资本市场之债券市场（2）

债券价值分析

宋芳秀

回顾：贴现债券(Pure discount bond)

- 定义

➢ 贴现债券，又称零息票债券 (zero-coupon bond)，是一种以低于面值的贴现方式发行，不支付利息，到期按债券面值偿还的债券。

- 贴现债券的内在价值公式

$$V=\frac{A}{(1+y)^T} \qquad (1)$$

其中，V代表内在价值，A代表面值，y是该债券的预期收益率，T是债券到期时间。

附息债券(Level-coupon bond)

- 定义

➢ 附息债券，或称固定利息债券，按照票面金额计算利息，票面上可附有作为定期支付利息凭证的息票，也可不附息票。最普遍的债券形式

- 附息债券的内在价值公式

$$V=\frac{c}{(1+y)}+\frac{c}{(1+y)^{2}}+\frac{c}{(1+y)^{3}}+\cdots+\frac{c}{(1+y)^{T}}+\frac{A}{(1+y)^{T}} \quad (2)$$

其中，c是债券每期支付的利息。

永续债 (Consols)

- 定义

➢ 永续债是一种没有到期日的特殊的定息债券。最典型的永续公债是英格兰银行在18世纪发行的英国永续债(English Consols)，英格兰银行保证对该公债的投资者永久期地支付固定的利息。

➢ 永续债的内在价值公式

$$V = \frac{c}{(1+y)} + \frac{c}{(1+y)^2} + \frac{c}{(1+y)^3} + \cdots = \frac{c}{y} \qquad (3)$$

1、收益率

- 到期收益率
- 债券等价收益率（Bond equivalent yield）
- 年有效收益率（Effective annual yield）
- 至第一回购日的收益率（Yield to first call）

到期收益率

- 一般情况下（Mn为面值）

$$P_0=\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+y)^t}+\frac{M_n}{(1+y)^n}$$

- 零息债券

$$P_0=\frac{M_n}{(1+y)^n}$$

到期收益率

例1：金融工具有以下年收益

时间点	承诺年收益
1	$2,000
2	$2,000
3	$2,500
4	$4,000

- 假定价格 $7.704.

到期收益率

$$7704 = \frac{2000}{(1.12)} + \frac{2000}{(1.12)^2} + \frac{2500}{(1.12)^3} + \frac{4000}{(1.12)^4}$$

到期收益率

- 假定
  - 持有至偿还期
  - 无违约风险
  - 再投资收益率等于到期收益率本身
  - 无回购

债券等价收益率

- 债券等价收益率

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y/2)^t} + \frac{M_n}{(1+y/2)^n}$$

- n指债券利率支付次数

年有效收益率

- 年有效收益率

$$(1+y/2)^2-1$$

- 年有效收益率是指考虑到各种复利情况下，债券一年内的收益率。

例2

- 零息债券，2年后到期， F= 1000, P=850.
- 债券等价收益率？

$$850=\frac{1000}{(1+y/2)^4}$$

- 因此 y/2 = 4.145%， y = 8.29%.

例2

- 债券年有效收益率?

$$(1+4.145\%)^{2}-1=8.46\%$$

- 按月复利情况下的到期收益率?

