概率统计 B
第一章 随机事件与概率

原著：陈家鼎、刘婉如、汪仁官
制作：李东风，邓明华

2025 年春季

本章目录

本节目录

随机事件与概率

- 随机事件：在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件。
- **例 1.1** 掷分币，结果“正面朝上”（记作 A）是随机事件。“正面朝下”（记作 B）也是随机事件。
- **例 1.2** 掷两枚分币。

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“两个都是正面朝上”} \\
B &= \text{“两个都是正面朝下”} \\
C &= \text{“一个正面朝上，一个正面朝下”}
\end{aligned}
$$

- **例 1.3** 10 件同类产品中有 8 个正品，2 个次品。任意抽取 3 个。

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“3 个都是正品”} \\
B &= \text{“3 个中至少一个是次品”} \\
\phi &= \text{“3 个都是次品”} \\
\Omega &= \text{“3 个中至少有一个是正品”}
\end{aligned}
$$

- A, B 是随机事件；
- ϕ 是“不可能事件”；
- Ω 是“必然事件”；
- 不可能事件和必然事件也看作是随机事件。

概率

- 事件是否发生无法预知，但是其可能性大小可以定量描述。
- 比如，投掷一枚均匀硬币，正面朝上和正面朝下可能性大小相同。
- 投掷两枚均匀硬币，同时为正面和同时为背面可能性大小相同；一个正面一个背面的可能性比都是正面的可能性大。
- 概率用来定量描述随机事件发生可能性大小。$P(A)$。
- 概率有“频率定义”、“主观定义”、“公理化定义”。

频数

- 投掷一枚分币。条件组 S。
- 条件组 S 大量重复实现时，事件 A 发生的次数，称为频数。约占总试验次数的一半。

$$A\ \text{发生的频率} = \frac{\text{频数}}{\text{试验次数}},\quad \text{接近于}\ \frac{1}{2}$$

- 长期经验积累所得的、所谓某事件发生的可能性大小，就是这个“频率的稳定值”。
- 见 P.3 的多次投掷表格。次数越多，频率越接近 0.5。

概率的频率定义

- **定义 1.1** 在不变的一组条件 S 下，重复做 n 次实验。记 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数。当试验的次数 n 很大时，如果频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度越变越小，则称 A 为随机事件，并称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率, 记作

$$P(A) = p$$

- 数值 p 的大小是 A 在 S 下发生的可能性大小的数量刻画。例如 0.5 是掷一枚分币出现“正面朝上”的可能性的数量刻画。

- 定义简述：频率具有稳定性的事件叫做随机事件，频率的稳定值叫做该随机事件的概率。
- 随机事件简称事件。实际中遇到的事件一般都是随机事件。
- 频率 μ/n 取值在 $[0,1]$ 范围。所以概率

$$0 \le P(A) \le 1.$$

- 对不可能事件 ϕ 和必然事件 Ω,

$$P(\phi) = 0, \;\; P(\Omega) = 1.$$

- 概率的频率定义是近似值。许多测量值都是近似值，所以不必因为只能求得近似值而怀疑真实概率的存在。

概率的主观定义

- 不能重复或不能大量重复的事件如何定义概率？
- **定义 1.2** 一个事件的概率是人们根据已有的知识和经验对该事件发生可能性所给出的个人信念，这种信念用 $[0,1]$ 中的一个数来表示，可能性大的对应较大的数。
- 称为概率的主观定义。
- 例：企业家对产品畅销可能性的预测；医生对某特定病人手术成功的预测。
- 主观概率是当事人对事件作了详细考察并充分利用个人已有的经验形成的“个人信念”，而不是没有根据的乱说一通。也需要谨慎对待。

本节目录

古典概型

- 某些概率问题可以根据问题本身所具有的“对称性”，充分利用人类长期积累的关于对称性的实际经验，分析事件的本质，就可以直接计算其概率。
- 这是用数学模型求解概率的方法。
- 例如，投掷一枚分币，认为“正面朝上”和“正面朝下”概率相等（对称性），各为 0.5。

例 2.1

- **例 2.1** 盒中 5 个球，3 白 2 黑。从中任取一个。问：取到白球的概率？
- 直观看为 3/5。
- 把 5 个球编号，1—3 号为白球，4—5 号为黑球。
- 取到每个球的概率相同（对称性）。事件互相排斥，概率各为 1/5。把 3 个白球的概率加起来即可。

例 2.2

- **例 2.2** 盒中 5 个球，3 白 2 黑。从中任取两个。问：两个都是白球的概率？
- 这时不能直观得出概率。
- 把 5 个球编号，1—3 号为白球，4—5 号为黑球。
- 可能结果为：

$$
\begin{array}{llll}
1+2 & 1+3 & 1+4 & 1+5 \\
2+3 & 2+4 & 2+5 & \\
3+4 & 3+5 & & \\
4+5 & & &
\end{array}
$$

- 共 10 个可能结果，且发生的机会相同，互斥，除此之外无其它可能。
- 每个结果的概率为 1/10，其中有 $1+2, 1+3, 2+3$ 共 3 个结果为全白球。所以全是白球的概率为 3/10。

等概完备事件组

- **定义 2.1** 称一个事件组 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为一个 等概完备事件组，如果它具有下列三条性质：
  (1) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 发生的机会相同（等可能性）；
  (2) 在任一次试验中，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 至少有一个发生（也就是所谓“除此之外，不可能有别的结果”）（完备性）；
  (3) 在任一次试验中，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 至多有一个发生（也就是所谓“它们是互相排斥的”）（互不相容性）。
- 等概完备事件组也称“等概基本事件组”，其中任一事件 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 称为基本事件。

