

北京大学数学科学学院期中考试

20 21 - 20 22 学年第 一 学期

考试科目: 概率统计 B 考试时间: 2021 年 11 月 22 日

姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 八 道大题, 满分 100 分

解答仅供参考...

1. (18 分) 有 n 个箱子, 第 i 个箱子中放了 i 个白球和 $n+1-i$ 个黑球 ($i = 1, 2, \dots, n$), 现随机选出一个箱子, 从选出的箱子中有放回依次抽两个球, 以 A 和 B 分别表示第一次和第二次抽到白球.

a. 求 $P(A), P(AB)$;

b. 求 $P(\text{球来自第 } n \text{ 个箱子} | A)$.

a.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{i}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} (4')$$

$$P(AB) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{i^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{6(n+1)} (5')$$

b.

$$P(\text{球来自第 } n \text{ 个箱子} | A) = \frac{P(\text{球来自第 } n \text{ 个箱子}, A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{n} \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{n+1} (9')$$

2. (12 分) 一个家庭有两个孩子,

a. 已知至少有一个男孩, 求两个都是男孩的概率;

b. 已知至少有一个星期三出生的男孩, 求两个都是男孩的概率.

a.

设两个孩子分别为 A 和 B , 则两个都是男孩为 A 男 B 男, 至少有一个男孩为 A 男 B 男或 A 男 B 女或 A 女 B 男, 故概率为 $\frac{1}{3}$

b.

至少有一个星期三出生的男孩, 共有 $14+14-1$ 种可能, 两个都是男孩且至少有一个星期三出生的男孩, 共有 $7+7-1$ 种可能, 故概率为 $\frac{13}{27}$

3. (15 分) 设 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{1+x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

a. 求 c 的值;

b. 求分布函数 $F(x)$;

c. 求 $Y = \ln X$ 的密度 (当 $x \leq 0$ 时, 规定 $\ln x = 0$).

a.

$$\int_0^{\infty} \frac{c}{1+x^2} = 1$$

$$\arctan x|_0^{\infty} = 1$$

$$c = \frac{2}{\pi} (3')$$

b.

(5')

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

c.

solution 1

$$P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = \frac{2}{\pi} \arctan e^y$$

$$p_Y(y) = \frac{2}{\pi} \frac{e^y}{1+e^{2y}}$$

solution 2

$$p_X(x) \frac{dx}{dy} = p_Y(y)$$

$$p_Y(y) = \frac{2}{\pi} \frac{e^y}{1+e^{2y}} (7')$$

4. (10 分) 某枪手每次打中目标的概率都是 p , 现连续向一个目标射击, 直到击中为止, 求射击次数 X 的期望和方差.

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$$

几何分布

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

5. (10 分) X, Y 独立同分布, 服从 $N(0, 1)$. $Z = e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)}$, 求 Z 的分布函数.

$$P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dt$$

$$p_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}}, \text{ 同理有 } p_{Y^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}} (t \geq 0)$$

$$P(X^2 + Y^2 \leq t) = P(X^2 \leq t - Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{t-v} p(u, v) du = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^t p(h-v, v) dh = \int_{-\infty}^t dh \int_{-\infty}^{\infty} p(h-v, v) dv$$

$$p(X^2 + Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-v, v) dv = \int_0^t \frac{1}{2\pi\sqrt{v(t-v)}} e^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} (t \geq 0)$$

$$0 < z \leq 1$$

$$P(Z \leq z) = P(e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)} \leq z) = P(X^2 + Y^2 \geq -2\ln z) = \int_{-2\ln z}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} dt = -e^{-\frac{t}{2}}|_{-2\ln z}^{\infty} = z$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1, & (0 < z \leq 1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

直接积分做极坐标变换更加简便.

6. (10 分) X_i 服从参数为 λ_i 的 Poisson 分布, $i = 1, 2$. X_1, X_2 相互独立, 求 $X_1 + X_2$ 的概率分布.

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} =$$

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{k!} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

即参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 分布.

7. (10 分) 从一副扑克牌 (没有大小王) 中随机抽取 13 张, 放回后再随机抽取 13 张. 以 X 表示至少被抽到一次的牌的张数, 求 $E(X)$.

共 52 张牌, 若第 i 张牌被抽到, 则 $Y_i = 1$, 否则 $Y_i = 0$, 有 $X = \sum_{i=1}^{52} Y_i$, $P(Y_i = 0) = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$, $P(Y_i = 1) = \frac{7}{16}$, 因此 $E(X) = \sum_{i=1}^{52} E(Y_i) = 52 * 7/16 = 22.75$

8. (15 分) 在 1000 毫升液体中有 2500 个细菌. 现从中取 100 毫升液体, X 为这 100 毫升液体中细菌个数. 求 $P(220 \leq X \leq 280)$.

$$P(X = k) = \binom{2500}{k} 0.1^k 0.9^{2500-k}$$

$$P(220 \leq X \leq 280) = \sum_{k=220}^{280} \binom{2500}{k} 0.1^k 0.9^{2500-k}$$

可通过中心极限定理近似为 $2\Phi(2) - 1$, $\Phi(x)$ 为正态分布累积分布函数.