Intermediate Macro: Lecture 24

Lun Li

Peking University

lunl@pku.edu.cn

May 20th, 2025

回顾

- 上节课我们对确定性和简单的随机性递归模型进行了介绍
- 今天：随机递归性模型的一些应用
    - RBC 模型回顾
    - Bewley-Huggett-Aiyagari 模型简介

RBC模型 - Revisited

模型设定:

- 家庭有N_t个家庭成员，每个人有1单位时间可以分配至闲暇L_t或劳动H_t，即 $H_t + L_t = N_t$.
- 生产函数

$$Y_t = z_t K_t^{\alpha}(A_t H_t)^{1-\alpha}$$

- 人口和科技增长:

$$N_{t+1} = (1+g_N)N_t = (1+g_N)^t N_0$$
$$A_{t+1} = (1+g_A)A_t = (1+g_A)^t A_0$$

- 效用函数

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((1-\phi)\log\left(\frac{C_t}{N_t}\right) + \phi \log\left(\frac{L_t}{N_t}\right) \right)$$

-

随机生产率冲击

- 假设 z_t 是从长期增长率的对数偏离，服从AR（1）分布

$$\log z_t = \rho \log z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \rho \in [0,1], \quad \varepsilon_t \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$$

  其中 ρ 代表自回归系数。
- 资源约束: $C_t + I_t = Y_t$
- 资本的运动方程: $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$

模型整理

- 把所有变量同除$A_t N_t$，得到下面的优化问题

$$
\begin{aligned}
\max_{c_t, l_t, i_t} \sum_{t=0}^{\infty} & \beta^t ((1-\phi)\log c_t + \phi \log l_t) \\
\text{s.t.} \quad & y_t = z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \\
& c_t + i_t = y_t \\
& k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t \\
& h_t + l_t = 1
\end{aligned}
$$

贝尔曼方程

- 写出贝尔曼方程

1. 贝尔曼方程的参数表示状态：当前资本和技术冲击

$$
\begin{aligned}
V(k_t, z_t) = \max_{c_t, h_t, k_{t+1}} & (1-\phi)\log(c_t) + \phi \log(1-h_t) + \\
& \beta \mathbb{E}[V(k_{t+1}, z_{t+1}) | z_t] \\
\text{s.t.} \quad & c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t
\end{aligned}
$$

2. **消参**

- 代入资源约束

3. 下一期状态不确定，**所以要加期望**

$$
V(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}, h_t} \Big\{ (1-\phi)\log(z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) \\
+ \phi \log(1-h_t) + \beta \mathbb{E}[V(k_{t+1}, z_{t+1}) | z_t] \Big\}
$$

最优条件

- 一阶条件

1. 对k_{t+1}求一阶偏导

$$[k_{t+1}]: \frac{-(1-\phi)}{z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + \beta \mathbb{E}[V_1(k_{t+1}, z_{t+1})|z_t] = 0$$

$$[h_t]: \frac{(1-\phi)(1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha}}{z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} - \frac{\phi}{1-h_t} = 0$$

- 包络性条件

$$V_1(k_t, z_t) = \frac{(1-\phi)(1+\alpha z_t k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - \delta)}{z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}}$$

欧拉方程

- 将一阶条件和包络性条件联立，得到以下的随机欧拉方程：

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}\left[\frac{1}{c_{t+1}} \left(1 + \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha} - \delta\right) \middle| z_t \right]$$

- 另外，需要当期消费、劳动的关系来确定稳态

$$\frac{(1-\phi)(1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha}}{c_t} - \frac{\phi}{1-h_t} = 0$$

1. **上式就是**[h_t]，替换分母为c_t

确定性稳态

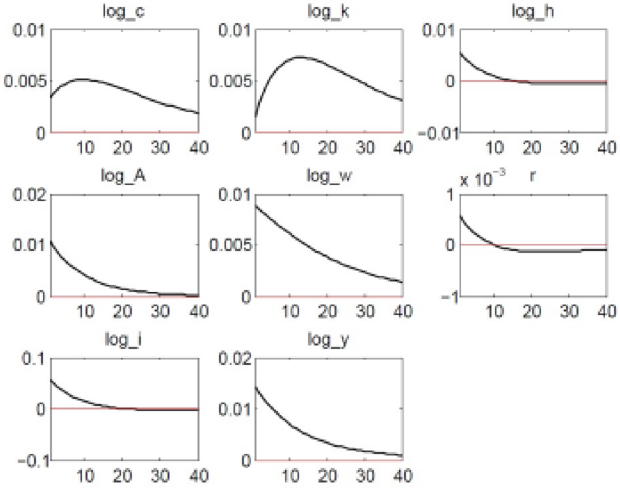
- 假设生产率没有任何偏离的情况下，即$z_t = 1, \forall t$，可以通过

