第四讲

生产与增长

经济增长或 GDP 的增长是宏观经济学关注的基本问题之一，因为它与一国国民总体福利水平息息相关。如果一国经济处于长期停滞状态甚至倒退（负增长），那么该国国民福利水平很难得以增进，经济关系就会紧张；如果一国经济处于长期稳步增长，社会就能够不断进步，人民生活就可以不断改善。

在过去的几十年里，中国创造了一个经济增长的奇迹。从 1978 年改革开放以来至 2011 年，我国长期保持了年增长率约为 10%的高速经济增长，并于 2010 年反超日本成为世界第二大经济体。2012 年开始，中国经济增长放缓，但在 2012-2024 年期间仍然保持较高的增速（年增长率超过 6%）。2021 年，我国 GDP 总量首次超过欧盟。

面对这些数字，我们不禁会问，中国经济还能持续增长吗？中国经济总量何时能超过美国并成为世界第一？中国进一步增长的源泉在哪里？这些问题看似宏大，但都是与我们每一个人切身利益密切相关的。

在本讲的学习中，我们希望讨论与经济增长最相关的问题。

第一节　经济增长的基本概念

本小节讨论经济增长的度量、70 规则以及经济增长的影响因素。这些基本概念不涉及高深的数学，但它们对于今后更深入的学习有十分重要的作用。

一、经济增长的度量

衡量经济增长通常用的变量是真实 GDP，记为Y_t，或人均 GDP，记为$y_t=\frac{Y_t}{N_t}$。一国在t年的经济增长率可以用下面两个公式计算。

$$t\text{年度 GDP 增长率}=\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}-1\right)\times 100\% \tag{4.1}$$

$$t\text{年度人均 GDP 增长率}=\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}-1\right)\times 100\% \tag{4.2}$$

比如，中国 2023 年的不变价 GDP 为 1221529.4 亿元，而 2024 年的不变价 GDP 为 1282320.8 亿元。根据公式（4.1），我们可以计算出中国在 2024 年经济增长率为 5.0%。2023 年和 2024 年末全国人口分别为 140967 和 140828 万人，由此可以根据

公式（4.2）计算出 2023 年人均 GDP 增长率为 5.1%，高于 GDP 增长率。[1]

公式（4.1）和（4.2）之间的关系是什么呢？存在下面的近似公式。

$$\text{人均增长率} \approx \text{增长率} - \text{人口增长率} \tag{4.3}$$

在增长率较低的情况下，该公式可以利用$\ln(1+x) \approx x$的近似关系来证明。有兴趣的同学可以自行尝试。

类似于价格指数，我们也可以引入不同定义的数量指数（quantity index），并计算如下不同的增长率。

$$t\text{年度拉氏 GDP 增长率} = \left(\frac{\sum_i P_{i,0}Q_{i,t}}{\sum_i P_{i,0}Q_{i,t-1}} - 1\right) \times 100\% \tag{4.4}$$

$$t\text{年度帕氏 GDP 增长率} = \left(\frac{\sum_i P_{i,t}Q_{i,t}}{\sum_i P_{i,t}Q_{i,t-1}} - 1\right) \times 100\% \tag{4.5}$$

$$t\text{年度费雪 GDP 增长率} = \left(\sqrt{\frac{\sum_i P_{i,0}Q_{i,t}}{\sum_i P_{i,0}Q_{i,t-1}} \times \frac{\sum_i P_{i,t}Q_{i,t}}{\sum_i P_{i,t}Q_{i,t-1}}} - 1\right) \times 100\% \tag{4.6}$$

不难发现，当基期选定为$t-1$时，拉氏数量指数=(上期价格×当期数量)/(上期价格×上期数量)，帕氏数量指数=(当期价格×当期数量)/(当期价格×上期数量)，而费雪数量指数是拉氏和帕氏数量指数的几何平均。

拉氏和帕氏数量指数的区别在于基期价格的选择——前者选择上期，而后者则选择当期。两者由于基期价格选择的不同，会得到不一样的增长率。为了避免基期选择对增长率计算的影响，费雪指数采用“链式加权”的思路，对产品的价格进行动态调整，避免使用不切实际的价格计算真实 GDP。

例 4.1

请用例 3.6（表 3.7）的数据，计算 2024 年的费雪 GDP 增长率。假设基期为 2023 年。

根据公式（4.6），我们可以得到：$\left(\sqrt{\frac{16\times8+3\times15}{16\times5+3\times10} \times \frac{20\times8+4\times15}{20\times5+4\times10}} - \mathbf{1}\right) \times \mathbf{100\%}$。

接着，我们定义环比费雪经济指数如下。

[1] 数据均来自国家统计局网站，访问于 2025 年 3 月 8 日。其中，不变价 GDP 数据来自“季度数据”中“国内生产总值(不变价) 累计值(亿元)”。

$$F_{t,t-1}=\sqrt{\frac{\sum_i P_{i,t-1}Q_{i,t}}{\sum_i P_{i,t-1}Q_{i,t-1}}\times\frac{\sum_i P_{i,t}Q_{i,t}}{\sum_i P_{i,t}Q_{i,t-1}}}\times 100 \tag{4.7}$$

那么，在第 0 期的定基费雪经济指数则为下式。

$$F_{t,0}=\underbrace{\left(\frac{F_{t,t-1}}{100}\times\frac{F_{t-1,t-2}}{100}\times\ldots\times\frac{F_{1,0}}{100}\right)}_{\text{链式加权}}\times 100 \tag{4.8}$$

比如，国家统计局上的$F_{t,1978}$就是“国内生产总值指数(1978 年=100)”，而$F_{t,t-1}$则是“国内生产总值指数(上年=100)”。我们可以相应地定义环比费雪人均经济指数和定基费雪人均经济指数，只需要将公式（4.7）中的分子分母再进一步分别除以N_t和N_{t-1}（第t和$t-1$期的人口）即可。

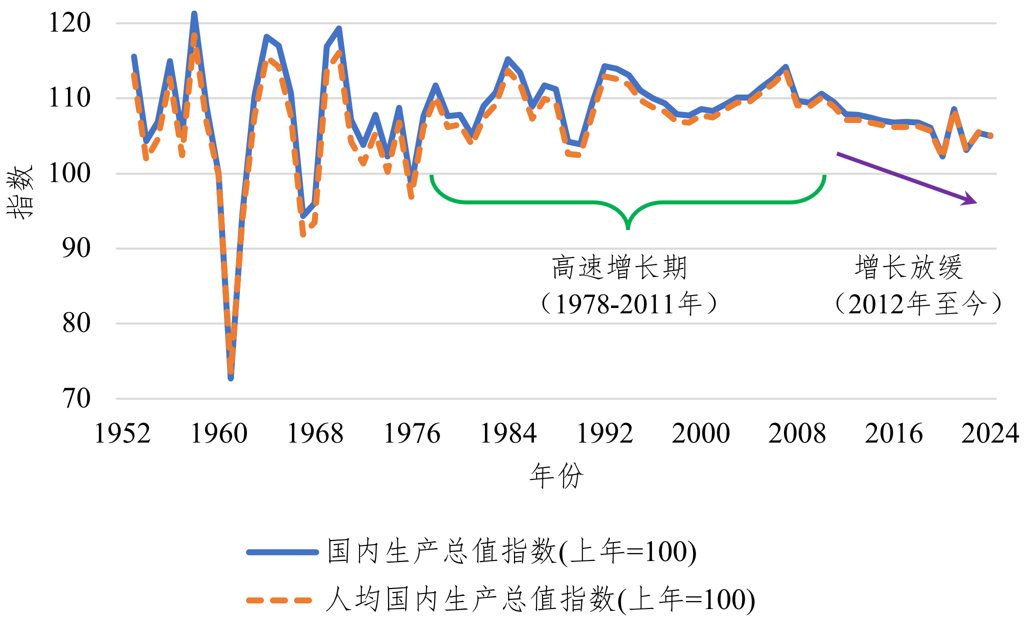


图 4.1：我国环比费雪经济指数（1953-2024 年）

注：数据来源于国家统计局，访问于 2025 年 3 月 8 日，笔者根据数据计算后绘制此图。

从图 4.1 中不难看出，近几十年中两条线不断接近，且橙色虚线逐渐贴近蓝色实线，并于近三年反超。这反映了我国人口增长率逐渐下降的趋势。2022 年，我国人口增长率出现了自 1960 年以来的首次负值（负千分之 0.6）。

最后，我们需要理解为什么要衡量增长率。相比于总量或现状，变化量往往更有意义，因为它反映行情、福祉和国力的变化，这无论是对个人/家庭、企业还是对国家治理来说都是非常重要的变量。

围绕着经济增长，我们有四个关键的研究问题。

第一，长期的持续不断的经济增长是可能的吗？尤其是以人均 GDP 度量的经济增长怎么样才能在长期内成为一种趋势？

第二，经济增长能以一种均衡的方式实现吗？还是会以一种动荡不稳定的方式实现？

第三，为什么有的国家在经济增长上会长期“沉睡不醒”，而突然又会出现高速增长？为什么有的国家在经历几十年的高速增长后，却跌入长期的停滞，如日本近 30 多年（1990 年以来）的缓慢增长？换言之，制度、政治状况是如何影响经济增长的？

第四，各国的经济增长会收敛吗？还是会发散，使得国与国的差异越来越大？

当然，如果我们多思考一下，会发现还有一系列重要的问题。比如，我们看到短期增长与长期增长之间的关系，还要问短期增长的代价是什么？要问当前的增长是否可以持续？中国从 1992 年以后进入高速增长的阶段，可这是以土地的大量被占用、资源被大量消耗、广大人民被长期廉价使用和压迫为代价的。我们廉价的出口是换来了大量的外汇，但这些美元外汇常常因为美元贬值而使我国遭受损失；我们是获得了短期的高速增长，但是资源的破坏性开采和工业无节制排放已经使得中国大部分地区常年空气质量差。这样的增长难道是我们应该追求的吗？这样的增长是在提高中国人民的福利吗？

二、70 规则

这个规则的出现主要是为了回答一个问题：如果一国的真实 GDP 以每年$x\%$的速度增长，请问多少年后其 GDP 能翻一番？根据 70 规则，需要$70/x$年。为什么？

这是一个数学问题。假设需要n年，那么我们可以得到如下关系式：

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^n = 2。$$

此时，我们对上式两边同时取自然对数，就可以得到

$$n \times \ln\left(1+\frac{x}{100}\right) = \ln 2。$$

当$\frac{x}{100}$的值较小时，我们可以利用$\ln\left(1+\frac{x}{100}\right) \approx \frac{x}{100}$的近似关系得到：

$$n \approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}。$$

如果$x = 6$，那么一国的经济可以在 11.7 年后翻一番，23.3 年后翻两番。我国在

2012-2024 年这 12 年期间，GDP 实现了翻一番的目标。如果我们能维持 6%的增速，那么可以预期 2035 年我国 GDP 还能再翻一番。

除了回答多少年翻一番的问题外，我们还可以快速计算“赶超时间”。

根据世界银行的数据，2023 年中国的（名义）人均 GDP 是 12614.1 美元，美国的（名义）人均 GDP 是 82769.4 美元，是中国的 6.6 倍。若中国和美国的人口增长率保持在 0%，且物价、汇率均保持不变，而经济增长率保持在 5%和 2%，那么需要多少年中国才可以在名义上赶超美国的人均 GDP？

首先，我们要将 6.6 倍换算成“番数”：$\log_2 6.6 \approx 2.722$。

然后，中国每年人均 GDP 增长比美国快 3%，因此$\frac{70}{3}$≈23.3 年可以翻一番，故需要23.3×2.722 ≈63 年，我国才可以在人均 GDP 上与美国并驾齐驱。

那么，中国在名义 GDP 总量上赶超美国需要多少年呢？

根据世界银行 2023 年的数据，中国和美国的 GDP 总量分别为 17.79 万亿和 27.72 万亿，美国是中国的 1.56 倍。若转化为番数，则是$\log_2 1.56 \approx 0.642$番，再乘以 23.3 年则大约得到 15 年。

因此，若中国在接下来的 15 年能保持年平均 GDP 增速超过美国 3%，那么将在 2038 年在 GDP 的名义总量上与美国并驾齐驱。

三、经济增长的影响因素

或许有人会认为上面的估计过于乐观。为了评判这个观点，我们需要理解经济增长的源泉是什么。由于 GDP 衡量的是生产活动，因此这个问题的本质是问：生产函数的具体形式是什么？

我们先不拘泥于具体的函数形式，而是思考生产函数的变量有哪些。事实上，生产函数是与时俱进的。

在农业社会，生产函数可能只是土地（land）和劳动力（labor）的函数，可简写为$Y_t = \mathrm{f}(L_t)$。古典经济学家（比如后面要介绍的马尔萨斯）的理论认为，只有人口与劳动力是决定经济总量的因素——这正是这个生产函数所展现的观点。

随着经济的发展，我们进入到了工业社会，而生产函数也更新为了$Y_t = \mathrm{f}(L_t, K_t)$或$Y_t = \mathrm{f}(L_t, K_t, A_t)$。这里，$L_t$主要是指劳动要素投入，$K_t$是资本要素投入，而$A_t$代表技术存量。这一时期，新古典增长理论诞生了，相关的经济学家认为，经济增长不仅仅取决于人，还取决于资本积累和技术变迁。

现如今，时代进一步发展，生产方式发生了变革，我们的生产函数又更新成了$Y_t = \mathrm{f}(L_t, K_t, A_t, H_t, N_t, \dots)$。这里，$H_t$代表人力资本（human capital），而$N_t$代表自然资源（natural resources）——也包括土地。这是现代的增长理论的化身，将更多因素纳入经济增长的影响因素。

我们下面介绍每一个自变量，然后再讲解$\mathrm{f}(\cdot)$的具体函数形式。前者是经济增长

源泉的类别，而后者反映经济增长的实现机制。

（一）劳动投入

劳动投入L对一国经济增长的作用是最基本的（fundamental）。我们用总劳动时数来衡量L。该变量可以分解为三个部分，如下式所示。

$$\text{总劳动时数} = \text{工龄人口} \times \frac{\text{就业人口}}{\text{工龄人口}} \times \frac{\text{总劳动时数}}{\text{就业人口}} \tag{4.9}$$

可以看出，该变量取决于三个因素：

- 工作年龄人口，一般指 16-59 岁的人口，稍微宽泛一些可以算 15-64 岁的人口。近年来我国对工作年龄人口的定义有在放宽，尤其是随着退休年龄的提高，工作年龄的人口比重可能需要调整。从图 4.2 中可以看出，我国宽泛工龄人口占总人口比重在 2010 年达到顶峰（74.5%），此后不断下降，到 2023 年占比仅为 68.3%。