- 例 1.1，投掷一枚分币，等概基本事件组 $n = 2$, 两个基本事件是“正面朝上”和“正面朝下”。
- 其它例子类似可求得等概基本事件组。
- 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是一个等概基本事件组，事件 B 由其中的 m 个基本事件所构成，则

$$P(B) = \frac{m}{n}. \tag{2.1}$$

- 古典概型就是用等概基本事件组和 (2.1) 来计算事件的概率的模型。

例 2.2（续）

- **例 2.2（续）** 从三个白球和二个黑球中任取两个，共有 $C_5^2 = 10$ 种不同取法，出现机会相同。
- 每种取法为一个基本事件，构成等概完备事件组。
- 其中两个都是白球的事件为 3 个，概率等于 $m/n = 3/10$。

例 2.3

- **例 2.3** 100 件产品，有 5 件次品。任取 50 件。求无次品的概率。
- **解** 共有 C_{100}^{50} 个结果构成等概基本事件组。
- 事件 B: 任取 50 件其中无次品，包括多少个基本事件？
- 必须从 95 个正品中取出 50 件。取法有 C_{95}^{50} 种。
-

$$
\begin{aligned}
P(B) =& C_{95}^{50}/C_{100}^{50} = \frac{95!/(50!45!)}{100!/(50!50!)} \\
=& \frac{50!/45!}{100!/95!} = \frac{50\cdot49\cdot48\cdot47\cdot46}{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96} \\
=& \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{47}{99}\frac{46}{97} = \frac{1081}{38412} \approx 2.8\%
\end{aligned}
$$

例 2.4

- **例 2.4** 同例 2.3。问：恰好有 2 件次品（记为事件 A）的概率？
- 在基本事件组中，符合条件的事件，必须是从 5 个次品中任取 2 个，从 95 个正品中任取 48 个。
- 共有 $C_5^2 C_{95}^{48}$ 种取法。
-

$$P(A) = \frac{C_5^2 C_{95}^{48}}{C_{100}^{50}} = \frac{\frac{5!}{2!3!} \frac{95!}{47!48!}}{\frac{100!}{50!50!}} = 0.32$$

例 2.5：无放回抽样

- **例 2.5** 设一批产品共 N 个，其中次品共 M 个。从中任取 n 个。问：恰好出现 m 个次品的概率？
- $0 \leq m \leq n$，$m \leq M$，$n - m \leq N - M$。
- 这是例 2.4 的一般化，所以

$$P(\text{恰好出现 } m \text{ 个次品}) = \frac{C_{N-M}^{n-m} C_M^m}{C_N^n} \tag{2.2}$$

- 记 $C_n^k = 0$，当 $k < 0$ 或 $k > n$ 时。

定理 2.1

- 例 2.5 的产品分为两类：次品和正品。考虑分为多类的情形。
- **定理 2.1** 设有 N 个东西分成 k 类，其中第 i 类有 N_i 个东西（$i=1,2,\ldots,k$），$N_1+N_2+\ldots N_k=N$, 从这 N 个东西中任取 n 个，而 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k$ $(0\le m_i\le N_i, i=1,2,\ldots,k)$, 则事件 $A=$ “恰有 m_1 个属于第 1 类, 恰有 m_2 个属于第 2 类，⋯⋯，恰有 m_k 个属于第 k 类”的概率为

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{m_1}C_{N_2}^{m_2}\ldots C_{N_k}^{m_k}}{C_N^n} \tag{2.3}$$

- 证明：板书。

本节目录

事件的包含与相等

- 如果事件 A 发生则事件 B 一定发生，就称事件 B 包含事件 A，记作

$$A \subset B \text{ 或} B \supset A.$$

- 如，投掷两枚硬币，A 表示“正好一个正面朝上”，B 表示“至少一个正面朝上”，则 $A \subset B$。
- 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作

$$A = B.$$

- 在概率的公理化定义中，事件等同于集合，事件的性质就是集合的性质。

事件的并与交

- **定义 3.1** 事件“A 或 B”称为事件 A 与事件 B 的并，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$；某次试验中 $A\cup B$ 发生，即“A 或 B”发生，意味着 A,B 中只要一个发生。
- 事件“A 且 B”称为事件 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB 或 $A\cdot B$；$A\cap B$ 发生，即“A 且 B”发生，意味着 A 和 B 都发生。
- 例：投掷两枚硬币。A 表示“正好一个正面朝上”，B 表示“正要两个正面朝上, C 表示“至少一个正面朝上”，则

$$A\cup B=C,\quad AC=A,\quad BC=B,$$
$$AB=\phi(\text{不可能事件})$$

对立事件

- **定义 3.2** 事件“非 A”称为 A 的对立事件，记作 $\bar{A}$。
- 例如，投掷两枚硬币，“至少一个正面朝上”是“两个都是正面朝下”的对立事件。
- 对立事件是相互的：

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

- 在一次试验中，A 和 $\bar{A}$ 互斥，且至少一个发生。即

$$\begin{aligned} A \cap \bar{A} &= \phi \\ A \cup \bar{A} &= \Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

事件的差

- **定义 3.3** 事件 A 同事件 B 的差表示 A 发生而 B 不发生的时间，记作 $A\backslash B$。
- $$A\backslash B = A \cap \bar{B} \tag{3.2}$$
- 事件及事件的运算用图形表示，见 P.12 图 1.1。

事件的运算规律

- 与集合运算规律相同。
- 并：

$$
\begin{aligned}
&(1) A \cup B = B \cup A \ (\text{”并”的交换律}) \\
&(2) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \ (\text{”并”的结合律}) \\
&(3) A \cup A = A \\
&(4) A \cup \bar{A} = \Omega \\
&(5) A \cup \Omega = \Omega \\
&(6) A \cup \phi = A
\end{aligned}
$$

