宏观经济学

李伦
北京大学经济学院
2025/3/4

上次

- 带有资本、劳动生产函数的两期模型

- 初期的资本量K_0给定
- 家庭持有资本，可将资本租借给公司进行生产，收取租金 r^k，也可提供劳动力 l 换取工资w
- 最后一期未折旧的资本品将被转换为消费品

家庭的优化问题

- 家庭将工资w, 租金r^k看做给定，选择消费、劳动、投资水平。

$$\max_{c_0,c_1,l_0,l_1,I_0,K_1} u(c_0)+v(l_0)+\beta[u(c_1)+v(l_1)]$$

$$s.t.\quad c_0+I_0=w_0L_0+r_0^kK_0+\pi_0$$

$$K_1=K_0(1-\delta)+I_0$$

$$c_1=w_1l_1+r_1^kK_1+K_1(1-\delta)+\pi_1$$

公司的优化问题

- 公司选择资本和劳动

$$\max_{l_t, K_t} A_t f(l_t, K_t) - w_t l_t - r_t^k K_t$$

- 最优条件:

$$A_t f_l(l_t, K_t) = w_t$$

$$A_t f_K(l_t, K_t) = r_t^k$$

市场出清条件

- 产品市场:

$$y_0 = A_0 f(l_0, K_0) = c_0 + I_0$$

$$y_1 = A_1 f(l_1, K_1) + (1-\delta) K_1 = c_1$$

- 劳动市场:

$$l_t^d = l_t^s$$

- 资本市场:

$$K_t^d = K_t^s$$

一个社会计划者的版本

- 预算约束:

$$C_0 + I_0 = A_0 f(l_0, K_0)$$

$$C_1 = A_1 f(l_1, K_1) + (1-\delta)K_1$$

$$K_1 = K_0(1-\delta) + I_0$$

- 第一、三行可以写成

$$C_0 + K_1 - K_0(1-\delta) = A_0 f(l_0, K_0)$$

- 效用函数:

$$u(c_0) + v(l_0) + \beta\big(u(c_0) + v(l_0)\big)$$

社会计划者的优化问题

$$\max_{c_0,c_1,l_0,l_1,K_1} u(c_0)+v(l_0)+\beta[u(c_1)+v(l_1)]$$

$$s.t.\quad C_0+K_1-K_0(1-\delta)=A_0 f(l_0,K_0)$$

$$C_1=A_1 f(l_1,K_1)+(1-\delta)K_1$$

- 用社会计划者的角度，解这个均衡会比较简单；两种方式找到的消费、劳动、资本的分布是相同的。

- 解这个优化问题:

$$\mathcal{L} = u(c_0) + v(l_0) + \beta[u(c_1) + v(l_1)] +$$
$$\lambda_0[A_0 f(l_0, K_0) - C_0 - K_1 + K_0(1-\delta)] +$$
$$\lambda_1[A_1 f(l_1, K_1) + K_1(1-\delta) - C_1]$$

- 一阶导数:

$$\begin{array}{ll}
[c_0] & u'(c_0) = \lambda_0 \\
[c_1] & \beta u'(c_1) = \lambda_1 \\
[l_0] & v'(l_0) + \lambda_0 A_0 f_l(l_0, K_0) = 0 \\
[l_1] & \beta v'(l_1) + \lambda_1 A_1 f_l(l_1, K_1) = 0 \\
[K_1] & -\lambda_0 + \lambda_1[A_1 f_K(l_1, K_1) + (1-\delta)] = 0
\end{array}$$

More math…

- $[c_0], [c_1], [K_1] \Rightarrow$

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)[1 + A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta]$$

- $[c_t], [l_t] \Rightarrow$

$$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = A_t f_l(l_t, K_t)$$

- 五个未知数$(c_0, c_1, l_0, l_1, K_1)$, 五个方程

（三个最优条件，两个预算约束）

例子

- $u(c) = \ln c$
- $v(l) = -l$
- $F(l, K) = l^{\alpha} K^{1-\alpha}$
- $\delta = 1$

