宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/20

增长核算（Growth Accounting）

- 假设总生产函数为：

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

- 两边取自然对数：

$$\ln Y_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha)(\ln N_t + \ln A_t)$$

- 分析两期之间的差别

$$\ln Y_{t+1} - \ln Y_t = \alpha(\ln K_{t+1} - \ln K_t) + (1-\alpha)(\ln A_{t+1} - \ln A_t + \ln N_{t+1} - \ln N_t)$$

- 可以写作：

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha) g_N + (1-\alpha) g_A$$

不论是否处在平衡增长路径（balanced growth path），上述关系都会成立

增长核算-2

- $g_Y - \alpha g_K - (1-\alpha) g_N = (1-\alpha) g_A$：索洛剩余，反映了除劳动和资本之外其他的增长来源。
- 可以计算人均收入（生活水平）的增长：

$$\ln \frac{Y_{t+1}}{N_{t+1}} - \ln \frac{Y_t}{N_t} = \alpha \left(\ln \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} - \ln \frac{K_t}{N_t} \right) + (1-\alpha) g_A$$

换言之，增长核算将生活水平的增长中α 部分归结于人均资本的积累，剩下 $1-\alpha$ 部分归结于科技的进步。

- 当经济体处在平衡增长路径时，$g_K = g_N + g_A$，此时总产出也满足

$$g_{\mathrm{Y}} = g_N + g_A$$

模型讨论

模型的核心启示：仅靠资本累积无法解释经济增长，也不能很好解释跨国收入差距，一定需要依靠科技的增长。

- 角度一：以资本差异解释收入差异，需要的资本差异过于巨大。例如，一国比另一国的工人平均产出大10倍，这需要资本差异为$10^{\frac{1}{\alpha_k}} = 1000$倍。实际上工业国家与落后国家相比，工人平均资本仅仅高出20-30倍。
- 角度二：产出差异意味着巨大的资本收益率差异。

$$f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} = \alpha y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

资本的边际产出（收益率）对产出的弹性为$-(1-\alpha)/\alpha$。当$\alpha = 1/3$时，这意味着当y增加10倍，$f'(k)$ 减少为原来的$1/100$ (穷国的资产收益率是富国的100倍）。

实证估计

- Baumol (1986)：考察了16个工业化国家从1870-1979年经济增长的收敛过程。

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right]-\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]=a+b\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]+\epsilon_i$$

- 其中$\ln(Y/N)$是人均收入的对数，ϵ 为误差项，i 代表国家。问题：b 的符号、大小与收敛性的关系？

实证估计-2

$b=0$: 不存在收敛性； $b<0$: 存在收敛性； $b=-1$: 完美收敛。

Baumal 发现的结果：

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1979}\right]-\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]=8.4557-\underset{(0.094)}{0.995}\ln\left[\left(\frac{Y}{N}\right)_{i,1870}\right]$$

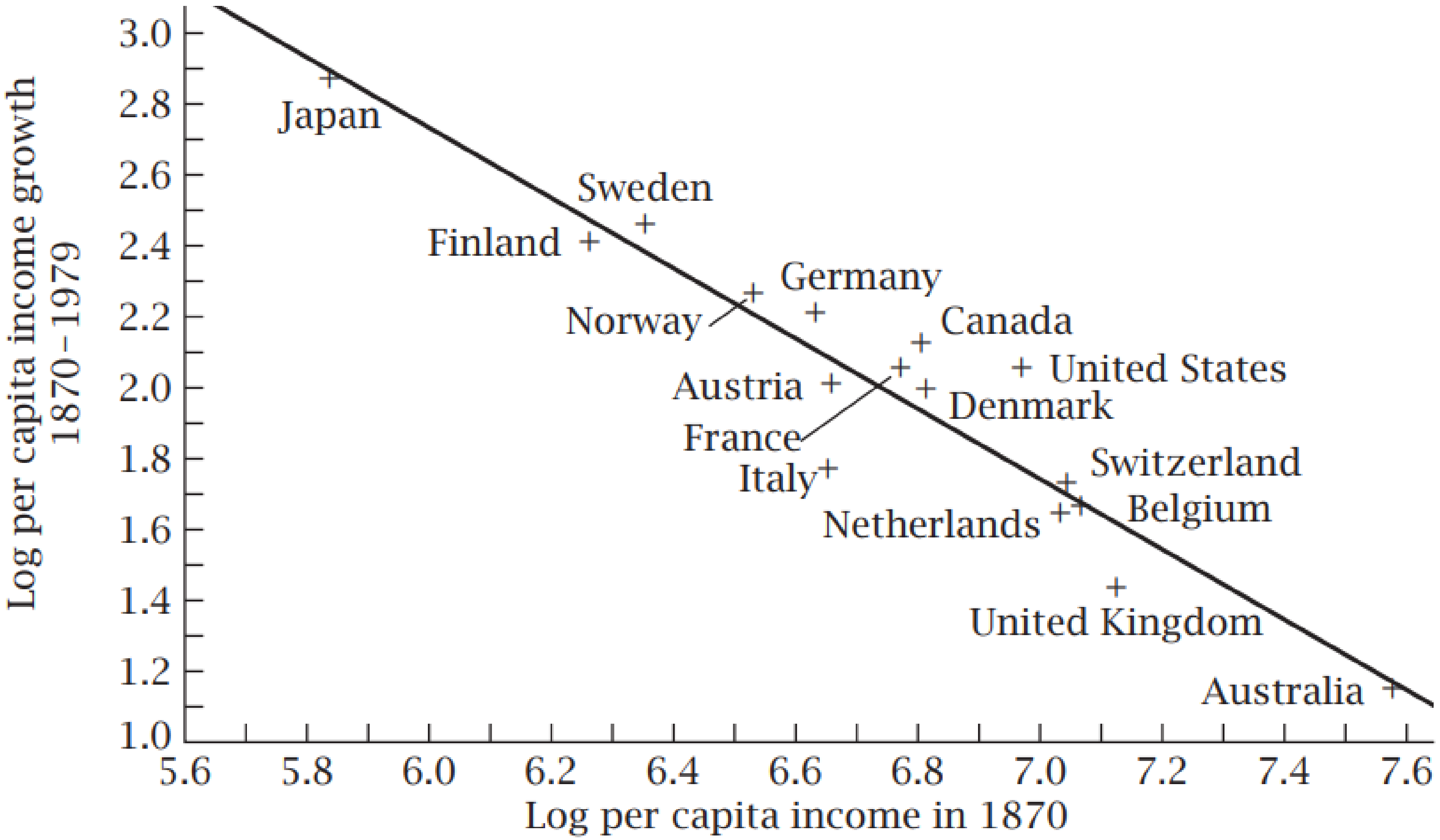


FIGURE 1.7 **Initial income and subsequent growth in Baumol's sample (from DeLong, 1988; used with permission)**

Baumol(1986) 的问题？

- DeLong (1988) 指出了两点问题。

1. 样本选择
   能够有较长数据序列的国家往往是工业化最彻底的国家。100年前并不富裕的国家能够进入样本，通常是因为它们在过去的100年间增长迅速。

DeLong 在Baumol的基础上，考察了1870年较为富裕的一些国家，加入了1870年GDP比芬兰高的七个国家（阿根廷，智利，东德，爱尔兰，新西兰，葡萄牙和西班牙），去掉了一个国家（日本）。发现b的回归结果减少到-0.566，标准差为0.144，收敛性减少了约一半。

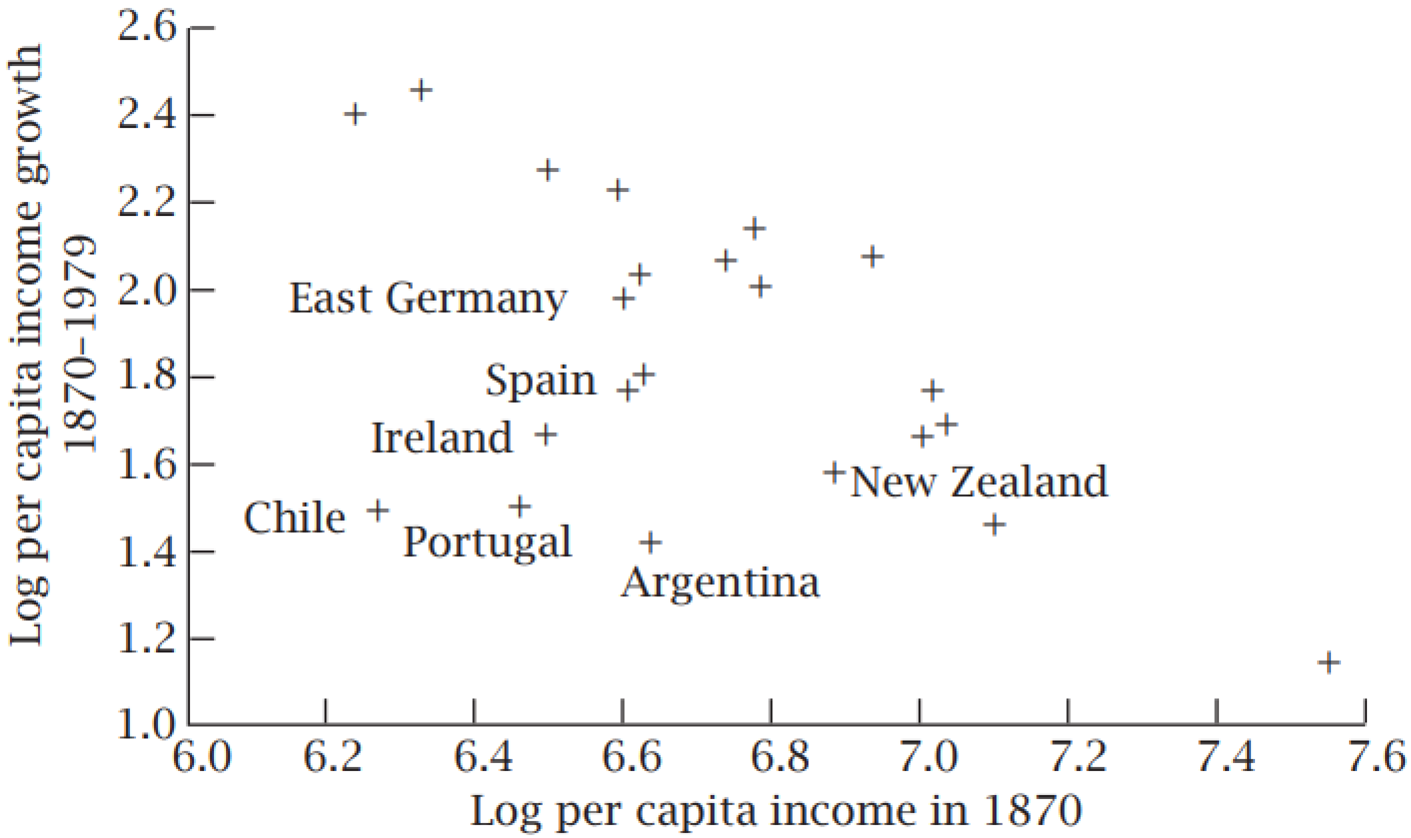


FIGURE 1.8 **Initial income and subsequent growth in the expanded sample (from DeLong, 1988; used with permission)**

Baumol (1986) 的问题？

2. 测量误差

- 1870年收入的测量误差会导致结果偏向收敛；当1870年的收入被低估时，1870-1979年的增长会被高估；反之亦然。
- DeLong 估计，当初始收入的平均测量误差在15%左右时，b的真实估计值接近0；当初始收入的平均测量误差在20%左右时，b的真实估计值接近1。
- 从计量方法上，无法识别增长与初始收入的负相关关系来自于收敛性还是测量误差。

