宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/18

索洛增长模型

模型介绍

- 无限期模型: $t = 0,1,2,\ldots$
- 这个经济体由一个代理行为人和一个代理公司组成;
- 生产函数（假设为Cobb-Douglas）：

$$Y_t = F(A_t, K_t, N_t) = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

A_t：时间t的科技水平（生产率）
K_t：时间t的资本
N_t：时间t 的劳动力

规模收益不变（Constant Return to Scale）

- 这里的生产函数满足规模收益不变：

$$Y_t = F(A_t, K_t, N_t) = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

- 即，如果将生产要素 K_t, N_t都以相同倍数增加，那么产出也会以相同倍数增加。

简化的假设

- 假设科技水平 A，人口N 固定不变，生产函数为:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

模型介绍 - 2

- 每一期的产出可以用来消费（ C_t）或者投入生产（ I_t）

$$Y_t = C_t + I_t$$ （资源约束， Resource constraint）

- 资本的折旧率为$\delta < 1$，资本的积累规律满足：

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

模型介绍 - 3

- 关键假设：我们假设储蓄率 s 给定，每一期有固定比例的产出被储蓄起来，进入投资。

$$
\begin{aligned}
I_t &= sY_t \\
C_t &= (1-s)Y_t
\end{aligned}
$$

- **没有优化问题,** 代理行为人每期会把固定比例的产出储蓄起来。

资本和消费的演变

- 我们可以代入生产函数的形式，

$$C_t + I_t = AK_t^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

- 代入$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$，有

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sAK_t^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

- 另外，我们可以解出消费的表达式

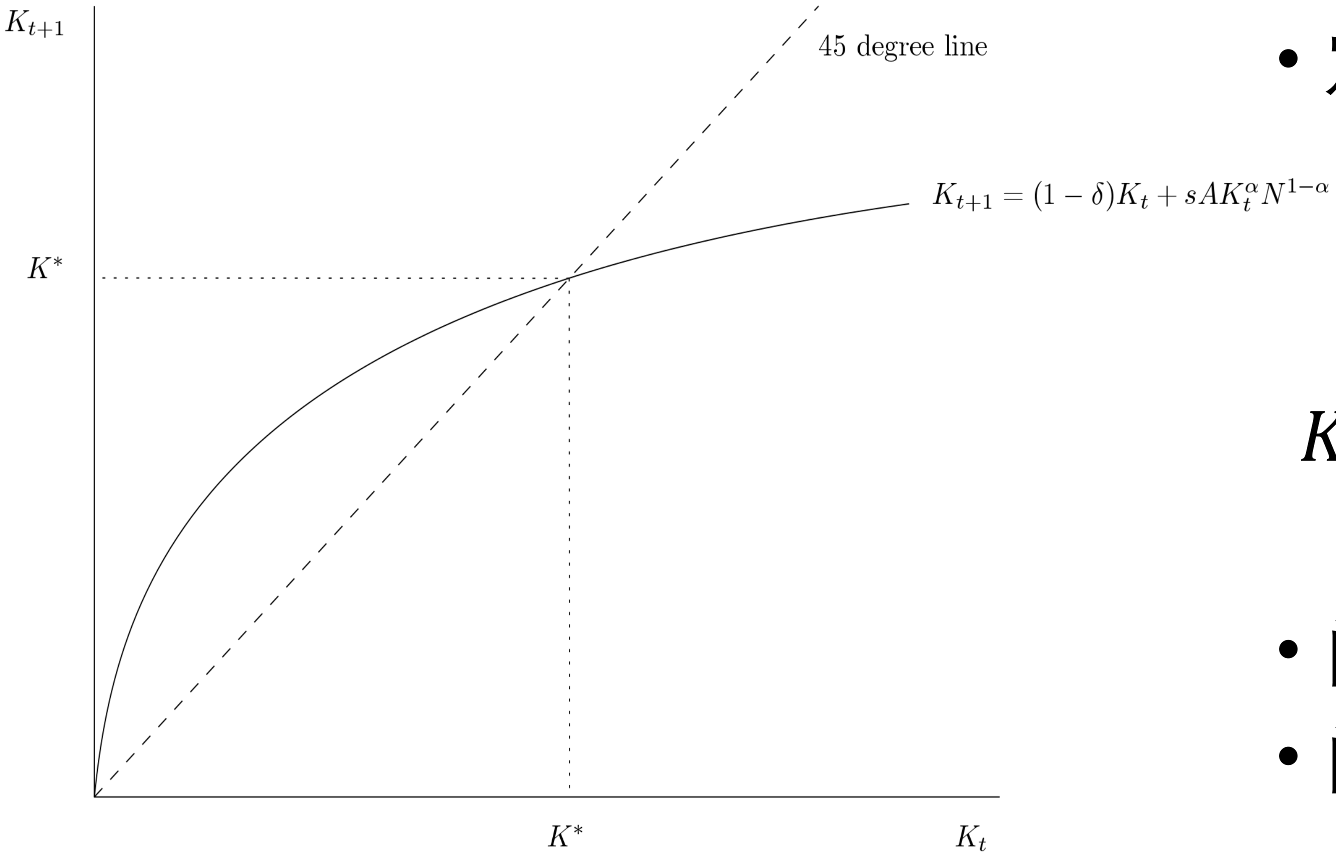
$$C_t = (1-s)AK_t^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

稳态的存在

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sAK_t^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

- 是否存在 K^*，使得 $K_{t+1} = K_t = K^*$，且上述关系成立？

稳态分析

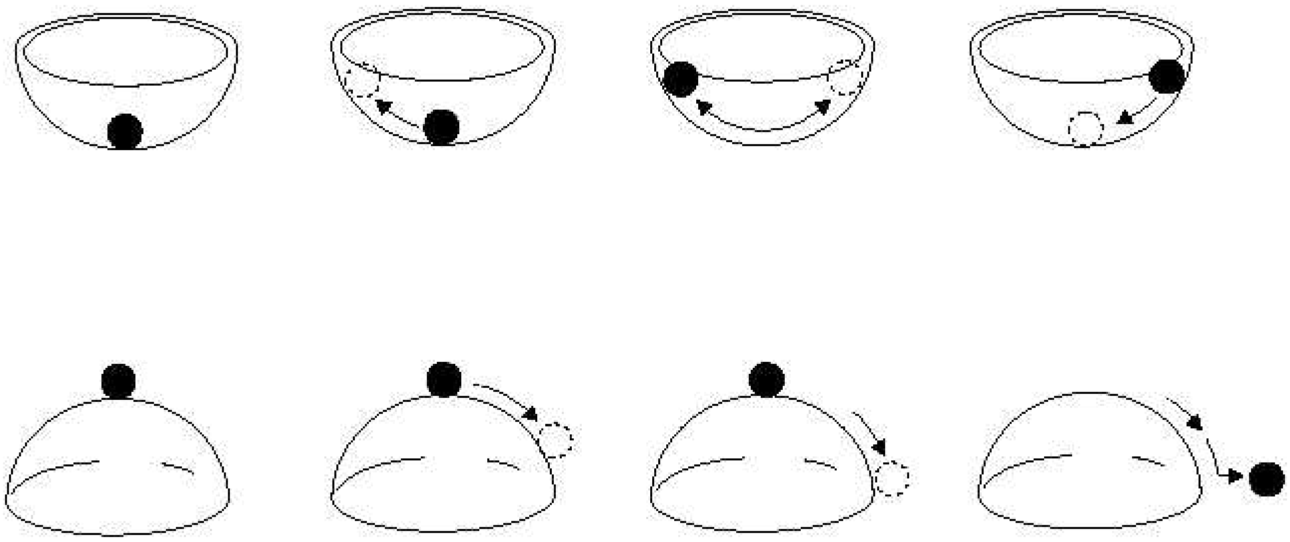


- 定义：该经济体中的稳态（steady state） K^*满足

$$K_{t+1} = K_t = K^*$$
$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sAK_t^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

