

宏观经济学

李伦

北京大学经济学院

2025/2/20

关于价格指数的一些补充

- 价格指数的计算

$$P_t^L = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} y_{i0}}{\sum_{i=1}^N p_{i0} y_{i0}} = \sum_{i=1}^N \frac{p_{it}}{p_{i0}} \frac{p_{i0} y_{i0}}{\sum_{i=0}^N p_{i0} y_{i0}} \quad (1)$$

$$P_t^P = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} y_{it}}{\sum_{i=1}^N p_{i0} y_{it}} = \sum_{i=1}^N \frac{p_{it}}{p_{i0}} \frac{p_{i0} y_{it}}{\sum_{i=0}^N p_{i0} y_{it}} \quad (2)$$

为什么说拉氏指数倾向于高估通胀，而帕氏指数倾向于低估通胀？

价格指数的比较

- 拉氏指数：当某种物品价格上升时，消费者倾向于减少该物品的消费占比（权重）；因此在使用基准年的数量作为权重时，会将更大比例的权重加在价格上升的产品上。
- 帕氏指数：举一个极端的例子，如果原油价格大幅上升，在 t 年原油的消耗量下降为0。按照帕式公式，原油的价格上升对通胀没有任何贡献作用（在报告年的数量为0）。
- Fisher Index：两者的几何平均

Because the COLI is not directly observable, the CPI employs index number formulas that offer approximations to the measurement objective. The CPI-U and the CPI-W use a Laspeyres formula to average the price changes across categories of items. It is sometimes said that the Laspeyres formula provides an “upper bound” on the COLI index. The C-CPI-U uses a Törnqvist formula to average price changes across item categories. This formula belongs to a class of for-

美国劳工统计局：采用拉氏公式与Tornqvist公式
(后者不要求掌握)

$$P_t^T = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)^{\frac{1}{2} \left[\frac{p_{i0} y_{i0}}{\sum_{i=1}^N p_{i0} y_{i0}} + \frac{p_{it} y_{it}}{\sum_{i=1}^N p_{it} y_{it}} \right]}$$

CPI编制采用什么计算公式？

中国国家统计局：
采用拉氏公式

来源：国家统计局城市司

发布时间：2011-06-10 10:32

[打印本页](#)

[关闭窗口](#)

这里首先介绍价格统计中涉及的两个主要公式，即拉氏公式和帕氏公式。通俗的讲，拉氏公式是在编制数量指标综合指数或质量指标综合指数时，所加入的同度量因素是固定在基期的水平上，该公式由德国学者拉斯贝尔斯（Laspeyres）于1864年首创，因此被称为拉氏公式；帕氏公式是在编制数量指标综合指数或质量指标综合指数时，所加入的同度量因素是固定的报告期的水平上，该公式由德国学者帕舍（Paasche）于1874年首先提出，因此被称为帕氏公式。

两者的区别在于，拉氏公式的特点是将同度量因素固定在基期，而帕氏公式的特点是将同度量因素固定在报告期。事实上，在综合指数公式中，同度量因素不仅起着综合的作用，而且起着权衡轻重的作用。对于同一资料，采用基期数值作为同度量因素或是采用报告期数值作为同度量因素，其计算结果是不一样的。按照国家统计局统计调查制度的规定，在计算CPI时采用拉氏公式。

GDP 平减指数和 CPI 的区别

- GDP 平减指数使用名义GDP和实际GDP的比值进行计算，反应了一个经济体在一定时期内生产的全部最终商品和服务的价格变化。
- CPI 计算的是“同一篮子商品”的价格变化，而GDP平减指数中的商品类别会年年不同。
- 如果企业每年购置设备的价格不断上涨，这部分上涨的价格会通过固定资产投资的统计渠道进入到GDP的计算中，从而影响GDP平减指数；由于设备不属于居民消费，因此这部分价格变动不会对CPI产生影响

CPI 和 PPI 的区别

- 计算方式同CPI类似，也是测量既定的一篮子商品的成本
- PPI 包括的覆盖范围不同，包括原材料和半成品
- 作用不同：PPI用来衡量实际产出的变化，CPI用来衡量生活成本的变化
- 一般来说PPI会先于CPI进行变化，可以作为预测CPI的指标

劳动数据

- 除了GDP和物价以外，劳动数据对于经济来说也非常重要。
- 如何理解失业率？

根据美国劳工统计局（BLS）的数据，美国2022年1月的失业率是4.0%。

这是否意味着美国的所有人口中仅有4%的人没有工作？【讨论】

劳动市场

- 不是所有人都在参与劳动市场! (即: 正在工作+正在找工作)
- 例如: 学生、主动选择不工作的群体、监狱内的犯人等

失业率的计算公式:

$$U_t = \frac{unemployed_t}{laborforce_t}$$

区分几种劳动数据

失业率

$$U_t = \frac{\text{unemployed}_t}{\text{labor force}_t}$$

就业率（或就业人口比）

$$e_t = \frac{\text{employed}_t}{\text{population}_t}$$

劳动参与率

$$LFP_t = \frac{\text{labor force}_t}{\text{population}_t}$$

失业的类型 (Types of Unemployment)

不是所有的失业都有着相同原因，我们可以将失业分成以下几类：

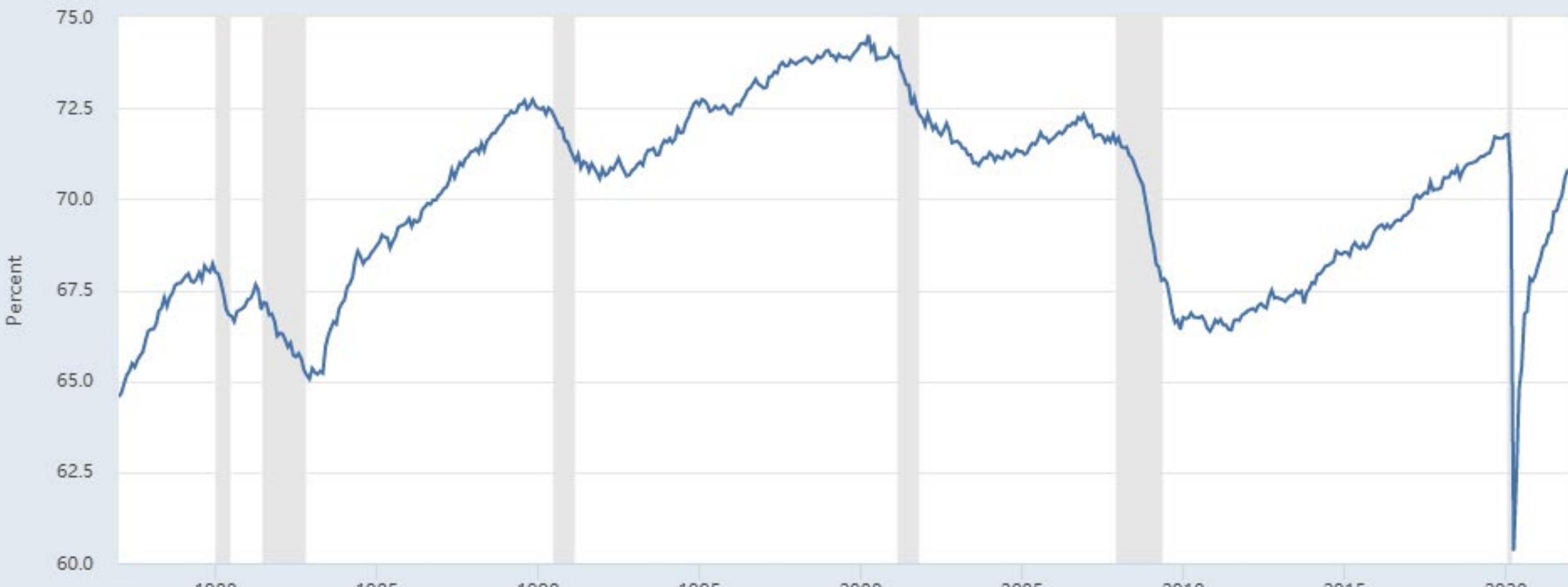
- Frictional: 换工作、找工作需要周期
- Seasonal: 季节性的劳动力需求
- Structural: 职业技能变得不被市场需要了（如打字员）
- Cyclical: 因经济波动而产生的劳动力过剩或需求不足



Shaded areas indicate U.S. recessions.

