1 Allgemeine Begriffe

1.1 Funktionen

Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst:

injektiv	$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
surjektiv	$\forall y \in Y \;\exists\; x \in X : f(x) = y$
bijektiv	injektiv UND surjektiv
	$\Rightarrow \forall y \in Y \;\exists!\; x \in X : f(x) = y$
gerade	$\forall x \in X : f(-x) = f(x)$ //Achsensymmetrie Bsp: $\cos(x)$
ungerade	$\forall x \in X : f(-x) = -f(-x)$ //Punktsymmetrie Bsp: $\sin(x)$

Definitionsbereich von f	$dom(f)$	$//X$
Wertebereich von f	$range(f)$	$//Y$
Bildmenge von f	$image(f)$	$//\{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$

1.2 Stetigkeit

Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^m \to Y \subset R^n$ heisst stetig in $x_0 \in X$, falls

- $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \epsilon$
- für jede Folge (x_k) in X mit $\lim k \to \infty x_k = x_0$ gilt: $\lim k \to \infty f(x_k) = f(x_0)$
- f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + o(1)$ für $x \to x_0$

f ist stetig, falls f stetig $\forall x_0 \in X$ ist.

Grundeigenschaften

1. Die Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist wieder stetig.
2. Eine vektorwertige Funktion ist stetig gdw. alle Einträge stetige Funktionen sind.
3. Die Grundrechenarten sind stetig.
4. Jede rationale Funktion ist stetig (wo definiert).
5. Die Umkehrfunktion einer bijektiven und stetigen Funktion ist wieder stetig.
6. Unstetige Funktionen sind z.B. $sgn(x)$ oder $\lfloor x \rfloor$

1.3 Mengen

Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$ der offene Ball mit Radius r um x_0
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist:

1. $X^0 := \{x_0 \in X \mid \exists\ r > 0 : B_r(x_0) \subset X\}$ das Innere von X

2. $\overline{X} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall r > 0 : B_r(y) \cap X \neq \varnothing\}$ der Abschluss von X

3. $\partial X := \overline{X} \backslash X^0$ der Rand von X

Weiter heisst X:

1. offen, falls $X = X^0$

2. abgeschlossen, falls $X = \overline{X}$

3. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heisst dicht in X, falls ihr Abschluss ganz X ist.

2 Grenzwerte

f hat bei x_0 den Grenzwert $y_0 \in \mathbb{R}^n$, falls gilt:
$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\ \forall x \in X :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$
Für ausführlichere Varianten siehe `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2010/other/analysi`
`itet/Grenzwerte.pdf`

2.1 Einige Grenzwerte von Funktionen

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$	$\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^q} = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^q}{e^x} = 0$	$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha \cdot \ln x = 0$	
$\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1, z \in \mathbb{C}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$

2.2 Sätze über Grenzwerte von Funktionen

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad \lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$$
$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]\left[\lim_{x \to x_0} g(x)\right] \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$
Verkettung: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$ und $g(u)$ stetig in $u_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g[f(x)] = g(u_0)$

Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = (0 \vee \infty)$

Majoranten- u. Minorantenkriterium

- Ist $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ und $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ für alle x nahe x_0, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$
- Ist $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ und $f(x) > g(x)$ für alle x nahe x_0, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Sonstige Tricks

1. Bei $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q Polynomfunktionen, durch das Polynom mit dem höchsten Grad teilen und Term damit erweitern.
   Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2+5x+7} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2x^2+3x-1}{x^2+5x+7} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}} = 2$
2. $a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$

Beispiel

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \quad \text{“}=\text{''}\ 1^\infty \quad \to$ indefinit, falscher Ansatz!

$= \lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot x\right) \quad$ Trick 2

Da e^x überall stetig, ist die Formel der Verkettung erlaubt

$= \lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot x\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot x\right)\right) \quad$ Verkettung

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot x\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{\frac{x}{x+1}}}{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{l'Hôpital}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot -x^2 = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{x^2+x}\\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{x^2+x} \quad \text{Trick 1}\\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -1
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

2.3 Asymptoten

1. f, g sind zueinander asymptotisch, falls $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$
2. Der Graph von g(x) heisst Asymptote zu f, falls g(x) eine lineare Funktion $px+q$ ist.