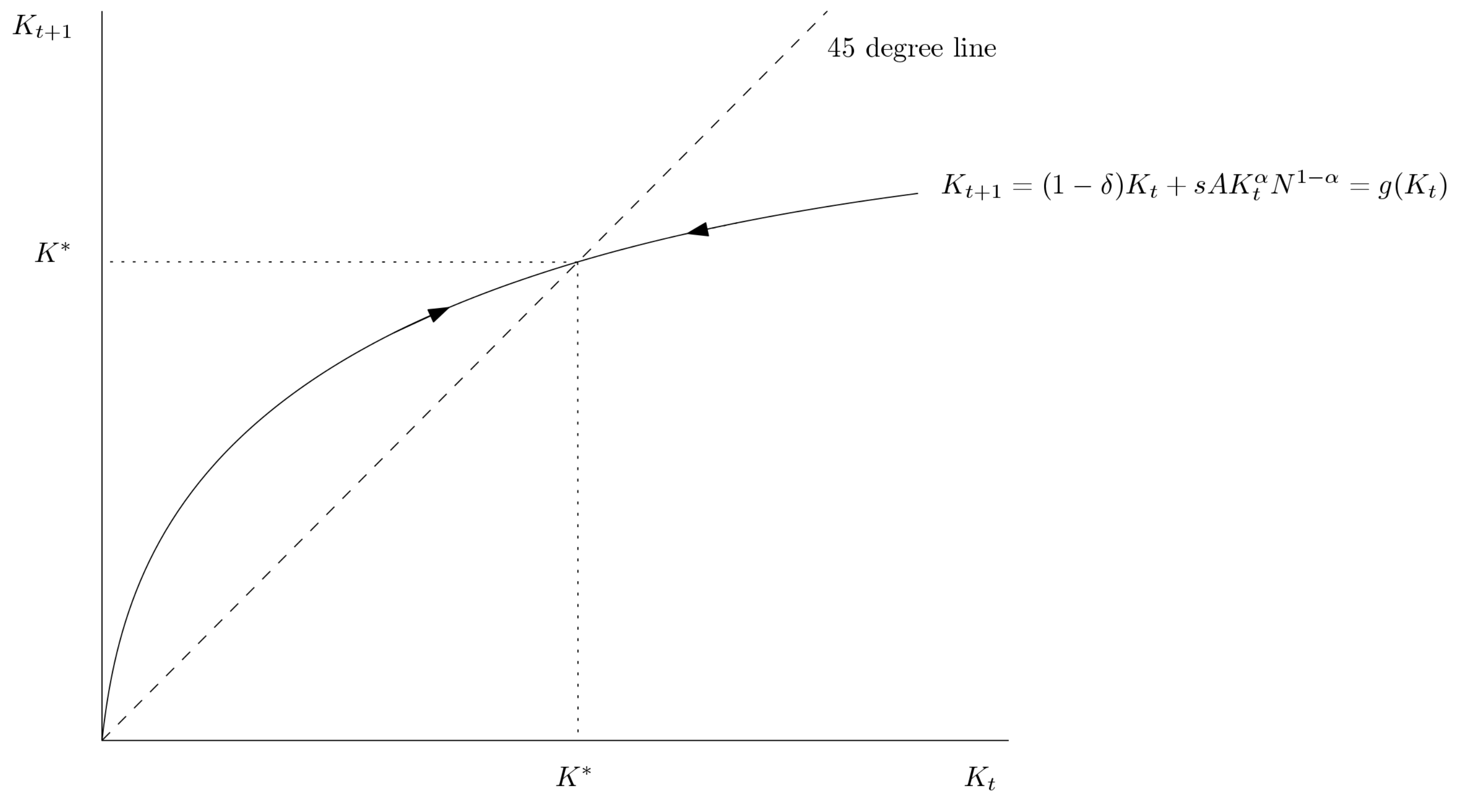
- 问题：此时C_t是否处在稳态？
- 问题：是否有多于一个稳态？

Local Stability (局部稳定性)



如果从一个稳态的附近出发，最终依然会回到稳态，这样的稳态被称为具有局部稳定性（local stability）

稳态分析



- 问题：该稳态K^*是否满足局部稳定性？

稳态分析

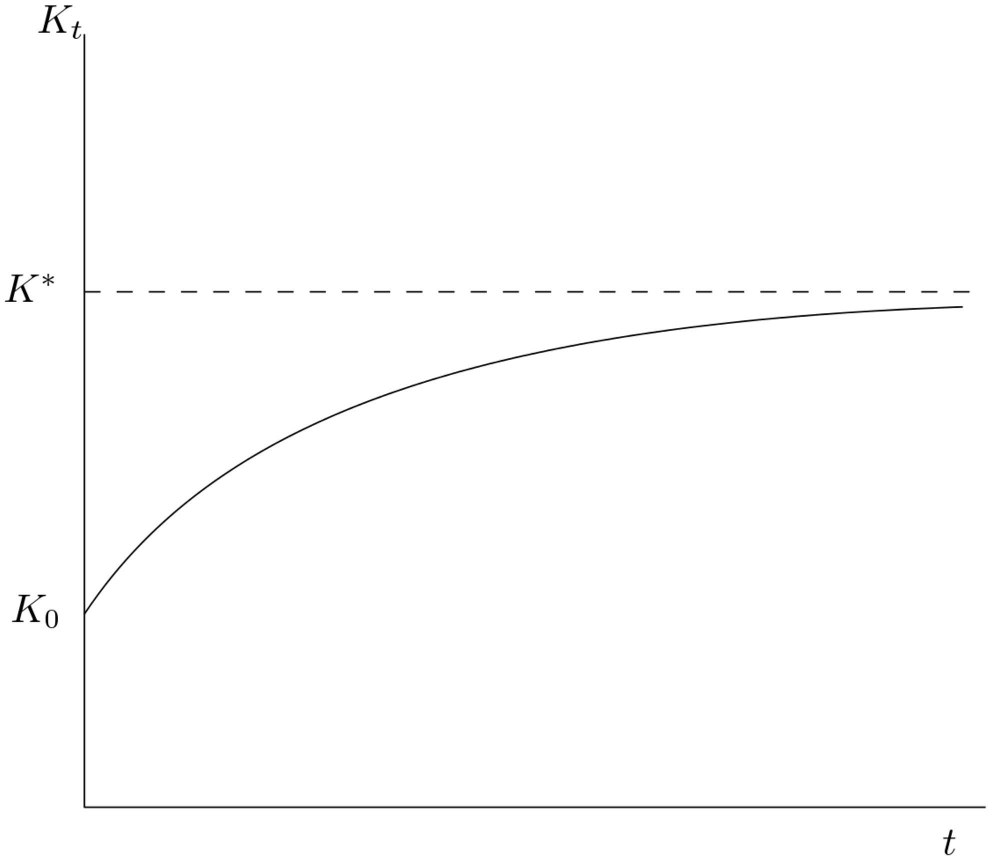
- 当 $K_t < K^*$时， $K_{t+1} > K_t$ （因为$g(K_t)$ 在45度线上方）。此时，K_{t+1}相比 K_t 而言更靠近稳态 K^*
- 同样地, 当 $K_t > K^*$ 时， $K_{t+1} < K_t$.
- 也就是说，这个稳态满足局部稳定性。

