下的近似：

$$C_{t+1} = \beta(\alpha AK_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)C_t$$

- 这样右边只有(K_t, C_t)，因此无论在图上哪个位置出发，我们都能知道(K_{t+1}, C_{t+1}) 应该落在何处

相图的箭头方向

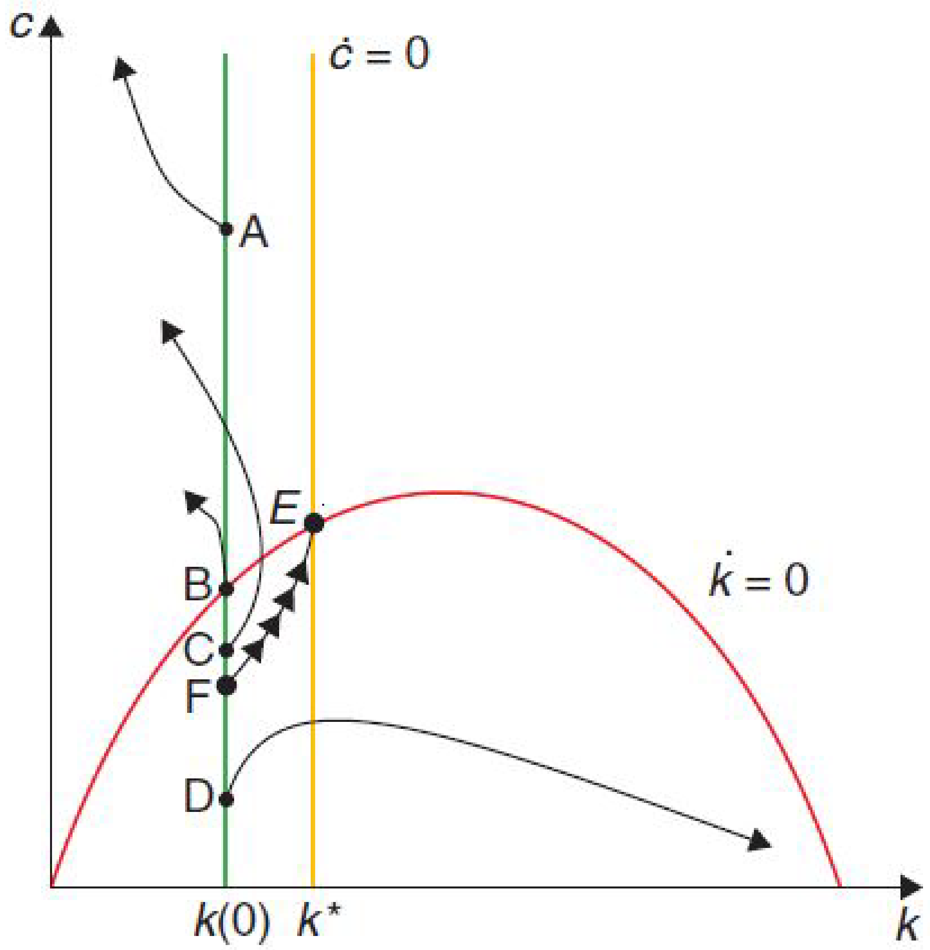


$$K_{t+1} = AK_t^{\alpha} + K_t(1-\delta) - C_t$$
$$C_{t+1} = \beta(\alpha AK_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)C_t$$

