# 宏观经济学

**李伦**
北京大学经济学院
2025/4/24

# 税收、财政与社会保险

# 税收的作用

- 在之前的模型框架中，经济体在竞争均衡中可以自发达到最优，与社会计划者的安排一致

- 在这样的框架下，税收只会带来无效的波动，使得均衡偏离其应有的水平

- 今天：使用OLG模型分析一个竞争均衡无法达到最优的例子

# 模型设定

- 无限期模型

- 每个代理行为人生存两期，效用函数为：

$$U(c_t^y, c_{t+1}^o) = u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

- $c_t^y$：年轻时的消费
- $c_{t+1}^o$：年老时的消费

# 人口结构

- 用 $N_t$ 表示在 $t$ 期出生的人口：

$$N_t = (1+n)N_{t-1}$$

- 第0期的老代理人的人口假设为 1，效用假设为

$$U(C_0^o) = u(c_0^o)$$

# 生产函数

- 代理人在年轻时可以提供 1 单位的劳动力，在年老时不提供劳动力。
- 可以在年轻时存款 $s_t$，在年老时收获$s_t R_{t+1} = s_t(1 + r_{t+1})$
- 代理公司的生产函数为

$$Y_t = F(K_t, A_t N_t)$$

$$A_{t+1} = A_t(1 + g)$$

# 其他假设

- 假设折旧率为 $\delta = 1$；下一期的资本等于本期的储蓄。

$$K_{t+1} = I_t = N_t s_t$$

- $t = 0$期，老代理人的初始资本量为$K_0$

# 竞争均衡的定义

- 一个竞争均衡被定义为满足以下条件的变量 $\{K_t, c_t^y, c_t^o\}_{t=0}^{\infty}$ 与要素价格 $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$ 的组合：

1. 给定$w_t, R_t$，代理人选择效用最大化的 $c_t^y, c_{t+1}^o$

$$
\begin{aligned}
max \quad & u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o) \\
s.t. \quad & c_t^y + s_t = w_t \\
& c_{t+1}^o = R_{t+1} s_t
\end{aligned}
$$

2. 初始时期的老代理人选择效用最大化的$c_0^o$

$$\max_{c_0^o} \quad s.t. \quad c_0^o = R_0 K_0$$

# 竞争均衡的定义

- 一个竞争均衡被定义为满足以下条件的变量 $\{K_t, c_t^y, c_t^o\}_{t=0}^{\infty}$ 与要素价格 $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$ 的组合:

3. 给定 $w_t, R_t$，代理公司选择利润最大化的$K_t, N_t$

$$\max_{K_t, N_t} \; F(K_t, A_t N_t) - w_t N_t - R_t K_t$$

4. 市场出清

$$\begin{aligned} N_{t-1}c_t^o + N_t c_t^y + N_t s_t &= Y_t \\ K_t^d = K_t^s &= N_{t-1}s_{t-1} \\ N_t^d = N_t^s &= N_t \end{aligned}$$

# 解出竞争均衡：公司

- 假设效用、生产函数分别为：

$$u(c) = logc$$
$$F(K_t, A_tN_t) = (K_t)^{\alpha}(A_tN_t)^{1-\alpha}$$

- 公司问题解得

$$R_t \quad = \alpha K_t^{\alpha-1}(A_tN_t)^{1-\alpha}$$
$$w_t \quad = (1-\alpha)K_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}N_t^{-\alpha}$$

# 解出竞争均衡：家庭

- 家庭问题是

$$\begin{aligned} \max \quad & log(c_t^y) + \beta log(c_{t+1}^o) \\ s.t. \quad & c_t^y + s_t = w_t \\ & c_{t+1}^o = R_{t+1} s_t \end{aligned}$$

- 写出跨期预算约束

$$c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{R_{t+1}} = w_t$$

# 解出竞争均衡：家庭

$$\mathcal{L} = \max_{c_t^y, c_{t+1}^o} \log(c_t^y) + \beta \log(c_{t+1}^o) + \lambda\left(w_t - c_t^y - \frac{c_{t+1}^o}{R_{t+1}}\right)$$

- 一阶条件:

$$[c_t^y]: \qquad \frac{1}{c_t^y} - \lambda = 0$$

$$[c_{t+1}^o]: \qquad \frac{\beta}{c_{t+1}^o} - \frac{\lambda}{R_{t+1}} = 0$$

- 欧拉方程:

$$\frac{c_t^y}{c_{t+1}^o} = \frac{1}{\beta R_{t+1}}$$

# 储蓄

- 综合 $\frac{c_t^y}{c_{t+1}^o} = \frac{1}{\beta R_{t+1}}$， $c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{R_{t+1}} = w_t$，可以解出年轻人的储蓄水平为

