宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/4/1

关于课程

- 本周：风险与不确定性、（初阶）资产定价
- 下周二：期中复习课
- 下周四：期中考试（随堂，二教102）

Life is Uncertain…

- 在目前学到的大多数模型中，我们往往假设经济体的运行是完全确定的（deterministic）。
- 例如，经济行为人完全知道未来的工资、租金的水平大小；企业完全知道未来每一期的生产函数…
- 可是，实际生活中充满了不确定性。
- 如何在充满随机的生活中做出最优的决定？

区分风险和不确定性

- 日常生活中，我们经常将这两个词混用。但是，经济学家对风险（risk）和不确定性（uncertainty）有自己的区分方式。
- Frank Knight 在1921年的文章Risk, Uncertainty, and Profit中做出区分，认为风险（risk）指发生概率已知或可以测算的未知事件，不确定性（uncertainty）指完全无法预知和描述的未知事件。
- 举例：抛一枚均匀的硬币100次 vs 抛一枚做过手脚的硬币100次

随机变量与样本空间

- 抛一枚硬币，或是抛一个色子，得到的结果（outcome）是随机的。我们可以用一个变量X代表得到的结果，这时X就称为一个随机变量（random variable）。随机变量可能是离散（discrete）或连续（continuous）的。
- 我们可以用S来表示所有可能结果的集合
  - 抛一枚均匀的硬币，$S=\{正，反\}$
  - 抛一个均匀的色子，$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
- S叫做样本空间（sample space/support）

离散随机变量

- 假设X 是一个离散随机变量，样本空间是 $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- X的概率质量函数（ **probability mass function，pmf**） 指一个定义在S上的向量 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$，满足：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i &= 1 \\ p_i &\geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

- X的**期望**定义为

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i$$

离散随机变量：例子

- 扔一个六面均匀的色子
- Sample space/support:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- PMF:

$$P(X) = \frac{1}{6} \quad \forall X \in S$$

- Expectation:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6} i = 3.5$$

连续随机变量

- 假设Y是一个在$[0, \overline{y}]$ 上变化的**连续随机变量（continuous random variable**）
- Y的累计分布函数（cumulative distribution function，cdf）定义为：

$$F(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$$

And it satisfies $F(\overline{y}) = 1$

- Y的概率密度函数（**probability density function (pdf)** ）是

$$f(y) = \frac{dF}{dy}(y) \Rightarrow \int_0^k f(y)dy = F(k)$$

- Y 的期望等于 $\int_0^{\overline{y}} y\, f(y)dy$

连续随机变量：例子

- 假设：有一首歌在你耳机里单曲循环，室友走过来按下了你手机的“暂停”键，你记录下了目前播放的秒数

- Support: $[0, N]$，N 代表歌曲的总时长（秒）

- CDF: $F(x) = \frac{x}{N}$
- PDF: $f(x) = \frac{1}{N} \quad \forall x \in [0, N]$

- Expectation: $\int_0^N x \frac{1}{N} dx = \frac{x^2}{2N}\Big|_0^N = \frac{N}{2}$

条件概率（conditional probability）

- Question：A family has two children. They do not have two girls. What is the probability they have a boy and a girl?

- 答案：$\frac{2}{3}$

- 给定“they do not have two girls”这一条件之后，对应的条件概率分布（conditional pmf）会发生变化，与未给定这一条件时的概率分布（unconditional pmf）不同。

条件概率的计算

- 对于两个事件E_1，E_2来说，E_2的条件概率（给定E_1）可以写作 $P(E_2|E_1)$, 计算公式是

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

- 这里 ∩ 代表“交集”，也就是 E_1 和 E_2 同时发生。

- 用我们的例子:

$$\begin{aligned} P(1B1G|\text{Not 2G}) \quad &= \frac{P(1B1G \cap \text{Not 2G})}{P(\text{Not 2G})} \\ &= \frac{1/2}{1-1/4} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