我们可以计算在任一点上，资本、消费变化的百分比：

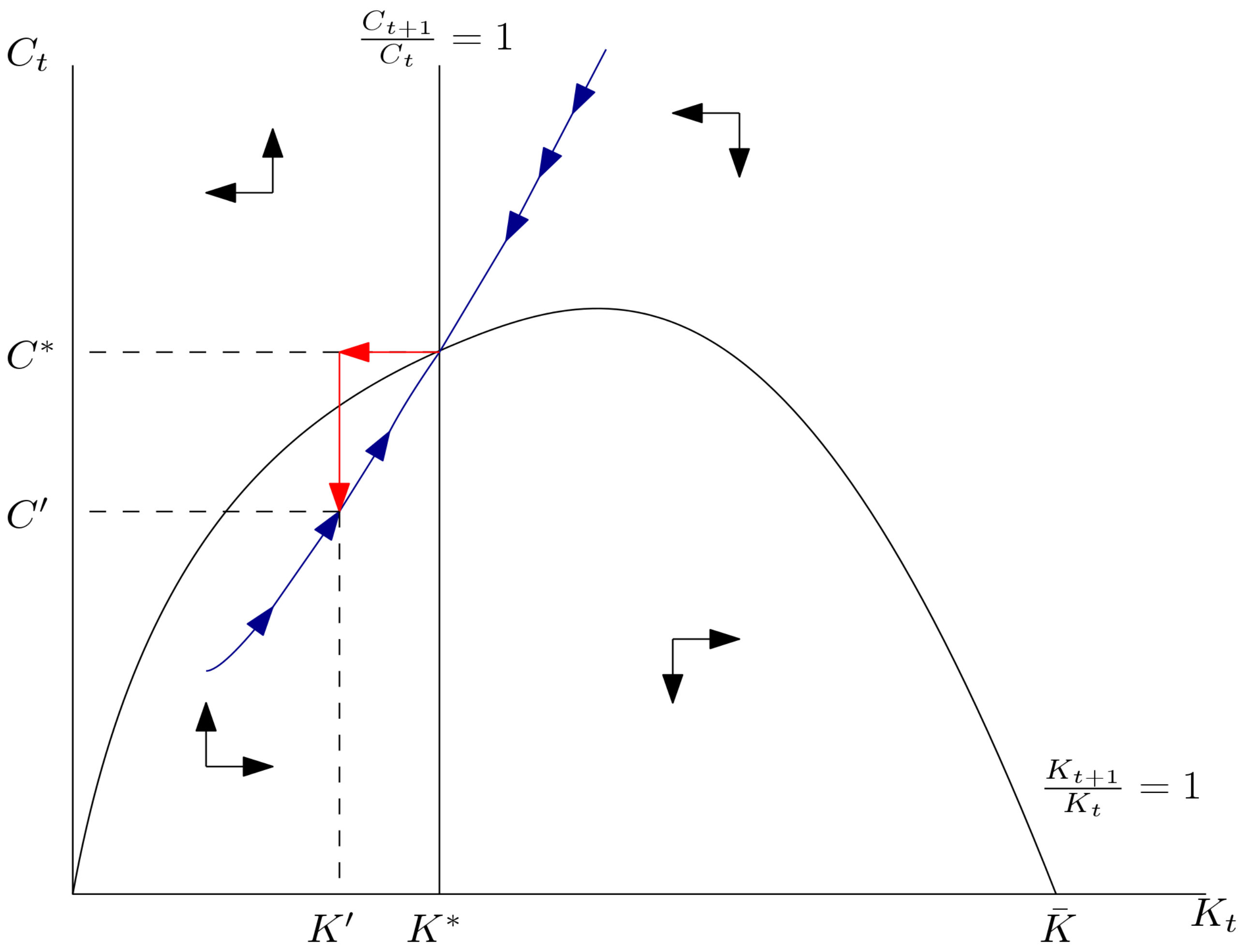
$$\frac{K_{t+1}}{K_t} - 1 = \frac{AK_t^{\alpha} - C_t}{K_t} - \delta$$
$$\frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 = \beta(\alpha AK_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) - 1$$

