概率统计

依据孔祥仁的概率统计课程整理。[孔祥仁概率统计课程视频链接]

教材：概率论与数理统计 浙大第五版

斜体为个人批注，仅供参考。

第一章 概率论的基本概念

1. 随机试验

1.1 名词

确定性现象：结果呈现确定性的现象。

随机现象：在个别实验中呈现不确定性，在大量重复实验中表现出统计规律性的现象。

1.2 随机试验

随机试验：对随机现象的实现或者对其的观察，记为E。

特点：

1. 相同条件可重复
2. 试验结果明确可知且结果不止一个
3. 试验前不能确定哪个结果会出现

2. 样本空间与随机事件

2.1 样本空间

定义：将E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为S。

样本点：S的元素。

2.2 随机事件

定义：称E的样本空间（S）的子集为E的随机事件。

事件发生：在一次实验中，该子集的一个样本点出现。

基本事件：由一个样本点组成的单点集。不可以再划分的事件。

必然事件：S本身。

不可能时间：$\emptyset$。

3. 事件间的关系及运算

1. $A \subset B$：包含关系。A包含于B（B包含A）。A发生⇒B发生。
2. 和事件（并事件）：A与B至少发生一个，记作$A \cup B$或$A+B$。
3. 积事件（交事件）：A与B同时发生，记作$A \cap B$或AB。
4. 差事件：A发生且B不发生，记作$A-B$。
5. 互斥事件（互不相容事件）：A与B不能同时发生，$A \cap B = \emptyset$。
6. 逆事件（对立事件）：A与B有且只有一个发生，$A \cap B = \emptyset$且$A \cup B = S$

4. 事件的运算律

1. 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$AB = BA$
2. 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；
   括号里外开口相同。
3. 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；
   括号里外开口不同。
4. 德摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$；
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$；
   “长（短）杠变短（长）杠，开口换方向”。

5. 频率与概率

5.1 频率

定义：事件发生的频数与试验总署之间的比值

基本性质：

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$

2. $f_n(S)=1$
3. 若$A_1,A_2,\ldots,A_k$为两两不相容事件，则$f_n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\ldots+f_n(A_k)$

5.2 概率

含义：用于衡量事件A发生的可能性的大小，用P来表示

基本性质：

1. 非负性：任一事件A，$P(A)\geq 0$
2. 规范形：必然事件S$\Rightarrow$ $P(S)=1$，反之不成立
3. 可列可加性：若$A_1,A_2,\ldots$为两两不相容事件，$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

重要性质：

1. $P(\emptyset)=0$：不可能事件$\Rightarrow$概率为0，反之不成立。
2. 有限可加性：若$A_1,A_2,\ldots,A_n$为两两不相容事件，则$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$
3. 若$A\subset B$，则$P(B)\geq P(A)$
4. 任一事件A，$P(A)\leq 1$
5. 任一事件A，$P(\bar{A})=1-P(A)$
6. 对于任意两个事件A，B，有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。这是一个一定成立的性质。
   - 任意三个事件A，B，C，有$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
   - 任意四个事件A，B，C，D，有

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+P(ABC)+P(ABD)+P(ACD)+P$$

补充一个性质： $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

6. 古典概型

6.1 特点

1. 有限性：S包含的样本点是有限个
2. 等可能性：样本点（基本事件）发生的可能性相同

6.2 计算方法

事件A包含了k个基本事件，S有n个样本点。

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

7. 条件概率

7.1 定义

设A, B为两个事件，且$P(A)>0$，称$P(B|A)$为条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

7.2 特点

1. 非负性：对于任一事件B，$P(B|A)\geq 0$
2. 规范形：必然事件$S\Rightarrow P(S|A)=1$
3. 可列可加性：设$B_1,B_2,B_3,\ldots$是两两互不相容的事件，那么$P(B_1\cup B_2\cup B_3|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)+P(B_3|A)$
4. 补充：$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$

8. 乘法定理

前提：$P(A)>0$

乘法公式：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

引申：

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

9. 全概率公式

9.1 样本空间的划分

$B_1,B_2,\ldots,B_n$是E的一组事件，若满足

1. $B_iB_j=\emptyset$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\ldots,n$
2. $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$

则$B_1,B_2,\ldots,B_n$为S的一个划分（或完备事件组）。

对立事件是一个特殊的划分。

9.2 全概率公式

设E的样本空间为S，A是E的事件，$B_1,B_2,...,B_n$为S的划分且$P(B_i)>0$，则

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+...+P(B_n)P(A|B_n)$$

10. 贝叶斯公式

设E的样本空间为S，A是E的事件，$B_1,B_2,...,B_n$为S的划分且$P(A)>0,P(B_i)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