$$(1+y_m/12)^{12}-1=8.46\%$$

$$y_m=8.14\%$$

专栏：复利计算

– 假设将金额A存于银行，名义年利率为R，计息方式为年度复利，那么n年之后，这笔存款的数额将升为：

$$A(1+R)^n$$

– 半年计息一次

$$A\left(1+\frac{R}{2}\right)^{2n}$$

– 每年计息m次

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}$$

– 当m接近于无穷

$$Ae^{Rn}$$

示例

- 例：假设存款金额为100，名义年利率为10%，存款期限为1年，在年度计息的条件下，明年的期末存款余额为：

$$100 \times 1.1 = 110$$

  - 半年计息一次：

$$100 \times 1.05 \times 1.05 = 110.25$$

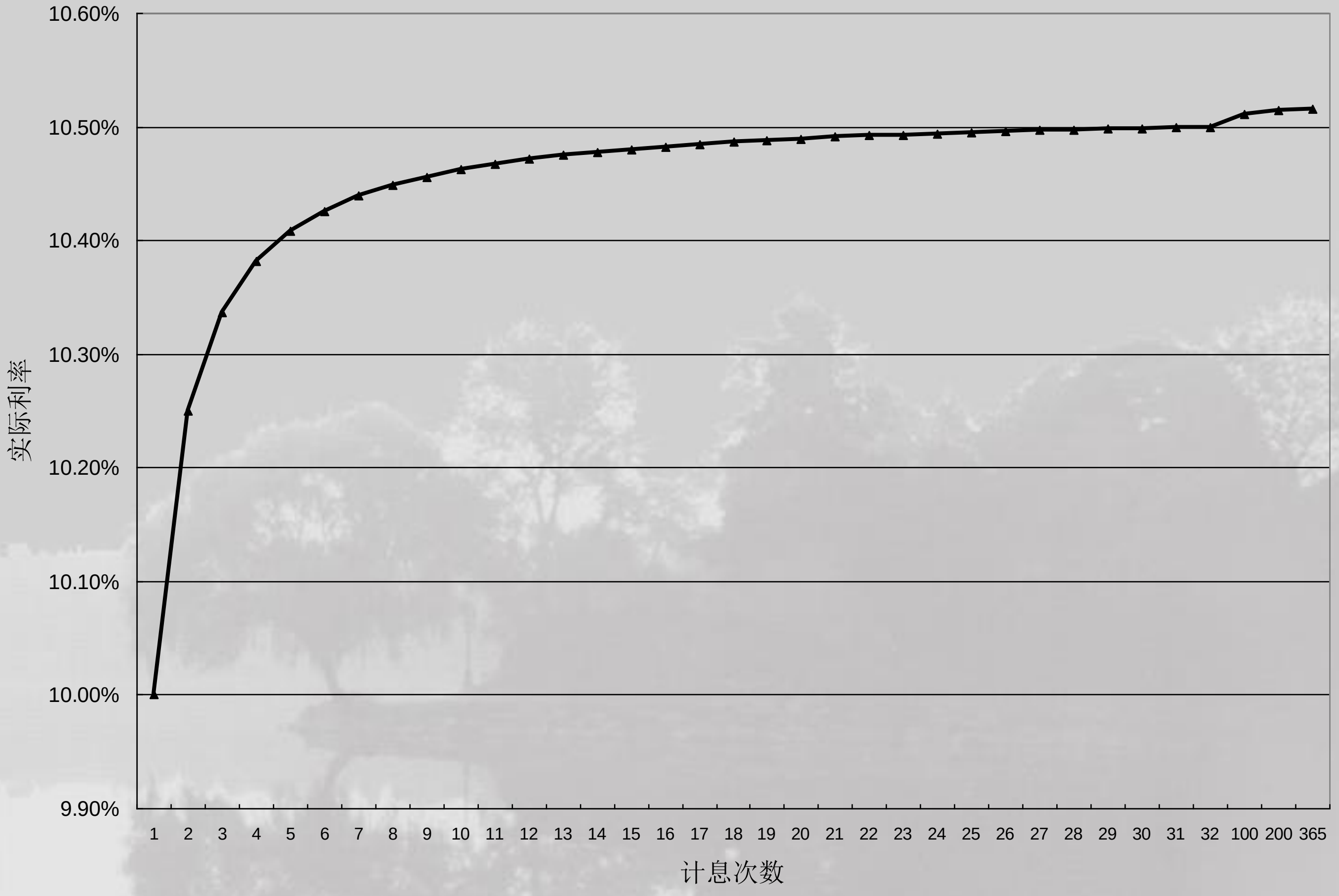
  - 每季度计息一次：

$$100 \times 1.025^4 = 110.38$$

  - 连续复利：

$$100 \times e^{0.10} = 110.52$$

实际利率与计息次数


10.60%
10.50%
10.40%
10.30%
10.20%
10.10%
10.00%
9.90%
实际利率
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 100 200 365
计息次数

不同计息次数利率的换算

- 连续复利与m次复利

$$Ae^{R_c n} = A\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

$$\Rightarrow R_c = m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)$$

$$\Rightarrow R_m = m(e^{R_c/m}-1)$$

- m次复利与k次复利

$$A\left(1+\frac{R_k}{k}\right)^{kn} = A\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

$$\Rightarrow R_k = k\times\left[\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m/k}-1\right]$$

示例

- 投资者甲将一笔存款存于银行，每季度计息一次，名义年利率为12%，问与之等价的连续复利年利率为多少？

$$R_c = m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)$$

$$\Rightarrow R_c = 4\ln\left(1+\frac{12\%}{4}\right) = 11.82\%$$

示例

- 投资者甲将一笔存款存于银行，每季度计息一次，名义年利率为12%。他的另外一笔存款是每月计息，但是两者实际利率一致，那么按月计息的这笔存款名义利率是多少？

$$R_k = k \times \left[\left(1 + \frac{R_m}{m} \right)^{m/k} - 1 \right]$$

$$R_k = 12 \times \left[\left(1 + \frac{12\%}{4} \right)^{4/12} - 1 \right] = 11.88\%$$

至第一回购日的收益率

- 例3: 20年债券，票面利率 10%，5年后随时可以按照面值回购。如果5年后到期收益率低于 10%，那么债券价值会超过面值，因此更可能被回购.

$$P_0=\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+y/2)^t}+\frac{C+Q}{(1+y/2)^n}$$

- 比如，P = 105, C = 3, F = 100, n = 40. YTM = 5.58%；5年后按面值回购，至第一回购日的收益率（Yield to first call） = 4.86%

至第一回购日的收益率

- 当至第一回购日的收益率小于到期收益率时，该指标可以成为未来收益率的更为保守的估计。

持有收益率 (HPR) 与总收益分析

- 定义
  - HPR 是债券持有期间的收益率，其大小取决于债券资本利得与再投资收益。
- 债券收益的来源
  - 1.利息支付
  - 2.利息收入的再投资收益 (再投资风险)
  - 3.资本利得或者资本损失 (价格风险)

总收益分析（Total Return Analysis）

- 也叫 “horizon return”, holding period return, or “realized compound yield.”
- 分析债券的收入来源
- 首先，利用年金等式确定利息收入的未来收入

$$C\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$$

- C = 利息支付（半年）
- n = 至偿还期或者出售债券时利息支付次数
- r =半年基础上的再投资收益

总收益分析

- 其中一部分，全部利息为 nC.
- 所以，利息的利息为：

$$C\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]-nC$$

- 最后计算资本利得：

$$P_n-P_0$$

总收益分析

- 例4：分解债券收益 (平价债券)。投资$1000于 7年期票面利率 9%（半年附息），面值交易。
- 已知：到期收益率 9% (bond equiv. basis), 半年4.5%。如果这一收益率确定无疑，那么在到期日，累积收入为

$$1000\times(1.045)^{14}=18$$

- 所以收益就是 $852 ($1,852 -$1,000).

分解

- 1. 利息加上利息的利息

$$45\left[\frac{(1.045)^{14}-1}{0.045}\right]=852$$

- 2. 利息的利息 = $852 - 14($45) = $222
- 3. 资本利得 = $0 *(为什么?)*
- 因此，利息的利息占总收益的 $222/$852 = 26% （再投资风险).

例5: 收益分解 (折价债券)

- 投资于期限 20年，票面利率7% （半年支付）价格$816 ($1,000 面值) 的债券。到期收益率 9%.
- 已知：到期收益率 9% (bond equiv. basis),每半年得 4.5%，如果这一收益是肯定的，那么在到期日累积的收入将为：

$$816\times(1.045)^{40}=474$$

- 因此，总收益为 $4,746-816 = $3,930.

