宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/2/27

问题解答

$$1+\mathrm{r}^{*}=\frac{y_1}{\beta y_0}$$

一、关于简单两期模型

尊敬的李伦老师:

您好!

关于第三次课件n个个体的简单两期模型，我有以下几个问题不太清楚，希望能够得到您的解答:

1.产品市场出清要求的总需求中为何不包括储蓄? 是因为按定义总需求=C+I+G+X-M还是因为此处仅仅讨论产品市场而没有涉及资本市场?

2.产品市场出清和资本市场出清的结果一定相同吗? 还是仅仅只是模型设定的结果?

3.均衡的利率表达式为何贴现因子会与y0相乘? 数学推导确实如此但如果按照资源的相对稀缺性理解贴现因子是否应该乘y1?

4.课件p30一般均衡的表达式为何要对y0、y1求导? 按照MRS=预算约束线斜率的绝对值，似乎应该对c0和c1求导?

辛苦您解答，期待您的回复!

此致

敬礼

瓦尔拉斯定律

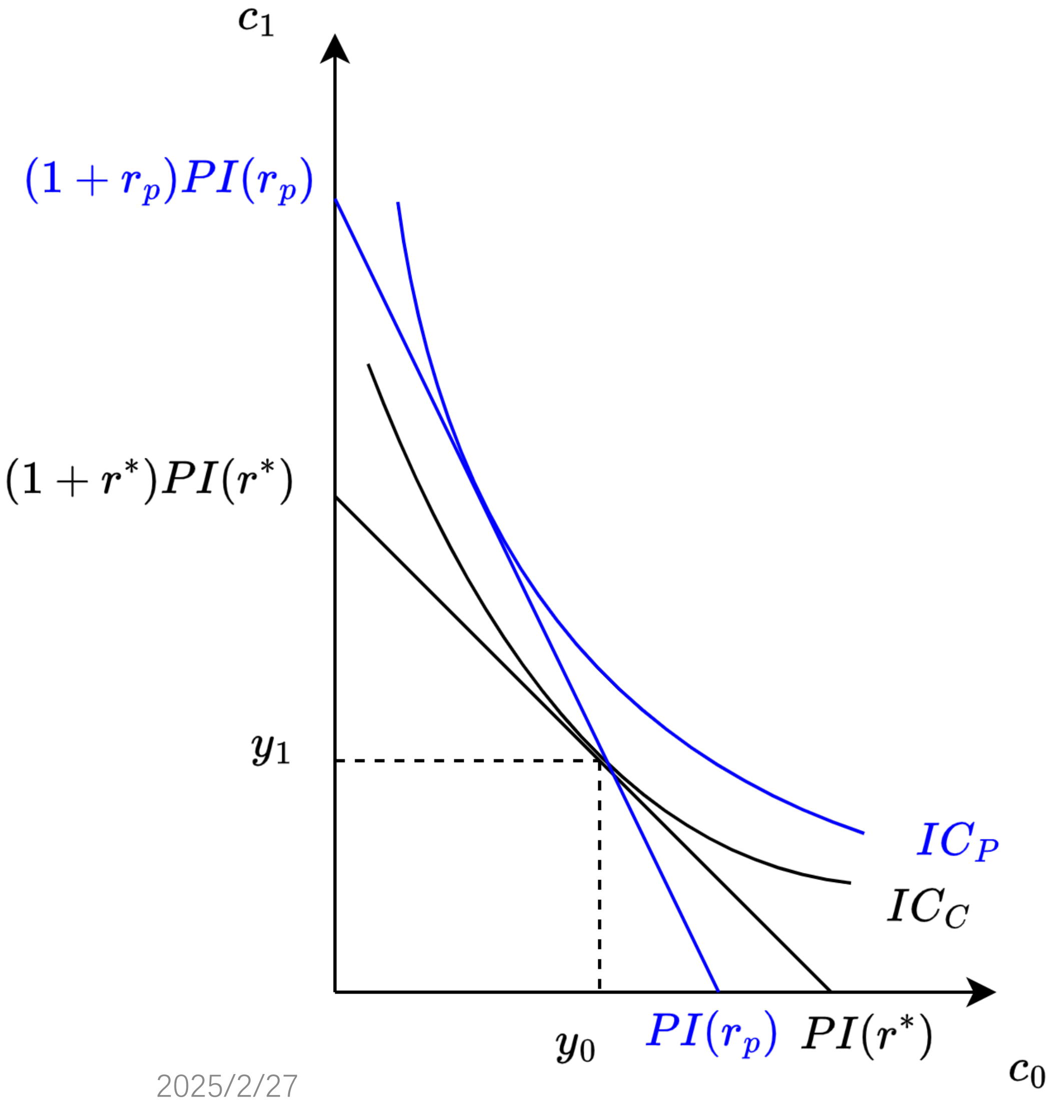
我们注意到，在这个经济体内，产品市场出清和资本市场出清其实是**同一个条件**。