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)[1 + A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta]$$

$$-\frac{v'(l_t)}{u'(c_t)} = A_t f_l(l_t, K_t)$$

$$C_0 + K_1 - K_0(1 - \delta) = A_0 f(l_0, K_0)$$

$$C_1 = A_1 f(l_1, K_1) + (1 - \delta) K_1$$

- 此处，实际利率可以表示为

$$r = A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta$$

例子

- $u(c) = \ln c$
- $v(l) = -l$
- $F(l, K) = l^{\alpha} K^{1-\alpha}$
- $\delta = 1$

$$C_1 = C_0 \beta [(1-\alpha) A_1 l_1^{\alpha} K_1^{-\alpha}]$$
$$C_t = \alpha A_t l_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}, \quad t = 0,1$$

$$C_0 = A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha} - K_1$$
$$C_1 = A_1 l_1^{\alpha} K_1^{1-\alpha}$$

- 用C_1 的两个等式，可以解出 $l_1^* = \alpha$，那么$C_1 = A_1 (\alpha)^{\alpha} K_1^{1-\alpha}$

$$C_1 = A_1(\alpha)^{\alpha} K_1^{1-\alpha}$$
$$C_1 = C_0\beta[(1-\alpha)A_1 l_1^{\alpha} K_1^{-\alpha}]$$

- 用欧拉公式（第二行），可以解出

$$C_0 = \frac{C_1}{\beta[(1-\alpha)A_1 l_1^{\alpha} K_1^{-\alpha}]} = \frac{K_1}{\beta(1-\alpha)}$$

- 带入$t=0$的预算约束，可得

$$K_1 \quad = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha})$$
$$C_0 \quad = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha})$$

$$C_t = \alpha A_t l_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha}$$
$$C_0 = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right)$$

- 上面两个公式联立：

$$\alpha A_0 l_0^{\alpha-1} K_0^{1-\alpha} = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0 l_0^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right)$$
$$\Rightarrow l_0^* = \alpha[1+\beta(1-\alpha)]$$

- l_0^* 算出来之后，所有的变量都可以解出来啦！ :D

- 把l_0代入C_0,K_1 的表达式:

$$K_1^* \quad = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right)$$

$$C_0^* \quad = \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right)$$

- 还可解出

$$C_1^* = A_1(\alpha)^\alpha (K_1^*)^{1-\alpha}$$

停顿，总结

- 目前，我们解出来了以下均衡变量：

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha}K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha}K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

- 竞争均衡中的要素价格（工资，租金？）

工资与租金

- 公司的优化问题:

$$
\begin{aligned}
w_t^* &= \alpha A_t (l_t^*)^{\alpha-1} (K_t^*)^{1-\alpha} \\
\left(r_t^k\right)^* &= (1-\alpha) A_t (l_t^*)^{\alpha} (K_t^*)^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

- 代入相应的均衡劳动、资本量即可。

- 另外:

$$
r = A_1 f_k(l_1, K_1) - \delta = r_1^k - \delta
$$

也就是说：实际利率=租金-折旧

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^\alpha (K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_0 上升时:

- y_0: 同样的要素投入，更好的科技使得本期产出增加
- l_0: 替代效应让l_0上升，收入效应使得l_0下降，本例子中两种效果抵消。
- C_0: 本期收入更高，消费也更高
- K_1: 本期收入提高，也希望下期消费更高，因此储蓄更高

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_0 上升时:

- C_1：下期消费提高
- l_1：资本更多，劳动边际生产率（MPL）提高，替代效应让l_1上升，收入效应使得l_1下降，本例子中两种效果抵消。
- y_1：资本投入增加，产出增加

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^\alpha K_0^{1-\alpha}) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^\alpha (K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_0 上升时：

- w_0：上升，科技使得劳动边际产量增加
- w_1：上升，更多资本使得下期劳动边际产量增加
- r_0^k: 上升，资本边际产量增加
- r_1^k：下降，下期资本增多，资本边际产量减少