Saddle Path （马鞍路径）

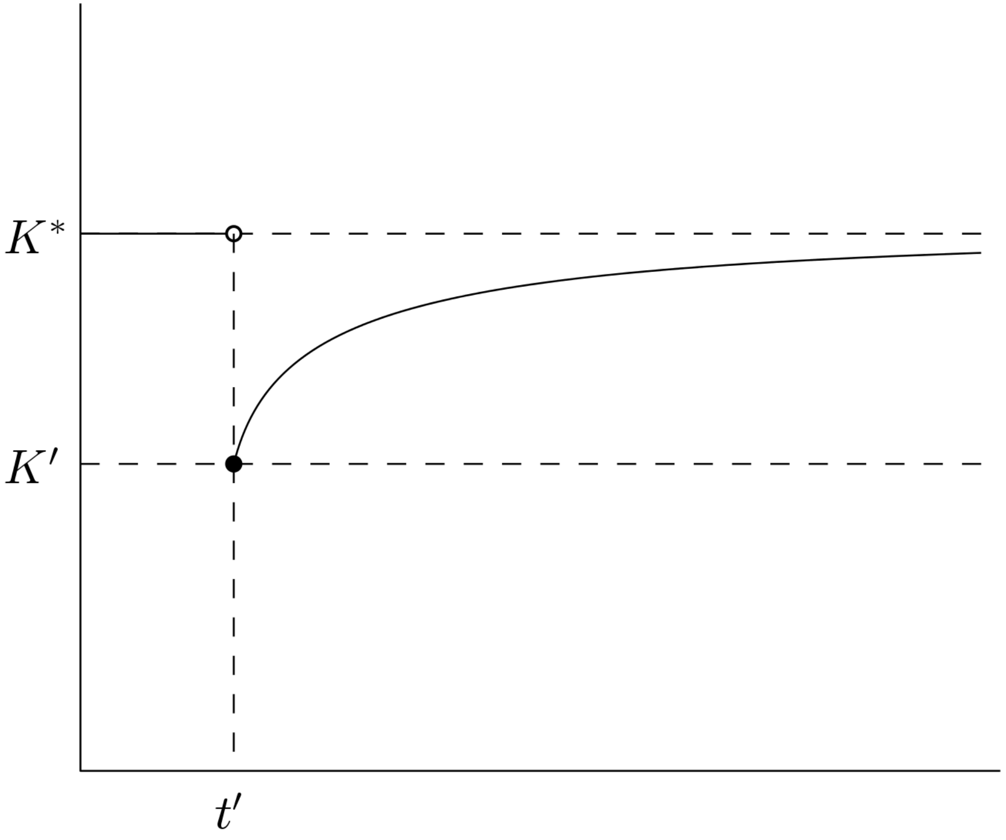


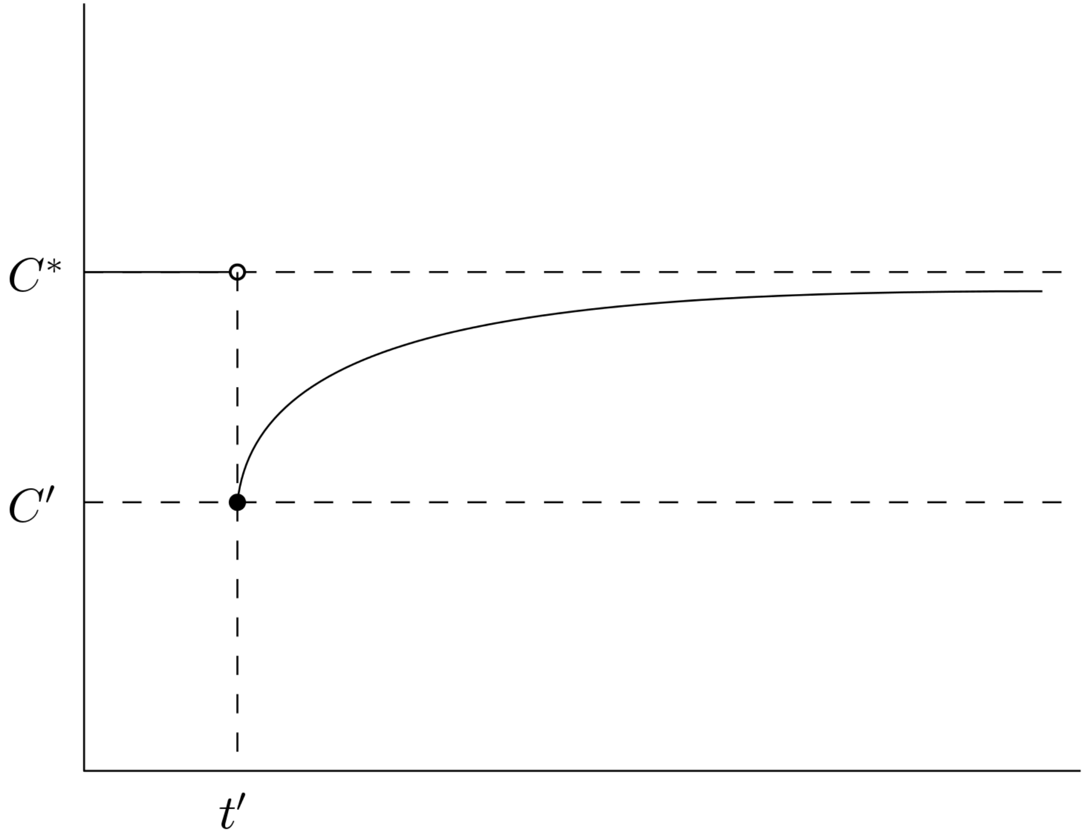
- 给定任何一个起始资本量K_0，如何决定第一期的消费C_0？
- 马鞍路径：唯一存在一个C_0, 使得整个系统能收敛至稳态(K^*, C^*)
- 同时满足欧拉方程，资源约束和横截性条件（Transversality Condition，还没说到）