贝叶斯定理

- 可以把条件概率的概念理解为，人们根据新掌握的信息，对于原有预测的调整

- 贝叶斯定理：关于条件概率的变换公式，常被应用于数据分析、机器学习、人工智能领域

$$P(E|F)\left(=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}\right)=\frac{P(F|E)}{P(F)}P(E)$$

练习

- **（Boy born on a Tuesday）** A family has two children. One is a boy born on a Tuesday. What is the probability that the family has two boys?
- **（Monty Hall Problem）** On a game show, you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, and the others, goats. You pick a door, say #1. The host, who knows what's behind the doors, opens another door, say #3, which has a goat. He then says to you, "Do you want to pick door #2?" **Is it to your advantage to switch your choice?**

马尔可夫链（Markov Chain）

- 很多经济模型中，我们用马尔可夫链（**Markov chain**）来描述风险的产生过程.
- 一个随机变量序列 $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ 被称为马尔可夫链，如果它满足

$$\mathbb{P}(Z_{t+1}|Z_t, \dots, Z_0) = \mathbb{P}(Z_{t+1}|Z_t)$$

- 理论上，一个随机变量 Z_{t+1} 可以被过去的所有历史状态影响 (i.e. $Z_0, Z_1, \dots, Z_t$.)
- 而一个马尔可夫链满足“无记忆性”，即下期的随机变量只会被当期的的状态影响

马尔可夫链：例子

- 假设随机变量 Z_t 每期的样本空间是 {雨(R), 晴(S)}。
- 假定天气由如下过程决定：
  - 如果第t期 Z_t是晴天，Z_{t+1}的pmf是：
    - 70 % 晴天, 30% 雨天
  - 如果第t期 Z_t是雨天，Z_{t+1}的pmf是：
    - 30 % 晴天, 70% 雨天
- 这个过程可以写作

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{t+1} = S | Z_t = S) &= 0.7, \quad \mathbb{P}(Z_{t+1} = R | Z_t = S) &= 0.3 \\
\mathbb{P}(Z_{t+1} = S | Z_t = R) &= 0.3, \quad \mathbb{P}(Z_{t+1} = R | Z_t = R) &= 0.7
\end{aligned}
$$

条件期望（conditional expectation）

- 假定 Z_{t+1} 是一个离散变量，样本空间为 $\{z_1, \ldots, z_n\}$. 此时，给定 $Z_t = z_j$，Z_{t+1}的条件期望值定义为

$$\mathbb{E}[Z_{t+1}|Z_t = z_j] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(Z_{t+1} = z_i|Z_t = z_j\right)z_i$$

- 类似的, 如果 Z_t 是一个连续变量，conditional pdf表示为$F(z|z_j)$, 那么Z_{t+1}的条件期望值为

$$\mathbb{E}[Z_{t+1}|Z_t = z_j] = \int_0^{\bar{z}} f\left(z|z_j\right)zdz$$

条件期望：例子

$$\mathbb{P}(Z_{t+1}=S|Z_t=S) \quad =0.7, \quad \mathbb{P}(Z_{t+1}=R|Z_t=S) \quad =0.3$$
$$\mathbb{P}(Z_{t+1}=S|Z_t=R) \quad =0.3, \quad \mathbb{P}(Z_{t+1}=R|Z_t=R) \quad =0.7$$

- 延续刚才的例子，假设你要决定今天是否要带伞出门：
  - 带了伞，雨天的效用为1，晴天的效用为-1
  - 不带伞，雨天的效用为-2，晴天效用为1

- 如果昨天下了雨，今天带伞的条件期望效用为$0.7*1+0.3*(-1)=0.4$，不带伞的条件期望效用为$0.7*(-2)+0.3*(1)=-1.1$，应该带伞

- 如果昨天没下雨…?

期望效用

- 假设明天的世界有两种可能的状态：好或坏
- Probability of good state: π_g； probability of bad state: 1- π_g
- 在好的状态下，家庭收入为 $y = y_g$；在差的状态下，家庭收入$y = y_b$
- 假设一个最简单的情况，资源约束为 $c = y$，效用函数为$U(c)$
- 家庭的期望效用为： $E[U(y)] = \pi_g U(y_g) + (1 - \pi_g) U(y_b)$

风险与稳定

$$E[U(y)] = \pi_g U(y_g) + (1-\pi_g)U(y_b)$$

- 假设家庭可以通过保险等方式得到一个固定的回报 $y_s = \pi_g y_g + (1-\pi_g)y_b$ ， 无论明天的世界状态如何 (暂时忽略保险的成本)。

- 请问，家庭会选择稳定收入y_s，还是风险回报 (y_g, y_b)?

