

第二次作业

提交时间：2025 年 3 月 24 日（第 1 节课结束前，不接受迟交）

提交方式：通过邮件方式提交电子版

第 1 题（第 03 讲第 3 题）

考虑一个甜心经济只生产三种产品：软糖、面包和蛋糕。在接下来的计算中，必要时请保留 2 位小数。请展示具体的计算步骤。

	2022 年		2023 年		2024 年	
商品	单价	销量	单价	销量	单价	销量
软糖	\$2	10,000	\$2	11,000	\$3	10,500
面包	\$4	2,000	\$5	2,000	\$5	2,500
蛋糕	\$10	500	\$11	400	\$14	500

- a. 请计算 2022、2023、2024 这三年的名义 GDP。

名义 GDP = 对所有最终产品和服务的 $P \times Q$ 求和

名义 GDP 2022: $\$2 \times 10,000 + \$4 \times 2,000 + \$10 \times 500 = \$20,000 + \$8,000 + \$5,000 = \$33,000$

名义 GDP 2023: $\$2 \times 11,000 + \$5 \times 2,000 + \$11 \times 400 = \$22,000 + \$10,000 + \$4,400 = \$36,400$

名义 GDP 2024: $\$3 \times 10,500 + \$5 \times 2,500 + \$14 \times 500 = \$31,500 + \$12,500 + \$7,000 = \$51,000$

- b. 请使用 2022 年作为基期，计算实际 GDP。

当我们计算真实 GDP 时，我们将价格固定在基期，而只改变数量——所以，在这里，我们让软糖、面包和蛋糕的价格固定在 \$2、\$4 和 \$10。

另外，在基期，名义 GDP = 真实 GDP，所以名义 GDP 2021 = 真实 GDP 2021 = \$33,000

真实 GDP 2023 = $\$2 \times 11,000 + \$4 \times 2,000 + \$10 \times 400 = \$22,000 + \$8,000 + \$4,000 = \$34,000$

真实 GDP 2024 = $\$2 \times 10,500 + \$4 \times 2,500 + \$10 \times 500 = \$21,000 + \$10,000 + \$5,000 = \$36,000$

- c. 请使用 2023 年作为基期，计算实际 GDP。

真实 GDP 2022 = $\$2 \times 10,000 + \$5 \times 2,000 + \$11 \times 500 = \$20,000 + \$10,000 + \$5,500 = \$35,500$

真实 GDP 2023 = 名义 GDP 2023 = \$36,400

真实 GDP 2024 = $\$2 \times 10,500 + \$5 \times 2,500 + \$11 \times 500 = \$21,000 + \$12,500 + \$5,500 = \$39,000$

- d. 使用（b）的结果，计算 GDP 从 2022 到 2024 年的增长率。然后用（c）的结果，再计算该增长率。两个增长率一样吗？为什么？

GDP 增长率 = $\{[(\text{新 GDP}) - (\text{旧 GDP})] / (\text{旧 GDP})\} \times 100\%$

以 2022 年为基期，2022-2024 真实 GDP 增长率 = $[(\$36,000 - \$33,000) / \$33,000] \times 100\% = 9.09\%$

以 2023 年为基期，2022-2024 真实 GDP 增长率 = $[(\$39,000 - \$35,500) / \$35,500] \times 100\% = 9.86\%$

我们得到不同的结果，因为真实 GDP 增长率取决于基期的选择。所以，经济学家主张考虑更复杂的算法，比如：链式加权的实际 GDP (chain-weighted real GDP)。

- e. 基于 (a) 和 (b) 的结果，计算 GDP 平减指数。然后，计算价格从 2022 到 2024 年的变化率。

Y 年 GDP 平减指数 = $[(Y \text{ 年名义 GDP}) / (\text{以 } X \text{ 年为基期的 } Y \text{ 年实际 GDP})] * 100$