Source: U.S. Bureau of Labor Statistics

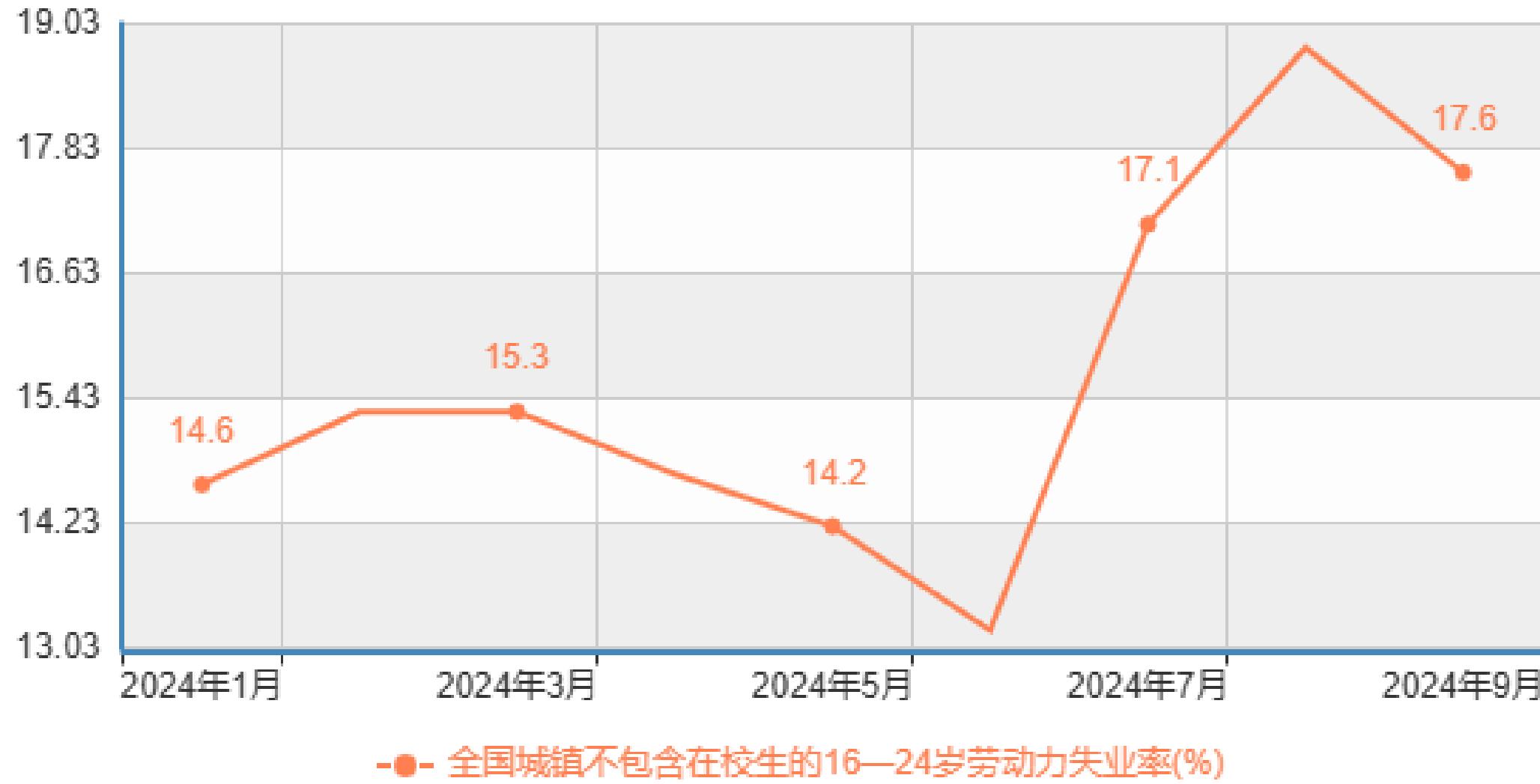
fred.stlouisfed.org



Shaded areas indicate U.S. recessions
Source: Organization for Economic Co-operation and Development

fred.stlouisfed.org

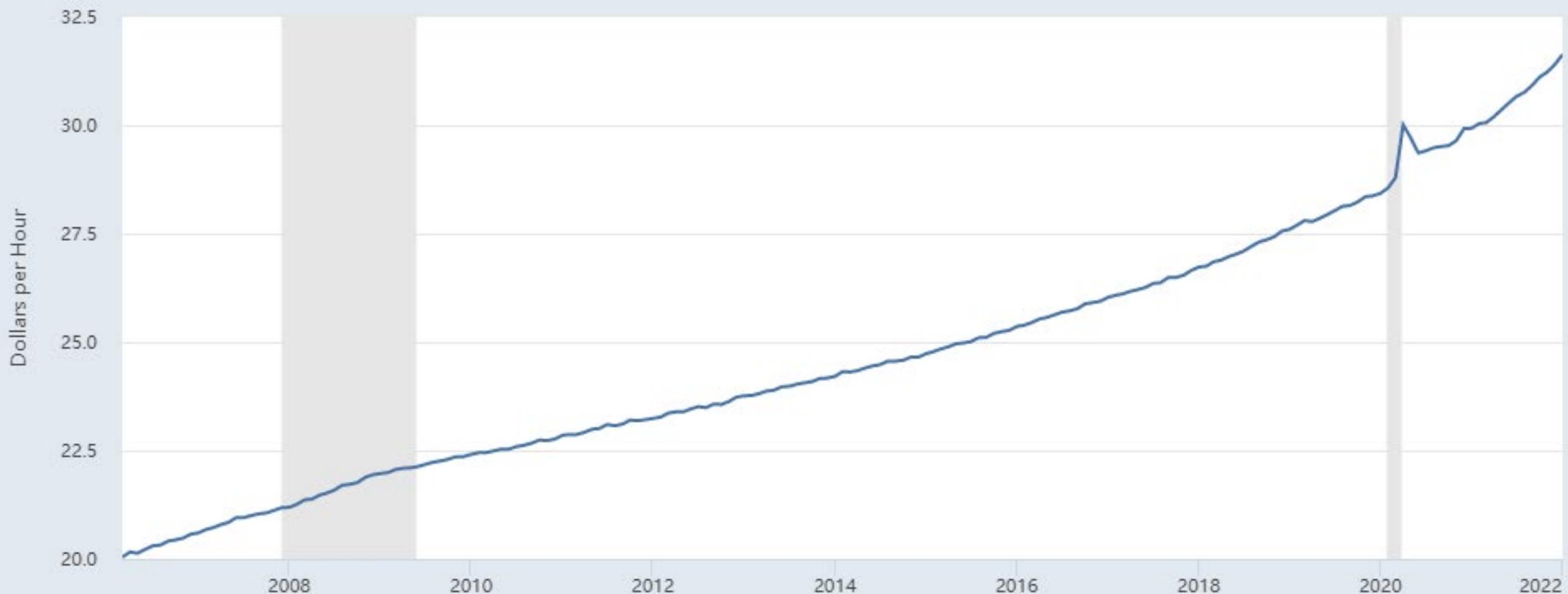




工资与收入

- 不光是要有工作，还要看工作的收入如何
- 根据美国劳工统计局2020年5月公布的数据，美国劳动者的年平均工资是\$56310美元。
- 不同行业差别很大（见[此表](#)）
- 美国劳动者平均的时薪是31.63美元/小时（2022年1月数据）

Occupation code	Occupation title (click on the occupation title to view its profile)	Level	Employment	Employment RSE	Employment per 1,000 jobs	Median hourly wage	Mean hourly wage	Annual mean wage	Mean wage RSE
29-1212	Cardiologists	detail	16,870	5.1%	0.114	(5)	\$202.56	\$421,330	4.0%
29-1242	Orthopedic Surgeons, Except Pediatric	detail	19,060	8.9%	0.129	(5)	\$178.56	\$371,400	9.8%
29-1243	Pediatric Surgeons	detail	780	5.6%	0.005	(5)	\$174.51	\$362,970	2.4%
27-2021	Athletes and Sports Competitors	detail	11,930	8.7%	0.081	(4)	(4)	\$358,080	11.4%
29-1249	Surgeons, All Other	detail	25,910	10.2%	0.175	(5)	\$167.25	\$347,870	3.8%
29-1240	Surgeons	broad	58,330	3.8%	0.394	(5)	\$162.49	\$337,980	2.9%
29-1224	Radiologists	detail	29,250	6.3%	0.198	(5)	\$158.21	\$329,080	2.5%
29-1213	Dermatologists	detail	11,640	6.3%	0.079	(5)	\$157.53	\$327,650	9.7%
29-1214	Emergency Medicine Physicians	detail	29,260	5.6%	0.198	(5)	\$152.21	\$316,600	2.1%
29-1022	Oral and Maxillofacial Surgeons	detail	4,290	11.9%	0.029	(5)	\$148.76	\$309,410	5.5%
29-1211	Anesthesiologists	detail	37,430	7.6%	0.253	(5)	\$145.66	\$302,970	3.5%
29-1218	Obstetricians and Gynecologists	detail	21,450	6.2%	0.145	(5)	\$133.33	\$277,320	2.3%
29-1241	Ophthalmologists, Except Pediatric	detail	12,580	7.9%	0.085	\$105.68	\$127.62	\$265,450	7.3%
29-1217	Neurologists	detail	11,340	8.8%	0.077	\$107.82	\$122.84	\$255,510	4.6%
29-1222	Physicians, Pathologists	detail	12,320	6.4%	0.083	(5)	\$121.56	\$252,850	2.9%
29-1210	Physicians	broad	702,910	0.7%	4.753	\$109.22	\$121.15	\$251,990	0.5%
29-1223	Psychiatrists	detail	26,500	4.5%	0.179	\$109.08	\$118.92	\$247,350	2.6%
11-1011	Chief Executives	detail	199,240	0.9%	1.347	\$91.12	\$118.48	\$246,440	1.6%
29-1229	Physicians, All Other	detail	305,260	1.9%	2.064	\$107.41	\$114.76	\$238,700	1.1%



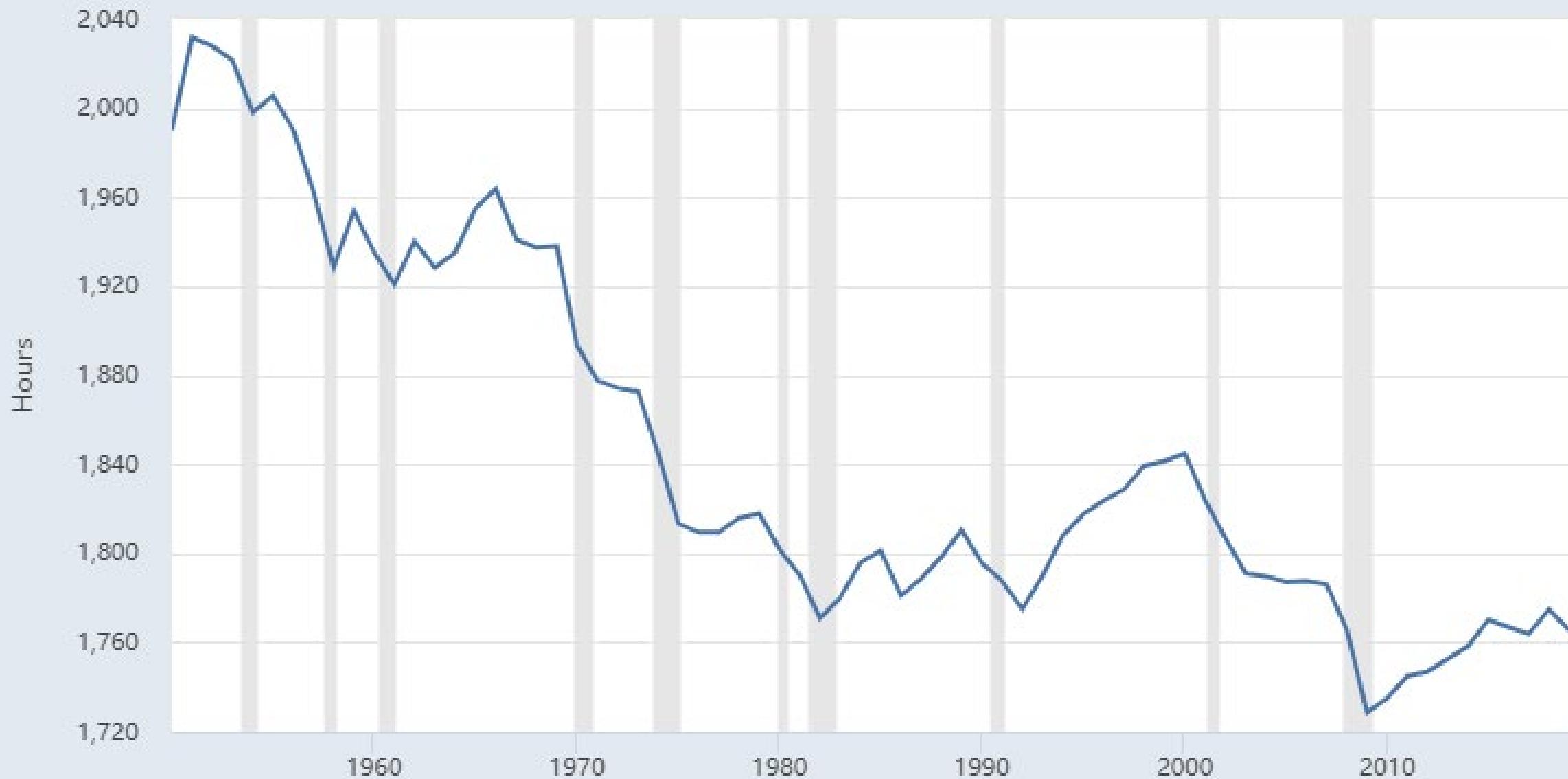
Shaded areas indicate U.S. recessions.