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t$$

- 类似索洛模型，储蓄率是固定的

# 资本的变化

$$K_{t+1} = N_t s_t = N_t \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) w_t$$

$$= N_t \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha) K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} (N_t)^{-\alpha}$$

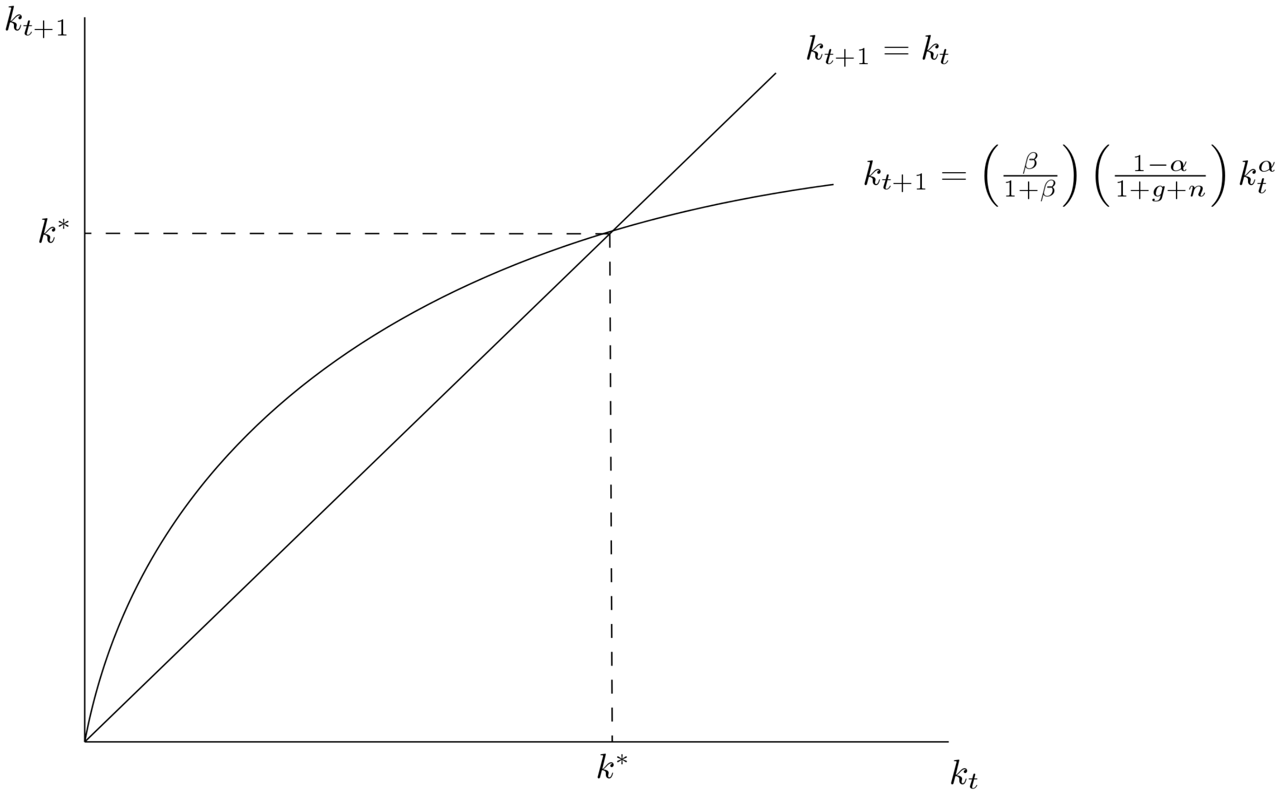
$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha) K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}$$

- 和索洛模型类似，两边同除$A_t N_t$：

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}(1+g)(1+n) \quad = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t N_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{A_t N_t}{A_t N_t}\right)^{1-\alpha}$$

$$(1+g)(1+n)k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} k_t^{\alpha}$$

# 资本的积累




$$k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{1-\alpha}{1+g+n}\right)k_t^{\alpha}$$

- 和索洛、新古典模型类似，我们也可以找到平衡增长路径上的资本水平：

$$k^* = \left[\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left(\frac{1-\alpha}{1+g+n}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