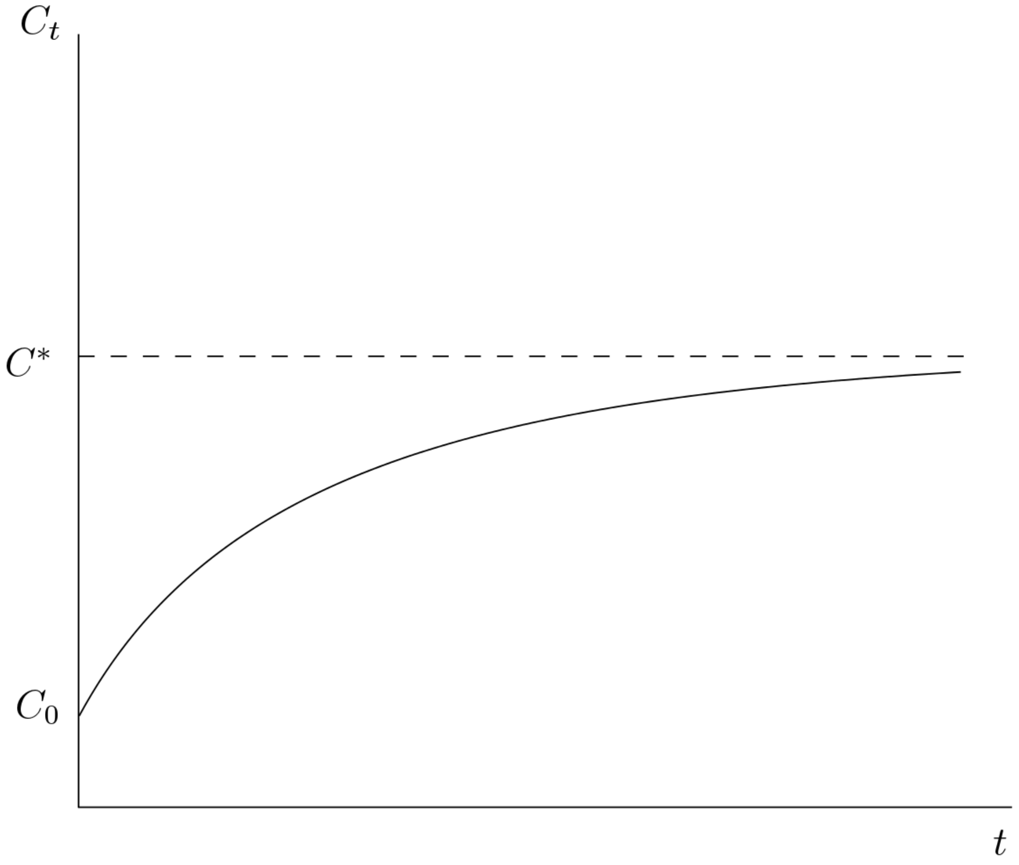
资本的积累

- 假设经济体开始处在 $0 < K_0 < K^*$ 的位置。

- 随着经济发展，资本会逐渐积累，向稳态的方向收敛（convergence）

Transition Path





解出稳态资本

当然，我们也可以解出稳态的资本水平

$$K^* = (1-\delta)K^* + sA(K^*)^\alpha N^{1-\alpha}$$

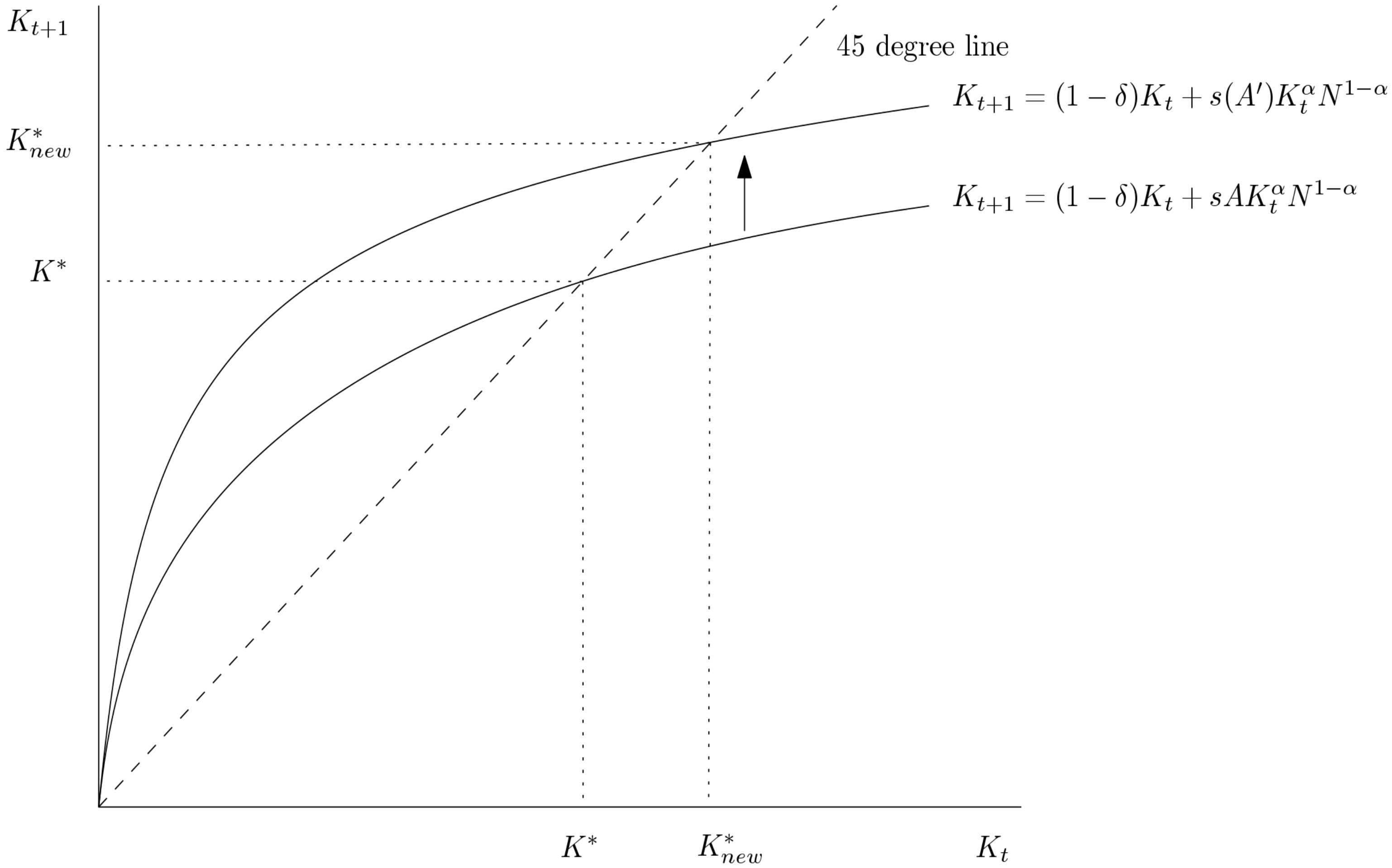
$$K^* = N\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

稳态消费水平如何求解？

解出稳态消费

$$
\begin{aligned}
C^* \quad &= (1-s)A(K^*)^{\alpha}N^{1-\alpha} \\
&= (1-s)A\left(N\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} N^{1-\alpha} \\
&= (1-s)A^{\frac{1}{1-\alpha}}N\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

比较静态分析



- 储蓄率上升对稳态资本的影响?
- 储蓄率上升对稳态消费的影响?
  - 稳态资本增加，总产出增多
  - 总产出更多投入储蓄，更少投入消费，对稳态消费的影响不能确定

最优储蓄率

- 能否找到一个储蓄率，使得索洛模型中的稳态消费最高?

$$\max_{s}\ (1-s)A^{\frac{1}{1-\alpha}}N\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

一阶导数： $\frac{\alpha}{1-\alpha}s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}-\frac{1}{1-\alpha}s^{\frac{1}{1-\alpha}-1}=0$

解出： $s^{GR}=\alpha$

这个储蓄率也被称为**黄金规则储蓄率**（golden rule savings rate）

索洛模型 – 人口增长

- 刚才的模型中，我们假设科技水平 A，人口N 固定不变

- 我们可以拓展索洛模型，假设人口按照 g_N 的速度增加：

$$N_{t+1} = N_t(1 + g_N)$$

$$\Rightarrow N_t = N_0(1 + g_N)^t$$

人均产出

- 将所有经济变量转化为人均值

$$y_t = Y_t / N_t, k_t = K_t / N_t, c_t = C_t / N_t.$$

- 此时生产函数转变为：

$$y_t = A k_t^{\alpha}$$

人均消费、资本

- 此时资源约束可以表示为：

$$y_t = c_t + i_t$$

- 人均资本的转移律（Law of Motion）变为：

$$k_{t+1}(1 + g_N) = k_t(1 - \delta) + sAk_t^{\alpha}$$

人均资本的稳态

- 可以解出人均资本的稳态水平！

$$
\begin{aligned}
k^*(1+g_N) &= k^*(1-\delta) + sA(k^*)^\alpha \\
\Rightarrow k^* &= \left(\frac{sA}{g_N+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

提问：此时总资本K_t是否处于稳态？

平衡增长路径（Balanced Growth Path）

- 当人均资本量 k^*处于稳态时，总资本K_t正以匀速增长

- K_t的增长速度:

$$k_t = k^*, K_t = N_t k^*, K_{t+1} = N_{t+1} k^*.$$

$$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + g_N$$

- 此时，总资本处在平衡增长路径上
- 提问：消费和产出如何增长?

和数据的不同

- 我们上节课看到，人均GDP稳步上升，而非停留在固定水平
- 这和目前的模型得出的结论有所不同
- 解决方式：引入科技增长

$$A_t = A_0(1 + g_A)^t$$

带有科技增长的索洛模型

- 假设科技水平为劳动加强型（labor-augmenting technology）

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

$$A_t = A_0(1+g_A)^t$$
$$N_t = N_0(1+g_N)^t$$

- 将所有变量同时除以 $A_t N_t$，有效劳动

带有科技增长的索洛模型

$$y_t = k_t^{\alpha}$$
$$y_t = c_t + i_t$$
$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + sk_t^{\alpha}}{(1+g_A)(1+g_N)}$$

- 假设 $g_A g_N \approx 0$，可以解出

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + g_N + g_A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

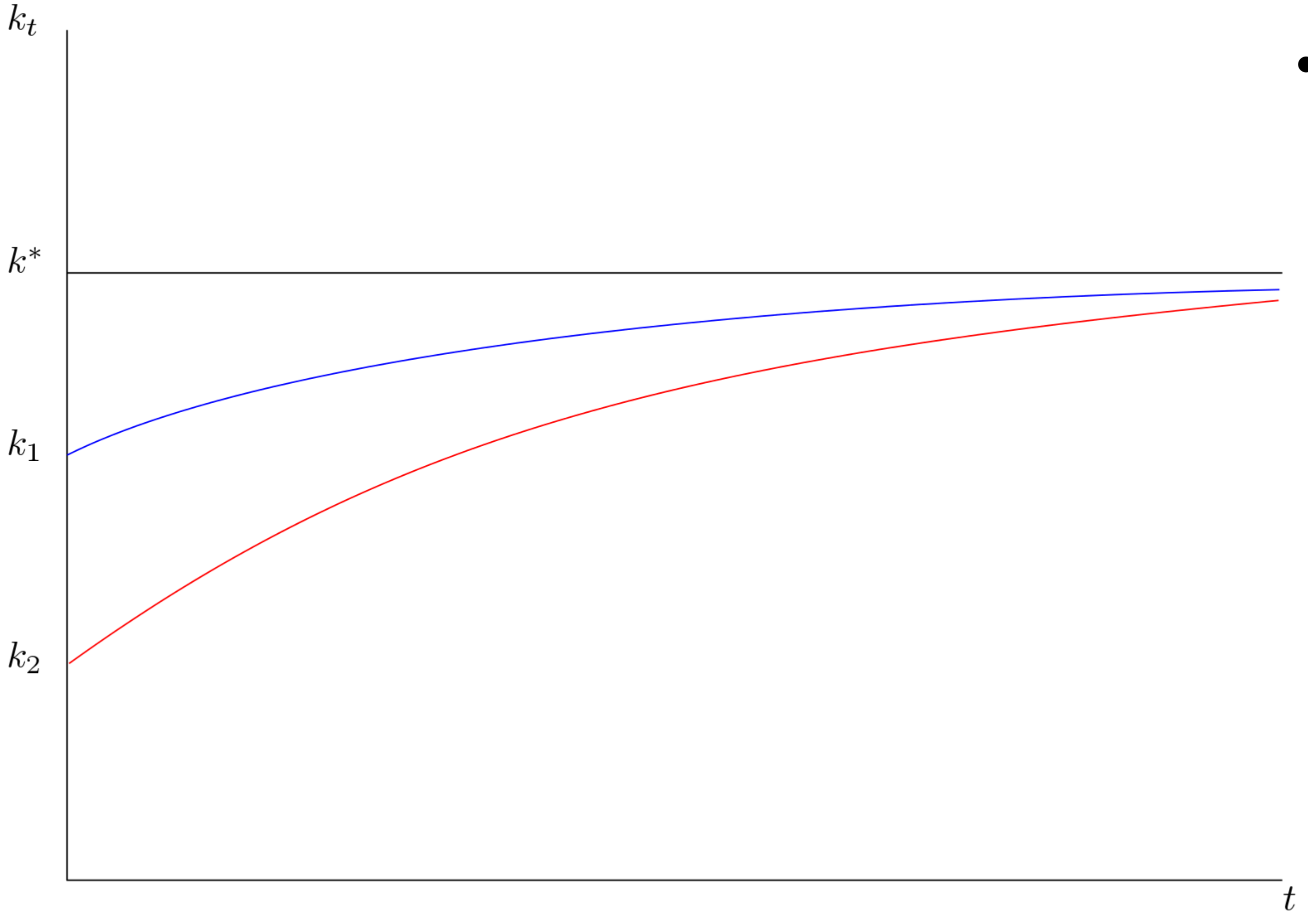
关于索洛模型

- 优点：简洁，易解，能够帮助分析经济增长的来源

- 缺点：

  - 没有“优化行为”，也就是说没有“选择”，只能遵从固定的储蓄率
  - 通过“科技增长” 解释人均GDP的增长，而科技增长是假设而来的

讨论：资本存量与增长率



- 开始资本越少，资本增长速度越快（i.e. 后发优势）

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 - \delta + \frac{I_t}{K_t}$$

