宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/11

复习：Money-in-Utility 模型

- 无限期模型，一个代理行为人，每期效用函数为$u(c_t, m_t)$， 其中消费为c_t，实际货币需求量为m_t，生产函数

$$m_t = \frac{M_t}{P_t}$$

- 生产函数为 $y_t = f(k_t)$， 资本折旧率$0 < \delta < 1$

投资

代理行为人可以选择三种投资方式:

- 持有货币M_t，下一期得到同样多的货币M_t
- 持有名义债券B_t，下一期得到$B_t(1+i_t)$的现金
- 投资实业I_t，下一期得到实际资本回报 $I_t(1+r_t)$

政府

- 这里简化政府的预算约束，政府可以通过调整货币储备的方式为社会提供财富转移：

$$M_t - M_{t-1} = P_t T_t$$

T_t 可以是正或负，这里T_t代表政府的转移支付（Transfer），不代表税收

社会计划者的问题

$$\max_{c_t, m_t, b_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t)$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + m_t + b_t = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_{t-1})} + T_t$$

- 写出拉格朗日函数（略）
- 一阶导数:

$$[c_t] \quad \beta^t u_c(c_t, m_t) = \lambda_t$$

$$[k_{t+1}] \quad \lambda_{t+1}[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] - \lambda_t = 0$$

$$[m_t] \quad \beta^t u_m(c_t, m_t) - \lambda_t + \frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_t} = 0$$

$$[b_t] \quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}\frac{1+i_t}{1+\pi_t} = 0$$

两个欧拉方程

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 这个经济体内有多种储蓄手段…
- 如果不存在套利机会，那么名义债券和实际投资的的回报率应该相等…

$$f'(k_{t+1}) + (1-\delta) = 1 + r_t = \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 这个实际利率和名义利率之间的关系，叫做费雪公式（费舍尔公式，Fisher Equation），经常会写作

$$r_t = i_t - \pi_t$$

这里应用了$\ln(1+x) \approx x$ 的关系（作业附加题）

持有现金的原因

- 还有一个公式

$$u_m(c_t, m_t) + \beta \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{1+\pi_t} = u_c(c_t, m_t)$$

- 如果现金不出现在效用函数中，那么第一项为0；此时应该有

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1}{1+\pi_t}$$

- 但是名义债券的欧拉方程为

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 除非名义利率为0，否则这两者不可能同时联立，因为名义债券的回报率高于现金 $i_t > 0$

实际货币需求

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

$$u_m(c_t, m_t) + \beta \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{1+\pi_t} = u_c(c_t, m_t)$$

联立可得:

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1+i_t}$$

经济学直觉?

均衡条件

- 债券市场均衡:

$$b_t = 0$$

- 货币市场均衡:

$$m_t^d = \frac{M_t}{P_t}$$

- 产品市场均衡:

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) = y_t$$

稳态的存在

- 是否存在一个稳态（steady state），此时经济体内的资本和消费都不随时间变化?

$$k_{t+1} = k_t = k^*$$
$$c_{t+1} = c_t = c^*$$

- 为简化分析，我们假设实际货币供给$m_t = M_t/P_t = m^*$ 处在一个稳态。

稳态时的投资、消费与资本

因为投资满足下列条件

$$I_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta)$$

如果$k_{t+1} = k_t = k^*$,那么$I^* = \delta k^*$

- 产品市场均衡:

$$c^* = f(k^*) - I^* = f(k^*) - \delta k^*$$

- 欧拉公式:

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$
$$\beta(f'(k^*) + 1 - \delta) = 1$$

能够找到稳态时的资本k^*.