  1. **欧拉方程** $$\frac{1}{c} = \beta\left[\frac{1}{c}(1 + \alpha k^{\alpha-1} h^{1-\alpha} - \delta)\right]$$
  2. 劳动与消费替代关系 $$\frac{(1-\phi)(1-\alpha)k^{\alpha} h^{-\alpha}}{c} - \frac{\phi}{1-h} = 0$$
  3. 预算约束 $$c + k = z k^{\alpha} h^{1-\alpha} + (1-\delta)k$$

  来确定稳态的(c, k, h)的取值。

脉冲响应函数

- 我们可以通过脉冲响应函数(Impulse Response Function)分析：当生产率上升1%时，该经济体内的其他变量会产生怎样的变化？



RBC模型的特点

- 具有微观基础的宏观模型：代理行为人根据冲击，调整最优的选择
- 能够在无摩擦，无名义刚性的情况下产生较为实际的产出波动
- 冲击的传导机制：
  - 生产率带来的投资波动会对资本水平带来长期的影响。
  - 这些影响通过内生的劳动供给决策被进一步扩大。
  - 波动性本身有自回归系数（持久性），会进一步影响生产率冲击的传导

Bewley-Huggett-Aiyagari Model: 代理人异质性

- 这类问题中，行为人表现为“ex ante identical but ex post heterogenous”
- 每个人的初始情况相同，但会经受到不同水平的随机收入冲击，从而影响一生的消费、财富等
- 一般这类模型都存在一种储蓄品，使行为人可以用来一定程度上对冲风险。
    - Huggett model: 代理人间借贷 (Private IOUs, i.e. inside money)，总量为0 (Huggett, 1993)
    - Bewley model: 现金或债券(fiat money or bond, i.e. outside money)，总供给为正 (Imrohoroglu, 1989)
    - Aiyagari model：资本积累，资本总量为正 (Aiyagari, 1994)
- 因此这类模型一般被称为 Bewley-Huggett-Aiyagari model

模型设定

- 优化问题

1. a_{t+1}是家庭的借贷或储蓄，**可以自行决定，但被限制在一个集合A内**

$$\max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + a_{t+1} = (1+r)a_t + ws_t \tag{2}$$

$$a_{t+1} \in \mathcal{A} \tag{3}$$

- 其中 $\mathcal{A}$ 代表下期财富可能的取值，比如说可以是一个$[a_1, a_2, \cdot, a_n]$的格点
- s_i 代表劳动供给的随机冲击；对于一个$s_t = \bar{s}_i$的人来说，其劳动收入会是$w\bar{s}_i$. 假设s_t服从一个m-state 马尔科夫链。

贝尔曼方程

$$v(a_h, \bar{s}_i) = \max_{a' \in \mathcal{A}} \left\{ u[(1+r)a_h + w\bar{s}_i - a'] + \beta \sum_{j=1}^{m} P(i,j) v(a', \bar{s}_j) \right\}$$

- 其中a'代表下期持有的财富，我们可以用一个政策函数来表示：

$$a' = g(a, s)$$

- $P(i,j)$ 代表从状态$\bar{s}_i$ 跳到$\bar{s}_j$的概率。

财富、收入分布的演化

- 我们用$\lambda_t(a,s)$代表在时间t, 财富为a, 劳动收入为s的概率

$$\lambda_t(a,s) = Prob(a_t = a, s_t = s)$$

- 通过马尔科夫链，我们可以计算下一期收入和财富在a', s'的概率

$$Prob(a_{t+1} = a', s_{t+1} = s') = \sum_{a_t}\sum_{s_t} Prob(a_{t+1} = a'|a_t = a, s_t = s) *$$
$$Prob(s_{t+1} = s'|s_t = s) * Prob(a_t = a, s_t = s)$$

或者我们也可以写成

$$\lambda_{t+1} a', s' = \sum_{a}\sum_{s} Prob(s_{t+1} = s'|s_t = s) * \mathcal{I}(a', s, a)$$

这里当且仅当$a' = g(a,s)$时，$\mathcal{I}(a', s, a) = 1$

平稳分布(Stationary Distribution)

- 也可以写成

$$\lambda_{t+1}(a', s') = \sum_{s} \sum_{a:a'=g(a,s)} \lambda_t(a, s) P(s, s')$$

- 如果有一个λ 满足上式且不随时间变化$\lambda_{t+1} = \lambda_t$, 那么我们就管这个$\lambda$ 叫做一个平稳分布(stationary distribution)
- 换言之，虽然每个人的财富、收入状态存在异质性，且在一直变化，但是在平稳分布下，全社会的财富、收入分布保持不变。从另一个角度理解，我们可以把$\lambda(a, s)$看做一个无穷寿命的行为人在(a, s)状态下停留的时间的占比。