- 交：

$$
\begin{aligned}
(7) & A \cap B = B \cap A \text{ (” 交” 的交换律)} \\
(8) & (AB)C = A(BC) \text{ (” 交” 的结合律)} \\
(9) & A \cap A = A \\
(10) & A \cap \bar{A} = \phi \\
(11) & A \cap \Omega = A \\
(12) & A \cap \phi = \phi
\end{aligned}
$$

- 分配律：

$$(13) A(B \cup C) = (AB) \cup (AC) \ (\text{分配律})$$
$$(14) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ (\text{分配律})$$

- 交或并的对立事件：

$$(15) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$(16) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

事件的互不相容性

- **定义 3.4** 如果事件 A 与事件 B 不能都发生，即

$$AB = \phi \text{ (不可能事件)}$$

  则称 A 与 B 是互不相容的事件。
- 例：两枚分币，“正好一个正面朝上”与“两个都是正面朝上”互不相容。
- A 与 $\bar{A}$ 互不相容。
- 多个事件互不相容是指两两互不相容。
- 等概完全事件组定义中“互相排斥”也是两两互不相容的意思。

概率的加法公式 (1)

- 如果事件 A, B 互不相容，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{3.3}$$

- 其合理性和必要性可以用概率的频率定义解释。
- 推论：

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

从而得

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}), \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{3.4}$$

- 这样，一个事件的概率难计算而其对立事件的概率容易计算时可用 (3.4) 计算。

- 概率的有限可加性：设 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{3.5}$$

- 可以从 (3.3) 归纳证明。

概率的加法公式 (2)

- 对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{3.6}$$

- **证明** 易见 $A \cup B = A \cup (B\bar{A})$, 且

$$A \cap (B\bar{A}) = AB\bar{A} = B(A\bar{A}) = B\phi = \phi$$

所以

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B\bar{A})) = P(A) + P(B\bar{A}) \tag{3.7}$$

又因

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (BA) \cup (B\bar{A})$$

且 BA 与 $B\bar{A}$ 互不相容，所以

$$P(B) = P(BA) + P(B\bar{A}), \quad P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$$

代入 (3.7) 即得 (3.6)。证毕。

例 3.1

- **例 3.1** 袋中有红、黄、白球各一个，每次任取一个，有放回地抽取三次。
- 求：抽到的三个球中没有红球或没有黄球的概率。
- 记 $G=$“三个球都不是红球，$H=$“三个球都不是黄球”。要求 $P(G\cup H)$。
- 注意 G 和 H 不是互不相容。
- $P(G)=\frac{8}{27}$（共有 27 种可能结果，其中没有红球的结果是 $2\times2\times2$ 个），$P(H)=\frac{8}{27}$。
- $P(GH)=P(\text{三个球都是白球})=\frac{1}{27}$(全是白球的结果只有一种)。
- $$P(G\cup H)=P(G)+P(H)-P(GH)=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}.$$

无穷个事件的并和交

- **定义 3.5** 设 $A_1, A_2, \ldots$ 是一系列事件，事件 B 表示: 它的发生当且仅当 $A_1, A_2, \ldots$ 中至少一个发生，B 称为 $A_1, A_2, \ldots$ 的并（或者和），记作 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$(或 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$)，或 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$。
- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示这样的事件：当且仅当所有 $A_1, A_2, \ldots$ 都同时发生时此事件才发生。
- **例 3.2** 一射手向某目标连续射击，$A_1 =${第一次射击，命中}，$A_k =${前 $k-1$ 次射击都未中，第 k 次射击命中}$(k = 2, 3, \ldots)$。$B =${终于命中}。则 $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。

概率的完全可加性

- 设 $A_1, A_2, \ldots$ 是一系列事件，如果 $A_1, A_2, \ldots$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{3.8}$$

- 由实践经验得出，不能证明。

本节目录

集合

- 事件是一种特殊集合，所以事件的运算就是集合的运算。
- **定义 4.1** 一个集合是指具有确切含义的若干个东西的全体。
- 集合 $A, B, C, \ldots$。元素 $a, b, c, \ldots$。
- $a \in A$。
- $a \notin A$。
- 空集 $\emptyset$。

集合的例子

- **例 4.1** 全体正整数的集合。
- **例 4.2** 不大于 10 的正整数的集合。
- **例 4.3** 二维坐标平面上圆心在圆点的半径为 1 的圆（称为单位圆）内点的集合。
- **例 4.5** 红、黄、白三个球有放回抽取三次的结果集合。共 $3^3 = 27$ 个结果。

集合的关系

- 集合相等：两个集合的元素完全相同。记作 $A = B$。
- 集合包含关系 $A \subset B$: A 的元素都是 B 的元素。也记为 $B \supset A$。
- $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且$B \subset A$。

集合的运算

- 并集$A\cup B$: 属于 A 或者属于 B 的元素的全体组成的集合。
- 交集$A\cap B$: 既属于 A 也属于 B 的元素的全体组成的集合。
- 只讨论某个非空集合 Ω 的自己的关系，Ω 称为全集。
- 余集:

$$A^c = \{x : x \in \Omega \text{但} x \notin A\}$$

- $(A^c)^c = A$.
- 集合运算可以用平面图形图示。

集合并的运算规则

1. $A \cup B = B \cup A$ (交换律)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (结合律)
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup A^c = \Omega$
5. $A \cup \Omega = \Omega$
6. $A \cup \emptyset = A$

集合交的运算规则

1. $A \cap B = B \cap A$ 交换律
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 结合律
3. $A \cap A = A$
4. $A \cap A^c = \emptyset$
5. $A \cap \Omega = A$
6. $A \cap \emptyset = \emptyset$