2022 年 GDP 平减指数 = $\$33,000 / \$33,000 * 100 = 100$

2023 年 GDP 平减指数 = $\$36,400 / \$34,000 * 100 = 107.06$

2024 年 GDP 平减指数 = $\$51,000 / \$36,000 * 100 = 141.67$

价格变化率: $[(141.67 - 100) / 100] * 100\% = 41.67\%$

- f. 基于 (a) 和 (c) 的结果，计算 GDP 平减指数。然后，计算价格从 2022 到 2024 年的变化率。

2022 年 GDP 平减指数 = $\$33,000 / \$35,500 * 100 = 92.96$

2023 年 GDP 平减指数 = $\$36,400 / \$36,400 * 100 = 100$

2024 年 GDP 平减指数 = $\$51,000 / \$39,000 * 100 = 130.77$

价格变化率: $[(130.77 - 92.96) / 92.96] * 100\% = 40.67\%$

- g. 请使用 2022 年的商品篮子，并用 2022 年作为基期，计算每一年的 CPI，然后计算价格从 2022 到 2024 年的变化率。

现在，我们将数量固定在 2022 年的水平，而只让价格变化，从而 Y 年 CPI = $[(Y \text{ 年商品篮子的成本}) / (\text{基期商品篮子的成本})] * 100$

我们首先计算 2022 年商品篮子的成本，这实际上就等于 2022 年名义 GDP = $\$33,000$

然后，2023 年商品篮子的成本 = $\$2 * 10,000 + \$5 * 2,000 + \$11 * 500 = \$20,000 + \$10,000 + \$5,500 = \$35,500$

2024 年商品篮子的成本 = $\$3 * 10,000 + \$5 * 2,000 + \$14 * 500 = \$30,000 + \$10,000 + \$7,000 = \$47,000$

以 2022 年为基期的 CPI 2022 = $\$33,000 / \$33,000 * 100 = 100$

以 2022 年为基期的 CPI 2023 = $\$35,500 / \$33,000 * 100 = 107.58$

以 2022 年为基期的 CPI 2024 = $\$47,000 / \$33,000 * 100 = 142.42$

价格变化率: $[(142.42 - 100) / 100] * 100\% = 42.42\%$

- h. 请使用 2022 年的商品篮子，并用 2023 年作为基期，计算每一年的 CPI，然后计算价格从 2022 到 2024 年的变化率。

2022 年商品篮子的成本依然 = \$33,000

2023 年商品篮子的成本依然 = \$35,500

2024 年商品篮子的成本依然 = \$47,000

以 2023 年为基期的 $CPI_{2022} = \$33,000 / \$35,500 * 100 = 92.96$

以 2023 年为基期的 $CPI_{2023} = \$35,500 / \$35,500 * 100 = 100$

以 2023 年为基期的 $CPI_{2024} = \$47,000 / \$35,500 * 100 = 132.39$

价格变化率： $[(132.39 - 92.96) / 92.96] * 100\% = 42.42\%$

i. 请比较和描述 (e)、(f)、(g)、(h) 的异同，并解释原因。

第一，这四个问题的结果虽然不是都相同，但也十分接近，反映出商品篮子变化不大。第二，(e) 和 (f) 的差别体现了基期的选择对基于 GDP 平减指数计算的价格变化率有影响，而这是因为商品篮子没有固定，只有价格变化，所以基期不同篮子也就不同，则比率也会有差异。第三，(g) 和 (h) 的结果相同，是因为 CPI 就是为此设计的：只要固定了商品篮子，那么无论基期是哪一年，各年的对比就纯粹是相对价格的对比，自然变化率就是相同的。第四，(e) 和 (f) 与 (g) 或 (h) 都有差异，也是因为选择的商品篮子不同。

第 2 题（第 04 讲第 1 题）

考虑海淀区某一时期的加总生产函数： $Y = AK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ ，其中， Y 是真实 GDP（单位是亿元），

K 是资本存量（单位是亿元）， L 是劳动投入（单位是万人）， $A = 2$ 是海淀区的科技水平。假定海淀区只投入资本和劳动进行生产。起初，资本存量等于 16。请基于这些信息，回答以下问题（请使用 Excel、Python、R、Stata 或 Matlab 作为辅助工具）：

