Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln

Normal $\Rightarrow$ Polar
Polarform: $z = re^{i\varphi}$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x} + \pi) & x < 0, y \geqslant 0 \\ \arctan(\frac{y}{x} - \pi) & x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & x = 0, y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

Polar $\Rightarrow$ Normal
Normalform: $z = x + iy$
$x = \Re(z) = r \cdot \cos(\varphi)$
$y = \Im(z) = r \cdot \sin(\varphi)$

n-te Wurzel

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, k = 0, 1, ..., n-1$$

Diverse Rechenregeln

$$\begin{array}{lll} z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy & & z = re^{i\varphi} \Rightarrow \overline{z} = re^{-i\varphi} \\ |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| & |z + z'| \leqslant |z| + |z'| & |z|^2 = |z^2| \\ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} & \overline{zw} = \overline{zw} & \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w} \\ z + \overline{z} = 2\Re(z) & z - \overline{z} = 2i\Im(z) & \end{array}$$

Quadratwurzel in der Normalform

Wurzeln aus komplexen Zahlen berechnet man am besten in der Exponentialform mit obiger Formel. Quadratwurzel können in der Normalform jedoch mit Ansatz gelöst werden.
$(x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \Rightarrow$
$x + iy = \sqrt{x^2 - y^2 + i \cdot 2xy}$
Für eine Quadratwurzel aus einer beliebigen komplexen Zahl $u + iv$ ergibt sich:
$\sqrt{u + iv} = x + iy = \sqrt{x^2 - y^2 + i \cdot 2xy} \Rightarrow$
$u + iv = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$
Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{array} \right|$$