并与交的分配律

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

并、交、余的对偶律

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

事件与集合的关系

- 事件是特殊的集合。事件的运算与集合的运算相同。
- 条件组 S 下的所有可能不同结果的集合记作 Ω，S 下的随机事件就是 Ω 的子集。
- Ω 是必然事件，$\emptyset$ 是不可能事件。
- $A^c = \Omega \backslash A$ 为 A 的对立事件 $\bar{A}$。
- A, B 互不相容即 $A \cap B = \emptyset$。

例 4.6

- **例 4.6** 投掷两枚分币 (条件 S)，所有可能结果为

$$\omega_1 = \text{“上，下”} \quad \omega_2 = \text{“上，上”}$$
$$\omega_3 = \text{“下，上”} \quad \omega_4 = \text{“下，下”}$$

- 全集 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$。
- 事件 B 为“恰有一个正面朝上”，则

$$B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

- 事件 C 为“至少有一个正面朝上”，则

$$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

- 事件 A 为“两个正面都朝上”，则 $A = \{\omega_2\}$。
- $C = B \cup A$

概率的公理化定义介绍

- 概率的频率解释直观，但数学严密性不足。
- 概率的主观定义则不易被接受，数学严密性不足。
- 用集合论、测度论可以严格定义概率，对需要作公理化假设。
- 为柯尔莫戈罗夫 (Kolmogorov A. N., 1903-1987) 于 1933 年建立。

概率的公理化定义介绍

- 设 Ω 为一个非空集合，叫做基本事件空间。
- Ω 的一些子集组成的集合 $\mathcal{F}$ 叫做σ 代数，如果

$$
\begin{aligned}
&(1)\Omega \in \mathscr{F} \\
&(2)\text{若} A \in \mathscr{F}, \text{则} A^c = \Omega - A \in \mathscr{F} \\
&(3)\text{若} A_n \in \mathscr{F}(n = 1, 2, \ldots), \text{则} \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}
\end{aligned}
$$

- 事件是 $\mathscr{F}$ 中的集合。

- $\mathscr{F}$ 上有定义的函数 $P=P(\cdot)$ 叫做概率测度(简称概率), 若

$$(1) P(A) \geq 0 (\forall A \in \mathscr{F}) \tag{4.17}$$

$$(2) P(\Omega) = 1 \tag{4.18}$$

(3)若 $A_n \in \mathscr{F} (n=1,2,\dots)$, 且两两不相交, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{ (完全可加性)} \tag{4.19}$$

σ 代数的性质

- 附有 $\mathscr{F}, P$ 的 Ω 叫做概率空间。
- σ 代数是可以合理定义概率的事件的全体，有些情况下不是所有 Ω 的子集都可以合理定义概率。
- 若 Ω 为有限集或可数集则 $\mathscr{F}$ 通常取为 Ω 的所有子集的集合。
- $\mathscr{F}$ 关于基本集合运算封闭：有穷个或无穷个集合的并、交，两个集合的差。

概率的性质

1 $P(\emptyset) = 0$

2 若 $A \in \mathscr{F}$ 则 $P(A^c) = 1 - P(A)$

3 若 $A_1, \ldots, A_n$ 都属于 $\mathscr{F}$ 且两两不相交，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \text{ (有限可加性)} \tag{4.20}$$

4 若 $A \subset B$, $A, B \in \mathscr{F}$, 则 $P(A) \leq P(B)$ 且

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$$

5 若 $A_n \subset A_{n+1}, A_n \in \mathscr{F}(n=1,2,\dots)$，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \text{ (单调上升事件的概率极限)}$$

6 若 $A_n \supset A_{n+1}, A_n \in \mathscr{F}(n=1,2,\dots)$，则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \text{ (单调下降事件的概率极限)}$$

本节目录

条件概率

- 条件概率在条件 S 的基础上附加了条件，讨论则附加条件之后的概率。
- **例 5.1** 16 个球，6 个玻璃球，10 个木球。玻璃球中有 2 个红色，4 个蓝色；木球中有 3 个红色，7 个蓝色。从 16 个球中任取一个。
-

	玻璃	木质	
红	2	3	5
蓝	4	7	11
	6	10	16

- 记 $A =$ “取到蓝球”，$B =$ “取到玻璃球”。$P(A) = \frac{11}{16}$，$P(B) = \frac{6}{16}$。
- 问：如果已知取到的是蓝球，则该球是玻璃球的概率？即事件 A 已经发生前提下事件 B 发生的概率，记作 $P(B|A)$。

- 可以用古典概型计算。蓝球共有 11 个，其中 4 个是玻璃球。

$$P(B|A) = \frac{4}{11}$$

- **定义 5.1** 如果 A, B 是条件组 S 下的两个随机事件，$P(A) \neq 0$，则称在 A 发生的前提下 B 发生的概率为条件概率, 记作 $P(B|A)$。
- 注意这不是严格数学定义。

例 5.2

- **例 5.2**　5 个乒乓球，3 新 2 旧。每次取一个，无放回取两次。
- A= “第一次取到新球”；B = “第二次取到新球”。
- 求 $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$。
- $P(A) = \frac{3}{5}$。
- $P(B)$ 用古典概型，可以把 5 个球编号，则两次抽取所有可能结果有 $5 \times 4 = 20$ 种，其中第二次抽取到新球的结果数为 $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$ 种，$P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$，即抽签是公平的。
- 若 A 已经发生，则还剩 2 新 2 旧，于是第二次取到新球的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, 即 $P(B|A) = \frac{1}{2}$。

乘法公式

- 条件概率的等价定义为（多数教材这样定义条件概率）

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{5.1}$$

- (5.1) 改写为

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \tag{5.1'}$$

称为概率的乘法公式。

- (5.1) 用来在已知 $P(A)$ 和 $P(AB)$ 时求条件概率；
- (5.1') 用来在已知 $P(A)$ 和 $P(B|A)$ 时求 $P(AB)$。