基础模型：

- a. 假设 A 、 K 保持不变，劳动投入不断增加，请将下表扩充（比如展示第 1-10 和 90-100 行）并填写完整，保留两位小数。

L	K	Y	MPL	Y/L
0	16			
1				
2				
...				
100				

以 Excel 为例：

- 在 A1-E1 中依次输入 L、K、Y、MPL 和 Y/L
- 在 A2、A3 分别输入 1 和 2
- 在 B2 和 B3 都输入 16
- 在 C2 输入公式“=2*(A2*B2)^0.5”
- 在 D2 输入公式“=(B2/A2)^0.5”
- 在 E2 输入公式“=C2/A2”
- 选中 C2-E2，选择数字属性“增加小数位数”直到显示两位小数，拖拽右下角的点

至 C3-E3

- 选中 A2-E3，往下拖拽，得到如下结果

L	K	Y	MPL	Y/L
1	16	8.00	4.00	8.00
2	16	11.31	2.83	5.66
3	16	13.86	2.31	4.62
4	16	16.00	2.00	4.00
5	16	17.89	1.79	3.58
6	16	19.60	1.63	3.27
7	16	21.17	1.51	3.02
8	16	22.63	1.41	2.83
9	16	24.00	1.33	2.67
10	16	25.30	1.26	2.53
...				
90	16	75.89	0.42	0.84
91	16	76.32	0.42	0.84
92	16	76.73	0.42	0.83
93	16	77.15	0.41	0.83
94	16	77.56	0.41	0.83
95	16	77.97	0.41	0.82
96	16	78.38	0.41	0.82
97	16	78.79	0.41	0.81
98	16	79.20	0.40	0.81
99	16	79.60	0.40	0.80
100	16	80.00	0.40	0.80

- b. 请用语言描述边际劳动产品（MPL）和劳动生产率（Y/L）随着 L 的变化趋势，并解释这个趋势背后的直观（intuition）是什么。

固定住科技水平和资本存量，MPL 和 Y/L 均随着劳动投入的上升而下降。

对于 MPL 来说，这意味着每一单位额外的劳动投入带来的产出增加在减少。从直观上来讲，这是因为每一单位额外的劳动分到的科技和资本比之前更少，效率自然也就低于之前的单位劳动。

对于 Y/L 来说，我们观察到产出 Y 的增长速度在下降，而劳动投入 L 的增加速度维持恒定，自然平均劳动产出也就下降了——这是数学的直观。经济学的直观是，不仅额外的劳动分到的科技和资本比之前更少，从平均的意义上说，所有单位的劳动分到的科技和资本都比之前更少，平均效率自然也就降低了。