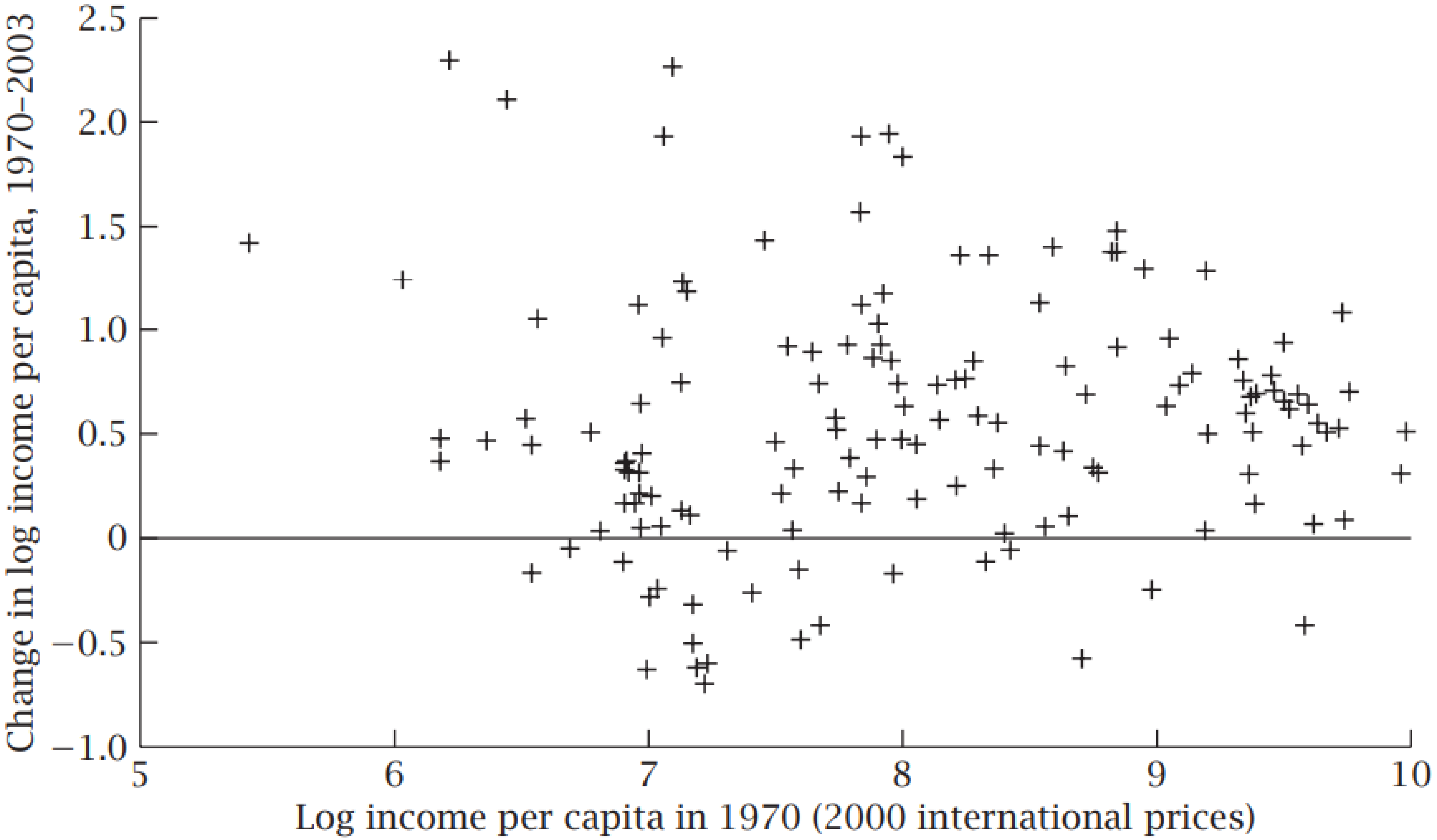


FIGURE 1.9 Initial income and subsequent growth in a large sample

其他实证研究

储蓄和投资的关系：Feldstein and Horioka (1980)

- 研究了在开放世界中, 一个国家储蓄率上升的影响。
- 随着国内储蓄上升，资本的边际收益相比别国降低，本国居民有动机将资本投资于别国。
- 在没有跨国资本流动的限制条件下，国内的高储蓄率不一定意味着高投资率。

其他实证研究

- Feldstein and Horioka (1980)， 21个工业国家，1960-1974年：

$$(I/Y)_i = \underset{(0.018)}{0.035} + \underset{(0.074)}{0.887}(S/Y)_i, \quad R^2 = 0.91$$

- 回归系数接近为1，说明跨国资本流动存在限制。
- 其他可能的解释：高税收同时减少储蓄和投资(Barro, Mankiw, and Sala-i-Martin, 1995)；国家监管, 如Helliwell 1998发现国内不同地区的储蓄-投资关系远远弱于不同国家之间的储蓄-投资关系。

总结

索洛模型的主要结论：

1. 无论从任何一点出发，经济向平衡增长路径收敛，在平衡增长路径上，每个变量的增长率都是常数。
2. 在其他外生变量相似的条件下，人均资本低的经济有更快的人均资本的提高，人均收入低的经济有更高的增长率。
3. 人均产出（Y/N）的增长来源于人均资本存量和技术进步，但只有技术进步才能够导致人均产出的永久性增长。

总结

索洛模型的主要结论：

4. 通过调节储蓄率可以实现人均最优消费和最优资本存量的“黄金律”增长。
5. 储蓄率的变化只会暂时性地影响增长率，而不会永久性地影响；储蓄率的显著变化对平衡增长路径上的产出变化只有较小的影响，且作用缓慢。

总结

索洛模型的主要批评:

1. 未能够解释长期经济增长的真正来源。把技术进步（劳动的有效性）看成为外生给定的，而这恰恰是长期经济增长的关键。因此，索洛模型是通过“假定的增长”来解释增长的。
2. 理论预测与实际数据不符。如果资本取得的市场收益大致体现了其对产出的贡献，那么实物资本积累的变化既不能很好地解释世界经济增长，也不能说明国家间的收入差距。

Ramsey增长模型

从索洛模型出发

- 从索洛模型中，我们对于“稳态”（steady state），“过渡路径”（transition path）等概念有了一定的了解
- 索洛模型的核心假设是固定的储蓄率，这一假设并不符合现实
- 今天我们进一步扩展，在一个新古典主义的框架内，让经济行为人能够自由选择储蓄的多少，在这个框架内分析经济增长

Ramsey-Cass-Koopmans 模型

- 简称 Ramsey 模型，或者新古典增长模型（Neoclassical growth model）
- 本课为了和索洛模型加以区分，有时将Ramsey模型简称为新古典增长模型，但严格来说索洛模型也可以归类为新古典主义的增长模型范畴
- 社会计划者的版本最早由英国经济学家Frank Ramsey在1928年创立，竞争均衡的版本由美国经济学家 David Cass 和荷兰经济学家 Tjalling Koopmans 在1965年提出

模型设定-家庭

- 无限期模型，$t = 0,1,2,\ldots$
- 代理家庭的效用函数为：

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

其中 $0 < \beta < 1$

- 假设代理家庭每期的劳动供给为$N_t = 1$，初始的资本总量为K_0

模型设定-生产函数

- 生产函数满足规模效应不变（CRS），且科技水平不变，$A_t = A$

$$Y_t = F(K_t, N_t)$$

- 资源约束：

$$C_t + I_t = Y_t$$

- 资本的转移规律：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

有点眼熟...

- 就是一个带有劳动、资本的无限期模型

- 从社会计划者的角度看，优化问题是：

$$\max_{\{C_t,N_t,I_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t = F(K_t, N_t)$$

$$N_t = 1$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

简化优化问题

- 代入$N_t = 1$

$$\max_{\{C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t = F(K_t, 1)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

- 简化预算约束，定义$f(K_t) = F(K_t, 1)$

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

解优化问题（顺便复习

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

- 无限期模型，每期有一个预算约束，因此每期需要一个拉格朗日系数
- 拉格朗日系数可以乘 β^t，相当于把第t期预算约束放松带来的效用折到第0期；也可以不乘，此时拉格朗日系数的含义不同，不影响结果

拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \left(f(K_t) - C_t - K_{t+1} + (1-\delta)K_t\right)$$

- 一阶导数：

$$\begin{aligned} [C_t]: &\quad \beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0 \\ [K_{t+1}]: &\quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta)) = 0 \\ [\lambda_t]: &\quad f(K_t) - C_t - K_{t+1} + (1-\delta)K_t = 0 \end{aligned}$$

- 最后是否对拉格朗日系数求导都无所谓，因为最后一个一阶导数就是预算约束。
- 另外，社会计划者决定的变量是K_{t+1}，因为第0期 K_0给定, 社会计划者选择 K_1; 第1期选择K_2; 依次类推。

解出模型

- 前两个一阶导数联立，找到我们的“老朋友”——欧拉方程

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(f_k(K_{t+1}) + (1 - \delta))$$

- 如何解释欧拉方程?

- 另外一个公式：资源约束

$$C_t + (K_{t+1} - (1 - \delta)K_t) = f(K_t)$$

稳态分析

- 问题：这个经济体是否存在稳态？

- 如果有的话，稳态存在于二维空间(C^*, K^*)。与索洛模型不同，储蓄率不再固定，资本水平变化可能导致消费-储蓄权衡之间的变化

- 我们假设一些具体的函数形式，做进一步分析

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$F(K_t, N_t) = AK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha} \Rightarrow f(K_t) = AK_t^{\alpha}$$

稳态分析

- 不论是否在稳态，经济体都满足欧拉方程和资源约束

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

$$C_t + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = f(K_t)$$

- 稳态时，这两个方程可以写作：

$$\begin{aligned} u'(C^*) &= \beta u'(C^*)(f_k(K^*) + 1 - \delta) \\ C^* + (K^* - (1-\delta)K^*) &= f(K^*) \end{aligned}$$

解出稳态

代入函数形式

$$
\begin{aligned}
(C^*)^{-\gamma} &= \beta (C^*)^{-\gamma} (\alpha A (K^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\
C^* + (K^* - (1-\delta)K^*) &= A(K^*)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

从第一个方程，我们可以解出稳态的资本水平

$$
K^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

代入第二个方程，找到稳态消费

$$
C^* = A(K^*)^{\alpha} - \delta K^*
$$

提问：为何此时依然满足 $I^* = \delta K^*$?

图像分析

- 上次我们画出K_{t+1}和 K_t 的关系，从而找到了索洛模型中的稳态

- 这次我们画出K_t 和 C_t 的关系，把K_t 放在横轴， C_t 放在纵轴。我们先找到这个稳态，再分析它是否满足局部稳定性（local stability）

- 这幅图也叫做 Phase diagram（相图，相态图）， 描述了两种变量的变化关系

Phase diagram - Overview

- 我们在图上画出两条线:
  - 第一条：所有满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合
  - 第二条：所有满足$K_{t+1} = K_t$的点(K_t, C_t)的组合

Phase Diagram – Step 1

- 所有满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合

欧拉方程描述了跨期的消费之间的关系:

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

满足$C_{t+1} = C_t$的点是:

$$1 = \beta(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

这条线的形状?