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_1 上升时:

- y_0: 无变化
- l_0 : 无变化
- C_0: 无变化
- K_1: 无变化

- w_0: 无变化
- r_0^k: 无变化

比较静态分析

$$
\begin{aligned}
l_0^* &= \alpha[1+\beta(1-\alpha)] \\
l_1^* &= \alpha \\
C_0^* &= \frac{1}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
I_0^* = K_1^* &= \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1-\alpha)}\left(A_0(\alpha[1+\beta(1-\alpha)])^{\alpha} K_0^{1-\alpha}\right) \\
C_1 &= A_1(\alpha)^{\alpha}(K_1^*)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

当 A_1 上升时：

- y_1：科技水平增高，产出增加
- C_1：收入更高，消费提高
- w_1: 增高，因为科技水平使得MPL更高
- r_1^k：提高，因为科技水平使得MPK更高

无限期模型

- 和两期模型类似，能够帮助我们理解长期增长、稳态等概念
- 例如，一个无生产函数的无限期模型

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$y_t + (1+r)b_t = c_t + b_{t+1} \quad t = 0,1,2,3, \ldots$$

解法

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) - \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \left(y_t + (1+r)b_t - c_t - b_{t+1}\right)$$

- 针对$[c_t]$, $[b_{t+1}]$, $[c_{t+1}]$ 求导即可

$$\begin{array}{cc} [c_t] & \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0 \\ [b_{t+1}] & -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1+r) = 0 \\ [c_{t+1}] & \beta^{t+1} u'(c_t) - \lambda_{t+1} = 0 \end{array}$$

- 依然可以解出欧拉方程:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1+r)$$

- 假设 $y_t = y_0$ for all t, $u(c) = \ln c$, $b_0 = 0$，能否解出$\{c_t, b_{t+1}\}$
- 把欧拉方程的结果展开

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1+r)$$

$$c_t = [\beta(1+r)]^t c_0$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t c_t = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t y_t$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t [\beta(1+r)]^t c_0 = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t y_0$$

$$\frac{1}{1-\beta} c_0 = \frac{1}{1-1/(1+r)} y_0$$

$$c_0 = (1-\beta)\frac{1+r}{r} y_0$$

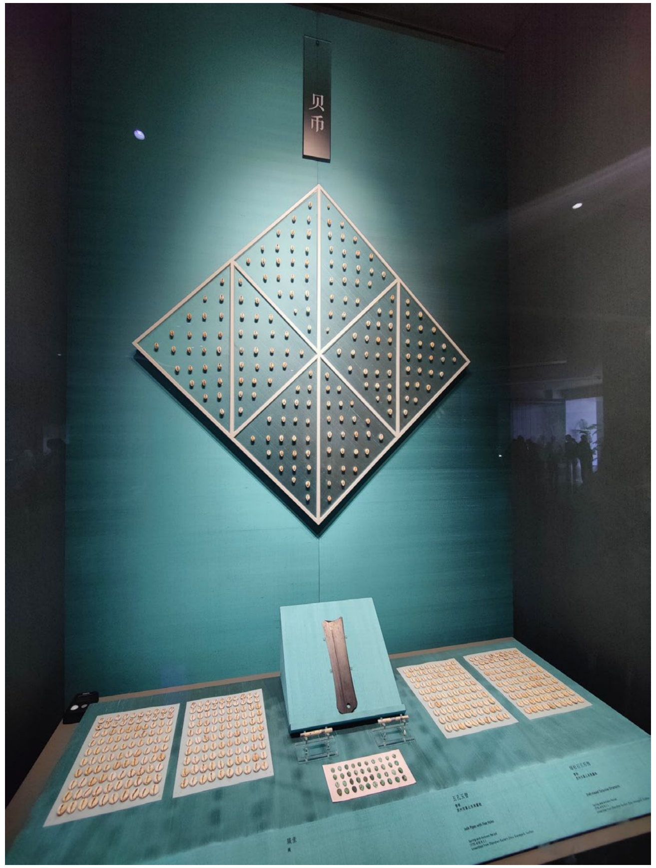
产品市场出清

$$c_0 = (1-\beta)\frac{1+r}{r}y_0 = y_0$$
$$\beta(1+r) = 1$$

- 像之前一样，产品市场出清决定了均衡利率！

新古典模型中的货币需求

货币的属性



货币的几种功能：
- 交易功能
- 储值功能
- 计价功能

货币的分类
- 商品货币 (commodity money)
- 代表货币 （representative money）
- 法定货币 (fiat money)