分解

- 1. 利息加上利息的利息

$$35\left[\frac{(1.045)^{40}-1}{0.045}\right]=374$$

- 2.利息的利息 \$3,746 - 40(\$35) = \$2,346
- 3. 资本利得 \$1,000-\$816 = \$184
- 总之：
- 总利息 = \$1,400
- 利息的利息= \$2,346
- 资本利得 = \$ 184
- 总和 = \$3,930

例6: 总收益的敏感性分析

- 假定：投资于期限 20年，票面利率7% （半年支付），价格$816 ($1,000 面值) 的债券。到期收益率 9%.但假定再投资收益率为 6% (半年 3%).
- 对总收益的影响?
- 1. 利息加上利息的利息 =

$$35\left[\frac{(1.03)^{40}-1}{0.03}\right]=263$$

- 2. 利息的利息 = $2639 - 40($35) = $1239
- 3. 资本利得 = $1,000-$816 = $184

例6: 总收益的敏感性分析

- 全部利息 = $1,400
- 利息的利息 = $1239
- 资本利得 = $ 184
- 总和 = $2823

$$816 = \frac{2823 + 816}{(1 + y/2)^{40}}$$

$$y = 7.6\%$$

- 7.6% is 明显小于到期收益率 9%!

2、债券价值属性

- 到期时间 (期限)
- 债券的息票率
- 债券的可赎回条款
- 税收待遇
- 市场的流通性
- 违约风险
- 可转换性
- 可延期性

到期时间 (Time to Maturity)

- 重点分析债券的市场价格时间轨迹
- 当债券息票率等于预期收益率，投资者资金的时间价值通过利息收入得到补偿；
- 当息票率低于预期收益率时，利息支付不足以补偿资金的时间价值，投资者还需从债券价格的升值中获得资本收益；
- 当息票率高于预期收益率时，利息支付超过了资金的时间价值，投资者将从债券价格的贬值中遭受资本损失，抵消了较高的利息收入，投资者仍然获得相当于预期收益率的收益率
- 无论是溢价发行的债券还是折价发行的债券，若债券的内在到期收益率不变，则随着债券到期日的临近，债券的市场价格将逐渐趋向于债券的票面金额。

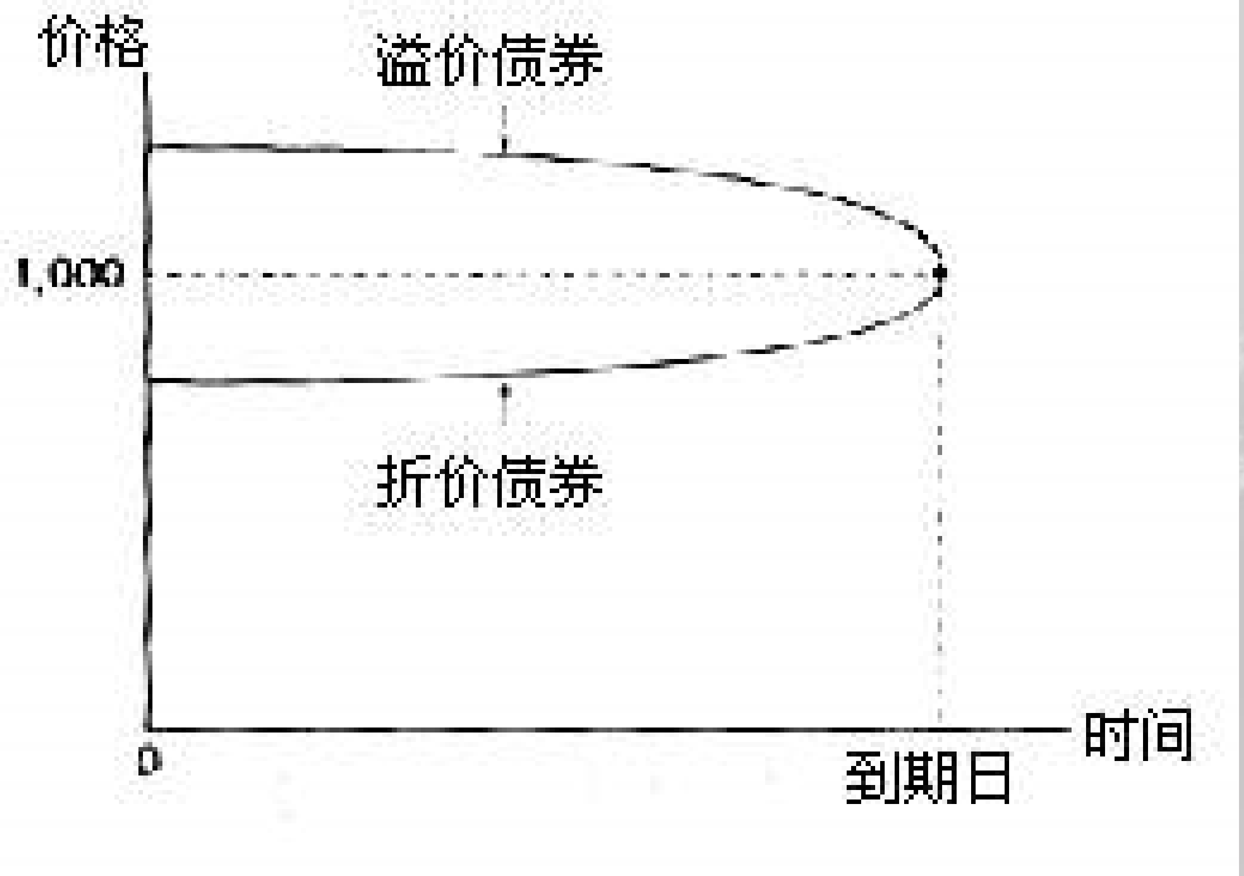
表1:20年期、息票率为9%、内在到期收益率为12%的债券的价格变化

剩余到期年数	以6%贴现的45美元息票支付的现值 (美元)	以6%贴现的票面价值的现值 (美元)	债券价格 (美元)
20	677.08	97.22	774.30
18	657.94	122.74	780.68
16	633.78	154.96	788.74
14	603.28	195.63	798.91
12	564.77	256.98	811.75
10	516.15	311.80	827.95
8	454.77	393.65	848.42
6	377.27	496.97	874.24
4	279.44	627.41	906.85
2	155.93	792.09	948.02
1	82.50	890.00	972.52
0	0.00	1000.00	1000.00