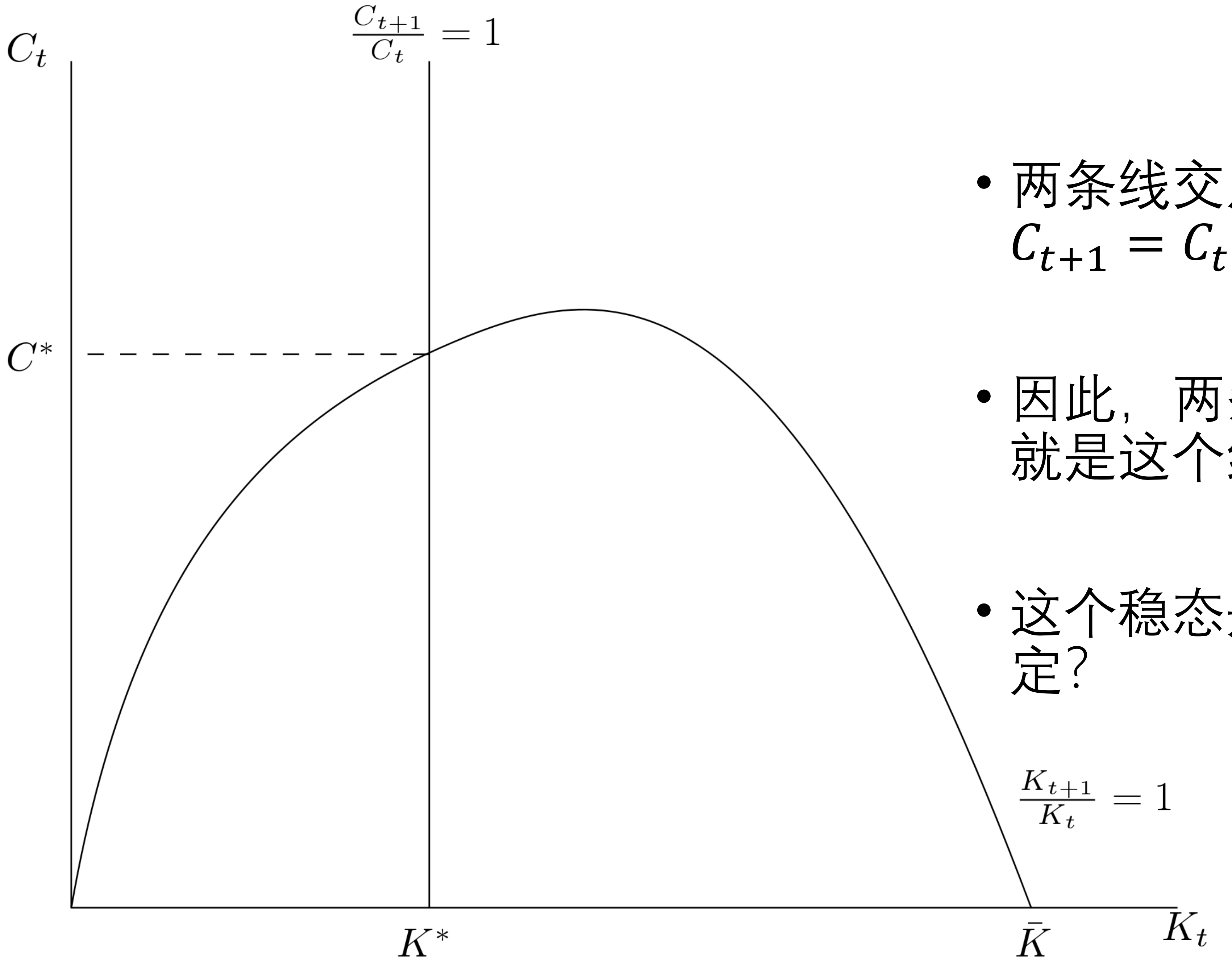
Phase Diagram – Step 2

- 满足$C_{t+1} = C_t$的点(K_t, C_t)的组合是一条直线， $K_t = K^*$
- 再找出：所有满足$K_{t+1} = K_t$的点(K_t, C_t)的组合
- 资源约束：

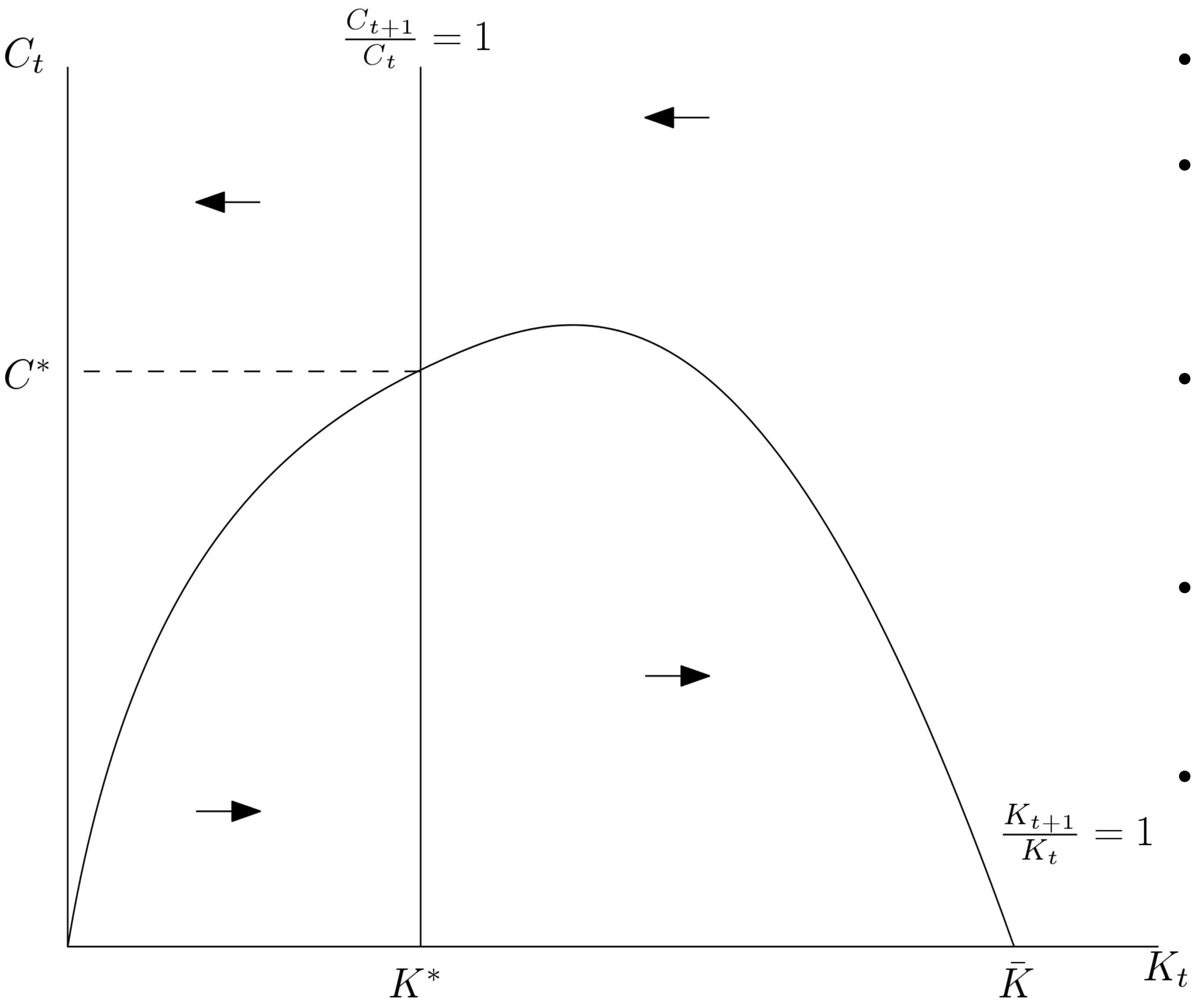
$$C_t \ + (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) = AK_t^{\alpha}$$

- 当$K_{t+1} = K_t = K$时，意味着$C_t = AK^{\alpha} - \delta K$
- 这是一条拱形的弧线，通过(0,0)以及横轴上$\overline{K}$点， $\overline{K}$满足

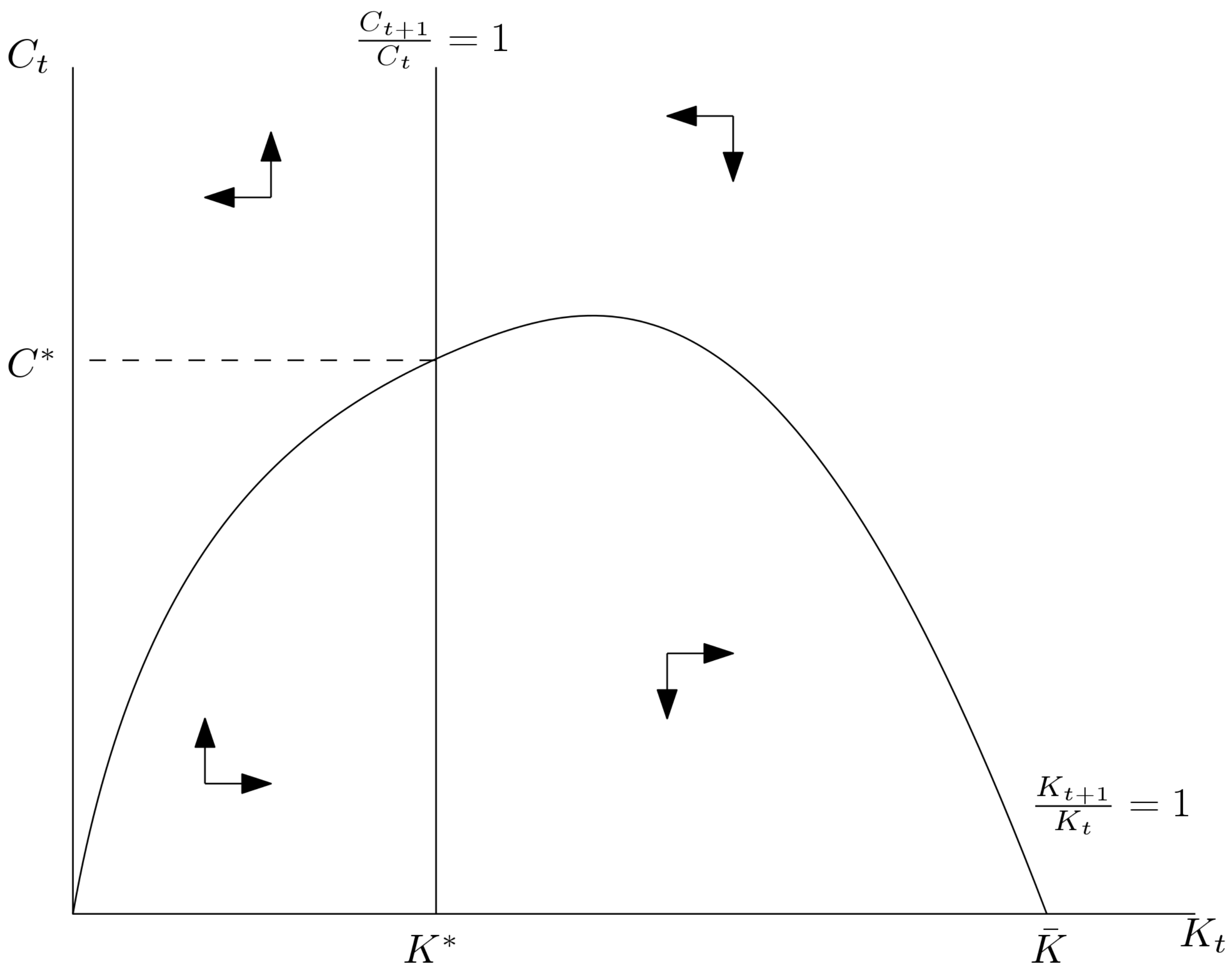
$$A\overline{K}^{\alpha} - \delta\overline{K} = 0$$



- 两条线交点处，同时满足 $C_{t+1} = C_t$ 和 $K_{t+1} = K_t$
- 因此，两条线的交点(K^*, C^*)就是这个经济体的一个稳态
- 这个稳态是否满足局部性稳定？