# 动态无效率（Dynamic Inefficiency）

- 和 Ramsey 模型不同，OLG模型的竞争均衡不一定是社会最优的，可能存在资本积累过多或过少的情况

- 动态无效率（Dynamic Inefficiency) 是指经济体均衡条件下的储蓄水平与实现经济最优增长所要求的储蓄水平不一致

- 从这张PPT开始，假设 $g=0$，$A_0=1$ （没有科技增长）。

- 资源约束是

$$N_{t-1}c_t^o + N_t c_t^y + K_{t+1} = K_t^\alpha (N_t)^{1-\alpha}$$

# 动态无效率-2

- 两边同除 $N_t$

$$(1+n)^{-1}c_t^o + c_t^y + (1+n)k_{t+1} = k_t^\alpha$$

- 稳态的资源约束是:

$$(1+n)^{-1}c_o^* + c_y^* = (k^*)^\alpha - (1+n)k^*$$

- 用 $c^* = (1+n)^{-1}c_o^* + c_y^*$ 表示稳态（人均）消费，我们可以找到使其最大的人均资本量，以$k_{gold}$ 表示 （Golden level of normalized capital）

# Golden Level of Normalized Capital

$$\frac{\partial c^*}{\partial k_{gold}} = \alpha(k_{gold})^{\alpha-1} - (1+n) = 0$$

$$\Rightarrow R_{gold} - (1+n) = 0$$

$$k_{gold} = \left[\left(\frac{\alpha}{1+n}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- 当$k^* > k_{gold}$，或者$R^* < 1+n$ 时，减少社会层面的储蓄率反而会增加所有人的消费！

# 讨论

- 出现储蓄过多的条件:

$$\beta(1-\alpha) > \alpha(1+\beta)$$

- 为什么会出现动态无效率?

- 可能的原因：投资的外部性

- 年老一代的投资影响了年轻一代的工资和利率水平，从而进一步扭曲年轻一代的消费、储蓄选择

# 动态无效率的原因

- 对于模型中的个体来说，唯一储蓄的方式是通过资本，即使资本的回报率已经降低

- 对于社会计划者来说，由于人口在增长，如果从每个年轻人身上征税1单位消费品，就能给每个老年人发放 1+n 单位消费品

- 只要人口不断增长，这样的征税方式就是可持续的，并可以实现更高的人均消费

# 税收的作用

- 假设存在一个政府，能够对年轻人征税、对年老的人进行补贴

$$c_t^y + (1 + \tau_s)s_t = w_t$$

$$c_{t+1}^o = (1 + \tau_k)R_{t+1}s_t$$

- 政府的预算约束为：

$$\tau_s N_t s_t = \tau_k R_t N_{t-1} s_{t-1}$$

# 税收对代理人行为的改变

- 增加税收之后，跨期预算约束变为

$$\frac{c_t^y(1+\tau_k)}{1+\tau_s}+\frac{c_{t+1}^o}{R_{t+1}}=\frac{w_t(1+\tau_k)}{1+\tau_s}$$

- 欧拉方程变为：

$$\frac{c_t^y}{c_{t+1}^o}=\frac{1}{\beta R_{t+1}}\frac{1+\tau_s}{1+\tau_k}$$

- 税收之后的储蓄：

$$s_t=\frac{\beta}{(1+\beta)(1+\tau_s)}w_t$$

# 资本的转移律

- 在加入税收后，资本的转移律变为

$$K_{t+1} = N_t s_t = N_t \frac{\beta}{(1+\beta)(1+\tau_s)} w_t$$

$$= N_t \frac{\beta}{(1+\beta)(1+\tau_s)} (1-\alpha) K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} (N_t)^{-\alpha}$$

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+\tau_s)(1+n)} k_t^{\alpha}$$

# 税收对资本的影响

- 解得

$$k^* = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+\tau_s)(1+n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- 和之前的表达式相比，分母多了一项（$1+\tau_s$）

# 最优税率

- 问题：能否存在一个税率$\tau_s$，使得人均资本 $k^*$ 处在黄金资本水平 $k_{gold}$？

$$k_{gold} = \left[\left(\frac{\alpha}{1+n}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$k^* = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+\tau_s)(1+n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- 希望找到 $\tau_s$，使得

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+\tau_s)(1+n)} = \frac{\alpha}{1+n}$$