- 其实是在两者之间比较：

$$E\big(U(y)\big) = \pi_g U(y_g) + (1-\pi_g)U(y_b)$$

$$U(E(y)) = U(\pi_g y_g + (1-\pi_g)y_b)$$

风险偏好

- 如果 $U(E(y)) > E(U(y))$，家庭被称为风险厌恶（**risk-averse**）
- 如果 $U(E(y)) = E(U(y))$, 家庭被称为风险中性（**risk-neutral）**
- 如果 $U(E(y)) < E(U(y))$, 家庭被称为风险爱好（**risk loving)**

风险偏好：例子

- $y_g = 100$, $y_b = 25$, $u(c) = \sqrt{c}$, $\pi_g = 0.5$

- 可以计算

$$E(U(y)) = 0.5\sqrt{100} + 0.5\sqrt{25} = 7.5$$
$$U(E(y)) = \sqrt{0.5 * 100 + 0.5 * 25)} \approx 7.9$$

所以家庭表现出风险厌恶。

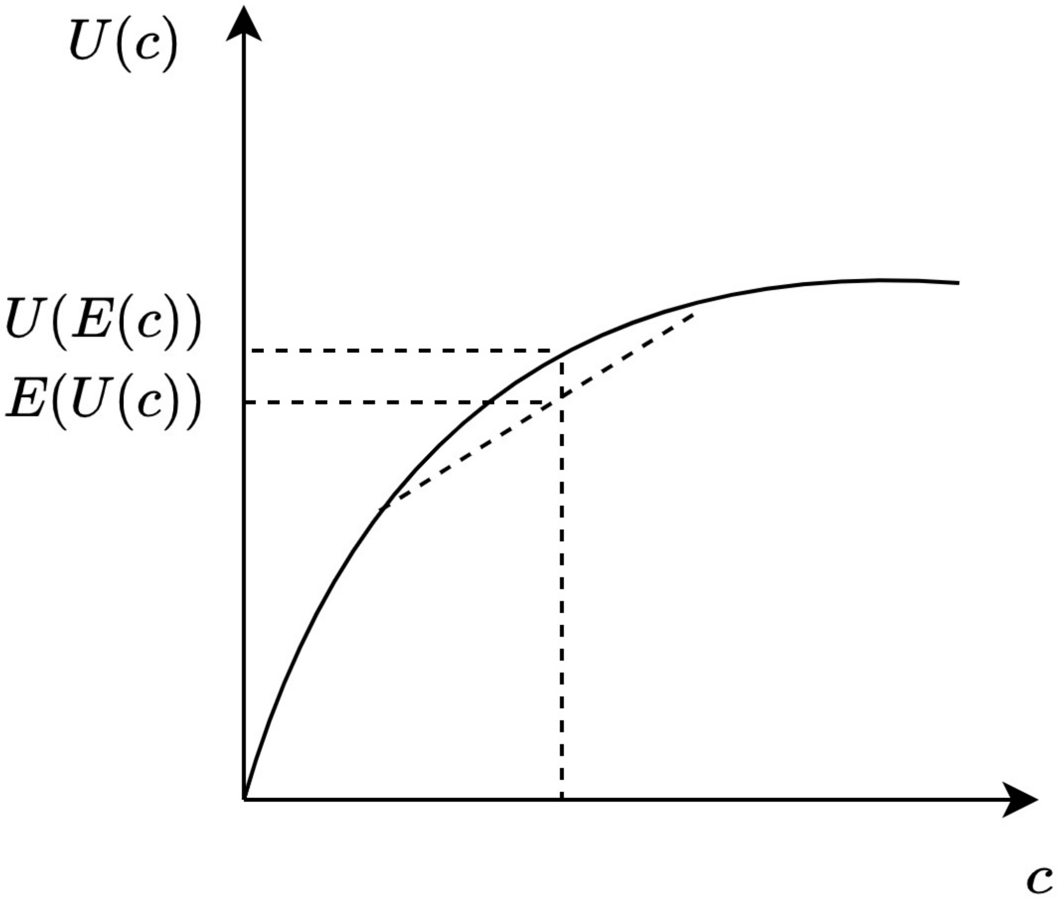
效用函数与风险偏好

- 家庭什么时候表现出风险厌恶?

- Jensen's Inequality:

$E(U(y)) < U(E(y))$ if and only if $U''(y) < 0$

- 只要家庭的效用函数满足边际效用递减，那么通常情况下他们都会表现出风险厌恶。



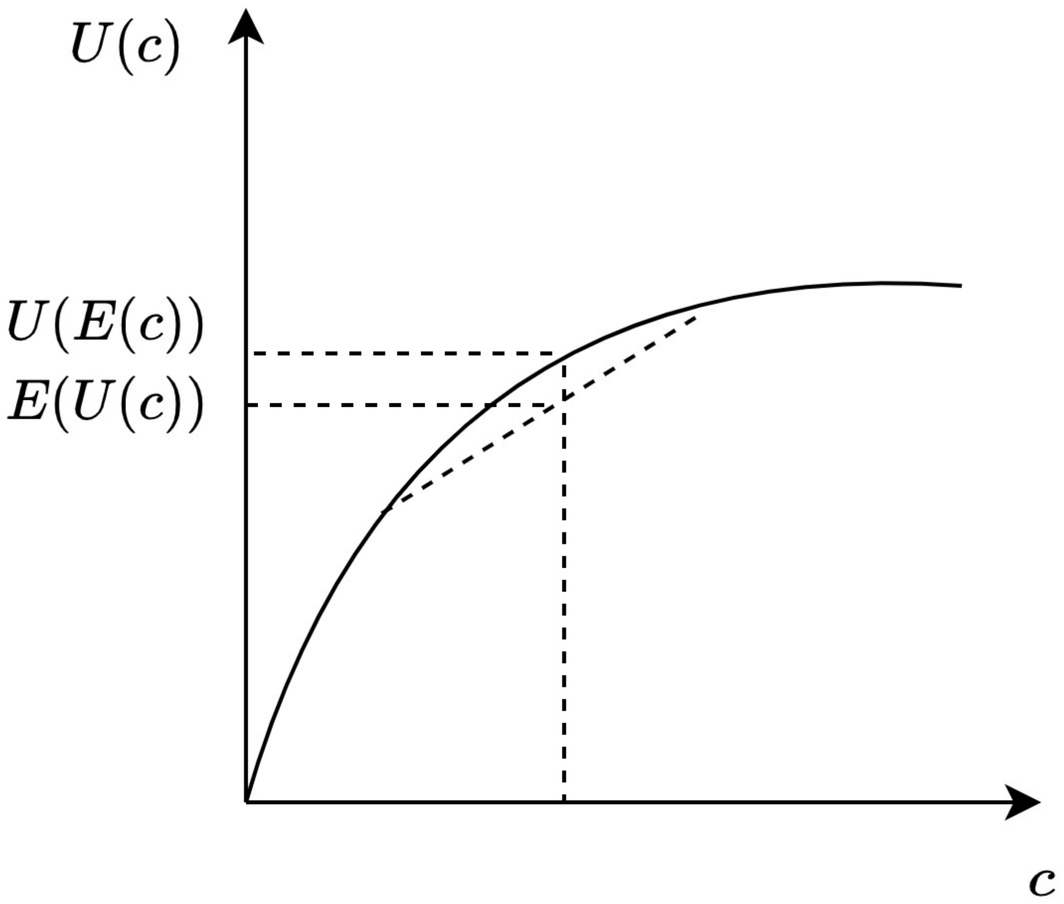
计算风险厌恶程度

- 从图像上看效用函数的弯曲程度（curvature）和家庭的风险厌恶程度有关。

- 如何测量风险厌恶程度？一个猜测是和$U''(c)$有关

- 但是，考虑$U(c)=c^{\frac{1}{2}}$ 和 $\tilde{U}(c)=2c^{\frac{1}{2}}$，两个效用函数描述的偏好完全相同，但是效用函数的二阶导数不同
- $U''(c)=-\frac{1}{4}c^{-3/2}$， $\tilde{U}''(c)=-\frac{1}{2}c^{-\frac{3}{2}}$