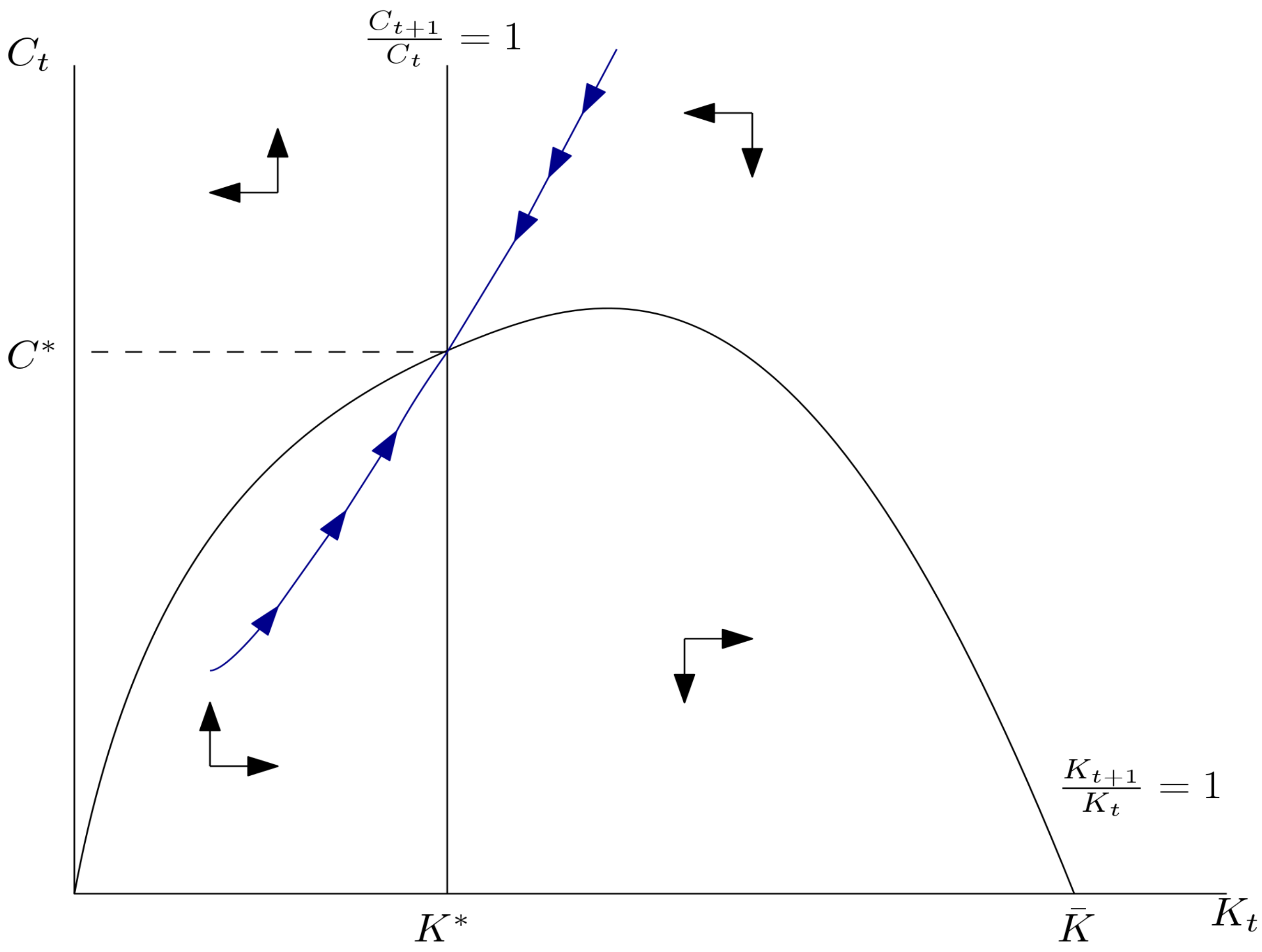


- 这两条线将第一象限划分为四个部分
- 我们可以讨论经济体从各个部分出发，是否会收敛到稳态水平
- 如果经济体起始点在弧线$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$之下，资本会发生怎样的变化？
- 此时：消费少于能够使得资本不变的水平，意味着投资过多，下一期资本增加
- 弧线之上相反，消费过多，资本减少



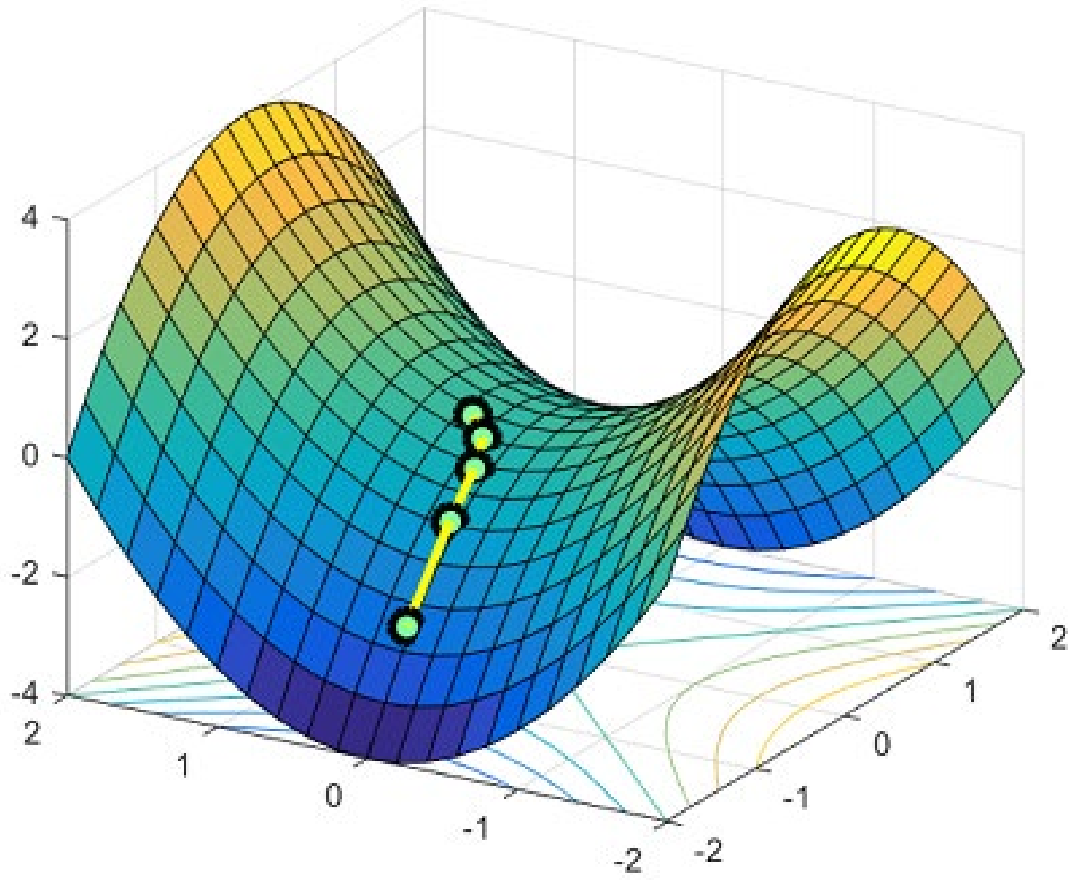
- 如果选择资本K_{t+1}在直线$\frac{C_{t+1}}{C_t}=1$右边会如何?
- 此时：投资高于使得消费保持不变的水平，意味着消费将会下降
- 之所以分析K_{t+1}，是因为K_t是状态变量，非t期能够决定

马鞍路径（Saddle path）



- 这里我们发现，只有相图的两个区域可能存在收敛
- 边界时的情况？
- 在这个系统中，仅能通过一条唯一的路径(K_t, C_t)趋近稳态，这条路径也被称为马鞍路径（saddle path）

马鞍路径



- 系统仅仅在特定的方向存在稳定性，局部稳定性不成立

- 小碗 vs 马鞍

马鞍路径的唯一性

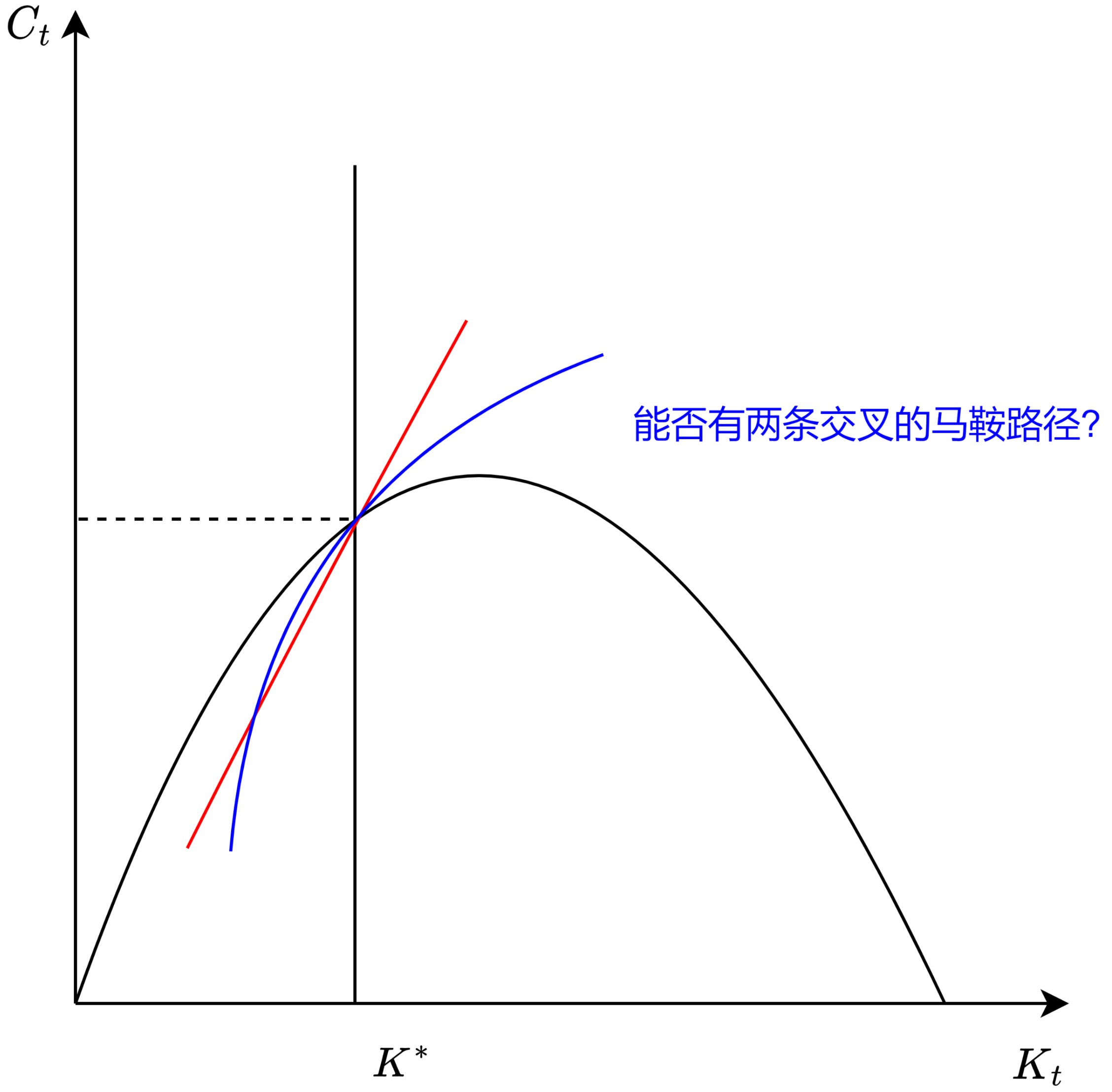
在交点处，给定C_t, K_t，资源约束决定了投资I_t以及下期资本K_{t+1}的大小：

$$K_{t+1} = f(K_t) + (1-\delta)K_t - C_t$$

给定C_t, K_{t+1}，欧拉方程唯一决定了下期消费C_{t+1}的大小：

$$u'(C_{t+1}) = \frac{\beta\big(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta)\big)}{u'(C_t)}$$