Beispiel: $f(t) = \frac{t^2-t-5}{t-3} = t+2+\frac{1}{t-3}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(t) - g(t) = \lim\limits_{x\to\infty} t+2+\frac{1}{t-3} - g(t) = 0$

$\Rightarrow g(t) = t+2$

3 Folgen und Reihen

3.1 Allgemeines über Reihen

$\sum a_k$	konvergent	$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$
$\sum a_k$	absolut konvergent	$\sum \lvert a_k \rvert$ ist konvergent
$\sum a_k$ konvergent		$\Rightarrow (a_k)$ ist eine Nullfolge

3.2 Grenzwerte spezieller Zahlenfolgen

Die Grenzwertsätze für Funktionen sind auch für Zahlenfolgen anwendbar.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284... \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad |a| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$$

3.3 Spezielle Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{Gauss'sche Summenformel} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad |q| < 1 \quad \text{Geometrische Reihe} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{Harmonische Reihe} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n) + 0.557...$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{für } s > 1 \text{ konvergent} \quad \text{Riemann'sche Zetafunktion}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2 \quad \text{alternierende harmonische Reihe}$$

3.4 Umordnung von Reihen

Jede absolut konvergente Reihe bleibt absolut konvergent nach beliebiger Umordnung. Ist die Reihe nicht absolut konvergent, so existiert eine Umordnung, die divergiert.

$$\text{Beispiel: } \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k}_{\text{nicht abs.konv.}} = 0 \neq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 1^{2k}}_{=\infty} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 1^{2k+1}}_{=-\infty}$$

3.5 Rechenregeln

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} a_k + \sum_{k=k_1}^{\infty} a_k$$
$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$$
$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$
$$a_k \leqslant b_k \forall k \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$$
$$\sum_{l=l_0}^{\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{k,l}| < \infty \Rightarrow \text{absolut konvergent} \Rightarrow \sum_{l=l_0}^{\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{l=l_0}^{\infty} a_{k,l}$$
$$\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=l_0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{l=l_0}^{\infty} a_k b_l$$

3.6 Konvergenzkriterien

Kriterium von Leibniz
(a_k) alternierend und $(|a_k|)$ monotone Nullfolge $\Rightarrow \sum a_k$ ist konvergent
Majorantenkriterium
$(|a_k|) \leqslant c_k$ für fast alle k, $\sum c_k$ konvergent $\Rightarrow \sum a_k$ ist absolut konvergent
Quotientenkriterium
$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q$ mit $0 < q < 1$ für fast alle k $\Rightarrow \sum a_k$ ist absolut konvergent
Wurzelkriterium
$\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant q$ mit $0 < q < 1$ für fast alle k $\Rightarrow \sum a_k$ ist absolut konvergent

Bemerkungen: Ergibt das Quotientenkriterium genau 1, so sagt es nichts über die Konvergenz aus und ist nicht anwendbar.

4 Potenzreihen

Ein Ausdruck der Form $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ heisst Potenzreihe

4.1 Konvergenzradius bei Potenzreihen

Quotientenkriterium	$r = \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\|$
Wurzelkriterium	$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{\|a_k\|}\right)}$
geometrische Reihe	$r = 1$ bei $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ falls $\|q\| < 1$
binomische Reihe	$r = 1$ bei $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k$ falls $\|z\| < 1$

Beispiel: Konv.radius von $f(z) = \frac{1}{z-2}$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2 = \text{Konvergenzradius}$$

4.2 Binomische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k = (1+z)^{\alpha} \text{ für } |z| < 1$$

$\alpha = n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$:	$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot z^k$
$\alpha = -n; n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$:	$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \cdot z^k$
$\alpha = -1$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \cdot z^k$

4.3 Potenzreihenentwicklung

Die Potenzreihenentwicklung kann man bei Funktionen brauchen, die irgendwas mit e^x oder sonstigen Funktionen, deren Potenzreihenentwicklung bekannt ist, verwendet werden.