这就是贝叶斯公式。

它的推导过程是，首先写出$P(B_i|A)$的条件概率公式，对分子用乘法公式改写，对分母用全概率公式改写。

11. 独立性

设试验E的事件A,B，若$P(A)>0$，就可以定义$P(B|A)$，一般情况下$P(B|A)\neq P(B)$，即事件A发生与否会对B发生的概率产生影响；有的时候$P(B|A)=P(B)$，即事件A发生与否**不会**对B发生的概率产生影响

11.1 定义

设A,B为两个事件，若满足$P(AB)=P(A)P(B)$，那么我们称A,B相互独立。

设A,B,C三个事件，当且仅当满足以下四个条件A,B,C相互独立：

$$\left.\begin{cases}\left.\begin{array}{l}P(AB)=P(A)P(B)\Rightarrow A、B\text{相互独立}\\ P(AC)=P(A)P(C)\Rightarrow A、C\text{相互独立}\\ P(BC)=P(B)P(C)\Rightarrow B、C\text{相互独立}\end{array}\right\}\begin{array}{l}A、B、C\\ \text{两两独立}\end{array}\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}\right\}A、B、C\text{相互独立}$$

第二章 随机变量及其分布

1. 随机变量

1.1 定义

随机试验E的样本空间$S=\{e\}$，$X=X(e)$是定义在S上的实值单值函数，则称$X=X(e)$是随机变量。

1.2 注意

1. 随机变量用大写字母表示
2. 实数用小写字母表示
3. 某些试验结果本身就是一个数，可以将实验结果本身作为随机变量。

2. 离散型随机变量及分布

2.1 离散型随机变量

取值是有限多个或可列无穷多个的随机变量。

2.2 分布律的性质

离散型随机变量的分布律：X的所有取值；X每个取值各自概率；写成图表或统一的表达式

1. $p_k\geq 0$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$

分布律满足上面2个性质；满足上面2个性质就是某个分布律。

2.3 重要分布

2.3.1 0 - 1分布（两点分布）

设X只可能取0, 1两个值，它的分布律满足

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$$

称X服从以p为参数的0 - 1分布，p代表$X=1$发生的概率。

2.3.2 伯努利试验及二项分布

如果E只有两个结果：A和$\bar{A}$，则称为伯努利试验。

若将该试验**重复独立**地进行n次，则称为n重伯努利试验。

- 重复：$P(A)$不变，$P(\bar{A})$也不变
- 独立：每次试验互不影响

设X表示n重伯努利试验中A发生的次数，$X=0,1,2,...,n$。假定$P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p=q$，

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$$

称X服从参数为n, p的二项分布，记作$X \sim b(n,p)$，其中$k=0,1,2,\ldots,n$

之所以叫二项分布是因为它和二项式定理有关。

0 - 1分布是特殊的二项分布，即n = 1时的二项分布。

2.3.3 泊松分布

泊松分布：设随机变量$X=0,1,2,\ldots$，每个取值的概率满足

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

其中$k=0,1,2,\ldots$，要求λ为大于0的常数，可以称X服从一个参数为λ的泊松分布，记作$X \sim \Pi(\lambda)$.

泊松定理： 设λ为大于0的常数，n为任意正整数。又设$np=\lambda$，则对任一固定的非负整数k，有下式成立

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

即，将伯努利试验做很多次时，二项分布的分布律 = 泊松分布的分布律 。

一般来说，当$n \geq 20, p \leq 0.05$时，可以利用泊松分布近似二项分布。

2.3.4 几何分布与超几何分布

几何分布的数学模型：伯努利试验“达到目的”的概率为p，试验第k次才成功的概率为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$$

几何分布的定义：X的分布律满足上述等式，就是几何分布，记作$X \sim G(p)$.

超几何分布的数学模型：从有限N个物品（其中有D个特殊物品）中抽出n个物品，包含了特定物品k个（$k \leq \min\{D,n\}$）的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

超几何分布的定义：X的分布律满足上述等式，就是超几何分布，记作$X \sim H(N,D,n)$.

3. 随机变量的分布函数

3.1 定义

设X为随机变量，x是任意实数，$F(x)=P\{X \leq x\}$，$-\infty < x < +\infty$，为X的分布函数。

另外：$P\{x_1 < X \leq x_2\}=P\{X \leq x_2\}-P\{X \leq x_1\}=F(x_2)-F(x_1)$.