Source: U.S. Bureau of Labor Statistics

fred.stlouisfed.org

工资不是一切！

- 如何解释美国劳动市场当中，时薪不断上涨，劳动参与率却低迷不振这一现象？
- 工资不能完全代表一份工作
 - 工作的辛苦程度、工作条件、工作时长、稳定程度、对应的社会地位等，都会影响就业者对工作的偏好。
- 疫情期间，美国超过3300万劳动者辞职，被称为“大辞职浪潮”（**the great resignation**）
 - 原因1：恶劣的工作条件（护士、服务生等）
 - 原因2：寻找更多教育机会，考取文凭或相关资格证，进入不同行业
 - 原因3：在同行业内，争取到更高收入的工作



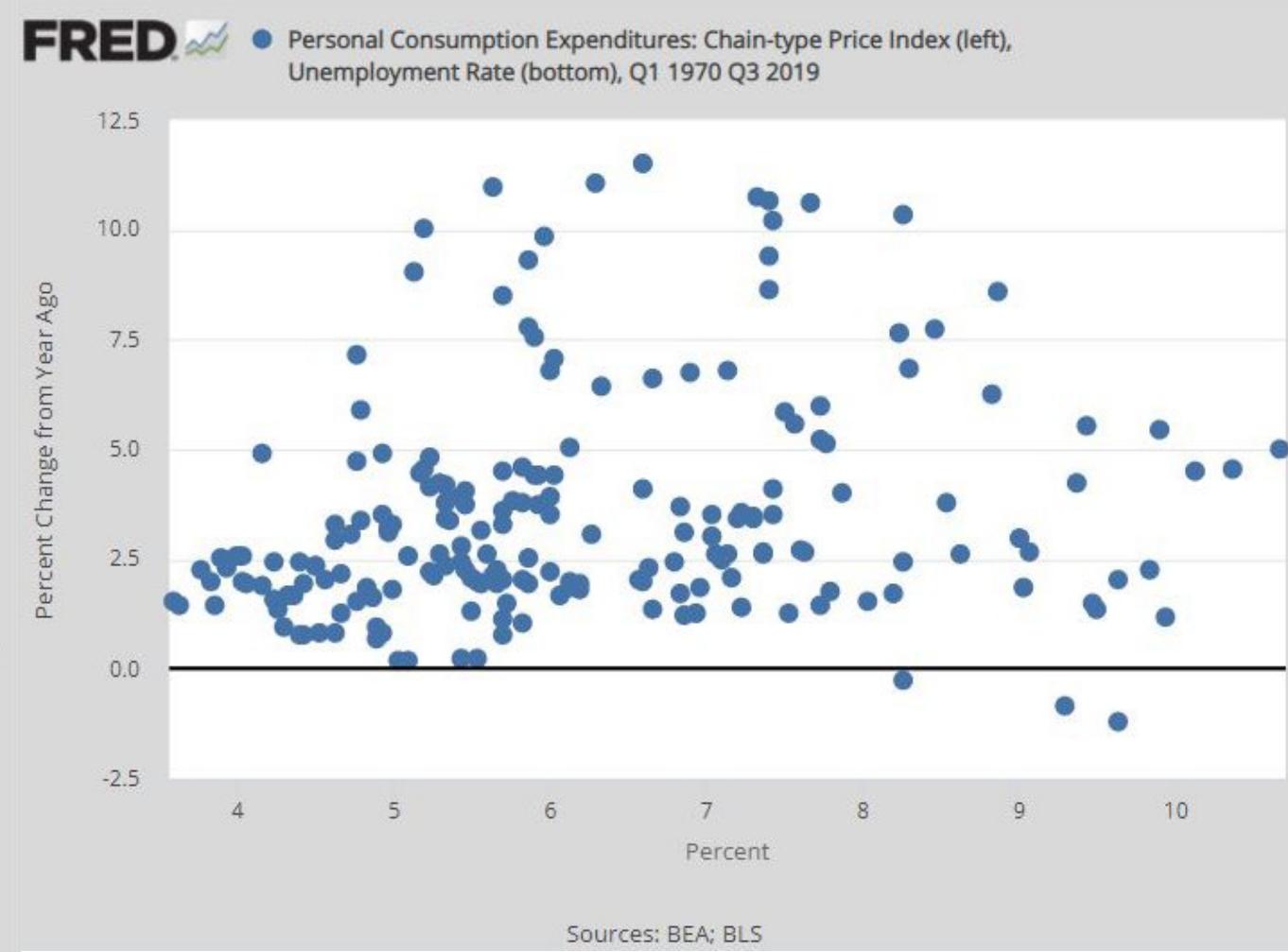
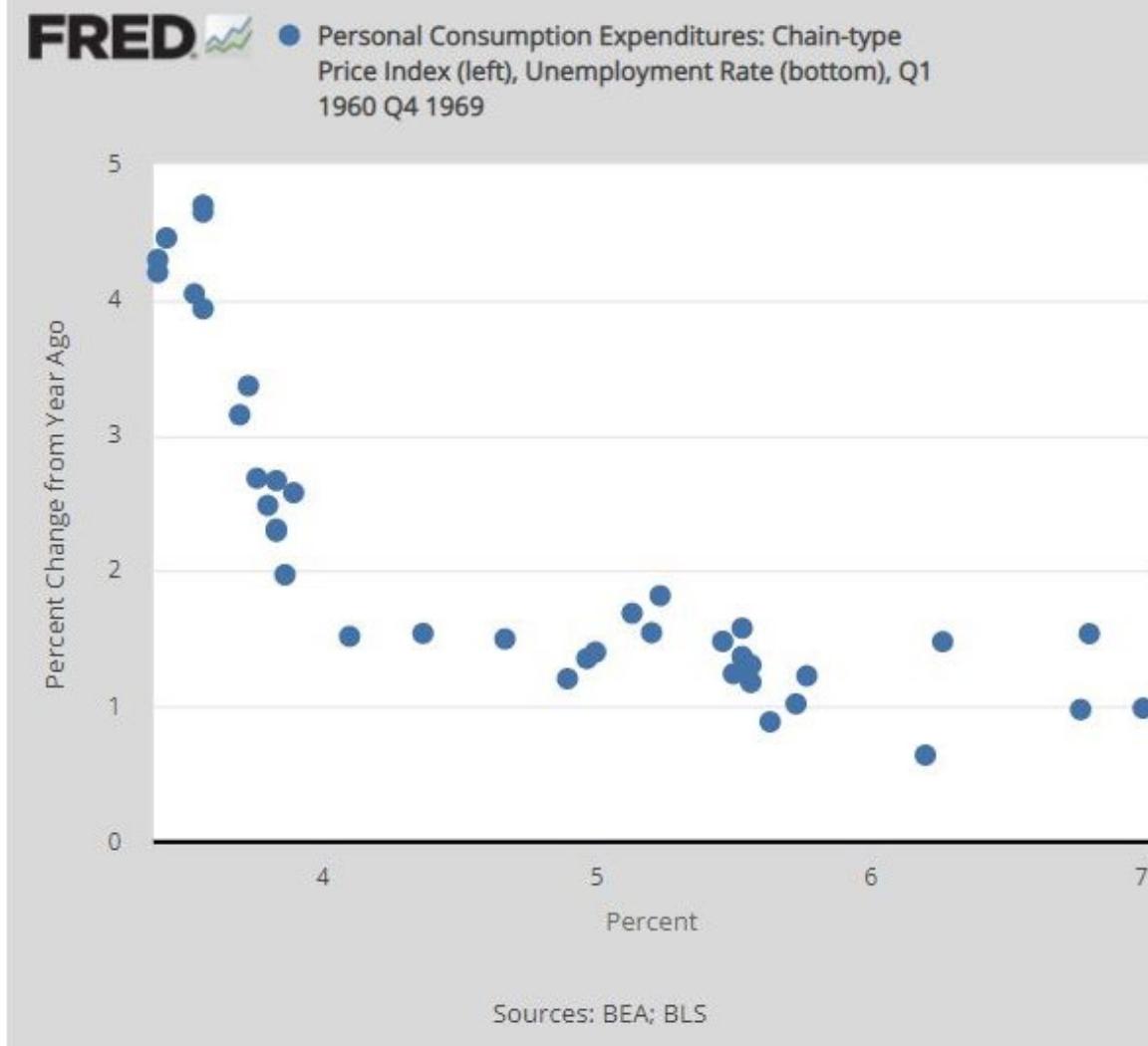
Sources: University of Groningen; University of California, Davis

通胀和失业率

- 经济学家William Phillips在1958年提出，通胀率和失业率在1861年至1957年的英国呈现反比关系。
- 这一理论也被称作“菲利普斯曲线”，在60年代得到了如Paul Samuelson和Robert Solow等著名经济学家的推崇。
- Phillips Curve的逻辑基础是，当通货膨胀升高时，需要支付给劳动者的实际工资在短期内降低，相当于雇人更便宜了 – 于是企业会多雇佣员工，降低失业率。

对菲利普斯曲线的挑战

- 基于这一理论，中央银行在经济陷入衰退时，应使用宽松的货币政策，增加通货膨胀率，从而减少失业率，帮助经济脱困。
- 60年代晚期至70年代中期，弗里德曼，卢卡斯等经济学家对菲利普斯曲线的合理性提出了质疑。
- 70年代的“滞涨”给了菲利普斯曲线一记重击——由于高油价和低迷增长的影响，美国同时出现了高通胀和高失业率。这也导致传统凯恩斯学派在80年代开始逐渐走向衰落。