Walras Law：

在一般均衡模型中，如果N-1个市场出清，那么第N个市场必然出清。

在这里，“看不见的手”会根据资本市场出清条件来调节利率，使得在均衡中既没有人想要借钱，也没有人想要存钱！

局部均衡与一般均衡



- 局部均衡：对于任何**给定的**利率水平r_p，都会对应着一个相应的当期消费函数$C_0(r_p)$ 和下期消费函数$C_1(r_p)$

- 一般均衡：存在一个利率水平r^*,可以满足商品市场出清和资本市场出清这两个条件，使得$c_0(r^*) = y_0$，$c_1(r^*) = y_1$，这一点的利率由通过(y_0, y_1)这一点的无差别曲线斜率确定。

- 举例：当$u(c) = \ln(c)$ 时，该点的斜率为

$$\frac{u'(y_0)}{\beta u'(y_1)} = \frac{y_1}{\beta y_0} = 1 + \mathrm{r}$$

去中心化的椰子模型

- 这个模型中，存在一个代表家庭（representative household）和一个代表公司（representative firm）

- 家庭在劳动市场上，通过为公司提供劳动 l 赚取工资 w

- 公司雇佣劳动力生产商品，生产函数为$f(l)$

- 除此之外，公司是由所有家庭共同拥有的，所以公司的利润 π 会分配给代表家庭

家庭的优化问题

- 给定工资水平w, 价格水平p, 和公司利润π , 家庭面对的问题是

$$\max_{c,l} \quad u(c,l)$$
$$s.t. \quad pc = wl + \pi$$

- 拉格朗日函数是:

$$\mathcal{L} = u(c,l) + \lambda(wl + \pi - pc)$$

- 一阶导数:

$$[c] \quad u_c(c,l) - \lambda p = 0$$
$$[l] \quad u_l(c,l) + \lambda w = 0$$

- 联立可得

$$-\frac{u_l(c,l)}{u_c(c,l)} = \frac{w}{p}$$

- 这是家庭的**劳动供给函数**!

