

Intermediate Macro: Lecture 24

Lun Li

Peking University

lunl@pku.edu.cn

May 20th, 2025

- 上节课我们对确定性和简单的随机性递归模型进行了介绍
- 今天：随机递归性模型的一些应用
 - RBC 模型回顾
 - Bewley-Huggett-Aiyagari 模型简介

模型设定:

- 家庭有 N_t 个家庭成员, 每个人有1单位时间可以分配至闲暇 L_t 或劳动 H_t , 即 $H_t + L_t = N_t$.

- 生产函数

$$Y_t = z_t K_t^\alpha (A_t H_t)^{1-\alpha}$$

- 人口和科技增长:

$$N_{t+1} = (1 + g_N) N_t = (1 + g_N)^t N_0$$

$$A_{t+1} = (1 + g_A) A_t = (1 + g_A)^t A_0$$

- 效用函数

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((1 - \phi) \log \left(\frac{C_t}{N_t} \right) + \phi \log \left(\frac{L_t}{N_t} \right) \right)$$



- 假设 z_t 是从长期增长率的对数偏离，服从AR(1)分布

$$\log z_t = \rho \log z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \rho \in [0, 1], \quad \varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$$

其中 ρ 代表自回归系数。

- 资源约束: $C_t + I_t = Y_t$
- 资本的运动方程: $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$

- 把所有变量同除 $A_t N_t$ ，得到下面的优化问题

$$\max_{c_t, l_t, i_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ((1 - \phi) \log c_t + \phi \log l_t)$$

$$\text{s.t. } y_t = z_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$$

$$c_t + i_t = y_t$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

$$h_t + l_t = 1$$

贝尔曼方程

- 写出贝尔曼方程

$$\begin{aligned} V(k_t, z_t) = \max_{c_t, h_t, k_{t+1}} & (1 - \phi) \log(c_t) + \phi \log(1 - h_t) + \\ & \beta \mathbb{E}[V(k_{t+1}, z_{t+1}) | z_t] \\ \text{s.t. } & c_t + k_{t+1} = z_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)k_t \end{aligned}$$

- 代入资源约束

$$\begin{aligned} V(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} & \left\{ (1 - \phi) \log(z_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) \right. \\ & \left. + \phi \log(1 - h_t) + \beta \mathbb{E}[V(k_{t+1}, z_{t+1}) | z_t] \right\} \end{aligned}$$

- 一阶条件

$$[k_{t+1}] : \frac{-(1-\phi)}{z_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + \beta \mathbb{E}[V_1(k_{t+1}, z_{t+1})|z_t] = 0$$

$$[h_t] : \frac{(1-\phi)(1-\alpha)z_t k_t^\alpha h_t^{-\alpha}}{z_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} - \frac{\phi}{1-h_t} = 0$$

- 包络性条件

$$V_1(k_t, z_t) = \frac{(1-\phi)(1 + \alpha z_t k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - \delta)}{z_t k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}}$$

- 将一阶条件和包络性条件联立，得到以下的随机欧拉方程：

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E} \left[\frac{1}{c_{t+1}} (1 + \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha} - \delta) \middle| z_t \right]$$

- 另外，需要当期消费、劳动的关系来确定稳态

$$\frac{(1 - \phi)(1 - \alpha) z_t k_t^\alpha h_t^{-\alpha}}{c_t} - \frac{\phi}{1 - h_t} = 0$$

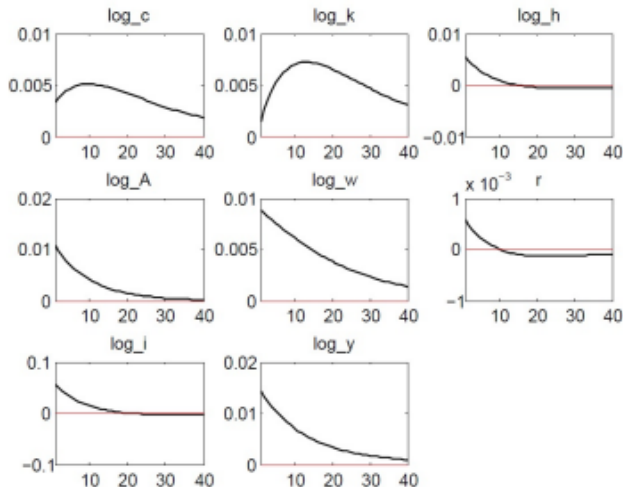
- 假设生产率没有任何偏离的情况下, 即 $z_t = 1, \forall t$, 可以通过