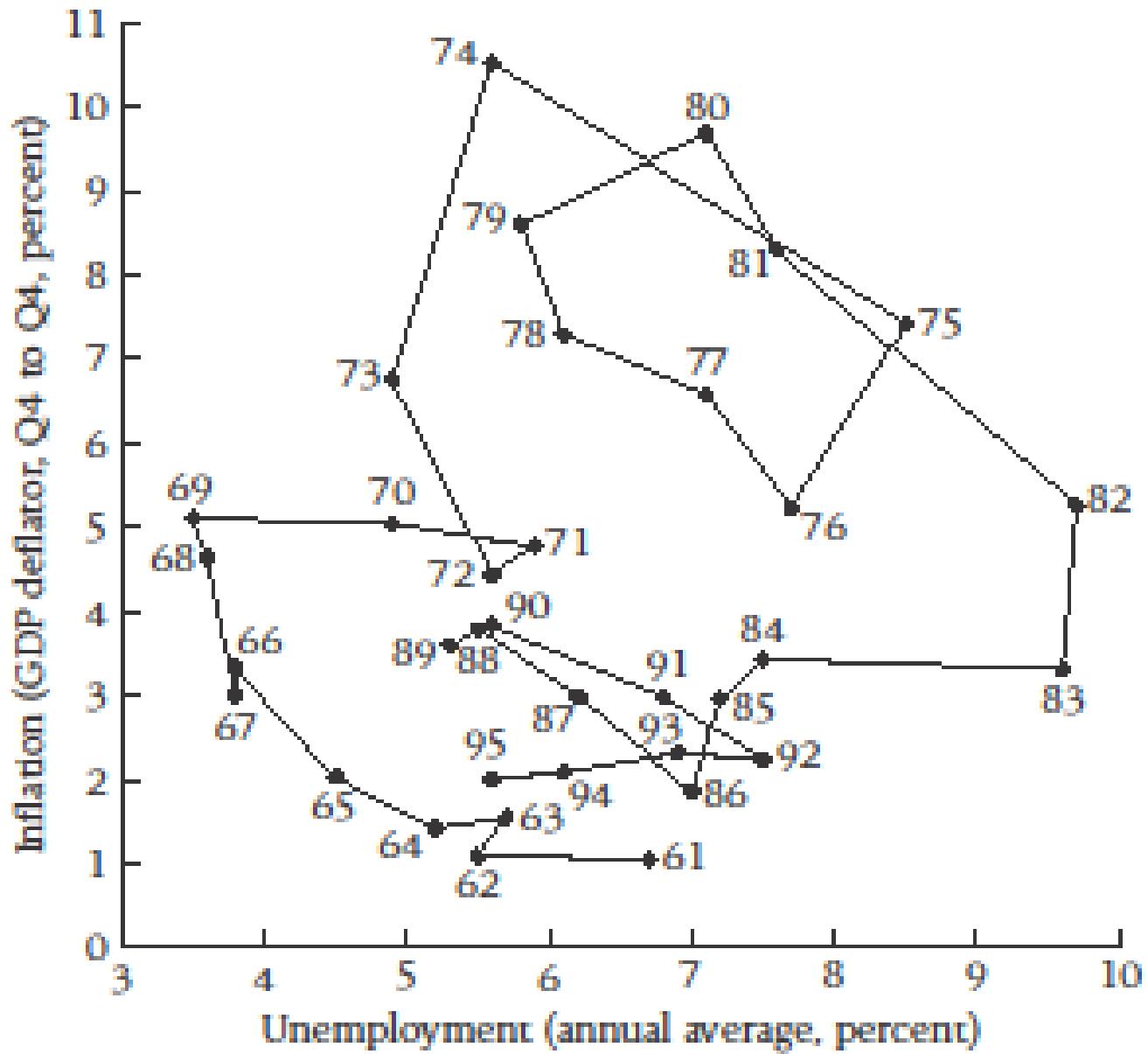


FIGURE 6.7 Unemployment and inflation in the United States, 1961–1995

菲利普斯曲线及其挑战

- 卢卡斯的质疑：历史规律不能当成制定宏观政策的基础，个体对宏观政策的未来影响存在**理性预期**
- 预期通胀的大小对于个体的决策会产生影响



罗伯特·卢卡斯
1995年诺贝尔经济学奖得主

宏观经济指标的局限性

- 任何从微观到宏观的加总，都会带来信息的损失
- 这种信息往往是必要的，让我们对经济体的总体情况产生了解

GDP的局限性

- GDP衡量总产出，但是不能衡量社会的收入分布、贫富差距。



GDP的局限性

- 无法衡量经济发展对环境带来的影响



2025/2/20



27

GDP的局限性

- 市场价值 vs 真实价值
- 不能衡量地下经济的规模
- 不能准确衡量社会福利的变化

CPI的局限性

- 新产品、进口产品



Chained Price Index

- 链式消费指数（或连锁消费指数）

$$P_t^{\text{Chained Laspeyres}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} p_{i1} y_{i0}}{\sum_{i=1}^{N_0} p_{i0} y_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{N_1} p_{i2} y_{i1}}{\sum_{i=1}^{N_1} p_{i1} y_{i1}} \times \cdots \times \frac{\sum_{i=1}^{N_{t-1}} p_{it} y_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{N_{t-1}} p_{i,t-1} y_{i,t-1}}$$

通货膨胀

- 短期：Self-fulfilling Prophecy（自我实现的预言）
- 消费者：如果预期未来某产品价格要涨，那么我今天会…？
- 生产者：短期无法加大产能，于是…