例子1：对资本的外生冲击

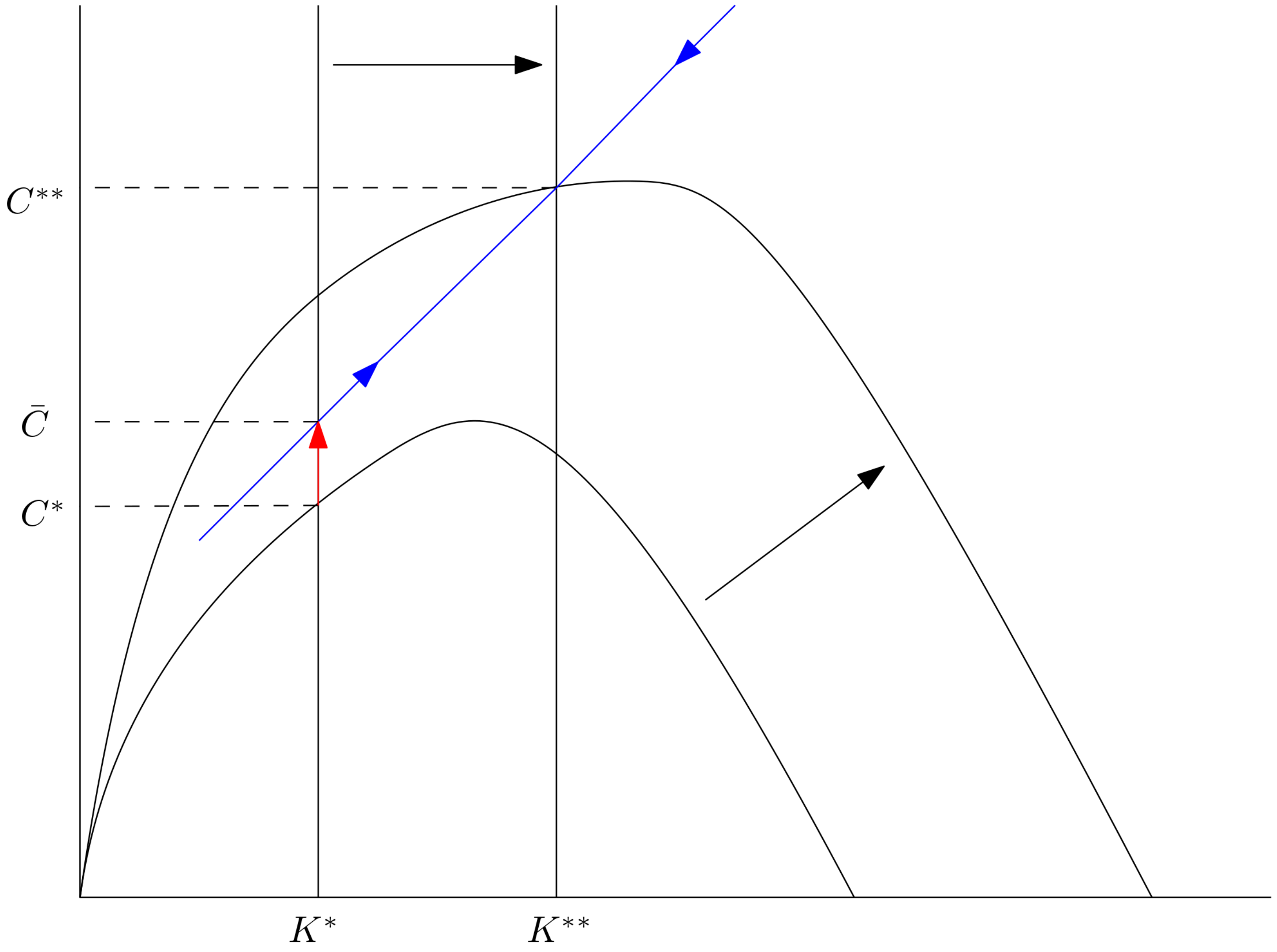


例子1：对资本的外生冲击





例子2：科技增长



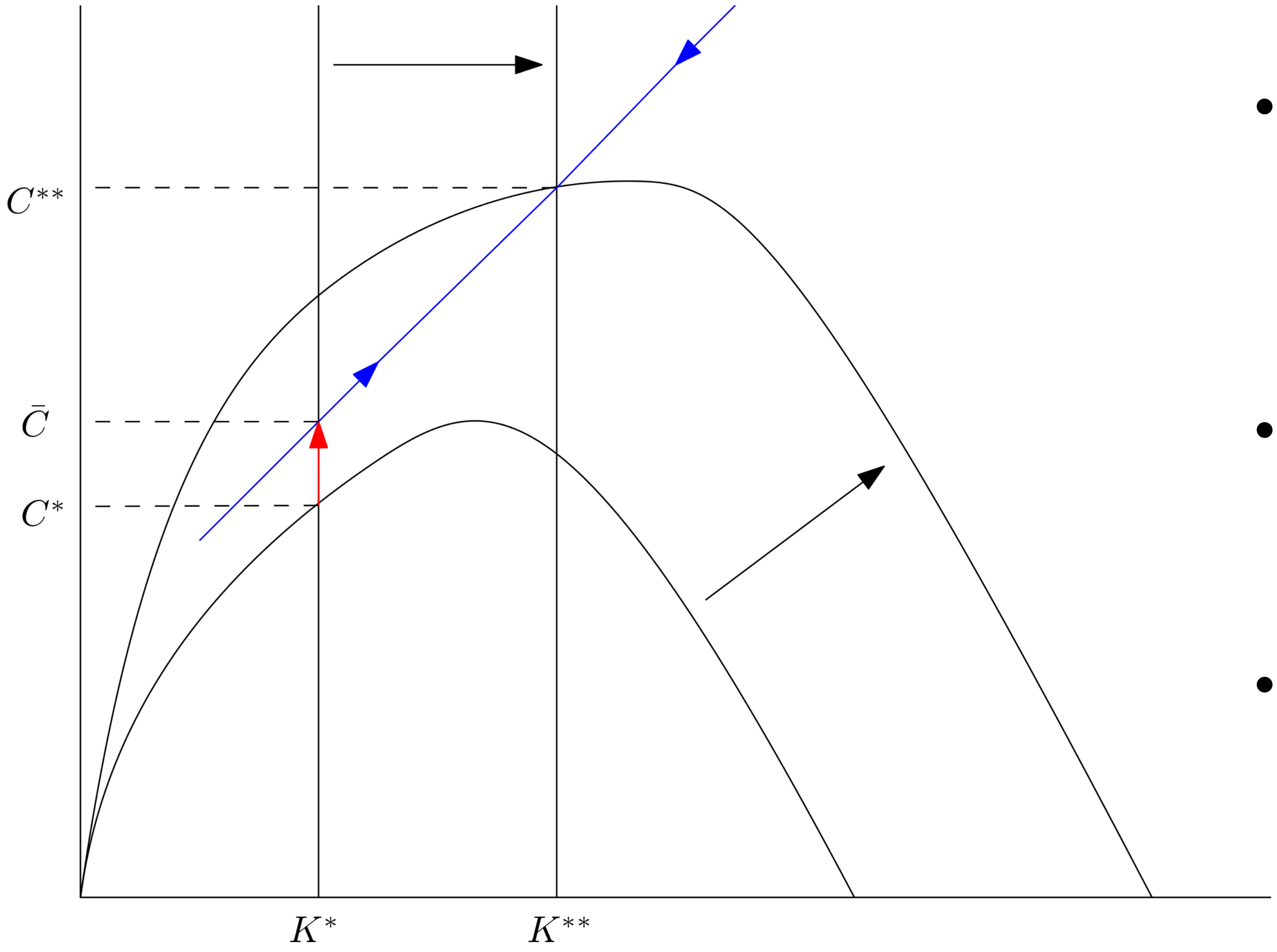
例子2：科技增长

- 假设科技水平在$\bar{t}$期增长到$\bar{A} > A$
- 稳态资本水平随A增长

$$K^* = \left(\frac{\alpha A\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