例子

$$u(c,m) = \log c + \log m$$
$$f(k) = k^{\alpha}$$
$$\Rightarrow \beta(\alpha(k^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta) = 1$$
$$k^* = \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$
$$c^* = (k^*)^{\alpha} - \delta k^*$$

长期来看，稳态消费、资本的大小不受货币、利率等因素影响（货币中立）

讨论：货币中立是否总是成立？（separable preferences, labor market, etc）

稳态时的货币需求

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1 + i_t}$$

$$\frac{c^*}{m^*} = \frac{i *}{1 + i *}$$

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} \quad \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1 + i^*}{1 + \pi^*}$$

$$m^* = c^* \frac{1 + \pi^*}{1 + \pi^* - \beta}$$

稳态时的通胀与货币增长

假设货币供给以稳定的速度 μ 增长:

$$M_{t+1} = (1+\mu)M_t$$

那么，实际货币供给处在稳态意味着

$$\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}} = \frac{M_t}{P_t}$$
$$\frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$$
$$1+\mu = 1+\pi^*$$
$$\Rightarrow \pi^* = \mu$$

稳态时的名义利率水平为

$$1+i^* = (1+f'(k^*)-\delta)(1+\mu)$$

最优通胀率？

$$m^* = c^* \frac{1+\pi^*}{1+\pi^*-\beta} = c^*\left(1+\frac{\beta}{1+\pi^*-\beta}\right)$$

- 通货膨胀不影响稳态时的消费，只会影响稳态的实际货币量
- 最优的通胀水平应该越小越好，政府可以通过调节货币增长速度来使得通胀最小
- 因为名义利率不能小于0，最优的货币增长速度满足

$$i^* = 0$$
$$1 = (1+f'(k^*)-\delta)(1+\mu)$$
$$\mu = \frac{1}{1+f'(k^*)-\delta} - 1$$

或者表示为$\mu \approx -r^*$

- 设定名义利率为0的政策建议也被称为弗里德曼原则（Friedman Rule）

Friedman Rule

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1 + i_t}$$

当 i = 0 时，$u_m(c_t, m_t) = 0$，在理论上意味着货币供给量此时达到了使得效用最高的水平

- 问题：是否意味着 $m = \infty$？
- 取决于我们如何设定$u(c, m)$的函数形式，比如一些论文会假设实际货币量大于某一常数 $\bar{M}$ 时，货币的边际效用降低为0。

Cash in Advance 模型

Cash in Adcance 模型 (货币先行模型)

- 最早由美国经济学家Robert W. Clower提出，此处大大简化
- 无限期模型
- 代理行为人，每期可以选择消费c_t，劳动供给l_t ,储蓄B_t ,现金M_t.
- 效用函数为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c_t) + \log(1 - l_t)\right)$$

- 生产函数

$$y_t = l_t$$

CIA 模型 - 2

- 政府可以向代理行为人转移支付现金 τ_t，可以代表补贴 (+) 或税收(-):

$$M_t - M_{t-1} = \tau_t$$

- 代理行为人的预算约束

$$P_t c_t + M_t + B_t = M_{t-1} + (1 + i_{t-1})B_{t-1} + \tau_t + w_t l_t + \Pi_t$$

公司的优化问题

- 公司的优化问题:

$$\max_{l_t} \ \ \Pi = P_t y_t - w_t l_t$$

$$\Rightarrow P_t = w_t, y_t = l_t$$

- 公司的劳动需求曲线是水平的；在$w_t = P_t$ 这个工资水平，雇多少人都一样（反正利润=0）
- 规模报酬不变（Constant return to scale， CRS）

持有现金的原因

$$P_t c_t + M_t + B_t = M_{t-1} + (1 + i_{t-1})B_{t-1} + \tau_t + P_t y_t$$

- 同样的问题又来了：为什么要持有现金？
- 答案："Cash in advance"！

$$P_t c_t \le M_{t-1}$$

- 需要用现金买东西！而且只能用上一期剩下的现金余额来购买。
- 这里我们只考虑等号成立的情况，即

$$P_t c_t = M_{t-1}$$

代理人的问题

$$\max_{\{c_t, l_t, B_t, M_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c_t) + \log(1 - l_t)\right)$$

s.t.