公司的优化问题

- 公司把价格水平p 和工资水平w 看作给定，那么需要解决的问题是

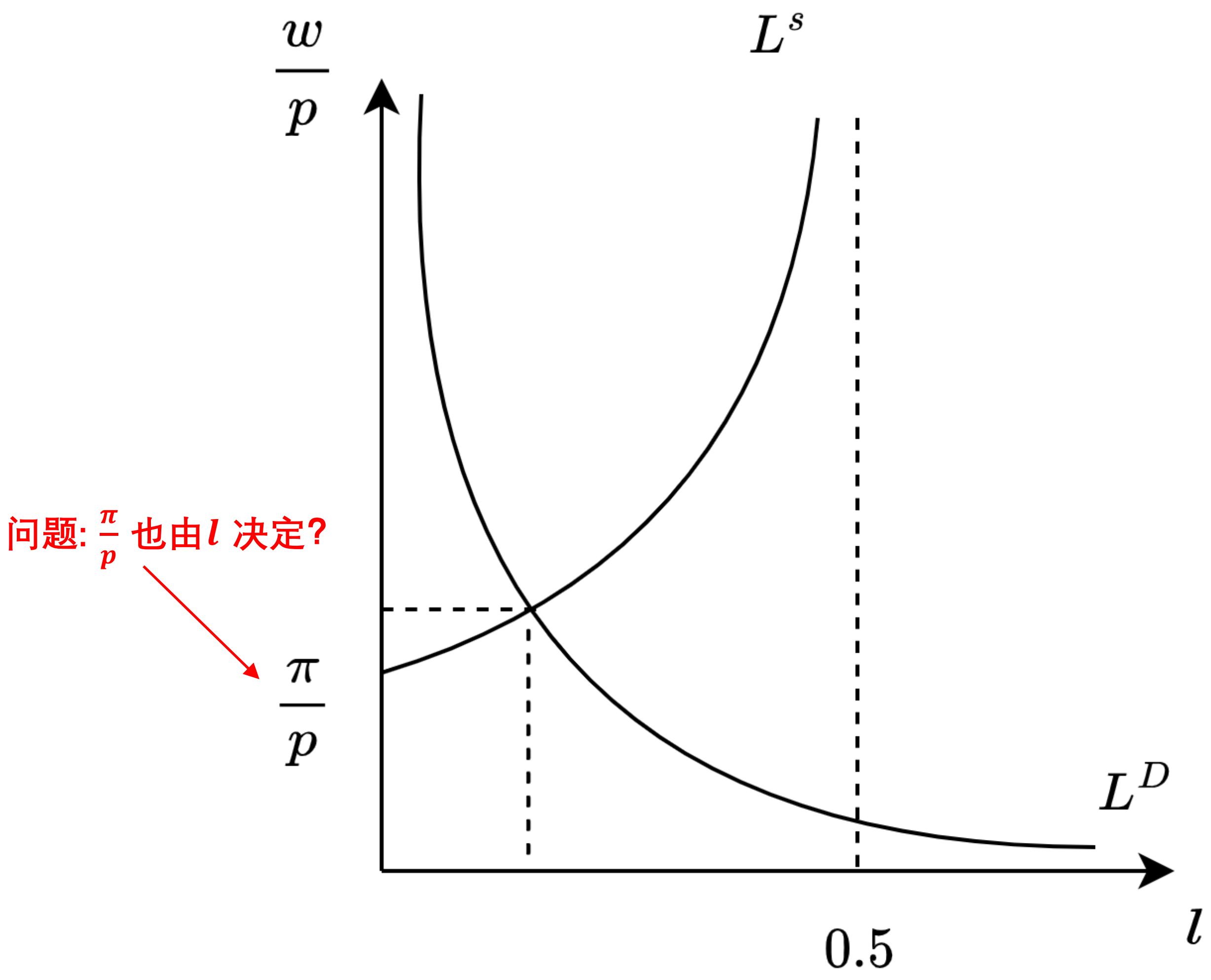
$$\max_{l} \quad pf(l) - wl$$

- 一阶导可得

$$f'(l) = \frac{w}{p}$$

- 这就是**劳动市场的需求函数**！

劳动市场出清



- 劳动市场出清，需要找到劳动供给函数和劳动需求函数的交点

$$-\frac{u_l(c,l)}{u_c(c,l)} = \frac{w}{p}$$

$$f'(l) = \frac{w}{p}$$

- 例子：

$$f(l) = Al^{\alpha}$$

$$u(c,l) = \ln c + \ln(1-l)$$

产品市场出清

- 劳动市场出清告诉我们：

$$\alpha A l^{\alpha-1} = \frac{c}{1-l}$$

- 产品市场出清：

$$c = f(l)$$

- 当$f(l) = Al^{\alpha}$ 时，可解得

$$l = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

- 这和鲁滨逊一期模型中解出的劳动量完全相同！

公司利润

最后，我们也可以解出工资水平为

$$\frac{w}{p} = \alpha A l^{\alpha-1} = \alpha A \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha-1}$$

公司利润为

$$\pi = pf(l) - wl = p\left(f(l) - \frac{w}{p} l\right)$$

$$\Rightarrow \pi = p(Al^{\alpha} - \alpha A l^{\alpha-1} l) = p(1-\alpha)A\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha}$$

观察：

- 消费中 αc 来自劳动收入，$(1-\alpha)c$ 来自公司分红
- 物价水平对经济行为没有任何影响（古典二分法）

背景8.3 - 计划经济与市场经济

- 哈耶克在论文 *The Use of Knowledge in Society* 中指出，一个按照中央计划者规划的经济体永远无法和市场经济的效率相提并论，因为中央计划者无法掌握关于市场的全部信息。