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} &= \beta \left[\frac{1}{c} (1 + \alpha k^{\alpha-1} h^{1-\alpha} - \delta) \right] \\ \frac{(1-\phi)(1-\alpha)k^{\alpha}h^{-\alpha}}{c} - \frac{\phi}{1-h} &= 0 \\ c + k &= zk^{\alpha}h^{1-\alpha} + (1-\delta)k\end{aligned}$$

来确定稳态的 (c, k, h) 的取值。

脉冲响应函数

- 我们可以通过脉冲响应函数(Impulse Response Function)分析：当生产率上升1%时，该经济体内的其他变量会产生怎样的变化？



RBC模型的特点

- 具有微观基础的宏观模型：代理行为人根据冲击，调整最优的选择
- 能够在无摩擦，无名义刚性的情况下产生较为实际的产出波动
- 冲击的传导机制：
 - 生产率带来的投资波动会对资本水平带来长期的影响。
 - 这些影响通过内生的劳动供给决策被进一步扩大。
 - 波动性本身有自回归系数（持久性），会进一步影响生产率冲击的传导

Bewley-Huggett-Aiyagari Model: 代理人异质性

- 这类问题中，行为人表现为“ex ante identical but ex post heterogenous”
- 每个人的初始情况相同，但会经受到不同水平的随机收入冲击，从而影响一生的消费、财富等
- 一般这类模型都存在一种储蓄品，使行为人可以用来一定程度上对冲风险。
 - Huggett model: 代理人间借贷 (Private IOUs, i.e. inside money), 总量为0 (Huggett, 1993)
 - Bewley model: 现金或债券(fiat money or bond, i.e. outside money), 总供给为正 (Imrohoroglu, 1989)
 - Aiyagari model: 资本积累, 资本总量为正 (Aiyagari, 1994)
- 因此这类模型一般被称为 Bewley-Huggett-Aiyagari model

- 优化问题

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (1)$$

$$\text{s.t. } c_t + a_{t+1} = (1 + r)a_t + ws_t \quad (2)$$

$$a_{t+1} \in \mathcal{A} \quad (3)$$

- 其中 \mathcal{A} 代表下期财富可能的取值，比如说可以是一个 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 的格点
- s_i 代表劳动供给的随机冲击；对于一个 $s_t = \bar{s}_i$ 的人来说，其劳动收入会是 $w\bar{s}_i$ 。假设 s_t 服从一个 m -state 马尔科夫链。

$$v(a_h, \bar{s}_i) = \max_{a' \in \mathcal{A}} \left\{ u[(1+r)a_h + w\bar{s}_i - a'] + \beta \sum_{j=1}^m P(i, j) v(a', \bar{s}_j) \right\}$$

- 其中 a' 代表下期持有的财富，我们可以用一个政策函数来表示：

$$a' = g(a, s)$$

- $P(i, j)$ 代表从状态 \bar{s}_i 跳到 \bar{s}_j 的概率。

财富、收入分布的演化

- 我们用 $\lambda_t(a, s)$ 代表在时间 t , 财富为 a , 劳动收入为 s 的概率

$$\lambda_t(a, s) = \text{Prob}(a_t = a, s_t = s)$$

- 通过马尔科夫链, 我们可以计算下一期收入和财富在 a', s' 的概率

$$\begin{aligned} \text{Prob}(a_{t+1} = a', s_{t+1} = s') &= \sum_{a_t} \sum_{s_t} \text{Prob}(a_{t+1} = a' | a_t = a, s_t = s) * \\ &\quad \text{Prob}(s_{t+1} = s' | s_t = s) * \text{Prob}(a_t = a, s_t = s) \end{aligned}$$

或者我们也可以写成

$$\lambda_{t+1} a', s' = \sum_a \sum_s \text{Prob}(s_{t+1} = s' | s_t = s) * \mathcal{I}(a', s, a)$$

这里当且仅当 $a' = g(a, s)$ 时, $\mathcal{I}(a', s, a) = 1$

平稳分布(Stationary Distribution)

- 也可以写成

$$\lambda_{t+1}(a', s') = \sum_s \sum_{a: a' = g(a, s)} \lambda_t(a, s) P(s, s')$$

- 如果有一个 λ 满足上式且不随时间变化 $\lambda_{t+1} = \lambda_t$, 那么我们就管这个 λ 叫做一个平稳分布(stationary distribution)
- 换言之, 虽然每个人的财富、收入状态存在异质性, 且在一直变化, 但是在平稳分布下, 全社会的财富、收入分布保持不变。从另一个角度理解, 我们可以把 $\lambda(a, s)$ 看做一个无穷寿命的行为人在 (a, s) 状态下停留的时间的占比。