$$= 1 - \delta + \frac{sAK_t^{\alpha}N}{K_t}$$

$$= 1 - \delta + sAK_t^{\alpha-1}N$$

讨论：稳态存在/唯一的条件

假设一：

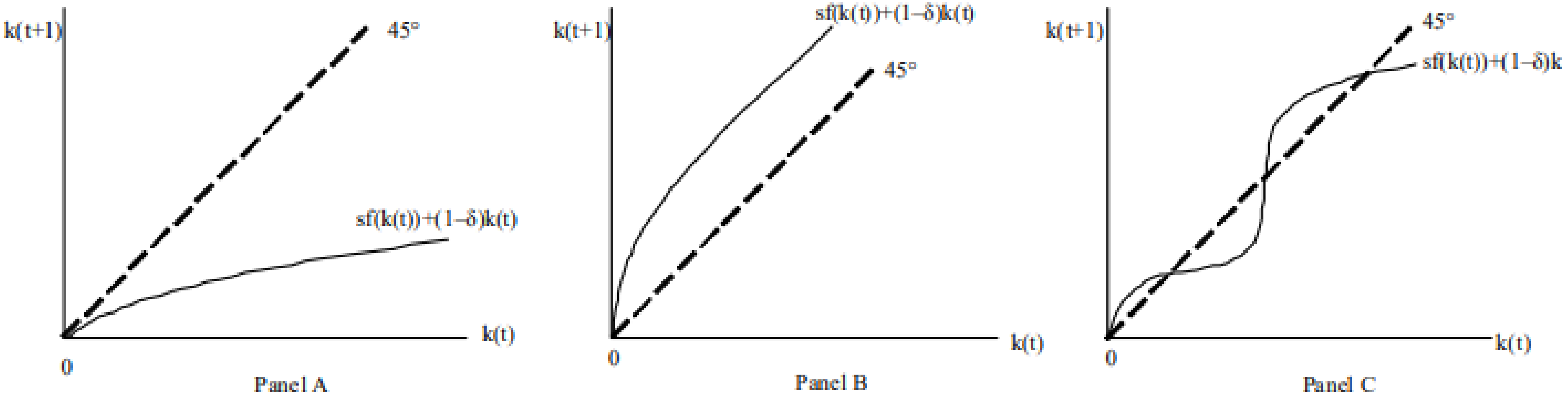
$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial N} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} < 0$$

且$F(K, N)$满足边际回报不变（constant return to scale）

假设二 (Inada Conditions)：

$$\lim_{K\to 0} F_K = \infty, \lim_{K\to\infty} F_K = 0 \text{ for all } N > 0$$
$$\lim_{N\to 0} F_N = \infty, \lim_{N\to\infty} F_N = 0 \text{ for all } K > 0$$

讨论：稳态存在/唯一的条件



[参考：Lecture 2 and 3, Daron Acemoglu, MIT]

增长核算（Growth Accounting）

- 假设总生产函数为:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

- 两边取自然对数:

$$\ln Y_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha)(\ln N_t + \ln A_t)$$

- 分析两期之间的差别

$$\ln Y_{t+1} - \ln Y_t = \alpha(\ln K_{t+1} - \ln K_t) + (1-\alpha)(\ln A_{t+1} - \ln A_t + \ln N_{t+1} - \ln N_t)$$

- 可以写作:

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha) g_N + (1-\alpha) g_A$$

不论是否处在平衡增长路径（balanced growth path），上述关系都会成立

增长核算-2

- $g_Y - \alpha g_K - (1-\alpha) g_N = (1-\alpha) g_A$：索洛剩余，反映了除劳动和资本之外其他的增长来源。
- 可以计算人均收入（生活水平）的增长：

$$\ln \frac{Y_{t+1}}{N_{t+1}} - \ln \frac{Y_t}{N_t} = \alpha \left(\ln \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} - \ln \frac{K_t}{N_t} \right) + (1-\alpha) g_A$$

换言之，增长核算将生活水平的增长中α 部分归结于人均资本的积累，剩下 $1-\alpha$ 部分归结于科技的进步。

- 当经济体处在平衡增长路径时，$g_K = g_N + g_A$，此时总产出也满足

$$g_{\mathrm{Y}} = g_N + g_A$$

模型讨论

模型的核心启示：仅靠资本累积无法解释经济增长，也不能很好解释跨国收入差距，一定需要依靠科技的增长。

- 角度一：以资本差异解释收入差异，需要的资本差异过于巨大。例如，一国比另一国的工人平均产出大10倍，这需要资本差异为$10^{\frac{1}{\alpha_k}} = 1000$倍。实际上工业国家与落后国家相比，工人平均资本仅仅高出20-30倍。
- 角度二：产出差异意味着巨大的资本收益率差异。

$$f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} = \alpha y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

资本的边际产出（收益率）对产出的弹性为$-(1-\alpha)/\alpha$。当$\alpha = 1/3$时，这意味着当y增加10倍，$f'(k)$ 减少为原来的$1/100$ (穷国的资产收益率是富国的100倍）。

实证估计

- Baumol (1986)：考察了16个工业化国家从1870-1979年经济增长的收敛过程。

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right]-\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]=a+b\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]+\epsilon_i$$

- 其中$\ln(Y/N)$是人均收入的对数，ϵ 为误差项，i 代表国家。问题：b 的符号、大小与收敛性的关系？

实证估计-2

$b=0$: 不存在收敛性； $b<0$: 存在收敛性； $b=-1$: 完美收敛。

Baumal 发现的结果：

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right]-\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]=8.4557-\underset{(0.094)}{0.995}\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]$$

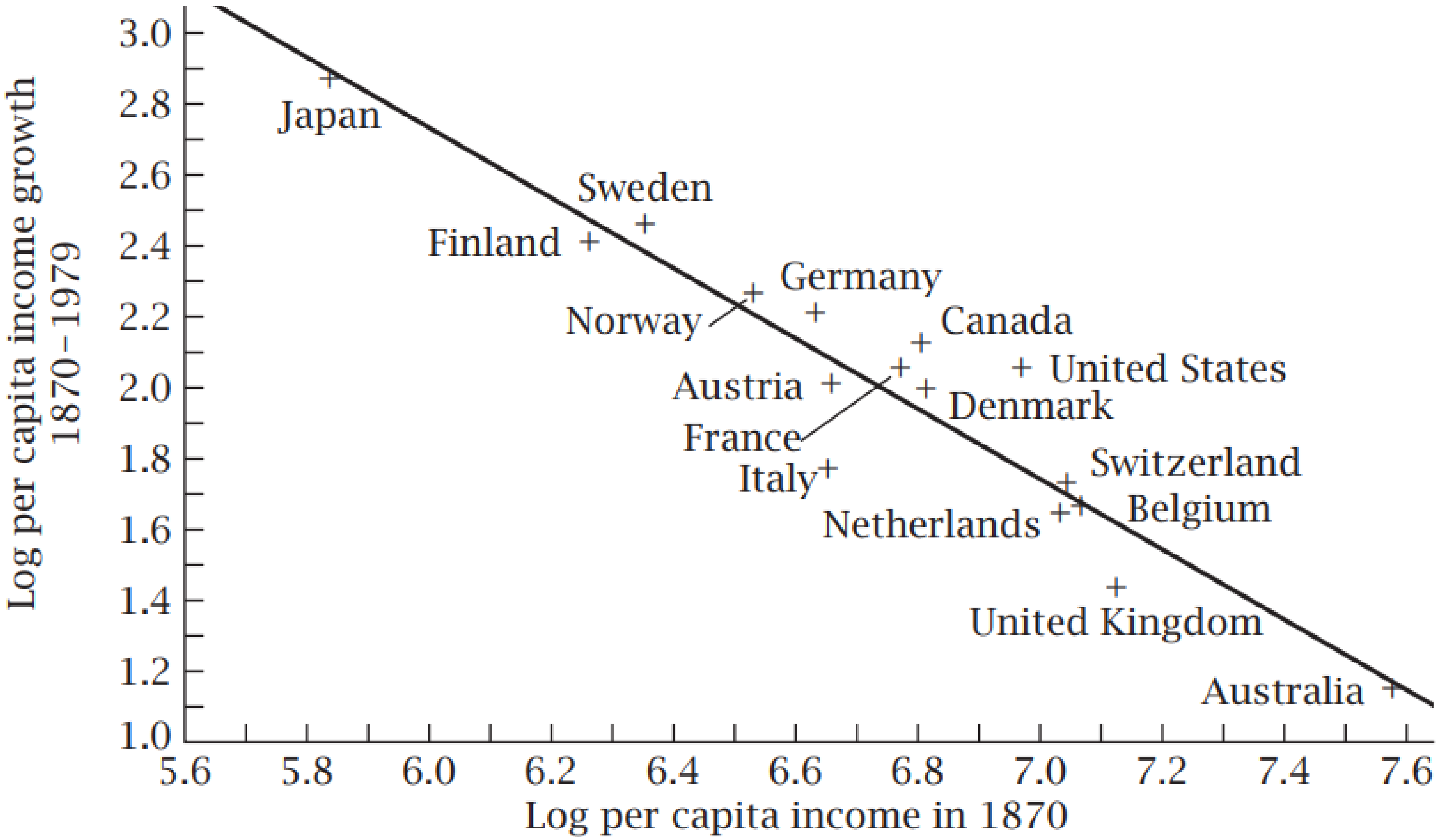


FIGURE 1.7 **Initial income and subsequent growth in Baumol's sample (from DeLong, 1988; used with permission)**

Baumol(1986) 的问题?