- 你对于哈耶克的观点有何想法？
- *（社会主义计算争论 Socialist calculation debate）*

讨论8.2 - 时间的价值

我们可以把家庭的预算约束写成

$$pc = w(T - n) + \pi$$

或者

$$pc + wn = wT + \pi$$

其中 T 是一天的总时长（假设 $T = 1$），n 代表休息的时间。

可以把优化问题看作成了**消费**和**闲暇**之间的取舍关系，而在这个模型中**闲暇时间的价格**等于**工资**。

引申思考：明星在人气最高（工资最高）的时候应该选择更拼命工作，还是更少工作？

带有劳动的两期模型

- 我们之前分析了消费和劳动在当期之间的替代关系（椰子模型），以及不同时期之间消费的替代关系（玉米模型，无生产函数的两期模型）

- 今天我们用一个模型来同时分析这两种关系

模型假设

- 两期模型（$t = 0,1$），生产使用劳动，不使用资本
- 代表家庭以 w_t 的工资水平提供劳动 l_t，可以用 r 的利率储蓄或借贷b_1，并从公司获得利润
- 代表家庭的效用函数为：

$$u(c_0) + v(l_0) + \beta\big(u(c_1) + v(l_1)\big)$$

其中

$$u'(c) > 0, \quad v'(l) < 0, \quad u''(c) < 0, \quad v''(l) < 0$$

模型假设-2

- 公司的生产函数为

$$A_t f(l),\quad t=0,1$$

- 公司利润$\pi_t = A_t f(l_t) - w_t l_t$ 被分配给代表家庭

家庭的优化问题

- 首先写出每期的预算约束

$$c_0 + b_1 = w_0 l_0 + \pi_0$$
$$c_1 = w_1 l_1 + \pi_1 + b_1(1+r)$$

- 写出跨期的预算约束

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = w_0 l_0 + \pi_0 + \frac{w_1 l_1 + \pi_1}{1+r}$$

- 家庭的效用函数为:

$$u(c_0) + v(l_0) + \beta\big(u(c_1) + v(l_1)\big)$$

解出家庭问题

$$\max_{c_0,c_1,l_0,l_1} \quad u(c_0)+v(l_0)+\beta\big(u(c_1)+v(l_1)\big)$$
$$s.t. \quad c_0+\frac{c_1}{1+r}=w_0l_0+\pi_0+\frac{w_1l_1+\pi_1}{1+r}$$

- 拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=u(c_0)+v(l_0)+\beta\big(u(c_1)+v(l_1)\big)+\lambda\left(w_0l_0+\pi_0+\frac{w_1l_1+\pi_1}{1+r}-c_0-\frac{c_1}{1+r}\right)$$

- 一阶导数

$$u'(c_0)-\lambda=0$$
$$\beta u'(c_1)-\frac{\lambda}{1+r}=0$$
$$v'(l_0)+\lambda w_0=0$$
$$\beta v'(l_1)+\frac{\lambda w_1}{1+r}=0$$

家庭的优化问题 -2

联立，可得

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)(1+r)$$

$$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = w_t, \quad t = 0,1$$

公司的优化问题

$$\max_{l_t} \ A_t f(l_t) - w_t l_t, \quad t = 0,1$$

- 一阶导数

$$A_t f'(l_t) = w_t, \quad t = 0,1$$

市场出清条件

- 产品市场:

$$y_t = A_t f(l_t) = c_t \quad t = 0,1$$

- 资本市场:

$$b_1 = 0$$

- 劳动市场

$$l_t^d = l_t^s \quad t = 0,1$$

总结

$u'(c_0) = \beta u'(c_1)(1+r)$ (跨期消费关系，也称欧拉方程 Euler Equation)

$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = w_t$，$t = 0{,}1$（每期劳动和消费的替换关系）

