

Intermediate Macro: Lecture 25

Lun Li

Peking University

lunl@pku.edu.cn

May 22th, 2025

- 上次: RBC, Aiyagari 模型
- 今天:
 - Krusell and Smith (1998) , HANK模型简介
 - Lifecycle 模型简介

- 在 Aiyagari 模型基础上，加入一个总体冲击 z ，由一个外生的Markov Chain决定
- 贝尔曼方程

$$v(k, s; \lambda, z) = \max_{c, k'} u(c) + \beta E[v(k', s'; \lambda', z') | (s, z, \lambda)]$$

$$\text{s.t. } c + k' = \tilde{r}(K, N, z)k + w(K, N, z)s + (1 - \delta)k$$

$$\tilde{r}(K, N, z) = z\alpha\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha-1}$$

$$w(K, N, z) = z(1 - \alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha}$$

$$\lambda' = H(\lambda, z)$$

- 这里 K, N 代表总资本, 总消费:

$$K_t = \int k \lambda_t(k, s) dk ds$$

$$N_t = \int s \lambda_t(k, s) dk ds$$

- 和Aiyagari不同的地方在于, $\lambda_t(k, s)$ 本身是随机的, 受到经济冲击 z_t 的影响。

递归竞争均衡

一个递归竞争均衡(Recursive Competitive Equilibrium)的定义是一组要素价格函数 (\tilde{r}, w) , 一个价值函数, 一个政策函数 $k' = f(k, s; \lambda, z)$, 以及一个分布 $\lambda(k, s)$ 的运动规则 H , 满足

- 给定要素价格 (\tilde{r}, w) 和 H , 价值函数能够解出上页的贝尔曼方程, 且 f 为最优的决定规则;
- 政策函数 f 以及 s, z 的马尔科夫链共同决定了财富与收入分布 $\lambda(k, s)$, 且会通过运动规则 H 映射到下期的财富与收入分布 $\lambda'(k', s')$

Krusell and Smith (1998) 的创新

- 这里 $\lambda(k, s)$ 的运动规则 H 及其难以找到，因为未知变量的维度太高；实际上状态变量变成了一个概率分布。
- Krusell and Smith (1998) 主要的创新点：认为可以财富的一些“矩” (moments) 来概括分布的特征
- 统计学中常见的矩：
 - 一阶矩(first moment): 均值(mean)
 - 二阶中心矩(second central moment): 方差(variance)
 - 三阶中心矩(third central moment): 偏度(skewness), 衡量分布的对称性, 正偏（右偏）表示分布向右拉长，或者右边尾巴更长；
 - 四阶中心矩(fourth central moment): 峰度(kurtosis), 衡量分布尾部的厚度和中心的高度。正态分布的峰度为3；高峰态(Leptokurtic)指比正态分布更“尖”，尾巴更“厚”的分布，更容易出现极端值

将分布替换为矩

- 假设将分布 $\lambda(k, s)$ 替换为资本分布的一系列moments,
 $m = (m_1, m_2, \dots, m_I)$
- 将贝尔曼方程写为:

$$v(k, s; m, z) = \max_{c, k'} u(c) + \beta E[v(k', s'; m', z') | (s, z, m)]$$

实际上是用一个有限维的状态向量 m 替换掉了高维的财富、收入分布 $\lambda(k, s)$ 。另外，他们假设并验证(guess and verify)了一个 m 的运动方程 H ，符合一个简单的规律：

$$\log(K') = \begin{cases} a_0^K + a_1^K \log(K) & \text{when } z = z_g \\ b_0^K + b_1^K \log(K) & \text{when } z = z_b. \end{cases}$$

Krusell and Smith (1998)解法的逻辑概括

- 对于 z_t ，给出一个不变的从0到 T 的实现值；给定初始假设 H ， z_t 和贝尔曼方程，给 M 个不同的异质性代理人模拟出 (k_t, s_t) 的轨迹
- 使用这 $M * T$ 次估计，生成样本的 $\lambda_t(k, s)$ 分布，以及对于每个 t 计算对应的矩向量 $m(t)$
- 使用 $m(t)$ 和非线性最小二乘法重新更新 H 的估计，直到 H 函数收敛