因此，通过同一点(K_t, C_t)的路径有且只有一条。



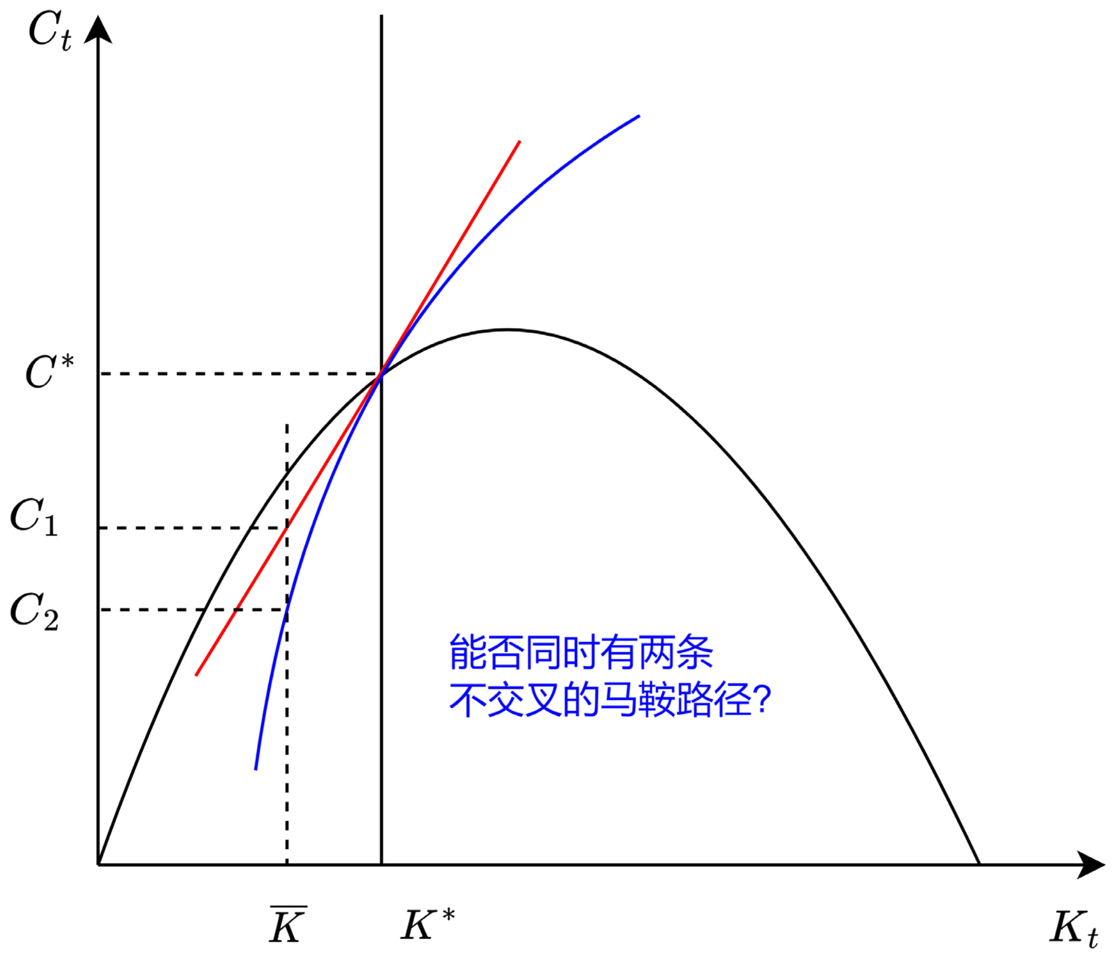
马鞍路径的唯一性-2

假设存在两条不交叉的马鞍路径，使得在同一资本水平$K_t = \bar{K}$下，存在两个消费水平C_1, C_2 分别处在两条马鞍路径上。此时根据资源约束

$$K_{t+1} - K_t = K_{t+1} - \bar{K}$$

$$= f(\bar{K}) + (1-\delta)\bar{K} - C_t$$

C_2点对应的下期资本$K_{2,t+1}$大于C_1点对应的下期资本$K_{1,t+1}$



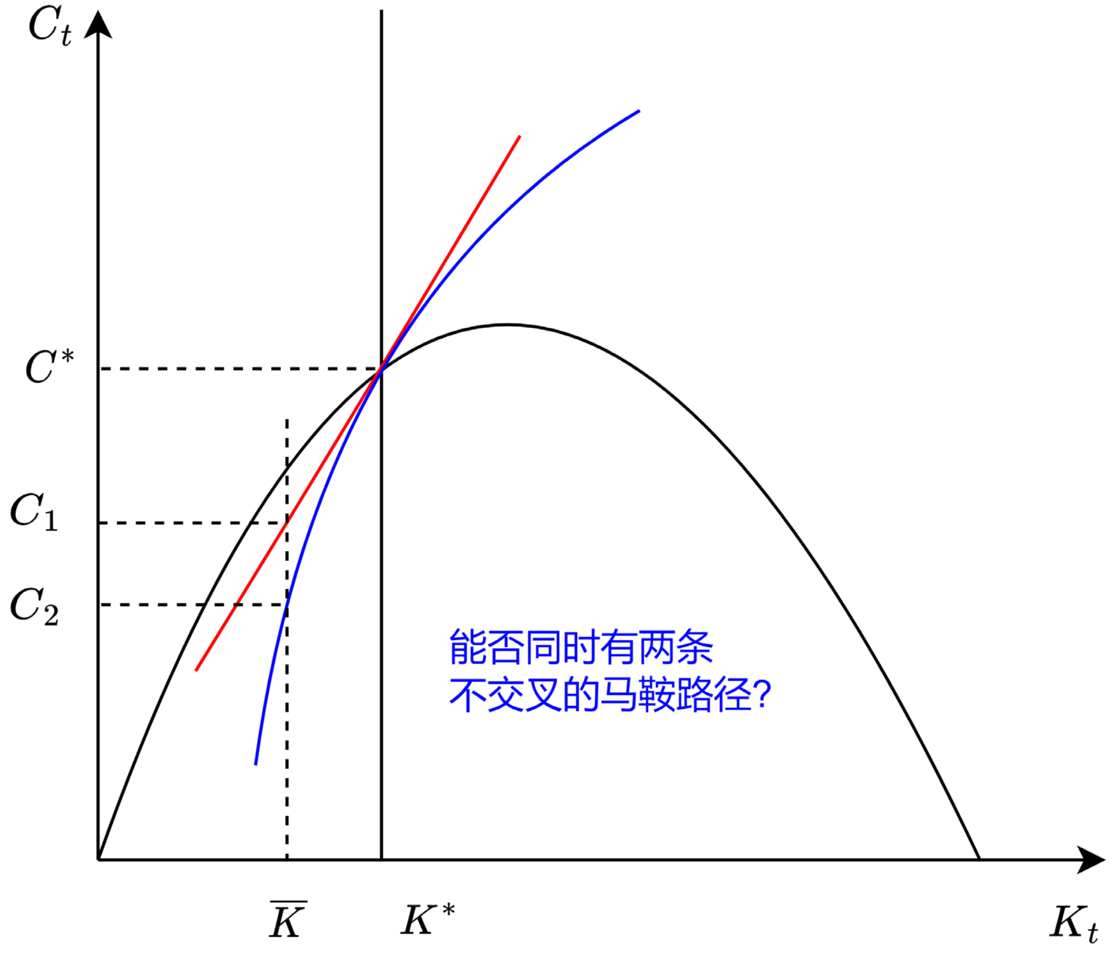
马鞍路径的唯一性-3

根据欧拉方程,

$$\frac{u'(C_t)}{u'(C_{t+1})} = \beta(f_k(K_{t+1}) + (1-\delta))$$

K_{t+1}越大，$f_k(K_{t+1})$越小，$\frac{C_{t+1}}{C_t}$ 越小。

因此，C_2点对应的消费增速$\frac{C_{2,t+1}}{C_{2,t}}$ 小于C_1点对应的消费增速$\frac{C_{1,t+1}}{C_{1,t}}$

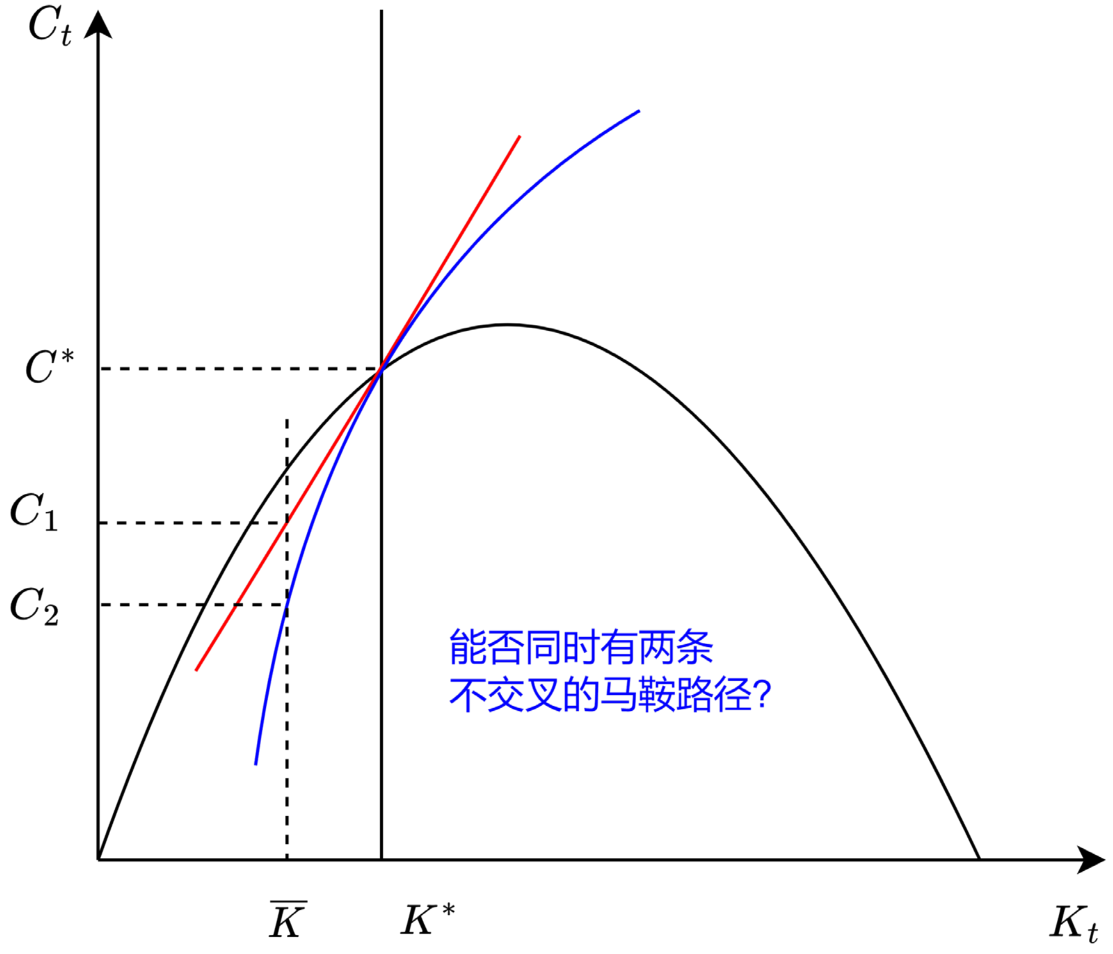


马鞍路径的唯一性-4

总结:

