宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/27

竞争均衡版本的新古典增长模型

- 简单描述一下竞争均衡版本的新古典增长模型
- 一个有限期模型（T期之后结束），加入了一个不等式约束，为了帮助大家理解横截性条件
- 与有限期的社会计划者版本等价

模型假设

- 有限期模型， $t = 0,1,\dots,T$
- 代表家庭：

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

- 每期劳动力供给为1，初始资本量K_0
- 代表公司的生产函数：$F(K,N,A)$，规模报酬不变（CRS）
- 代表公司由家庭拥有，利润Π_t 分配给家庭

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s 来满足以下优化问题：

$$\max_{C_t, K_{t+1}, N_t^s} \quad \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t \leq w_t N_t^s + r_t K_t + \Pi_t$$

$$N_t^s = 1$$

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$$

$$K_{t+1} \geq 0$$

$$K_0 \text{ given}$$

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^{T}$：

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s来满足以下优化问题：
2. 给定r_t, w_t，代理公司选择K_t^d, N_t^d来最大化利润：

$$\max_{K_t^d, N_t^d} F(K_t^d, N_t^d, A_t) - w_t N_t^d - r_t^k K_t^d$$

竞争均衡的定义

一个竞争均衡是指满足以下条件的消费、资本、劳动的取值$\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{T}$，以及工资、租金的取值$\{r_t^k, w_t\}_{t=0}^{T}$:

1. 给定r_t, w_t，代理家庭选择C_t, K_{t+1}, N_t^s来满足以下优化问题:
2. 给定r_t, w_t，代理公司选择K_t^d, N_t^d来最大化利润:
3. 所有市场出清:

$$
\begin{aligned}
C_t + I_t &= F(K_t, N_t, A_t) \\
N_t^s &= N_t^d \\
K_t^s &= K_t^d
\end{aligned}
$$

公司的优化问题

- 公司只需最大化每期的利润，无需考虑跨期问题

$$\max_{K_t,N_t} \; F(K_t,N_t,A_t) - w_t N_t - r_t^k K_t$$

- 一阶导数

$$[K_t]: \qquad F_K(K_t,N_t,A_t) = r_t^k$$
$$[N_t]: \qquad F_N(K_t,N_t,A_t) = w_t$$

- 生产函数规模报酬不变，具有如下性质：

$$F(K_t,N_t,A_t) \quad = F_K(K_t,N_t,A_t)K_t + F_N(K_t,N_t,A_t)N_t$$
$$F(K_t,N_t,A_t) \qquad = r_t^k K_t + w_t N_t$$

- 因此，公司利润每期均为$\Pi_t = 0$

家庭的优化问题

- 和之前一样，劳动供给=1
- 可以简化家庭预算约束为：

$$C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

- 家庭的优化问题简化为：

$$\max_{C_t, K_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta)K_t + w_t$$

$$K_{t+1} \geq 0$$

- 注意：此时我们没有要求$I_t \geq 0$；最后几期时，家庭可以将资本品用作消费

解出家庭问题

- 这里有一个不等式的约束条件，$K_{t+1} \geq 0$;
- 最后一期，代表家庭或许不愿在下期持有任何资本;
- 我们把这个额外的约束条件放入拉格朗日函数当中:

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left((1 + r_t^k - \delta) K_t + w_t - C_t - K_{t+1} \right) + \sum_{t=0}^{T} \mu_t K_{t+1}$$

家庭问题：一阶导数

$$\mathcal{L} = \max_{C_t, K_{t+1}, \lambda_t, \mu_t} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$
$$+ \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left((1 + r_t^k - \delta) K_t + w_t - C_t - K_{t+1}\right)$$
$$+ \sum_{t=0}^{T} \mu_t K_{t+1}$$

$[C_t]$: $\beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0$

$[K_{t+1}]$: $-\lambda_t + \mu_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}^k - \delta) = 0, \quad \text{if } 0 \leq t \leq T - 1$

$[K_{T+1}]$: $-\lambda_T + \mu_T = 0$

$[\lambda_t]$: $C_t + K_{t+1} = (1 + r_t^k - \delta) K_t + w_t$

库恩-塔克条件（Kuhn-Tucker Conditions）

- 带有不等式约束的优化问题，除了一阶导数，我们还需要一个额外的条件：

$$
\begin{aligned}
\mu_t K_{t+1} &= 0 \\
K_{t+1} &\geq 0 \\
\mu_t &\geq 0
\end{aligned}
$$