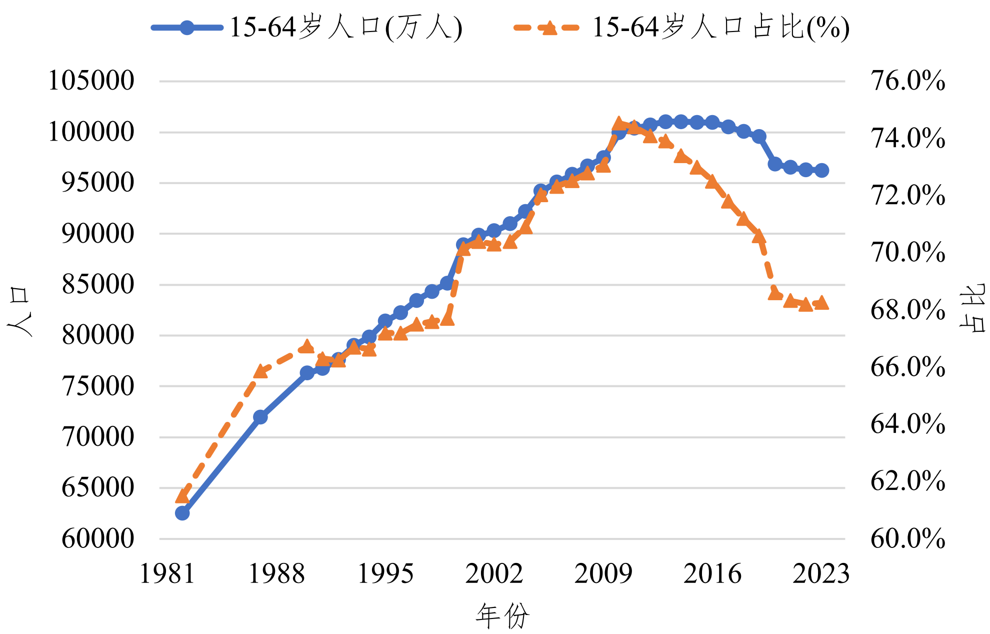


图 4.2：我国 15-64 岁人口（1982、1987、1990-2023 年）

注：数据来源于国家统计局，访问于 2025 年 3 月 8 日，笔者根据数据计算后绘制此图。

- 就业人口占工龄人口的比重。从图 4.3 中不难发现，虽然我国就业人口占工龄人口比重在 21 世纪持续下降，但就业人口缓慢上升，仅在近几年缓慢下降，但仍然维持在 7.3 亿人以上（2024 年为 7.34 亿）。比重下降

主要由更快的工龄人口的增加所致。

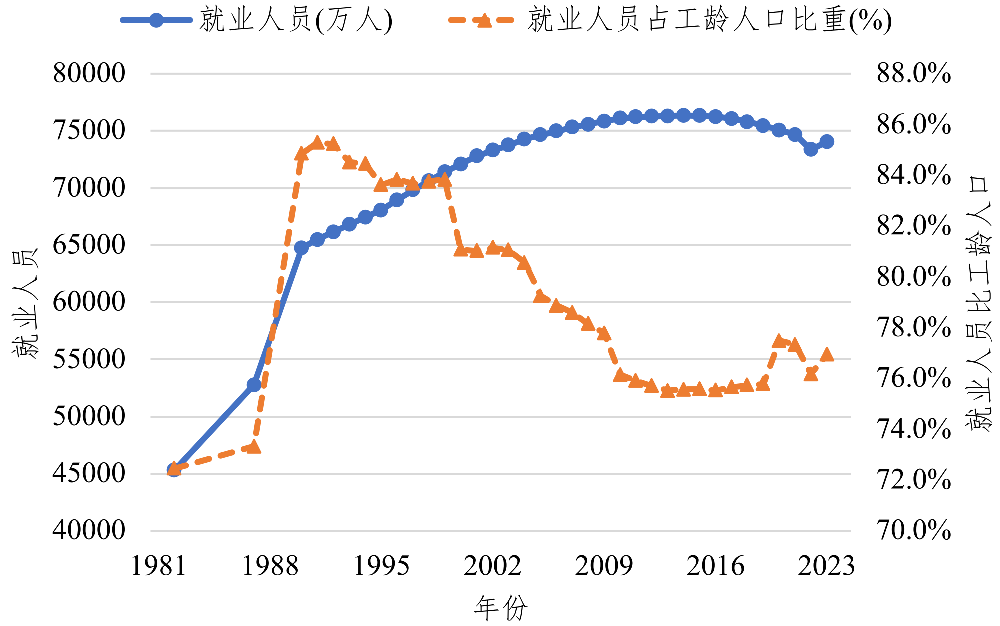
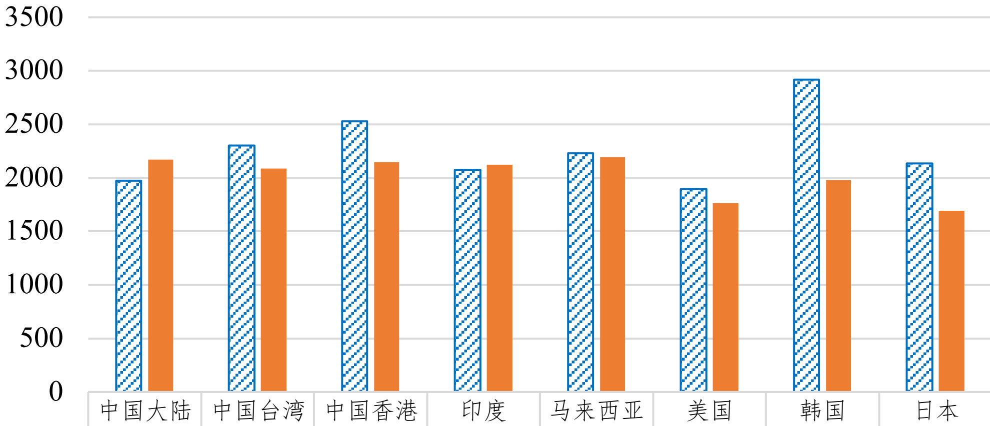


图 4.3：我国就业人员数（1982、1987、1990-2023 年）

注：数据来源于国家统计局，访问于 2025 年 3 月 8 日，笔者根据数据计算后绘制此图。



	中国大陆	中国台湾	中国香港	印度	马来西亚	美国	韩国	日本
1970	1976	2301	2528	2077	2230	1893	2919	2137
2019	2169	2085	2148	2123	2197	1765	1980	1691

图 4.4：部分国家从业人员平均工作小时数（1970 与 2019 年）

注：数据来源于 Penn World Tables 10.01，访问于 2023 年 3 月 13 日。

- 工作人员平均劳动时间。近年“996”、“调休”等话题屡上热搜，背后是大众对工作时长的持续关注。过去五十年来，全球工作时长普遍呈现出减少的趋势，但也不乏例外（比如中国大陆地区）。

（二）资本投入

实物资本K的增长取决于储蓄和投资决策。储蓄为投资提供可能：

- 从实物的角度，只有不把全年产品都消费光了，才有部分资源用于生产物质资本。
- 从价值形态的角度，一国收入只有不全都以消费形式支出，才能使部分收入转变为储蓄。

实物资本不是钱本身，而是生产过程的阶段性产物，也是用来生产最终产品的设备和结构。

（三）人力资本

人力资本H是人本身积累的技能和知识，它与K有一个共性：都是人类生产过程的阶段性产物，又会被当做生产要素投入到最终产品的生产过程之中。

我们在第二讲中具体讨论过人力资本理论，并将其作为工资的决定因素之一。从宏观的角度来看，既然人力资本可以提高每一个人的收入，那它也能提高一国的收入，因为一国的收入是每一个人的收入的加总。如果人力资本确实能提高工人的生产率，从而带来一国产量的提高，那么最终分到该国工人的平均收入也会更高。

（四）自然资源

自然资源N与K和L都不同，是天然存在的，虽然参与了生产过程，但过去一般不被纳入生产函数。

自然资源N包含可再生（renewable）和不可再生的（nonrenewable）自然资源。比如，森林是可再生的，而石油是不可再生的。

过去未被纳入生产函数的自然资源，而如今又被纳入了，是因为自然资源曾经不在人们的决策范围内，但如今人们的决策越来越多地必须考虑自然资源了，因此N自然就要加入生产函数中了。

（五）技术

技术（A）是指社会对生产产品和服务的最优方式的了解程度，体现为公开的（common）或专有的（proprietary）。从要素的归属上看，A可以是公共品，也可以是私人品。公开知识是当某一个人运用时，所有人都知道了。比如，当“生产线”的概念被福特汽车运用后，许多汽车制造商也都采取了生产线的做法。专有技术则是仅限于发现的个人或企业知道，比如可口可乐的神秘配方。当然，专有技术可能在一定的时间内是专有，然后转变为公开。比如一些制药商发明了一种新药，只有20 年受到保护，在此期间该发明个人或企业将成为唯一合法生产者。保护期结束后，其它公司将被允许生产该药。

技术与人力资本是既有联系又有区别的两种生产要素。技术是社会存在的一种知识形态，相当于一种资本存量，即社会现有的生产、经营手段的知识形态；人力资本是个人掌握的一种技能与知识，可随人带走。这两种要素都是与知识、学习有关系，但技术是社会的文明程度，人力资本则更多地是人的文明程度。

值得一提的是，上面讨论的变量K、H、N和A都可以提高单位劳动生产率Y/L。这样一来，我们可以将一国经济增长的源泉简单分为两大类：（1）劳动投入的增加和（2）劳动生产率的增加。

那么，经济增长源源不断的动力在哪里呢？如果你学过微观经济学，你可能会对这个问题感到疑惑。因为微观经济学告诉你“边际产出递减”的规律。也就是说，随着我们不断增加这些变量，人均劳动生产率怎么会在长期维持稳定而高速的增长呢？一个很重要的原因在于，要素配置方式也在发生变化——即生产函数的形式也在发生变化。这种生产函数形式的“变革”对经济增长的促进作用是可以很大程度抵消“边际产出递减”的负向影响的。

（六）生产函数形式的变化

除了自变量的增长以外，生产函数形式的变化也是经济增长的源泉。1993 年的诺贝尔经济学奖得主道格拉斯 • 诺思（Douglass North，1920-2015）指出，制度及其变迁是经济增长的原因，主要包括以下三种激励制度：

- 产权
- 货币交易制度
- 市场

诺思自从博士毕业后就在华盛顿大学（University of Washington）工作，从助理教授到副教授再到教授，工作了 20 多年。后来 1983 年从西雅图的华盛顿大学搬去了圣路易斯华盛顿大学，并于 1993 年获得了诺贝尔经济学奖。

他所指出的产权包括对实物（如土地、建筑物和资本设备）、金融（某一个体向另一个体索取）以及知识的权利。我国物权法从 2007 年起实施，至 2020 年底废止，并入了 2021 年起实施的《中华人民共和国民法典》。我国的知识产权法是由《著作权法》、《商标法》和《专利法》三部法律来构成的，最近几年也均有相关的修订。关于土地产权，尤其是农村集体土地产权，我国过去一直以来面临诸多问题。不过，第十三届全国人大常委会第十二次会议审议通过了关于修改土地管理法的决定，新修订的土地管理法自 2020 年 1 月 1 日起施行。对产权感兴趣的同学可以对此进行更深入的了解。

货币交易保证了价格信号的一致性与稳定性，这也是一种激励。试想，如果卖掉物品换得的钱币只是一张废纸，那谁还会有动力去提供商品与劳务呢？一个稳定、灵活的金融货币制度会极大地为经济活动的多样化提供交易平台，推动贸易频率、融资效率，提高新产品、新技术的创新效率。

市场是买卖双方互相获得信息并完成交易的一种机制，这是一种迄今为止成本最小的为无数人提供激励的配置机制。政府当然可以通过指令调拨资源，但政府配

置必然削弱市场配置机制，经济增长的元气是否会受到伤害，至今仍然是一个颇具争议的话题。

拓展阅读 4.1

诺思有一个朋友叫罗纳德 • 哈里 • 科斯（Ronald Harry Coase，1910-2013）。2011 年底，《财经》杂志的年会邀请到了这位 1991 年诺贝尔经济学奖得主。在视频致辞中，科斯指出，中国经济需要思想市场（market for ideas）。

科斯说道，回顾中国过去三十多年所取得的成绩令人惊叹不已，往前看，未来光明无量。但是，如今的中国经济面临着一个重要问题，即缺乏思想市场，这是中国经济诸多弊端和险象丛生的根源……他还强调，思想市场的发展将使经济增长以知识为动力、更可持续。北大一直没有确定的校训，但是盛传的校训有两个。第一是为人所熟知的“思想自由、兼容并包”，第二个便是“爱国、进步、民主、科学”。实际上，北大所流传的校训就是希望维护思想市场的开放和自由。正因为思想市场自由，才有了共产党，有了新中国，这是我们需要牢记的一点。

第二节　马尔萨斯陷阱

托马斯 • 马尔萨斯（Thomas Malthus，1766-1834）是能与亚当 • 斯密、大卫 • 李嘉图齐名的古典经济学家。他 1798 年匿名发表的《人口原理》对后世产生了深远的影响。《人口原理》于 1803 年出版了第二版，而马尔萨斯也使用了自己的真名。该著作之所以影响这么深远，不仅是因为它讨论了人口过剩的危险，让人们开始关注人口过剩对人类平均生活质量的影响，还因为他开启了一项关于人类平均生活质量增长的终极问题的研究。

我们本节的研究就是要基于生产函数理论来解释：在什么形式的生产函数下，马尔萨斯是正确的，人类走不出马尔萨斯陷阱？在什么形式的生产函数下，人类又可以走出马尔萨斯陷阱？

一、模型

马尔萨斯的模型包含两个部分：（1）总生产函数和（2）人口增长模型。他认为一国总产量只是一种投入要素的函数，即人口的函数。

$$Y = \mathrm{Y}(N) \tag{4.10}$$

在公式（4.10）中，马尔萨斯假设生产过程中没有资本投入，并将土地投入视为一个常数（比如土地面积不变），从而将$\mathrm{Y}(\cdot)$化简为一个单变量函数。还有一个隐含的假定，是当N足够大时，劳动的平均报酬$y=\frac{Y}{N}$随着N的上升而下降，即$\mathrm{Y}(\cdot)$上的点与原点连线的斜率在N较大时是随着N下降的。

这些描述对于马尔萨斯那个时代来说是准确的——这是一个不存在资本积累、没有技术进步、土地面积不变、只有劳动量可变的单变量生产函数。在 18 世纪末及 19 世纪初的英国经济中，农业占经济的极大部分，农业拥有就业量占全部就业量的 75%以上，相当于中国 1978 年以前的就业构成。尽管在当时英国与欧洲其他国家的耕地还是可以通过砍伐森林来增加，但可供农产品生产的土地还是很有限的。因此，总的来看，的确只有劳动量是生产过程中唯一可以增加与减少的变量，总产量Y的确只是人口N这一个变量的函数。

我们可以用图 4.5 来刻画这个总生产函数。可以注意到，$Y_2 < 2Y_1$，这里 OA 和 OC 的斜率反映了劳动平均产量y（是递减的）。这里，边际产出没有递增部分，也是从一开始就进入了递减的区间。

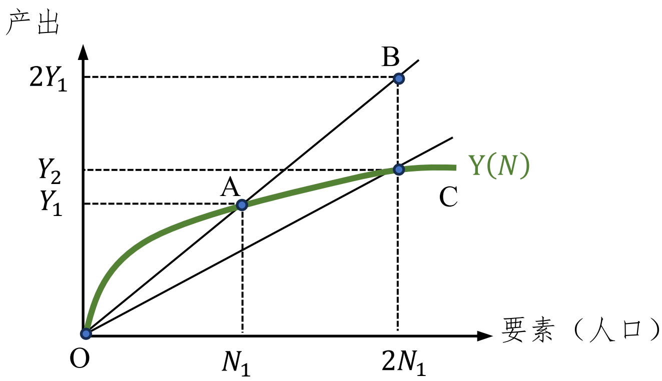


图 4.5：马尔萨斯的生产函数

注意，$y = \frac{Y}{N}$既是人均产量，又是人均收入（即生存资料）。根据生产函数，我们可以得到y与人口N的隐含关系：我们只需要绘制出图 4.5 中原点 O 与生产函数上的每一个点的连线的斜率是如何随着要素（人口）的变化而变化的，即可得到生活水平线。图 4.6 反映了这样的一个经济下不同人口水平能够提供的人均生存资料。

