Intermediate Macro: Lecture 22

Lun Li

Peking University

lunl@pku.edu.cn

May 13th, 2025

回顾

上节课我们通过吃蛋糕问题学习了有限期的动态规划问题。我们讨论了:

- 值函数的定义:
- 如何把优化问题写成贝尔曼方程(Bellman Equations)
- 用逆推法求解值函数

今天:无限期的动态规划问题

吃蛋糕问题

我们还是先用无限期的吃蛋糕问题作为例子。

- 优化问题：最大化效用函数

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

- 运动方程：

$$N_{t+1} = N_t - c_t$$

- 贝尔曼方程

$$\begin{aligned} V(N_0) &= \max_{\{c_t\}_0^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ &= \max_{c_0} \{u(c_0) + \beta \max_{\{c_t\}_1^{\infty}} \beta^{t-1} u(c_t)\} \\ &= \max_{c_0} \{u(c_0) + \beta V(N_1)\} \end{aligned}$$

值函数

$$V(N_t) = \max_{c_0}\{u(c_0) + \beta V(N_{t+1})\}$$

- 其中，值函数 $V(N_t)$ 代表给定N_t，能够达到的最大的效用。
- 假设效用函数的形式为：

$$u(c) = \ln c$$

能否找到值函数的解析解？

Guess and Verify

- 方法：Guess and Verify，只对非常有限的情况适用
- 我们假设

$$V(N) = A + B \ln N$$

- 把贝尔曼方程写成：

$$\boxed{\begin{aligned} V(N) &= \max_c \{u(c) + \beta V(N - c)\} \\ A + B \ln N &= \max_c \{\ln c + \beta(A + B \ln(N - c))\} \end{aligned}}$$

推导

- 对c 求一阶导，得到

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta B}{N - c}$$
$$c = \frac{N}{1 + \beta B}$$
$$N - c = \frac{\beta B N}{1 + \beta B}$$

- 代入贝尔曼方程，得到A,B的表达式（仍需化简）

$$A = \beta A + \ln \frac{1}{1 + \beta B} + \beta B \ln \frac{\beta B}{1 + \beta B}$$
$$B = 1 + \beta B$$

值函数和政策函数

- 化简之后我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
c^*(N) &= (1-\beta)N \\
V(N) &= \frac{\ln(1-\beta)}{1-\beta} + \frac{\beta \ln \beta}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{1-\beta}\ln(N)
\end{aligned}
$$

- 如果效用函数是CRRA形式，也可以解出解析解，但其他的效用函数或问题下通常不行。

值函数迭代(Value Function Iteration)

- 如果无法解出解析解，如何利用数值方法求解这个问题？
- 定义一个Bellman Operator $T(V)$, 作用在值函数空间上：

$$T(V)(N) = \max_c [u(c) + \beta V(N - c)]$$

- 我们想要知道的是，如果不断重复$V_{n+1} = T(V_n)$,是否会收敛到一个唯一的极限函数，而这个极限函数是否就是值函数的解？
- 答案：是的，通过 "Contraction Mapping Theorem" 决定。只要$T(V)$是一个"收缩映射",那么无论从什么样的初始值函数开始，都会收敛到唯一的值函数解[1] V^*

[1]收敛条件:Blackwell sufficient conditions, $T(V)$ 需要满足单调性和折现性两个条件。

对于Cake-Eating Problem的数值模拟

- Refer to the python codes