货币的统计方式

国家统计联网直报门户

最新公告： ~~载的通知~~ 2022年04月27日 · 关

您现在的位置：首页 > 统计基础知识

中国货币供应量层次划分

时间：2017-07-17 来源：

1994年，中国人民银行首次将中国的货币供应量分为M0、M1、M2三个层次。此后，货币供应量的口径经过多次修订。2001年6月份，将证券公司客户保证金计入M2；2002年初，将在中国的外资、合资金融机构的人民币存款业务，分别计入到不同层次的货币供应量；2011年将住房公积金存款和非存款类金融机构在存款类金融机构存款计入M2。当前中国货币供应量层次如下：

M0=流通中现金

M1=M0+单位活期存款

M2=M1+单位定期存款+个人存款+其他存款

M0=流通中现金

M1=M0+单位活期存款

M2=M1+单位定期存款+个人存款+其他存款

货币的统计方式

M1统计口径“纳新”有何考量?

2024-12-03 09:35 来源： 新华社 字号：**默认** 大 超大 | 打印

新华社北京12月2日电 **题：M1统计口径“纳新”有何考量？**

新华社记者 吴雨、任军

中国人民银行2日发布公告称，决定自统计2025年1月份数据起，启用新修订的狭义货币（M1）统计口径。此次M1流动性强的金融工具被纳入新统计口径。这是出于何种考虑？又将带来哪些影响？

2024年4月以来，M1增速连续六个月为负，9月录得-7.4%的历史低值。M1通常被视为衡量企业投资意愿的指标，其连续负增长引发各界关注。

对此，多位经济学家接受《财经》采访时曾表示，M1连续负增长显示有效需求不足，但也与现有统计口径存在一定遗漏有关。

中欧国际工商学院经济学与金融学教授盛松成此前接受《财经》专访时曾表示，M1这一指标的理论基础是：货币是商品交换的媒介和支付手段，也就是说随时可用于支付的货币应该归类到M1范畴。

中国居民大量通过微信支付、支付宝等电子支付手段进行支付，其资金实质是个人活期存款或第三方支付机构的备付金，而这部分货币尚未被统计到M1中，存在一定的遗漏。

在盛松成看来，修订后，指标会更完善，也符合实际流动性状况，能较准确地反映货币供应量与经济运行的关系。

在修订前，M1包括M0、单位活期存款；M2包括M1、单位定期和其他存款、个人存款、非存款类金融机构存款、非存款机构部门持有的货币市场基金份额。中国人民银行有关负责人介绍，此次修订后，M1将包括M0、单位活期存款、个人活期存款、非银行支付机构客户备付金。

也就是说，中国人民银行将把个人活期存款和非银行支付机构客户备付金，这两项流动性强的金融工具纳入M1统计。

为什么要调整M1的统计口径呢？

中国的广义货币

- 12月末，广义货币(M2)余额313.53万亿元,同比增长7.3%。狭义货币(M1)余额67.1万亿元,同比下降1.4%。流通中货币(M0)余额12.82万亿元,同比增长13%。