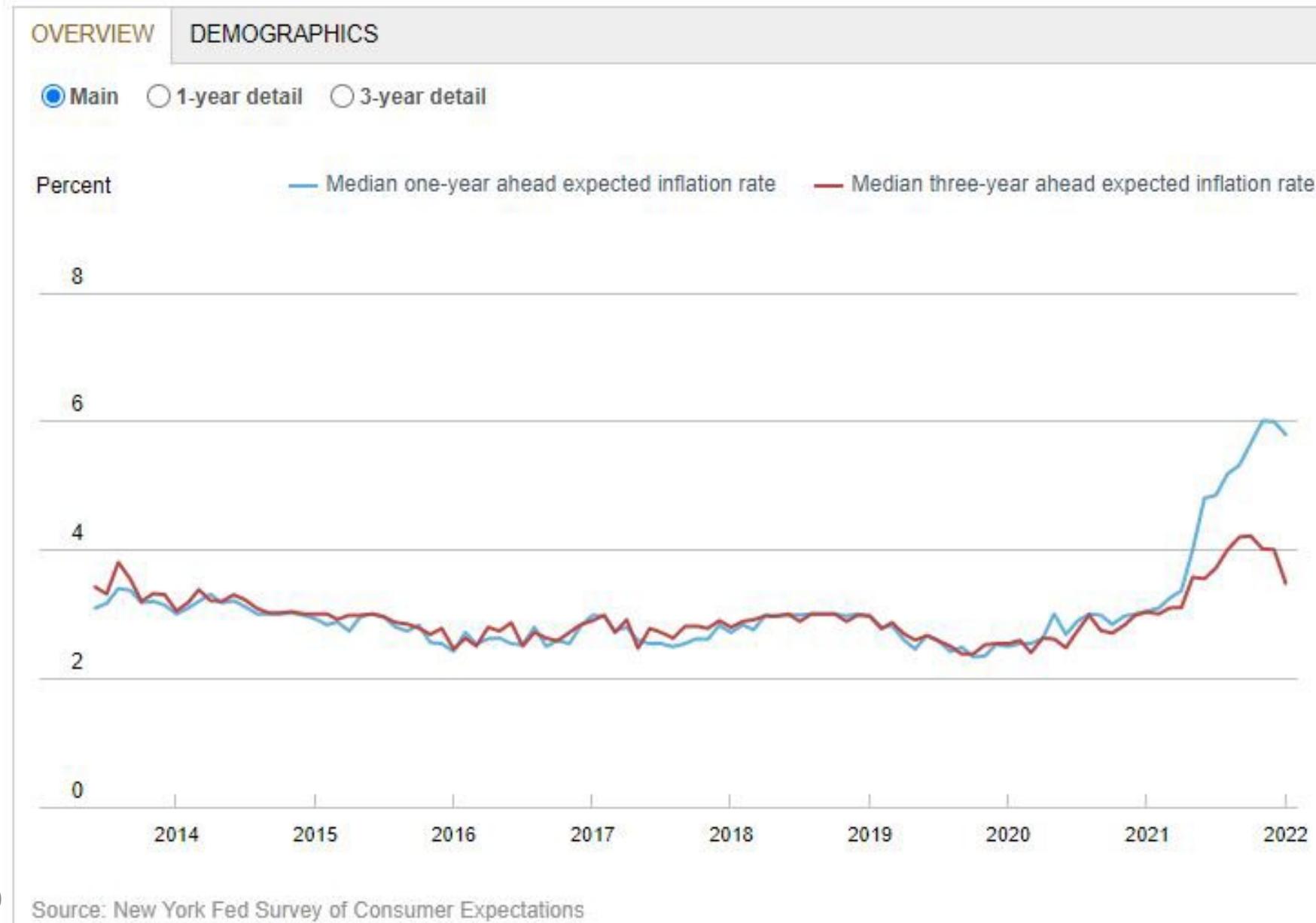


或



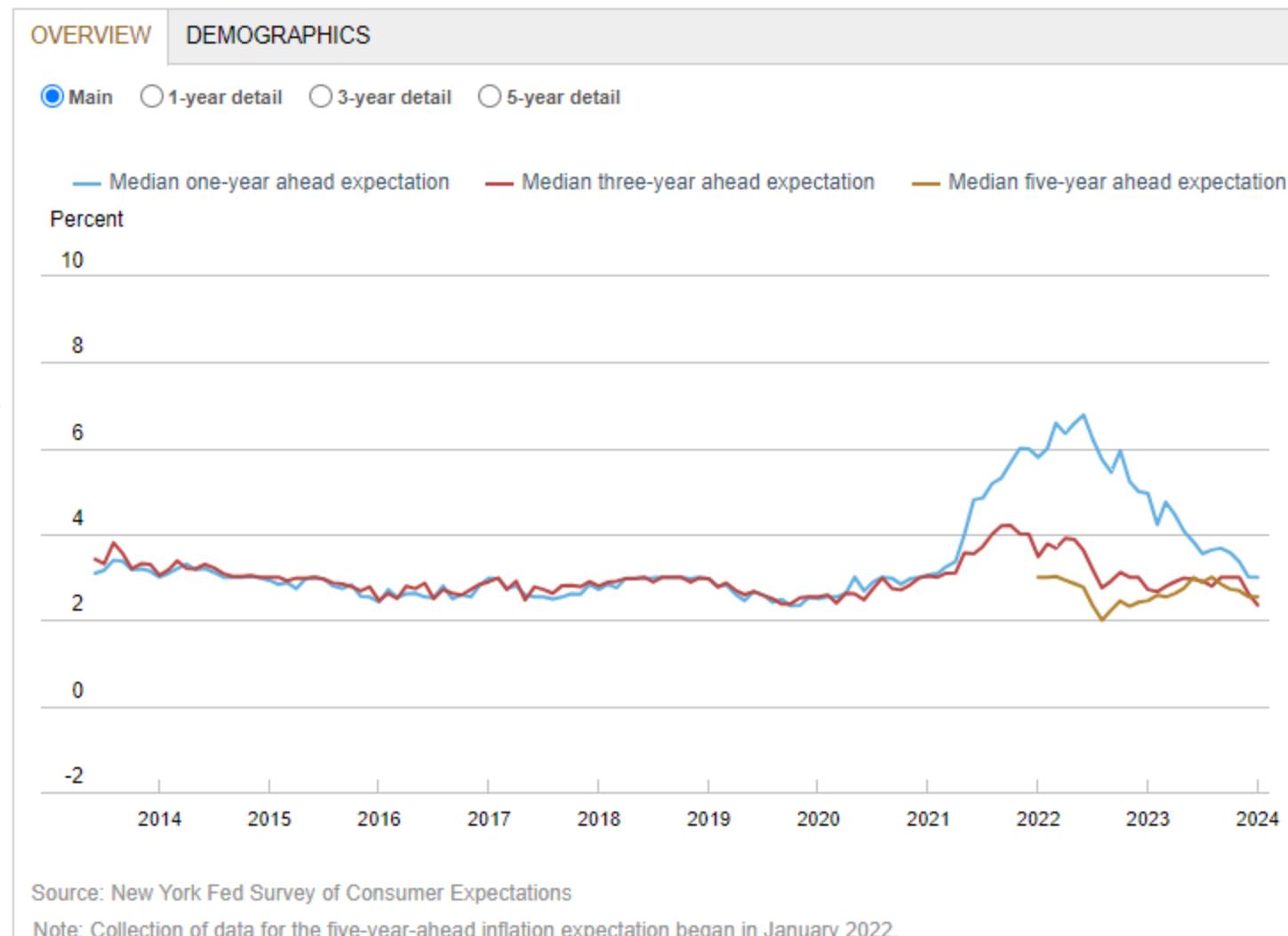
Inflation expectations

Median one- and three-year ahead expected inflation rate



Inflation expectations

Median one-, three-, and five-year ahead expected inflation rate



如何控制通货膨胀？

- 央行： Taylor Rule

$$i_t = r^* + \pi_t + \phi_\pi(\pi_t - \pi^*) + \phi_y(Y_t - Y_t^f)$$

- 如何理解？

自动刹车+油门辅助系统

关于通胀、价格的前沿研究

- 使用微观数据，可以衡量地区、甚至家庭层面的通货膨胀水平
- 研究人员（Kaplan and Schulhofer-Wohl）发现，老年人、低收入者、大家庭的通胀水平要高于其他群体
- 除了通胀率以外，价格离散程度（Price dispersion）——即同一种商品的价格在市场上的分布情况——也可以帮助我们提高对于价格、市场信息的认识。

新古典主义基础分析框架

古典经济学

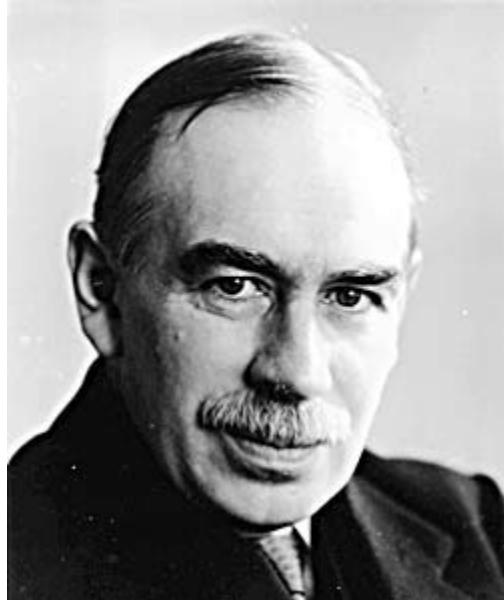
- 1930年以前的古典经济学家，多推崇“自由放任”主义，最经典的当属亚当·斯密提出的“看不见的手”
- “看不见的手”良好运转的前提，是价格能够灵活地反映、传导当前市场上的信息。在保证市场出清的情况下，价格能够影响生产者和消费者的行为，从而使整个经济体达到均衡。
- 古典经济学家认为货币只是商业交易的媒介，不会影响到整个经济体的表现。

《通论》诞生的背景

- 1929-1933年，经济大萧条



凯恩斯和《通论》



1930年：凯恩斯的《就业、利息和货币通论》问世，标志着凯恩斯主义宏观经济学的开始。此时距离亚当·斯密写下《国富论》已经过去了150多年。

“当现代经济学家阅读《通论》时，会感到既振奋又失望。一方面，这本书是一位伟大的思想家试图研究最常见但同时又最艰深的社会经济问题的成果；另一方面，虽然这本书的分析涉猎甚广，但似乎在逻辑上并不完整，留下太多线索悬而未决。这就使得读者不断追问：‘到底有没有一种经济模型可以将所有这些片段糅合在一起呢？’”

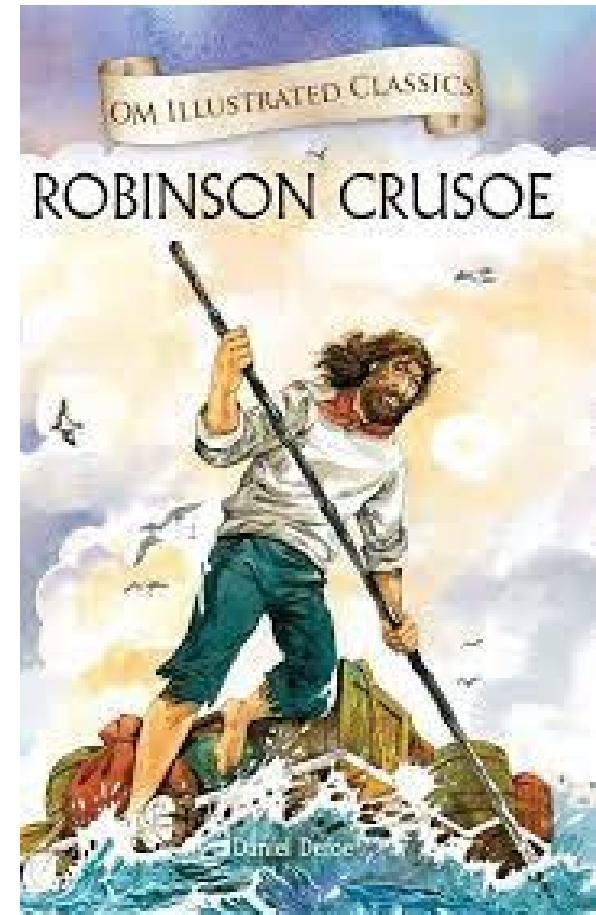
– Mankiw (2006)

宏观模型的微观基础

- 传统以来，宏观经济学和微观经济学的模型之间存在不少脱节，像是两门不同的学科。
- 传统宏观模型（如IS-LM模型，菲利普斯曲线）对经济变量之间关系的假设，往往建立在历史经验和过往的经济规律上，而非基于每一个理性个体进行最优化的结果。
- **卢卡斯批判和理性预期理论**：如果政策发生改变，理性人会相应调整自己对政策的反应方式，而个体行为的加总可能使得过往的经济规律失效！
- 由此，产生了一场对于宏观经济学模型的认知革命。一部分经济学家认为，宏观模型应该具有微观基础（*microfoundations*），即，宏观经济模型中的均衡应该来自于个体和公司最优化的结果。

From Macro to ... Micro Again?

- 这节课：回到一个最简单的经济体
- 《鲁滨逊漂流记》：英国作家笛福1719年的小说，描述了主人公鲁滨逊在一个热带荒岛上度过28年的故事
原书名：*The life and strange surprising adventures of Robinson Crusoe, of York, mariner: who lived eight and twenty years all alone in an uninhabited island on the coast of America, near the mouth of the great river of Oroonoque; having been cast on shore by shipwreck, wherein all the men perished but himself.*
- 首先，我们通过一个一期模型（one-period model）来分析消费和劳动之间的权衡关系。



假设

- 鲁滨逊一觉醒来，发现自己在一座荒岛上。他环顾四周，发现岛上长着很多椰子树，如果付出一些努力的话，可以爬到树顶采摘椰子，供自己食用。但是椰子不易存放，吃不掉的话会腐烂。
- 鲁滨逊的效用函数：

$$\underline{u(c, l)}$$

- c , 消费, 即食用的椰子的数量
- l : 工作的时长, 假设 $0 \leq l \leq 1$

- 我们假设：

$$u_c(c, l) = \frac{\partial u(c, l)}{\partial c} > 0, \quad u_l(c, l) = \frac{\partial u(c, l)}{\partial l} < 0$$

- 消费的边际效用为正 (+) ,
工作的边际效用为负 (-)