- 说明$U''(c)$不是一个好的计算方式



计算风险厌恶程度

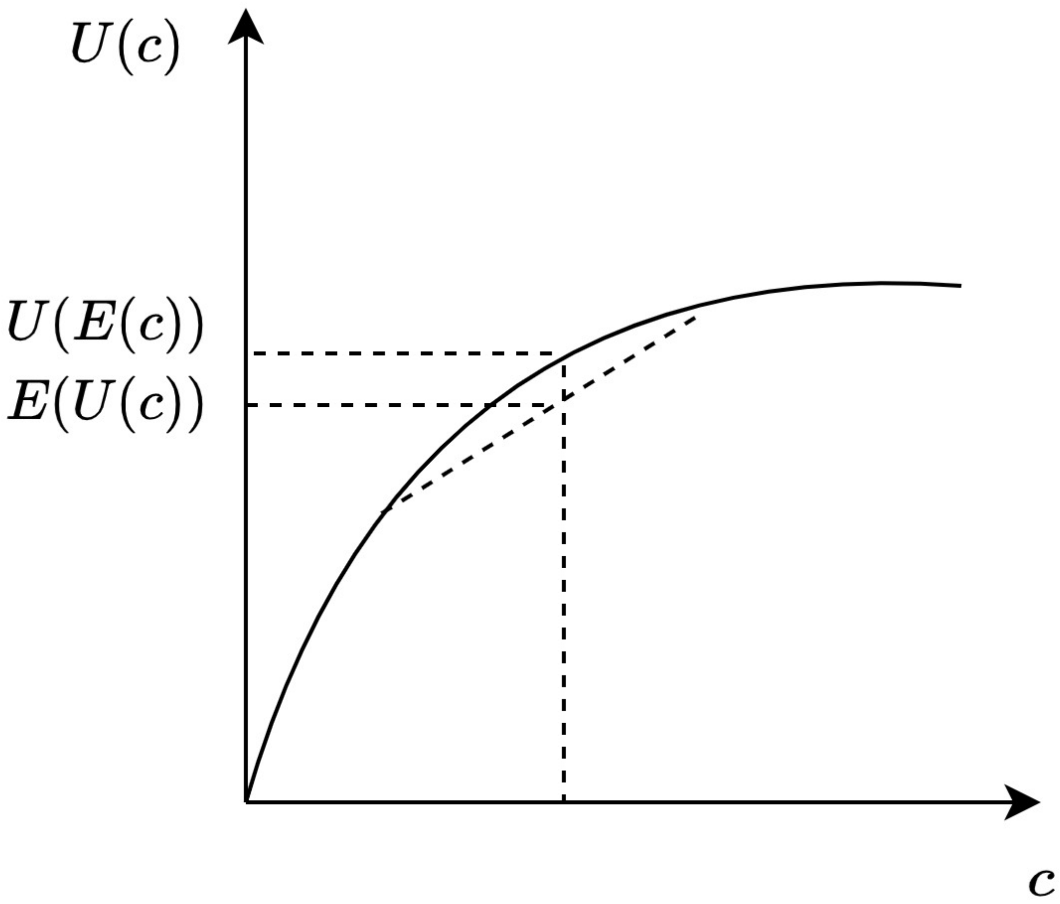
- 解决方式： normalize by $U'(c)$

- 绝对风险厌恶： Absolute Risk Aversion (ARA)