（来源：中国人民银行，2024年金融统计数据报告）

Baumol-Tobin 模型

- 美国经济学家William Baumol 和美国经济学家James Tobin 各自独立提出的货币需求模型

- 为凯恩斯的货币需求理论提供了一些直观的微观基础

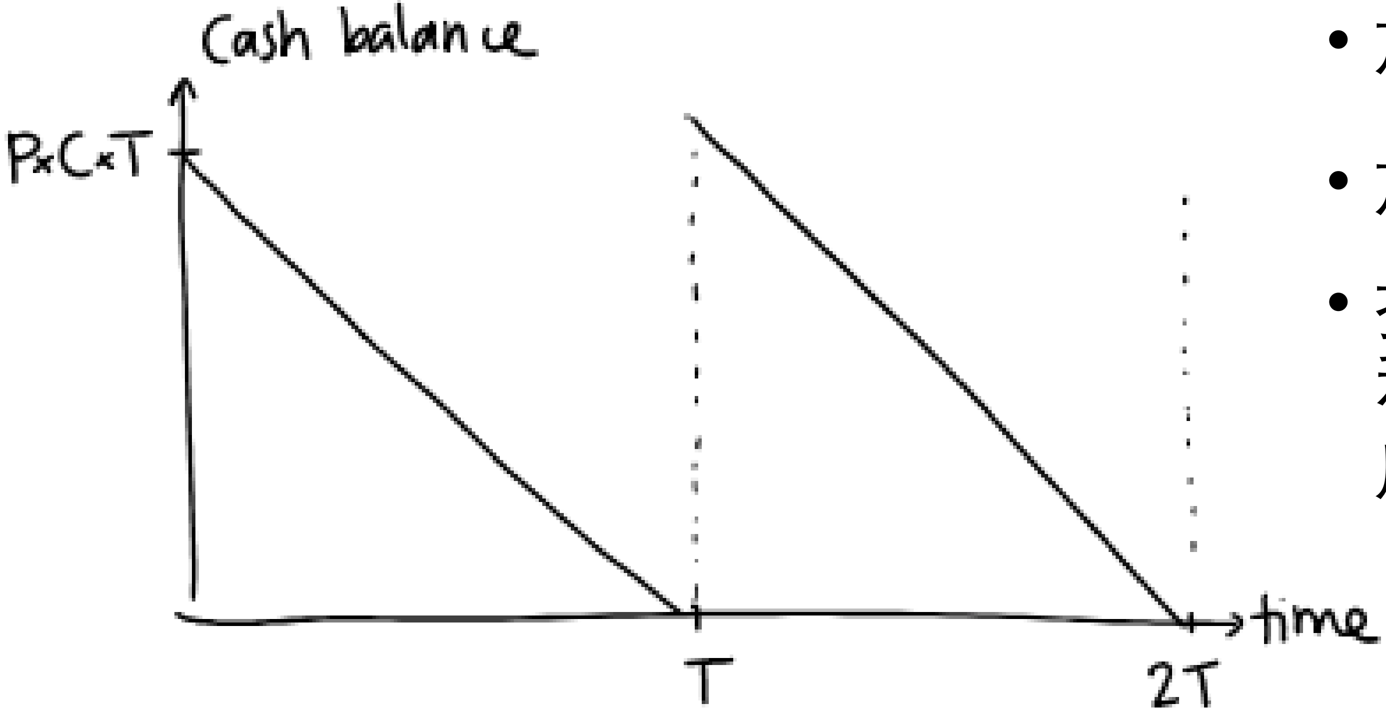
Baumol-Tobin模型介绍

- 每年的实际消费：C
- 每年的名义消费：$P \times C$
- 两次取现金之间的时间间隔（年）：T
- 每次取现金的名义成本：γ
- 每年取现金的实际成本：

$$\frac{\gamma}{P}\frac{1}{T}$$

- 每次取走的现金：$P \times C \times T$
- 银行利率：i

图形分析



- 平均现金余额： $\bar{M} = \frac{1}{2}PCT$
- 放弃的利息（名义）： $\frac{1}{2}PCTi$
- 放弃的利息（实际）： $\frac{1}{2}iCT$
- 持有现金的实际成本 = 放弃的利息（实际）+ 取现金的实际成本