- 在古典概型下由定义 5.1 可以证明 (5.1)。
- 设条件组 S 下一个等概完备事件组有 n 个基本事件，A 由其中 m 个组成，B 由其中 l 个组成，AB 由 k 个组成。
- 则

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{\text{在 } A \text{ 发生的前提下 } B \text{ 中包含的基本事件数}}{\text{在 } A \text{ 发生的前提下的基本事件总数}} \\
&= \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}
\end{aligned}
$$

独立性

- **例 5.3** 5 个乒乓球，3 新 2 旧，每次取 1 个，有放回取 2 次。
- $A =$ “第一次取到新球”
- $B =$ “第二次取到新球”
- 显然 $P(B|A) = P(B)$，与 A 是否发生无关。
- 这时

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

- **定义 5.2** 称两个随机事件 A, B 是相互独立的, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- 定义中不要求 $P(A) > 0$ 或 $P(B) > 0$。

独立性的直观解释

- 事件 A 是否发生不影响事件 B 的发生概率，事件 B 是否发生也不影响事件 A 的发生概率。
- 在 $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ 时，独立等价于

$$P(A|B) = P(A)$$

也等价于

$$P(B|A) = P(B)$$

- 即条件概率等于无条件概率为独立。

例 5.4

- **例 5.4** 甲、乙同时向一敌机炮击。
- 甲击中概率 0.6；乙击中概率 0.5。
- 求被击中的概率。
- **解：** 记 $A=$ “甲击中”，$B==$ “乙击中”；$C=$ “敌机被击中”。
- $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。
- 可以认为 A,B 独立。

$$\begin{aligned} P(AB) =& P(A)\times P(B)=0.6\times 0.5=0.3 \\ P(C) =& 0.6+0.5-0.3=0.8 \end{aligned}$$

- 另解：

$$
\begin{aligned}
P(C) =& 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) \\
=& 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \\
=& 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.5) = 0.8
\end{aligned}
$$

- 把并的概率用交的概率来求解是常用的手法。
- 另解用到了：A, B 独立则 $\bar{A}, \bar{B}$ 也独立。

对立事件与独立

- **定理 5.1** 若四对时间 $A, B,\ A, \bar{B},\ \bar{A}, B,\ \bar{A}, \bar{B}$ 中有一对独立，则另外三对也独立。
- 即这四对事件或者都独立，或者都不独立。
- **证明** 仅证明 A, B 独立 $\Longrightarrow A, \bar{B}$ 独立。

$$\begin{aligned} P(A) =& P(A\Omega) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) \\ =& P((AB) \cup (A\bar{B})) = P(AB) + P(A\bar{B}) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) =& P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ =& P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

多个事件相互独立

- **定义 5.3** 称 A, B, C 是相互独立的，如果有

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned} \tag{5.3}$$

- **定义 5.4** 称 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是相互独立的，如果对任意整数 $k (2 \le k \le n)$ 以及从 $1, 2, \ldots, n$ 中任意取出的 k 个 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 都满足

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}) \tag{5.4}$$

- 其中一个要求是

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2) \ldots P(A_n)$$

例 5.5

- **例 5.5** 某型号高射炮单发击中飞机概率为 0.6。若干门发射单发，欲以 99% 概率击中敌机。求高炮门数。
- **解：** 设需要 n 门，A_i 为“第 i 门高炮击中敌机”。
- $A=$“敌机被击中”。$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$。

$$
\begin{aligned}
P(A) =& P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n) \\
=& 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n) \text{ (独立性)} \\
=& 1 - (1-0.6)^n \geq 0.99 \\
n \geq & \frac{\log 0.01}{\log 0.4} = 5.026
\end{aligned}
$$

- 需要 6 门高射炮。

例 5.6

- **例 5.6** 三个事件两两独立不能保证三个事件独立的例子。
- 均匀正四面体，四面涂红色、黄色、蓝色、红黄蓝混杂。
- 投掷一次，考察底面出现的颜色。
- $A=$“红色出现”，$B=$“黄色出现”，$C=$“蓝色出现”。
- 基本事件：$A_i=$“第 i 面在底面”，$i=1,2,3,4$, 构成等概基本事件组。
- $A=A_1\cup A_4$, $B=A_2\cup A_4$, $C=A_3\cup A_4$。
- $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$。
- $AB=AC=BC=A_4$，$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$, 按定义 A,B 相互独立，A,C 相互独立，B,C 相互独立。
- 但 $ABC=A_4$, $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$。

本节目录

例 6.1

- **例 6.1** 5 个乒乓球，3 新 2 旧。每次取一个，无放回取两次。求第二次取到新球的概率。
-

$$
\begin{aligned}
A =& \text{“第一次取到新球”} \\
B =& \text{“第二次取到新球”} \\
B =& BA \cup B\bar{A} \\
P(B) =& P(BA) + P(B\bar{A}) \\
=& P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
=& \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

- (6.1) 将复杂的事件（情况）分解为简单的事件（情况）。

全概公式

- **定理 6.1（全概公式）** 如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足：
- (1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容，且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$。
- (2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$(完备性)，
- 则对任一事件 B 皆有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i). \tag{6.2}$$

- **证明** $B = B\Omega = BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n$,

$$\begin{aligned} P(B) =& P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n) \\ =& P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n). \end{aligned}$$

- 满足条件（1）和（2）的事件组 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 称为完备事件组。比等概完备事件组少了等概条件。
- 更一般的全概公式中的完备事件组可以包含可数个事件。
- 运用全概公式关键在于求完备事件组。

例 6.2

- **例 6.2** 甲、乙、丙三人射击敌机。击中概率:

$$
\begin{aligned}
\text{甲}: & \ 0.4 \\
\text{乙}: & \ 0.5 \\
\text{丙}: & \ 0.7
\end{aligned}
$$