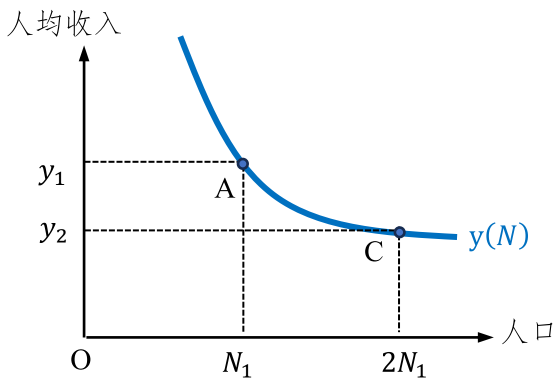


图 4.6：马尔萨斯的生活水平线

对于模型的第二部分（人口增长模型），马尔萨斯考虑的是人口增长率函数。

$$\frac{\Delta N}{N}(y) = \mathrm{b}(y) - \mathrm{d}(y) \tag{4.11}$$

在公式（4.11）中，b代表出生率，d代表死亡率，可以看出他们都是人均收入y的函数，因此人口增长率也是y的函数。为了简单起见，马尔萨斯假定出生率不随着y而改变，即图 4.7 中的水平虚线（大概在 3%到 4%之间）。

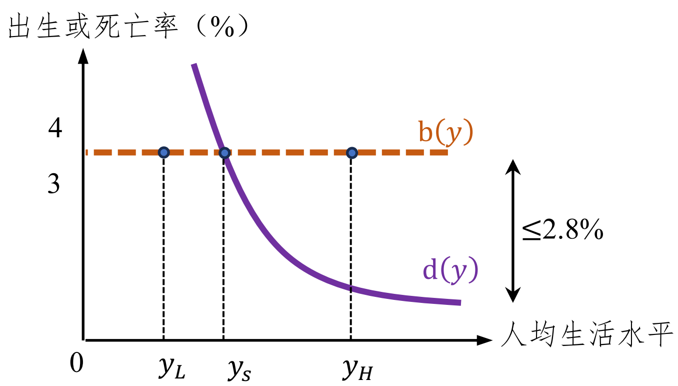


图 4.7：马尔萨斯出生率、死亡率与人均生活水平的关系

死亡率随着人均生活水平的提高而下降。当出生率等于死亡率时，人口增长率为 0，这就是人口稳定的状态。两条曲线的举例就是人口增长率，随着y增加，人口增长率渐进收敛于 2.8%——这个数字来源于马尔萨斯的观察，他发现人口最快 25 年翻一番，所以运用 70 规则，刚好是 2.8%的增长率。我国在 20 世纪 80 年代以前，人口增长率曾经非常接近这个神秘的数字，这也是马尔萨斯的神奇之处。

我们将人口增长率与y的关系绘制于图 4.8：

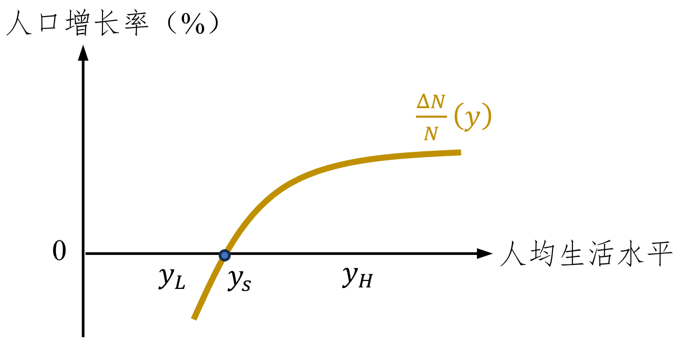


图 4.8：马尔萨斯人口增长率与人均生活水平的关系

这是人口增长率与人均生活水平的关系，也就是上一张图中两条曲线（b 和 d）的差值。这里，y_S是马尔萨斯认为的均衡点，并且是一个相对较低的生活水平，所以

我们将其称为低收入水平陷阱，或马尔萨斯陷阱。

二、均衡

有了上述模型，我们就可以讨论均衡点了。在马尔萨斯的体系中，一个均衡点需要满足三个条件：

第一，供求相等。供给就是产出Y，需求就是人均生活水平$y\times$人口N。

第二，人口规模维持稳定不变。

第三，人均收入（生活水平）不变。

马尔萨斯在《人口原理》中清晰地论证了均衡时如何形成的（均衡的形成机制是什么）。我们在这里用图 4.9 来论证y_s为何是均衡点。

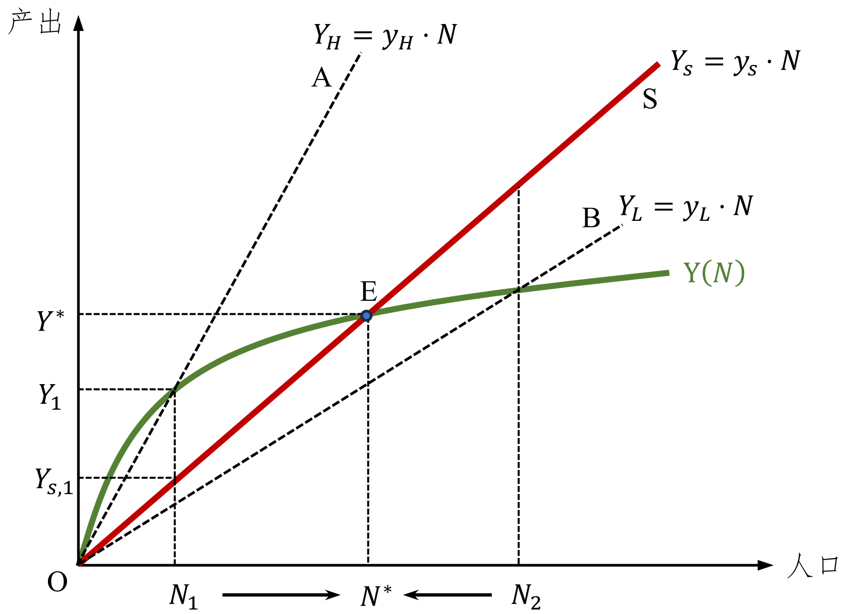


图 4.9：马尔萨斯模型的均衡解

可以看出，均衡点 E 满足上述三个条件。第一，由于 E 点在射线 OS 上（$Y_s = y_s \cdot N$），所以满足供求相等。第二，由于 OS 射线的斜率为y_s，是使得出生率与死亡率相等的人均生活水平，所以人口增长率为 0，因此人口规模处于均衡。第三，由于在 E 点处产出没有变化，人口也没有变化，那么人均收入自然也没有发生改变，即处于均衡状态。

均衡点 E 是否是稳定的均衡呢？要回答这个问题，我们就需要考察当经济偏离 E 点时，经济是否会自发地向均衡点移动。假设一场自然灾害将人口降低到了N_1，那么根据生产函数或生活水平线，产量Y_1（或人均产量y_1）将高于使得人口维持稳定的水平（$y_1 > y_s$），从而使得出生率高于死亡率，那么人口就会持续增加，直到回到N^*为止。类似地，假设人口意外地增加了，那么人均生活水平将低于维持人口不变的y_s水平，人口就会持续减少，直到回到N^*为止。

当今我国与图 4.9 中的 OS 线较相关的概念是“粮食安全线”或“耕地红线”，这是在某一人口水平下维持人口零增长所必须的最低总生产水平。值得一提的是，对于不同的人口规模，“土地红线”是可以调整的。当经济条件（如生产函数）发生改变时，我们的人口规模也将不断调整，因此红线告诉我们的总生存资料也会不同。

从图 4.9 中我们还可以看出，这个均衡是收入水平较低的均衡，并且是一个“陷阱”，一旦陷进去了就很难逃脱出来，是一个“难以自拔”的均衡。因此，对于很多国家来说，要想摆脱贫困，外力的推动是不可或缺的——这也成为了许多扶贫政策的理论基础。

三、政策启示

为了使经济走向更高水平的均衡，我们要么想办法将图 4.9 中的生产函数提高，要么将 OS 线压低，这样生产函数与 OS 线的交点向右上方移动。这样，经济总量就能够提高，从而摆脱低水平的马尔萨斯陷阱，走向更温饱一些的均衡。

将生产函数提高，在马尔萨斯的框架下，则要求改变生产函数的形式，也就是改变使用人口这个单一的要素的方式。如何发挥劳动人民的积极性、提高劳动人民的能力，成为走向更高水平均衡的关键。我们只需要将上面的模型进行一些调整，就可以讨论收入分配结构如何能激发劳动人民的积极性，并将均衡推向更高水平的状况。这种更高水平的均衡没有改变 OS 线，因此人均收入没有发生变化（即 OE 的斜率维持不变），只是人口和总产量都更高了。

将 OS 线压平缓一些，则要求降低死亡率（或提高生育率），让维持人口不变的最低人均生产水平下降。这样的策略看起来是以牺牲人均收入为代价的，但实际上是降低了人们所需的生存资料。试想，原来需要一万元一个月才能生存，现在变成五千一个月就可以生存了，何乐而不为呢？收入不是越高越好，够用就好，这正是马尔萨斯模型中的一个隐含的观点。从结果上看，虽然人均收入下降了，但是人口和总产量都更高了，是更高水平的均衡。当前，我国反贫困政策非常注重改善贫困地区的公共基础设施，其目的就是降低维持生存所需的人均收入，让老百姓不需要那么多收入就可以维持较好的生活。

第三节　索罗增长模型

随着时代的发展，经济发生了新的态势：人口出现了持续的正增长，与此同时经济也在持续增长。为了理解这个新的均衡，新古典经济学应运而生，不仅继承了古典经济学对市场机制肯定的传统，还引入了工业经济中资本积累、技术进步对于经济增长的作用，在市场机制中同时考察人口增长、资本积累、储蓄和经济增长，以探究新的均衡机制。

新古典增长理论的一个重要代表就是索罗增长模型，由 1987 年诺贝尔经济学奖得主罗伯特 • 莫顿 • 索罗（Robert Merton Solow，1924-2023）提出。1956-1957 年，他发表的两篇论文，成为了经济增长理论的经典参考文献。事实上，1956 年，斯旺

（Trevor Winchester Swan）也发表了类似的模型，因此索罗模型又被称为索罗-斯旺模型（Solow-Swan model）。下面，我们具体介绍该模型。

一、生产函数

进入现代工业经济以后，生产活动不再只需要单一投入要素。除了劳动L以外，资本K和技术A也十分重要。因此，新古典经济增长理论以下列柯布-道格拉斯（Cobb-Douglas）生产函数为基础。

$$Y_t = AK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{4.12}$$

在公式（4.12）中，A是总要素生产率，代表技术对产业的贡献，它影响生产，但被视为一个常数，不是投入要素；K_t和N_t分别是第t期资本和劳动（人口）的投入量。从函数的形式来看，Y_t随着A、K和N的增加而增加（是A、K和N的增函数），但对于K和N来说都存在“边际产出递减”，即Y_t对K_t（或N_t）的一阶导随着K_t（或N_t）递减，也即$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} < 0$和$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial N_t^2} < 0$。

生产函数（4.2）还满足规模报酬不变（Constant Returns to Scale，CRS）的特性。下面给出三个相关的定义：

- CRS: 当所有投入要素都增加到原来的a倍时，产量也增加到原来的a倍。用数学来表达，可以写为$\mathrm{F}(aK, aN) = a\mathrm{F}(K, N)$。我们也称函数F是一次齐次的（homogeneous of degree one）。
- 规模报酬递减（Decreasing Returns to Scale，DRS）：$\mathrm{F}(aK, aN) < a\mathrm{F}(K, N)$对于所有$a > 1$都成立。
- 规模报酬递增（Increasing Returns to Scale，IRS）：$\mathrm{F}(aK, aN) > a\mathrm{F}(K, N)$对于所有$a > 1$都成立。

与古典增长理论一样，我们也关注人均产量。为此，我们对公式（4.12）两侧都除以人口N_t，并定义$y_t = \frac{Y_t}{N_t}$和$k_t = \frac{K_t}{N_t}$（资本-劳动比率，又称为资本密度），不难得到下式。

$$y_t = Ak_t^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{4.13}$$

不难看出，人均收入同样面临着资本密度“边际产出递减”的规律。这么看，单纯引入了资本积累和资本密度，仍然无法完全解释过去 200 年间在发达市场经济国家发生的、长期持久的 GDP 的增长的事实。为了解释收入的持续增长，我们或许需要更多的模型细节。

二、更多细节与稳态均衡

接下来，我们定义消费占 GDP 的比重为β，且$\beta \in (0,1)$。这样一来，人均消费量就可以表示为$c_t = \beta y_t$。假设没有政府，那么人均储蓄量就可以表示为$s_t = (1-\beta)y_t$。再假设没有国际贸易，那么人均投资$i_t = s_t$。

【引理 4.1】如果资本量K_t与人口量N_t是以相同速度增长的，那么资本劳动比率保持不变。

证明：假设增长率都是n，那么$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = \frac{(1+n)K_t}{(1+n)N_t} = \frac{K_t}{N_t} = k_t$。

【引理 4.2】若折旧率$\delta = 0$，且$I_t = nK_t$（即一国的投资量按人口增长率与资本存量的乘积来投资）[2]，则资本-劳动比率保持不变。

证明：首先，$I_t = \Delta K_{t+1} = K_{t+1} - K_t$（注意，$I_t$是对$t+1$期的投资）。因此，有$k_{t+1} = \frac{K_t+I_t}{N_{t+1}} = \frac{K_t+nK_t}{(1+n)N_t} = \frac{(1+n)K_t}{(1+n)N_t} = \frac{K_t}{N_t} = k_t$。

我们可以定义资本水平扩张（capital widening）的人均投资水平如下。

$$i_t^* = \frac{nK_t}{N_t} = nk_t \tag{4.14}$$

相应地，若$i_t > nk_t$，则是资本水平深化（capital deepening）的投资，因为它会使得$k_{t+1} > k_t$。接下来，我们就可以用图像模型来展示索罗模型的均衡了。

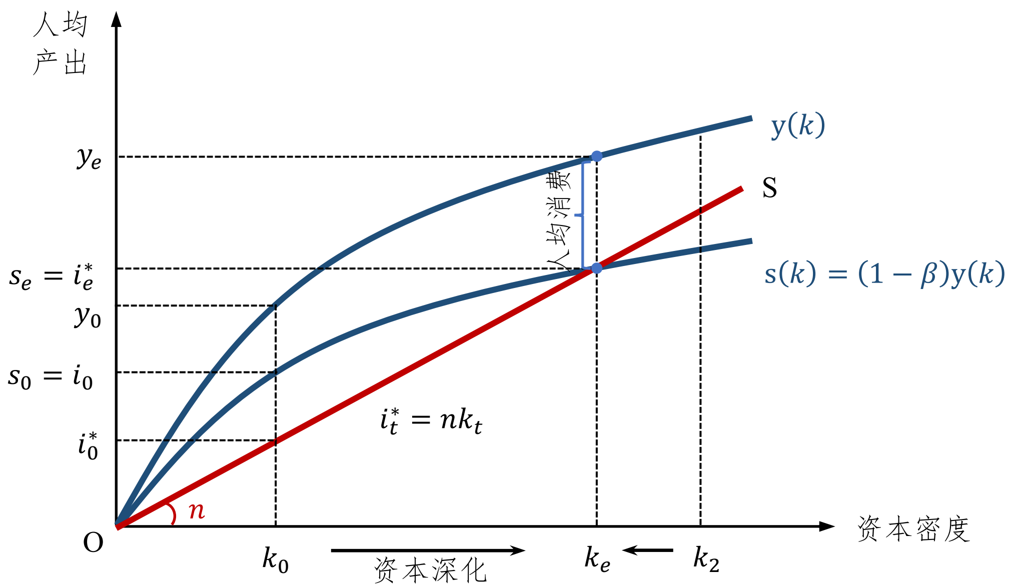


图 4.10：简化索罗模型的均衡解

[2] 在一些教材，写作I_{t+1}，是想强调这个是对第$t+1$期的投资；这里，我们写作I_t也是对第$t+1$期的投资，只是想强调这个决策是在第t期就定下来了。