# 最优税率-2

- 解出

$$\tau_s = \frac{\beta(1-\alpha) - (1+\beta)\alpha}{\alpha(1+\beta)}$$

我们发现，当社会的储蓄过多时，即满足$\beta(1-\alpha) > \alpha(1+\beta)$时，最优的税率水平为正（$\tau_s > 0$ ）

此时政府通过征税的手段，完成代际的财富转移

# 最优税率-3

我们也可以通过政府的预算约束，找到最优的补贴

$$\frac{\tau_s \beta}{(1+\beta)(1+\tau_s)} N_t w_t = \tau_k R_t K_t$$

Cobb-Douglas 生产函数： $\frac{w_t N_t}{R_t K_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$

解得

$$\tau_k = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\tau_s \beta}{(1+\beta)(1+\tau_s)}$$

# 延展：取消 $\delta = 1$ 的假设

- 当放松 $\delta = 1$ 这个假设时，黄金规则的资本水平是

$$k_{gold} = \left[\frac{\alpha}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- 最优税率

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+\tau_s)(\delta+n)} = \frac{\alpha}{\delta+n}$$

$$\tau_s = \frac{\beta(1-\alpha) - (1+\beta)\alpha}{\alpha(1+\beta)}$$

和之前不变

# 数值模拟

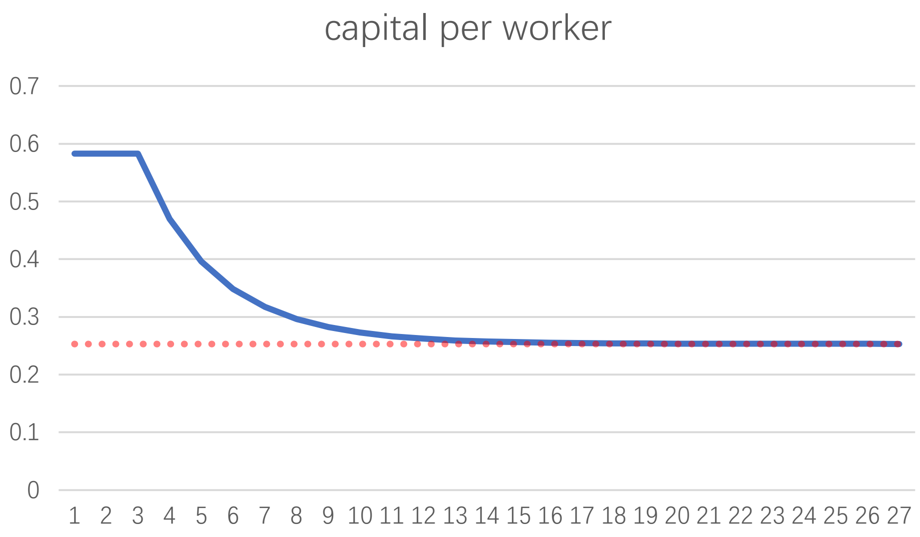
- 基准情况（前两期）

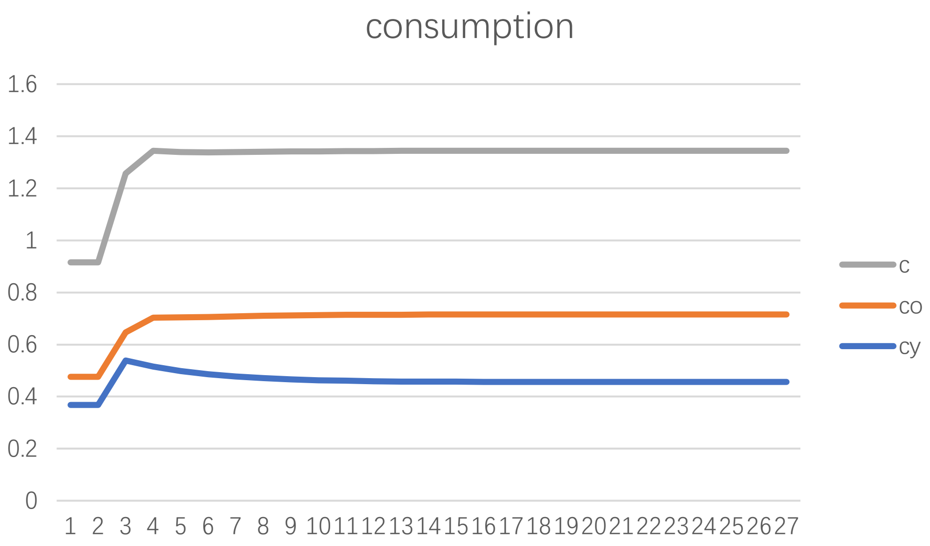
$$\tau_s = \tau_k = 0$$

- 政策冲击（第三期开始）
  - 按照最优税收政策来收税/补贴

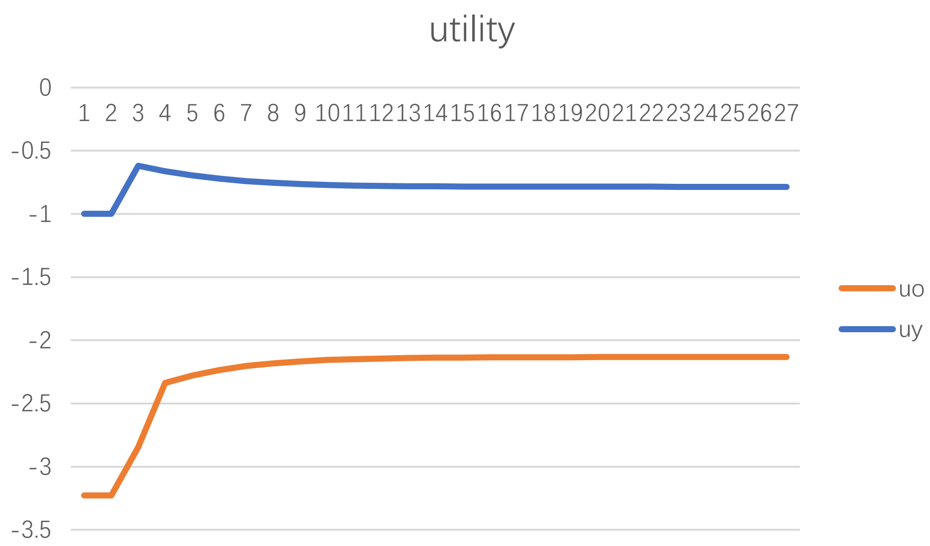
$$\tau_s = \frac{\beta(1-\alpha) - (1+\beta)\alpha}{\alpha(1+\beta)}$$

$$\tau_k = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\tau_s \beta}{(1+\beta)(1+\tau_s)}$$




- $\alpha = 0.2$
- $\beta = 0.95$
- $\delta = 0.1$
- $n = 0.5$




- $\tau_s = 0.949$
- $\tau_k = 0.949$

# 讨论

- 当稳态人均资本 $k^*$高于 黄金规则水平 $k_{gold}$时，政府可以用税收手段进行财富分配，使得新、老两代人同时提高效用；