- C_2点的投资增速大于C_1点的投资增速
- C_2点的消费增速小于C_1点的消费增速

根据以上观察，如果C_1, C_2同时存在马鞍路径，通过C_2点的马鞍路径的斜率应当小于通过C_1点的马鞍路径斜率。而这两条路径不可能收敛于同一点。



相图（Phase Diagram）的含义

- 在已知(K_t, C_t)的情况下，告诉我们(K_{t+1}, C_{t+1}) 的位置
- 一阶差分方程（First-order difference equation）
- 假设$u(c) = \ln c$

$$K_{t+1} = AK_t^{\alpha} + K_t(1-\delta) - C_t$$

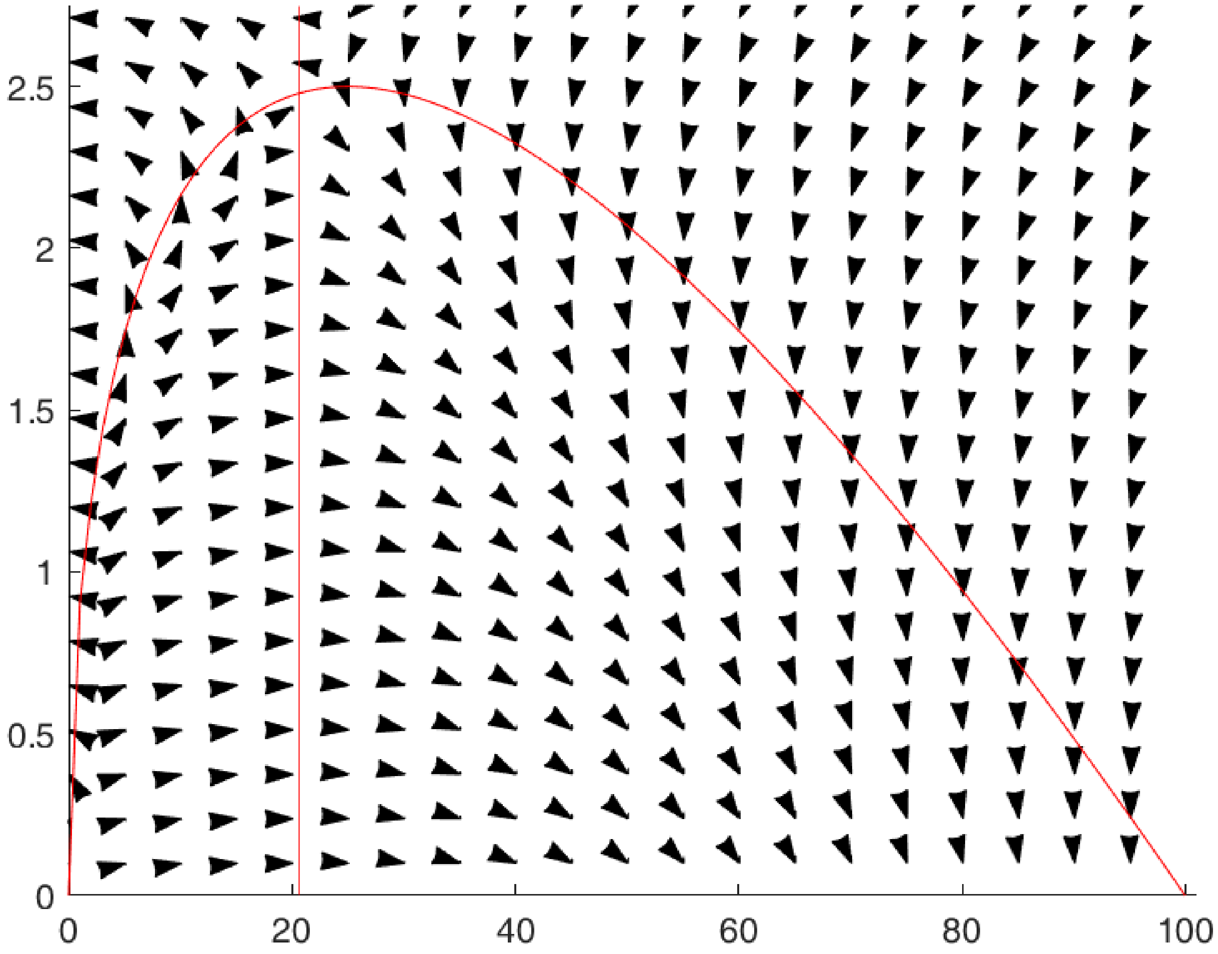
$$C_{t+1} = \beta(\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta)C_t$$

- 第二个方程右边是K_{t+1}，这就使得分析有一些难度；我们可以做如下的近似：

$$C_{t+1} = \beta(\alpha A K_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)C_t$$

- 这样右边只有(K_t, C_t)，因此无论在图上哪个位置出发，我们都能知道(K_{t+1}, C_{t+1}) 应该落在何处

相图的箭头方向

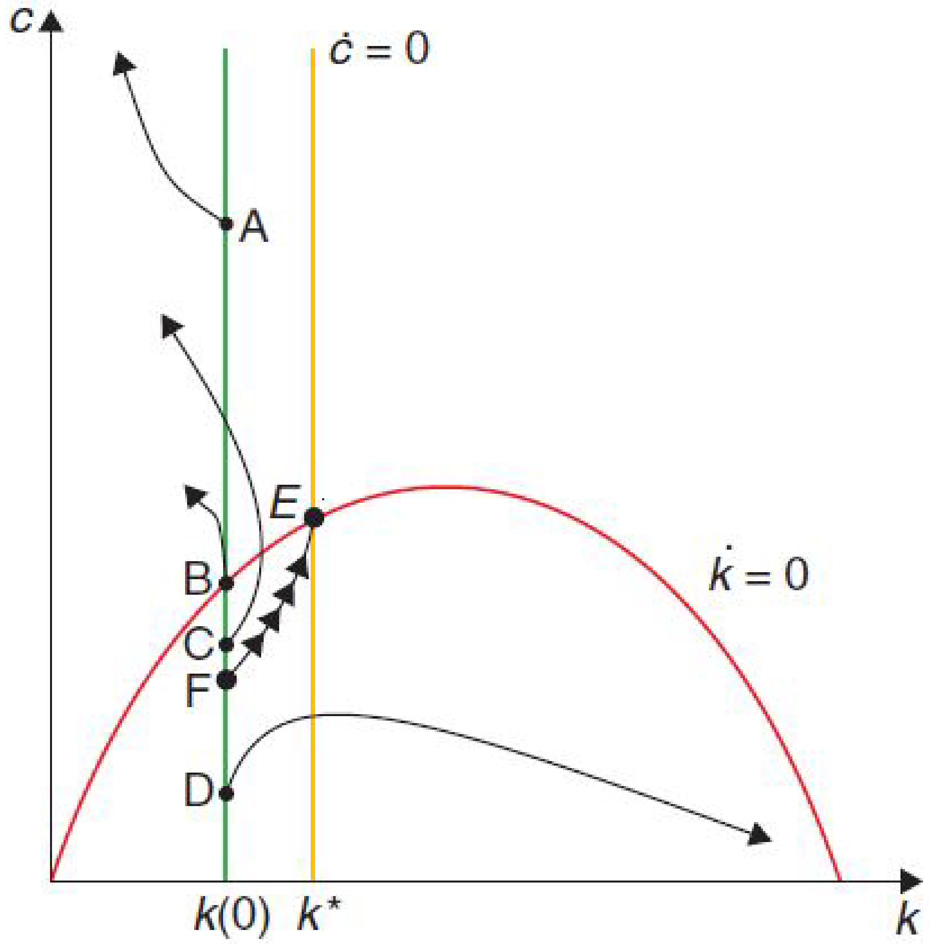


$$K_{t+1} = AK_t^\alpha + K_t(1-\delta) - C_t$$
$$C_{t+1} = \beta(\alpha AK_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)C_t$$

我们可以计算在任一点上，资本、消费变化的百分比：

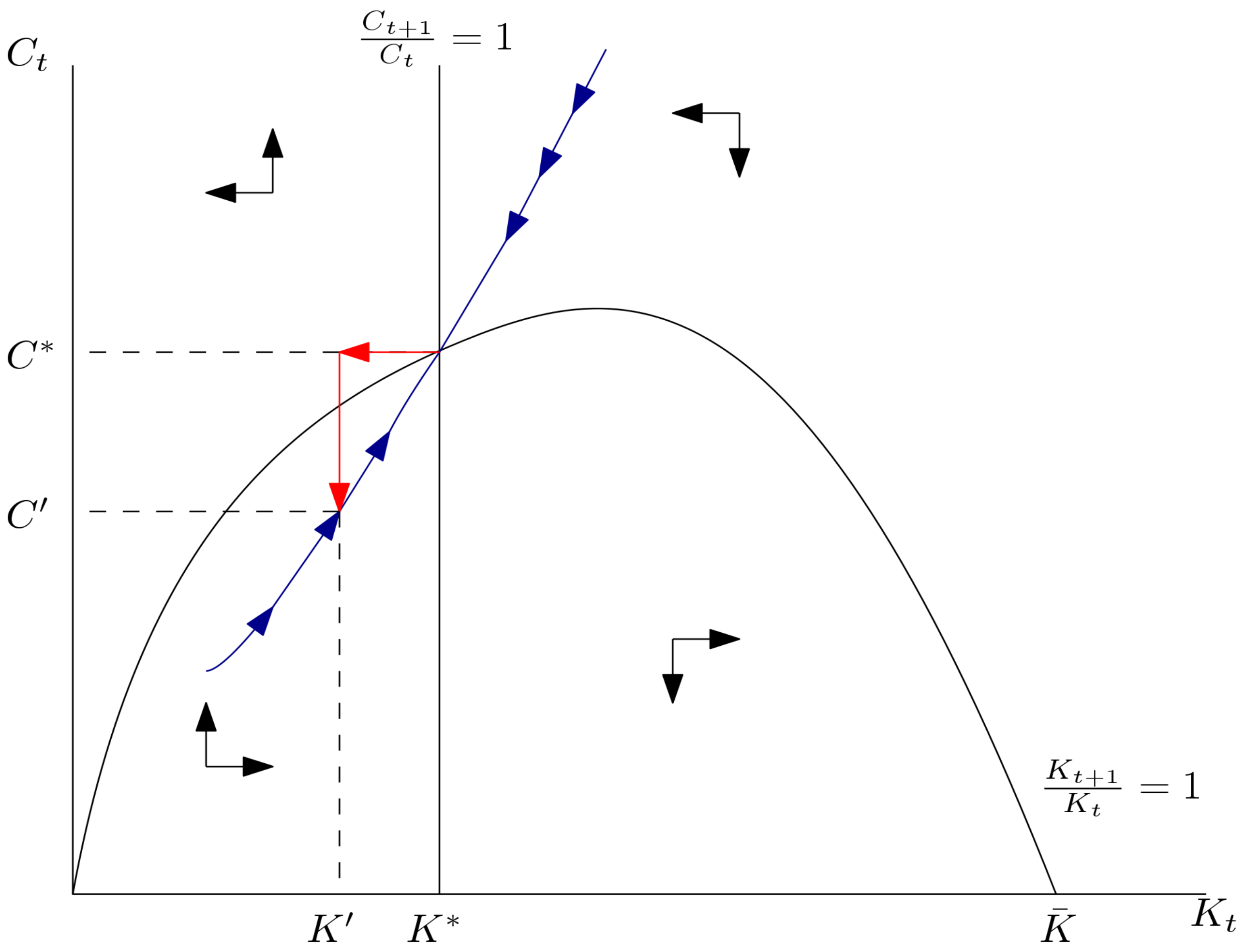
$$\frac{K_{t+1}}{K_t} - 1 = \frac{AK_t^\alpha - C_t}{K_t} - \delta$$
$$\frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 = \beta(\alpha AK_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) - 1$$