分布函数的性质：

1. $F(x)$为不减函数
2. $0 \leq F(x) \leq 1$，$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$，$\lim_{x\to\infty} F(x)=1$
3. $F(x)$是一个右连续函数，$F(x+0)=F(x)$，$+0$表示往右一点点。

4. 连续型随机变量及概率密度

4.1 定义

随机变量X的分布函数为$F(x)$，$F(x)$由一个非负的可积的的函数$f(x)$积分得来，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

称X是连续性随机变量，$f(x)$是X的概率密度函数。

注意：连续型随机变量X的分布函数是连续函数，$f(x)$不一定连续。

可以认为概率密度对应离散型随机变量的分布律。

4.2 概率密度的性质

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$.

满足上述两点，可说明$f(x)$是某一个随机变量X的概率密度函数。

3. 任意实数x_1, x_2（$x_1 \leq x_2$），$P(x_1 < X \leq x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.
4. 如果$f(x)$在$x=x_0$处连续，那么$F'(x_0)=f(x_0)$.
5. $P\{X=a\}=0$.
6. 对于连续型随机变量，$P\{x_1 \leq X \leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)+P\{X=x_1\}=P(x_1 < X \leq x_2)$，$P\{x_1 < X < x_2\}$和$P\{x_1 \leq X < x_2\}$同理。即，端点值不影响区域上的概率。

4.3 概率分布

随机变量的概率分布包括分布函数和分布律/概率密度。求解概率分布时，如果题目给出了其中一方，求另一方即可；如果都没有，就需要求双方。

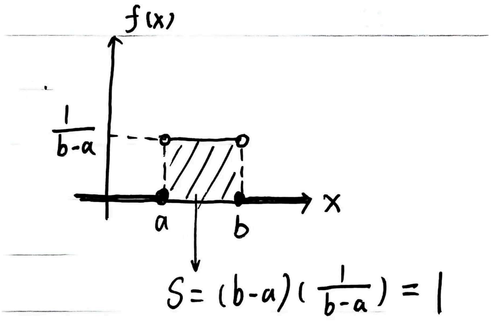
4.4 重要的连续性随机变量

4.4.1 服从均匀分布的随机变量

X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

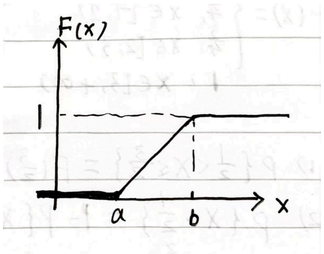
称X在区间(a,b)服从均匀分布，记作$X\sim u(a,b)$.



分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x\end{cases}$$

$\frac{x-a}{b-a}$可由矩形图像面积直接得出。



4.4.2 服从指数分布的随机变量

X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

λ为大于零的常数，称X服从指数分布，记作$X\sim E(\lambda)$.

注意：λ与泊松分布相区分。

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

无记忆性：对于任意两个数$s>0$，$t>0$，

$$P\{X>t\}=P\{X>s+t|X>s\}$$

无记忆性的例子：一个没有明显衰老的人的寿命X. $P\{X>10\}=P\{X>5+10|X>5\}$，一个刚出生的人活十年的概率和一个五岁的人再活十年的概率相同。若不然，$P\{X>10\}\neq P\{X>80+10|X>80\}$.

4.4.3 服从正态分布的随机变量

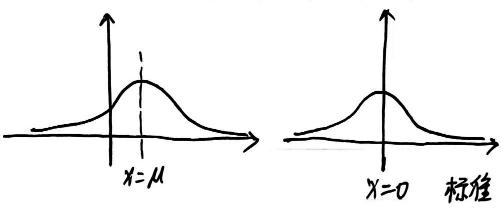
X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

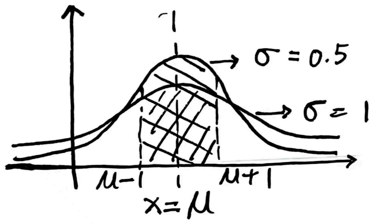
其中μ，σ为常数，则称X服从参数为μ，σ的正态分布，记作$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

当$u=0$，$\sigma=1$时，称为标准正态分布，概率密度函数写作$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$.