$$ARA = -\frac{U''(c)}{U'(c)}$$

- 例子：

$$u(c) = e^{-\rho c}$$



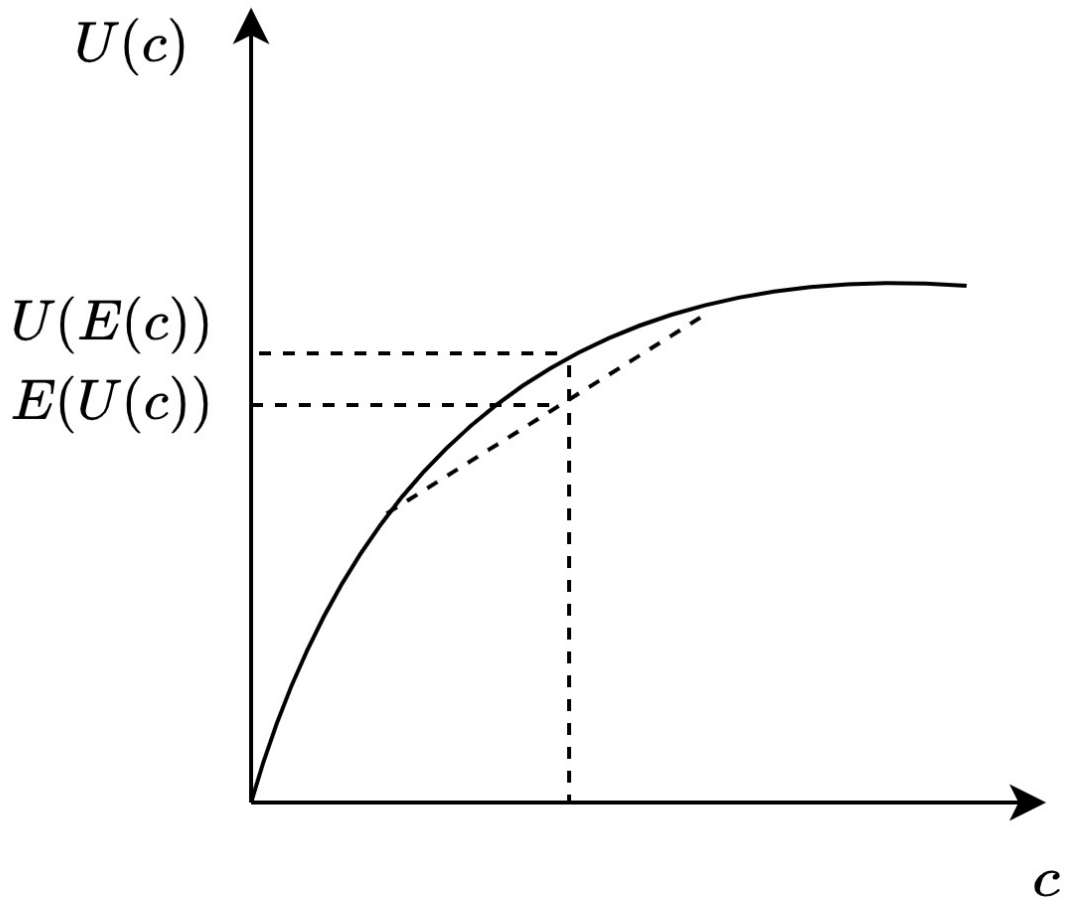
计算风险厌恶程度

- ARA会随着财富的增大而减小；可以用相对风险厌恶（Relative risk aversion，CRA）来做出调整

$$CRA = -\frac{cU''(c)}{U'(c)}$$

- 例子：CRRA 效用函数:

$$U(c) = \frac{c^{1-\rho}}{1-\rho}$$



一个带有风险的两期模型

- 第0期，无任何风险。代理人可以购买债券 b_0（利率为 r）
- 第1期，经济体可能处在好的状态（概率π_g），或坏的状态（概率π_b）；$\pi_b + \pi_g = 1$
- 效用函数：

$$
\begin{aligned}
U(c_0, c_g, c_b) &= u(c_0) + \beta \mathbb{E}[u(c_1)] \\
&= u(c_0) + \beta[\pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b)]
\end{aligned}
$$