Saddle Path（马鞍路径）

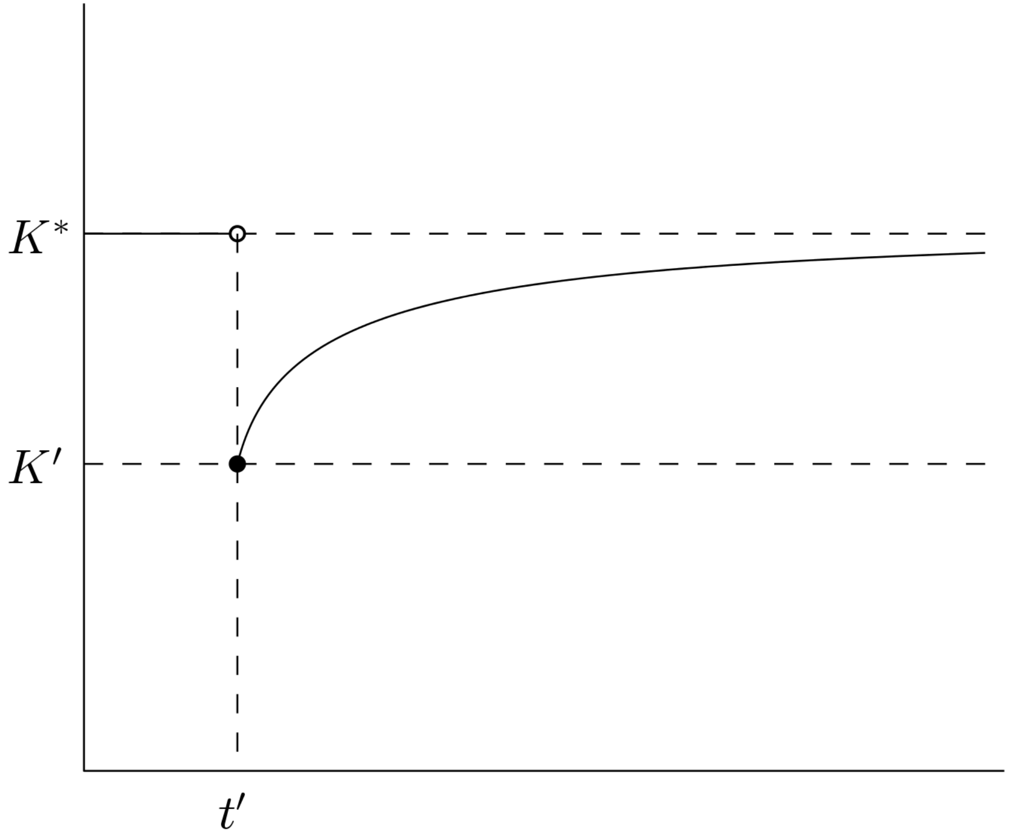


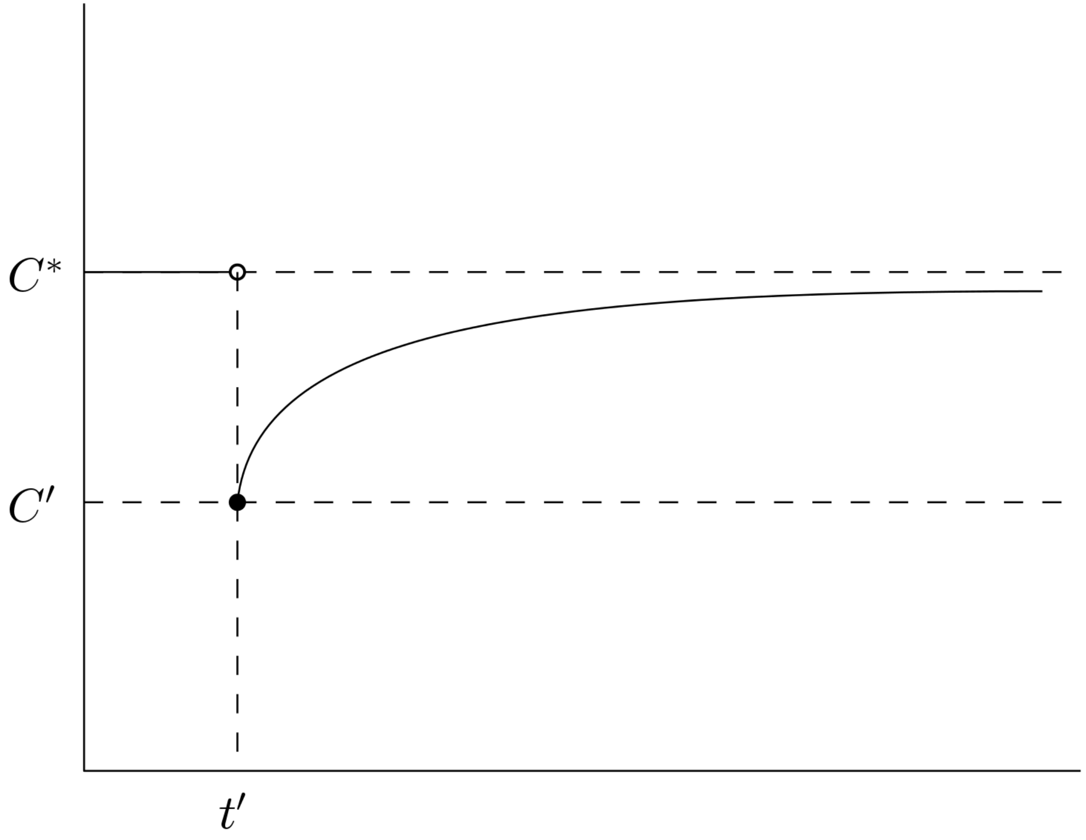
- 给定任何一个起始资本量K_0，如何决定第一期的消费C_0？
- 马鞍路径：唯一存在一个C_0, 使得整个系统能收敛至稳态(K^*, C^*)
- 同时满足欧拉方程，资源约束和横截性条件（Transversality Condition，还没说到）

例子1：对资本的外生冲击

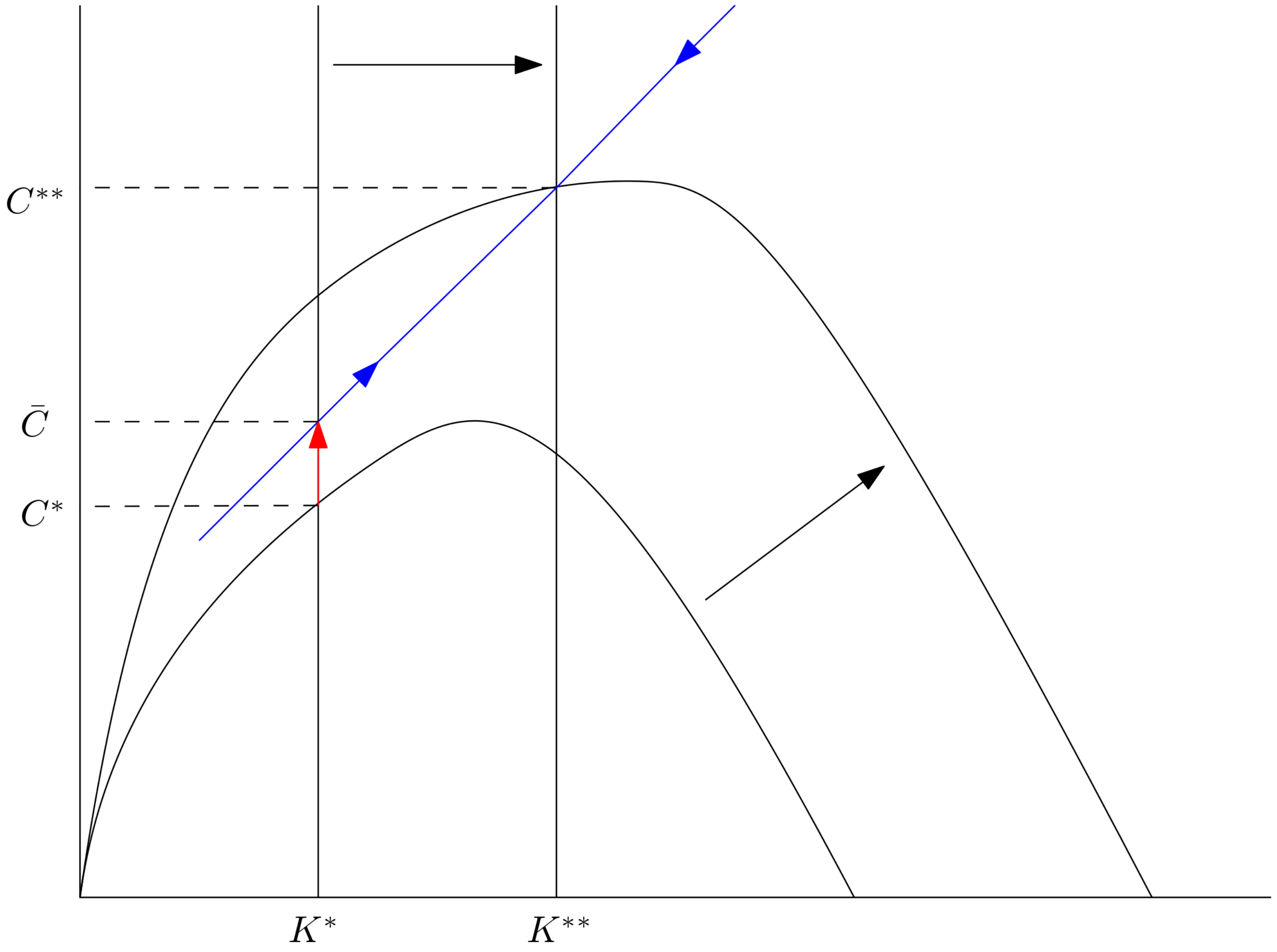


例子1：对资本的外生冲击





例子2：科技增长



例子2：科技增长

- 假设科技水平在$\bar{t}$期增长到$\bar{A} > A$

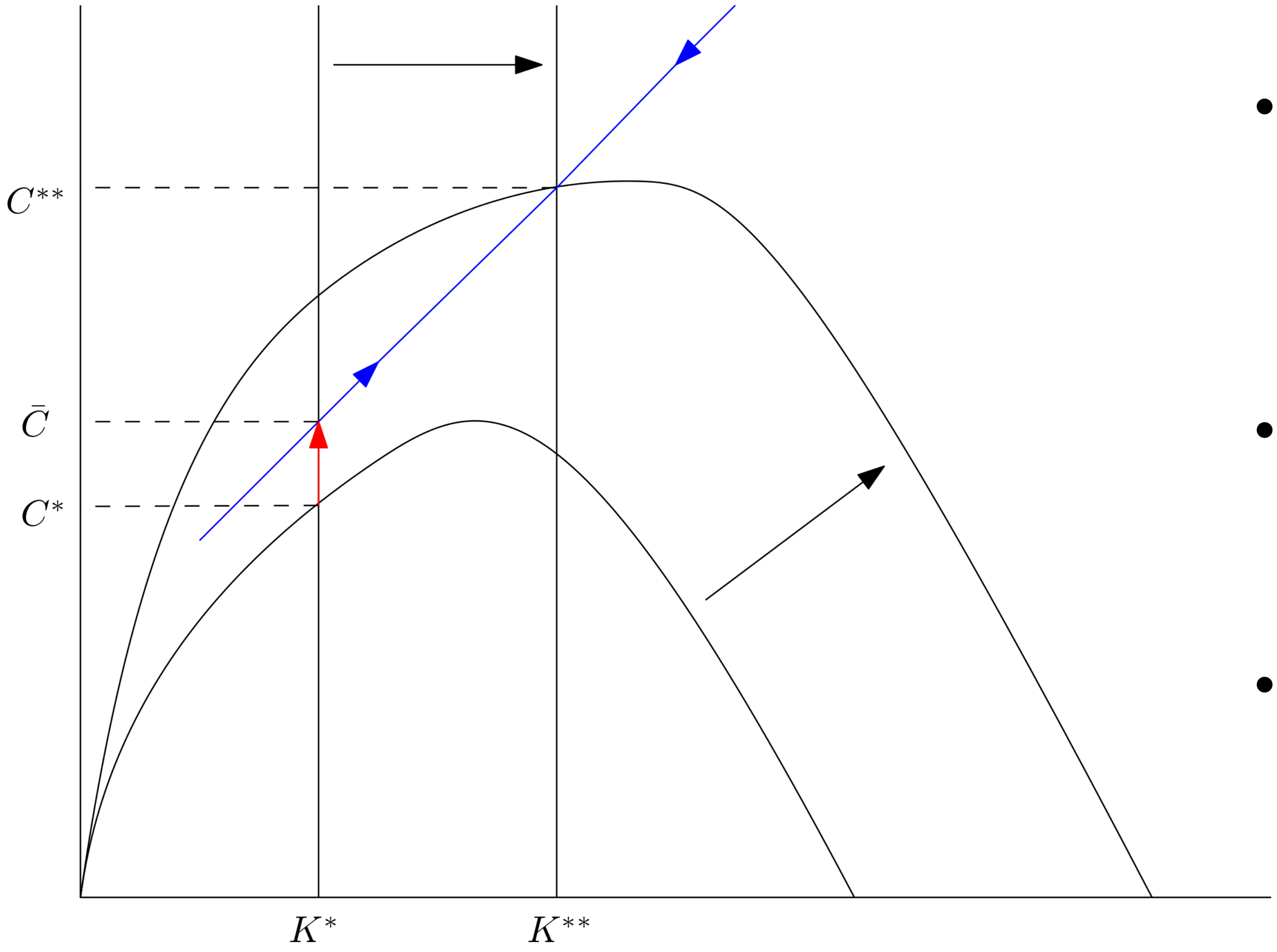
- 稳态资本水平随A增长

$$K^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- 曲线$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$的高度上升，因为对于任何资本量K，该曲线的高度（消费水平）$C = AK^{\alpha} - \delta K$ 随A 上升