- DeLong (1988) 指出了两点问题。

1. 样本选择
   能够有较长数据序列的国家往往是工业化最彻底的国家。100年前并不富裕的国家能够进入样本，通常是因为它们在过去的100年间增长迅速。

DeLong 在Baumol的基础上，考察了1870年较为富裕的一些国家，加入了1870年GDP比芬兰高的七个国家（阿根廷，智利，东德，爱尔兰，新西兰，葡萄牙和西班牙），去掉了一个国家（日本）。发现b的回归结果减少到-0.566，标准差为0.144，收敛性减少了约一半。

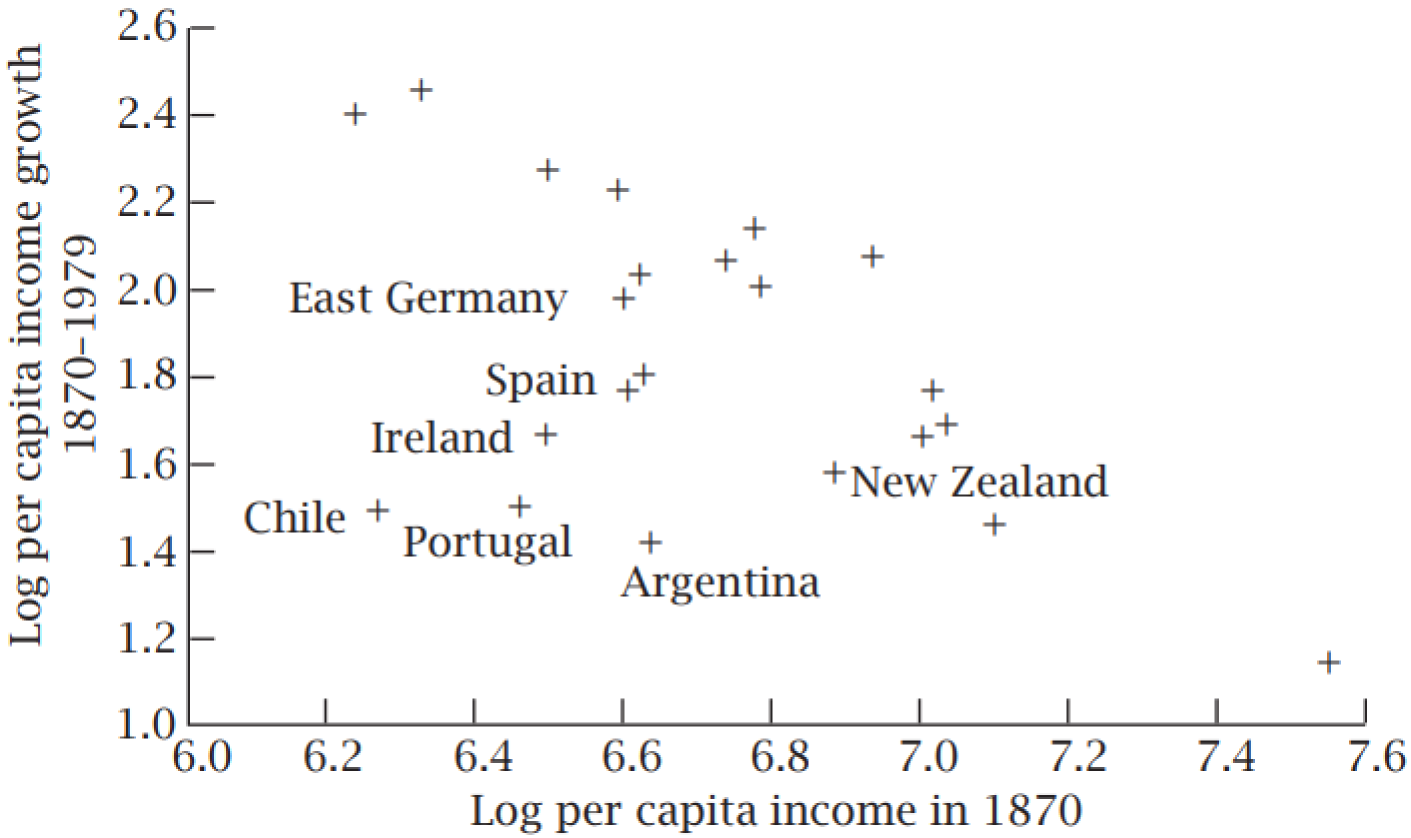


FIGURE 1.8 **Initial income and subsequent growth in the expanded sample (from DeLong, 1988; used with permission)**

Baumol (1986) 的问题？

2. 测量误差

- 1870年收入的测量误差会导致结果偏向收敛；当1870年的收入被低估时，1870-1979年的增长会被高估；反之亦然。
- DeLong 估计，当初始收入的平均测量误差在15%左右时，b的真实估计值接近0；当初始收入的平均测量误差在20%左右时，b的真实估计值接近1。
- 从计量方法上，无法识别增长与初始收入的负相关关系来自于收敛性还是测量误差。

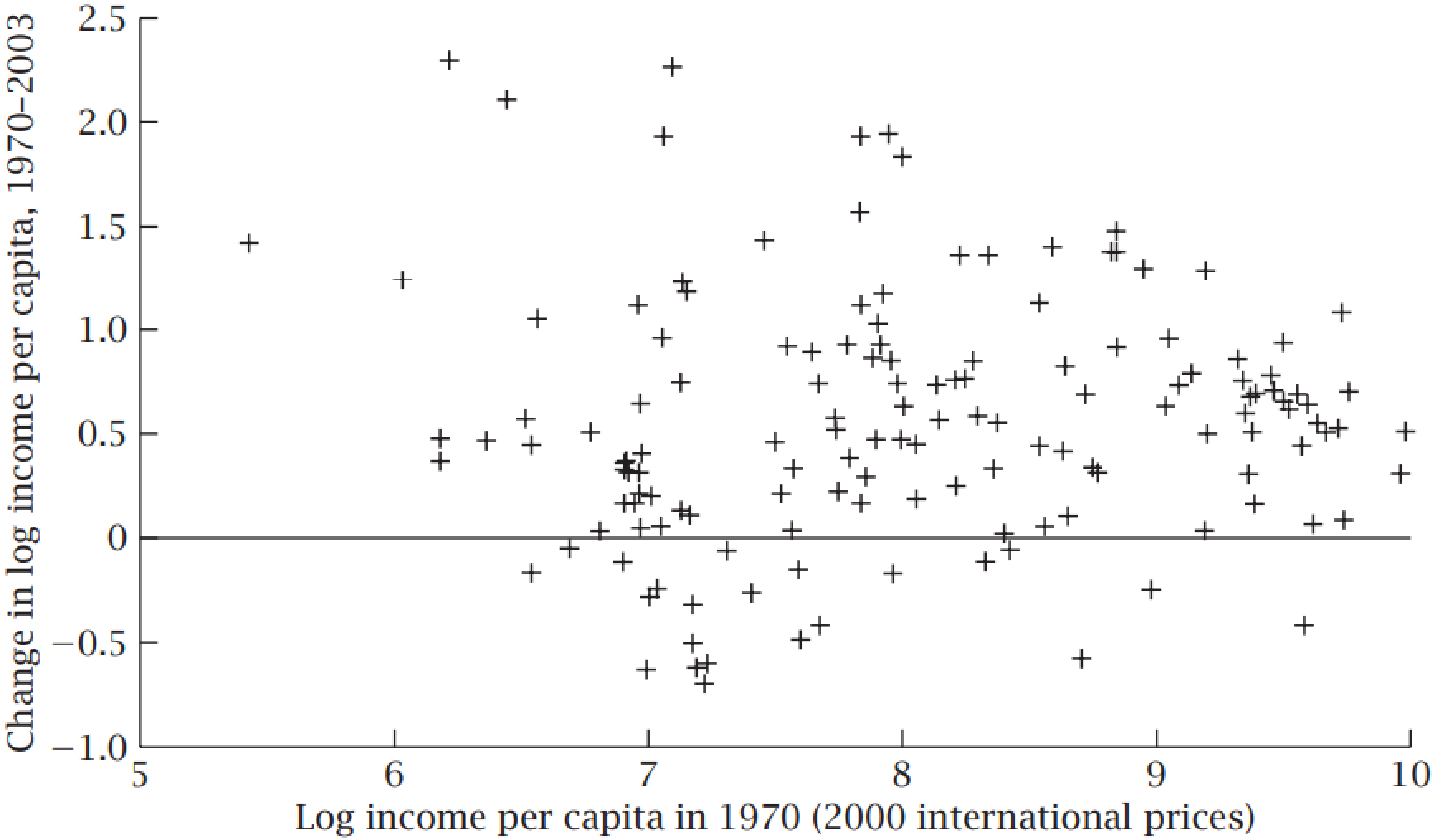


FIGURE 1.9 **Initial income and subsequent growth in a large sample**

其他实证研究

储蓄和投资的关系：Feldstein and Horioka (1980)