资本存量变动：

- c. 假设小米通讯技术有限公司等诸多企业决定在海淀区增加投资。因此，海淀区的资本存量上升到了 25。假定科技水平暂时没有因为投资的增加而发生变化。请

你用语言描述生产函数曲线会有什么变化。

给定其它条件， K 的上升会使得加总生产函数曲线上移（即每一个 L 水平对应的 Y 都比原来提高）。

- d. 将（c）中的情况作为初始条件，用（a）的逻辑请将下表扩充（比如展示第 1-10 和 90-100 行）并填写完整，保留两位小数。

L	K	Y	MPL	Y/L
0	25			
1				
2				
...				
100				

以 Excel 为例：

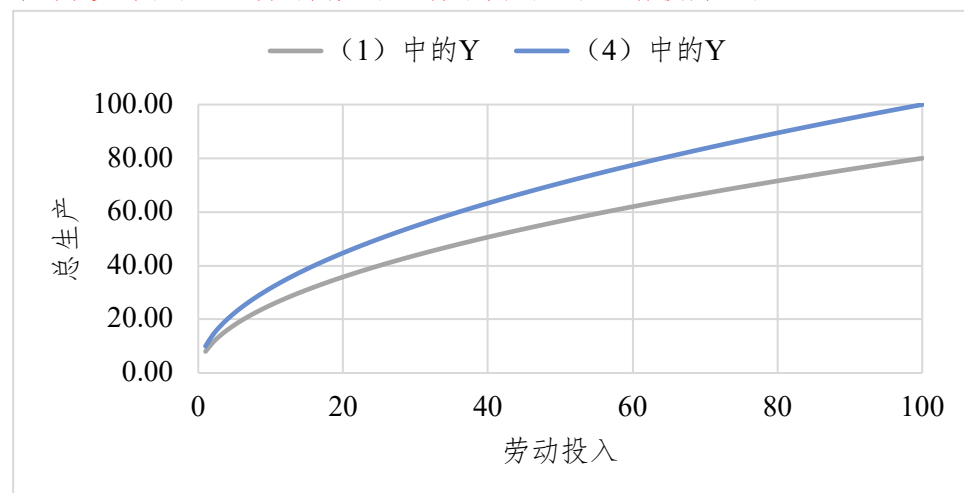
- 在 B2 和 B3 都输入 25
- 其余步骤均与（a）一致，可以得到如下结果

L	K	Y	MPL	Y/L
1	25	10.00	5.00	10.00
2	25	14.14	3.54	7.07
3	25	17.32	2.89	5.77
4	25	20.00	2.50	5.00
5	25	22.36	2.24	4.47
6	25	24.49	2.04	4.08
7	25	26.46	1.89	3.78
8	25	28.28	1.77	3.54
9	25	30.00	1.67	3.33
10	25	31.62	1.58	3.16
...				
90	25	94.87	0.53	1.05
91	25	95.39	0.52	1.05
92	25	95.92	0.52	1.04
93	25	96.44	0.52	1.04
94	25	96.95	0.52	1.03
95	25	97.47	0.51	1.03
96	25	97.98	0.51	1.02
97	25	98.49	0.51	1.02
98	25	98.99	0.51	1.01
99	25	99.50	0.50	1.01
100	25	100.00	0.50	1.00

- e. 请用电脑将（a）和（d）的加总生产函数曲线绘制在同一张图中，横轴是 L ，纵

轴是 Y。这幅图能体现你在（c）中的描述吗？

答案是显然的。绘制的图如下（将下图的 1 和 4 替换为 a 和 d）：

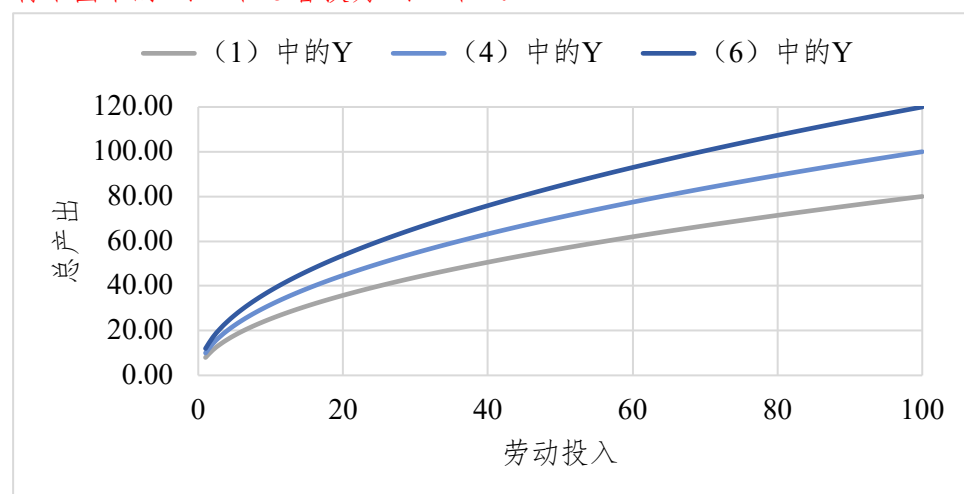


科技水平变动：

- f. 假设小米通讯技术有限公司等诸多企业决定不增加海淀区的实物投资了，而是将 AI 和机器学习等领域的最新技术引入到海淀区的各项业务中。这些技术将海淀区的 A 从 2 提升到了 3。假设资本存量回到了 16 并维持不变。请将（a）、（d）和本题的加总生产函数曲线绘制在一起，并描述科技进步对生产函数曲线的影响。