表2: 20年期、息票率为9%、内在到期收益率为7%的债券的价格变化

剩余到期年数	以3.5%贴现的45美元息票支付的现值 (美元)	以3.5%贴现的票面价值的现值 (美元)	债券价格 (美元)
20	960.98	252.57	1213.55
18	913.07	289.83	1202.90
16	855.10	332.59	1190.69
14	795.02	381.66	1176.67
12	722.63	437.96	1160.59
10	639.56	502.57	1142.13
8	544.24	576.71	1120.95
6	434.85	611.78	1096.63
4	309.33	759.41	1068.74
2	165.29	871.44	1036.73
1	85.49	933.51	1019.00
0	0.00	1000.00	1000.00

折 (溢) 价债券的价格变动



零息票债券的价格变动

- 零息票债券的价格变动有其特殊性。在到期日，债券价格等于面值，到期日之前，由于资金的时间价值，债券价格低于面值，并且随着到期日的临近而趋近于面值。如果利率恒定，则价格以等于利率值的速度上升。

息票率 (Coupon Rate)

- 息票率决定了未来现金流的大小。在其他属性不变的条件下，债券的息票率越低，债券价格随预期收益率波动的幅度越大。

例7

- 假设：5种债券，期限均为20年，面值为100元，息票率分别为4%、5%、6%、7% 和 8%，预期收益率都等于7%，可以利用式 (2) 分别计算出各自的初始的内在价值。
- 如果预期收益率发生了变化 (上升到8%和下降到5%)，相应地可以计算出这5种债券的新的内在价值。具体结果见表2。
- 从表2中可以发现,面对同样的预期收益率变动,债券的息票率越低，债券价格的波动幅度越大。

经济学院 SCHOOL OF ECONOMICS

表2：内在价值 (价格) 变化与息票率之间的关系

息票率	预期收益率 7%	预期收益率 8%	预期收益率 5%	内在价值变化率 (7% 到8%)	内在价值变化率 (7% 到 5%)
4%	68	60	87	-11.3%	+28.7%
5%	78	70	100	-10.5%	+27.1%
6%	89	80	112	-10.0%	+25.8%
7%	100	90	125	- 9.8%	+25.1%
8%	110	100	137	- 9.5%	+24.4%

可赎回条款 (Call Provision)

- 可赎回条款，即在一定时间内发行人有权赎回债券。
- 赎回价格 (Call price)：初始赎回价格通常设定为债券面值加上年利息，并且随着到期时间的减少而下降，逐渐趋近于面值。赎回价格的存在制约了债券市场价格的上升空间，并且增加了投资者的交易成本。
- 赎回保护期，即在保护期内，发行人不得行使赎回权，一般是发行后的5至10年 。

可赎回条款对债券收益率的影响

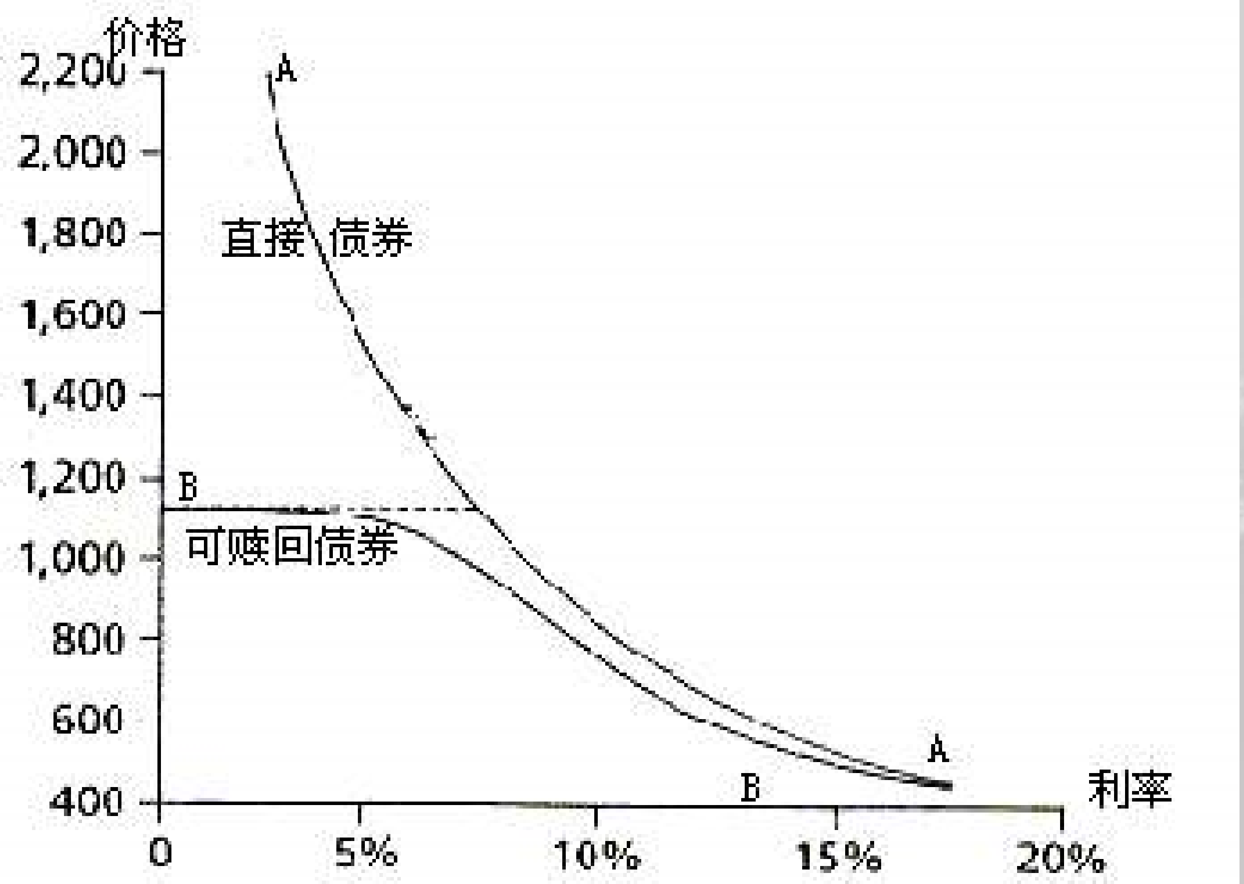
- 可赎回条款的存在，降低了该类债券的内在价值，并且降低了投资者的实际收益率，详细分析见例子。
- 息票率越高，发行人行使赎回权的概率越大，即投资债券的实际收益率与债券承诺的收益率之间的差额越大。为弥补被赎回的风险，这种债券发行时通常有较高的息票率和较高的承诺到期收益率。在这种情况下，投资者关注赎回收益率(yield to call, YTC)，而不是到期收益率 (yield to maturity)。