Beispiel: $\ln(1+y) = x \Leftrightarrow 1 + y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Ansatz: $x = y + ay^2 + by^3 + \dots$

$$y = (y + ay^2 + by^3 + \dots) + \frac{1}{2}(y + ay^2 + by^3 + \dots)^2 + \frac{1}{6}(y + ay^2 + by^3 + \dots)^3 + \dots$$

$$y = y + y^2(a + \tfrac{1}{2}) + y^3(b + \tfrac{1}{2}\cdot 2a + \tfrac{1}{6}) + O(y^4)$$

Alle Terme = 0 setzen liefert:$a = -1/2, b = 1/3$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots \pm \frac{y^k}{k}$$

5 Differentialrechnung

5.1 klein o-Gross O-Notation

Funktion f ist $O(g(x))$ falls $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ beschränkt für $x \to x_0$

Funktion f ist $o(g(x))$ falls $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \xrightarrow{x \to x_0} 0$

5.2 Sätze

Diffbarkeit	f ist diffbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0); x \to x_0$ f ist diffbar, falls diffbar in jedem $x_0 \in X$
Zwischenwertsatz	Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. D.h: $f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow [f(a), f(b)] \subset image(f)$
Mittelwertsatz	Sei $f : [a, b]$ stetig und auf $]a, b, [$ diffbar, so existiert eine Stelle t in $]a, b[$ mit $f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Potenzreihenidentitätssatz	Stellen zwei Potenzreihen für $\lvert x\rvert < \epsilon$ dieselbe Funktion dar, so sind sie bereits gliedweise gleich.
Hauptsatz der Infinitesimalrechnung	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

5.3 Supremum,Infimum

Supremum, $\sup(X)$	Kleinste obere Schranke für die Menge X
Infimum, $\inf(X)$	Grösste obere Schranke für die Menge X

Rechenregeln

$\sup(X + b) = \sup(X) + b$	$\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y); X, Y \neq \varnothing$
$\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup(X); c > 0$	$\sup(c \cdot X) = c \cdot \inf(X); c < 0$
$\inf(X) = -\sup(-X)$	

5.4 Taylorapproximation

$j_{x_0}^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heisst das n-te Taylor-Polynom von f an der Stelle x_0.

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ ist dabei das n-te Restglied.

Mit diesem Term lässt sich der Fehler abschätzen, denn es gilt: $f(x) = j_{x_0}^n f(x) + R_n(x)$

5.5 Newtonverfahren zur Nullstellenfindung

$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\quad \lim_{n \to \infty} x_n =$ Nullstelle

6 Integralrechnung

Partielle Integration $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

6.1 Standardsubstitutionen

$\int f(x, \sqrt{ax+b})dx$	$t = \sqrt{ax+b}$	$dx = \frac{2tdt}{a}$
$\int f(g'(x), g(x))dx$	$t = g(x)$	$dx = \frac{dt}{g'(x)}$
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a \cdot \sin t$	$dx = a \cdot \cos(t)dt$
$\int f(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$	$x = a \cdot \sinh t$	$dx = a \cdot \cosh(t)dt$
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = a \cdot \cosh t$	$dx = a \cdot \sinh(t)dt$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	durch quad.Ergänzung auf obere Formen bringen	
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)dx$	$t = e^x$	$dx = \frac{dt}{t}$
$\int f(\sin x, \cos x)dx$	$t = \tan\frac{x}{2}$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

6.2 Lösungen einiger Integrale

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1}$$

$$\int \sin^2(ax+b)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2as+2b) + c$$

$$\int \cos^2(ax+b)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2as+2b) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int [f'(x)]^n \cdot f(x)dx = \frac{1}{n+1} \cdot [f(x)]^{n+1} + c$$

6.3 Konvergenzkriterien für uneigentliches Integral

- Für f stetig auf $[a, \infty[$
  Majorentenkriterium: $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, falls $|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^s}, s > 1$
  Minorantenkriterium: $\int_a^\infty f(x)dx$ divergiert, falls $f(x) \geqslant \frac{c}{x^s}, s \leqslant 1$