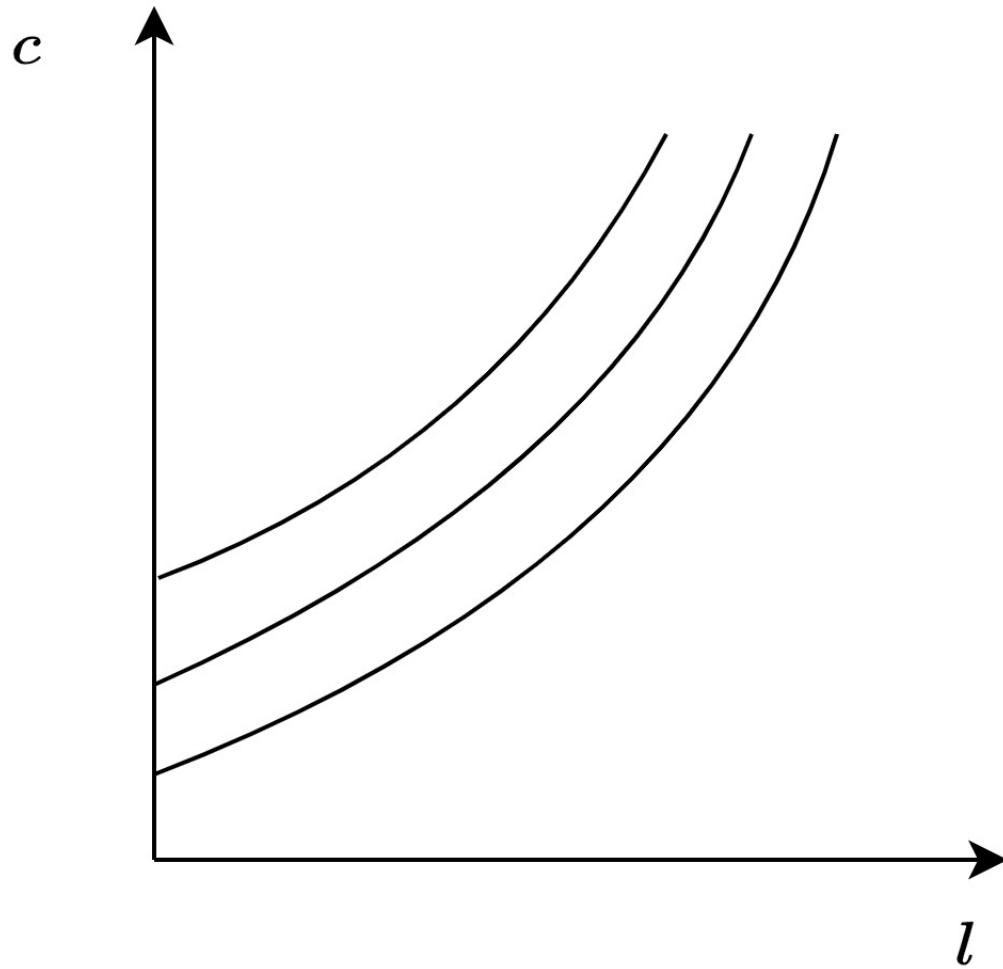
假设-2

- 此外，我们假设

$$u_{cc}(c, l) = \frac{\partial^2 u(c, l)}{\partial c^2} < 0, \quad u_{ll}(c, l) = \frac{\partial^2 u(c, l)}{\partial l^2} < 0$$

- 第一行：消费的边际效用递减，椰子会越吃越腻...
- 第二行：工作的边际负效用的大小递增，工作会越来越痛苦 (...makes sense)

偏好的图形表示



- 无差别曲线 (indifference curve) 为何向上?
- 因为工作 (l) 使人痛苦!
- 例子:

$$u(c, l) = \ln(c) + \ln(1 - l)$$

让效用保持在一个特定水平 \bar{u} , 即可推导出无差别别曲线的表达式:

$$\ln(c) + \ln(1 - l) = \bar{u}$$

$$c(1 - l) = e^{\bar{u}}$$

$$c = \frac{e^{\bar{u}}}{1 - l}$$

假设-3：生产函数

- 我们之前讲到，生产函数一般表达为

$$y = f(k, l)$$

- 要求 $f(0, l) = f(k, 0) = 0$
- 在这里，我们假设资本 k 恒定不变，那么生产函数就可以简化为

$$y = f(l)$$

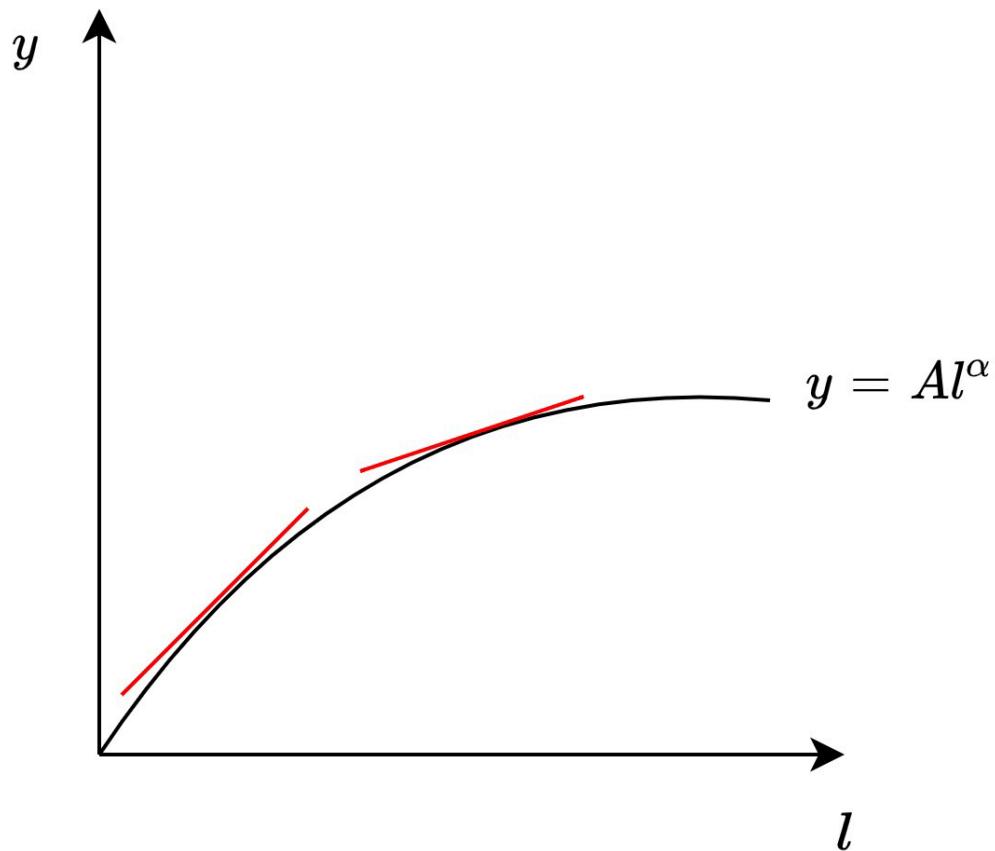
- 例如，一个Cobb-Douglas生产函数可以表达为

$$y = Ak^{1-\alpha}l^\alpha$$

- A : 科技水平
- α : 劳动收入占总收入的比例
- 如果我们假设 $k = 1$, 那么鲁滨逊的生产函数就可以表示为

$$y = Al^\alpha$$

生产函数的图形表达



- 斜率：劳动边际产出 (marginal product of labor, MPL)，随着 l 上升而下降
- 如果生产科技变得更好， A 上升，那么生产函数将会围绕原点向上转动

均衡的定义

- 鲁滨逊面临的问题是：

$$\begin{aligned} & \max_l u(c, l) \\ & s.t. \quad c = y = f(l) \end{aligned}$$

- 多劳多得，但是多劳也会多累！

注意：在这个简单的经济体内，也有产品市场均衡，即 $c = y$ 成立

- 鲁滨逊既是消费者，又是生产者
- 因为椰子无法储存，未被食用的椰子无法带来任何价值，所以均衡条件下消费量=生产量

均衡的定义：

1. 个体效用最大化
2. 产品市场均衡

均衡的求解

$$\begin{aligned} & \max_l u(c, l) \\ s.t. \quad & c = y = f(l) \end{aligned}$$

- 方法一：代入法

$$\max_l u(f(l), l)$$

- 我们如何求解这个均衡？

$$[FOC]: u_c(f(l^*), l^*)f'(l^*) + u_l(f(l^*), l^*) = 0$$

$$f'(l^*) = -\frac{u_l(f(l^*), l^*)}{u_c(f(l^*), l^*)}$$

$$MPL = MRS$$

均衡的求解-2

方法二：拉格朗日乘数法（Lagrangian multiplier method），将有约束条件下的最优问题变化为求拉格朗日函数的极值问题。

- 步骤一：将约束条件写为 (resource-expenditure = 0) 的形式

$$f(l) - c = 0$$

- 步骤二：写出拉格朗日函数（Lagrangian）：

$$\mathcal{L}(c, l, \lambda) = u(c, l) + \lambda(f(l) - c)$$

一般形式为：目标函数+ λ *约束条件。拉格朗日乘数 λ 代表放松约束条件带来的边际效用。

- 步骤三：找出拉格朗日函数的最大值，此处需针对 c, l, λ 求导

$$\begin{aligned} [c] \quad & u_c(c, l) - \lambda = 0 \\ [l] \quad & u_l(c, l) + \lambda f'(l) = 0 \\ [\lambda] \quad & f(l) - c = 0 \end{aligned}$$

均衡的求解-3

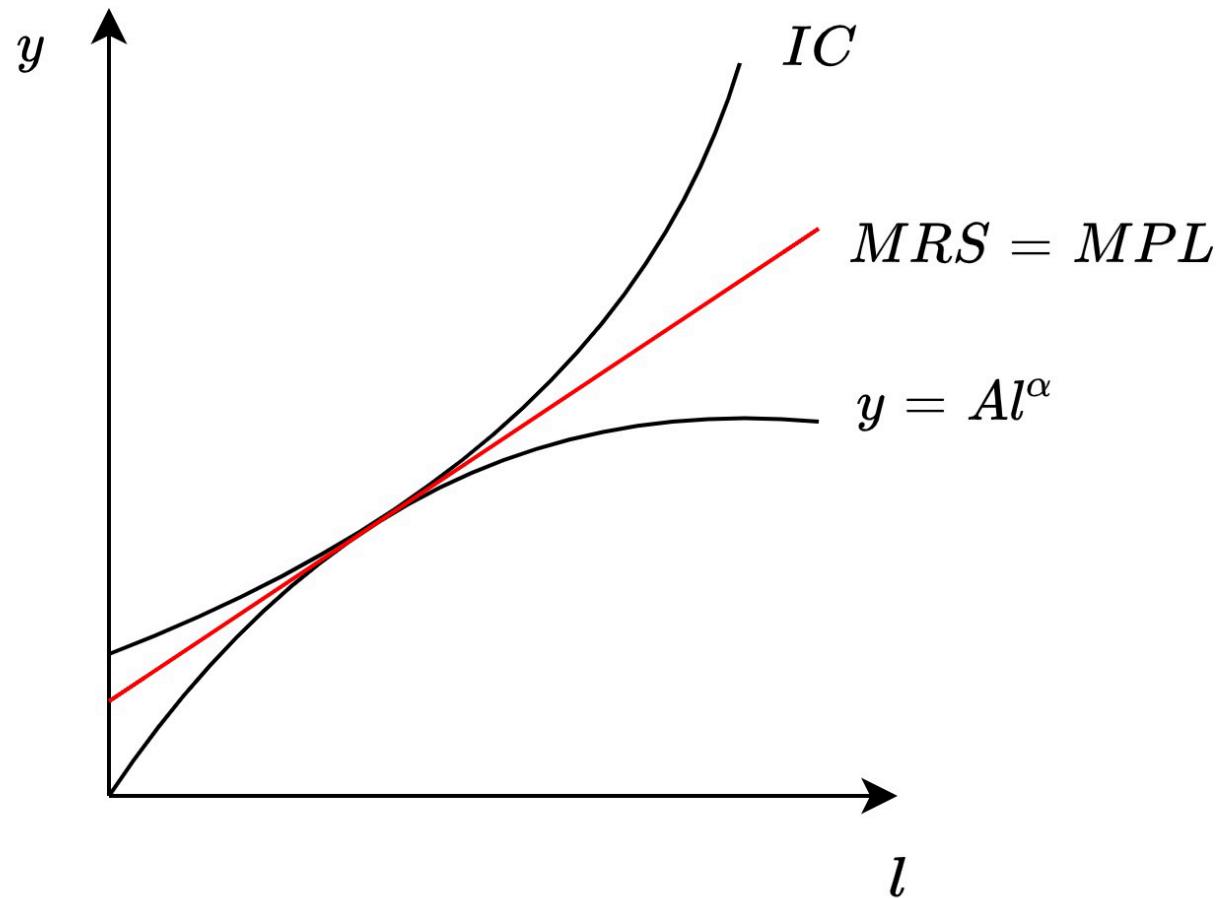
$$\begin{aligned}[c] & u_c(c, l) - \lambda = 0 \\ [l] & u_l(c, l) + \lambda f'(l) = 0 \\ [\lambda] & f(l) - c = 0\end{aligned}$$

