

# 第五课（续）

# 内生增长理论

如何将储蓄率和技术进步内生化？

# 什么是内生变量？

- ▶ 内生增长理论就是将储蓄率和技术进步作为内生变量的增长理论，强调不依赖“外力”推动即可实现经济持续增长。
- ▶ 区分内生与外生变量：
  - ▶ 内生变量：在一个经济模型中，这些变量的数值由系统内的函数关系决定。
  - ▶ 外生变量：系统外条件决定的变量。
- ▶ 经济模型要尽可能揭示内在规律，从而有助于经济政策的合理制定。

# 什么是内生变量？

- ▶ 举例：下面模型中什么是内生变量？什么是外生变量？
  - ▶ 模型1：  $G(x, y, z) = 0, H(x, z) = 0, \forall x > 0$ 。
  - ▶ 模型2：  $Q = 2 - bP$  和  $Q = 1 + dP$  是需求和供给曲线。
  - ▶ 模型3： 马尔萨斯陷阱模型中的  $y$ 、 $n$ 、 $N$ 、 $b$ 、 $d$ 、 $L$ （土地）等变量。
  - ▶ 模型4： 索罗模型中的  $y$ 、 $k$ 、 $i$ 、 $n$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $A$  等变量。

- ▶ AK模型是一个具有代表性的内生经济增长模型。
- ▶ 这个模型想要解决的问题是：储蓄率是什么决定的？
  - ▶ 为什么有的国家储蓄率和投资率高（比如中国和日本），有的国家储蓄率和投资率却低（比如美国）？
  - ▶ 为什么有的国家储蓄率和投资率不断增高（或下降）？

- ▶ 储蓄和投资的本质是什么？
  - ▶ 当前消费和未来消费的权衡取舍。
- ▶ 如何做“跨期”的权衡取舍？
  - ▶ 消费：立刻获得当前消费的边际效用，但放弃了未来消费的边际效用。
  - ▶ 储蓄：损耗了耐心，但获得一笔利息作为补偿，获得未来消费的边际效用。
  - ▶ 需要一个消费和储蓄关系的欧拉方程。



# AK模型

66

任课教师：庄晨，北京大学经济学院  
课程：经济学原理(II)，24-25春季

▶ 欧拉方程：

▶ 当期消费的边际效用  $\times$  当期消费1元  $\leq$   
未来消费的边际效用  $\times$  未来消费  $(1 + R)$  元  
 $\times$  主观折现因子。

▶ 临界情况：不等式两边相等（最优）。

▶ 数学表达式：

▶  $u'(c_t) = u'(c_{t+1})(1 + R)\beta$ 。

▶  $R$ 是资本的社会净回报率：储蓄1元  $\rightarrow$  投资1元  $\rightarrow$  获得  $1 + R$  元回报。

▶ 主观折现因子：  $0 < \beta < 1$ 。



- ▶ 假设一个人能活 $T$ 期，那么终身效用的现值（在 $t = 0$ ）是多少呢？
  - ▶ “子子孙孙无穷匮也”：令 $T \rightarrow \infty$ 。
- ▶ 若各期效用可加，则有终身效用的数学表达式：
  - ▶  $U(c_0, c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t)$ 。
  - ▶ 可以令 $\beta = \rho = \frac{1}{1+r}$ （客观折现因子）， $r$ 是市场利率，后面分析使用这个假设。



## ▶ 生产函数：


▶  $Y_t = F(K_t, L_t) = AK_t。$

▶ 一次齐次函数： $F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda^1 F(K_t, L_t)。$

▶ 内生化的A：资本积累过程中产生了知识外溢或技术改进（研发、干中学），抵消边际资本产品递减，使得A > 0为恒定常数——具体过程不展开（内生化的一个尝试）。

## ▶ 人均产出：

▶ 由于函数满足CRS，两边同时除以 $L_t$ ，得到  
 $y_t = f(k_t, 1) = Ak_t。$

- ▶ 生产的目的是改善生活水平：
  - ▶ 考虑一个代表性个体的消费序列  $\{c_t\}_{t=0}^{\infty} = \{c_0, c_1, \dots, c_t, c_{t+1}, \dots\}$ 。
  - ▶ 最大化终身效用时受到什么约束？
- ▶ 资源约束条件：  $c_t + i_t \leq y_t$ （花的不能比赚得多）。
- ▶  $c_t + [k_{t+1} - (1 - \delta)k_t] \leq f(k_t)$ 。
- ▶  $c_t + k_{t+1} = (1 + A - \delta)k_t = (1 + R)k_t$ 。  
  
社会净回报率

## ▶ $A$ 是多少？

- ▶ 根据生产函数的形式，我们用宏观数据来估算其取值。
- ▶ 根据FRED，中国真实 $Y_{2019} \approx 20.6$ 万亿美元（按2017年价值计算），真实 $K_{2019} \approx 99.6$ 万亿美元，因此 $A = \frac{Y_{2019}}{K_{2019}} \approx \frac{20.6}{99.6} \approx 0.207$ 。
- ▶ 根据姚洋教授（2023），生产性资本存量是国内生产总值的3.6倍， $A \approx \frac{1}{3.6} \approx 0.278$ 。