- Für f stetig auf $]a, b]$, auf $[a, b[$ integrierbar.
  Majorentenkriterium: $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert, falls $|f(x)| \leqslant \frac{c}{(x-a)^s}, s < 1$
  Minorantenkriterium: $\int_a^b f(x)dx$ divergiert, falls $f(x) \geqslant \frac{c}{(x-a)^s}, s \geqslant 1$ und $c > 0$

7 Lineare Differentialgleichungen

7.1 Separierbare DGL 1. Ordnung

Form: $y' = g(x) \cdot K(y) = \frac{dy}{dx}$

Lösung: $\int \frac{dy}{K(y)} = \int g(x)dx$

Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\arctan y = x + c$$

$$y = \tan x + c$$

7.2 Homogene DGL 1. Ordnung (Substitution)

Beispiel: $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y}{x}^2}$

Setze $u := \dfrac{y}{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{x} - \frac{y}{x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = u + \sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u + \sqrt{1+u^2} - u}{x}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

Beispiel: $\dfrac{dy}{dx} = (x + y(x))^2$

Setze $u := x + y$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2$$

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \int dx$$

$$\arctan(u) = x + c$$

$$u = x + y = \tan(x+c)$$

$$y = \tan(x+c) - x$$

7.3 Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung

Homogener Fall

Form: $y' = p(x) \cdot y$

Ansatz: $\dfrac{dy}{dx} = p(x) \cdot y$ ist separierbar

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x) dx$$

$$\ln|y| = P(x) + c$$

Lösung: $y_{hom} = e^{P(x)} \cdot C$

Inhomogener Fall (Variation der Konstanten)

Form: $y' = p(x) \cdot y + q(x)$

Ansatz: $y = y_{hom} \cdot c(x)$

$$y' = y'_{hom} \cdot c(x) + y_{hom} \cdot c'(x)$$

Dies in allgemeine Form einsetzen:

$$y'_{hom} \cdot c(x) + y_{hom} \cdot c'(x) = p(x) \cdot y_{hom} \cdot c(x) + q(x)$$

wobei $y'_{hom} = p(x) \cdot y_{hom}$ ist (homogener Fall)

$$c'(x) = \frac{q(x)}{y_{hom}}$$

$$c(x) = \int \frac{q(x)}{y_{hom}} dx + k$$

Lösung: $y = y_{hom} \cdot \left(\int \dfrac{q(x)}{y_{hom}} dx + k \right)$

7.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Homogener Fall

Form: $Ly = y^{(n)} + f_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_0 \cdot y^{(0)} = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \cdot e^{\lambda x} = \lambda^k \cdot e^{\lambda x}$$

$$Le^{\lambda x} = \underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0\right)}_{\text{char.Polynom, } ch_L} \cdot e^{\lambda x}$$

$\lambda_{1 \dots n}$sind Nullstellen vonch_L

Lösung: $y_{hom} = ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x} + \dots + ne^{\lambda_n x}$

☞ Eine k-fache Nst. liefert k Fundamentallösungen
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$

☞ Reelle Fundlsg. bei komplexen Nst. $\lambda = \mu + i\nu$
$e^{\mu x} \cos(\nu x), e^{\mu x} \sin(\nu x), \dots,$
$x^{k-1} e^{\mu x} \cos(\nu x), x^{k-1} e^{\mu x} \sin(\nu x)$

Inhomogener Fall

Form: $Ly = y^{(n)} + f_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_0 \cdot y^{(0)} = P(x) e^{\lambda x}$

Ansatz: $y = y_{hom} + y_{par}$

Lösung: y_{hom}siehe oben

$y_{par} = Q(x) \cdot e^{\lambda x}, (Q(x)$ Polynom vom Grad $m + l)$

$m =$ Multiplizität der (Nst.) λ (darf 0 sein)