- 当稳态人均资本$k^*$低于 黄金规则水平 $k_{gold}$时，按照“最优税率”征税不会带来更好的结果；

# 社会保险（Social Security）

- 除了税收手段之外，政府可以采用社会保险的手段对年轻代理人的消费、储蓄选择进行调节。
- 两种社会保险的形式：
  - 完全准备制
  - 随收随付制

# 完全准备制（Fully Funded Social Security）

- 政府强制征收社会保险，将投入资本，在老年时返还

$$\max_{c_t^y, s_t, c_{t+1}^o} \quad u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

$$\text{s.t.}$$

$$c_t^y + s_t + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^o = R_{t+1}(s_t + d_t)$$

# 随收随付制社保（Pay-as-you-go Social Security）

- 政府将每一期从年轻人收取社保收入，重新分配至当期的老年人

$$
\max_{c_t^y, s_t, c_{t+1}^o} \quad u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)
$$

$$
\text{s.t.}
$$

$$
\begin{aligned}
c_t^y + s_t + d_t &= w_t \\
c_{t+1}^o &= R_{t+1} s_t + (1+n) d_{t+1}
\end{aligned}
$$

- $n > 0$时，社保可以作为一种投资！
- 注：我们此处讨论社会保险水平不变的情况，即$d_t = d_{t+1}$的情况，可以认为是不存在随机冲击的经济体处在稳态的情况

# 社会保险制度的比较

- 完全准备制：政府强制征收社会保险，将其投入资本，在老年时返还

$$\max_{c_t^y, s_t, c_{t+1}^o} \quad u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^y + s_t + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^o = R_{t+1}(s_t + d_t)$$

**挤出效应**（crowding-out effect）：

代理人储蓄总量 $s_t + d_t$ 不变，社会保险减少了私人储蓄部分，对消费不产生影响

- 随收随付制：政府将每一期从年轻人收取社保收入，重新分配至当期的老年人

$$\max_{c_t^y, s_t, c_{t+1}^o} \quad u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^y + s_t + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^o = R_{t+1} s_t + (1+n) d_{t+1}$$