给定其它条件， A 的上升也会使得加总生产函数曲线上移（即每一个 L 水平对应的 Y 都比原来提高）。（有的同学可能还会发现在这个题目的条件下， A 的上升带来的上移更大一些，但这完全是因为给定数字的偶然性造成的，现实中未必一定如此。）

将下图中的 1、4 和 6 替换为 a、d 和 f：



第 3 题

根据世界银行的数据（<https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.KD.ZG>），回答下列问题：

- a. 2021 年中国、日本、阿富汗和巴西的真实 GDP 增长率分别是多少？

	China	Japan	Afghanistan	Brazil
真实 GDP 增长率	8.4%	2.6%	-20.7%	4.8%

- b. 假如这四个国家的人口增长率都为 0，我们可以运用 70 规则在哪些国家？根据 70 规则，假如维持增长速度不变，多少年后这些国家的真实 GDP 可以增长到原来的 8 倍？（请保留一位小数）

除了阿富汗以外，我们均可以使用 70 规则。要实现真实 GDP 翻 3 番（即原来的 8 倍），

中国需要 $\frac{70}{8.4} \times 3 \approx 25$ 年，日本需要 $\frac{70}{2.6} \times 3 \approx 80.8$ 年，而巴西需要 $\frac{70}{4.8} \times 3 \approx 44$ 年。

- c. 已知 2021 年中国的人均 GDP 是 12,556.3 美元，摩洛哥是 3,795.4 美元。如果中国的真实 GDP 增长率下降到 5%，在没有人口增长的情况下，大约多少年后摩洛哥的人均 GDP 最接近中国的一半？（请使用摩洛哥 2021 年的真实 GDP 增长率和 70 规则计算，过程保留两位小数，最终结果取整。）

摩洛哥 2021 年的真实 GDP 增长率是 8.2%（2025 年 3 月查询），假设这个增长率维持不变。中国的真实 GDP 增长率下降到 5%，则摩洛哥与中国的增长率之差为 3.2%。

2021 年，中国的人均 GDP 是摩洛哥的 3.31 倍，摩洛哥要赶上中国的一半，还需要翻的“番数”是 $\log_2\left(\frac{3.31}{2}\right) \approx 0.73$ 番。

利用 70 规则，需要 $\frac{70}{3.2} \times 0.73 \approx 16$ 年。

- d. 请使用 Excel、Python、R、Stata 或 Matlab 验证你在（c）中的结论，并试图解释为什么 70 规则在这个计算中能够表现良好。（换句话说，可以解释 70 规则在什么情况下会导致较大的误差。）

用 Excel 验算：

- 在 A1-A5 分别输入：第 n 年、中国人均 GDP、摩洛哥人均 GDP、倍数、与 2 倍的差距
- 在 A1 和 A2 分别输入 0 和 1，B2 和 B3 分别输入题目中给定的人均 GDP 的数字
- 在 D2 中输入公式“=B2/C2”
- 在 E2 中输入公式“=D2-2”
- 在 B3 中输入公式“=B2*(1+0.05)”
- 在 C3 中输入公式“=C2*(1+0.08)”
- 选中 D2-E2，拖拽至 D3-E3
- 选中 A3-E3，拖拽至 A21-E21（甚至更往下），可以得到如下结果

第 n 年	中国人均 GDP	摩洛哥人均 GDP	倍数	与 2 倍的差距
-------	----------	-----------	----	----------