- 如果不等式约束是“刚性”的（等号成立），此时放松该约束条件，会增加效用，拉格朗日系数为正，拉格朗日系数与等式约束条件的乘积为0;
- 如果不等式约束是“软性”的（不等号成立），此时放松该约束条件，不会增加任何效用，拉格朗日系数为0，拉格朗日系数与不等式约束的乘积依然为0。

最后一期

- 在最后一期，因为

$$\mu_T = \lambda_T = \beta^T u'(C_T) > 0$$

- Kuhn Tucker Condition：

$$\mu_T K_{T+1} = 0 \Rightarrow K_{T+1} = 0$$

- 在无限期模型中，这个条件变成：

$$\lim_{\{t\to\infty\}} \beta^t\, u'(C_t)\, K_{t+1} = 0$$

这就是我们没有说到的横截性条件（transversality condition）；马鞍路径是同时满足欧拉方程，资源约束与横截性条件的路径。

最后一期之前

- 我们知道初始资本量$K_0 > 0$，那么$\mu_0 = 0$

- 在$t < T$期，代入$\lambda_t = \beta^t u'(C_t)$，$\mu_t = 0$, 可以得到欧拉方程:

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})\left(1 + r_{t+1}^k - \delta\right)$$

- 公司最大化利润意味着：

$$\begin{aligned} F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) &= r_{t+1}^k \\ w_t + R_t K_t &= F(K_t, 1, A_t) \end{aligned}$$

整理结果

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})(F_K(K_{t+1}, 1, A_{t+1}) + 1 - \delta)$$
$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F(K_t, 1, A_t)$$

- 这两个条件（欧拉方程，资源约束）和之前社会计划者的版本相同
- 此外，我们多了一个约束条件， $K_{\mathrm{T}+1} = 0$，这就可以帮助我们找出满足这一条件的最优路径$\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{T}$

参考

- QuantEcon， [Cass-Koopmans Model]

带有人口、科技增长的Ramsey 模型

$$
\begin{aligned}
N_t &= N_0(1+g_N)^t \\
A_t &= A_0(1+g_A)^t
\end{aligned}
$$

- 和之前一样，我们假设技术进步为劳动加强型

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

假设效用函数为 $u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

社会计划者问题：平衡增长路径

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

s.t.

$$\begin{aligned} C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t &= K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha} \\ N_{t+1} &= (1+g_N)N_t \\ A_{t+1} &= (1+g_A)A_t \\ K_0, N_0, A_0 &\quad \text{given} \end{aligned}$$

- 欧拉方程、资源约束变为

$$C_t^{-\gamma} = \beta C_{t+1}^{-\gamma}\left(\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}(A_{t+1}N_{t+1})^{1-\alpha} + 1 - \delta\right)$$

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha}$$

解出稳态变量

- 由于A_t，N_t 在增长，我们像之前一样，把所有变量除以有效劳动（normalize by effective labor）

- 新的资源约束

$$c_t + k_{t+1}(1+g_A)(1+g_N) - (1-\delta)k_t = k_t^{\alpha}$$

- 把欧拉方程写作：

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\gamma} = \beta\left(\alpha\left(\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right)$$

解出稳态变量

- 新的欧拉方程为：

$$\left(\frac{c_{t+1}(1+g_A)(1+g_N)}{c_t}\right)^{\gamma} = \beta(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

- 那么，和之前类似，我们可以解出k^* 和 c^* 的稳态水平：

$$\begin{aligned} k^* &= \left(\frac{\alpha\beta}{(1+g_N+g_A)^{\gamma} - \beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ c^* &= (k^*)^{\alpha} - (g_A + g_N + \delta)k^* \end{aligned}$$

模型比较：新古典与索洛增长模型

- 新古典增长模型与索洛模型最大的区别在于，前者放松了储蓄率固定这一假设

- 那么，在新古典增长模型中，稳态水平的储蓄率是多少呢？

- 回到最基本的例子，$N = 1$，A固定不变。稳态的资本、消费水平是：

$$K^* = \left(\frac{\alpha A \beta}{1 - \beta(1 - \delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$C^* = A(K^*)^\alpha - \delta K^*$$