Huggett(1993): A pure credit economy

- 如前面所言，不同模型对于财富 a 的定义不同。在Huggett模型中，假设所有人可以用 r 的利率去储蓄或者借贷，但是这种借贷需要满足借贷市场出清（也就是所有代理人的总借贷=0）
- $w = 1$, 家庭的固定收入 s 服从马尔科夫链 $\mathcal{P}(s, s')$
- Huggett (1993) 设置了一个借贷上限(borrowing constraint), 以 ϕ 表示。也就是说，

$$\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_m], \text{ where } a_1 = -\phi$$

均衡的定义

我们将这个模型的平稳均衡(Stationary Equilibrium) 定义为利率 r , 政策函数 $g(a, s)$, 以及一个平稳分布 $\lambda(a, s)$ 的组合, 需要满足:

- 政策函数 $g(a, s)$ 是代理人优化问题的解;
- 平稳分布 $\lambda(a, s)$ 由马尔科夫链 $\mathcal{P}(s, s')$ 和政策函数 $g(a, s)$ 决定;
- 借贷市场出清

$$\sum_{a,s} \lambda(a, s)g(a, s) = 0$$

均衡的求解: 设置初始 $r_0 = r$, 对于这个利率解家庭的优化问题, 得到政策函数 $g(a, s)$, 以及所对应的稳态分布 $\lambda_0(a, s)$ 。通过这两者, 检查借贷市场是否出清, 即

$$\sum_{a,s} \lambda_0(a, s)g(a, s) = e_0^*$$

如果 $e_0^* > 0$, 设置 $r_1 < r_0$, 重复迭代过程, 直到找到能够使借贷市场出清的 r 。

Aiyagari (1994): A Model with Capital

- 和 Huggett(1993) 模型不同, Aiyagari (1994) 引入了实体资本, 让资本的运动方程为

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + i_t$$

- 代理人的预算约束为

$$c_t + i_t = r_t^k k_t + w s_t$$

- 代入, 化简

$$c_t + k_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)k_t + w s_t$$

- 生产函数

$$F(K, N) = AK^\alpha N^{1-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$$

其中 K, N 为总资本、总劳动。工资、租金由公司问题决定

$$w = \frac{\partial F(K, N)}{\partial N}$$

$$r_t^k = \frac{\partial F(K, N)}{\partial K}$$

- 在Aiyagari模型中，假设总劳动处在一个不变分布下劳动供给的平均水平， $N = \zeta^{prime}_{\infty} \bar{s}$ ，由马尔科夫链和劳动供给的向量共同决定。

平稳均衡(Stationary Equilibrium)的定义

一个平稳均衡定义为一个政策函数 $g(k, s)$, 一个概率分布 $\lambda(k, s)$, 以及 (K, r, w) , 满足:

- (w, r) 满足公司问题;

$$w = \frac{\partial F(K, N)}{\partial N}$$
$$r = \frac{\partial F(K, N)}{\partial K} - \delta$$

- $g(k, s)$ 是代理人优化问题的解;
- 概率分布 $\lambda(k, s)$ 是 $[g(k, s), P]$ 对应的平稳分布, 即

$$\lambda(k', s') = \sum_s \sum_{k: k'=g(k, s)} \lambda(k, s) P(s, s')$$

- 总资本 K 满足

$$K = \sum_{k, s} \lambda(k, s) g(k, s)$$

均衡的算法

- 设置初始 $K = K_0$ ，根据公司问题计算 (w, r) ;
- 根据 (w, r) 计算政策函数 $g_0(k, s)$ 和平稳分布 $\lambda_0(k, s)$
- 计算 $\lambda_0(k, s)$ 对应的总资本

$$K_0^* = \sum_{k,s} \lambda_0(k, s) g(k, s)$$

- 设置一个“relaxation parameter” $\zeta \in (0, 1)$ ，更新总资本的取值:

$$K_1 = \zeta K_0 + (1 - \zeta) K_0^*$$

- 重复，直到 K_j 和 K_{j+1} 足够接近。

- *Aiyagari Models*, Lecture slides by Jesus Fernandez-Villaverde, University of Pennsylvania
- *Recursive Macroeconomic Theory* by Lars Ljungqvist and Thomas J.Sargent, Chapter 17