$$P_t c_t = M_{t-1}$$

$$P_t c_t + M_t + B_t = M_{t-1} + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + \tau_t + P_t y_t$$

$$y_t = l_t$$

政府

我们假设政府的货币政策是:

$$M_t = M_{t-1}(1+\mu) = M_{t-1} + \tau_t$$

市场出清

- 货币市场：

$$M_t^d = M_t^s$$

- 商品市场：

$$c_t = y_t$$

- 债券市场：

$$B_t = 0$$

解模型

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c_t) + \log(1 - l_t)\right) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \kappa_t (M_{t-1} - P_t c_t) +$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda_t (M_{t-1} + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + P_t l_t + \tau_t - P_t c_t - M_t - B_t)$$

- 一阶导数

$$[c_t] \qquad \beta^t \frac{1}{c_t} - \beta^t (\kappa_t + \lambda_t) P_t = 0$$

$$[l_t] \qquad -\beta^t \frac{1}{1 - l_t} + \beta^t \lambda_t P_t = 0$$

$$[B_t] \qquad -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1 + i_t) = 0$$

$$[M_t] \qquad -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} (\kappa_{t+1} + \lambda_{t+1}) = 0$$

稳态分析

- 像之前一样，我们聚焦于这个经济体的一个稳态均衡，此时消费、劳动、名义利率都处在稳定水平：

$$c_t = c^*, \quad l_t = l^*, \quad i_t = i$$

- 稳态（steady state）是经济长期所处的一个平衡状态，分析稳态不代表经济体永远会处在稳态（例如生产函数发生冲击，各个经济指标会从稳态发生偏离）
- 证明稳态存在与否，这不在我们的考察范围。

稳态时的一阶条件

$$[c_t] \qquad \frac{1}{c^*} = (\kappa_t + \lambda_t)P_t$$

$$[l_t] \qquad \frac{1}{1-l^*} = \lambda_t P_t$$

$$[B_t] \qquad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1+i)$$

$$[M_t] \qquad \lambda_t = \beta(\kappa_{t+1} + \lambda_{t+1})$$

$$\frac{1}{(1-l^*)P_t} = \frac{1}{(1-l^*)P_{t+1}}\beta(1+i)$$

$$\frac{1+i}{1+\pi_t} = \frac{1}{\beta}$$

稳态时的通胀率

- CIA 约束，意味着当消费处于稳态时，实际货币需求也处在稳态

$$P_t c^* = M_{t-1}$$

- 此时，通胀率可以表达为

$$1 + \pi_t = \frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{M_t}{M_{t-1}} = 1 + \mu$$

- 和之前一样，通胀率=货币增长速度

稳态消费

$$[c_t] \qquad \frac{1}{c^*} = (\kappa_t + \lambda_t)P_t$$

$$[l_t] \qquad \frac{1}{1 - l^*} = \lambda_t P_t$$

$$[B_t] \qquad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1 + i)$$

$$[M_t] \qquad \lambda_t = \beta(\kappa_{t+1} + \lambda_{t+1})$$

$[c_{t+1}], [l_t] \Rightarrow$

$$\frac{1}{(1 - l^*)P_t} = \beta \frac{1}{c^* P_{t+1}}$$

产品市场均衡：$c^* = y^* = l^*$

$$\Rightarrow \frac{P_{t+1}}{P_t} = \beta \frac{1 - c^*}{c^*}$$

$$1 + \mu = \beta \frac{1 - c^*}{c^*}$$

稳态消费 - 2

解出稳态消费（劳动）水平：

$$c^* = \frac{\beta}{1+\mu+\beta} = l^*$$

此处，货币增长速度（通胀率）对稳态消费会产生影响！ （货币不再是超中性）

原因：通胀率对劳动供给产生了影响；

- 今天的消费由手中持有的现金限制，劳动收入只能通过储蓄，用作明天的消费
- 当通胀率升高时，明天的消费变得更加昂贵，劳动的边际回报降低
- 均衡条件下，减少劳动，使得收入减少

最优货币政策

- 是否存在一个政府的货币政策，能够使得代理行为人的效用最大化？
- 回忆代理人的效用函数：

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c) + \log(1-l)\right)$$

- 产品市场出清：$c = y = l$，效用函数变为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log(c) + \log(1-c)\right) = \frac{1}{1-\beta}\left(\log(c) + \log(1-c)\right)$$

