宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/4/29

动态规划理论

动态规划初阶

- 在我们目前学过的所有模型当中，宏观经济体都可以概括为家庭与企业、市场之间的互动关系。
- 我们通过拉格朗日方法，求解优化问题，来找到各种经济变量的稳态或平衡增长路径。
- 今天介绍一种新的工具：动态规划（Dynamic Programming）

例子：吃蛋糕问题

- 我们首先用一个生活中的问题来解释动态规划的思想

- 假设你的朋友给你买了一个好吃的蛋糕，但这个蛋糕T天之后会过期。

- 问题：每天你应该吃多少？

吃蛋糕问题-2

效用函数:

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

c_t： 时间 t 蛋糕的消耗量 (consumption)

假设 t 期之内蛋糕不会 “depreciate”或者 “grow”

如何解这个问题?

传统解法

我们可以像以往那样用一个优化问题去解决这个问题:

$$\max_{c_t, N_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{s.t.} \quad N_{t+1} = N_t - c_t \quad \forall t$$

$$N_0 = 1$$

$$N_{t+1} \geq 0$$

（也可以直接将所有预算约束加总，得到永久性收入约束）：

$$N_{T+1} + \sum_{t=0}^{T} c_t = N_0 = 1$$

有限期问题

- 具体的解就不推了，大家可以自行证明一下：
- Kuhn-Tucker 条件：$N_{T+1} = 0, c_T = N_T$
- 最优消费计划满足欧拉方程：

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})$$

价值函数

- 给定N_0，我们把这个代理人能达到的最高的效用定义为$V_0(\cdot)$，也叫价值函数（Value Function，或值函数）

$$V_0(N_0)=\max_{c_t,N_{t+1}}\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c_t)$$

$$\text{s.t.}\quad N_{t+1}=N_t-c_t\quad\forall t$$

$$N_0=1$$

$$N_{t+1}\geq 0$$

- 有点像：间接效用函数，表示在初始资源给定的情况下，最大能达到多少效用

理解价值函数

使用蛋糕的“运动方程”（Law of Motion） $N_{t+1} = N_t - c_t$ 我们可以把价值函数改写成:

$$V_0(N_0) = \max_{\{N_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(N_t - N_{t+1})$$

把第一期拿出来，重新写成

$$V_0(N_0) = \max_{N_1} \left\{ u(N_0 - N_1) + \beta \left(\max_{\{N_{t+1}\}_{t=1}^{T}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(N_t - N_{t+1}) \right) \right\}$$

含义：先决定今天吃多少，明天留多少，然后让明天的自己再解一个新的优化问题

最优性原理（Principle of Optimality）

- 数学家Richard Bellman 开创了动态规划方法，提出了最优性条件，来确保上页两个问题是等价的

- 核心思想：
  - 你可以直接求整个时期 0 to $T+1$ 的最优解；
  - 也可以先求第0期的最优决策，假设之后每期都继续做出最优选择。
  - 这两个路径最终会得到相同的结果。

贝尔曼方程（Bellman Equation）

$$V_0(N_0) = \max_{N_1}\left\{u(N_0 - N_1) + \beta\left(\max_{\{N_{t+1}\}_{t=1}^{T}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(N_t - N_{t+1})\right)\right\}$$

可以像刚才定义$V_0(\cdot)$那样，重新定义$V_1(\cdot)$：

$$V_1(N_1) = \max_{\{N_{t+1}\}_{t=1}^{T}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(N_t - N_{t+1})$$

可以把原始问题写成：

$$V_0(N_0) = \max_{N_1} u(N_0 - N_1) + \beta V_1(N_1)$$

这个方程叫做贝尔曼方程（Bellman Equation）

求解贝尔曼方程

$$V_0(N_0) = \max_{N_1} u(N_0 - N_1) + \beta V_1(N_1)$$

- 贝尔曼方程描述了当期和下期价值函数之间的关系

- 如何求解？就像解其他的优化问题一样，解一阶条件：

$$\begin{aligned} -u'(N_0 - N_1) \quad &+ \beta {V_1}'(N_1) = 0 \\ \Rightarrow u'(c_0) \quad &= \beta {V_1}'(N_1) \end{aligned}$$

- 但是问题来了：${V_1}'(N_1)$是什么？

求解贝尔曼方程-2

- 回到$V_1(N_1)$的定义：

$$V_1(N_1)=\max_{\{c_t\}_{t=1}^{T},N_{T+1}}\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}u(c_t)$$

s.t.

$$N_{T+1}+\sum_{t=1}^{T}c_t=N_1$$

$$c_t,N_{t+1}\geq 0$$

如果用之前的办法，可以把$V_1{}'(N_1)$写出来

$$V_1{}'(N_1)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N_1}=\lambda$$
$$=\beta^{t-1}u'(c_t)$$