例8

30年期的债券以面值1000美元发行，息票率为8%，比较随利率的变化，可赎回债券和不可赎回债券之间的价格差异的变化。

- 在图1中，如果债券不可赎回，其价格随市场利率的变动如曲线AA所示。如果是可赎回债券，赎回价格是1100美元，其价格变动如曲线BB所示。
- 随着市场利率下降，债券未来支付的现金流的现值增加，当这一现值大于赎回价格时，发行者就会赎回债券，给投资者造成损失。在图中，当利率较高时，被赎回的可能性极小，AA 与BB大致重合；利率下降时，AA 与BB逐渐分离，它们之间的差异反映了公司实行可赎回权的价值。当利率很低时，债券被赎回，债券价格变成赎回价格1100美元。

图1


价格
2,200
2,000
1,800
1,600
1,400
1,200
1,000
800
600
400
A
直接债券
B
可赎回债券
A
B
利率
0
5%
10%
15%
20%

赎回收益率

- 赎回收益率也称为**至第一回购日的收益率** (yield to first call)，它假设公司一旦有权利就执行可赎回条款。
- 赎回收益率 VS. 到期收益率？

例9

30年期的可赎回债券，面值为1000美元，发行价为1150美元，息票率8% (以半年计息)，赎回保护期为10年，赎回价格1100美元。

- 赎回收益率 (YTC)：

$$1150=\frac{40}{(1+YTC/2)}+\cdots+\frac{40}{(1+YTC/2)^{20}}+\frac{1100}{(1+YTC/2)^{20}}$$

- 求得：YTC=6.64%
- 到期收益率 (YTM)：

$$1150=\frac{40}{(1+YTM/2)}+\cdots+\frac{40}{(1+YTM/2)^{60}}+\frac{1000}{(1+YTM/2)^{60}}$$

- 求得：YTM=6.82%

债券的溢价折价发行对影响公司的赎回决策的影响

- 折价发行：如果债券折价较多，价格远低于赎回价格，即使市场利率下降也不会高于赎回价格，公司就不会赎回债券，也即折价债券提供了隐性赎回保护。对折价债券主要关注到期收益率。
- 溢价发行： 溢价债券由于发行价较高，极易被赎回。所以，对溢价债券投资者主要关注赎回收益率。

小结：债券属性与债券收益率

债券属性	与债券收益率的关系
1.期限	当预期收益率 (市场利率) 调整时，期限越长，债券的价格波动幅度越大；但是，当期限延长时，单位期限的债券价格的波动幅度递减。
2.息票率	当预期收益率 (市场利率) 调整时，息票率越低，债券的价格波动幅度越大。
3.可赎回条款	当债券被赎回时，投资收益率降低。所以，作为补偿，易被赎回的债券的名义收益率比较高，不易被赎回的债券的名义收益率比较低。
4.税收待遇	享受税收优惠待遇的债券的收益率比较低，无税收优惠待遇的债券的收益率比较高。
5.流动性	流动性高的债券的收益率比较低，流动性低的债券的收益率比较高。
6.违约风险	违约风险高的债券的收益率比较高，违约风险低的债券的收益率比较低。
7.可转换性	可转换债券的收益率比较低，不可转换债券的收益率比较高。
8.可延期性	可延期债券的收益率比较低，不可延期的债券收益率比较高。

3、债券的主要风险

- 利率风险：利率的影响
- 再投资风险
- 信用风险
- 通货膨胀风险
- 流动性风险
- 其他风险：提前赎回风险

利率风险

- 利率风险是利率上升的风险
  - 引起债券市场价格下降的风险
- 如果债券的到期期限大于投资人持有期限，i↑P↓意味着资本损失
- 债券到期期限越长，价格对于利率变动反应越大
  - 利率风险更大，长期债券的价格和回报率波动性更大，风险更大
- 债券到期期限越长，债券投资回报率对于利率变动反应越大
  - 即使初始市场利率很高，i↑市场利率上升，债券仍然可能出现负值的投资回报