最优货币政策 - 2

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\big(\log(c)+\log(1-c)\big)=\frac{1}{1-\beta}\big(\log(c)+\log(1-c)\big)$$

- 解出使得这一表达式最优的消费，$\hat{c}=1/2$
- 放入稳态消费的表达式：

$$\frac{1}{2}=\frac{\beta}{1+\beta+\mu}$$

$$\hat{\mu}=\beta-1$$

最优名义利率

回忆名义利率的表达式：

$$\frac{1+i}{1+\pi_t}=\frac{1}{\beta}$$

当$\pi=\mu=\beta-1$时，$i=?$

Friedman rule!

弗里德曼规则

- 在这个模型里，代理人**必须**要持有一种劣等储蓄品（货币），从而实现交易的目的;
- 当名义利率为0时，货币和债券的回报率相等，代理人可以持有任意数额的货币，无需背负额外的成本（利息）;
- 从代理人的角度，持有货币的边际利益在于货币带来的“流动性”，而边际成本是放弃的利率。当边际成本为0时，代理人会持有足够多的现金，使得他能够满足所有的流动性需求，直至他持有更多货币的边际收益为0;
- 从社会的角度，这是最优的结果，因为政府增发货币的边际成本约等于0。

Overlapping Generations Model (with Money)

世代交叠模型（Overlapping Generations Model）

- 常被简称为 OLG 模型

- 最早的想法由法国经济学家Allais (1947) 提出，美国经济学家Samuelson(1958) 进行了更详尽的论述。

- Peter Diamond （1965）加入了生产函数，一些课本也将OLG模型称为Diamond 模型，与 Ramsey 模型合称为具有微观基础的两大宏观模型

模型特点

- 时间维度是无限的，而代理行为人只能生存两期;
- 每一期都有新、老两代人共存，世代交替
- 新、老代理人的预算约束不同；货币可以在经济体中起到代际分配的作用

模型设定

- 无限期模型

- 每个代理行为人生存两期，效用函数为：

$$U(c_t^y, c_{t+1}^o) = u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

- c_t^y：年轻时的消费
- c_{t+1}^o：年老时的消费

人口结构

- 用 N_t 表示在 t 期出生的人口：

$$N_t = (1+n)N_{t-1}$$

- 第0期的老代理人的人口假设为 1，效用假设为

$$U(C_0^o) = u(c_0^o)$$

简化

- 假设：没有人口增长；每一期年轻、年老代理人总数为：

$$N_t^o = N_t^y = 1$$

- 代理人年轻时的实际收入为 y 单位的消费品，年老时没有收入

- 假设经济体内不能进行实物的跨期储存，但是可以进行人与人之间的借贷，以b_t^y表示（t期年轻人的储蓄或借贷）

预算约束

- 第 t 期年轻代理人的预算约束为：

$$c_t^y + b_t^y = y$$

- 第 $t+1$ 期老年代理人的预算约束为：

$$c_{t+1}^o = b_t^y(1+r)$$

代理人的问题

- 第 t 期年轻代理人的优化问题为：

$$\max_{c_t^y, c_{t+1}^o, b_t^y} \quad u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

$$s.t. \quad c_t^y + b_t^y = y$$

$$c_{t+1}^o = b_t^y(1+r)$$

借贷的可能性

- 思考： b_t^y 能否大于0？

- 市场出清条件：

$$N_t^y c_t^y + N_t^o c_t^o = N_t^y y$$

- 如果不存在借贷，那么在此经济体内老年时期的消费为0

例子

$$U\left(c_t^y, c_{t+1}^o\right) = \left(c_t^y\right)(c_{t+1}^o)^\beta$$

$$U(c_0^o) = (c_0^o)^\beta$$

$$y = 1$$

$$N_0 = 1, N_t = (1+n)N_{t-1}$$

货币的出现能否使两代人的效用都变得更好?