- 若只有一人击中，飞机坠毁概率 0.2；若恰好二人击中，坠毁概率 0.6；三人全中，坠毁概率 1。
- 求飞机坠毁概率。
- **解** $B=$“飞机坠毁”，$A_0=$“三人都不中”；$A_1=$“恰好一人击中”；$A_2=$“恰好二人击中”；$A_3=$“三人都击中”。
- A_0, A_1, A_2, A_3 构成完备事件组。
- 已知 $P(B|A_0)=0$, $P(B|A_1)=0.2$, $P(B|A_2)=0.6$, $P(B|A_3)=1$。

-

$$\begin{aligned} P(A_0) =&P(\text{甲不中})P(\text{乙不中})P(\text{丙不中}) \\ =&(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.09 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} P(A_1) =&P(\text{甲中})P(\text{乙不中})P(\text{丙不中}) \\ &+P(\text{甲不中})P(\text{乙中})P(\text{丙不中}) \\ &+P(\text{甲不中})P(\text{乙不中})P(\text{丙中}) \\ =&0.4\times(1-0.5)\times(1-0.7) \\ &+(1-0.4)\times 0.5\times(1-0.7) \\ &+(1-0.4)\times(1-0.5)\times 0.7 \\ =&0.36 \end{aligned}$$

-

$$
\begin{aligned}
P(A_2) =& P(\text{甲不中})P(\text{乙中})P(\text{丙中}) \\
&+ P(\text{甲中})P(\text{乙不中})P(\text{丙中}) \\
&+ P(\text{甲中})P(\text{乙中})P(\text{丙不中}) \\
=&(1-0.4)\times 0.5\times 0.7 \\
&+ 0.4\times(1-0.5)\times 0.7 \\
&+ 0.4\times 0.5\times(1-0.7) \\
=&0.41
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
P(A_3) =& P(\text{甲中})P(\text{乙中})P(\text{丙中}) \\
=&0.4\times 0.5\times 0.7 = 0.14
\end{aligned}
$$

- $$\begin{aligned}&P(\text{敌机坠毁})=P(B)\\=&\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)\\=&0.09\times 0+0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 1\\=&0.458\end{aligned}$$

例 6.3（赌徒输光问题）

- **例 6.3** 设甲有赌本 M 元，乙有赌本 N 元（M, N 是正整数）。
- 每一局输赢为 1 元，没有和局。
- 每局甲胜概率为 $p(0 < p < 1)$。
- 问：甲输光的概率。
- **解** 记 $L = M + N$, $L \geq 2$。当 $L = 2$ 时 $M = N = 1$, 甲输光概率为 $1 - p$ (若第一局甲赢，则乙输光，赌局不能继续)。
- 只考虑 $L \geq 3$ 的情形。
- 问题扩充为：若甲乙共有赌本 L 元，甲有赌本 i 元，乙有赌本 $L - i$ 元，则甲输光的概率 p_i 是多少？（原问题求 p_M）

- 记 $A_i =$ “甲有赌本 i 元而最后输光”（$i = 1, 2, \ldots, L-1$），$B =$ “甲赢了第一局”。
- 记 $q = 1 - p$。
- 当 $2 \le i \le L-2$ 时，得递推公式

$$\begin{aligned} p_i =& P(B)P(A_i|B) + P(\bar{B})P(A_i|\bar{B}) \\ =& pp_{i+1} + qp_{i-1} \end{aligned} \tag{6.3}$$

-

$$\begin{aligned} p_1 =& pp_2 + q \\ p_{L-1} =& p \times 0 + qp_{L-2} \end{aligned}$$

- 记 $p_0 = 1$, $p_L = 0$, 则 (6.3) 对 $1 \le i \le L-1$ 成立。

- 由（6.3）

$$
\begin{aligned}
p_i =& p p_i + q p_i = p p_{i+1} + q p_{i-1} \\
p(p_{i+1} - p_i) =& q(p_i - p_{i-1}) \\
(p_{i+1} - p_i) =& \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}) = \dots\dots \\
=& \left(\frac{q}{p}\right)^i (p_1 - 1) \\
=& r^i(p_1 - 1), \quad (i = 1, 2, \dots, L-1, \text{ 记} r = \frac{q}{p}) \\
p_{i+1} - p_1 =& \sum_{k=1}^{i} (p_{k+1} - p_k) \\
=& \sum_{k=1}^{i} r^k (p_1 - 1) \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

- $$p_{i+1} - p_1 = \begin{cases} \dfrac{r - r^{i+1}}{1-r}(p_1 - 1) & p \neq \frac{1}{2} \\ i(p_1 - 1) & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- $i = L - 1$ 时 $p_{i+1} = p_L = 0$,

$$p_1 = \begin{cases} \dfrac{r - r^{L}}{1-r}(1 - p_1) & p \neq \frac{1}{2} \\ i(1 - p_1) & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{r - r^{L}}{1-r^L} & p \neq \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{L} & p = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.5}$$

- 由（6.4），$p \neq \frac{1}{2}$ 时

$$
\begin{aligned}
p_i =& p_1 + \frac{r - r^i}{1 - r}(p_1 - 1) \\
=& \frac{r^i - r^L}{1 - r^L} \quad (2 \leq i \leq L - 1)
\end{aligned}
$$

- $p = \frac{1}{2}$ 时

$$
\begin{aligned}
p_i =& p_1 + (i - 1)(p_1 - 1) \\
=& 1 - \frac{1}{L} + (i - 1)\left(-\frac{1}{L}\right) \\
=& 1 - \frac{i}{L} \quad (2 \leq i \leq L - 1)
\end{aligned}
$$