- 研究了在开放世界中, 一个国家储蓄率上升的影响。
- 随着国内储蓄上升，资本的边际收益相比别国降低，本国居民有动机将资本投资于别国。
- 在没有跨国资本流动的限制条件下，国内的高储蓄率不一定意味着高投资率。

其他实证研究

- Feldstein and Horioka (1980)， 21个工业国家，1960-1974年：

$$(I/Y)_i = \underset{(0.018)}{0.035} + \underset{(0.074)}{0.887}(S/Y)_i, \quad R^2 = 0.91$$

- 回归系数接近为1，说明跨国资本流动存在限制。
- 其他可能的解释：高税收同时减少储蓄和投资(Barro, Mankiw, and Sala-i-Martin, 1995)；国家监管, 如Helliwell 1998发现国内不同地区的储蓄-投资关系远远弱于不同国家之间的储蓄-投资关系。

总结

索洛模型的主要结论:

1. 无论从任何一点出发，经济向平衡增长路径收敛，在平衡增长路径上，每个变量的增长率都是常数。
2. 在其他外生变量相似的条件下，人均资本低的经济有更快的人均资本的提高，人均收入低的经济有更高的增长率。
3. 人均产出（Y/N）的增长来源于人均资本存量和技术进步，但只有技术进步才能够导致人均产出的永久性增长。

总结

索洛模型的主要结论：

4. 通过调节储蓄率可以实现人均最优消费和最优资本存量的“黄金律”增长。
5. 储蓄率的变化只会暂时性地影响增长率，而不会永久性地影响；储蓄率的显著变化对平衡增长路径上的产出变化只有较小的影响，且作用缓慢。

总结

索洛模型的主要批评：

1. 未能够解释长期经济增长的真正来源。把技术进步（劳动的有效性）看成为外生给定的，而这恰恰是长期经济增长的关键。因此，索洛模型是通过“假定的增长”来解释增长的。
2. 理论预测与实际数据不符。如果资本取得的市场收益大致体现了其对产出的贡献，那么实物资本积累的变化既不能很好地解释世界经济增长，也不能说明国家间的收入差距。

课后练习

- 在 http://finlab-pku.cn/chat 注册账号
- 用 python 尝试编写solow模型的演示，以及黄金规则储蓄率的求解

Ramsey增长模型

从索洛模型出发

- 从索洛模型中，我们对于“稳态”（steady state），“过渡路径”（transition path）等概念有了一定的了解

- 索洛模型的核心假设是固定的储蓄率，这一假设并不符合现实

- 今天我们进一步扩展，在一个新古典主义的框架内，让经济行为人能够自由选择储蓄的多少，在这个框架内分析经济增长

Ramsey-Cass-Koopmans 模型

- 简称 Ramsey 模型，或者新古典增长模型（Neoclassical growth model）
- 本课为了和索洛模型加以区分，有时将Ramsey模型简称为新古典增长模型，但严格来说索洛模型也可以归类为新古典主义的增长模型范畴
- 社会计划者的版本最早由英国经济学家Frank Ramsey在1928年创立，竞争均衡的版本由美国经济学家 David Cass 和荷兰经济学家 Tjalling Koopmans 在1965年提出

模型设定-家庭

- 无限期模型，$t = 0,1,2,\ldots$
- 代理家庭的效用函数为：

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

其中 $0 < \beta < 1$

- 假设代理家庭每期的劳动供给为$N_t = 1$，初始的资本总量为K_0

模型设定-生产函数

- 生产函数满足规模效应不变（CRS），且科技水平不变， $A_t = A$

$$Y_t = F(K_t, N_t)$$

- 资源约束：

$$C_t + I_t = Y_t$$

- 资本的转移规律：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

有点眼熟...

- 就是一个带有劳动、资本的无限期模型

- 从社会计划者的角度看，优化问题是：

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t, N_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \\
\text{s.t.} \quad & C_t + I_t = F(K_t, N_t) \\
& N_t = 1 \\
& K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t
\end{aligned}
$$

简化优化问题

- 代入$N_t = 1$

$$\max_{\{C_t,I_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t = F(K_t, 1)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

- 简化预算约束，定义$f(K_t) = F(K_t, 1)$

$$\max_{\{C_t,K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

解优化问题（顺便复习

$$\max_{\{C_t,K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

- 无限期模型，每期有一个预算约束，因此每期需要一个拉格朗日系数

- 拉格朗日系数可以乘 β^t，相当于把第t期预算约束放松带来的效用折到第0期；也可以不乘，此时拉格朗日系数的含义不同，不影响结果

拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=\max_{C_t,K_{t+1},\lambda_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C_t)+\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t\left(f(K_t)-C_t-K_{t+1}+(1-\delta)K_t\right)$$

- 一阶导数:

$$[C_t]:\qquad \beta^t u'(C_t)-\lambda_t=0$$
$$[K_{t+1}]:\qquad -\lambda_t+\lambda_{t+1}(f_k(K_{t+1})+(1-\delta))=0$$
$$[\lambda_t]:\qquad f(K_t)-C_t-K_{t+1}+(1-\delta)K_t=0$$

- 最后是否对拉格朗日系数求导都无所谓，因为最后一个一阶导数就是预算约束。
- 另外，社会计划者决定的变量是K_{t+1}，因为第0期 K_0给定, 社会计划者选择 K_1; 第1期选择K_2; 依次类推。

解出模型

- 前两个一阶导数联立，找到我们的“老朋友”——欧拉方程

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

- 如何解释欧拉方程?

- 另外一个公式：资源约束

$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

稳态分析

- 问题：这个经济体是否存在稳态？
- 如果有的话，稳态存在于二维空间(C^*, K^*)。与索洛模型不同，储蓄率不再固定，资本水平变化可能导致消费-储蓄权衡之间的变化
- 我们假设一些具体的函数形式，做进一步分析

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$F(K_t, N_t) = AK_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \Rightarrow f(K_t) = AK_t^{\alpha}$$

稳态分析

- 不论是否在稳态，经济体都满足欧拉方程和资源约束

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

- 稳态时，这两个方程可以写作：

$$\begin{aligned} u'(C^*) &= \beta u'(C^*)(f_k(K^*) + 1 - \delta) \\ C^* + (K^* - (1-\delta)K^*) &= f(K^*) \end{aligned}$$

解出稳态

代入函数形式

$$
\begin{aligned}
(C^*)^{-\gamma} &= \beta (C^*)^{-\gamma} (\alpha A (K^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\
C^* + (K^* - (1-\delta)K^*) &= A(K^*)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

从第一个方程，我们可以解出稳态的资本水平

$$
K^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

代入第二个方程，找到稳态消费

$$
C^* = A(K^*)^{\alpha} - \delta K^*
$$

提问：为何此时依然满足 $I^* = \delta K^*$?

图像分析

- 上次我们画出K_{t+1}和 K_t 的关系，从而找到了索洛模型中的稳态
- 这次我们画出K_t 和 C_t 的关系，把K_t 放在横轴， C_t 放在纵轴。我们先找到这个稳态，再分析它是否满足局部稳定性（local stability）
- 这幅图也叫做 Phase diagram（相图，相态图）， 描述了两种变量的变化关系

Phase diagram - Overview

- 我们在图上画出两条线:
  - 第一条：所有满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合
  - 第二条：所有满足$K_{t+1} = K_t$的点(K_t, C_t)的组合