模型比较：新古典与索洛增长模型

- 因为 $Y^* = A(K^*)^\alpha$, 我们有

$$\frac{C^*}{Y^*} = \frac{A(K^*)^\alpha - \delta K^*}{A(K^*)^\alpha} = 1 - \frac{\delta}{A}(K^*)^{1-\alpha}$$

- 储蓄率为

$$s = \frac{\delta}{A}(K^*)^{1-\alpha}$$

- 如果要承担更高的稳态资本水平，储蓄率也需要提高!

模型比较：新古典与索洛增长模型

- 代入K^*的表达式:

$$K^* \quad = \left(\frac{\alpha A \beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow s^* \quad = \frac{\alpha\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)}$$

- 提问：为何这里的储蓄率和索洛模型中的黄金规则储蓄率（golden rule savings rate）不同?

储蓄率的比较

$$s^* = \frac{\alpha\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)}$$

- 答案：discount factor， β

- 在索洛模型中，我们假设家庭将固定比例的收入用来储蓄，从而计算出稳态的消费水平C^*
- 黄金规则储蓄率是索洛模型中使得稳态消费水平最高的储蓄率； $s^{GR} = \alpha$
- 新古典增长模型中的家庭更聪明（也更缺乏耐心）——对于他们来说，现在和未来消费的边际效用水平是不同的。

（提示：当$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$时，两种模型在稳态的储蓄率相等）

储蓄率的比较

- 如果有人口、科技增长，新古典增长模型中的储蓄率如何计算?
- 上节课:

$$k^* = \left(\frac{\alpha\beta}{(1+g_N+g_A)^\gamma - \beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$c^* = (k^*)^\alpha - (g_A+g_N+\delta)k^*$$

$$\frac{c^*}{y^*} = 1-(g_A+g_N+\delta)(k^*)^{1-\alpha}$$

储蓄率的比较

$$
\begin{aligned}
s &= (g_A + g_N + \delta)(k^*)^{1-\alpha} \\
&= \frac{\alpha\beta(g_A + g_N + \delta)}{(1 + g_A + g_N)^{\gamma} - \beta(1 - \delta)}
\end{aligned}
$$

当$\gamma = 1, \beta = 1$ 时，这个储蓄率依然等于 $s^{GR} = \alpha$

Ramsey增长模型的贡献

- 索洛模型中，储蓄率被假设为外生，储蓄与资本增长的决策过程在一个“黑匣子”中。
- Ramsey增长模型通过假设家庭的效用函数，打开了“黑匣子”，并在一般均衡的框架内分析了储蓄率的决定因素（和效用、科技水平、人口增长都存在潜在关系）。
- 为现代宏观经济学提供了一个基础的研究框架，可以让研究者在此基础上进一步探讨增长的来源（如人力资本的积累，内生增长模型等）。

新古典主义增长模型的局限

- 和索洛模型一样，在平衡增长路径上，人均收入的增长取决于科技水平 A 的变化。
- 科技水平A 也被称为 全要素生产率（Total factor productivity, TFP），是决定长期增长的关键要素。
- 新古典增长模型并未对TFP增长的来源加以探讨，而是假设它由外生因素导致。

内生增长模型

什么决定了科技增长?

- 索洛模型和Ramsey模型中，科技增长完全来自于外生因素（模型中看做给定的因素）
- Paul Romer 在1990 年的文章 “Endogenous Technological Change”（Journal of Political Economy）中，对科技增长的来源提出了新的理论。
- 在这个模型中，科技增长是一个内生变量，由模型中代理人在均衡下的行为决定。

内生科技变化：Romer 模型

- 一个简化的版本：
- 生产函数：

$$Y = L_Y^{1-\alpha}(x_1^\alpha + \cdots + x_A^\alpha) = L_y^{1-\alpha}\sum_{i=1}^{A} x_i^\alpha$$

  - L_Y :从事生产的劳动人口数量
  - x_i：类型i的资本品

内生科技变化：Romer 模型

$$Y = L_Y^{1-\alpha}(x_1^\alpha + \cdots + x_A^\alpha) = L_y^{1-\alpha}\sum_{i=1}^{A} x_i^\alpha$$