$A_t f'(l_t) = w_t$，$t = 0{,}1$（公司的劳动需求）

$y_t = A_t f(l_t) = c_t$ $t = 0{,}1$ （产品市场出清）

七个未知数$(c_0, c_1, l_0, l_1, w_0, w_1, r)$，七个等式

练习

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)(1+r)$$

$$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = w_t, \quad t = 0,1$$

$$A_t f'(l_t) = w_t, \quad t = 0,1$$

$$y_t = A_t f(l_t) = c_t \quad t = 0,1$$

- 假设
  - $u(c) = \ln c$
  - $v(l) = -l$
  - $f(l) = l^{\alpha}$

练习

$$\frac{1}{c_0} = \frac{1}{c_1}\beta(1+r) \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_0\beta(1+r)$$

$$-\frac{(-1)}{1/c_t} = w_t \quad \Rightarrow \quad c_t = w_t$$

$$\alpha A_t l_t^{\alpha-1} = w_t$$

$$A_t l_t^{\alpha} = c_t$$

- $u(c) = \ln c$
- $v(l) = -l$
- $f(l) = l^{\alpha}$

- 下面三个等式联立，可以解出

$$A_t l_t^{\alpha} = \alpha A_t l_t^{\alpha-1}$$
$$l_t^* = \alpha$$

其他变量

$$l_t^* = \alpha$$

把均衡劳动代入其他等式，解出均衡消费、工资、利率

$$c_t^* = A_t(l_t^*)^\alpha = A_t(\alpha)^\alpha$$

$$w_t^* = \alpha A_t(l_t^*)^{\alpha-1} = \alpha A_t(\alpha)^{\alpha-1}$$

$$1 + r^* = \frac{c_0}{\beta c_1} = \frac{1}{\beta}\frac{A_1}{A_0}$$

讨论

- 这里 l_t 不随科技水平A_t 变化，是因为劳动供给的收入和替代效应正好抵消（与之前相同）。

- 利率r的决定取决于科技水平A_t的相对大小。当明天的科技水平更高时，家庭想要增加本期消费，增加借贷，因此均衡利率会上升，从而抵消掉更高的借贷需求。

- 本期的技术水平 A_t 只影响本期的消费，而不影响其他期的消费，这是因为这个经济体内没有可供跨期储蓄的实际生产机制（类似玉米），所以从产品市场均衡的角度来说，无法真正完成跨期的财富分配。

社会计划者的版本

- 我们也可以把这个问题从社会计划者的角度来解决。

- 在他看来，由于没有储藏途径，所以每一期的消费必然等于收入($c_t = y_t$)

- 社会计划者关心的问题是，每一期应该付出多少劳动，才能使家庭达到最优的效用水平？两期的优化问题可以分别解决：

$$\max_{l_t} \left[u\big(A_t f(l_t)\big) + v(l_t)\right] \quad t = 0,1$$

$$\Rightarrow \frac{-v'(l_t)}{u'\big(A_t f(l_t)\big)} = A_t f'(l_t)$$

- 两个未知数，两个方程，同样可以解出l_t，从而推出两期的总消费（总产出）。

疑问

Q: 为什么要让模型变得复杂?

- 我们希望模型能够尽可能贴近实际，这样我们可以分析经济生活的各个因素之间的变化关系。
- 带有资本、劳动的两期模型，是新古典主义宏观经济学的基石。后面讨论到的新古典增长模型（Ramsey model），真实经济周期理论（Real business cycle，or RBC model），都建立在这一模型基础上

Q：这么复杂的模型有什么用处?

- 可以根据实际经济运行情况，模型中的各个参数进行校准（calibration），从而对实际的经济行为提出解释或预测。

资本品

- 把资本放入生产函数，介绍投资（investment）和资本的关系
- 一个带有资本、劳动生产函数的两期模型

什么是资本品（Capital Goods）？

- 能够协助生产其他商品或服务的物品。
- 例如：房屋、设备、器材、工具、车辆等产品，但不包括土地。
- 在模型中，我们假设资本品由家庭持有，公司使用每一单位资本品进行生产，需要向家庭支付租金 r^k.

折旧（Depreciation）与投资

- 资本品在生产过程中会出现折旧，可以理解为资本价值随时间产生的损失。

- 折旧率一般用 δ (delta) 表示。例如：价值 K_0 的设备在明天只价值$K_0(1-\delta)$.