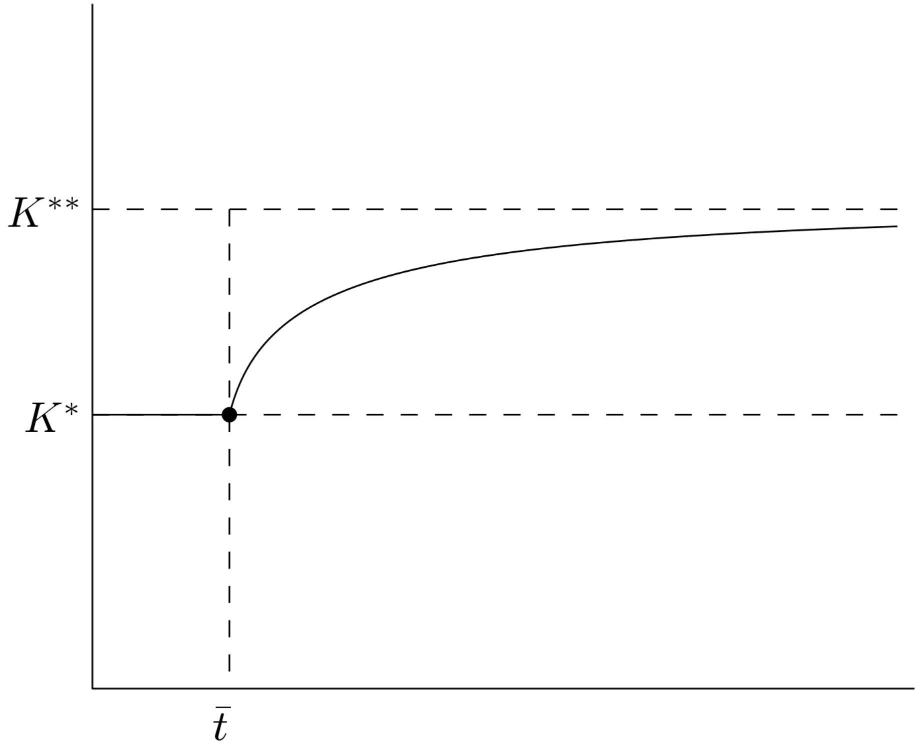
- 曲线$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$的高度上升，因为对于任何资本量K，该曲线的高度（消费水平）$C = AK^\alpha - \delta K$ 随A 上升
- A 增长时，曲线$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$的横截距变大