- 第1期的消费 c_1 表示为 c_g 和 c_b, 取决于下期状态

模型求解

- 预算约束：

$$
\begin{aligned}
c_0 + b_0 &= y_0 \\
c_g &= y_g + (1+r)b_0 \\
c_b &= y_b + (1+r)b_0
\end{aligned}
$$

- 代入$b_0 = y_0 - c_0$

$$
\begin{aligned}
c_g &= y_g + (1+r)(y_0 - c_0) \\
c_b &= y_b + (1+r)(y_0 - c_0)
\end{aligned}
$$

拉格朗日函数（简单）

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & u(c_0) + \beta[\pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b)] + \\ & \lambda_g[y_g + (1+r)(y_0 - c_0) - c_g] + \\ & \lambda_b[y_b + (1+r)(y_0 - c_0) - c_b]\end{aligned}$$

- 一阶条件

$$u'(c_0) = [\lambda_g + \lambda_b](1+r)$$

$$[c_g] \quad \pi_g \beta u'(c_g) = \lambda_g$$

$$[c_b] \quad \pi_b \beta u'(c_b) = \lambda_b$$

欧拉方程与利息

- 欧拉方程:

$$u'(c_0) = \beta(1+r)[\pi_g u'(c_g) + \pi_b u'(c_b)]$$

- 从市场出清条件得知 $c_0 = y_0, c_b = y_b, c_g = y_g$，那么利率满足

$$1 + r = \frac{u'(y_0)}{\beta[\pi_g u'(y_g) + \pi_b u'(y_b)]} = \frac{u'(y_o)}{\beta\mathbb{E}[u'(y_1)]}$$

利息的决定

$$1 + r = \frac{u'(y_0)}{\beta[\pi_g u'(y_g) + \pi_b u'(y_b)]} = \frac{u'(y_o)}{\beta \mathbb{E}[u'(y_1)]}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y_g} > 0, \quad \frac{\partial r}{\partial y_b} > 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial y_0} < 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \pi_g} > 0$$

如果明天的预期收入相对今天增加，家庭的储蓄欲望会降低，也就是说需要更高的利率才能使得市场出清！

风险资产

- 刚才模型中的债券b_0算是一种“安全资产”，不管世界是好与坏的状态下，都会给出同样的回报。

- 除了这种稳定的资产以外，许多生活中常见的资产是具有风险的（股票、基金、人力资本）。

- 问题：如何给这些风险资本定价?

State contingent claims（或有索取权）

- 假设有 S 种可能不同的状态，以$\{1,2,\dots,S\}$ 表示。

- 定义： A **state-contingent claim (bond)** is an asset that delivers one unit of a good in a future state s and 0 otherwise.

Contingent (adj.) 依情况而定的

- Denote the price of a state s bond to be $q(s)$

资产定价

- 假设我们知道所有的state-contingent claims的价格 $q(s)$

- 那么我们可以对下面的资产进行尝试定价：
  - Pays 1 unit of good in state 1? $\boldsymbol{q(1)}$
  - Pays 2 units of good in state 1? $\boldsymbol{2q(1)}$
  - Pays 1 unit of good in state 1, and 1 unit of good in state 2? $\boldsymbol{q(1)+q(2)}$
  - Pays $x(s)$ units in state s, for each state $s=1,2,\ldots,S$? $\boldsymbol{\sum_{s=1}^{S} q\,(s)x(s)}$

- 理论上，我们可以用state-contingent claims 对任何的风险资产进行定价。

资产定价-2

- 问题：如何给state contingent claims定价？
- 框架：回到两期模型的例子：
- 第0期收入y_0固定，第1期两种可能的状态 $\{g,b\}$, 对应的收入分别为$\{y_g,y_b\}$.
- 假设有如下三种资产可以购买：
  - A safe bond with price 1, which pays $1+r$ units of good regardless of state
  - A good state claim, that only pays 1 in good state
  - A bad state claim, that only pays 1 in bad state

资产定价-3

Asset	p_0	payout in g	payout in b	Quantity
Bond	1	$1+r$	$1+r$	b_1
Claim(good)	q_g	1	0	x_g
Claim(bad)	q_b	0	1	x_b

- 大家认为哪种资产价格更高？猜一下：

Good state claim or bad state claim?