在图 4.10 中，我们将k_e视为稳态均衡（steady-state equilibrium）点。可以发现，该图中同样存在一条 OS 线，但这是满足资本水平（总存量）扩张的人均投资水平。OS 线与下凹的储蓄线的交点决定了人均资本的稳态均衡点。人均产出线$\mathrm{y}(k)$与储蓄线的垂直距离就是人均消费水平$\mathrm{c}(k)=\mathrm{y}(k)-\mathrm{s}(k)$。

要理解k_e为什么是稳态均衡点，我们就需要考虑以下两个方面：

- 人均产出与人均资本量在该点是否维持稳定？显然，只要看人均资本量是否维持稳定即可，因为人均产出只取决于人均资本量。根据引理 4.1 和 4.2，我们就知道$k_{t+1}=k_t=k_e$。
- 当系统受到某种扰动而偏离均衡点后，是否能够调节和修正回来？对于这点，我们不妨考虑系统偏离到图 4.10 中的k_0的位置时的情景。此时，人均储蓄与人均投资$i_0>i_0^*=nk_0$，因此是资本水平深化的投资水平，则人均资本量持续上升，直至达到k_e为止。类似地，若由于某种原因系统偏离到k_2的位置，则人均资本量会下降，直至达到k_e为止。

在以上讨论中，我们始终假设没有折旧，即$\delta=0$。下面我们将会放松该假设，讨论更完整的索罗增长模型。

在这种简化的情况下，总产出、总资本、总消费也都按人口增长率n增长。如果经济进入了这样的一个时期，各个经济变量都处于一种和谐平衡的关系中，我们就称这个时期为“黄金时期”。

三、数值模拟与均衡计算

在上面的讨论中，我们看到了索罗模型中的均衡存在自我修复机制。进一步的问题是，这个修复能有多快呢？为了回答这个问题，我们用数值模拟（simulation）来说明。

假设$t=0$时（初始状态下）一国人口规模为 8 亿，资本存量为 18 万亿，初始产出为 12 万亿，人口增长率为$n=5\%$，生产函数$\alpha=0.5$、$A=1$，消费占 GDP 的比重为$\beta=0.75$。

接下来，我们需要计算$t=1$时的资本增长率、总产出增长率、人均产出、人均消费……以此类推，当计算到$t=T$时，若这些变量趋于稳定，我们就知道需要多久才能实现系统的自我修复了。

我们当然可以使用 Python、R、Stata、Mablab 等统计软件来计算，但这里提供一个 Excel 的例子：

- 首先，我们将所有给定参数录入到表格相应位置，用红色斜体标注。
- 然后，将要计算的参数逐行（或列）列出，模拟年份逐列（或行）标明。
- 其次，为$t=0$和$t=1$的各个空格填写计算公式。
- 接着，通过拖拽的方式，得到$t=2,3,\ldots,T$的结果。
- 最后，观察结果，并推测出稳态时的情况。

表 4.1 和 4.2 提供了部分计算结果（请参见 Lecture4_SolowSimulation1.xlsx 中的

具体公式和完整结果，即数值模拟 1)。

表 4.1：一个索罗模型数值模拟的前几期结果

年份 t	0	1	2	3	4	5	6	…
人口(亿)	*8*	8.4	8.82	9.26	9.72	10.21	10.72	…
资本存量(万亿)	*18*	21	24.32	27.98	32.01	36.42	41.24	…
资本增长率		0.17	0.16	0.15	0.14	0.14	0.13	…
GDP(万亿)	*12*	13.28	14.65	16.10	17.64	19.28	21.03	…
GDP 增长率		0.11	0.10	0.10	0.10	0.09	0.09	…
储蓄或投资	3	3.32	3.66	4.02	4.41	4.82	5.26	…
资本水平扩张的投资(万亿)	0.9	1.05	1.22	1.40	1.60	1.82	2.06	…
资本-劳动比率(万)	2.25	2.50	2.76	3.02	3.29	3.57	3.85	…
资本密度增长率		0.11	0.10	0.10	0.09	0.08	0.08	…
人均 GDP(万)	1.5	1.58	1.66	1.74	1.81	1.89	1.96	…
人均产出增长率		0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	…
人均消费水平(万)	1.125	1.19	1.25	1.30	1.36	1.42	1.47	…
人均消费增长率		0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	…
其他参数(固定)								
人口增长率	*0.05*							
柯布道格拉斯函数 alpha	*0.5*							
消费占 GDP 比重	*0.75*							

表 4.2：一个索罗模型数值模拟到第 100、200 期的结果及推测均衡

年份 t	0	1	…	100	…	200	均衡
人口(亿)	*8*	8.4	…	1052.01	…	138340.65	
资本存量(万亿)	*18*	21	…	23053.13	…	3418976.83	
资本增长率		0.17	…	0.05	…	0.05	0.05
GDP(万亿)	*12*	13.28	…	4924.64	…	687737.93	
GDP 增长率		0.11	…	0.05	…	0.05	0.05
储蓄或投资	3	3.32	…	1231.16	…	171934.48	
资本水平扩张的投资(万亿)	0.9	1.05	…	1152.66	…	170948.84	
资本-劳动比率(万)	2.25	2.50	…	21.91	…	24.71	25
资本密度增长率		0.11	…	0.00	…	0.00	0
人均 GDP(万)	1.5	1.58	…	4.68	…	4.97	5
人均产出增长率		0.05	…	0.00	…	0.00	0
人均消费水平(万)	1.125	1.19	…	3.51	…	3.73	3.75
人均消费增长率		0.05	…	0.00	…	0.00	0
其他参数(固定)							
人口增长率	*0.05*						
柯布道格拉斯函数 alpha	*0.5*						
消费占 GDP 比重	*0.75*						

表 4.1 和 4.2 的第一列（$t=0$时）的红色斜体内容为最开始提供的信息。为了计算$t=1$时的情况，我们需要完善$t=0$时的部分信息。

储蓄或投资为$S_0=I_0=(1-\beta)Y_0=(1-0.75)\times 12=3$万亿；资本水平扩张的投资为$I_0^*=nK_0=0.05\times 18=0.9$万亿。显然，$I_0>I_0^*$，我们将进入资本深化阶段。资本-劳动比率（资本密度）为$k_0=\frac{K_0}{N_0}=\frac{18}{8}=2.25$万；人均 GDP 为$y_0=\frac{Y_0}{N_0}=\frac{12}{8}=1.5$万；人均消费水平$c_0=\beta y_0=0.75\times 1.5=1.125$万。第一列（$t=0$时）其余的空都是和增长率有关，故无需计算。

对于第二列（$t=1$时），我们首先计算第一列红色斜体内容对应的变量，然后就如法炮制计算其余的空（和增长率）。人口为$N_1=(1+n)N_0=1.05\times 8=8.4$亿人；资本存量$K_1=K_0+I_0=18+3=21$万亿；GDP 用生产函数计算，为$Y_1=K_1^{0.5}N_1^{0.5}=(8.4\times 21)^{0.5}\approx 13.28$万亿。其余的变量（除了增长率以外）计算方式与上面$t=0$时一样。变量$X_t$的增长率可以由公式$\frac{X_t-X_{t-1}}{X_{t-1}}$得到。

在 Excel 中，我们将含有公式的第二列（$t=1$时）一直拖拽到第 301 列（即$t=300$时），发现资本密度、人均产出和人均消费水平的增长率都趋于 0 了，因此可以知道此时已经基本快回到稳态均衡了：资本和 GDP 增长率也趋于人口增长率 0.05。不难推测出，稳态时的资本密度应该是 25 万，人均 GDP 应该是 5 万，而人均消费水平应该是 3.75 万。

在没有 Excel 的情况下，我们能否直接计算出均衡呢？根据前面的理论，我们的确可以直接计算出来：

- 首先，令人均储蓄等于资本扩张水平的投资$s_e=i_e^*\Rightarrow(1-\beta)y_e=nk_e$，进而$0.25k_e^{0.5}=0.05k_e$。
- 根据该等式，我们可以得到$k_e^{-0.5}=\frac{0.05}{0.25}=0.2$，因此$k_e=0.2^{-2}=5^2=25$万。这正是我们推测出的数值。
- 进而，$y_e=k_e^{0.5}=25^{0.5}=5$万。
- 然后，$c_e=0.75y_e=3.75$万。
- 最后，$\frac{\Delta Y}{Y}=\frac{\Delta K}{K}=\frac{\Delta C}{C}=n=0.05$，$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta k}{k}=\frac{\Delta c}{c}=0$。

例 4.2

在不改变$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\beta}$的情况下，改变$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{N}$的初始值，均衡会改变吗？（请参考文件 Lecture4_SolowSimulation2.xlsx，即数值模拟 2。）

例 4.3

储蓄率$\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}$越高越好吗？

从直觉上来讲，人均储蓄曲线不断接近人均生产曲线时，人均消费会被压缩，而人均消费反映的是生活水平，因此不是越高越好。

我们考虑哪一个储蓄率下的均衡是最好的。一方面，我们希望把饼做大（提高 GDP），这就意味着我们需要减少消费占 GDP 的比重；另一方面，我们又希望分到更大的一块饼，这就意味着我们需要增加消费占 GDP 的比重。显然，这里存在一个“平衡点”。

四、黄金规则

这实际上是一个数学问题，我们的目标如果是最大化消费的话，只要考虑如下一阶条件。

$$\left.\frac{dc_t}{dk_t}\right|_{k_t=k^*} = \alpha A(k^*)^{\alpha-1} - n = 0 \tag{4.15}$$

我们把满足公式（4.15）的资本密度k^*称为是符合“黄金规则”（golden rule）的资本密度，在该点上的经济就是满足黄金规则的经济。

五、一个更完整的索罗模型

前面的讨论中，我们始终假设没有折旧，也即$\delta = 0$。如果我们同时又$n > 0$和$\delta > 0$，该如何调整上面的讨论呢？

为了维持资本水平扩张（即总资本水平按照人口增长率增长，但人均资本水平不变），我们应该有$I_t = (n+\delta)K_t$。注意，资本积累方程应该写为$I_t = \Delta K_{t+1} = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$。此时，$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t = (1+n)K_t$。

新的 OS 线就是：$i_t^* = (n+\delta)k_t$。

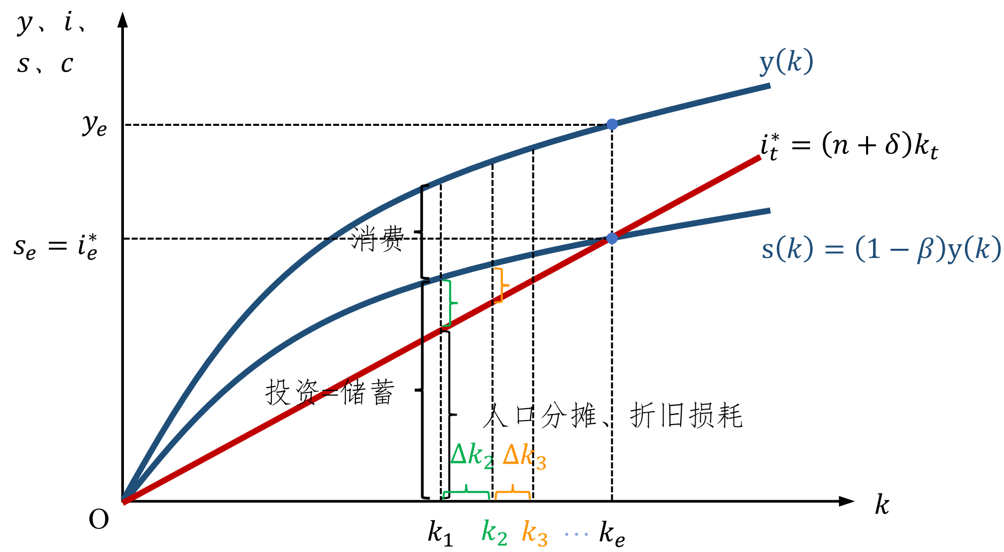


图 4.11：更完整索罗模型的均衡解

在图 4.11 中，我们可以看到系统如何从初始状态k_1一步步向k_e接近，而这也是前面 Excel 例子中所展示的收敛过程。更新的 OS 线除了让人均投资满足人口增长带来的分摊以外，还需要弥补折旧的损耗。当储蓄线高于这条 OS 线时，资本继续深化。

黄金规则也需要相应地更新为如下公式。

$$\left.\frac{dc}{dk}\right|_{k=k^{\text{gold}}} = \left.\left(\frac{dy}{dk} - \frac{ds}{dk}\right)\right|_{k=k^{\text{gold}}} = \alpha A\left(k^{\text{gold}}\right)^{\alpha-1} - (n+\delta) = 0 \tag{4.16}$$

我们可以用图像模型得到同样的结论。如图 4.12 所示，要想最大化人均消费，我们只需要找到生产函数曲线上斜率与 OS 线相等的点——此时，生产函数曲线与 OS 线的最短距离最远，因此垂直距离也最大。

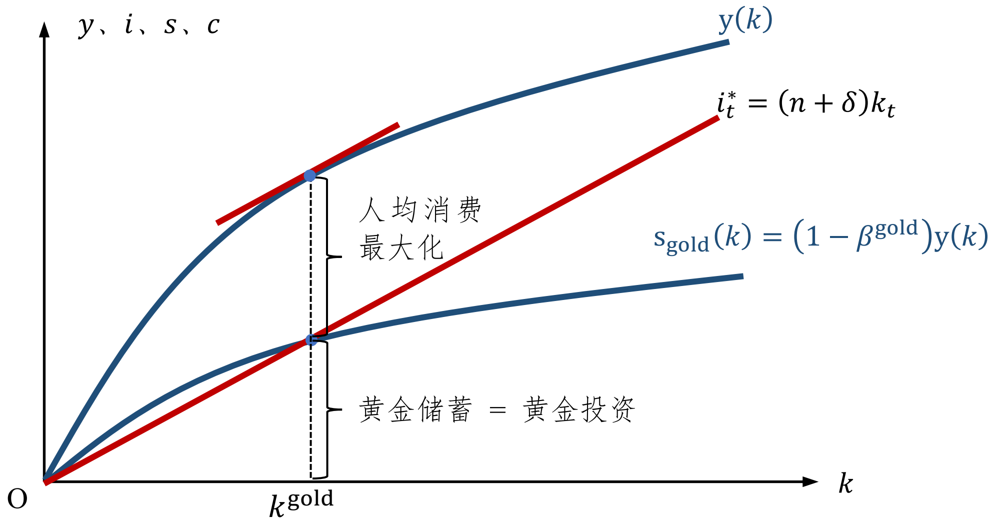


图 4.12：索罗“黄金规则”的图像模型

根据图像模型，生产函数曲线的斜率为$\frac{dy(k)}{dk} = \alpha A k^{\alpha-1}$，而 OS 线的斜率始终为$n+\delta$，令两者相等得到$\alpha A\left(k^{\text{gold}}\right)^{\alpha-1} = n+\delta$，这正是公式（4.16）所告诉我们的。

例 4.4

如果$\boldsymbol{k_e} < \boldsymbol{k^{\text{gold}}}$，根据黄金规则，我们该如何调整储蓄率？当储蓄率突然发生我们希望的变化时，人均投资、人均产出、人均消费、人均产出增长率、总产出和总产出增长率会如何受到影响？