利率风险

- 只有在债券的到期期限与持有期限一致时，债券的投资回报率=债券的到期收益率
  - 到期期限等于债券持有期限，则不存在利率风险
  - 再投资风险

再投资风险Reinvestment Risk

- 如果持有过程中出现现金流，则再投资时的利率是不确定的
- 利率上升获得收益，反之，利率下降受到损失
  - 再投资风险是利率下降的风险

利率和债券价格：基点价值（Price Value of a Basis Point）

- *定义：基点价值是要求的到期收益率变动一个基点所对应的债券价格的变化额。*
- 例：期限5年，票面利率9%（半年支付），价格为100。求该债券的基点价值。

利率和债券价格：基点价值（Price Value of a Basis Point）

- 目前的到期收益率为9%。到期收益率增加1个基点，为9.01% ,债券新的价格（**公式中104.5应为100**）

$$P=\sum_{t=1}^{10}\frac{4.5}{(1+0.04505)^t}+\frac{104.5}{1.04505^{10}}=99.96$$

- 基点价值 = $100 - $99.9604 = $0.0396

利率和债券价格：价格波动的收益率价值（Yield Value of a Price Change）

- *定义：价格波动的收益率价值，是指债券价格发生一定金额变化（通常是1/32 of $1）所对应的到期收益率变化的幅度。*
- 例4-2：期限5年，票面利率9%（半年支付）， 收益率为9%，对应价格为$100。（公式中104.5应为100）

$$100\frac{1}{32}=\sum_{t=1}^{10}\frac{4.5}{(1+y/2)^{t}}+\frac{104.5}{(1+y/2)^{10}}$$

$$y=8.992\%$$

- *价格波动的收益率价值* = 9% - 8.992% = 0.008%

利率与投资回报率之间关系的要点

TABLE 3.2 One-Year Returns on Different-Maturity 10% Coupon Rate Bonds When Interest Rates Rise from 10% to 20%

(1) Years to Maturity When Bond Is Purchased	(2) Initial Current Yield (%)	(3) Initial Price ($)	(4) Price Next Year* ($)	(5) Rate of Capital Gain (%)	(6) Rate of Return (2 + 5) (%)
30	10	1,000	503	–49.7	–39.7
20	10	1,000	516	–48.4	–38.4
10	10	1,000	597	–40.3	–30.3
5	10	1,000	741	–25.9	–15.9
2	10	1,000	917	–8.3	+ 1.7
1	10	1,000	1,000	0.0	+10.0

*Calculated with a financial calculator using Equation 3.

Sample of current coupon rates and yields on government bonds
http://www.bloomberg.com/markets/iyc.html

影响价格-利率敏感性的主要因素

- 偿还期
- 票面利率
- 利率水平

例： 4个债券，每个债券的到期收益率为9%，半年支付。价格分别为$100、$100、$84.175、$63.1968。

影响价格-利率敏感性的主要因素

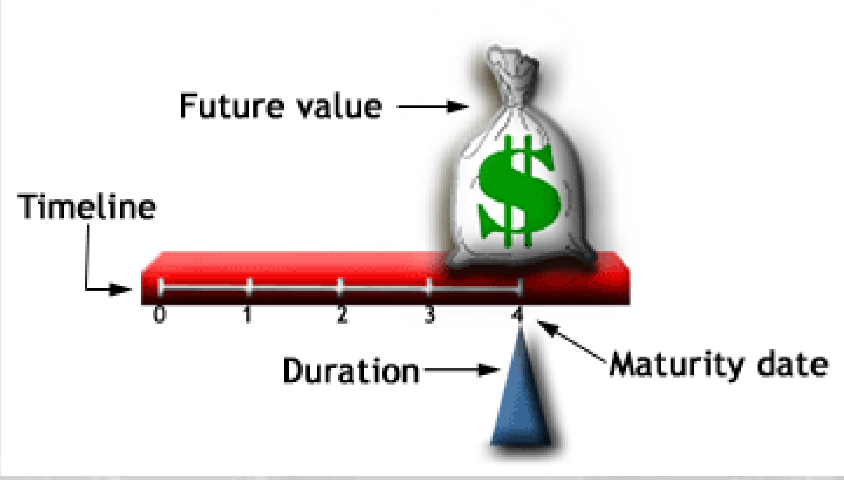
new yld	BP change	9% 5yr	9% 20yr	5% 5yr	5% 20yr
6	−300	12. 8	34. 67	13. 73	39. 95
8	−100	4. 06	9. 9	4. 35	11. 26
8. 9	−10	0. 4	0. 93	0. 42	1. 05
9. 01	1	−0. 04	−0. 092	−0. 042	−0. 14
9. 5	50	−1. 95	−4. 44	−2. 09	−5. 01
10	100	−3. 86	−8. 58	−4. 13	−9. 64
12	300	−11	−22. 6	−11. 9	−25. 1

4、久期（ Duration ） – 利率风险的衡量

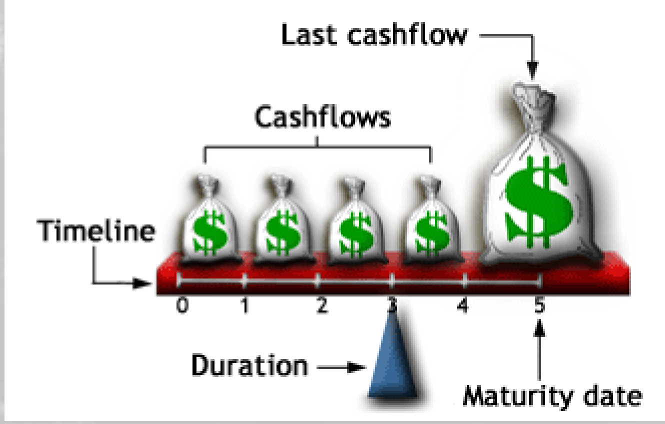
- 由Frederick Macaulay提出的单一的衡量数字：
  - F.R.Macaulay, *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Price in the U.S. Since 1856*, Columbia Univ.Press, 1938
- 例如，10年期附息债券和10期零息债券，前者的现金流偿付的平均时间更短
  - 有效到期期限更短
- 债类工具久期（持续期）是债券本息一系列支付时间的加权平均值
  - 现金流/本息支付的平均时间
  - 权重：每一笔现金流的现值/P（债券现值/价格）
  - 以年为单位

久期Duration

零息债券



附息债券



图片来源：Investopeida.com

久期Duration
- 衡量债类工具投资回报期限

$$DUR = \sum_{t=1}^{n} t \frac{CP_t}{(1+i)^t} \bigg/ \sum_{t=1}^{n} \frac{CP_t}{(1+i)^t}$$