μ决定概率密度函数图像的位置，u又称为位置参数。



σ决定正态分布概率密度的峰值，σ越小，峰值越大。σ越小，X落在关于对称轴对称的区间中的概率越大。

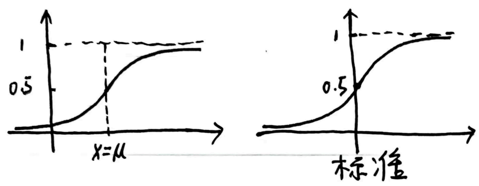


分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

当$\mu=0$，$\sigma=1$时，标准正态分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



正态分布的性质：

1. 概率密度函数图像关于$x=\mu$对称
2. $f(x)_{\max}=f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
   对于等长区间，越靠近$x=\mu$，X落到该区间的概率越大。
   $P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\}$.
3. 对于标准正态分布，$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$
4. 引理：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，令$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$，$Z\sim N(0,1)$.
   这个引理的作用是将一般正态分布转化为标准正态分布，从而能够通过查表求值。

3σ法则：

- $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{X-\mu}{\sigma})$
- 对于$(x_1,x_2]$，

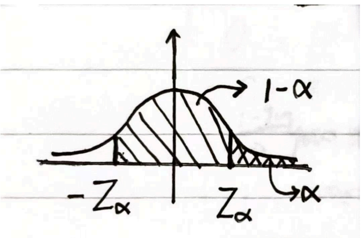
$$\begin{aligned}P\{x_1<X\leq x_2\}&=P\{\frac{x_1-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x_2-\mu}{\sigma}\}\\&=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x_2-\mu}{\sigma}\}-P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x_1-\mu}{\sigma}\}\\&=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})\end{aligned}$$

- $P\{\mu-\sigma<X\leq\mu+\sigma\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=68.26\%$
  $P\{\mu-2\sigma<X\leq\mu+2\sigma\}=2\Phi(2)-1=95.44\%$
  $P\{\mu-3\sigma<X\leq\mu+3\sigma\}=2\Phi(3)-1=99.74\%$

上α分位点：$X\sim N(0,1)$，Z_α满足$P\{X>Z_\alpha\}=\alpha$，$0<\alpha<1$，Z_α是上α分位点。

上α分位点只针对标准正态分布。

性质：$-Z_\alpha=Z_{1-\alpha}$



5. 随机变量的函数的分布

定理：设随机变量X具有的概率密度为$f_X(x)$，$-\infty < x < +\infty$，又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x) > 0$（或恒有$g'(x) < 0$），则$Y = g(x)$是连续性随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, \alpha < y < \beta \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$，$h(y)$是$g(x)$的反函数。

注意：若$f_X(x)$在$[a,b]$以外等于0，只需要要求$g(x)$在$[a,b]$恒有$g'(x) > 0$或< 0，$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$，$b = \max\{g(a), g(b)\}$.

第三章 多维随机变量及分布

1. 二维随机变量

1.1 二维随机变量及分布

二维随机变量：E的$S = \{e\}$, e由(X,Y)构成，X,Y是定义在S里的，称(X,Y)为二维随机变量。

分布函数：$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$称为$(X,Y)$的联合分布函数。

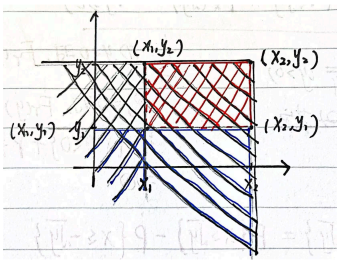
性质：

1. $F(x,y)$为不减函数
2. $0 \le F(x,y) \le 1$

   特殊地：

   - $F(-\infty, y) = P\{X \le -\infty, Y \le y\} = 0$
   - $F(x, -\infty) = 0$
   - $F(-\infty, -\infty) = 0$
   - $F(+\infty, +\infty) = 1$
3. $F(x,y)$是关于x,y的右连续的函数

$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1)$
$+F(x_1,y_1)$. 这是恒成立的等式，不论是对于连续型还是离散型。



2. 离散型二维随机变量及联合分布律

定义：(X,Y)所有取值为有限对或可列无限对，称为离散型二维随机变量。$P\{X = x_i, Y = y_i\} = p_{ij}, i,j = 1,2,3,\dots$

性质：

1. $p_{ij} \le 0$, 非负性
2. $\sum p_{ij} = 1$

3. 连续型二维随机变量及联合概率密度

定义：若(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，$f(x,y)$为非负可积的，$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = F(x,y)$称$(X,Y)$为连续型二维随机变量，称$f(x,y)$为$(X,Y)$的联合概率密度。

性质：

1. $f(x,y) \ge 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$
3. 设G是平面xoy上的某个区域，(X,Y)落在G区域的概率$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy$
4. $f(x,y)$在(x,y)点上连续，$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = f(x,y)$