此时，我们希望$\boldsymbol{k_e}$提高，比如政府可以鼓励大家更多的储蓄。如果储蓄率突然上升，由于投资等于储蓄，人均投资会突然提高，而这个变化不会立刻影响当期的资本密度（而会反映到下一期），因而不会立即影响当期的人均产出。但是由于消费等于产出减去储蓄，

所以人均消费会立即下降。

由于储蓄率的提升，稳态均衡时的资本密度会提高，由此推出稳态均衡的人均产出会提升。如果储蓄率的提升是准确地按照黄金规则进行的，则稳态的人均消费也会提升。如果未能按照黄金规则进行，那么稳态的人均消费也有可能下降。

基于即刻和稳态均衡的变化，我们可以推测人均产出会逐渐提升，但提升速度会逐渐变慢——人均产出增长率会即刻获得一个动能（提高），然后增长率慢慢回落并趋于 0。人均消费会突然下降，但逐渐随着人均产出的提升而回升，甚至可能超过原来的水平。总产出会不断上升，其上升速度先立即提高再下降回到原来的水平，即$\boldsymbol{n}$。

图 4.13 是上述回答的图像化展示。

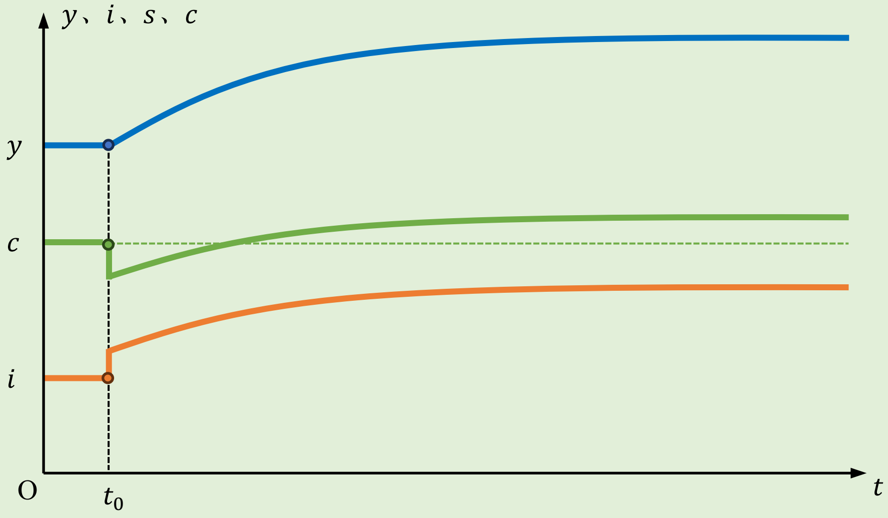


图 4.13：储蓄率突然上升到黄金规则水平带来的影响

六、索罗增长模型对人均产出增长的解释

事实上，在过去的两个世纪，人均 GDP 也在持续的增长。索罗模型能否对此有一些解释呢？

稳态均衡也许只是一个理想状态，我们或许永远在前往稳态均衡的路上。这样一来，人均 GDP 也会一直在增长。那么，我们为什么一直在路上呢？

可以注意到，新古典增长模型中的生产函数有一项A代表技术进步。只要A上升，人均生产和储蓄曲线都上升，均衡点不断右移，我们就一直在路上。1957 年，索罗在 Review of Economics and Statistics 上发表的文章就讨论技术进步在经济增长中的贡献。[3]

估算公式如下。

[3] Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312-320.

$$\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} = \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t}\right) + \text{索罗余项} \tag{4.17}$$

公式（4.17）中的索罗余项（Solow residual）又称为"索罗残差"，可以理解为技术进步带来的增长率。这个公式十分简洁，因此也备受政策制定者的青睐。这个公式如何向普通公众解释呢？

我们可以利用图 4.14 的图像模型来近似理解这个公式。

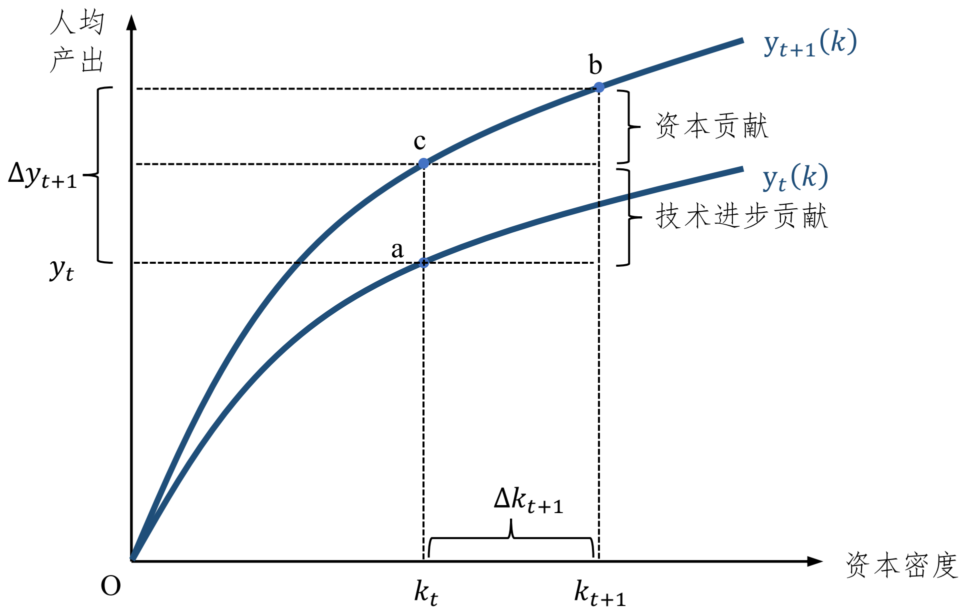


图 4.14：索罗余项的示意图

设图 4.14 中 b 和 c 点的连线斜率为r，它可以被 a 点的切线斜率近似估计（若用 c 点则会高估斜率）：

$$r \approx \frac{dy_t}{dk_t}(k_t) = \alpha A k_t^{\alpha-1} = \frac{\alpha y_t}{k_t}。$$

因此，根据斜率的定义，资本贡献$= \Delta k_{t+1} \times r = \alpha \frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} y_t$。$\Delta y_{t+1} =$资本贡献+技术进步贡献，因此有如下式子。

$$\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} = \alpha\left(\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t}\right) + \text{技术进步贡献的增长率} \tag{4.18}$$

索罗对美国生产函数的估计得到了$\alpha \approx \frac{1}{3}$。在我国，一篇 2005 年发表在《经济

研究》的论文指出，我国 1979-2004 年全要素生产率对经济增长平均贡献率较低，仅为经济增长率的 10%左右。[4]

第四节 经济增长的分解

在这一小节，我们简要讨论一下如何分解经济增长率。为此，我们考虑一国的总生产函数如公式（4.19）所示。

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{4.19}$$

现在，我们要计算$\frac{\Delta Y}{Y}$。利用全微分的思路，我们可以得到

$$\Delta Y = \Delta A \times K^{\alpha}N^{1-\alpha} + \alpha K^{\alpha-1}\Delta K \times AN^{1-\alpha} + (1-\alpha)L^{-\alpha}\Delta L \times AK^{\alpha}。$$

然后，在上式两侧同时除以$Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$，我们就可以得到如下式子。

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L} \tag{4.20}$$

在公式（4.20）中，我们可以将α和$1-\alpha$视为是资本和劳动的收入份额（income share）。为什么呢？在完全竞争的情况下，单位要素的报酬等于该要素的边际产品（marginal product），因而要素的总报酬就等于总要素投入乘以边际产品。对于资本来说，单位要素报酬就是边际资本产品（marginal product of capital，MPK），也即总产品Y对资本K求一阶导：$MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \frac{\alpha Y}{K}$，而总报酬就是$MP_K \times K = \alpha Y$。不难看出，资本的总报酬占总收入的份额为$\frac{MP_K \times K}{Y} = \alpha$；类似地劳动的总报酬占收入的份额为$\frac{MP_L \times L}{Y} = 1-\alpha$。这样一来，将$\alpha$和$1-\alpha$称为是资本和劳动的收入份额就显而易见了。

我们还可以将α和$1-\alpha$视为资本和劳动对经济的贡献率。因为$MP_K \times K$不仅是资本的报酬，也是资本带来的产出，因此自然是对经济的贡献。同理，$MP_L \times L$则是劳动对经济的贡献。Y不仅是总收入，也是总产出。从某种意义上说，产出多、贡献大的要素分得了更多的收入，是一种公平。

上面讨论了 GDP 增长率的分解，那么人均 GDP 增长率如何分解呢？我们知道人均 GDP 与 GDP 的关系是$y = \frac{Y}{N} = Y \cdot N^{-1}$，因此

[4] 郭庆旺、贾俊雪，2005：“中国全要素生产率的估算：1979—2004”，《经济研究》第 6 期，第 51-60 页。

$$\Delta y = \Delta Y \times N^{-1} + (-1)N^{-2}\Delta N \times Y。$$

然后，在上式两侧同时除以y，我们就可以得到如下式子。

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta Y}{Ny} - \frac{\Delta N \cdot Y}{N \cdot Ny} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta N}{N} \tag{4.21}$$

有了经济增长的分解公式，我们就可以为索罗余项提供另一个证明：根据公式（4.20）和（4.21），我们有

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\left(\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta N}{N}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta N}{N}\right)。$$

如果我们假设L始终占N一个固定的比例（或者令$L = N$），那么$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta N}{N}$。另外，由于$\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta k}{k}$，我们可以得到

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\left(\frac{\Delta k}{k}\right)。$$

例 4.5

在 Cobb-Douglas 生产函数中，若资本和劳动的贡献率一样，劳动力始终占总人口 80%，资本增长率为 16%，人口增长率为 8%，劳动力占比不变，技术的增长率为 4%，求人均 GDP 的增长率以及技术进步的贡献率。

解答：已知$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{L = 0.8N}$，$\boldsymbol{\frac{\Delta K}{K} = 16\%}$，$\boldsymbol{\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta N}{N} = 8\%}$，$\boldsymbol{\frac{\Delta A}{A} = 4\%}$，则

$$\boldsymbol{\frac{\Delta Y}{Y} = 4\% + \frac{1}{2} \times 16\% + \frac{1}{2} \times 8\% = 16\%},$$

故人均 GDP 的增长率为

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta \mathrm{Y}}{\mathrm{Y}} - \frac{\Delta N}{N} = 16\% - 8\% = 8\%}。$$

技术进步对总产出的贡献率为

$$\boldsymbol{\frac{\frac{\Delta A}{A}}{\frac{\Delta Y}{Y}} \times 100\% = \frac{4\%}{16\%} = 25\%};$$

技术进步对人均产出的贡献率为

$$\boldsymbol{\frac{\frac{\Delta A}{A}}{\frac{\Delta y}{y}} \times 100\% = \frac{4\%}{8\%} = 50\%}。$$

技术进步对人均产出的贡献率更高，因为劳动要素不对人均经济增长做贡献。

第五节　经济增长的收敛性

当今世界上同时存在发达国家和发展中国家，那么未来是否会“世界大同”，即所有国家都达到较高的生活水准（以人均 GDP 衡量）？历史证明，个别落后国家赶超先进国家是完全有可能的；但与此同时，一些国家之间的进一步分化也是很明显的。对于世界是否会“大同”，经济学家们的观点不一，争论很多。

一、两种收敛

相信经济增长会收敛的经济学家提出了两个收敛的概念——绝对收敛（absolute convergence）和条件收敛（conditional convergence）。现在我们分别对这两种收敛的含义进行解释。

（一）绝对收敛

这种收敛认为，对于不同的经济体，只要他们具有相同的储蓄率（$1-\beta$）、相同的人口增长率（n），并拥有相同的技术（A），则不管这些不同的经济体的初始状态是如何不同，最终必定会收敛于同一种均衡人均资本和 GDP 水平，就是符合“黄金规则”的那种均衡水平。

新古典的索罗增长模型为我们提供绝对收敛的一个演绎，而例 4.2 为我们提供了一个具体的例子：

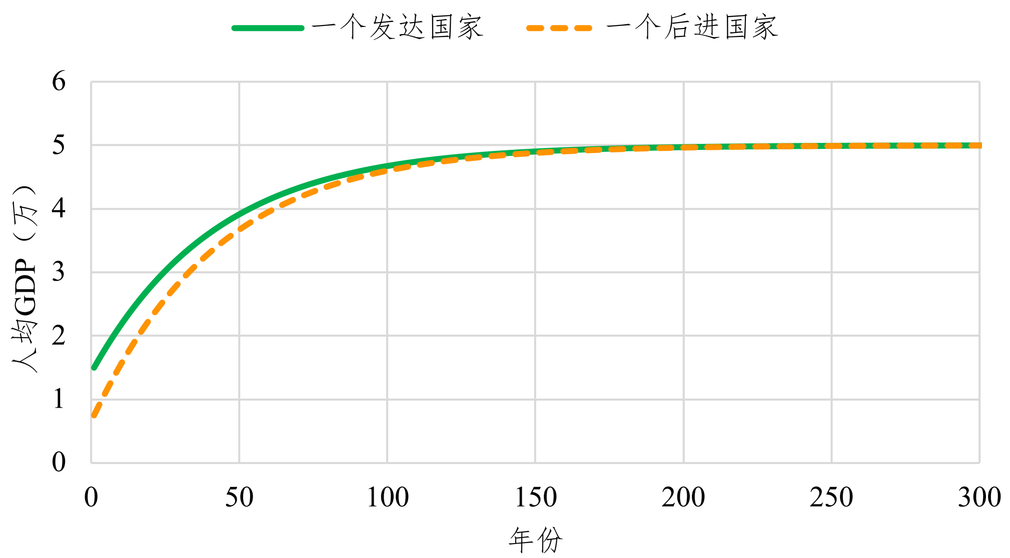


图 4.15：一个绝对收敛的例子

在这个例子中，发达国家的初始人口为 8 亿，资本存量为 18 万亿；后进国家的初始人口为 4 亿，资本存量为 2.25 万亿。他们有共同的$A=1$、$n=0.05$、$\alpha=0.5$和

$\beta = 0.75$。不难计算出，后进国家无论是总 GDP 还是人均 GDP，都最初落后于发达国家。然而，随着时间的推移，后进国家在人均 GDP 上逐渐追赶上了发达国家。

这是一个既令人乐观、又让人堪忧的增长前景。为什么呢？令人乐观的点在于，无论现在是否贫穷，未来都会一片光明；让人堪忧的点又在于，人均 GDP 最终趋于平缓、零增长。

（二）条件收敛

这种收敛认为，不同的经济体实际上具有不同的储蓄率（$1-\beta$）、不同的人口增长率（n），因此，不同的经济体会有不同的“黄金规则”均衡水平，他们的人均 GDP、人均资本量（即资本-劳动比率）都不会相同。然而，虽然 GDP 不会趋同，但他们的差距会趋于稳定。

绝对与条件收敛的共同点在于：

- 都需要借助外在的条件。若这些外在条件相同，则绝对收敛；这些外在条件不同，则条件收敛。他们将储蓄率和技术进步“外生化”。
- 储蓄率、技术进步不影响稳态时的 GDP 增长率。每个国家的人均 GDP 增长率最终都趋于 0，而总 GDP 增长率会收敛于人口增长率。

既然讨论到了条件收敛，我们不得不提到巴罗（Robert J. Barro，1944-），他是当今最有影响力、最有希望获得下一个诺贝尔经济学奖的宏观经济学家之一。他在 2025 年春季学期为哈佛大学开设了名为“经济增长”的专题课（Econ 980kk），要求先修《中级宏观经济学》。