Phase Diagram – Step 1

- 所有满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合

欧拉方程描述了跨期的消费之间的关系：

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

满足$C_{t+1} = C_t$的点是：

$$1 = \beta(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

这条线的形状？

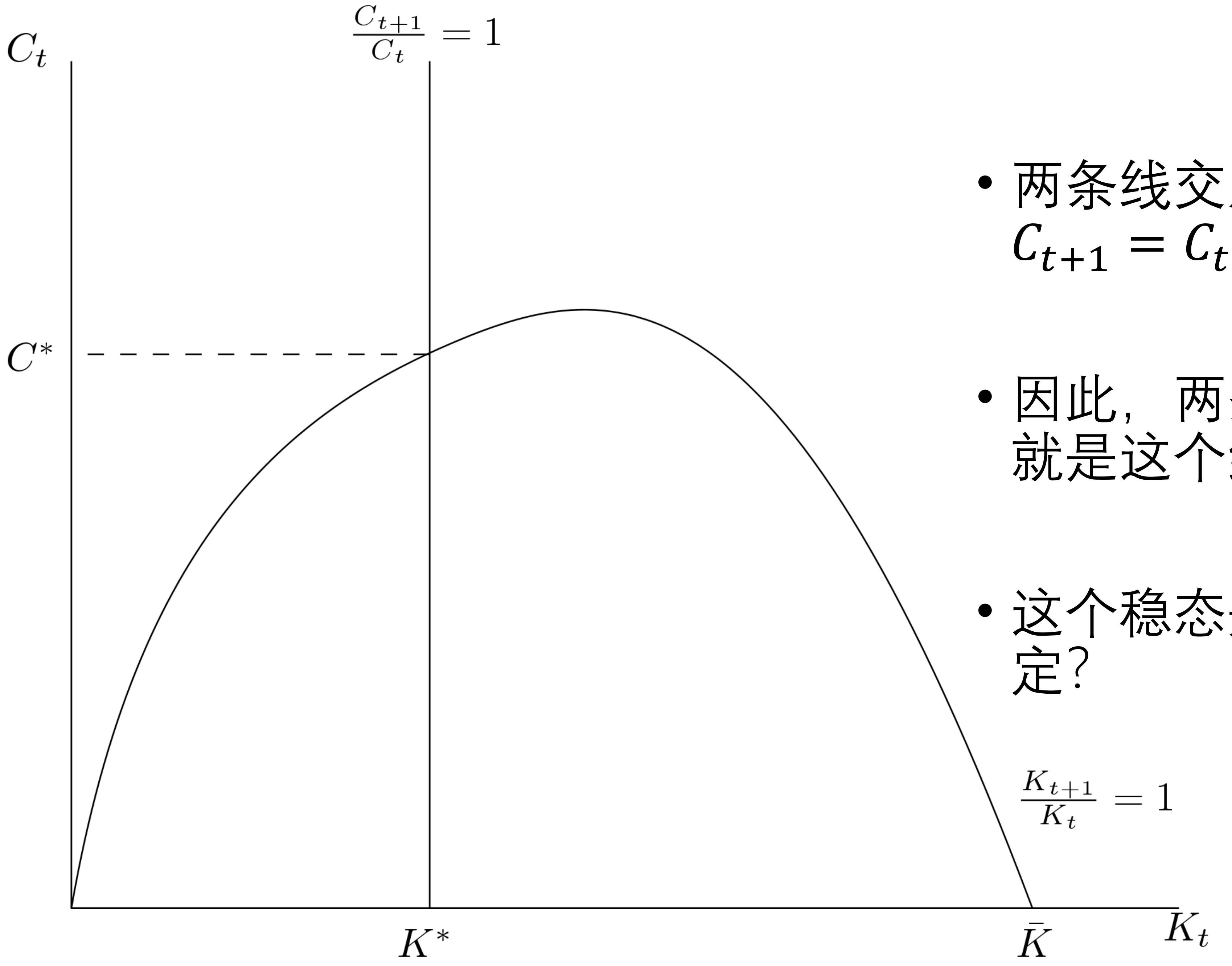
Phase Diagram – Step 2

- 满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合是一条直线， $K_t = K^*$
- 再找出：所有满足$K_{t+1} = K_t$的点(K_t, C_t)的组合
- 资源约束：

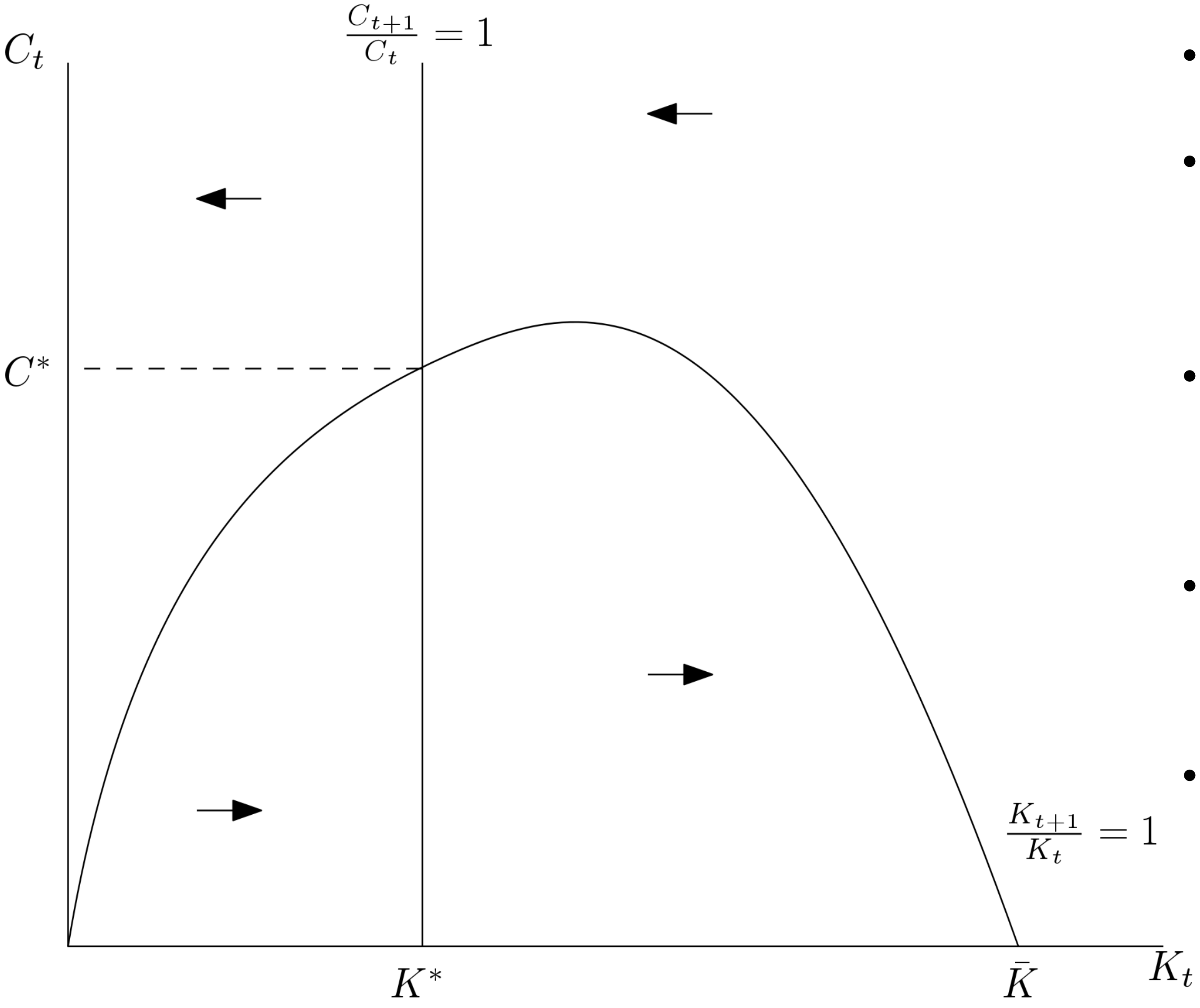
$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = AK_t^{\alpha}$$

- 当$K_{t+1} = K_t = K$时，意味着$C_t = AK^{\alpha} - \delta K$
- 这是一条拱形的弧线，通过(0,0)以及横轴上$\overline{K}$点， $\overline{K}$满足

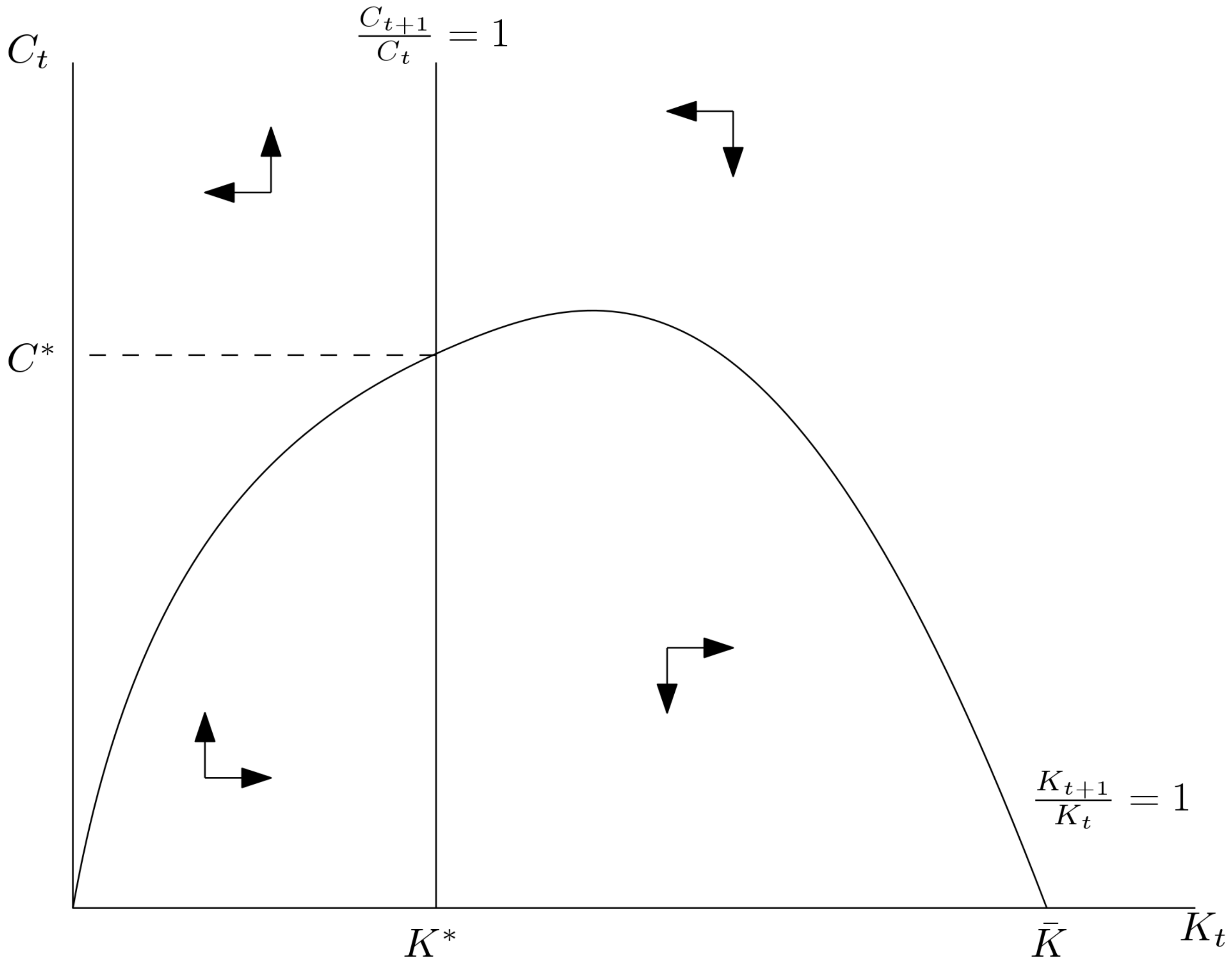
$$A\overline{K}^{\alpha} - \delta\overline{K} = 0$$