- 投资是对资本品的补充，这样在下一期的时候就可以有更多资本品用于生产。例如：重新装修店面，为机器置换零件等。
$$K_1 = K_0(1-\delta) + I_0$$

思考：鲁滨逊的例子

第一天：

$$C_0 + I_0 = A_0 K_0^{\alpha}$$

可以理解为，资本的折旧率为1，即

$$K_1 = I_0$$

第二天：

$$C_1 = A_1 K_1^{\alpha}$$

带有资本、劳动生产函数的两期模型

- 两期模型, $t = 0,1$
- 初期的资本量K_0给定
- 家庭持有资本，可将资本租借给公司进行生产，收取租金 r^k，也可提供劳动力 l 换取工资w.
- 最后一期未折旧的资本品将被转换为消费品

家庭的优化问题

- 家庭将工资w, 租金r^k看做给定，选择消费、劳动、投资水平。

$$\max_{c_0,c_1,l_0,l_1,I_0,K_1} u(c_0)+v(l_0)+\beta[u(c_1)+v(l_1)]$$

$$s.t.\quad c_0+I_0=w_0L_0+r_0^kK_0+\pi_0$$

$$K_1=K_0(1-\delta)+I_0$$

$$c_1=w_1l_1+r_1^kK_1+K_1(1-\delta)+\pi_1$$

公司的优化问题

- 公司选择资本和劳动

$$\max_{l_t,K_t} A_t f(l_t, K_t) - w_t l_t - r_t^k K_t$$

- 最优条件:

$$A_t f_l(l_t, K_t) = w_t$$

$$A_t f_K(l_t, K_t) = r_t^k$$

市场出清条件

- 产品市场:

$$y_0 = A_0 f(l_0, K_0) = c_0 + I_0$$

$$y_1 = A_1 f(l_1, K_1) + (1-\delta)K_0 = c_1$$

- 劳动市场:

$$l_t^d = l_t^s$$

- 资本市场:

$$K_t^d = K_t^s$$

一个社会计划者的版本

- 预算约束：

$$C_0 + I_0 = A_0 f(l_0, K_0)$$

$$C_1 = A_1 f(l_1, K_1) + (1-\delta) K_1$$

$$K_1 = K_0(1-\delta) + I_0$$

- 第一、三行可以写成

$$C_0 + K_1 - K_0(1-\delta) = A_0 f(l_0, K_0)$$

- 效用函数：

$$u(c_0) + v(l_0) + \beta\big(u(c_0) + v(l_0)\big)$$

社会计划者的优化问题

$$\max_{c_0,c_1,l_0,l_1,K_1} u(c_0)+v(l_0)+\beta[u(c_1)+v(l_1)]$$

$$s.t.\quad C_0+K_1-K_0(1-\delta)=A_0f(l_0,K_0)$$

$$C_1=A_1f(l_1,K_1)+(1-\delta)K_1$$

- 用社会计划者的角度，解这个均衡会比较简单；两种方式找到的消费、劳动、资本的分布是相同的。

- 解这个优化问题：

$$\mathcal{L} = u(c_0) + v(l_0) + \beta[u(c_1) + v(l_1)] +$$
$$\lambda_0[A_0 f(l_0, K_0) - C_0 - K_1 + K_0(1-\delta)] +$$
$$\lambda_1[A_1 f(l_1, K_1) + K_1(1-\delta) - C_1]$$

- 一阶导数：

$$\begin{array}{lc}
[c_0] & u'(c_0) = \lambda_0 \\
[c_1] & \beta u'(c_1) = \lambda_1 \\
[l_0] & v'(l_0) + \lambda_0 A_0 f_l(l_0, K_0) = 0 \\
[l_1] & \beta v'(l_1) + \lambda_1 A_1 f_l(l_1, K_1) = 0 \\
[K_1] & -\lambda_0 + \lambda_1[A_1 f_K(l_1, K_1) + (1-\delta)] = 0
\end{array}$$

More math…

- $[c_0], [c_1], [K_1] \Rightarrow$

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)[1 + A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta]$$

- $[c_t], [l_t] \Rightarrow$

$$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = A_t f_l(l_t, K_t)$$

- 五个未知数$(c_0, c_1, l_0, l_1, K_1)$, 五个方程

（三个最优条件，两个预算约束）

例子

- $u(c) = \ln c$
- $v(l) = -l$
- $F(l, K) = l^{\alpha} K^{1-\alpha}$
- $\delta = 1$