巴罗是“条件收敛”的代表人物，尽管方法与“绝对收敛”无本质差别，但也有一些新的总结和发现。

第一，巴罗研究了 18 个 OECD 国家的人均 GDP 从 1960-2000 年的变化，发现一些起初较穷的国家（如葡萄牙、西班牙、爱尔兰、希腊）较快地在追赶富国，这些经济体的起点不同，但较为同质（如储蓄率、人口增长率等差不多），因而会收敛、趋近某一个人均收入水平。

第二，一国内部不同地区的趋同也可以用“条件收敛”解释，他因此研究美国 1880-2000 年各个州的人均收入情况。

第三，他考虑收敛速度的问题，如为什么有的国家收敛得快，有的慢。他发现，储蓄率、科技水平（A）和初始的劳动投入L_0对收敛速度没什么影响；但是，资本平均产出$\frac{y}{k}$递减得慢（体现出“边际产出递减”的程度较弱或发挥得较晚），则收敛也慢一些。美国南北战争后，南部的州的人均收入向北部的州趋近，但花费了大约两代人的时间才达到一定程度的趋同。德国统一 30 余年后的今天，东德和西德之间仍然存在一定的人均收入差距。1938 年东德地区人均 GDP 是西德地区的 85%，差距不是很大，到 1990 年东德是西德的 30%（1990 年西德人均 GDP2.3 万美元，东德仅为 0.8 万美元），30 年后东德已经赶上来了不少，但仍然有差距，是西德的 75%左右。

二、 世界是收敛还是发散的？

我们为什么要关注收敛问题？有两点主要原因。

第一，中国在人均 GDP 水平上，目前只是美国的 1/6 左右。我们要想赶超世界发达国家的生活标准，首先要问：这种赶超可行吗？这就会牵涉到“收敛论”。因为只要穷国可赶超富国，实际上就是在缩小国与国的差距，就是属于“收敛”的过程。

第二，在中国的内部，东部沿海地区与西部欠发达地区之间，在人均收入水平上的差距能否缩小？这直接关系到中国社会的和谐、稳定、发展。我们在第二讲也提到了收入差距、收入不平等的问题，而这里收敛一说对此有重要的启示意义。

新（内生）增长理论不相信“收敛”一说。本讲最后一节专门讨论该理论，而在这里外面先简要说明一点：新增长理论认为储蓄会影响人均资本增长率，因而也影响人均收入增长率。如果新的储蓄带来人均资本增长率的上升，则可能打破边际产出递减的规律，使得人均产出和收入源源不断地上升。如果人均收入一直增长，则可以不收敛。

尽管经济学家们对“世界大同”的观点不一，我们依然可以让数据说话，亲自看看哪一种观点更合理。

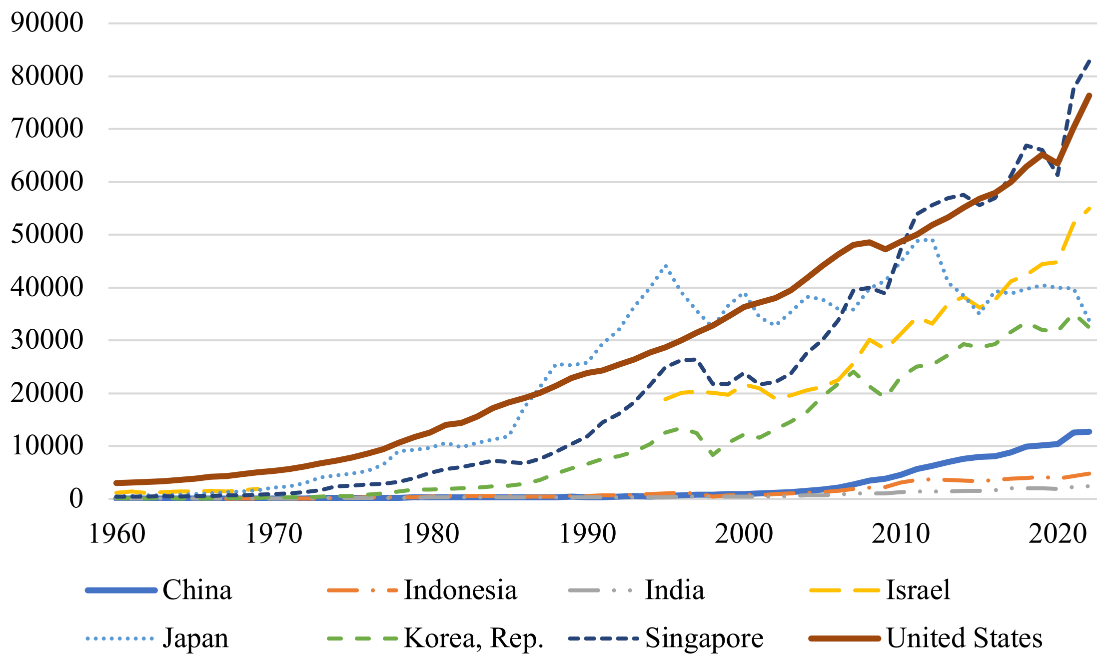


图 4.16：部分国家 1960-2022 年的人均 GDP（单位为 2022 年美元）

注：数据来源于世界银行，访问于 2024 年 2 月 17 日。

图 4.16 选择了八个国家的数据，展示了人均 GDP 持续增长的事实。要想说明经济是收敛的，我们至少需要各国在人均 GDP 上逐渐接近。从绝对数值上来看，这似乎不是这样的。那么相对数值呢？图 4.17 将各国人均 GDP 转化为相对于美国的

比值。可以看到，虽然绝对数值呈现发散的状态，各国的相对数值却在趋近，体现为相对数值趋近于 1。当然，日本（Japan）似乎是个例外，在近十年间不断落后于美国。

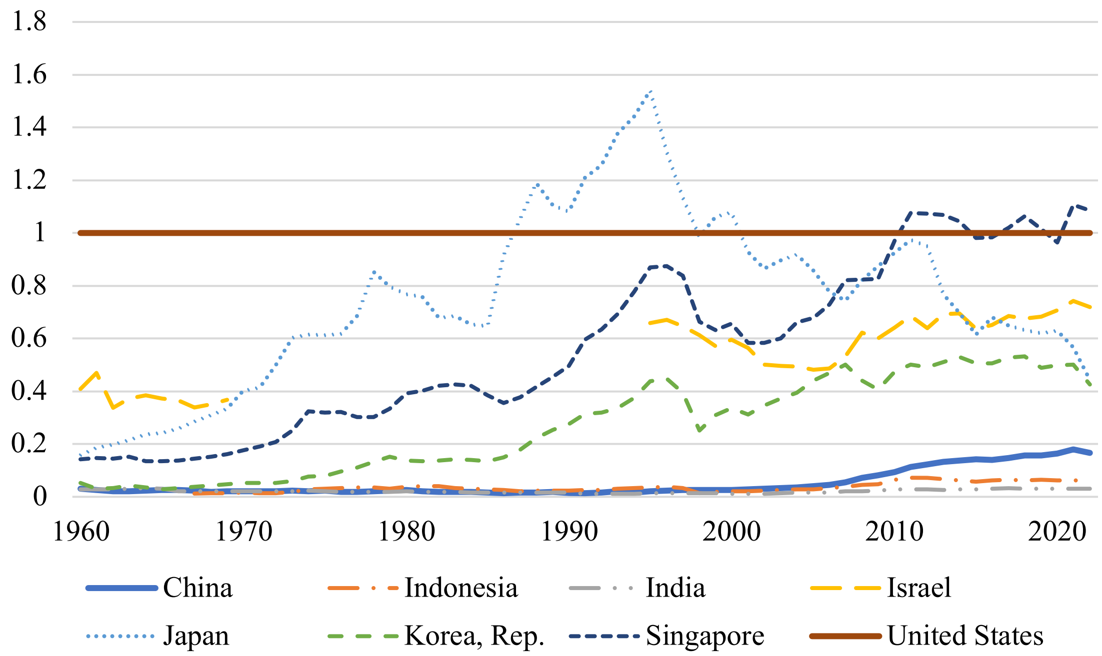


图 4.17：部分国家 1960-2022 年的人均 GDP（相对于美国）

注：数据来源于世界银行，访问于 2024 年 2 月 17 日，笔者根据数据计算后绘制此图。

如果我们将目光聚焦在中国和美国，不妨分析一下 2012-2021 年这 10 年，中国在人均 GDP 上赶超美国的决定因素是什么。我们需要用到上面讲的经济增长的分解（核算）。更具体来说，我们想看一看，人均资本的增长率差异能在多大程度上解释中国人均 GDP 追赶美国的进程。

我们将中国人均资本比美国更快积累对赶超的贡献记为θ，则有如下式子。

$$\theta = \frac{\alpha_{China}\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{China} - \alpha_{US}\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{US}}{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{China} - \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{US}} \tag{4.22}$$

为了进行这个计算，我们需要估算资本存量K。资本存量是重要的宏观指标，在实证分析时经常要用到。例如，估计生产函数，测算全要素生产率等。然而，迄今为止，尚无权威部门发布中国的数据。学者们根据已有相关统计数据，如采用永续盘存法进行估算。由于折旧率是一个重要而又敏感的参数，取值不同使得估算结果五花八门、差别很大。本讲义基于某种估算方法，请见 Lecture4_EstimateKandA.xlsx 中的具体细节，使用到的变量和计算公式都在里面，有兴趣的同学可以查看。

表 4.3：一个中美人均 GDP 缩小的分析

	中国		美国		中美差距		贡献
年份	$\Delta y/y$	$\Delta k/k$	$\Delta y/y$	$\Delta k/k$	$\Delta y/y$	$\alpha\Delta k/k$	θ
2012	7.1	14.0	1.5	6.2	5.6	4.5	81%
2013	7.1	14.5	1.1	2.9	6.0	6.1	102%
2014	6.8	14.0	1.5	4.4	5.3	5.2	99%
2015	6.4	13.5	2.0	3.0	4.4	5.6	126%
2016	6.2	12.3	0.9	1.4	5.3	5.6	105%
2017	6.3	10.4	1.6	3.8	4.7	3.7	78%
2018	6.3	9.1	2.4	4.1	3.9	2.9	75%
2019	5.6	8.2	1.8	2.1	3.8	3.3	86%
2020	2.0	7.3	-3.7	-2.2	5.7	4.5	79%
2021	8.0	6.8	5.8	5.6	2.2	1.2	53%

注：数据来源于世界银行、FRED、国家统计局，访问于 2023 年 3 月 20 日。笔者的计算中假设劳动力增长率等于人口增长率，中国折旧率 5%，$\alpha_{China}=0.5$，$\alpha_{US}=0.4$。

在这十年里，大部分年份中人均 GDP 追赶的业绩主要归功于我国人均资本加速积累，较少由全要素生产率的相对提升所解释。往前推十年，情况也是类似的。请同学们尝试使用不同的假设，计算在新的假设下贡献θ是否有较大差异。当数据更新到最近几年时，也请读者自行更新。以上分析不仅适用于中美差距缩小，也适用于扩大的情况。贡献率可以是正数和大于 1 的数，也可以是负数，取决于实际情况。

三、中国内部是收敛还是发散的？

一个引申的问题是，中国内部各个区域的经济增长是收敛还是发散的。中国是一个人口众多、幅员辽阔的国家，各个区域的发展是否收敛对国家整体的和谐十分重要。我们同样用数据来尝试回答这个问题。

图 4.18 和 4.19 体现某种意义的收敛。

首先，我们先看地区人均收入的上下限：

- 2003 年，中国最富裕的上海人均 GDP 为 39117 元，最贫穷的贵州为 3708 元。
- 2022 年，中国最富裕的北京人均 GDP 为 190313 元，最贫穷的甘肃为 44968 元。
- 绝对差距变大了，但相对差距变小了——从 10.5 倍变为 4.2 倍。

其次，我们再注意部分地区的赶超现象：

- 比如，北京赶超上海，江苏、福建赶超天津，贵州赶超甘肃等。
- 这又是另一层面的收敛。

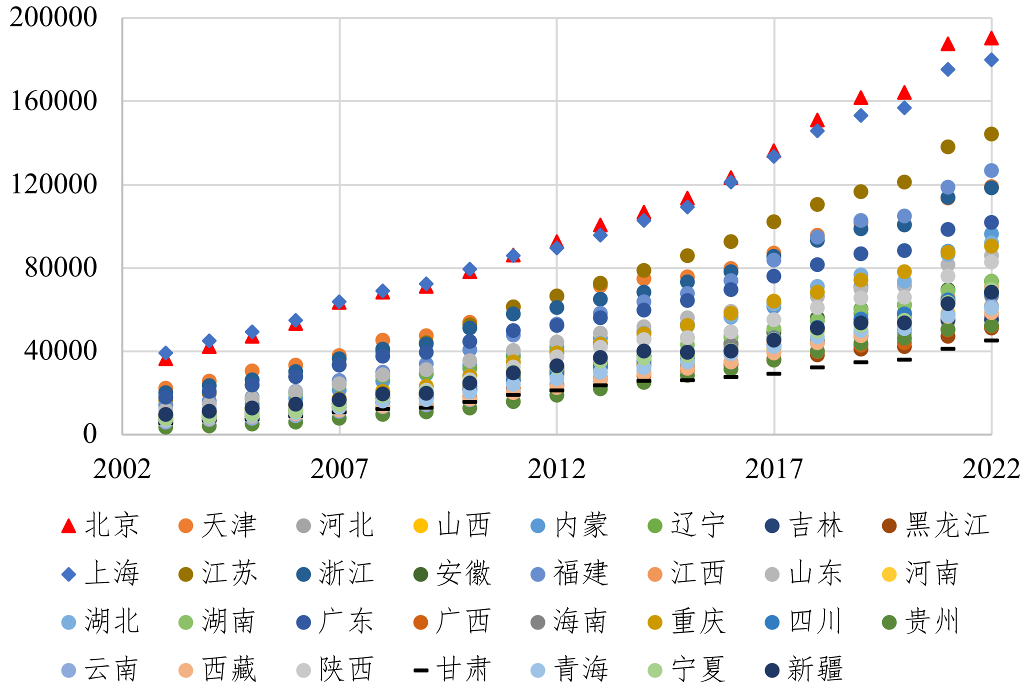


图 4.18：中国各省 2003-2022 年的人均 GDP（元）

注：数据来源于国家统计局，访问于 2023 年 3 月 20 日。截止至 2025 年 3 月 18 日，2023 年的数据已经出炉，但 2024 年数据还未公布。

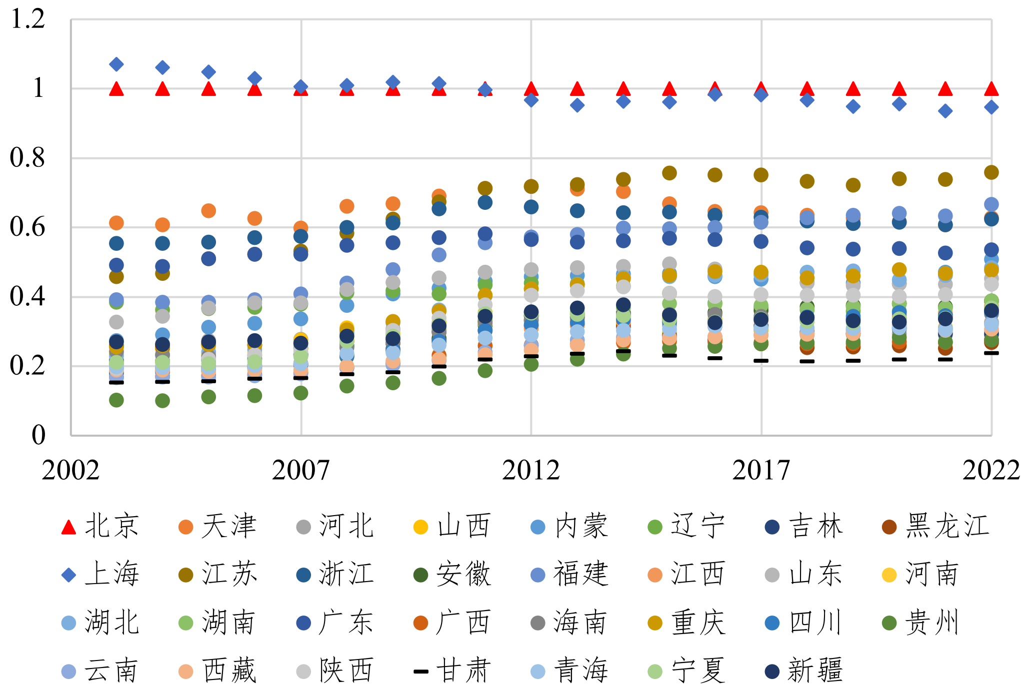


图 4.19：中国各省 2003-2022 年的人均 GDP（相对于北京）

注：数据来源于国家统计局，访问于 2023 年 3 月 20 日，笔者根据数据计算后绘制此图。截止至 2025 年 3 月 18 日，2023 年的数据已经出炉，但 2024 年数据还未公布。

第六节　内生增长理论

内生增长理论就是将储蓄率$1-\beta$和技术进步A作为内生变量的增长理论，强调不依赖“外力”推动即可实现经济持续增长。前面提到，内生化的储蓄率会对人均资本增长率和人均产出产生影响，从而让经济可以是不收敛的。下面让我们具体来展开说是怎么回事。

一、什么是内生变量?