对于任何t都成立，因此可以写成

$$V_1{}'(N_1)=u'(c_1)$$

这个条件我们叫做包络条件（envelope condition）

求解贝尔曼方程-3

$$V_1{}'(N_1) = u'(c_1)$$

含义：下一期价值函数的导数等于下一期消费的边际效用）

放回之前的一阶条件：

$$u'(c_0) = \beta V_1{}'(N_1)$$

$$\Rightarrow \quad u'(c_0) = \beta u'(c_1)$$

可以得到熟悉的欧拉方程

求解贝尔曼方程-4

- 但是问题是，这样做比较傻，因为我们在解第1期的问题的时候又回到了传统的方法

$$V_t(N_t) = \max_{\{c_\tau, N_{\tau+1}\}_{\tau=t}^{T}} \sum_{\tau=t}^{\mathrm{T}} \beta^{\tau-t} u(c_t)$$
$$N_{\tau+1} = N_\tau - c_\tau$$
$$c_\tau, N_{\tau+1} \geq 0$$

- 可以把贝尔曼方程重复写下去，也就是对于每一个 $t = 0,1, \ldots T$.

$$V_t(N_t) = \max_{c_t, N_{t+1}} \quad u(c_t) + \beta V_{t+1}(N_{t+1})$$
$$\text{s.t.} \quad N_{t+1} = N_t - c_t$$

最后一期， $V_{T+1}(N_{t+1}) = 0.$

求解贝尔曼方程-5

代入蛋糕的运动方程，我们可以写出贝尔曼方程

$$V_t(N_t) = \max_{N_{t+1}} \; u(N_t - N_{t+1}) + \beta V_{t+1}(N_{t+1})$$

$$V_{T+1}(N_{T+1}) = 0$$

一阶条件：

$$-u'(N_t - N_{t+1}) + \beta V_{t+1}{}'(N_{t+1}) = 0$$

包络条件：

$$V_t{}'(N_t) = u'(N_t - N_{t+1})$$

政策函数 (Policy Function)

给定N_t，定义最优的 $N_{t+1} = g_t(N_t)$。这里 $g_t(.)$也被称为政策函数（Policy Function）

一阶条件+包络条件：

$$
\begin{aligned}
-u'(N_t - N_{t+1}) + \quad & \beta u'(N_{t+1} - N_{t+2}) = 0 \\
u'(N_t - N_{t+1}) \quad & = \beta u'(N_{t+1} - N_{t+2}) \\
u'(c_t) \quad & = \beta u'(c_{t+1})
\end{aligned}
$$

也可以得到欧拉方程

逆推法（Backward Induction）

- 假设代理人的效用函数为对数型，即$u(c_t) = \log c_t$
- 在第T期，代理人的价值函数为：

$$V_T(N_T) = \max_{N_{T+1}} \log(N_T - N_{T+1})$$

因为在 T+1期后没有蛋糕了， $V_{T+1}(N_{T+1}) = 0$

最优选择是$N_{T+1} = 0$，也就是 $g_T(N_T) = 0$

逆推法-2

- $g_T(N_T)=0$，因此我们可以得到 $V_T(N_t)$

$$\begin{aligned} V_T(N_T) &= \log\big(N_T - g_T(N_T)\big) \\ &= \log(N_T) \end{aligned}$$

- 接下来我们考虑 $T-1$期的贝尔曼方程:

$$V_{T-1}(N_{T-1}) = \max_{N_T} \ \log(N_{T-1} - N_T) + \beta V_T(N_T)$$

- 一阶条件:

$$\frac{-1}{N_{T-1} - N_T} + \beta V_T{}'(N_T) = 0$$

逆推法-3

- 因为我们已经知道了$V_T(N_T) = \log(N_T)$，包络条件为：

$$V_T{}'(N_T) = \frac{1}{N_T}$$

上页一阶条件变为：

$$\frac{1}{N_{T-1} - N_T} = \frac{\beta}{N_T}$$

- 解出N_T，得到 $g_{T-1}(N_{T-1})$:

$$N_T = g_{T-1}(N_{T-1}) = \frac{\beta}{1+\beta} N_{T-1}$$

把 $N_T = g_{T-1}(N_{T-1})$ and $V_T(N_T)$代入贝尔曼方程，并省略最大化符号，直接求出

$$
\begin{aligned}
V_{T-1}(N_{T-1}) &= \log\left(N_{T-1} - \frac{\beta}{1+\beta}N_{T-1}\right) + \beta\log\left(\frac{\beta}{1+\beta}N_{T-1}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{1+\beta}N_{T-1}\right) + \beta\log\left(\frac{\beta}{1+\beta}N_{T-1}\right) \\
&= \boxed{\underbrace{\left[\log\left(\frac{1}{1+\beta}\right) + \beta\log\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\right]}_{A_{T-1}} + \underbrace{(1+\beta)}_{B_{T-1}}\log(N_{T-1})}
\end{aligned}
$$

简化为：

$$
V_{T-1}(N_{T-1}) = A_{T-1} + B_{T-1}\log(N_{T-1})
$$

逆推法-4

- 对于$T-2$期的贝尔曼方程：
$$V_{T-2}(N_{T-2}) = \max_{N_{T-1}} \log(N_{T-2} - N_{T-1}) + \beta V_{T-1}(N_{T-1})$$
- 一阶条件：
$$\boxed{\frac{-1}{N_{T-2} - N_{T-1}} + \beta V_{T-1}{}'(N_{T-1}) = 0}$$
- 包络条件：
$$V_{T-1}{}'(N_{T-1}) = \frac{B_{T-1}}{N_{T-1}}$$
- 可以一直逆推下去，直到每期问题都解决