- 如果 $d_t$ 可以自由选择，那么均衡条件下 $R_{t+1} = 1 + \mathrm{n}$，人均资本恰好处在黄金规则水平（假设$\mathrm{A} = 1$的情况下）

# 完全准备制（Fully Funded Social Security）

- 如果资本市场是完备的，一个完全准备制的社会保险体系对于资本积累和终生消费不产生任何福利上的影响

- 上述结果最早来自 Samuelson (1975): Optimum Social Security in a Life-Cycle Growth Model

THEOREM 2. *Any increase in "fully-funded" social security merely displaces exactly as much private capital as the public capital it brings into being.*

# 社会保险的比较：例子

$$u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o) = 2\sqrt{\mathrm{c}_\mathrm{t}^y} + 2\beta\sqrt{c_{t+1}^o}$$

人口增长:

$$N_{t+1} = (1+n)N_t$$

科技增长:

$$y_{t+1} = (1+g)y_t$$

# 完全准备制

劳动收入中$\tau$的比例纳入到社会保险当中

每一代年轻人和老年人的预算约束为：

$$c_t^y + b_t = (1-\tau)y$$
$$c_{t+1}^o = (1+r)(\tau y + b_t)$$

家庭问题：

$$\max_{b_t}\left\{2\sqrt{(1-\tau)y - b_t} + 2\sqrt{(1+r)(\tau y + b_t)}\right\}$$

# 完全准备制

一阶条件:

$$\tau y + b = (1 + r)[(1 - \tau)y - b]$$

求解 $b$:

$$\mathrm{b} = \frac{1 + r}{2 + r} y - \tau y$$

计算两期消费:

$$\mathrm{C}_t^y = (1 - \tau)y - \frac{1 + r}{2 + r} y + \tau y = \frac{y}{2 + r}$$

$$\mathrm{C}_{t+1}^o = (1 + r)^2 \frac{y}{2+r} = (1 + r)^2\ \mathrm{C}_t^y$$

# 随收随付制：

每期从年轻人征收的社保金额 $B_t$：

$$B_t = \tau y_t \cdot N_t$$

分配给老年人的福利：

$$\frac{B_t}{N_{t-1}} = \tau y_t \cdot \frac{N_t}{N_{t-1}} = \tau y_t(1+n) = \tau y_{t-1}(1+g)(1+n)$$

年轻人和老年人的预算约束：

$$\mathrm{C}_t^y + \mathrm{b}_t = (1-\tau)y_t$$
$$\mathrm{C}_{t+1}^o = (1+r)\mathrm{b}_t + (1+n)(1+g)\tau y_t$$

# 随收随付制：

家庭问题：

$$\max_{b}\left\{2\sqrt{(1-\tau)y-b}+2\sqrt{(1+r)\mathrm{b}+(1+n)(1+g)\tau y}\right\}$$

关于储蓄 $b$ 的一阶条件：

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\tau)y-b}}=\frac{1+r}{\sqrt{(1+r)\mathrm{b}+(1+n)(1+g)\tau y}}$$

简化：

$$(1+r)\mathrm{b}+(1+n)(1+g)\tau y=(1+r)^2[(1-\tau)y-b]$$

# 随收随付制：

求解 $b$：

$$b(1+r)(2+r)=(1+r)^2y-[(1+n)(1+g)+(1+r)^2]\tau y$$

$$\mathrm{b}=\frac{1+r}{2+r}y-\left[\frac{(1+n)(1+g)}{(1+r)(2+r)}+\frac{1+r}{2+r}\right]\tau y$$

$$\mathrm{b}=\frac{1+r}{2+r}(1-\tau)y-\frac{1}{2+r}\left[\frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\right]\tau y$$

消费

$$\mathrm{c}^y=(1-\tau)y-\mathrm{b}=(1-\tau)y-\frac{1+r}{2+r}(1-\tau)y+\frac{1}{2+r}\left[\frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\right]\tau y$$

$$\mathrm{c}^y=\frac{1}{2+r}(1-\tau)y+\frac{1}{2+r}\left[\frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\right]\tau y$$

$$\mathrm{c}^o=(1+r)^2c^y$$

# 两种制度的比较

随收随付制:

$$c^y=\frac{1}{2+r}(1-\tau)y+\frac{1}{2+r}\left[\frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\right]\tau y$$

完全准备制:

$$c^y=(1-\tau)y-\frac{1+r}{2+r}y+\tau y=\frac{y}{2+r}$$

哪种制度更好?