- 假设$0 < \alpha < 1$，即每种资本品的边际回报递减
- A 被假设为资本品的种类。如果 A 为固定，那么随着资本积累，每种资本品的边际回报递减，增长最终会趋向于0;
- 在Romer 模型中，A 是一个**内生变量**。

科技增长与发明创造

- 经济体中有L_A数量的人口从事科研工作(R&D)，这些工作者不断地进行发明创造，研发新的资本品。
- 资本品的种类随时间增长的函数为：

$$\dot{A} = \gamma L_A^{\lambda} A^{\phi}$$

  - $\dot{A}=\frac{\partial A}{\partial t}$，代表发明创造的速度
  - L_A :从事科学研究的人口数量
  - λ：衡量科研工作者的边际产出
  - A^{ϕ}: “Giants shoulders” effect，代表目前的科技水平对于科技增长速度的正向影响

劳动分配

总人口为L，分配至生产、科研两个环节。为了简化，我们假设从事科研的人口比例 s_A 给定（Romer的模型中将s_A作为内生变量）

$$L = L_A + L_Y$$

$$L_A = s_A L$$

假设人口增长速度为n:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

总生产函数

- 定义总资本量 K 为：

$$K = \sum_{i=1}^{A} x_i$$

- 这里有 A 种资本品参与生产过程，这些资本品扮演的角色都是一样的，因此公司对每种资本品的需求量相等：$x_i = \bar{x}$。那么：

$$K = A\bar{x} \quad \Rightarrow \bar{x} = \frac{K}{A}$$

- 生产函数变为：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} A\bar{x}^{\alpha} \quad \Rightarrow Y = (AL_Y)^{1-\alpha} K^{\alpha}$$

生产函数

生产函数的形式和之前见到的形式类似:

$$Y = (AL_Y)^{1-\alpha} K^{\alpha}$$

假设储蓄率为固定（简化假设）：

$$\dot{K} = s_k Y - \delta K$$

增长核算

把生产函数重新写作

$$Y = (A s_Y L)^{1-\alpha} K^{\alpha}$$

此处$s_Y = 1 - s_A$

增长核算：

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (1-\alpha)\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s_Y}}{s_Y} + \frac{\dot{L}}{L}\right) + \alpha\frac{\dot{K}}{K}$$

在平衡增长路径上，$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K}$，生产人口比例不变（$\dot{s_Y} = 0$,(人口增长速度为n，可以解得

$$\left(\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}\right)^* = \frac{\dot{A}}{A}$$

平衡增长路径

- 在平衡增长路径上，

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = g_A + n$$

- 也可以计算平衡增长路径上的资本产出比：

$$\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s_k}{n + g_A + \delta}$$

增长速度

和索洛最大的不同：A由模型内生决定

$$\dot{A} = \gamma L_A^{\lambda} A^{\phi}$$

那么A 的增长速度为

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma (s_A L)^{\lambda} A^{\phi - 1}$$

在平衡增长路径上，科技的增长速度恒定，那么等式右边的增长速度为0

$$\lambda \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) + (\phi - 1) \left(\frac{\dot{A}}{A} \right) = 0$$