- 两条线交点处，同时满足 $C_{t+1} = C_t$ 和 $K_{t+1} = K_t$
- 因此，两条线的交点(K^*, C^*)就是这个经济体的一个稳态
- 这个稳态是否满足局部性稳定？

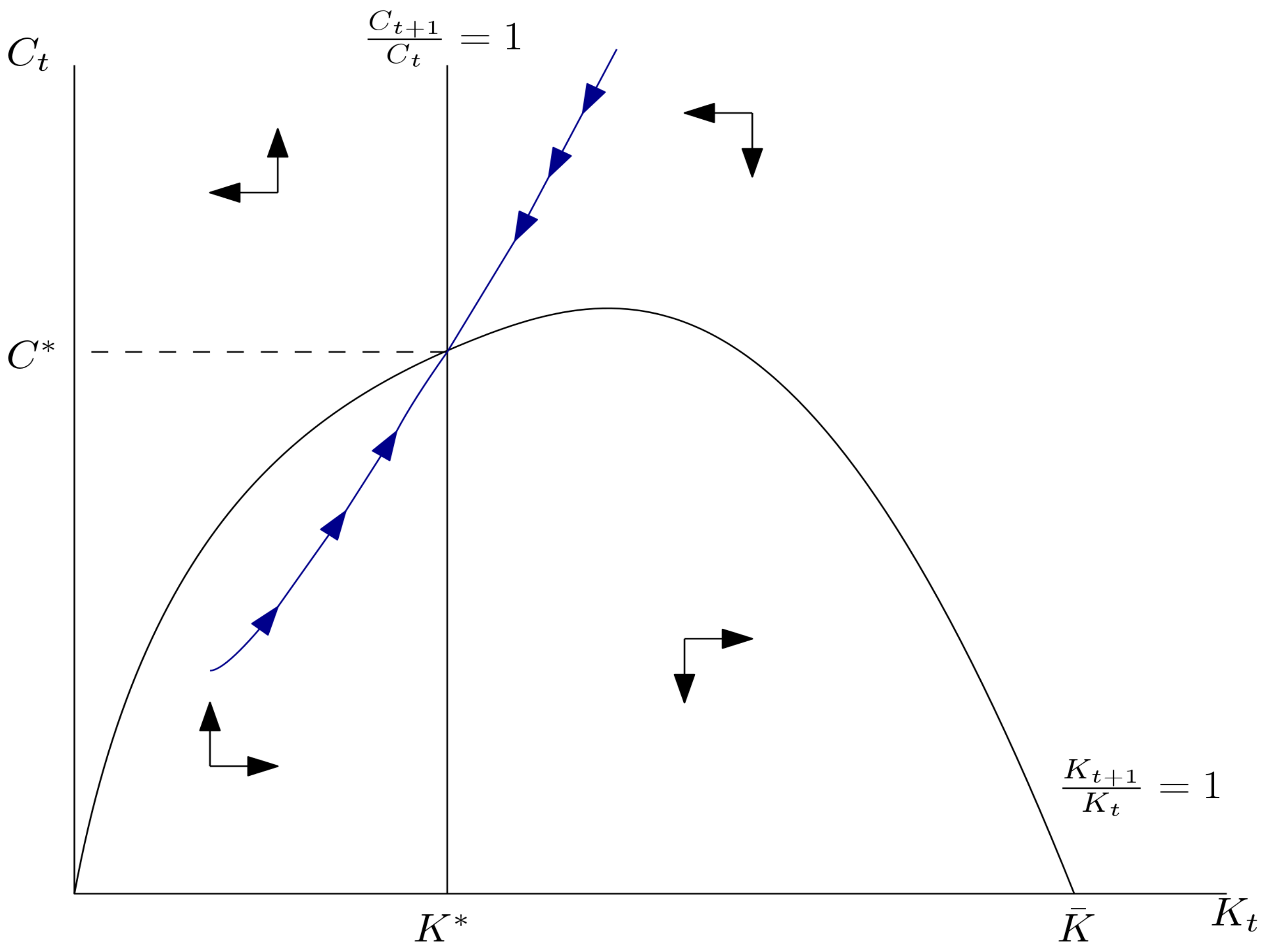


- 这两条线将第一象限划分为四个部分
- 我们可以讨论经济体从各个部分出发，是否会收敛到稳态水平
- 如果经济体起始点在弧线$\frac{K_{t+1}}{K_t}=1$之下，资本会发生怎样的变化？
- 此时：消费少于能够使得资本不变的水平，意味着投资过多，下一期资本增加
- 弧线之上相反，消费过多，资本减少



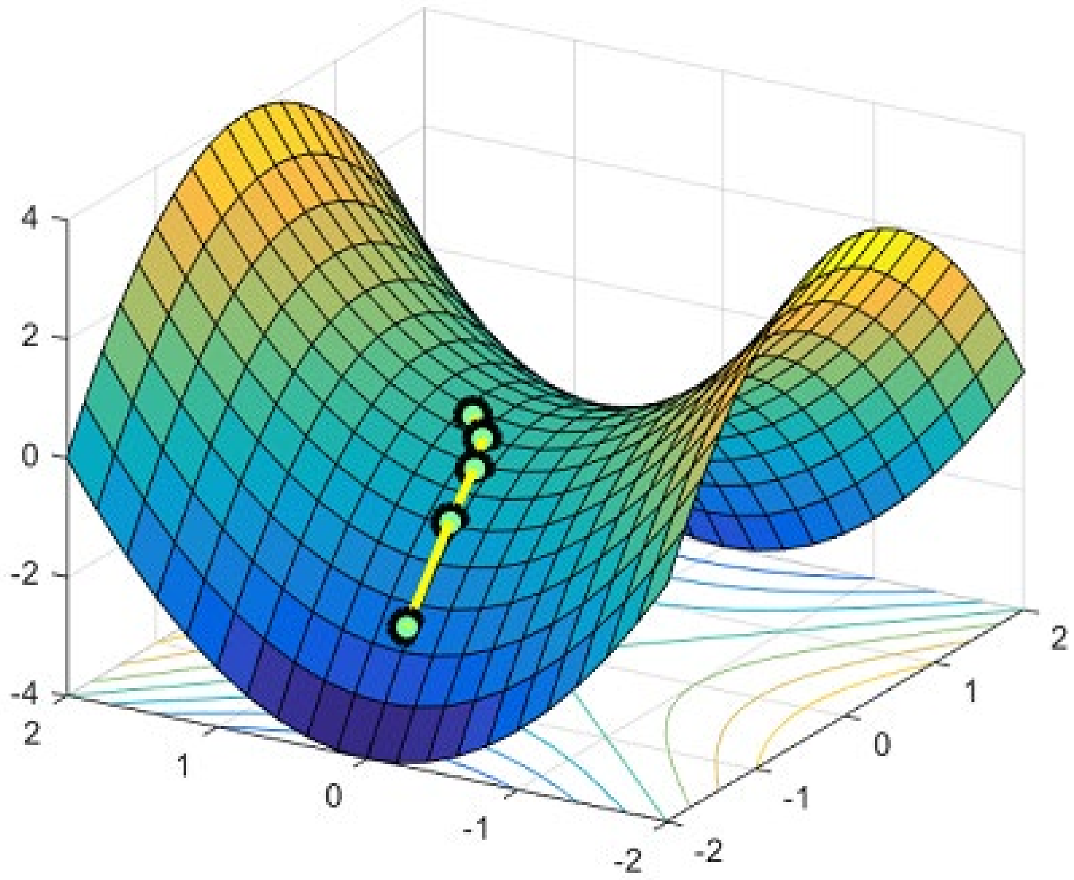
- 如果选择资本K_{t+1}在直线$\frac{C_{t+1}}{C_t} = 1$右边会如何?
- 此时：投资高于使得消费保持不变的水平，意味着消费将会下降
- 之所以分析K_{t+1}，是因为K_t是状态变量，非t期能够决定

马鞍路径（Saddle path）



- 这里我们发现，只有相图的两个区域可能存在收敛
- 边界时的情况？
- 在这个系统中，仅能通过一条唯一的路径(K_t, C_t)趋近稳态，这条路径也被称为马鞍路径（saddle path）

马鞍路径



- 系统仅仅在特定的方向存在稳定性，局部稳定性不成立

- 小碗 vs 马鞍