1. 其他情形相同，债券的期限越长，久期一般越大
2. 其他情形相同，利率上升，附息债券的久期下降
3. 债券的票面利率越高，债券久期越小

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

票面利率10%，十年期的附息债券，到期收益率10%条件下的久期计算

TABLE 3.3 Calculating Duration on a $1,000 Ten-Year 10% Coupon Bond When Its Interest Rate Is 10%

(1) Year	(2) Cash Payments (Zero-Coupon Bonds) ($)	(3) Present Value (*PV*) of Cash Payments (*i* = 10%) ($)	(4) Weights (% of total *PV* = *PV*/$1,000) (%)	(5) Weighted Maturity (1 × 4)/100 (years)
1	100	90.91	9.091	0.09091
2	100	82.64	8.264	0.16528
3	100	75.13	7.513	0.22539
4	100	68.30	6.830	0.27320
5	100	62.09	6.209	0.31045
6	100	56.44	5.644	0.33864
7	100	51.32	5.132	0.35924
8	100	46.65	4.665	0.37320
9	100	42.41	4.241	0.38169
10	100	38.55	3.855	0.38550
10	1,000	385.54	38.554	3.85500
Total		1,000.00	100.000	6.75850

同一债券，到期收益率20%条件下的久期计算

TABLE 3.4 Calculating Duration on a $1,000 Ten-Year 10% Coupon Bond When Its Interest Rate Is 20%

(1) Year	(2) Cash Payments (Zero-Coupon Bonds) ($)	(3) Present Value (*PV*) of Cash Payments (i = 20%) ($)	(4) Weights (% of total *PV* = *PV*/$580.76) (%)	(5) Weighted Maturity (1 × 4)/100 (years)
1	100	83.33	14.348	0.14348
2	100	69.44	11.957	0.23914
3	100	57.87	9.965	0.29895
4	100	48.23	8.305	0.33220
5	100	40.19	6.920	0.34600
6	100	33.49	5.767	0.34602
7	100	27.91	4.806	0.33642
8	100	23.26	4.005	0.32040
9	100	19.38	3.337	0.30033
10	100	16.15	2.781	0.27810
10	$1,000	161.51	27.808	2.78100
Total		580.76	100.000	5.72204

久期的性质

- 证券投资组合的久期是组合内单个证券久期的加权平均，权重是单个证券在投资组合中所占的比重。
  - 由两个债券构成构成的组合， P(1) = \$8,000，DM(1) = 4.3； P(2) = \$12,000， DM(2) = 3.6 。
  - Dportfolio = (8/20)(4.3) + (12/20)(3.6) = 3.88

久期Duration

- 一个反映了所有影响因素作用的衡量价格对市场利率变动敏感性的综合方法
  - 期限Maturity
  - 票面利率Coupon rate
  - 到期收益率Yield to maturity

定义：

$$Macaulay久期=\left[1\times\frac{C}{(1+r)}+2\times\frac{C}{(1+r)^2}+\ldots+n\times\frac{C}{(1+r)^n}+n\times\frac{M}{(1+r)^n}\right]\times\frac{1}{P}$$

$$Dm=\frac{1}{P}\times\left[\sum_{t=1}^{n}t\times\frac{C}{(1+r)^t}+n\times\frac{M}{(1+r)^n}\right]$$

久期（1）：连续复利的情形

- 久期的计算

令:c_i：债券持有者在t_i时刻收到的现金流（$1 \leqq i \leqq n$）

B: 债券的在0时刻的价格

y: 连续复利条件下的收益率

D：久期

经济学院 SCHOOL OF ECONOMICS

连续复利：单个债券的久期

①定义

$$B=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{-yt_i}$$

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i c_i e^{-yt_i}}{B}=\sum_{i=1}^{n}t_i[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B}]$$

②久期的经济意义

根据 $B=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{-yt_i}$得

$$\frac{\partial B}{\partial y}=-\sum_{i=1}^{n}c_i t_i e^{-yt_i} \qquad \frac{\partial B}{\partial y}=-BD$$

将收益率曲线进行微量平移，使所有期限的利率（包括债券收益率）都增加Δy，相应的，债券的价格也变动 ΔB，上式近似地等于：

$$\frac{\Delta B}{\Delta y} = -BD \qquad \frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y$$

该公式表明：

Ⅰ：债券价格的变动和收益率的变动负相关

Ⅱ：债券价格变化的百分比等于其久期乘以收益曲线的平行增量

- 例：某个面值为$100、附息票利率为10%的3年期债券。假定该债券连续复利的年利率为12%,即y=0.12。息票每6个月付息一次，利息为$5 。贴现率用收益率代替。求该债券的久期。

久期的计算（表1）

时间	付款金额	现值	权重	时间×权重
0.5	5	4.709	0.050	0.025
1.0	5	4.435	0.047	0.047
1.5	5	4.176	0.044	0.066
2.0	5	3.933	0.042	0.084
2.5	5	3.704	0.039	0.098
3.0	105	73.256	0.778	2.334
合计	130	94.213	1.000	2.654

- 第五列的数字之和即为久期2.654年。

∵ΔB=-BDΔy

=- 94.213 ×2.654Δy=-250.04Δy

如果Δy=+0.001 ,即:y增加到0.121;

此时由公式我们可以估计: ΔB=-0.25

即预计债券价格将下降到:94.213-0.250=93.963

久期（2）（一年付息m次）

债券价格：

$$B=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{(1+y/m)^{mt_i}}$$

同理，得：

$$\Delta B=-\frac{BD\Delta y}{1+y/m}$$

其中，$\dfrac{D}{1+y/m}$ 称为修正的久期 (*Modified Duration*，用D*表示)