- 甲输光的概率

$$p_M = \begin{cases} \frac{r^M - r^{M+N}}{1-r^{M+N}} & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{N}{M+N} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 关键是根据第一局的输赢结果建立方程（6.3）。叫做“首步（首局）分析法”。

例 6.4（敏感问题的调查）

- **例 6.4** 在问卷调查时，某些敏感问题会遭到拒绝回答或谎报。
- 比如，要问卷调查运动员是否曾服用兴奋剂，直接问很难得到肯定回答。
- 设计如下两个问题：
- 问题 A：你的生日是否在 7 月 1 日之前（不含 7 月 1 日)?
- 问题 B：你是否服用过兴奋剂?
- 被调查者只需要回答其中一个问题，只需在只有“是”、“否”的答卷上选择其一。而回答哪一个是根据被调查者在其他人不能知道的情况下随机抽取一个颜色决定的。
- 若抽出白球，则回答问题 A；若抽出红球，则回答问题 B。红球比例 π 已知。

- 样本量较大（如 200 个受调查者）就可以统计, 估计服用兴奋剂比例 p。
- 设 n 张答卷，k 张答“是”，答“是”的比例 $\varphi = k/n$。
- 全概公式：

$$
\begin{aligned}
P(\text{回答“是”}) =& P(\text{抽到白球})P(\text{生日在 7 月 1 日前}|\text{抽到白球}) \\
& + P(\text{抽到红球})P(\text{服用过兴奋剂}|\text{抽到红球}) \\
=& 0.5(1-\pi) + p\pi \\
\approx& \frac{k}{n}
\end{aligned}
$$

$$
p \approx \frac{\frac{k}{n} - \frac{1-\pi}{2}}{\pi}
$$

- 例如，50 个球中有 30 个红球，$\pi = 0.6$。
- 某国 15 个项目 $n = 246$ 个运动员接受调查, 答“是”者 $k = 54$。
-

$$p \approx 0.0325$$

- 即约 3.25% 服用兴奋剂。
- 思考：比例 π 的选取有何影响？

例 6.5（发报与接收）

- **例 6.5（发报与接收）** 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 "•" 和 "–"。
- 信号可能误码。正确接收与错误接收的概率如下表：

		接收	
		•	–
发出	•	0.8	0.2
	–	0.1	0.9

- 求当收到信号 "•"，发报台真的发出 "•" 的概率。

- 记 $A=$“发出信号‘•’”，$B=$“收到信号‘•’”。要求 $P(A|B)$。
-

$$
\begin{aligned}
P(A|B) =& \frac{P(AB)}{P(B)} \\
P(AB) =& P(A)P(B|A) = 0.6\times 0.8 \\
P(B) =& P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
P(\bar{A}) =& 0.4 \\
P(B|\bar{A}) =& 0.1 \\
P(A|B) =& \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\
=& \frac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8 + 0.4\times 0.1} = 0.923
\end{aligned}
$$

逆概公式

- 逆概公式是全概公式的引申。
- 若有多个基本情况（事件）是完备事件组，则观测到一个结果后，可以逆推原来到底是哪一个情况。
- 如：接收到 “•” 后，可以知道原来发出的是 “•” 的概率为 0.923，即基本可以判断原来是发出的 “•”。
- **定理 6.2（逆概公式）** 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为一完备事件组，则对任一事件 $B(P(B) \neq 0)$ 有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{6.6}$$

- **证明** 联合条件概率定义及全概公式。
- 逆概公式也称为贝叶斯（Bayes）公式。

例 6.6（艾滋病检测）

- **例 6.6（艾滋病检测）** 美国的艾滋病人比例保守估计 1000 分之一。
- 是否应该对新婚夫妇进行艾滋病毒血液检测？
- 血液检测方法各种结果及概率

		检验结果	
		报告阳性	报告阴性
实际	AIDS	真阳性 (0.95)	假阴性 (0.05)
情况	非 AIDS	假阳性 (0.01)	真阴性 (0.99)

- 如果报告阳性，则真正患病概率是多少？
- $A =$ “受试者带有艾滋病毒”，$T =$ “检测结果呈阳性”。
- 求 $P(A|T)$。

- $P(A)=0.001,\ P(T|A)=0.95,\ P(T|\bar{A})=0.01$。
- 由逆概公式

$$
\begin{aligned}
P(A|T) =& \frac{P(A)P(T|A)}{P(A)P(T|A)+P(\bar{A})P(T|\bar{A})} \\
=& \frac{0.001\times 0.95}{0.001\times 0.95+0.999\times 0.01}=0.087
\end{aligned}
$$

- 即使检验报告阳性，真的患病的概率也只有 8.7%，所以全面的检验不太必要。
- 原因是 $P(A)$ 太小了。

$$
\begin{aligned}
P(A|T) =& \frac{0.95P(A)}{0.95P(A)+0.01(1-P(A))} \\
=& \frac{0.95}{0.94+0.01\frac{1}{P(A)}}
\end{aligned}
$$

是 $P(A)$ 的严格增函数。

本节目录

独立试验序列概型：例 7.1

- **例 7.1** 独立重复掷 5 次分币。
- 求：恰有两次正面朝上的概率。
- **解** 古典概型。共有 $2^5 = 32$ 个等概基本事件。
- 其中恰有两次正面朝上的个数为 $C_5^2 = 10$。
- $p = \frac{10}{32}$。

$$p = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \tag{7.1}$$

- （7.1）中，C_5^2 是事件对应的等概基本事件个数，每个基本事件的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$。(7.1) 可以用加法公式说明。