# 政府支出

- 之前的模型中，我们假设所有税收收入都被重新分配到代理人手中，忽略了政府支出的作用
- 在现实生活中，政府支出往往是必要（且不可调整的），政府可以通过征税或是发行债券的方式为这些支出募集资金。

# 李嘉图等价定理（Ricardian Equivalence Theorem）

- 由英国经济学家大卫·李嘉图（1817）首次提出。
- 核心观点：如果政府支出的预算计划不变，那么任何的税收计划（先减税再增税，平稳增税），对于家庭的消费行为都不会产生任何改变。
- 与永久收入假说（permanent income hypothesis）的论证过程类似，下面用一个两期模型作为例子。

# 李嘉图等价定理：例子

- 一个简单的两期模型，$t = 1,2$
- 代理行为人，人口为1，收入为$(y_1, y_2)$
- 政府的支出计划：$(g_1, g_2)$

一个简单的征税方案：

$$\begin{aligned} g_1 &= \tau_1 \\ g_2 &= \tau_2 \end{aligned}$$

政府的预算约束为：

$$g_1 + \frac{g_2}{1+r} = \tau_1 + \frac{\tau_2}{1+r}$$

# 代理人的预算约束

代理人的预算约束为:

$$
\begin{aligned}
c_1 + s_0 &= y_1 - \tau_1 \\
c_2 &= (1+r)s_0 + y_2 - \tau_2
\end{aligned}
$$

$s_0$ 表示私人储蓄。跨期预算约束可以表示为:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (y_1 - \tau_1) + \frac{y_2 - \tau_2}{1+r}$$

也可以写成

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \left[g_1 + \frac{g_2}{1+r}\right]$$

# 减税政策

假设现在第一期的税收额度从$\tau_1$减少到$\hat{\tau}_1$, 政府发行债券 $\hat{b}$ 来保证收支平衡。

- 政府的两期预算约束为：

$$\begin{aligned} g_1 &= \hat{\tau}_1 + \hat{b} \\ g_2 + \hat{b}(1+r) &= \hat{\tau}_2 \end{aligned}$$

- 跨期预算约束为：

$$g_1 + \frac{g_2}{1+r} = \hat{\tau}_1 + \frac{\hat{\tau}_2}{1+r}$$

# 代理人的问题

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 + \hat{s}_0 &= y_1 - \hat{\tau}_1 \\ \hat{c}_2 &= (1+r)\hat{s}_0 + y_2 - \hat{\tau}_2 \end{aligned}$$

代理人跨期的预算约束为:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 + \frac{\hat{c}_2}{1+r} &= y_1 - \hat{\tau}_1 + \frac{y_2 - \hat{\tau}_2}{1+r} \\ &= y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \left[\hat{\tau}_1 + \frac{\hat{\tau}_2}{1+r}\right] \\ &= y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \left[g_1 + \frac{g_2}{1+r}\right] \\ &= c_1 + \frac{c_2}{1+r} \end{aligned}$$

# 代理人的消费选择

假设效用函数是

$$U(c_1, c_2) = \log c_1 + \beta \log c_2$$

欧拉方程为

$$\frac{c_2}{c_1} = \beta(1+r)$$

如果两种税收制度下利率不变，那么我们会得到

$$\hat{c}_1 + \frac{\hat{c}_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

$$\frac{\hat{c}_2}{\hat{c}_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

也就是说消费不变: $c_1 = \hat{c}_1, c_2 = \hat{c}_2$

# 总结与讨论

- 用一句话概括李嘉图等价定理，“现在的减税，就是明天的增税”。
- 如果政府支出不改变，仅仅是实施了减税政策，那么理性的行为人预计到未来迟早有一天会增税，会将额外的收入储蓄起来，以备未来增税时使用。

- 李嘉图等价定理背后的假设：
  1. 税收对于所有家庭的影响相同
  2. 税收是”一次总付“的（lump-sum taxes），而非按比例征收

# 总结与讨论-2

- 李嘉图等价定理背后的假设:

    3. 所有的税收计划均在代理人生命周期内完成;

    4. 完全资本市场，借贷和存款的利息相同;