要讨论内生增长模型，我们首先要搞清楚内生变量和外生变量分别是什么。在一个经济模型中，一个变量的数值若由系统内的函数关系决定，那就是内生变量；另外一些变量可能是由系统以外的条件来决定的，则是外生变量。

一般而言，一个合理的经济模型既要有内生变量，也要有外生变量。太多外生变量容易落入“外因决定论”的圈套，导致我们得出的结论是我们什么也做不了，一切都看天；太多内生变量又容易让我们走向另外一个极端——什么都可以决定，否认外在随机的条件——这或许也是一种可怕的思维。物理学家企图找到一个万能公式来解释世间万物的规律，实际上就是希望让所有的变量都是内生的。或许真的有这么一个万能公式，但还没有经济学家能找到它。

例 4.6

请考虑下面四个模型中的变量，并说明哪些是内生变量，哪些是外生变量？

- 模型 1：$\boldsymbol{G(x,y,z)=0\ \forall x>0, y<0}$。
- 模型 2：市场需求$\boldsymbol{Q_d=a-bP}$，市场供给$\boldsymbol{Q_s=c+dP}$；市场均衡时，$\boldsymbol{Q=Q_d=Q_s}$。
- 模型 3：马尔萨斯陷阱中人均产量$\boldsymbol{y}$、人口增长率$\boldsymbol{n}$和人口规模$\boldsymbol{N}$。
- 模型 4：索罗模型中，我们有$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\alpha}$等变量。

在第一个模型中，$\boldsymbol{x>0}$和$\boldsymbol{y<0}$是先验地确定的，或有待满足的约束条件，所以是外生变量；$\boldsymbol{z}$取决于$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，所以$\boldsymbol{z}$是内生变量。在该模型中，$\boldsymbol{z}$只取决于外生变量，因此是完全的“外因决定论”。

在第二个模型中，在市场均衡的情况下，$\boldsymbol{Q_d=Q_s=Q}$，我们可以由此解出均衡的产量$\boldsymbol{Q}$和均衡价格$\boldsymbol{P}$，因此$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q_d}$、$\boldsymbol{Q_s}$都是由系统内的函数关系决定的内生变量。一般要求$\boldsymbol{a>0}$、$\boldsymbol{b>0}$、$\boldsymbol{c<a}$、$\boldsymbol{d>0}$，因此，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$是外生给定的参数。可以解出：$\boldsymbol{P^e=\frac{a-c}{b+d}}$，$\boldsymbol{Q^e=\frac{ad+bc}{b+d}}$。

在第三个模型中，我们有$\boldsymbol{n(y)=b(y)-d(y)}$，所以$\boldsymbol{n}$是内生变量；我们又有$\boldsymbol{y=\frac{Y(N)}{N}}$，所以$\boldsymbol{y}$也是内生变量。均衡时的人口规模$\boldsymbol{N^*}$是由 OS 线和人均产出曲线的交点决定（并维

持不变）的，因而也是内生变量。由此可见，马尔萨斯模型的这些变量均为内生变量。那么，马尔萨斯模型是否有外生变量呢？实际上，出生率$\boldsymbol{b(y)=b}$是一个外生变量，它不受$\boldsymbol{y}$的影响，是一个外生给定的常数。

在第四个模型中，$\boldsymbol{y}$和$\boldsymbol{k}$是内生变量。$\boldsymbol{c=\beta y}$、$\boldsymbol{s=y-c=(1-\beta)y}$看似是内生变量，但消费占 GDP 比重$\boldsymbol{\beta}$或储蓄率$\boldsymbol{1-\beta}$是外生给定的，而且我们要求$\boldsymbol{0<\beta<1}$，所以$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{s}$实质上是部分外生决定的。[5]由此，$\boldsymbol{i=s}$也是部分外生决定的变量。$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\alpha}$也都显然是外生变量。由此可见，索罗模型和马尔萨斯模型的一个重要区别在于，马儿萨斯模型基本上大部分变量都是内生的，而索罗模型基本上大部分的变量都是外生的或部分外生决定的。

二、AK 模型

在这个模型中，储蓄率是内生的，我们将有机会理解，为什么有的国家储蓄率和投资率高，有的却低？为什么有的国家储蓄率在增高，有的却下降？要将储蓄率内生化，我们就需要理解储蓄是一种什么行为。

（一）消费的欧拉方程

储蓄实际上就是当前消费和未来消费的权衡取舍。消费意味着能立刻获得当前消费的边际效用，但放弃了未来消费的边际效用；储蓄则放弃当前消费的边际效用，但在获得未来消费的边际效用的同时，还额外获得一笔利息作为补偿。边际决策者要多储蓄 1 元，从直觉上讲，大体需要：

$$\begin{aligned}&\text{当期消费的边际效用}\times\text{当期 }1\text{ 元}\\ &\qquad\le\text{未来消费的边际效用}\times\text{未来}(1+R)\text{元}\times\text{主观折现因子。}\end{aligned}$$

取等号时，再将文字替换为数学符号，就是欧拉方程（Euler equation）。

$$u'(c_t)=u'(c_{t+1})(1+R)\beta \tag{4.23}$$

这里，R就是资本的社会净回报率（net social return on capital），而β是主观折现因子（subjective discount factor）。

（二）主观折现因子

[5] 更准确地说，人均消费c是内生变量，但消费占 GDP 的比重c/y是外生变量；人均消费c即取决于内生变量y，也取决于外生变量c/y（即β）。同样的道理，人均储蓄是内生变量，但是储蓄率是外生变量。

主观折现因子β（注意这个符号在这里不是消费占 GDP 比重了）衡量消费者的耐心程度（degree of patience），一般在 0 到 1 之间。β越大，就说明消费者赋予未来（效用）的权重越大，因此越有耐心。在一个只有$t=1$和$t=2$两期的模型中，代表性消费者的终身效用取决于两期的消费，其终身效用的“现值”是：$U(c_1,c_2)=u(c_1)+\beta u(c_2)$。

我们之所以要计算“现值”是因为我们假设这个消费者现在要做跨期的决定：当期的消费影响储蓄，从而影响了未来的消费。

对于一个寿命无限的消费者来说，其终身效用的“现值”就是

$$U(c_0,c_1,\ldots,c_t,\ldots)=u(c_0)+\beta u(c_1)+\beta^2 u(c_2)+\cdots=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)。$$

β发挥的作用就是让未来效用与现在效用可比，以便消费者在$t=0$期做决定。

（三）跨期替代弹性

一个相关概念是“跨期替代”。假设每一期效用函数的具体形式如下。

$$u(c_t)=\frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}-1}{1-\frac{1}{\sigma}} \tag{4.24}$$

我们把$\sigma>0$称为跨期替代弹性（elasticity of intertemporal substitution，EIS）。

从直观上讲，若边际效用对消费的弹性大，那么减少当前消费、增加未来消费就会导致未来消费带来的效用下降得很快，并且放弃当前消费的机会成本很高（即放弃更高的边际效用），因此消费者就不会轻易做消费的跨期替代，也即 EIS 较低。反之，若边际效用对消费的弹性小，那么放弃当前消费的机会成本就不高，而未来消费带来的效用下降也不会很快，EIS 就会较大。这么一来，我们可以大胆的猜测：边际效用对消费的弹性与 EIS 互为倒数。

拓展阅读 4.2

从数学上，我们可以进行更严格的证明。

首先，我们先对效用函数求一阶、二阶导数：$u'(c_t)=c_t^{-\frac{1}{\sigma}}$、$u''(c_t)=-\frac{1}{\sigma}c_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}$。然后，我们就可以计算出边际效用对消费的弹性——消费的比例变化如何导致边际效用的比例变化（变化程度，取绝对值）：

$$\left|\frac{\frac{du'(c_t)}{u'(c_t)}}{\frac{dc_t}{c_t}}\right|=\left|\frac{du'(c_t)}{dc_t}\frac{c_t}{u'(c_t)}\right|=\left|\frac{u''(c_t)c_t}{u'(c_t)}\right|=\frac{1}{\sigma}。$$

接下来，我们计算 EIS——跨期边际效用之比（下一期比当期）$\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}$的比例变化如何导致跨期消费之比$\frac{c_{t+1}}{c_t}$的比例变化（变化程度，取绝对值）：

$$\boldsymbol{EIS(c_{t+1},c_t)}=\left|\frac{\frac{d\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}{\frac{c_{t+1}}{c_t}}}{\frac{d\left(\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}\right)}{\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}}}\right|。$$

注意，$\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}$又被称为边际替代率（marginal rate of substitution，MRS），等于

$$\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{MRS(c_{t+1},c_t)}=\frac{\beta^{t+1}u'(c_{t+1})}{\beta^t u'(c_t)}=\boldsymbol{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}。$$

因此，

$$\frac{d\left(\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}\right)}{d\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}=-\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}-1};$$

$$\boldsymbol{EIS(c_{t+1},c_t)}=\left|\frac{\frac{\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}}{\frac{c_{t+1}}{c_t}}}{\frac{d\left(\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_t}\right)}{d\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}}\right|=\left|\frac{\frac{\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}}{\frac{c_{t+1}}{c_t}}}{-\frac{1}{\sigma}\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}-1}}\right|=\left|\frac{\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}-1}}{-\frac{1}{\sigma}\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}-1}}\right|=\boldsymbol{\sigma}。$$

这样一来，我们就证明了跨期替代弹性是边际效用对消费的弹性值的倒数，从数学上证明了如果消费的比例增加带来的边际效用的比例增加越大，人们就越不会轻易做消费的跨期替代。

（四）常数跨期替代弹性下的欧拉方程

当我们假设代表性消费者每一期的效用函数都有如（4.24）的形式时，欧拉方程就可以写为如下等式。

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}=(1+R)\beta=\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}=\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\tag{4.25}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(1+R)]^{\sigma}\tag{4.26}$$

如果我们对欧拉方程（4.26）两边取对数，并且令$\beta=\rho=\frac{1}{1+r}$，即用无风险利率构建的折现率去近似估计主观折现因子，则有如下关系。

$$\ln c_{t+1}-\ln c_t=\sigma[\ln(\beta)+\ln(1+R)]\approx\sigma[-r+R]=\sigma(R-r) \tag{4.27}$$

要保证消费的增长，我们需要$R>r$，即投资激励。没有投资激励，也就没办法促进增长。当$R=A-\delta>r$时，我们就得到一个持续的增长。注意，资本的社会净回报率等于资本的回报率A与资本的自然损耗（折旧）率δ的差值。

（五）生产函数

上面我们讨论了消费者的跨期替代（储蓄）行为，要解出经济体的均衡，我们还要从生产者的视角构建关系式。首先，我们定义生产函数。

$$Y_t=F(K_t,L_t)=AK_t,\qquad A>0 \tag{4.28}$$

公式（4.28）就是 AK 模型名词的由来。你可能会纳闷儿，L_t去哪里了呢？实际上，L_t没有消失，只是跑到A里面去了。具体来说，就是

$$Y_t=AK_t=A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\mu}L_t^{\mu}K_t^{1-\mu}=\bar{A}L_t^{\mu}K_t^{1-\mu}=F(K_t,L_t)。$$

这里，$\bar{A}=A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\mu}$体现了“干中学”(learning by doing)，即人均资本影响技术进步。然而，由于A是外生给定的，所以 AK 模型实际上没有真正内生化技术进步，但否认了边际产出递减。

根据（4.28）式，我们可以得到如下人均产出函数。

$$y_t=\frac{Y_t}{L_t}=A\frac{K_t}{L_t}=Ak_t=\mathrm{f}(k_t) \tag{4.29}$$

（六）资源约束条件

对于一个寿命无限的消费者来说，他所面对的问题就是社会面对的问题。如果一个消费者的寿命不是无限的，要想在无穷时限内讨论问题，我们就可以引入一个社会规划者（social planner)，使得我们最大化人类子子孙孙（而不是某一个人）的总效用$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)$。

在这个优化问题中，资源不是无限的，我们需要考虑资源约束：$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \le \mathrm{f}(k_t)$。这就是说，每一期人均消费和人均投资不能超过人均产出。最优情况就是取等号，再代入生产函数后，该约束条件变为如下等式。

$$c_t + k_{t+1} = (1 + A - \delta)k_t \tag{4.30}$$

注意，这里$A - \delta$就是社会净回报率。欧拉方程实际上是根据社会规划者的优化问题来推出的，只是在原理课阶段，我们只需要从直观上去理解它即可。具体怎么写出优化问题，并根据优化问题求解，将留到中级课程中学习。

（七）社会储蓄率

由于资源约束对于k_t是线性的，而偏好是位似的（homothetic）或“一次齐次”的，我们有一个大胆却合情合理的猜测：最优消费和投资对于k_t必然也是线性的。假如社会储蓄率是$s \in (0,1)$（注意，我们再次使用了一个前面使用的符号，但是含义不同）的话，我们猜测有如下关系。

$$c_t = (1-s)(1+R)k_t \tag{4.31}$$

若将（4.31）式代入（4.30）式，我们可以得到如下关系。

$$k_{t+1} = s(1+R)k_t \tag{4.32}$$

在（4.31）和（4.32）式中，s是有待解出的内生参数。

上面这个猜测并不是无端的。需要注意，这里我们考虑的是一个累积储蓄，而不是一个流量储蓄。这就区别于索罗模型中的$1-\beta$。如果是累积储蓄，那么$c_t + s_t$就应该包含当期所生产的y_t以及社会从第0期累积到第t期的资本存量k_t。由于当期折旧损耗δk_t已经包含在y_t（人均 GDP）中了，为了避免重复计算，我们将其从资本存量中刨除。这样一来，根据消费的定义，我们有如下关系。

$$c_t = (1-s)[y_t + (1-\delta)k_t] = (1-s)(1+R)k_t \tag{4.33}$$

如果读到这里你还不太清楚的话，可以试着换一个角度思考。首先，社会累积储蓄率的定义式是$s = \frac{S_t}{Y_t + (1-\delta)K_t} = \frac{s_t}{y_t + (1-\delta)k_t}$，其中分子是人均累积储蓄，而分母是人均累积资本存量。到了第t期，社会已经积累了$y_t + (1-\delta)k_t$这么多的人均资本，其中有s_t被继续以储蓄的形式持有。假定没有政府，那么消费和累积储蓄之和等于累积资本存量：$c_t + s_t = y_t + (1-\delta)k_t$。这也是（4.33）式的由来。