- 考虑表1中的债券价格为94.213，久期为2.653。每半年计一次复利计算的收益率为12.3673%。

- $D^*=2.653/(1+0.123673/2)=2.4985$

  $\Delta B=-94.213\times 2.4985\Delta y$

  即： $\Delta B=-235.39\Delta y$
- 当债券收益率上升10个基点(=0.1%)，$\Delta y=+0.001$。

  则可预计： $\Delta B=-235.39\times 0.001=-0.235$

  债券的价格将下降到： 94.213 - 0.235=93.978。

- 如果： $\Delta y=+0.001$，则： $y=12.4673\%$(等价于连续复利的12.0941%)
- 经过精确计算得到的债券价格也为93.978。这表明修正久期公式的准确度较高。

久期的局限性(1)：凸性

- 凸性衡量的是收益率-价格曲线弯曲的程度。
- 非含权证券都有正的凸性
- 正的凸性是受欢迎的，会给投资者带来额外的利益。
- 凸性会随着到期收益率的增加而降低。

久期的局限性(1)：凸性

更准确的债券价值变化

- 根据泰勒展式，有：

$$\Delta B = \frac{dB}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dy^2}(\Delta y)^2$$

那么：

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

- 通过使资产的久期和凸性与负债的久期和凸性相互匹配，一家公司可以避免零息率曲线较大幅度平移所带来的利率风险。

久期的局限性：凸性

- 凸性（convexity）的衡量

$$C=\frac{1}{B}\frac{d^2B}{dy^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^2c_ie^{-yt_i}}{B}$$

- 如果债券组合将来提供的现金流在长时期内均匀分布，则该组合的凸性是最大的。
- 如果组合支付的现金流集中在某一特定的时间点上，凸性最小。

例1

- 债券A，面额100，到期时间15年，每年付息一次，票面利率8%。
  债券B，面额100，到期时间10年，每年付息一次，票面利率0%。

  两张债券都处在到期收益率(YTM)4.98%的状况下。如下表:

计算结果

面額 100	Bond A	Bond B
到期時間(年)	15	10
票面利率	8%	0%
到期殖利率	4.98%	4.98%
價格	131.39	61.5
存續時間(年)	10	10
曲率	123.42	99.8

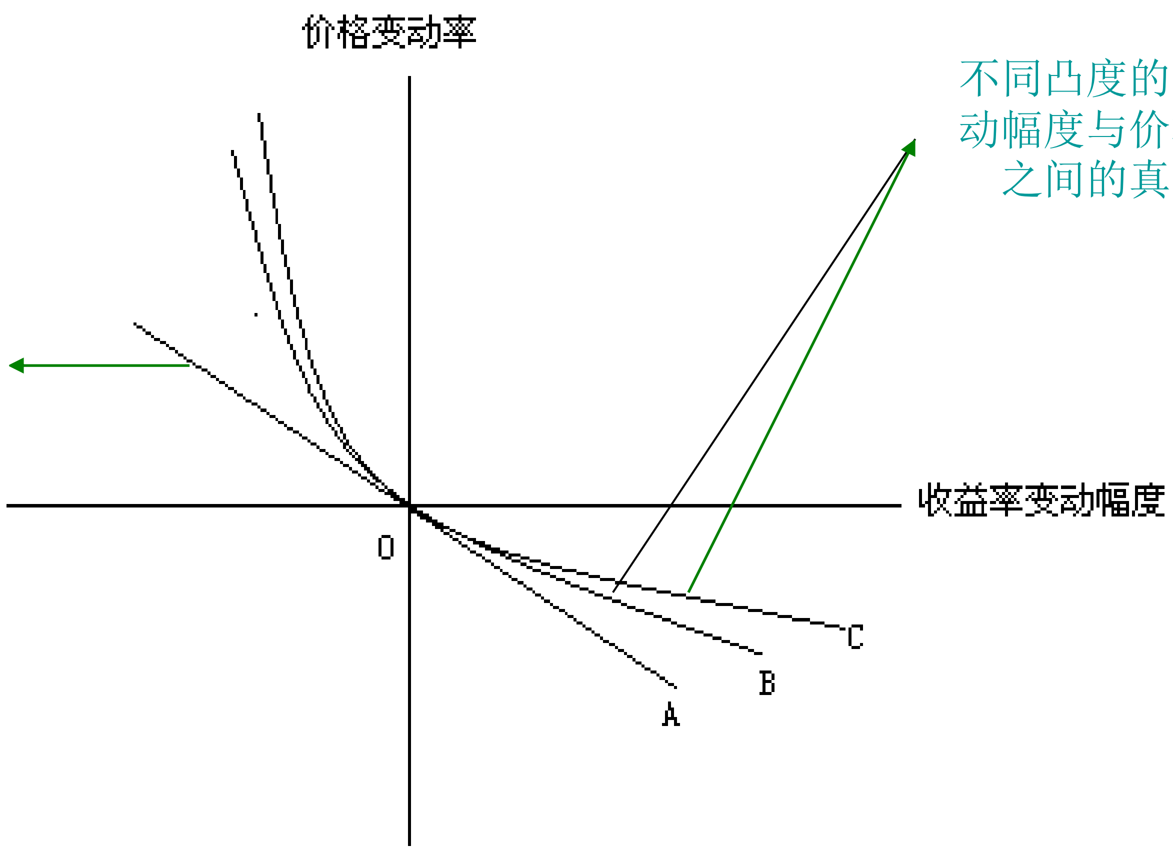
久期的局限性：凸性

凸性的影响

- 对于两个具有相同久期的证券组合，当收益率变化很小时，两个组合价值变化的百分比相同。
- 当收益率变化较大时，两个组合的凸度（曲率）不同，其价值变化的百分比也不同。
  - 当收益率减小时，凸度（曲率）大的组合价值增加的速度较快；
  - 当收益率增大时，凸度（曲率）大的组合价值减少的速度较慢。

相同久期的证券组合

用久期近似计算的收益率变动与价格变动率的关系



不同凸度的收益率变动幅度与价格变动率之间的真实关系

久期的局限性(2)：非平行移动

非平行移动

- 久期的计算是建立在收益率曲线平行移动的假设上，事实上，短期利率的波动率和长期利率的波动率并不完全一致。
- 这就要求利用久期进行利率风险管理的金融机构必须分段进行利率风险的对冲。