0	12556.3	3795.4	3.308	1.308
1	13184.12	4106.62	3.210	1.210
2	13843.32	4443.37	3.116	1.116
3	14535.49	4807.72	3.023	1.023
4	15262.26	5201.96	2.934	0.934
5	16025.37	5628.52	2.847	0.847
6	16826.64	6090.05	2.763	0.763
7	17667.98	6589.44	2.681	0.681
8	18551.37	7129.77	2.602	0.602
9	19478.94	7714.41	2.525	0.525
10	20452.89	8347.00	2.450	0.450
11	21475.53	9031.45	2.378	0.378
12	22549.31	9772.03	2.308	0.308
13	23676.78	10573.33	2.239	0.239
14	24860.62	11440.35	2.173	0.173
15	26103.65	12378.46	2.109	0.109
16	27408.83	13393.49	2.046	0.046
17	28779.27	14491.76	1.986	-0.014

可以看到，第 16 年与 2 倍的差距为 0.046，大于第 17 年 -0.014 的绝对值。因此，第 17 年，摩洛哥的人均 GDP 最接近中国的一半，与 (c) 中用 70 规则得到的结论不一致。

70 规则是一种近似，根据它的推导过程我们知道，要想让这个近似比较准确，我们需要增长率较低（在这里是增长率的差距较低），而 3% 稍微超出了可接受范围，若是增长率更大，则误差会进一步放大。另外，“番数”较小也能减少误差的放大。我们推导的 70 规则是基于翻一番，如果考虑翻十翻，那么原来一年的误差可能会放大到数年。这里我们考虑 0.73 番，让误差控制在了一定范围内。

第 4 题

请根据上课所学的有关索罗增长模型的知识，简要回答如下问题：

- a. 在一个科技水平不变的模型中，什么参数影响稳态（steady-state）的人均产出？

一般而言，人均产出取决于资本劳动比率（资本密度），而稳态的资本密度取决于储蓄率和人口增长率（以及折旧）。函数形式，比如 Cobb-Douglas 函数中 K 的幂（也即资本贡献率），也是影响人均产出的因素。综上所述，在一个新古典增长模型中，影响稳态的人均产出的因素包括：储蓄率（或消费占 GDP 比重）、人口增长率（和折旧）以及函数形式。

需要注意的是，稳态的人均资本密度不变，故不是影响稳态的人均产出的参数。同学们还可能提人力资本、自然资源等，但这些都超出了索罗增长模型的范畴。

- b. 请简要解释人均产出、储蓄和投资的关系。

在一个没有贸易顺差或逆差（或没有国际贸易）的经济体中，若政府收支平衡（或没有

政府)，则投资等于储蓄，这是由于 $C+I+G+NX=C+T+S$ ，所以 $I=S+(T-G)-NX=S$ 。这个前提条件在索罗增长模型里已有假定，所以同学们不必特别指出。

稳态的人均产出取决于人均储蓄率——更高的人均储蓄率导致更高的稳态的资本密度，从而意味着更高的稳态的人均产出，反之亦然。

在非稳态的情况下，给定储蓄率，产出转化为投资的部分可能高于或低于资本水平扩张（或维持人均资本不变）的水平，从而导致产出上升或下降。比如，当资本密度低于稳态水平时，储蓄大于资本水平扩张（或维持人均资本不变）的投资，从而使得资本密度提升，进而使得人均产出提升，直到趋近于稳态的水平为止。

- c. 假设人均折旧低于人均储蓄，在人口不增长的情况下，请逐一解释这些变量如何随着时间变化：人均资本存量、人均产出、人均储蓄、人均消费。

人均折旧低于人均储蓄就意味着投资大于维持资本水平不变的水平，从而将导致 K/N 、 Y/N 、 S/N 上升。由于 Y/N 上升， C/N 也会上升。这个上升会逐渐趋于平缓，直到达到稳态水平为止。