从（4.33）式我们还有一个发现，那就是均衡时c_t和k_t有一样的增长率，$\frac{k_{t+1}}{k_t}=\frac{c_{t+1}}{c_t}$，因为在均衡时$(1-s)(1+R)$是个稳定不变的常数。

（八）模型的解

上面的讨论为我们提供了两个方程。首先，是根据欧拉方程（4.26）和（4.33）隐含的$\frac{k_{t+1}}{k_t}=\frac{c_{t+1}}{c_t}$，我们得到如下等式。

$$\frac{k_{t+1}}{k_t}=\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(1+R)]^{\sigma} \tag{4.34}$$

其次，我们的直觉猜测（4.32）为我们提供了如下关系。

$$\frac{k_{t+1}}{k_t}=s(1+R) \tag{4.35}$$

方程（4.34）来自消费者，方程（4.35）来自生产者。结合两个式子，可以得到均衡时的人均产出增长率和储蓄率：

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}=\frac{k_{t+1}}{k_t}=\frac{c_{t+1}}{c_t}=[\beta(1+R)]^{\sigma} \tag{4.36}$$
$$s=\beta^{\sigma}(1+R)^{\sigma-1} \tag{4.37}$$

要保证我们解出的储蓄率有意义，需要$s\in(0,1)$。当$\sigma\le 1$时，我们只需要$R>r$即可，因为$\beta=\frac{1}{1+r}$时有

$$s=\beta^{\sigma}(1+R)^{\sigma-1}\le\beta^{\sigma}(1+R)^{\sigma-1}\left(\frac{1+R}{1+r}\right)^{1-\sigma}=\beta<1。$$

当$\sigma>1$时，要保证$s\in(0,1)$，我们需要给R一个上限，也即给A设一个上限。当A超出了这个上限，社会规划者会得到无限大的效用，那么社会规划者的问题就不是“良好定义的”（well-defined）。

（九）AK 模型里的 A 是多少?

假设生产函数真的如（4.28）式所示，根据 FRED，中国真实$Y_{2019}\approx 20.6$万亿美

元（按 2017 年价值计算），真实$K_{2019} \approx 99.6$万亿美元，因此$A = \frac{Y_{2019}}{K_{2019}} \approx \frac{20.6}{99.6} \approx 0.207$。姚洋（2023）指出，生产性资本存量是国内生产总值的 3.6 倍，那么$A \approx \frac{1}{3.6} \approx 0.278$。

在 Lecture4_SolowSimulation1.xlsx 中，我们估算了中国的 A 从 1990 至 2021 年的变化（同学们可以利用表格更新至 2022-2024 年）。可以看到，我国过去二十年的 A 在不断下降，这与资本逐渐撤离中国寻找新的“世界工厂”的趋势一致。

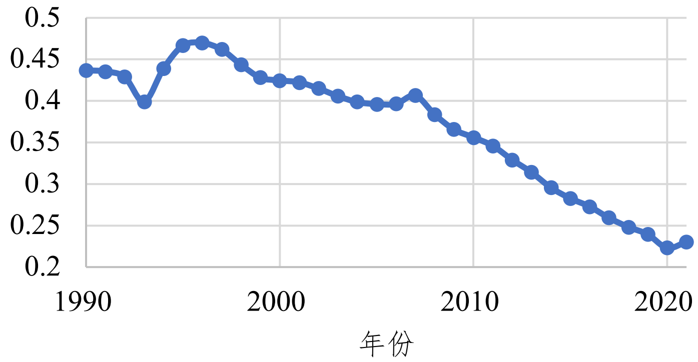


图 4.20：估算中国资本在 AK 模型中的总回报率 A（1990-2021 年）

注：数据来源于国家统计局，笔者根据数据计算后绘制此图。计算中假设折旧率为 5%。

近年来，不断有呼声认为印度可以成为下一个“世界工厂”。2014 年，莫迪总理上任后大力推动“世界制造业枢纽”或“印度制造”（Make in India）计划。该计划有三个主要的政策目标：

- 第一，将制造业的年增长率提升到 12-14%（现实：2014-15 到 2019-20 年平均仅为 6.9%）。
- 第二，2014-2022 年创造 1 亿制造业就业岗位。
- 第三，2014-2022 年（后来修改为 2025 年）使得制造业占 GDP 比重达到 25%（从 2014-15 的 16.3%降至 2020-21 的 14.3%）。

部分观点认为，印度投资风险依然很高，政策的透明性太低，虽然口号喊得很响，但是真正付诸于行动、动身前往印度投资的企业其实并不多。对该话题有兴趣的同学可以寻找相关的新闻，并进行分析。同学们可以尝试估算印度的 A。

（十）总结 AK 模型的解与启示

当$\sigma \leq 1$且$R > r$时，有

$$s = \beta^{\sigma}(1+R)^{\sigma-1} < 1,$$

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1+R)]^{\sigma} > 1。$$

对于人均收入增长率来说，我们有两点启示：

- 第一，均衡的人均经济增长率可以一直大于 0，所以不一定存在收敛。
- 第二，当生产率A、社会净回报率R、跨期替代弹性δ以及折现因子越高的时候，人均增长率也就越高。注意，折现因子越高（越接近 1）就说明折现率r越低。另外，折旧率δ越低，人均增长率也就越高。

社会储蓄率如何受社会净回报率R的影响呢？

由于$\sigma \leq 1$，看起来好像R越大，s越低。这似乎有一些反直观。实际上，现实中R和r是比较接近的，不会相差太远。我们实践中主要还是看β的大小。β越大，说明大家越看好未来，则储蓄率s就越高。

课后思考题

1、国家 A 和 B 的生产函数都是$\mathrm{Y} = \mathrm{F}(K, L) = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$。请问：

a. 这个生产函数规模报酬不变吗？请解释。

b. 每个工人的生产函数$\mathrm{y} = \mathrm{f}(k)$是什么？

c. 假设两个国家都没有人口增长或技术进步。国家 A 每年存 10%的产出，而国家 B 每年存 30%的产出。使用你在 b 问的回答，让投资等于折旧，找到稳态均衡水平的资本密度、人均收入和人均消费。

d. 假设两个国家初始状态（$\mathrm{t} = 0$）时的资本密度是 1，那么，人均收入和人均消费是多少？

e. 资本存量的变化量是投资减去折旧。你可以用 Excel 来展示资本存量在两个国家会如何随时间变化吗？请在每一年展示人均收入和人均消费。多少年后，国家 B 的消费会高于国家 A 的消费？

2、1990 年代和过去的 20 几年，亚洲国家（如中国和日本）对美国进行了可观的直接和证券投资。与此同时，许多美国人对这些投资感到不爽。

a. 从什么角度看，这些投资让美国变得更好？

b. 从什么角度看，美国人自己做出这些投资更好？

3、古典经济学家亚当 • 斯密曾说过：“Little else is requisite to carry a state to the highest degree of opulence from the lowest barbarism but ***peace***, ***easy taxes***, and ***a tolerable administration of justice***: all the rest being brought about by the natural course of things.”请解释他提到的三个条件（加粗斜体）如何促进经济增长。

4、国际产权指数 IPRI（International Property Right Index）给每个国家的法律和政治环境以及它们保护产权的程度进行综合打分。

a. 访问 https://www.internationalpropertyrightsindex.org/（Property Rights Alliance 的官网），找到最新年度的排名，并选择分数最高的三个国家、分数最低的三个国家和中国（在中间的位置）。

b. 请从世界银行找到这七个国家的人均 GDP，进行比较。你发现了什么？请对你的发现给出至少两点解释。

5、某个国家的生产函数是$Y = K^{\alpha}(NA)^{1-\alpha}$。存在折旧率$0 < \delta < 1$。外生的当期储蓄率为$s$。$A$的增长率是$g_A$，人口增长率是$g_N$。

a. 稳态时，单位效率劳动的资本、产出和资本-产出比是什么？

b. 假如我国的索罗余项是 10%，$\alpha = 0.5$，储蓄率是 45%，人口增长率是 0%，折旧率是 5%，你能估算出根据该模型的我国的资本-产出比吗？你觉得符合中国的事实吗？为什么？

c. 假设该国家的经济达到了稳态下的平衡增长路径。什么因素会影响这些变量的增长率：单位效率劳动的产出、单位效率劳动的资本、人均产出、人均资本？

d. 折旧率δ的下降如何影响均衡？直观是什么？请用图像模型阐释。

6、为了判断一个国家的经济是否有高于或低于黄金规则的资本，我们需要什么数据？

7、制度差异如何解释各国人均收入的差别？举一个例子。

8、内生增长理论如何在不假定外生技术进步的情况下解释经济持续的增长？这与索罗增长模型有什么不同？

9、选择两个你感兴趣的国家，一个富有、一个贫穷。这两个国家的人均收入是多少？找一些可能解释这个差异的国家层面的特征，比如投资率、人口增长率、教育程度等等。你如何判断哪个特征最能解释人均收入的差异？你认为索罗模型在分析这两个国家的差异时有多么有用？

作业题

1、考虑北京市海淀区某一时期的加总生产函数:$Y = AK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$,其中,$Y$是真实 GDP（单位是亿元），$K$是资本存量（单位是亿元），$L$是劳动投入（单位是万人），$A = 2$是海淀区的科技水平。假定海淀区只投入资本和劳动进行生产。起初，资本存量等于 16。请基于这些信息，回答以下问题。请使用 Excel（或 Python、R、Stata、Matlab 等作为辅助工具）：

基础模型：

a. 假设A、K保持不变，劳动投入不断增加，请将下表扩充（比如展示第 1-10 和 90-100 行）并填写完整，保留两位小数。

L	K	Y	MPL	Y/L
0	16			
1				
2				
…				
100				

b. 请用语言描述边际劳动产品（MPL）和劳动生产率（Y/L）随着 L 的变化趋势，并解释这个趋势背后的直观（intuition）是什么。

资本存量变动：

c. 假设小米通讯技术有限公司等诸多企业决定在海淀区增加投资。因此，海淀区的资本存量上升到了 25。假定科技水平暂时没有因为投资的增加而发生变化。请你用语言描述生产函数曲线会有什么变化。

d. 将（c）中的情况作为初始条件，用（a）的逻辑请将下表扩充（比如展示第 1-10 和 90-100 行）并填写完整，保留两位小数。

L	K	Y	MPL	Y/L
0	25			
1				
2				
…				
100				

e. 请用电脑将（a）和（d）的加总生产函数曲线绘制在同一张图中，横轴是 L，纵轴是 Y。这幅图能体现你在（c）中的描述吗？

科技水平变动：

f. 假设小米通讯技术有限公司等诸多企业决定不增加海淀区的实物投资了，而是将 AI 和机器学习等领域的最新技术引入到海淀区的各项业务中。这些技术将海淀区的A从 2 提升到了 3。假设资本存量回到了 16 并维持不变。请将（a）、（d）和本题的加总生产函数曲线绘制在一起，并描述科技进步对生产函数曲线的影响。

2、根据世界银行（https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.KD.ZG）的数据，回答下列问题：

a. 2021 年中国、日本、阿富汗和巴西的真实 GDP 增长率分别是多少？

b. 假如这四个国家的人口增长率都为 0，我们可以运用 70 规则在哪些国家？根据 70 规则，假如维持增长速度不变，多少年后这些国家的真实 GDP 可以增长到原来的 8 倍？（请保留一位小数）

c. 已知 2021 年中国的人均 GDP 是 12,556.3 美元，摩洛哥是 3,795.4 美元。如果中国的真实 GDP 增长率下降到 5%，在没有人口增长、通胀和汇率变化的情况下，大约多少年后摩洛哥的人均 GDP 最接近中国的一半？（请使用摩洛哥 2021 年的真实 GDP 增长率和 70 规则计算，在计算过程中保留两位小数，最终结果取整。）

d. 请使用 Excel（或 Python、R、Stata、Matlab）验证你在（c）中的结论，并试图解释为什么 70 规则在这个计算中能够表现良好。（换句话说，可以解释 70 规则在什么情况下会导致较大的误差。）

3、请根据上课所学的有关索罗增长模型的知识，简要回答如下问题：

a. 在一个科技水平不变的模型中，什么参数影响稳态（steady-state）的人均产出？

b. 请简要解释人均产出、储蓄和投资的关系。

c. 假设人均折旧低于人均储蓄，在人口不增长的情况下，请逐一解释这

些变量如何随着时间变化：人均资本存量、人均产出、人均储蓄、人均消费。

d. 假设一个经济系统处于稳态，人口增长率为正，没有折旧，然后储蓄率突然下降了。请解释这一情况如何影响人均产出、总产出、人均产出增长率、总产出增长率。

e. 请用图像模型描绘并用语言解释折旧率上升的影响。在你的图像模型中，请标注清楚所有的曲线和均衡。

4、让我们来核算（分解）总产出增长率的贡献因素：

a. 假设某国资本分走$\frac{2}{3}$的国内收入，劳动者分走$\frac{1}{3}$的国内收入，男性留守在家做家务，女性在工厂工作。假如有一些男性开始在外面干活，使得劳动力提升了 5%，全要素生产率A有什么变化？总产出会有什么变化？劳动生产率Y/L会有什么变化？

b. 在（a）的大背景下，假设更多男性开始在外面干活，使得：第一年资本存量是 6，劳动投入是 3，产出是 12；第二年资本存量是 7，劳动投入是 4，产出是 14。全要素生产率在这两年间发生了什么变化？

c. 如果我们将索罗增长模型中生产函数A理解为劳动效率，并令$A = E^{1-\alpha}$。现在，再假设劳动分走$\frac{2}{3}$的国内收入，剩余的分给资本。再假设技术进步率$g = \Delta E/E = 1.8\%$，人口增长率$n = 1.8\%$。请问你能试着核算资本、劳动与全要素生产率对总产出的贡献分别是多少吗？（不考虑折旧）

5、让我们来考虑一个简单的两部门的内生增长模型：经济中有制造业企业和研究型大学。企业生产用于消费或实物投资的产品和服务，而大学则生产知识——知识可以自由地在这两个部门间穿梭，就像重力一般。假设企业的生产函数是$Y = K^\alpha[(1-u)LE]^{1-\alpha}$，大学的生产函数是$\Delta E = uE$，而资本积累动态方程是$K_{t+1} - K_t = (1-\beta)Y_t - \delta K_t$。

a. 我们把LE（劳动和知识的乘积）称为效率劳动，请问你能将单位效率劳动的产出$y = Y/LE$表达为单位效率劳动的资本水平$k = K/LE$吗？

b. 在这样一个经济中，资本水平扩张（即维持单位效率劳动的资本水平不变）的总投资是多少？（提示：用类似于索罗增长模型的逻辑大胆猜测。）

c. 将（b）中投资与k的关系作为 OS 线，写出稳态均衡需要满足的关系式，然后给出稳态单位效率劳动的资本水平k_e的解析式。

d. 基于（c），你认为政府打算提升u的决定一定是好事吗？为什么？（提示：要回答这个问题，需要考虑人均产出Y/L和人均消费C/L，并注意分母没有E。）