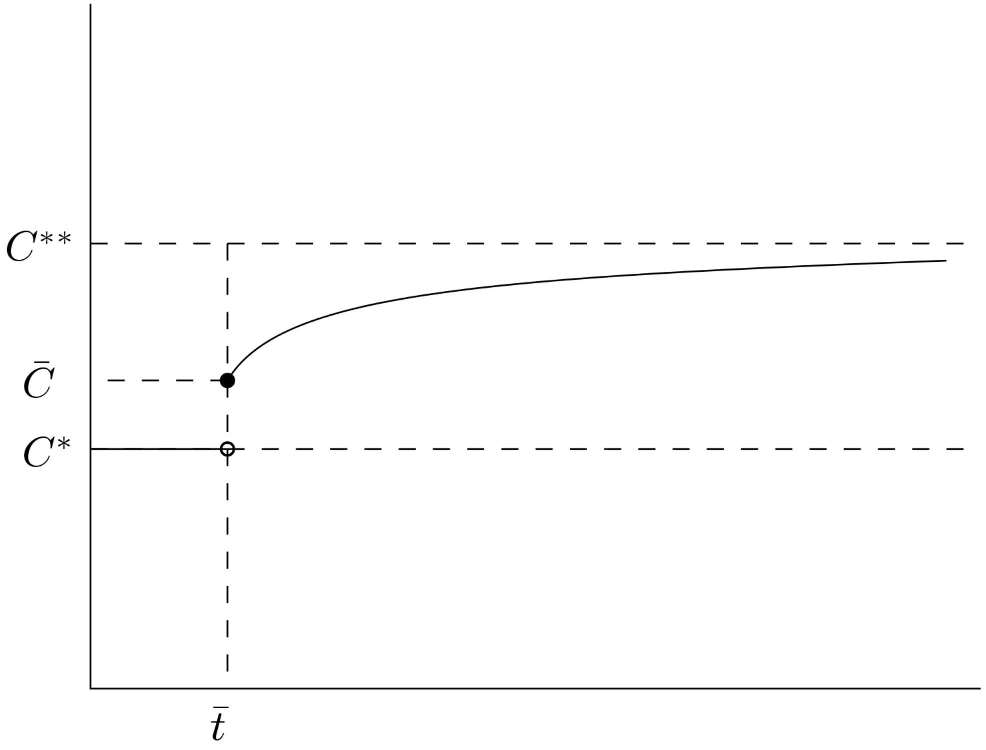
例子2：科技增长



- 新的马鞍路径不一定在原来的稳态C^{*}上方，此处只是作为一个示例；
- 资本、消费的过渡路径见下页
- 提问：如果新的马鞍路径在之前的稳态下方，会对过渡路径产生什么变化？

例子2：科技增长





竞争均衡版本的新古典增长模型

- 简单描述一下竞争均衡版本的新古典增长模型
- 一个有限期模型（T期之后结束），加入了一个不等式约束，为了帮助大家理解横截性条件
- 与有限期的社会计划者版本等价

模型假设

- 有限期模型， $t = 0,1,\ldots,T$
- 代表家庭：

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

- 每期劳动力供给为1，初始资本量K_0
- 代表公司的生产函数：$F(K,N,A)$，规模报酬不变（CRS）
- 代表公司由家庭拥有，利润Π_t 分配给家庭

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s 来满足以下优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{C_t, K_{t+1}, N_t^s} \quad & \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) \\
\text{s.t.} \quad & C_t + I_t \leq w_t N_t^s + r_t K_t + \Pi_t \\
& N_t^s = 1 \\
& K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \\
& K_{t+1} \geq 0 \\
& K_0 \text{ given}
\end{aligned}
$$

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值 $\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s来满足以下优化问题：
2. 给定r_t, w_t，代理公司选择K_t^d, N_t^d来最大化利润：

$$\max_{K_t^d, N_t^d} F(K_t^d, N_t^d, A_t) - w_t N_t^d - r_t^k K_t^d$$

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s来满足以下优化问题：
2. 给定r_t, w_t，代理公司选择K_t^d, N_t^d来最大化利润：
3. 所有市场出清：

$$
\begin{aligned}
C_t + I_t &= F(K_t, N_t, A_t) \\
N_t^s &= N_t^d \\
K_t^s &= K_t^d
\end{aligned}
$$