## ▶ $R$ 是多少？

- ▶ 若 $\delta = 0.05$ ，则 $R$ 等于0.16-0.23。

▶ 定义社会累积储蓄  $s_t$  和累积储蓄率  $s$ ：

▶  $c_t + s_t = y_t + (1 - \delta)k_t = (A + 1 - \delta)k_t。$

▶  $s = \frac{s_t}{(1+R)k_t}, \quad 1 - s = \frac{c_t}{(1+R)k_t}$ （内生化）。

▶  $c_t = (1 - s)(1 + R)k_t。$

▶ 结合约束条件  $c_t + k_{t+1} = (1 + R)k_t$ ，不难推出：

$$k_{t+1} = s(1 + R)k_t。$$

▶ 注意，这里  $s \in (0,1)$  是一个有待确定的内生变量。

## 模型的解？

▶ 我们要考虑两个方面的解。一个是 $s$ ，另外一系列是 $\frac{y_{t+1}}{y_t}$ 、 $\frac{k_{t+1}}{k_t}$ 、 $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ 。

▶ 从前面的推导中不难发现 $\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = s(1 + R)$ ，这是一个关系式。

▶ 现在，还缺少一个关系式？

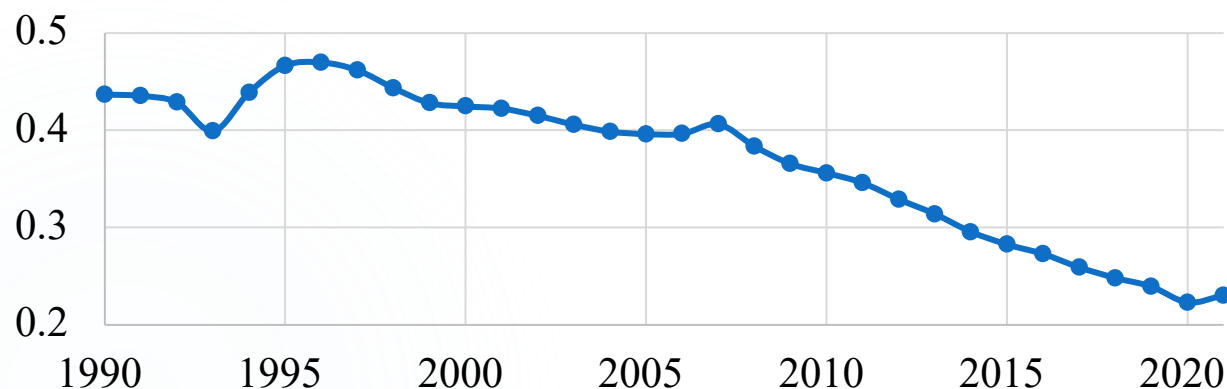
▶ 利用跨期权衡取舍的关系。



- ▶ 另一个关系式——欧拉方程。
  - ▶  $\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\rho(1 + R)]^\sigma$ （见讲义式4.26，需要对效用函数具体形式进行假定）。
  - ▶ 这里， $\sigma$ 代表**跨期替代弹性**，是边际效用对消费的弹性值的倒数。
  - ▶ 直觉：若 $c$ 增加1%导致MU减少比例较大，那么未来更多消费的吸引力降低。
  - ▶ 结合第二方面的解的形式，可以得到 $s(1 + R) = [\rho(1 + R)]^\sigma$ 。
  - ▶ 解出： $s = \rho^\sigma(1 + R)^{\sigma-1}$ （需要讨论有解的条件）。

- ▶ 直觉：社会净回报率  $R = A - \delta > r$  无风险利率，否则没有投资的激励。

估算中国的A



数据来源：国家统计局和教师计算。

- ▶ 过去15年我国的A下降，资本逐渐撤离，谁将接替中国成为新的“世界工厂”？



- ▶ 印度：2014年莫迪总理上任后大力推动“世界制造业枢纽”计划



- ▶ 2022年下半年，苹果开始谋划在印度建立新的工厂，打算未来将更多的iPhone产业链从中国转移至印度。
- ▶ 2023年3月消息：富士康将撤离中国内陆，斥资7亿美元赴“印度硅谷”建厂。



# 讨论AK模型的解

- ▶ 如果  $\sigma = 1$ ，则  $s = \rho < 1$ 。
  - ▶ 消费者对于现在和未来没有偏好差异。
- ▶ 如果  $\sigma < 1$ ，则  $s < \rho < 1$ 。
  - ▶ 如果  $R > r$ ，则  $\rho(1 + R) > 1$ ，进而  $[\rho(1 + R)]^{\sigma-1} < 1$ 。
- ▶ 如果  $\sigma > 1$ ，则  $s$  可能无解（超过1）。
  - ▶ 消费者相对于现在更偏好未来（即使没有额外的回报）。

## 模型的解总结：

- ▶ 如果 $\sigma \leq 1$ 且 $R > r$ ，则 $\rho(1 + R) > 1 > \rho^\sigma(1 + R)^{\sigma-1}$ ，从而

$$s = \rho^\sigma(1 + R)^{\sigma-1} < 1$$

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = [\rho(1 + R)]^\sigma > 1$$

- ▶ 人均增长率、社会储蓄率受 $R$ 、 $\sigma$ 、 $\rho$ 等因素的影响。
  - ▶ 经济增长可能是不收敛的。