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)[1 + A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta]$$

$$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = A_t f_l(l_t, K_t)$$

$$C_0 + K_1 - K_0(1 - \delta) = A_0 f(l_0, K_0)$$

$$C_1 = A_1 f(l_1, K_1) + (1 - \delta) K_1$$

- 此处，实际利率可以表示为

$$r = A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta$$

例子

- $u(c) = \ln c$
- $v(l) = -l$
- $F(l, K) = l^{\alpha} K^{1-\alpha}$
- $\delta = 1$

$$C_1 = C_0 \beta [(1-\alpha) A_1 l_1^{\alpha} K_1^{-\alpha}]$$
$$C_t = \alpha A_t l_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}, \quad t = 0,1$$

$$C_0 = A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha} - K_1$$
$$C_1 = A_1 l_1^{\alpha} K_1^{1-\alpha}$$

- 用C_1 的两个等式，可以解出 $l_1^* = \alpha$，那么$C_1 = A_1 (\alpha)^{\alpha} K_1^{1-\alpha}$

$$C_1 = A_1(\alpha)^{\alpha} K_1^{1-\alpha}$$
$$C_1 = C_0 \beta [(1-\alpha) A_1 l_1^{\alpha} K_1^{-\alpha}]$$

- 用欧拉公式（第二行），可以解出

$$C_0 = \frac{C_1}{\beta[(1-\alpha)A_1 l_1^{\alpha} K_1^{-\alpha}]} = \frac{K_1}{\beta(1-\alpha)}$$

- 带入$t = 0$的预算约束，可得

$$K_1 \quad = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha})$$
$$C_0 \quad = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha})$$

$$C_t = \alpha A_t l_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}$$

$$C_0 = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha})$$

- 上面两个公式联立：

$$\alpha A_0 l_0^{\alpha-1} K_0^{1-\alpha} = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha})$$

$$\Rightarrow l_0^* = \alpha[1+\beta(1-\alpha)]$$

- l_0^* 算出来之后，所有的变量都可以解出来啦！ :D

- 把l_0代入C_0,K_1 的表达式：

$$K_1^* \quad = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha}K_0^{1-\alpha}\right)$$

$$C_0^* \quad = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha}K_0^{1-\alpha}\right)$$

- 还可解出

$$C_1^* = A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}$$

停顿，总结

- 目前，我们解出来了以下均衡变量:

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

- 竞争均衡中的要素价格（工资，租金？）

工资与租金

- 公司的优化问题：

$$
\begin{aligned}
w_t^* &= \alpha A_t (l_t^*)^{\alpha-1} (K_t^*)^{1-\alpha} \\
\left(r_t^k\right)^* &= (1-\alpha) A_t (l_t^*)^{\alpha} (K_t^*)^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

- 代入相应的均衡劳动、资本量即可。
- 另外：

$$
r = A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta = r_1^k - \delta
$$

也就是说：实际利率=租金-折旧

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_0 上升时:

- y_0: 同样的要素投入，更好的科技使得本期产出增加
- l_0 : 替代效应让l_0上升，收入效应使得l_0下降，本例子中两种效果抵消。
- C_0: 本期收入更高，消费也更高
- K_1: 本期收入提高，也希望下期消费更高，因此储蓄更高

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_0 上升时:

- C_1：下期消费提高
- l_1：资本更多，劳动边际生产率（MPL）提高，替代效应让l_1上升，收入效应使得l_1下降，本例子中两种效果抵消。
- y_1：资本投入增加，产出增加

比较静态分析

$$\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^\alpha (K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

当 A_0 上升时:

- w_0 : 上升，科技使得劳动边际产量增加
- w_1 : 上升，更多资本使得下期劳动边际产量增加
- r_0^k: 上升，资本边际产量增加
- r_1^k: 下降，下期资本增多，资本边际产量减少

比较静态分析

$$\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^\alpha (K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

当 A_1 上升时：

- y_0： 无变化
- l_0 ： 无变化
- C_0： 无变化
- K_1： 无变化

- w_0: 无变化
- r_0^k: 无变化

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_1 上升时:

- y_1：科技水平增高，产出增加
- C_1：收入更高，消费提高
- w_1: 增高，因为科技水平使得MPL更高
- r_1^k：提高，因为科技水平使得MPK更高