$$\frac{1}{2}iCT + \frac{\gamma}{P}\frac{1}{T}$$

最佳的取款间隔

- 可以解出最佳的取款间隔T，从而将持有现金的实际成本最小化：

$$\frac{1}{2}iC-\frac{\gamma}{P}\frac{1}{T^2}=0$$

$$T=\sqrt{\frac{2\gamma}{PiC}}$$

- 货币平均需求量（实际）：

$$\frac{\bar{M}}{P}=\frac{1}{2}CT=\frac{1}{2}C\sqrt{\frac{2\gamma}{PiC}}$$

$$\Rightarrow\frac{\bar{M}}{P}=\sqrt{\frac{C\gamma}{2iP}}$$

贡献

- 为货币需求提供了微观基础，是一个较早的范例

- 说明了为何实际货币需求（流动性需求）和交易量（C） 正相关，和利率（i)、物价（P) 负相关；当取款的成本非常小的时候，货币需求也会相应减小

- 凯恩斯主张，货币的投机性需求受利率影响，而交易需求受收入影响。Baumol-Tobin 模型建立了货币的**交易需求**和利率的关系。

- 后来的发展：Romer (1986) 提出了一个一般均衡版本的Baumol Tobin 模型

背景11.1- Baumol-Tobin模型，谁的功劳？

- Baumol 和 Tobin 两人的弟子都认为自己的老师才是这一模型的始作俑者。
- 从发表时间上看，Baumol发表得早（1952年），而Tobin在1956年才发表论文
- 可是，Tobin的学生主张他在1952年之前就在课堂上教这个模型
- 1989年，Baumol和Tobin就此问题合写了一篇文章，解决了这一争端。
- 他们提出，这个模型的基础早在1947年就被法国经济学家莫里斯·阿莱在文章中使用过了！

The Optimal Cash Balance Proposition: Maurice Allais' Priority

William Baumol and James Tobin

Journal of Economic Literature, 1989, vol. 27, issue 3, 1160-62

Money-in-Utility 模型

Money-in-Utility (MIU) Model

- 为什么要持有货币?

- 答：因为持有货币让人幸福!

~~（等于没说?~~

Sidrauski (1967) 将货币引入了新古典增长模型

模型假设

- 无限期模型，一个代理行为人，每期效用函数为$u(c_t, m_t)$， 其中消费为c_t，实际货币需求量为

$$m_t = \frac{M_t}{P_t}$$

- 生产函数为 $y_t = f(k_t)$， 资本折旧率$0 < \delta < 1$

投资

代理行为人可以选择三种投资方式：

- 持有货币M_t，下一期得到同样多的货币M_t
- 持有名义债券B_t，下一期得到$B_t(1+i_t)$的现金
- 投资实业I_t，下一期得到实际资本回报 $I_t(1+r_t)$

政府

- 这里简化政府的预算约束，政府可以通过调整货币储备的方式为社会提供财富转移：

$$M_t - M_{t-1} = P_t T_t$$

T_t 可以是正或负，这里T_t代表政府的转移支付（Transfer），不代表税收

- 如果我们假设政府发行货币的成本为0，那么这里的 $M_t - M_{t-1}$ 可以理解为铸币税（Seigniorage），即政府通过印制货币获得的实际收入。
- 实际生活中，货币存在铸造成本，铸币税 = 货币面值 - 货币铸造成本
- 在我们的假设中，政府通过补贴的方式，把铸币税获得的收入还给代理人

背景12.1 – 铸币税的形式

- Seigniorage，来自法语seigneuriage, “right of the lord (seigneur) to mint money”
- 例如：在制作金币、银币的时候可以在里面掺入其他金属，使得重量相等，而实际用到的贵金属含量大大减少；
- 美元的印刷成本：

Denomination	Printing Costs
$1 and $2	6.2 cents per note
$5	10.8 cents per note
$10	10.8 cents per note
$20	11.2 cents per note
$50	11.0 cents per note
$100	14.0 cents per note

预算约束

- 在去中心化的社会中，代理家庭的预算约束是:

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = R_t k_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t + \Pi_t$$