- 若分币不均匀，每一次“正面朝上”概率为 $\frac{2}{3}$, 则

$$P(\text{恰有两次正面朝上}) = C_5^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

- 这已经不是古典概型，因为基本事件不等概。

例 7.2

- **例 7.2** 某人打靶，命中率为 0.7，独立重复射击 5 次。
- 求恰好命中 2 次的概率。
- 记 $p = 0.7, q = 1 - p = 0.3$。
- $P(\text{恰好命中 2 次}) = C_5^2 p^2 q^3$。
- $P(\text{恰好命中 3 次}) = C_5^3 p^3 q^2$。
- $P(\text{恰好命中 4 次}) = C_5^4 p^4 q^1$。
- $P(\text{恰好命中 5 次}) = C_5^5 p^5 q^0$。
- $P(\text{恰好命中 1 次}) = C_5^1 p^1 q^4$。
- $P(\text{恰好命中 0 次}) = C_5^0 p^0 q^5$。

独立试验序列概型

- **定理（独立试验序列概型）** 设单次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 则在 n 次重复试验中，

$$P(A\text{发生 } k \text{ 次}) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1-p)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

- **证明** 在 n 次重复试验中，记 $B_1, B_2, \ldots, B_m$ 为构成事件"A 发生 k 次"的那些试验结果。
- （1）"A 发生 k 次" $= B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$, 互不相容；
- （2）$P(B_1) = P(B_2) = \cdots = P(B_m) = p^k q^{n-k}$;
- （3）$m = C_n^k$（从 n 次试验中选取 k 个成功试验的方法数）。
- 于是用加法公式（1）证明定理结论。

- **注意** “重复”蕴含两重含义：
- （1）每次试验的条件相同，从而事件 A 发生的概率（称为成功概率）不变；
- （2）各次试验的结果独立。
- 当然，这只是理想化假设，实际情况只要比较近似满足就可以了。
- **反例：** 已知 80 个产品中有 5 个次品，从中每次任取一个，无放回地取 20 次，求其中有 2 个次品的概率。
- 这个例子：（1）每次抽取的试验条件不同，不能直接认为每次的成功概率（这里是“取到次品”的事件概率）不变；
- （2）前后的抽取结果不是独立的。如果前 5 次抽取到的都是次品，则从第 6 次起只能抽取到正品。
- 所以不适用独立试验序列概型。
- 产品批量特别大时，“无放回”抽取与“有放回”抽取结果相似，可以用独立试验序列概型近似计算无放回抽样的概率。

例 7.3

- **例 7.3** 设每次射击打中目标的概率等于 0.001。如果射击 5000 次，求至少两次打中目标的概率。
- $p = 0.001, q = 0.999$。

$$P(\text{至少两次打中目标}) = \sum_{k=2}^{5000} P(\text{恰有 } k \text{ 次打中目标})$$
$$=1 - P(\text{都不中}) - p(\text{仅中一次})$$
$$=1 - q^{5000} - 5000 \times pq^{4999} \approx 1 - 0.006721 - 0.03364$$
$$\approx 0.9596$$

成功 k 次概率近似公式一

- 当 n 很大同时 p 很小的时候，有近似公式

$$P(A \text{ 发生 } k \text{ 次}) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \tag{7.2}$$

称为泊松分布近似，见 §2.2(P55)。

- 如，

$$\begin{aligned} P(\text{都不中}) \approx & e^{-5000\times 0.001} \approx 0.006738 \\ P(\text{仅中一次}) \approx & \frac{5000 \times 0.001}{1!} e^{-5000\times 0.001} \approx 0.03369 \\ P(\text{至少两次打中}) \approx & 1 - 0.006738 - 0.03369 \approx 0.9596 \end{aligned}$$

成功 k 次概率近似公式二

- 当 n 很大但 p 不是很小时，有第二近似公式

$$
\begin{aligned}
P(A\text{ 发生 }k\text{ 次}) \approx & \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2} \\
x_k = & \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}
\end{aligned}
$$

- 参见 §4.6(P153) 的中心极限定理。

例 7.4

- **例 7.4** 设每次射击打中目标概率为 $\frac{1}{6}$。如果射击 6000 次，问：击中次数在 900 到 1100 之间的概率？
- 需要使用 §4.6 的中心极限定理。记 $n = 6000$, $p = \frac{1}{6}$,

$$
\begin{aligned}
&P(\text{击中次数在 900 到 1100 之间}) \\
=&P(900 - 0.5 < X < 1100 + 0.5) \\
=&P\left(\frac{900 - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{1100 + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
=&\Phi\left(\frac{1100 + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{900 - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
\approx&0.99950
\end{aligned}
$$

例 7.5（自由随机游动）

- **例 7.5（自由随机游动）** 设一质点在数轴上运动，在时刻 0 从原点出发。
- 每隔单位时间位置向右或向左移动一个单位，向右移动概率 $p(0 < p < 1)$, 向左移动概率 $q = 1 - p$。
- 问：质点在时刻 n 位于 K 的概率？（n 是正整数，K 是整数）
- 只考虑 K 为正整数情况，负整数和零的情况类似。
- 为了质点在时刻 n 位于 K, 必须且只需在前 n 步移动中向右移动的次数比向左移动的次数多 K。

- 设 x 表示向右移动的次数，y 表示向左移动的次数，则

$$x + y = n, \quad x - y = K$$

- $x = \frac{n+K}{2}$。
- 因 x, n, K 都是整数所以 n 与 K 有相同的奇偶性。当 n 与 K 奇偶性相反时概率为 0。
- $$\begin{aligned} & P(\text{质点在时刻 } n \text{ 位于 } K) \\ =& P\left(\text{质点在头 } n \text{ 次游动时有 } \frac{n+K}{2} \text{ 次向右，有 } \frac{n-K}{2} \text{ 次向左}\right) \\ =& C_n^{\frac{n+K}{2}} p^{\frac{n+K}{2}} q^{\frac{n-K}{2}} \end{aligned}$$

- 易见 $K \leq 0$ 时也成立。