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda n}{1 - \phi}$$

决定长期科技增长的因素

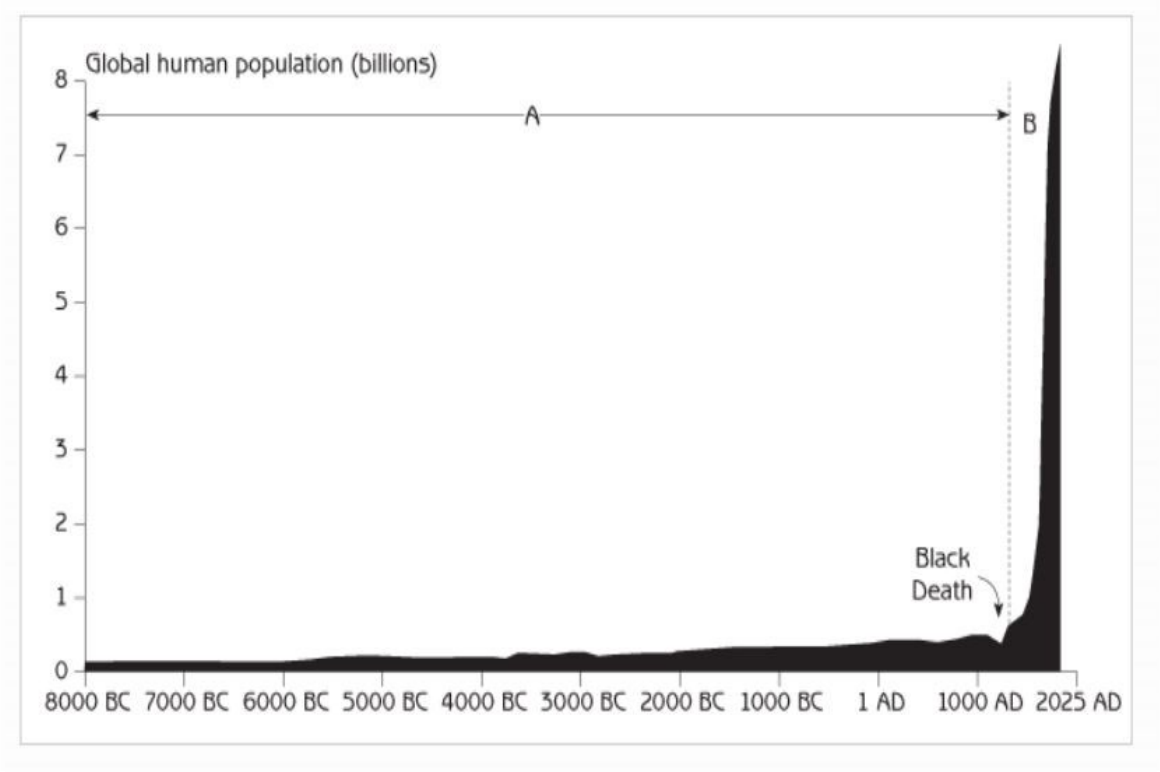
- 在平衡增长路径上，科技以g_A的速度增长

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda n}{1-\phi}$$

- 这一增长速度受三方面因素影响：

1. λ：随着科技人员的增加，科研活动的边际回报递减； λ 越小，g_A越小
2. ϕ：“巨人的肩膀”对现有科研活动的影响； ϕ越大，g_A越大
3. n：人口的增长速度； n越大，g_A越大