    5. 代理人不处于借贷约束（borrowing constraint）下。

在实际生活中，减税往往会带来刺激消费，拉动经济的作用，这与诸多因素有关。

# 劳动所得税

- 除了一次总付型的征税（lump-sum taxes），政府还可以对劳动所得进行征税

- 我们通过一个简单的两期模型，对这种税制进行简单的讨论

- 假设：政府需要在第一期支付政府支出$g$；可以在两期通过劳动所得税支付这一支出，税率为 $\tau_1, \tau_2$
- 假设家庭两期的劳动供给为$h_1, h_2$，那么两期的税后收入为

$$w_1 h_1 (1-\tau_1)，w_2 h_2 (1-\tau_2)$$

# 家庭问题

$$\max_{c_1,c_2,h_1,h_2} \quad c_1 - \frac{1}{2}h_1^2 + \beta\left(c_2 - \frac{1}{2}h_2^2\right)$$

$$\text{s.t.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-\tau_1)w_1h_1 + \frac{(1-\tau_2)w_2h_2}{1+r}$$

- 假设了一个线性的效用函数，如何求解两期的消费？

# 家庭问题-2

一般形式下的欧拉方程:

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \beta(1+r)$$

- 如果 $\beta(1+r) < 1$, 代理人想要全部在第一期消费
- 如果 $\beta(1+r) > 1$，代理人想要全部在第二期消费
- 如果 $\beta(1+r) = 1$，代理人不在乎两期之间的消费分配，只要永久收入最大即可。**假设我们处在这种情况下。**

# 公司问题

假设公司的生产函数比较简单：

$$y_t = h_t$$

那么两期的工资分别是$w_1 = 1, w_2 = 1$

# 简化的家庭问题

将$w_t = 1, \beta(1+r) = 1$ 代入家庭问题，可以将家庭的预算约束简化为：

$$c_1 + \beta c_2 = (1-\tau_1)h_1 + \beta(1-\tau_2)h_2$$

也就是说家庭的优化问题可以简化为：

$$\max_{h_1,h_2} \quad (1-\tau_1)h_1 - \frac{1}{2}h_1^2 + \beta[(1-\tau_2)h_2 - \frac{1}{2}h_2^2]$$

解出 $h_t^* = (1-\tau_t)$，描述了家庭的劳动供给与税收之间的关系。

# 政府的预算约束

在税收足以承担政府支出的的情况下，政府希望尽可能地使代理人效用最大。可以将政府的优化问题表示如下：

$$\max_{\tau_1,\tau_2} \quad (1-\tau_1)h_1^* - \frac{1}{2}(h_1^*)^2 + \beta\left[(1-\tau_2)h_2^* - \frac{1}{2}(h_2^*)^2\right]$$

$$\text{s.t.} \quad g = \tau_1 h_1^* + \beta\tau_2 h_2^*$$

$$h_t^* = (1-\tau_t)$$

这里第二行的政府预算约束使用了$\beta(1+r) = 1$ 这一结果

# 拉姆齐均衡（Ramsey Equilibrium）

- Ramsey equilibrium指一个包含内生税率的竞争均衡，注意和Ramsey model进行区分。
- 具体来说，此处的拉姆齐均衡是工作时长$\{h_1^*, h_2^*\}$ 和税率$\{\tau_1^*, \tau_2^*\}$的组合，满足以下条件：

（1）给定税率$\{\tau_1^*, \tau_2^*\}$，家庭选择$\{h_1^*, h_2^*\}$ 来解决家庭优化问题

（2）给定家庭的劳动供给函数，政府选择税率$\{\tau_1^*, \tau_2^*\}$最大化家庭的效用

（3）市场出清（$w_t = 1$，政府、家庭预算约束成立）

# 拉姆齐均衡的解

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(1-\tau_1)^2 + \frac{1}{2}\beta(1-\tau_2)^2 + \lambda[\tau_1(1-\tau_1) + \beta\tau_2(1-\tau_2) - g]$$

一阶条件解出

$$\tau_1^* = \tau_2^* = \frac{\lambda - 1}{2\lambda - 1}$$

最后，代入政府预算约束：

$$g = (1+\beta)\tau^*(1-\tau^*) \Rightarrow (\tau^*)^2 - \tau^* + g/(1+\beta) = 0$$

可以解出两个最优税率$\tau^*$，选择在0和1之间的解。

# 讨论

- 政府在两期征收同样的税率，这一结果一般被称为“tax smoothing”（平滑税收），在很多类似的optimal taxation问题中都会得到。
- 这一结果的形成与劳动的效用函数有关。劳动的负效用为$\frac{1}{2}h^2$，意味着同样的工作量，工作两个半天要胜过工作一天休息一天；为了最大化效用，政府希望将两天的税率设为相等，从而使两天的劳动供给相等
- 征收同样的税率也能减少对劳动供给的干扰，尽可能接近无税收条件下$h_1 = h_2 = 1$的劳动供给