资源约束

$$BC_0: \quad c_0 + b_1 + q_g x_g + q_b x_b = y_0$$

$$BC_g: \quad c_g = y_g + (1+r) b_1 + x_g$$

$$BC_b: \quad c_b = y_b + (1+r) b_1 + x_b$$

$$c_g = y_g + x_g + (1+r)[y_0 - c_0 - q_g x_g - q_b x_b]$$

$$c_b = y_b + x_b + (1+r)[y_0 - c_0 - q_g x_g - q_b x_b]$$

解出模型

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & u(c_0) + \beta[\pi_g u(c_g) + \pi_b u(c_b)] + \\ & \lambda_g[y_g - c_g + x_g + (1+r)(y_0 - c_0 - q_g x_g - q_b x_b)] + \\ & \lambda_b[y_b - c_b + x_b + (1+r)(y_0 - c_0 - q_g x_g - q_b x_b)]\end{aligned}$$

一阶条件:

$$\begin{aligned}
[c_0]: \quad & u'(c_0) = (\lambda_g + \lambda_b)(1+r) \\
[c_g]: \quad & \beta\pi_g u'(c_g) = \lambda_g \\
[c_b]: \quad & \beta\pi_b u'(c_b) = \lambda_b \\
[x_g]: \quad & \lambda_g[1-(1+r)q_g] = \lambda_b(1+r)q_g \\
[x_b]: \quad & \lambda_b[1-(1+r)q_b] = \lambda_g(1+r)q_b
\end{aligned}$$

解出模型-2

- $[c_0], [c_g], [c_b]$ →欧拉方程

$$u'(c_0) = (1+r)\beta[\pi_g u'(c_g) + \pi_b u'(c_b)]$$

- 调整$[x_g]$ 和 $[x_b]$, 得到

$$q_b = \frac{\lambda_b}{(1+r)(\lambda_g + \lambda_b)}$$

解出模型-3

- 把$[c_g]$ $[c_b]$ 代入上页最后两个公式，得到

$$\boxed{\begin{aligned} q_g &= \frac{\beta\pi_g u'(c_g)}{u'(c_0)} \\ q_b &= \frac{\beta\pi_b u'(c_b)}{u'(c_0)} \end{aligned}}$$

- 调整公式，得到：

$$\pi_i \boxed{\frac{1}{q_i}} = \frac{u'(c_0)}{\beta u'(c_i)}$$

- 左边：state i claim 的预期回报率；
- 右边：当下期状态为i时，两期消费的MRS

理解资产价格

- 以good state claim举例：

$$q_g = \frac{\beta \pi_g u'(c_g)}{u'(c_0)}$$

- 如果$\pi_g = 0$，good state claim的价格为0，因为明天永远不会更好（！）

- 如果$\pi_g = 1$，

$$q_g = \frac{\beta u'(c_g)}{u'(c_0)} = \frac{1}{1+r}$$

第二个等式来自于欧拉方程，此时不存在不确定性，good state claim和债券等价

市场出清

- 在竞争均衡条件下，市场出清条件依然成立：

$$b_1 = 0,\quad x_g = x_b = 0,\quad c_g = y_g, c_b = y_b, c_0 = y_0$$

- 资产价格表示为：

$$q_g = \frac{\beta \pi_g u'(y_g)}{u'(y_0)}$$
$$q_b = \frac{\beta \pi_b u'(y_b)}{u'(y_0)}$$

比较两种风险资产的价格

- 如果 $u(c) = \log(c)$, 那么
$$q_g = \frac{\beta\pi_g y_0}{y_g},\ q_b = \frac{\beta\pi_b y_0}{y_b}$$
- 假设 $\pi_g = \pi_b = 0.5$，两种状态发生的可能性相等。
- 因为 $y_g > y_b$，我们可以得到 $q_g < q_b$
- 思考: Why does the state-contingent claim for good state is **cheaper** than the one for bad state?