人口对科技增速的影响？



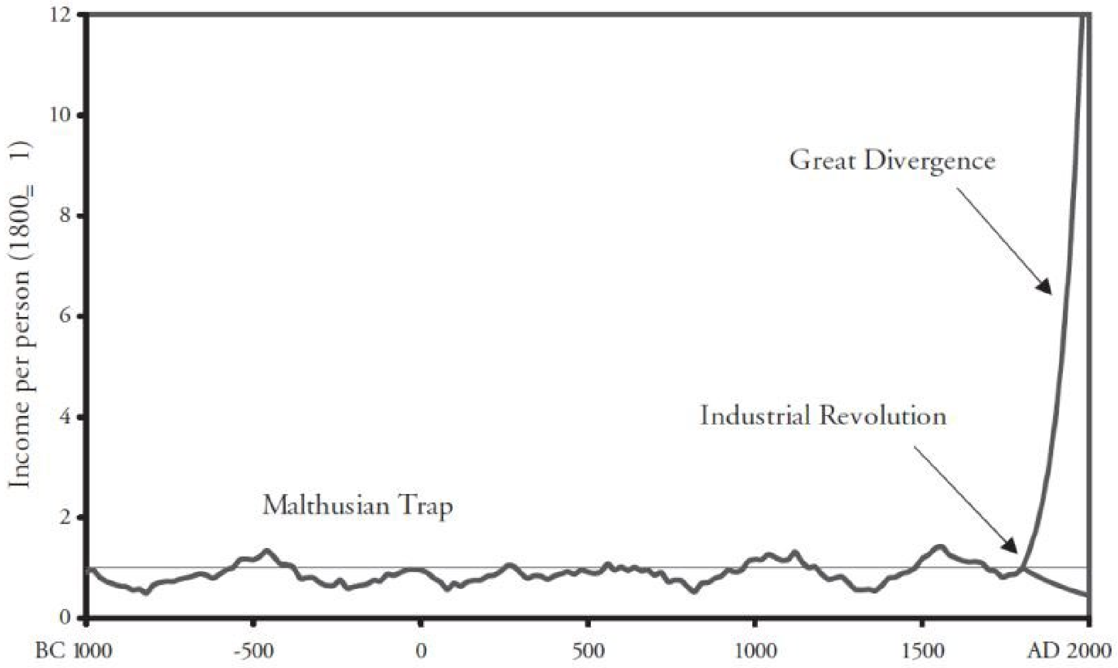


Figure 1.1 World economic history in one picture. Incomes rose sharply in many countries after 1800 but declined in others.

平衡增长路径上的科技水平

在平衡增长路径上，科技水平增速等于

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma(s_A L)^{\lambda} A^{\phi-1} = \frac{\lambda n}{1-\phi}$$

可以从上式解出平衡增长路径上的科技水平

$$A^* = \left(\frac{\gamma(1-\phi)}{\lambda n}\right)^{\frac{1}{1-\phi}} (s_A L)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

科技增速的变化

如果我们把科技增速定义为

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \gamma(s_A L)^{\lambda} A^{\phi-1}$$

那么我们也可计算”科技增速“的增速

$$\frac{\dot{g}_A}{g_A} = \lambda n - (1-\phi) g_A$$

如果科技增速快于平衡增长路径上的增速（$g_A > \frac{\lambda n}{1-\phi}$，（此时增速会放缓；反之亦然（为什么？）

平衡增长路径上的人均产出

生产函数$Y=(AL_Y)^{1-\alpha}K^{\alpha}$代入$L_Y=(1-s_A)L$，整理得到

$$\frac{Y}{L}=(1-s_A)\left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A$$

由于稳态的资本产出比为

$$\left(\frac{K}{Y}\right)^{*}=\frac{s_k}{n+g_A+\delta}=\frac{s_k}{n+\frac{\lambda n}{1-\phi}+\delta}$$

我们能解出（下页）：

平衡增长路径上的人均产出

- 平衡增长路径水平上的人均GDP ☹

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^{*} = (1 - s_A)\left(\frac{s_K}{n + \frac{\lambda n}{1+\phi} + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma(1-\phi)}{\lambda n}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}(s_A L)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

最优的人力分配

- 目前我们假设科研人员的比例s_A为固定。

- 能否找到一个最优的人力分配方案，使得人均GDP达到最高?
  - 增加科研人员的坏处：这些人员不参与到最终品的生产环节
  - 增加科研人员的好处：可以实现更快的科技增长

最优人力分配

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^* = (1 - s_A)\left(\frac{s_K}{n + \frac{\lambda n}{1+\phi} + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma(1-\phi)}{\lambda n}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}(s_A L)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

- 形式:

$$Y/L = X(1 - s_A)(s_A)^Z$$

- 可以找到一个最优的人力分配水平，使得人均GDP最高；解出

$$s_A = \frac{\lambda}{1 - \phi + \lambda}$$

内生增长模型：总结

- 科技增长速度与人口增长水平有关，与研究者的边际产出有关
- 从前人身上学习的效率，也对科技增长速度有影响
- 此外，人口的在增长速度也对于科技增长速度有贡献
- Romer的模型发现，如果研究者的比例s_A是内生决定的，其数量会小于社会最优的数量

研究人员不处于最优水平的原因

- 研究人员对于科技的贡献提高了人均GDP，但是科学创新也带来了两种外部性：
  - 正外部性：giants shouder effects；研究人员没有考虑到自己的研究对于未来生产效率的正向提高
  - 负外部性：由于$\lambda < 1$，过多的研究人员会使得边际研究产出下降

- 研究人员的最优比例，取决于这两种外部性的大小。如果 $\frac{\lambda}{1-\phi}$ =1，最优的研究人员比例为50%

经济增长的其他来源

- 教育（人力资本）
- AI?
- 生产方式的改变
- 其他?

参考:

- Romer, P. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy* 98, 71-102
- Whelan, K. (2014). MA Macroeconomics, Lecture 12