公司的优化问题

- 公司只需最大化每期的利润，无需考虑跨期问题

$$\max_{K_t, N_t} \; F(K_t, N_t, A_t) - w_t N_t - r_t^k K_t$$

- 一阶导数

$$[K_t]: \quad F_K(K_t, N_t, A_t) = r_t^k$$
$$[N_t]: \quad F_N(K_t, N_t, A_t) = w_t$$

- 生产函数规模报酬不变，具有如下性质：

$$F(K_t, N_t, A_t) \quad = F_K(K_t, N_t, A_t)K_t + F_N(K_t, N_t, A_t)N_t$$
$$F(K_t, N_t, A_t) \quad = r_t^k K_t + w_t N_t$$

- 因此，公司利润每期均为$\Pi_t = 0$

家庭的优化问题

- 和之前一样，劳动供给=1
- 可以简化家庭预算约束为：

$$C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

- 家庭的优化问题简化为：

$$\max_{C_t, K_{t+1}} \quad \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

$$K_{t+1} \geq 0$$

- 注意：此时我们没有要求$I_t \geq 0$；最后几期时，家庭可以将资本品用作消费

解出家庭问题

- 这里有一个不等式的约束条件， $K_{t+1} \geq 0$;
- 最后一期，代表家庭或许不愿在下期持有任何资本;
- 我们把这个额外的约束条件放入拉格朗日函数当中:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} & \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) \\
& + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left((1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t - C_t - K_{t+1}\right) \\
& + \sum_{t=0}^{T} \mu_t K_{t+1}
\end{aligned}
$$

家庭问题：一阶导数

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$
$$+ \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left((1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t - C_t - K_{t+1}\right)$$
$$+ \sum_{t=0}^{T} \mu_t K_{t+1}$$

$$[C_t]: \quad \beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0$$
$$[K_{t+1}]: \quad -\lambda_t + \mu_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}^k - \delta) = 0, \quad \text{if } 0 \le t \le T - 1$$
$$[K_{T+1}]: \quad -\lambda_T + \mu_T = 0$$
$$[\lambda_t]: \quad C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

库恩-塔克条件（Kuhn-Tucker Conditions）

- 带有不等式约束的优化问题，除了一阶导数，我们还需要一个额外的条件：

$$
\begin{aligned}
\mu_t K_{t+1} &= 0 \\
K_{t+1} &\geq 0 \\
\mu_t &\geq 0
\end{aligned}
$$

- 如果不等式约束是“刚性”的（等号成立），此时放松该约束条件，会增加效用，拉格朗日系数为正，拉格朗日系数与等式约束条件的乘积为0；
- 如果不等式约束是“软性”的（不等号成立），此时放松该约束条件，不会增加任何效用，拉格朗日系数为0，拉格朗日系数与不等式约束的乘积依然为0。

最后一期

- 在最后一期，因为

$$\mu_T = \lambda_T = \beta^T u'(C_T) > 0$$

- Kuhn Tucker Condition：

$$\mu_T K_{T+1} = 0 \Rightarrow K_{T+1} = 0$$

- 在无限期模型中，这个条件变成：

$$\lim_{\{t \to \infty\}} \beta^t \, u'(C_t) \, K_{t+1} = 0$$

这就是我们没有说到的横截性条件（transversality condition）；马鞍路径是同时满足欧拉方程，资源约束与横截性条件的路径。

最后一期之前

- 我们知道初始资本量$K_0 > 0$，那么$\mu_0 = 0$

- 在$t < T$期，代入$\lambda_t = \beta^t u'(C_t)$，$\mu_t = 0$, 可以得到欧拉方程:

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})\left(1 + r_{t+1}^k - \delta\right)$$

- 公司最大化利润意味着:

$$\begin{aligned} F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) &= r_{t+1}^k \\ w_t + R_t K_t &= F(K_t, 1, A_t) \end{aligned}$$

整理结果

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) + 1 - \delta)$$
$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F(K_t, 1, A_t)$$

- 这两个条件（欧拉方程，资源约束）和之前社会计划者的版本相同

- 此外，我们多了一个约束条件， $K_{\mathrm{T}+1} = 0$，这就可以帮助我们找出满足这一条件的最优路径$\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{T}$

参考

- QuantEcon， [Cass-Koopmans Model]

带有人口、科技增长的Ramsey 模型

$$
\begin{aligned}
N_t &= N_0(1+g_N)^t \\
A_t &= A_0(1+g_A)^t
\end{aligned}
$$

- 和之前一样，我们假设技术进步为劳动加强型

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

假设效用函数为 $u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

社会计划者问题：平衡增长路径

$$\max_{\{C_t,K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned}
C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t &= K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha} \\
N_{t+1} &= (1+g_N)N_t \\
A_{t+1} &= (1+g_A)A_t \\
K_0, N_0, A_0 &\quad \text{given}
\end{aligned}$$