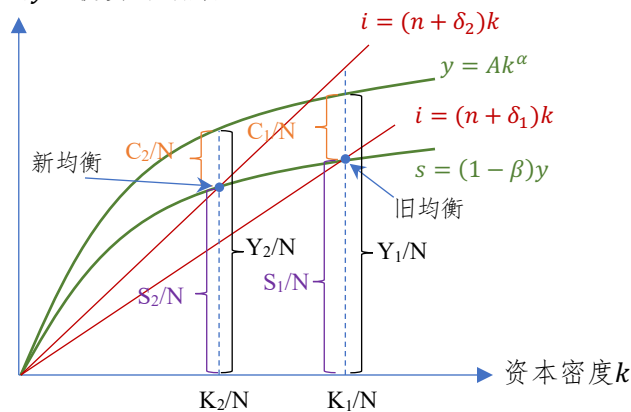
- d. 假设一个经济系统处于稳态，人口增长率为正，没有折旧，然后储蓄率突然下降了。请解释这一情况如何影响人均产出、总产出、人均产出增长率、总产出增长率。

注意，这道题问的是储蓄率下降的影响，而不是这些变量自己随时间的变化。储蓄率下降就意味着 S/N 和 I/N 下降了。在原来的 K/N 水平下，人口增长分摊掉的人均资本会高于人均投资，因为更低的储蓄率会将投资和储蓄曲线向下压。因此，资本密度 K/N 会下降，从而导致人均产出 Y/N 下降——这个过程会一直持续到新的稳态达成。而人均产出 Y/N 的增长率会立即下降（原来是 0），然后回升并慢慢趋于 0——也就是说， Y/N 的增长率下降不是永久持续下去的。

对于总产出 $Y=Y/N*N$ ，由于储蓄率的下降只负向影响 Y/N 而不影响 N ，因此储蓄率的下降也负向影响 Y 。 Y 的增长率会立即下降（原来是 n ），然后回升并慢慢趋于 n ——也就是说， Y 的增长率下降不是永久的而是暂时的； Y 的增长是永久持续的（只要人口一直在增长）。

- e. 请用图像模型描绘并用语言解释折旧率上升的影响。在你的图像模型中，请标注清楚所有的曲线和均衡。

引入折旧后的 OS 线会变得更陡，从而在原来的 K/N 水平时折旧大于投资和储蓄，进而导致 K/N 、 Y/N 和 S/N 的下降， C/N 也会下降。具体的图像模型如下：

人均产出 y 、投资 i 和储蓄 s 

第 5 题

让我们来核算总产出增长 $\frac{\Delta Y}{Y}$ 的贡献因素：

- a. 假设某国资本分走 $\frac{2}{3}$ 的国内收入，劳动者分走 $\frac{1}{3}$ 的国内收入，男性留守在家做家务，女性在工厂工作。假如有一些男性开始在外面干活，使得劳动力提升了 5%，全要素生产率 A 有什么变化？总产出会有什么变化？劳动生产率 $\frac{Y}{L}$ 会有什么变化？

$$\frac{\Delta A}{A} = 0,$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{3} \times 5\% \approx 1.67\%,$$

$$\frac{\Delta(Y/L)}{Y/L} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L} \approx 1.67\% - 5\% = -3.33\%.$$

- b. 在（a）的大背景下，假设更多男性开始在外面干活，使得：第一年资本存量是 6，劳动投入是 3，产出是 12；第二年资本存量是 7，劳动投入是 4，产出是 14。全要素生产率在这两年间发生了什么变化？

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \frac{\Delta K}{K} - (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} = \frac{14-12}{12} - \frac{2}{3} \frac{7-6}{6} - \frac{1}{3} \frac{4-3}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18} \approx -5.6\%,$$

根据核算，全要素生产率下降了 5.6 个百分点。

- c. 如果我们将索罗增长模型中生产函数 A 理解为劳动效率，并令 $A = E^{1-\alpha}$ 。现在，再假设劳动分走 $\frac{2}{3}$ 的国内收入，剩余的分给资本。再假设技术进步率 $g = \frac{\Delta E}{E} = 1.8\%$ ，人口增长率 $n = 1.8\%$ 。请问，你能试着核算资本、劳动与全要素生产率对总产出的贡献分别是多少吗？（不考虑折旧）

