Intermediate Macro: Lecture 23

Lun Li

Peking University

lunl@pku.edu.cn

May 15th, 2025

回顾

上节课我们通过无限期的吃蛋糕问题学习了值函数迭代的方法。
今天：回顾Ramsey模型（最优增长模型）的确定和随机递归模型。

模型回顾

- 社会计划者问题(t期)

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i})$$

预算约束为（包括了运动方程和资源约束）

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= k_t(1-\delta) + i_t \\ y_t &= f(k_t) = c_t + i_t \end{aligned}$$

- 其中：资本存量为时间$t-1$继承而来，t期无法决定，因此是t期的状态变量。
- 控制变量既可以是c_t，也可以写作是$t+1$期可用的资本存量k_{t+1}，因为给定k_{t+1}，c_t 可以写作

$$c_t = f(k_t) + k_t(1-\delta) - k_{t+1}$$

值函数

- 值函数

$$V(k_t) = \max_{\{k_s\}_{s=t+1}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i}) - k_{t+1+i} + k_{t+i}(1-\delta))$$

表示了给定初始资本存量k_t，能够得到的最大化的效用贴现值。

贝尔曼方程

- 重新整理值函数，将其写成贝尔曼方程的形式

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}} \left[u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V(k_{t+1})\right] \tag{1}$$

- 假设值函数存在并有一阶导数，可以通过一阶条件解出

$$0 = -u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V'(k_{t+1})$$

在某些条件满足时(本模型已满足)，可以使用包络定理(envelope theorem)，得到值函数的导数$V'(k_t)$

$$V'(k_t) = u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)(f'(k_t) + (1-\delta))$$

欧拉方程与稳态的求解

- 代入到一阶条件，得到欧拉方程

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(f'(k_{t+1} + 1 - \delta)$$

- 稳态时，$c_t = c_{t+1}$，此时欧拉方程为

$$\frac{1}{\beta} - (1 - \delta) = f'(\bar{k})$$

一般形式

- 假设x_t为所有状态变量，y_t为时期t的控制变量，令$F(x_t, y_t)$ 为要优化的目标函数。
- 在t期求解的问题是

$$V(x_t) = \max_{\{y_s\}_{s=t}^{\infty}} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} F(x_s, y_s)$$

其中约束条件为，对于所有$s \geq t$

$$x_{s+1} = G(x_s, y_s)$$

- 我们可以写成贝尔曼方程的形式

$$V(x_t) = \max_{y_t} [F(x_t, y_t) + \beta V(G(x_t, y_t))]$$

政策函数

- 一阶条件：

$$0 = F_y(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_y(x_t, y_t)$$

- 求解，可以得到控制变量关于时间t状态变量的函数，我们称之为政策函数：

$$y_t = H(x_t)$$

对于任何x_t定义域里的取值，政策函数都需要成立。因此我们可以把值函数写成：

$$V(x_t) = F(x_t, H(x_t)) + \beta V(G(x_t, H(x_t)))$$

包络定理

- 在求解政策函数的时候，我们需要对值函数求导数，但是值函数本身是未知的，这里我们需要借助包络定理[1]

$$V'(x_t) = F_x(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_x(x_t, y_t)$$

- 两种情况：
  - 通过构建控制变量，使得$G_x(x_t, y_t) = 0$，此时

$$V'(x) = F_x(x_t, y_t)$$

  - $G_x(x_t, y_t) \neq 0$, 这时候往往很难计算值函数的确切表达，只能通过值函数迭代的方法（参见上节课）

[1] Benveniste and Scheinkman Envelope Theorem

回到 Ramsey 模型

- 状态变量：$x_t = k_t$
- 控制变量：$y_t = k_{t+1}$
- 目标函数:

$$F(x_t, y_t) = u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)$$

- 约束条件：

$$k_{t+1} = x_{t+1} = G(x_t, y_t) = y_t = k_{t+1}$$

- 该经济体的一阶条件：

$$0 = -u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))$$

包络条件的应用

- 根据包络定理

$$V'(x_t) = F_x(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_x(x_t, y_t)$$

- 但因为$G(x_t, y_t) = y_t$，可得

$$G_x(x_t, y_t) = 0$$

因此包络定理简化为

$$V'(x_t) = F_x(x_t, y_t) = u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)(f'(k_t) + 1 - \delta)$$

- 这也是为什么我们可以把值函数的导数代入到一阶条件，得到欧拉方程。

同一问题的另一种表述

- 假设我们将状态变量依然定义为$x_t = k_t$，但把控制变量定义为消费，$y_t = c_t$。
- 此时的目标函数为

$$F(x_t, y_t) = u(c_t)$$

而预算约束为

$$k_{t+1} = x_{t+1} = G(x_t, y_t) = f(k_t) + k_t(1-\delta) - c_t$$

本模型对应的贝尔曼方程为

$$V(k_t) = \max_{c_t} \left[u(c_t) + \beta V(f(k_t) + k_t(1-\delta) - c_t)\right]$$

同一问题的另一种表述——包络定理

- 但此时，我们求解预算约束对于时间t状态变量的导数时，得到

$$G_x(x_t, y_t) = f'(k_t) + (1 - \delta)$$

- 根据包络定理

$$\begin{aligned} V'(x_t) &= F_x(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_x(x_t, y_t) \\ &= F_x(x_t, y_t) + \beta V'(f(k_t) + (1 - \delta)k_t - c_t)(f'(k_t) + (1 - \delta)) \end{aligned}$$