- 欧拉方程、资源约束变为

$$C_t^{-\gamma} = \beta C_{t+1}^{-\gamma}\left(\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}(A_{t+1}N_{t+1})^{1-\alpha} + 1 - \delta\right)$$

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

解出稳态变量

- 由于A_t，N_t 在增长，我们像之前一样，把所有变量除以有效劳动（normalize by effective labor）

- 新的资源约束

$$c_t + k_{t+1}(1+g_A)(1+g_N) - (1-\delta)k_t = k_t^{\alpha}$$

- 把欧拉方程写作：

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\gamma} = \beta\left(\alpha\left(\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right)$$

解出稳态变量

- 新的欧拉方程为：

$$\left(\frac{c_{t+1}(1+g_A)(1+g_N)}{c_t}\right)^{\gamma} = \beta(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

- 那么，和之前类似，我们可以解出k^* 和 c^* 的稳态水平：

$$\begin{aligned} k^* \quad &= \left(\frac{\alpha\beta}{(1+g_N+g_A)^{\gamma} - \beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ c^* \quad &= (k^*)^{\alpha} - (g_A + g_N + \delta)k^* \end{aligned}$$

模型比较：新古典与索洛增长模型

- 新古典增长模型与索洛模型最大的区别在于，前者放松了储蓄率固定这一假设

- 那么，在新古典增长模型中，稳态水平的储蓄率是多少呢？

- 回到最基本的例子，$N=1$，A固定不变。稳态的资本、消费水平是：

$$K^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$C^* = A(K^*)^\alpha - \delta K^*$$

模型比较：新古典与索洛增长模型

- 因为 $Y^* = A(K^*)^\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{C^*}{Y^*} &= \frac{A(K^*)^\alpha - \delta K^*}{A(K^*)^\alpha} \\ &= 1 - \frac{\delta}{A}(K^*)^{1-\alpha}\end{aligned}$$

- 储蓄率为

$$s = \frac{\delta}{A}(K^*)^{1-\alpha}$$

- 如果要承担更高的稳态资本水平，储蓄率也需要提高！

模型比较：新古典与索洛增长模型

- 代入K^*的表达式:

$$K^* = \left(\frac{\alpha A\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow s^* = \frac{\alpha\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)}$$

- 提问：为何这里的储蓄率和索洛模型中的黄金规则储蓄率（golden rule savings rate）不同？

储蓄率的比较

$$s^* = \frac{\alpha\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)}$$

- 答案：discount factor， β

- 在索洛模型中，我们假设家庭将固定比例的收入用来储蓄，从而计算出稳态的消费水平C^*
- 黄金规则储蓄率是索洛模型中使得稳态消费水平最高的储蓄率； $s^{GR} = \alpha$
- 新古典增长模型中的家庭更聪明（也更缺乏耐心）——对于他们来说，现在和未来消费的边际效用水平是不同的。

（提示：当$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$时，两种模型在稳态的储蓄率相等）

储蓄率的比较

- 如果有人口、科技增长，新古典增长模型中的储蓄率如何计算?
- 上节课:

$$k^* \quad = \left(\frac{\alpha\beta}{(1+g_N+g_A)^\gamma-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$c^* \qquad = (k^*)^\alpha-(g_A+g_N+\delta)k^*$$

$$\frac{c^*}{y^*}=1-(g_A+g_N+\delta)(k^*)^{1-\alpha}$$

储蓄率的比较

$$
\begin{aligned}
s &= (g_A + g_N + \delta)(k^*)^{1-\alpha} \\
&= \frac{\alpha\beta(g_A + g_N + \delta)}{(1 + g_A + g_N)^{\gamma} - \beta(1-\delta)}
\end{aligned}
$$

当$\gamma = 1, \beta = 1$ 时，这个储蓄率依然等于 $s^{GR} = \alpha$

Ramsey增长模型的贡献

- 索洛模型中，储蓄率被假设为外生，储蓄与资本增长的决策过程在一个“黑匣子”中。
- Ramsey增长模型通过假设家庭的效用函数，打开了“黑匣子”，并在一般均衡的框架内分析了储蓄率的决定因素（和效用、科技水平、人口增长都存在潜在关系）。
- 为现代宏观经济学提供了一个基础的研究框架，可以让研究者在此基础上进一步探讨增长的来源（如人力资本的积累，内生增长模型等）。

新古典主义增长模型的局限

- 和索洛模型一样，在平衡增长路径上，人均收入的增长取决于科技水平 A 的变化。
- 科技水平A 也被称为 全要素生产率（Total factor productivity, TFP），是决定长期增长的关键要素。
- 新古典增长模型并未对TFP增长的来源加以探讨，而是假设它由外生因素导致。