Krusell and Smith (1998) 的意义

- 使用这种近似算法，计算了总资本、总劳动、租金、工资的时间序列，并和一个代理行为人的模型进行比较，发现总体变量的时间序列非常相似。
- “Approximate aggregation theorem”：财富和收入的分布对于整体经济运行的影响不大。
- 成立需要两个假设：
 - 消费是财富的凹函数
 - 社会的总投资（总储蓄）主要由财富较高的人提供
- 在上述情形下，财富分布的变化对于总投资的变化影响不大，可以用一个完全市场，代理行为人的情况去近似一个非完全市场，异质行为人的经济体。
- KS(1998) 还比较了模型的财富分布和美国数据的差别，发现模型中生成太多财富高的人，而较少财富低的人。他们进一步拓展了模型，使折现率 β 成为一个随机变量，发现可以更好地和数据进行匹配。

在Krusell and Smith (1998) 基础上, Kaplan and Violante (2014) 以及 Kaplan, Moll, Violante (2018) 引入了以下改进, 成为现在较为主流的异质性新凯恩斯模型(HANK)的基础。

- 从单一资产到双资产结构: KS中只有一种可交易资产, KV假设存在低收益高流动性的资产 a 和高收益低流动性的资产 A ; 调整 A 需要支付一定的调整成本, 因此面对冲击时一部分家庭会出现流动性约束。
- 模型除了传统的Poor Hand-to-mouth Households (低资产, 高边际消费倾向的家庭) 之外, 还会产生 Wealthy Hand-to-mouth Households (高资产, 高边际消费倾向), 与美国数据相符
- 这种设定使得收入和利率冲击对于消费会产生更大、更分化的反应, 对KS中的近似加总定理提出挑战。

- Kaplan, Moll, Violante (2018) 还引入名义粘性, 使得公司调价会产生成本 (Rotemberg adjustment cost), 使得货币政策影响实体经济 ($HA \rightarrow HANK$)。发现利率调整对于 HtM 家庭消费影响最大, 并且会通过一般均衡渠道影响工资、就业, 从而影响收入分配。
- 但同时也带来了计算的难度, 因为与 KS(1998) 不同, 需要对于两种资产、以及收入分布的变化规律进行数值模拟。

其他应用: Lifecycle Models

模型设定:

- 假设代理人生存 T 期, 其中 $N < T$ 期进行工作, 即 $t < N$ 时获得收入 y_t , $t \geq N$ 后获得固定收入 $y_t = \bar{y}$
- 代理人的优化问题

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=1}^T} E \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

$$c_t + a_{t+1} = y_t + (1+r)a_t \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, N$$

$$c_t + a_{t+1} = \bar{y} + (1+r)a_t \quad \text{for } t = N+1, N+2, \dots, T$$

$$c_t \geq 0$$

$$a_{t+1} \geq \bar{w} \quad (\text{borrowing constraint})$$

$$a_T \geq 0 \quad (\text{no dying in debt})$$

$$a_0 \text{ given}$$

贝尔曼方程

- 对于 $t = 1, 2, \dots, N$ 的个体来说

$$V(a, y, t) = \max_{c, a'} \left\{ \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta EV(a', y', t+1) \right\}$$

$$\text{s.t. } c + a' = y + (1+r)w$$

$$a' \geq \bar{a}$$

$$c \geq 0$$

- 对于 $t = N+1, N+2, \dots, T-1$ 的个体来说

$$V(a, t) = \max_{c, a'} \left\{ \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta EV(a', t+1) \right\}$$

$$\text{s.t. } c + a' = \bar{y} + (1+r)a$$

$$a' \geq \bar{a}$$

$$c \geq 0$$

- 对于 $t = T$ 的代理人来说

$$V(a, T) = \max_c \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

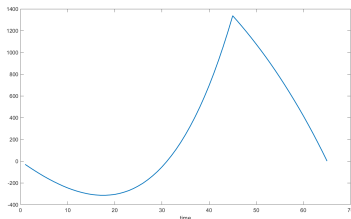
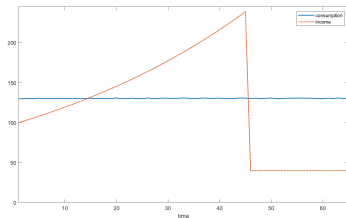
$$\begin{aligned} \text{s.t. } c &= \bar{y} + (1+r)a \\ c &\geq 0 \end{aligned}$$