- $[c], [l]$ 联立，解出

$$f'(l^*) = -\frac{u_l(f(l^*), l^*)}{u_c(f(l^*), l^*)}$$
$$MPL = MRS$$

- 解释：
 - MPL : 额外一单位时间可以采摘的椰子数量
 - MRS : 为了少工作一单位时间愿意牺牲的椰子数量
 - 均衡条件下，二者相等

均衡的图形表示



举例

- 例子：

$$u(c, l) = \ln(c) + \ln(1 - l)$$
$$f(l) = Al^\alpha$$

- 方法一：

$$\max_l \ln Al^\alpha + \ln(1 - l)$$
$$\frac{\alpha Al^{\alpha-1}}{Al^\alpha} - \frac{1}{1-l} = 0$$
$$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{1-\bar{l}}$$
$$l^* = \frac{1}{1+\alpha}$$

如果 $\alpha = 0.5$, 那么 $l^* = 1/3$ (8小时工作制) !

$$c = Al^\alpha = A \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^\alpha$$

举例 - 2

- 方法二 (黑板示范)

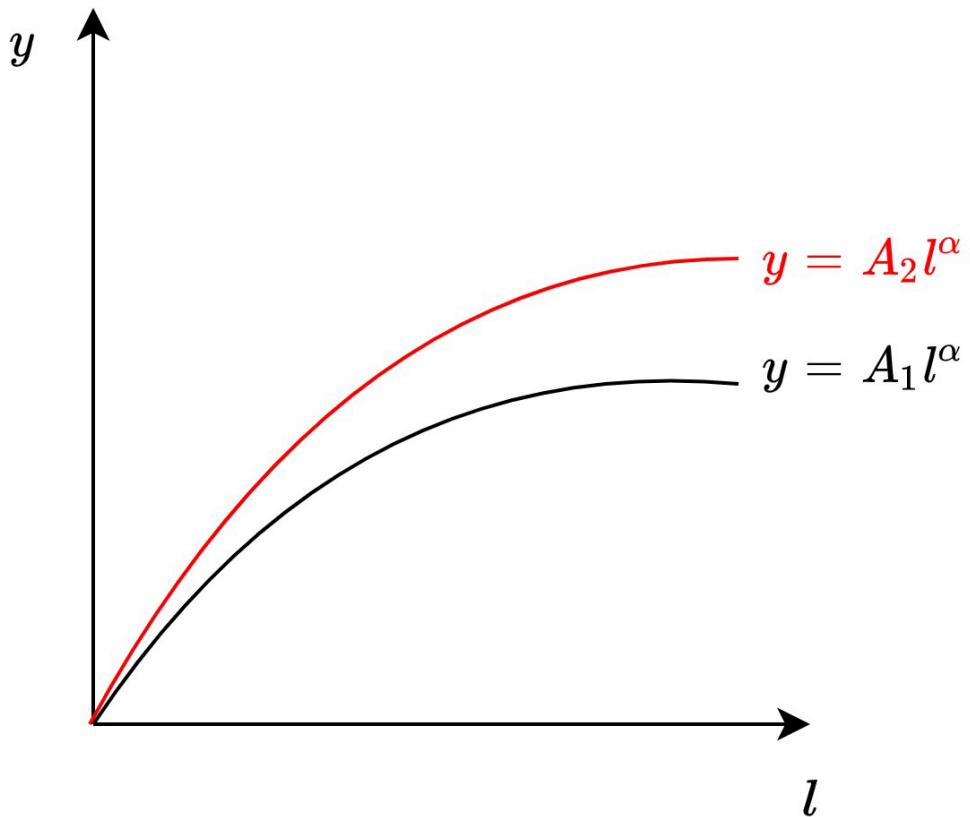
$$MRS = MPL$$

$$\frac{1/(1-l)}{1/c} = \alpha Al^{\alpha-1}$$

$$c = Al^\alpha$$

$$\Rightarrow l^* = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

技术的进步

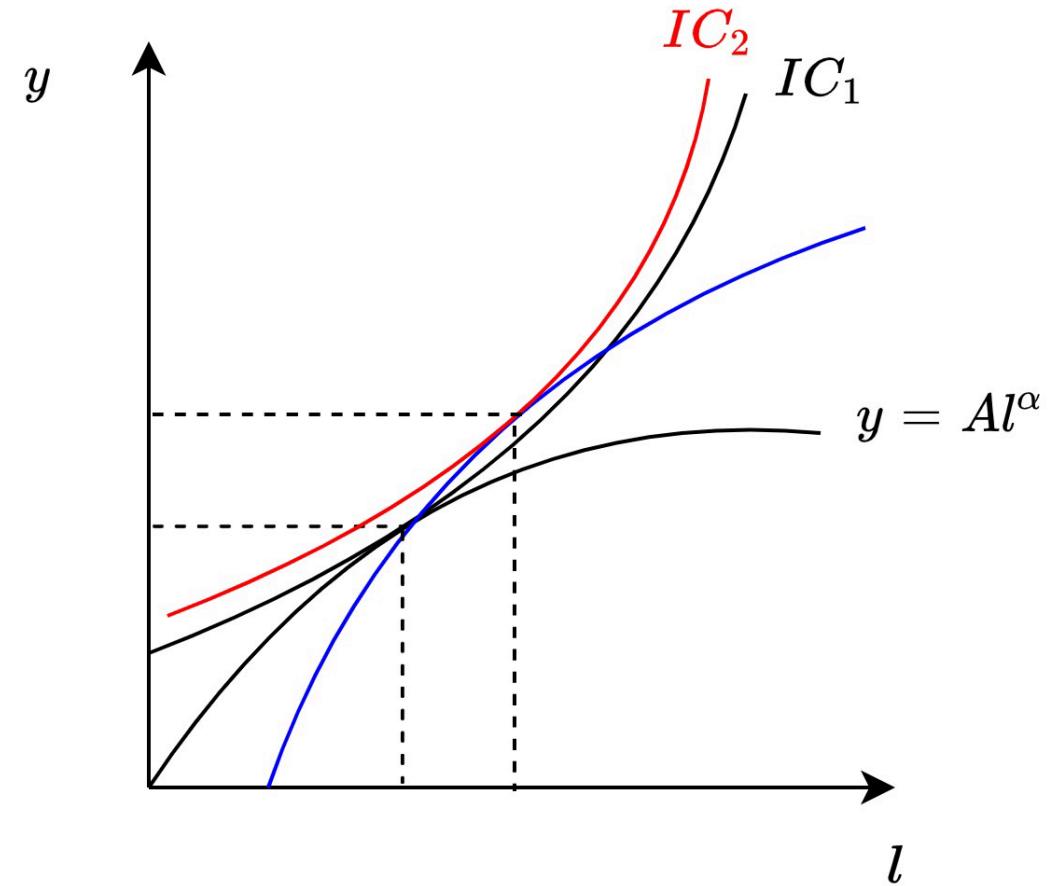
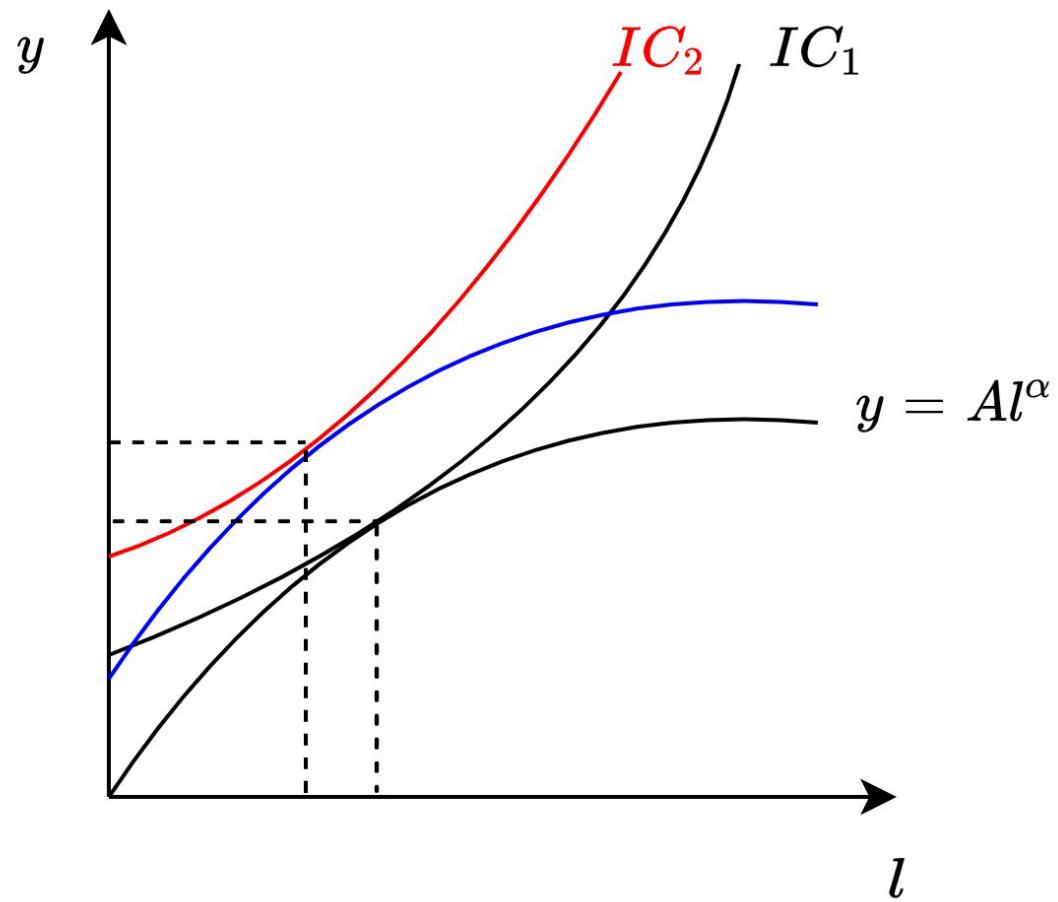