- 代理公司的问题是:

$$\Pi_t = \max_{k_t^d} \quad P_t f\left(k_t^d\right) - R_t k_t^d$$

R_t 是名义租金

预算约束- 2

- 公司最大化利润:

$$f'(k_t^d) = \frac{R_t}{P_t}$$

- 资本市场出清:

$$k_t^d = k_t$$

- 将 $\Pi_t = P_t f(k_t) - R_t k_t$ 放入代理人的预算约束:

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = P_t f(k_t) + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t$$

预算约束-3

- 从社会计划者的角度分析，每期的预算约束是

$$c_t + I_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_t}{P_t} = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})B_{t-1} + M_{t-1}}{P_t} + T_t$$

$$I_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta)$$

- 我们可以定义通货膨胀率π_t为

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi_t$$

- 那么可以重新将预算约束写为：

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + m_t + b_t = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_{t-1})} + T_t$$

社会计划者的问题

$$\max_{c_t, m_t, b_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t)$$

$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + m_t + b_t = f(k_t) + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_{t-1})} + T_t$$

- 写出拉格朗日函数（略）
- 一阶导数：

$$[c_t] \quad \beta^t u_c(c_t, m_t) = \lambda_t$$

$$[k_{t+1}] \quad \lambda_{t+1}[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] - \lambda_t = 0$$

$$[m_t] \quad \beta^t u_m(c_t, m_t) - \lambda_t + \frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_t} = 0$$

$$[b_t] \quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}\frac{1+i_t}{1+\pi_t} = 0$$

两个欧拉方程

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 这个经济体内有多种储蓄手段…
- 如果不存在套利机会，那么名义债券和实际投资的的回报率应该相等…

$$f'(k_{t+1}) + (1-\delta) = 1 + r_t = \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$

- 这个实际利率和名义利率之间的关系，叫做费雪公式（费舍尔公式，Fisher Equation），经常会写作

$$r_t = i_t - \pi_t$$

这里应用了$\ln(1+x) \approx x$ 的关系（作业附加题）

持有现金的原因

- 还有一个公式
$$u_m(c_t, m_t) + \beta \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{1+\pi_t} = u_c(c_t, m_t)$$
- 如果现金不出现在效用函数中，那么第一项为0；此时应该有
$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1}{1+\pi_t}$$
- 但是名义债券的欧拉方程为
$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$$
- 除非名义利率为0，否则这两者不可能同时联立，因为名义债券的回报率高于现金 $i_t > 0$

实际货币需求

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}$$

$$u_m(c_t, m_t) + \beta \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{1 + \pi_t} = u_c(c_t, m_t)$$

联立可得:

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1 + i_t}$$

当名义利率升高的时候，会发生什么变化?

均衡条件

- 债券市场均衡:

$$b_t = 0$$

- 货币市场均衡:

$$m_t^d = \frac{M_t}{P_t}$$

- 产品市场均衡:

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) = y_t$$

稳态的存在

- 是否存在一个稳态（steady state），此时经济体内的资本和消费都不随时间变化？

$$k_{t+1} = k_t = k^*$$
$$c_{t+1} = c_t = c^*$$

- 为简化分析，我们假设实际货币供给$m_t = M_t/P_t = m^*$ 处在一个稳态。

稳态时的投资、消费与资本

因为投资满足下列条件

$$I_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta)$$

如果$k_{t+1} = k_t = k^*$,那么$I^* = \delta k^*$

- 产品市场均衡:

$$c^* = f(k^*) - I^* = f(k^*) - \delta k^*$$

- 欧拉公式:

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$
$$\beta(f'(k^*) + 1 - \delta) = 1$$

能够找到稳态时的资本k^*.