- 可以通过逆推法计算消费和储蓄的政策函数

$$\begin{aligned} c_t &= f(a, y, t) \\ a_{t+1} &= g(a, y, t) \end{aligned}$$

收入不确定性

- 如果收入随年龄波动但不存在任何不确定性，代理人可以通过储蓄的方式近似平滑消费



- 永久收入假说：消费水平和永久收入有关，和当期收入无关！

永久收入假说：理论与实际

- Browning and Crossley (2001)

Martin Browning and Thomas F. Crossley 13

Figure 2
Life-Cycle Patterns of Income and Consumption

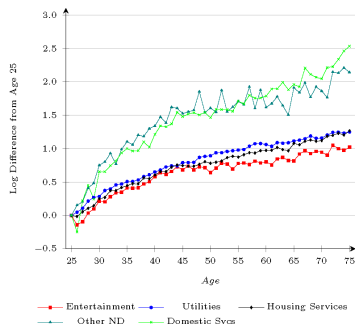


- 可能的原因？

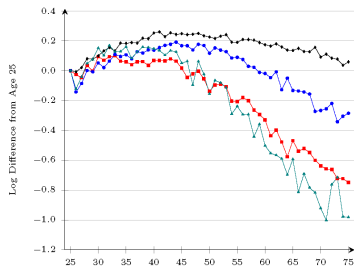
永久收入假说违背的原因

- 家庭特征随时间变化：例如当家庭人口增加，消费上升，而当孩子独立组成家庭之后消费随之下降；以及随着收入上升，从home production到market service的过渡(例如家政、育儿)
- 低流动性资产：Kaplan and Violante (2014)
- 有限理性的行为人：心理账户理论(Shefrin and Thaler, 1988)，近似最优(Akerlof and Yellen, 1985)，双曲贴现(Laibson, 1997)
- 退休后消费下降未必代表福利下降：Aguiar and Hurst(2005, 2013)

Figure 3: Lifecycle Profiles of Disaggregated Expenditure: Means



(a) Increasing Categories



- *Recursive Macroeconomic Theory* by Lars Ljungqvist and Thomas J.Sargent, Chapter 17
- *Computing the Krusell-Smith model: A Personal Experience* by Toshihiko Mukoyama, May 2019
- Krusell, P., & Smith, A. A. Jr. (1998). Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy. *Journal of Political Economy*, 106(5), 867-896.
- Kaplan, G., & Violante, G. L. (2014). A Model of the Consumption Response to Fiscal Stimulus Payments. *Econometrica*, 82(4), 1199-1239.
- Kaplan, G., Moll, B., & Violante, G. L. (2018). Monetary Policy According to HANK. *American Economic Review*, 108(3), 697-743.

- Shefrin, H. M., & Thaler, R. H. (1988). The Behavioral Life-Cycle Hypothesis. *Economic Inquiry*, **26**(4), 609–643.
- Akerlof, G. A., & Yellen, J. L. (1985). A Near-Rational Model of the Business Cycle, with Wage and Price Inertia. *Quarterly Journal of Economics*, **100**(Supplement), 823–838.
- Laibson, D. (1997). Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. *Quarterly Journal of Economics*, **112**(2), 443–478.
- Browning, M., & Crossley, T. F. (2001). The Life-Cycle Model of Consumption and Saving. *Journal of Economic Perspectives*, **15**(3), 3–22.
- Kirkby, R. (2017). A Toolkit for Value Function Iteration. *Computational Economics*, **49**(1), 1–15.