- 鲁滨逊发现，制作石斧砍倒整棵椰子树，比爬到树上一个一个地摘椰子要省力地多。
- 生产函数从 $y = A_1 l^\alpha$ 变为 $y = A_2 l^\alpha$, $A_2 > A_1$
- 技术进步对产出 y 和劳动 l 的影响？

收入与替代效应 (Wealth and Substitution Effects)

- 分析均衡条件下的 c, l 如何随外部变量 A 变化，这种分析方法一般称为**比较静态分析 (Comparative static analysis)**
- 像微观课程中学习的一样，我们也可以分析技术进步带来的**收入效应**和**替代效应**。不同的是，由于生产函数并非是线性的，这里我们很难比较两者分别的大小。
- 我们假设消费和闲暇（即 $1 - l$ ）都是正常品。
 - 在这个假设下，技术进步带来的**收入效应**使得消费上升，工作时长减少；
 - 而**替代效应**使得休息相对于消费来说更贵了（通过 MPL 的上升），所以应该少休息（多工作），多消费
 - 两种效应叠加，结果是消费上升，而劳动的时长如何变化不能确定。

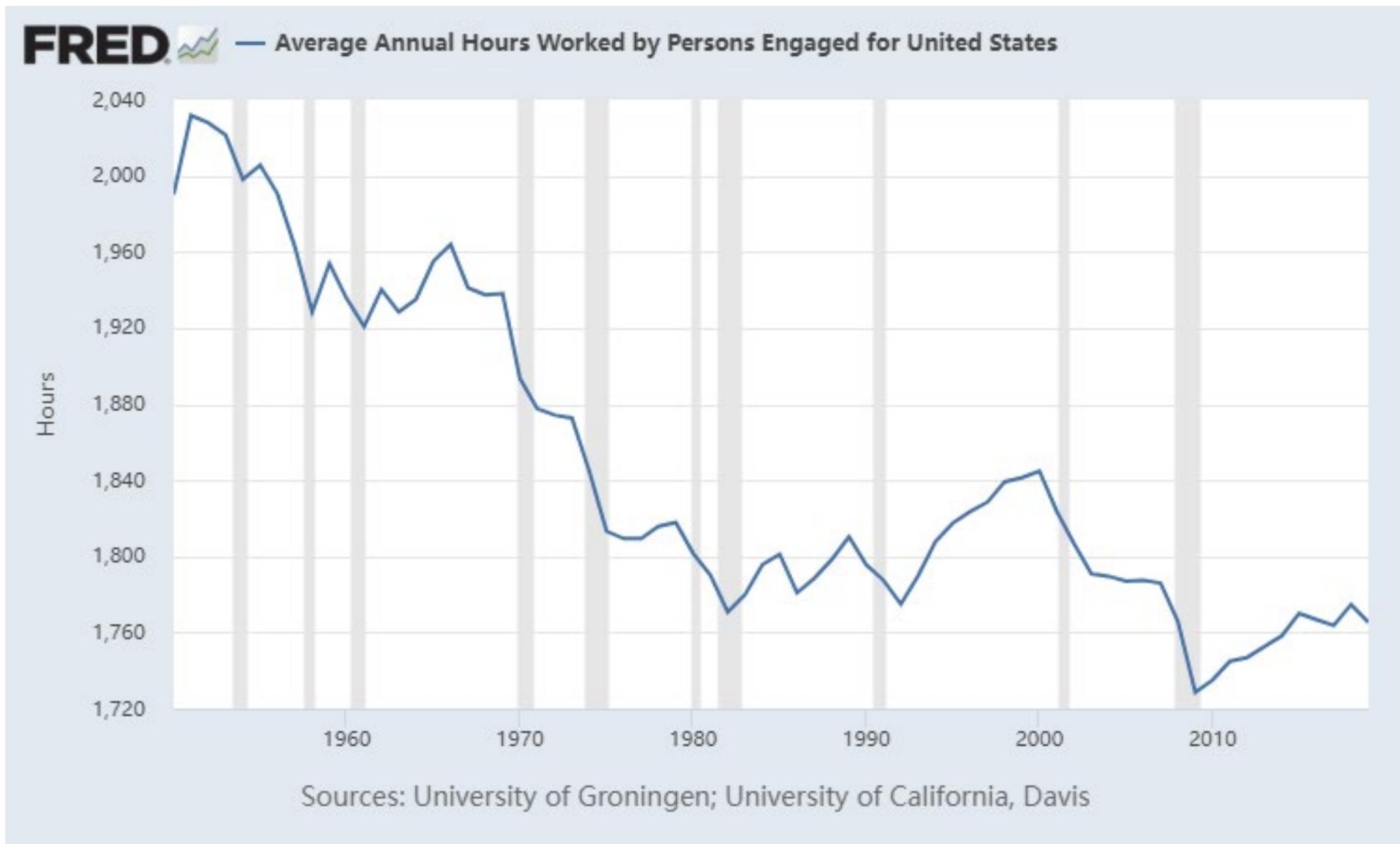
收入与替代效应-图形分析



收入与替代效应-数理分析

- 在刚才的例子中，我们算出 $l^* = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ ，此时均衡条件下的劳动时长和技术水平无关；替代效应和收入效应相互抵消了。
- 回到鲁滨逊的故事，这也意味着石斧带来的技术进步并没有让鲁滨逊工作得更少，只是让他吃得更多了（？？）
- **注意：**这是我们使用的效用函数 $u(c, l) = \ln(c) + \ln(1 - l)$ 产生的一个特例，在一般情况下不一定适用。

美国人均劳动时长



“如果还有明天”

- 很快，岛上的椰子全都被鲁滨逊吃完了，他必须寻找另外的方法生存。
- 鲁滨逊意识到，这是由于自己没有考虑“可持续发展”，只顾将今天的效用最大化，而没有为明天做准备。
(而且，在荒岛求生，居然还奢望拥有“闲暇时间”，这让他悔恨不已。)
- 这一天，鲁滨逊在荒岛上发现了几棵玉米，数了数一共有 K_0 粒。如果将玉米播种在地里，明天就可以收获 $y = A_t K_t^\alpha$ 颗玉米

【注：这种玉米长得非常快】

- 根据过往的教训，鲁滨逊调整了自己的效用函数：

$$U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta u(C_2), \quad 0 < \beta < 1$$

昨天，今天和明天

- β : discount factor (折现系数、折现因子)，在这里反映鲁宾逊的耐心程度
 - $\beta = 0$: 完全没有耐心，完全不考虑明天，今朝有酒今朝醉
 - $\beta = 1$: 把今天和明天的效用等同看待，只要今明两天的效用加总最大即可
- 梳理时间线
 - $t = 0$ (昨天) : 鲁宾逊发现了 K_0 颗种子，他小心翼翼地全部种下
 - $t = 1$ (今天) : 鲁宾逊收获了 $A_0 K_0^\alpha$ 颗玉米, 他吃掉了 C_1 颗, 种了 K_1 颗
 - $t = 2$ (明天) : 鲁宾逊收获了 $A_1 K_1^\alpha$ 颗玉米, 他吃掉了 C_2 颗, 种了 K_2 颗
 - $t = 3$ (后天?) : 鲁宾逊死了

【注：本模型假设鲁宾逊只活两期，而且知道自己只活两期】
- 问题：写出鲁宾逊两期的预算约束 (Budget Constraint)

预算约束

- 第一期:

$$A_0 K_0^\alpha = C_1 + \bar{K}_1$$

Output(y_1) Saving



- 第二期:

$$A_1 K_1^\alpha = C_2$$

Output(y_2)



$k_2 = \square$

- 跨期预算约束 (Intertemporal BC) :

$$C_2 = A_1 (y_1 - C_1)^\alpha$$

其中 $y_1 = A_0 K_0^\alpha$

鲁滨逊模型：两期的优化问题

- 鲁滨逊的优化问题可以写作

$$\begin{aligned} & \max_{C_1, C_2} u(C_1) + \beta u(C_2) \\ s.t. \quad & C_2 = A_1(y_1 - C_1)^\alpha \end{aligned}$$

- 写出拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(C_1, C_2, \lambda) = u(C_1) + \beta u(C_2) + \lambda(A_1(y_1 - C_1)^\alpha - C_2)$$

- 求一阶导数

$$\begin{aligned} [C_1]: \quad & u'(C_1) - \lambda \alpha A_1 (y_1 - C_1)^{\alpha-1} = 0 \\ [C_2]: \quad & \beta u'(C_2) - \lambda = 0 \end{aligned}$$

- 两个方程联立：

$$u'(C_1) = \beta u'(C_2) \alpha A_1 (y_1 - C_1)^{\alpha-1}$$

均衡：分析与讨论

$$u'(C_1) = \beta u'(C_2) \alpha A_1 (y_1 - C_1)^{\alpha-1}$$

- 假设鲁滨逊在 $t = 1$ 时决定多种一颗玉米
 - 左手边：他在 $t = 1$ 放弃的效用（少吃了一颗玉米）
 - 右手边：
 - $\alpha A_1 (y_1 - C_1)^{\alpha-1}$ ：种下这颗玉米在 $t = 2$ 的边际回报
 - $u'(C_2)$ ： $t = 2$ 时多收获一颗玉米带来的边际效用
 - $\beta u'(C_2) \alpha A_1 (y_1 - C_1)^{\alpha-1}$ ：在第一期的鲁滨逊看来，多种一颗玉米给自己带来的边际效用
- 也可以写成

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)} = f'(K_1)$$

均衡的图形分析