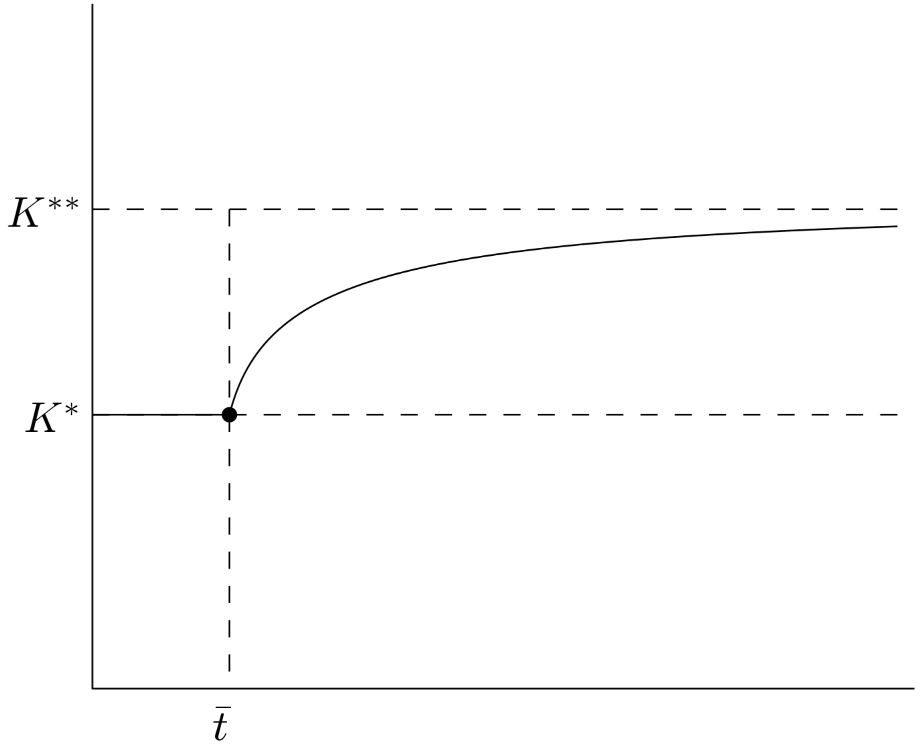
- A 增长时，曲线$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1$的横截距变大

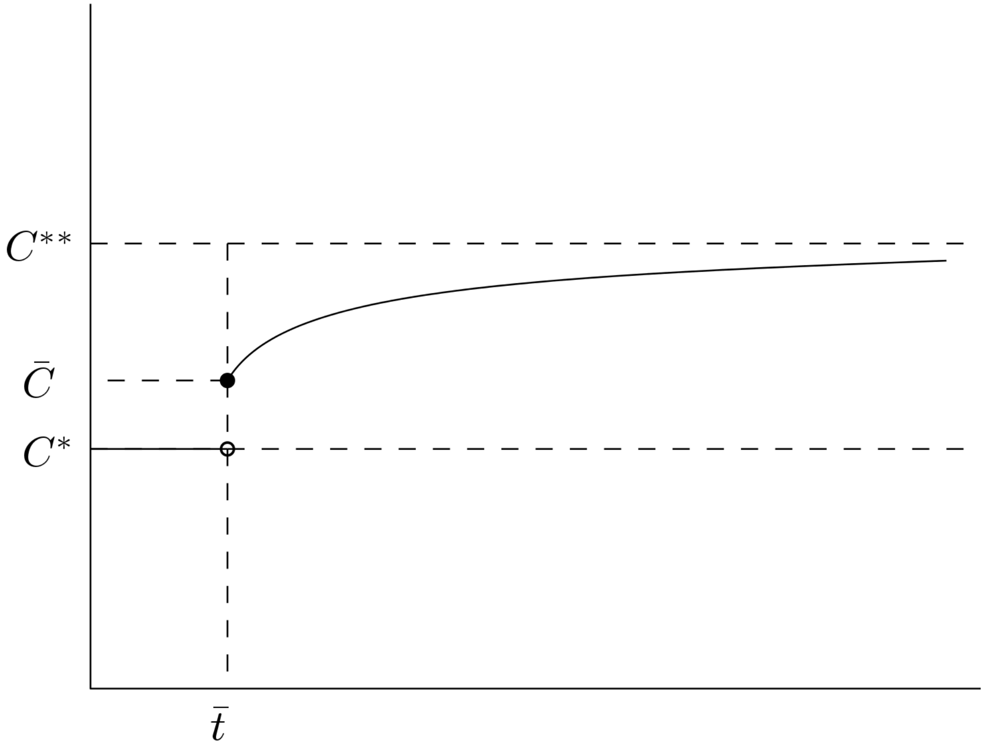
例子2：科技增长



- 新的马鞍路径不一定在原来的稳态C^*上方，此处只是作为一个示例；
- 资本、消费的过渡路径见下页
- 提问：如果新的马鞍路径在之前的稳态下方，会对过渡路径产生什么变化？

例子2：科技增长





竞争均衡版本的新古典增长模型

- 简单描述一下竞争均衡版本的新古典增长模型
- 一个有限期模型（T期之后结束），加入了一个不等式约束，为了帮助大家理解横截性条件
- 与有限期的社会计划者版本等价

模型假设

- 有限期模型， $t = 0,1, \ldots, T$
- 代表家庭：

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

- 每期劳动力供给为1，初始资本量K_0
- 代表公司的生产函数：$F(K, N, A)$，规模报酬不变（CRS）
- 代表公司由家庭拥有，利润Π_t 分配给家庭

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s 来满足以下优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{C_t, K_{t+1}, N_t^s} \quad & \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) \\
\text{s.t.} \quad & C_t + I_t \le w_t N_t^s + r_t K_t + \Pi_t \\
& N_t^s = 1 \\
& K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t \\
& K_{t+1} \ge 0 \\
& K_0 \text{ given}
\end{aligned}
$$

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s来满足以下优化问题：
2. 给定r_t, w_t，代理公司选择K_t^d, N_t^d来最大化利润：

$$\max_{K_t^d, N_t^d} F(K_t^d, N_t^d, A_t) - w_t N_t^d - r_t^k K_t^d$$

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s来满足以下优化问题：
2. 给定r_t, w_t，代理公司选择K_t^d, N_t^d来最大化利润：
3. 所有市场出清：

$$
\begin{aligned}
C_t + I_t &= F(K_t, N_t, A_t) \\
N_t^s &= N_t^d \\
K_t^s &= K_t^d
\end{aligned}
$$

公司的优化问题

- 公司只需最大化每期的利润，无需考虑跨期问题

$$\max_{K_t,N_t} \ F(K_t, N_t, A_t) - w_t N_t - r_t^k K_t$$

- 一阶导数

$$[K_t]: \quad F_K(K_t, N_t, A_t) = r_t^k$$
$$[N_t]: \quad F_N(K_t, N_t, A_t) = w_t$$

- 生产函数规模报酬不变，具有如下性质：

$$F(K_t, N_t, A_t) \quad = F_K(K_t, N_t, A_t)K_t + F_N(K_t, N_t, A_t)N_t$$
$$F(K_t, N_t, A_t) \quad = r_t^k K_t + w_t N_t$$

- 因此，公司利润每期均为$\Pi_t = 0$

家庭的优化问题

- 和之前一样，劳动供给=1
- 可以简化家庭预算约束为：

$$C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

- 家庭的优化问题简化为：

$$\max_{C_t, K_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

$$K_{t+1} \geq 0$$

- 注意：此时我们没有要求$I_t \geq 0$；最后几期时，家庭可以将资本品用作消费

解出家庭问题

- 这里有一个不等式的约束条件， $K_{t+1} \geq 0$;
- 最后一期，代表家庭或许不愿在下期持有任何资本;
- 我们把这个额外的约束条件放入拉格朗日函数当中:

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left((1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t - C_t - K_{t+1}\right) + \sum_{t=0}^{T} \mu_t K_{t+1}$$

家庭问题：一阶导数

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left((1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t - C_t - K_{t+1}\right) + \sum_{t=0}^{T} \mu_t K_{t+1}$$

$$[C_t]: \quad \beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0$$

$$[K_{t+1}]: \quad -\lambda_t + \mu_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}^k - \delta) = 0, \quad \text{if } 0 \le t \le T-1$$

$$[K_{T+1}]: \quad -\lambda_T + \mu_T = 0$$

$$[\lambda_t]: \quad C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

库恩-塔克条件（Kuhn-Tucker Conditions）

- 带有不等式约束的优化问题，除了一阶导数，我们还需要一个额外的条件：

$$
\begin{aligned}
\mu_t K_{t+1} &= 0 \\
K_{t+1} &\geq 0 \\
\mu_t &\geq 0
\end{aligned}
$$

- 如果不等式约束是“刚性”的（等号成立），此时放松该约束条件，会增加效用，拉格朗日系数为正，拉格朗日系数与等式约束条件的乘积为0；
- 如果不等式约束是“软性”的（不等号成立），此时放松该约束条件，不会增加任何效用，拉格朗日系数为0，拉格朗日系数与不等式约束的乘积依然为0。

最后一期

- 在最后一期，因为

$$\mu_T = \lambda_T = \beta^T u'(C_T) > 0$$

- Kuhn Tucker Condition：

$$\mu_T K_{T+1} = 0 \Rightarrow K_{T+1} = 0$$

- 在无限期模型中，这个条件变成：

$$\lim_{\{t \to \infty\}} \beta^t \, u'(C_t) \, K_{t+1} = 0$$

这就是我们没有说到的横截性条件（transversality condition）；马鞍路径是同时满足欧拉方程，资源约束与横截性条件的路径。

最后一期之前

- 我们知道初始资本量$K_0 > 0$，那么$\mu_0 = 0$
- 在$t < T$期，代入$\lambda_t = \beta^t u'(C_t)$，$\mu_t = 0$, 可以得到欧拉方程:

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})\left(1 + r_{t+1}^k - \delta\right)$$

- 公司最大化利润意味着:

$$\begin{aligned} F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) &= r_{t+1}^k \\ w_t + R_t K_t &= F(K_t, 1, A_t) \end{aligned}$$

整理结果

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) + 1 - \delta)$$
$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = F(K_t, 1, A_t)$$

- 这两个条件（欧拉方程，资源约束）和之前社会计划者的版本相同

- 此外，我们多了一个约束条件， $K_{\mathrm{T}+1} = 0$，这就可以帮助我们找出满足这一条件的最优路径$\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{T}$