从题目中我们知道，

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta K}{K} = n + g = 3.6\%,$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 3.6\% - \frac{1}{3} \times 3.6\% - \frac{2}{3} \times 1.8\% = 1.2\% \text{ (或者直接 } \frac{\Delta A}{A} = (1 - \alpha) \frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{3} \times 1.8\% = 1.2\%$$

也可以，但就还需要计算资本、劳动对总产出的贡献)。注意本题问的是贡献而不是问贡献率。

从上面的计算中，不难看出资本、劳动对总产出的贡献也都是 1.2%。

第 6 题（附加题）

让我们来考虑一个简单的两部门的内生增长模型：经济中有制造业企业和研究型大学。企业生产用于消费或实物投资的产品和服务，而大学生产知识——知识可以自由地在这两个部门间穿梭，就像重力一般。假设企业的生产函数是 $Y = K^\alpha [(1-u)LE]^{1-\alpha}$ ，大学的生产函数是 $\Delta E = uE$ ，而资本积累动态方程是 $K_{t+1} - K_t = (1-\beta)Y_t - \delta K_t$ 。

- a. 我们把 LE （劳动和知识的乘积）称为效率劳动，请问你能将单位效率劳动的产出

$$y = \frac{Y}{LE} \text{ 表达为单位效率劳动的资本水平 } k = \frac{K}{LE} \text{ 吗？}$$

$$y = \frac{Y}{LE} = K^\alpha (1-u)^{1-\alpha} (LE)^{-\alpha} = (1-u)^{1-\alpha} \left(\frac{K}{LE}\right)^\alpha = (1-u)^{1-\alpha} k^\alpha$$

- b. 在这样一个经济中，资本水平扩张（维持单位效率劳动的资本水平不变）的总投资是多少？（提示：用类似于索罗增长模型的逻辑去猜测。）

这里的逻辑和最基础的索罗增长模型是类似的。在索罗增长模型中，资本水平扩张的 $i = (n + \delta)k$ ，而这里就是 $i = \left(n + \delta + \frac{\Delta E}{E}\right)k = (n + \delta + u)k$ ，前者的 k 是资本密度，而后的 k 是单位效率劳动的资本水平，因此后者除了要弥补折旧损耗、人口分摊以外，还要弥补“效率分摊”。注意，这里的投资 $i = \frac{I}{LE}$ 是单位效率劳动的投资。

- c. 将（b）中投资与 k 的关系作为 OS 线，写出稳态均衡需要满足的关系式，然后给出稳态单位效率劳动的资本水平 k_e 的解析式。

OS 线与储蓄曲线的交点就是稳态，那么数学公式就是：

$$i = s = (1-\beta)y,$$

进而得到

$$(n + \delta + u)k = (1-\beta)(1-u)^{1-\alpha} k^\alpha。$$

经过一系列变换，可以得到：

$$k_e = \left(\frac{1-\beta}{n + \delta + u}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-u)$$

- d. 基于（c），你认为政府打算提升 u 的决定一定是好事吗？为什么？（提示：要回答这个问题，需要考虑人均产出 $\frac{Y}{L}$ 和人均消费 $\frac{C}{L}$ ，注意分母没有 E 。）

根据（c）中 k_e 的解析式， u 的上升意味着稳态单位效率劳动的资本水平的下降。然而，从长期来看，由于 E 的不断上升，人均产出 $\frac{Y}{L} = yE$ 和人均消费 $\frac{C}{L} = \beta yE$ 可能会最终超过不采取任何政策时的情况。政府采取提升 u 的决定可能会牺牲短期利益，但对于长期而言是好事。但不一定是好事，因为这个长期可能会很久，而且政府或民众也未必愿意牺牲短期利益（人们往往是短视的，并且人的寿命是有限的——子孙后代的福利提升未必能给当期的这代人带来好处）。