- 而上式第二项一般不等于0，我们还是无法求解值函数导数的形式（右边还是有值函数的导数）
- 所以：这种形式的问题一般只能使用值函数迭代的方法去逼近求解。

随机性递归模型

- 目前为止，所有的动态规划问题都是确定性的，没有任何随机冲击；一旦初始条件给定，经济就会沿着原有的路径运行。
- 现实生活中，一些随机变量（例如天气，生产率，科技）等由外界决定的过程也会对于模型中变量的取值造成影响。
- 今天：加入随机因素，但假设我们对于随机事件发生的概率是已知的。

一个简单的随机增长模型

- 假设这个经济体t时间的生产函数为

$$y_t = A^t f(k_t)$$

其中A^t可能有两个取值：A_1，概率为p_1；A_2, 概率为p_2。假设$A_1 > A_2$, $p_1 + p_2 = 1$

- 资本的运动方程

$$k_{t+1} = A^t f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t$$

- 在时期0，社会计划者优化贴现后的期望效用

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

最优的消费路径

- 因为每一时期的消费依赖于这个时期的资本存量，以及这个时期的技术水平，而未来的技术水平具体实现的值是未知的，我们没法得到具体的消费路径。
- 这里可以得到的消费结构，可以用树形结构来表示：
  - 给定初始资本存量k_0，时期0技术水平可能为$[A_1, A_2]$，对应的产量为$[A_1 f(k_0), A_2 f(k_0)]$，发生概率为$[p_1, p_2]$
  - 根据时期0的状态，社会计划者选择的资本存量为$[k_1^1, k_1^2]$其中一个
  - 时期1的产量可能是以下几种：$[A_1 f(k_1^1), A_2 f(k_1^1), A_1 f(k_1^2), A_2 f(k_1^2)]$，对应的发生概率为$[p_1 p_1, p_1 p_2, p_2 p_1, p_2 p_2]$
  - 在时期1可能有四种情况，因此对应着四种可能的下期资本水平$[k_2^1, k_2^2, k_2^3, k_2^4]$，而时期2的技术水平有两种可能，导致时期2的产生出有8种情况。

技术水平为A_1时的值函数

- 若已知初始资本存量为k_0, 0期实现的技术水平为A_1，此时预期贴现效用的最大值为

$$V(k_0, A_1) = \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

服从时期$t = 0$的预算约束

$$k_1 = A_1 f(k_0) + (1 - \delta)$$

以及时期$t \geq 1$的预算约束

$$k_{t+1} = A^t f(k_t) + (1 - \delta) k_t - c_t$$

贝尔曼方程

- 类似地，我们也可以写出技术水平为A_2时的值函数$V(k_0, A_2)$
- 同之前一样，这个问题也可以用递归的方式写出

$$V(k_0, A^0) = \max_{c_0} \ [u(c_0) + \beta E_0 V(k_1, A^1)]$$

- 服从预算约束

$$k_1 = A^0 f(k_0) + (1-\delta)k_0 - c_0$$

- 给定c_0 (也就是k_1的选择)，下一期的值函数有p_1概率为$V(k_1, A_1)$,有p_2概率为$V(k_1, A_2)$, 因此期望的表达式为

$$E_0 V(k_1, A^1) = p_1 V(k_1, A_1) + p_2 V(k_1, A_2)$$

解函数的形式

- 初始时期为t的时候，问题为

$$V(k_t, A^t) = \max_{c_t} \; [u(c_t) + \beta E_t V(k_{t+1}, A^{t+1})]$$

  预算约束为

$$k_{t+1} = A^t f(k_t) + k_t(1-\delta) - c_t$$

- 当然，我们也可以把k_{t+1}当做控制变量，这个问题就变为

$$V(k_t, A^t) = \max_{k_{t+1}} \; [u(A^t f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta E_t V(k_{t+1}, A^{t+1})]$$

$$k_{t+1} = G(x_t, y_t) = k_{t+1}$$

- 我们寻找的解函数可以写作

$$k_{t+1} = H(k_t, A^t)$$

一般形式

- 贝尔曼方程

$$V(x_t, z_t) = \max_{y_t} \left[F(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t V(x_{t+1}, z_{t+1})\right]$$

- 服从预算约束

$$x_{t+1} = G(x_t, y_t, z_t)$$

- 问题的解（之前被称为政策函数）是

$$y_t = H(x_t, z_t)$$

- 对任何状态变量和随机变量的取值，下式都要成立：

$$V(x_t, z_t) = F(x_t, H(x_t, z_t), z_t) + \beta E_t V(G(x_t, H(x_t, z_t), z_t), z_{t+1})$$

随机欧拉方程

- 一阶条件：

$$F_y(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t[V_x(G(x_t, y_t, z_t), z_{t+1})G_y(x_t, y_t, z_t)] = 0$$

- 包络定理：

$$V_x(x_t, z_t) = F_x(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t[V_x(G(x_t, y_t, z_t), z_{t+1})G_x(x_t, y_t, z_t)]$$

当$G_x(x_t, y_t, z_t) = 0$时，

$$V_x(x_t, z_t) = F_x(x_t, y_t, z_t)$$

- 通过一阶条件，可以得到如下的随机欧拉方程

$$0 = F_y(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t[F_x(G(x_t, y_t, z_t), y_{t+1}, z_{t+1})G_y(x_t, y_t, z_t)]$$

回顾

- 给确定情况下的动态规划问题加入随机冲击（尤其是维度有限的随机冲击），逻辑上没有太多变化；
- 我们可以把每一期出现的随机冲击当做新的状态变量，而随机变量的发生概率可能是相互独立的，也可能是一个Markov Chain
- 给定一些状态变量的初始值，我们可以模拟出一个经济体的时间路径。

参考

- *The ABCs of RBCs* by George McCandeless, Chapter 4-5
- *Recursive Macroeconomic Theory* by Lars Ljungqvist and Thomas J.Sargent, Chapter 3