Huggett(1993)：A pure credit economy

- 如前面所言，不同模型对于财富a的定义不同。在Huggett模型中，假设所有人可以用r的利率去储蓄或者借贷，但是这种借贷需要满足借贷市场出清（也就是所有代理人的总借贷=0）
- $w = 1$, 家庭的固定收入s服从马尔科夫链$\mathcal{P}(s, s')$
- Huggett (1993) 设置了一个借贷上限(borrowing constraint)，以 ϕ 表示。也就是说，

$$\mathcal{A} = [a_1, \cdots, a_m], \text{where } a_1 = -\phi$$

均衡的定义

我们将这个模型的平稳均衡(Stationary Equilibrium) 定义为利率r, 政策函数$g(a,s)$，以及一个平稳分布$\lambda(a,s)$的组合，需要满足：

- 政策函数 $g(a,s)$ 是代理人优化问题的解；
- 平稳分布$\lambda(a,s)$ 由马尔科夫链$\mathcal{P}(s,s')$和政策函数 $g(a,s)$决定；
- 借贷市场出清

$$\sum_{a,s}\lambda(a,s)g(a,s)=0$$

均衡的求解：设置初始$r_0=r$，对于这个利率解家庭的优化问题，得到政策函数$g(a,s)$，以及所对应的稳态分布$\lambda_0(a,s)$。通过这两者，检查借贷市场是否出清，即

$$\sum_{a,s}\lambda_0(a,s)g(a,s)=e_0^*$$

如果$e_0^*>0$, 设置$r_1<r_0$，重复迭代过程，直到找到能够使借贷市场出清的r。

Aiyagari (1994): A Model with Capital

- 和 Huggett(1993) 模型不同，Aiyagari (1994) 引入了实体资本，让资本的运动方程为
$$k_{t+1} = k_t(1-\delta) + i_t$$
- 代理人的预算约束为
$$c_t + i_t = r_t^k k_t + ws_t$$
- 代入，化简
$$c_t + k_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)k_t + ws_t$$

公司问题

- 生产函数
$$F(K, N) = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$$
其中K, N为总资本、总劳动。工资、租金由公司问题决定
$$w = \frac{\partial F(K, N)}{\partial N}$$
$$r_t^k = \frac{\partial F(K, N)}{\partial K}$$
- 在Aiyagari模型中，假设总劳动处在一个不变分布下劳动供给的平均水平，$N = \zeta^p rime_{\infty} \bar{s}$，由马尔科夫链和劳动供给的向量共同决定。

平稳均衡(Stationary Equilibrium)的定义

一个平稳均衡定义为一个政策函数$g(k,s)$,一个概率分布$\lambda(k,s)$，以及(K,r,w)，满足：

1. Aiyagari和Huggett模型的区别在于财富的转移方式。H是储蓄和借贷，A是投资。

- (w,r)满足公司问题；

2. A和H模型在平稳均衡的定义上的差别集中在利率上，H模型要求利率满足资本市场出清，A模型的利率等于资本边际产出。像“政策函数是代理人优化问题的解”“概率分布lambda(k, s)对应平稳分布”，都一致。

$$w = \frac{\partial F(K,N)}{\partial N}$$

$$r = \frac{\partial F(K,N)}{\partial K} - \delta$$

- $g(k,s)$是代理人优化问题的解；
- 概率分布$\lambda(k,s)$是$[g(k,s),\mathcal{P}]$对应的平稳分布，即

$$\lambda(k',s') = \sum_{s} \sum_{k:k'=g(k,s)} \lambda(k,s)P(s,s')$$

- 总资本K满足

s)

k,s

均衡的算法

- 设置初始$K = K_0$，根据公司问题计算(w, r);
- 根据(w, r)计算政策函数$g_0(k, s)$ 和平稳分布$\lambda_0(k, s)$
- 计算$\lambda_0(k, s)$对应的总资本

$$K_0^* = \sum_{k,s} \lambda_0(k, s) g(k, s)$$

- 设置一个“relaxation parameter” $\zeta \in (0, 1)$，更新总资本的取值:

$$K_1 = \zeta K_0 + (1 - \zeta) K_0^*$$

- 重复，直到K_j和K_{j+1}足够接近。

参考

- *Aiyagari Models*, Lecture slides by Jesus Fernandez-Villaverde, University of Pennsylvania
- *Recursive Macroeconomic Theory* by Lars Ljungqvist and Thomas J.Sargent, Chapter 17