例子

$$u(c,m) = \log c + \log m$$
$$f(k) = k^{\alpha}$$
$$\Rightarrow \beta(\alpha(k^*)^{\alpha-1} + 1 - \delta) = 1$$
$$k^* = \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$
$$c^* = (k^*)^{\alpha} - \delta k^*$$

长期来看，稳态消费、资本的大小不受货币、利率等因素影响（货币中立）

讨论：货币中立是否总是成立？（separable preferences, labor market, etc）

稳态时的货币需求

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1 + i_t}$$

$$\frac{c^*}{m^*} = \frac{i\,*}{1 + i\,*}$$

$$u_c(c_t, m_t) = \beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} \quad \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1 + i^*}{1 + \pi^*}$$

$$m^* = c^* \frac{1 + \pi^*}{1 + \pi^* - \beta}$$

稳态时的通胀与货币增长

假设货币供给以稳定的速度 μ 增长:

$$M_{t+1} = (1+\mu)M_t$$

那么，实际货币供给处在稳态意味着

$$\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}} = \frac{M_t}{P_t}$$

$$\frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$$

$$1+\mu = 1+\pi^*$$

$$\Rightarrow \pi^* = \mu$$

稳态时的名义利率水平为

$$1+i^* = (1+f'(k^*)-\delta)(1+\mu)$$

最优通胀率？

$$m^* = c^* \frac{1+\pi^*}{1+\pi^*-\beta} = c^*\left(1+\frac{\beta}{1+\pi^*-\beta}\right)$$

- 通货膨胀不影响稳态时的消费，只会影响稳态的实际货币量
- 最优的通胀水平应该越小越好，政府可以通过调节货币增长速度来使得通胀最小
- 因为名义利率不能小于0，最优的货币增长速度满足

$$i^* = 0$$
$$1 = (1+f'(k^*)-\delta)(1+\mu)$$
$$\mu = \frac{1}{1+f'(k^*)-\delta} - 1$$

或者表示为$\mu \approx -r^*$

- 设定名义利率为0的政策建议也被称为弗里德曼原则（Friedman Rule）

一些问题

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = P_t f(k_t) + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t$$

- 提问：如果把政府财政预算 $M_t - M_{t-1} = P_t \mathcal{T}_t$ 代入到这个预算约束中，岂不是现金M_t, M_{t-1}就消掉了？

- 没错！实际上，如果考虑到债券市场出清（$B_t = 0$)，预算约束可以写为：

$$P_t c_t + P_t I_t = P_t f(k_t)$$

$$C + I = Y$$

这也是为什么实际生产环节不依赖货币的原因！（货币中性）

完整的政府预算约束

- 我们也可以假设政府的职能更加完善，例如政府可以发行债券，有税收 $\mathbb{T}_t$ 和支出G_t
- 政府完整的预算约束可以写作

$$P_t G_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t = P_t \mathbb{T}_t + M_t - M_{t-1} + B_t$$

左边：支出项，包括政府购买(实际），偿还到期的债券（名义），给代理人的补贴（实际）

右边：收入项，包括税收（实际），铸币税的收入（名义），新增发的债券（名义）

新的预算约束

如果存在政府支出，税收，那么此时行为人的预算约束为

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = R_t k_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t + \Pi_t - P_t \mathbb{T}_t$$

代入公司利润的表达式$\Pi_t = P_t f(k_t) - R_t k_t$：

$$P_t c_t + P_t I_t + M_t + B_t = P_t f(k_t) + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + M_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t - P_t \mathbb{T}_t$$

代入完整的政府预算约束，可以把预算约束简化为：

$$P_t G_t + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} + P_t \mathcal{T}_t = P_t \mathbb{T}_t + M_t - M_{t-1} + B_t \quad \text{[Gov. BC]}$$

$$P_t c_t + P_t I_t + P_t G_t = P_t f(k_t)$$

$$C + I + G = Y$$

Friedman Rule

$$\frac{u_m(c_t,m_t)}{u_c(c_t,m_t)} = 1 - \frac{1}{1+i_t}$$

当 i = 0 时，$u_m(c_t,m_t) = 0$，在理论上意味着货币供给量此时达到了使得效用最高的水平

- 问题：是否意味着 $m = \infty$？
- 取决于我们如何设定$u(c,m)$的函数形式，比如一些论文会假设实际货币量大于某一常数 $\bar{M}$ 时，货币的边际效用降低为0。