$l =$ Grad von $P(x)$

Beispiel: $y^{(5)} + y = xe^x \Rightarrow \ l = 1$

$ch_L(\lambda) = \lambda^5 + 1 \Rightarrow \lambda = 1$ nicht Nst. $(m = 0)$

$y = (ax + b)e^x = ae^x + bxe^x$

$y^{(5)} = ae^x + b(e^x(x + 5))$

Koeffizientenvergleich

$$\underbrace{y^{(5)} + y}_{=xe^x} = \underbrace{(a + a + 5b)}_{=0} e^x + \underbrace{(b + b)}_{=1} xe^x$$

$$y_{par} = \left(-\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}x\right) e^x$$

8 Differentialrechnung in mehreren Variablen

8.1 Differenzierbarkeit

- stetig $\Leftarrow$ total diffbar $\Rightarrow$ in jede Richtung diffbar $\Rightarrow$ partiell diffbar
  Die umgekehrten Implikationen gelten nicht.

- f partiell diffbar $\Leftrightarrow \forall i : f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h + o(|h|)$

- f in Rtg. e diffbar $\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\right) = f(x) + D_e f(x) \cdot t + o(t)$

- f total diffbar $\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}\right) = f(x) + \langle \nabla f, h \rangle + o(|h|)$

- Falls f total diffbar, dann Rtg.ableitung $D_e f = \langle \nabla f, e \rangle$

Diffbarkeitstest

- f heisst partiell diffbar, falls $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ die partielle Ableitung (der Grenzwert)
  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + h \\ x_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ x_n \end{pmatrix}}{h}$ existiert.

- f ist in jede Richtung diffbar, falls $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\right) - f(x) \xrightarrow{t \to 0}$ obiger Grenzwert

Tangentialebene

Beispiel: Tangentialebene für $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{xy}$ im Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\nabla f = \left(-\frac{1}{x^2 y}, -\frac{1}{xy^2}\right)$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left\langle \nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle + o\left(\begin{vmatrix} x-1 \\ y-2 \end{vmatrix}\right)$

$= \frac{1}{2} + \left\langle \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle + o(\dots)$

$= \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + o(\dots)$

Tangentialebene: $z = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$

8.2 Mehrdimensionale Kettenregel

Formel: $\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = \langle \nabla f\big(g(t)\big), g'(t) \rangle =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(t)\big) \cdot g_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(g(t)\big) \cdot g_n'(t)$$

Beispiel: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2, \;\; g(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \nabla f = (2x, 2y), \;\; g'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = \left\langle \big(2\cos(t), 2\sin(t)\big), \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

8.3 Leibniz-Regel

Formel: Sei $G\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) := \int_a^b f(x,c)dx$ diffbar

$$\Rightarrow \;\; \nabla G = \left(-f(a,c), f(b,c), \int_a^b \frac{\partial f}{\partial c}(x,c)dx\right)$$

Formel 2: Sei $F(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ diffbar

$$\Rightarrow \;\; \frac{dF}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx + f\big(b(t),t\big) \cdot b'(t) - f\big(a(t),t)\big) \cdot a'(t)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx, \text{ falls } a, b \text{ konstant}$$

Bsp1: $I(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} \frac{e^{tx^2}}{x} dx$

$$I'(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} \frac{d}{dt} \frac{e^{tx^2}}{x} dx + \frac{e^{tx^2}}{x}\bigg|_{x=\cos t} \cdot (-\sin t) - \frac{e^{tx^2}}{x}\bigg|_{x=\sin t} \cdot \cos t$$

$$= \int_{\sin t}^{\cos t} x \cdot e^{tx^2} dx + \frac{e^{t\cos^2(t)}}{\cos(t)} \cdot (-\sin t) - \frac{e^{t\sin^2(t)}}{\sin(t)}$$

$$= \frac{e^{tx^2}}{2t}\bigg|_{\sin(t)}^{\cos(t)} + \ldots$$

Bsp2: $F'(t) = \frac{d}{dt} \int_1^2 \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x(x+1)} dx \quad F'(0)?$

$$= \int_1^2 \frac{x \cdot e^{tx}\sqrt{1+t^2x} + e^{tx} \frac{tx}{\sqrt{1+t^2x}}}{x(x+1)} dx$$

$$F'(0) = \int_1^2 \frac{x}{x(x+1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1} = [\ln|x+1|]_1^2 = \ln\left|\frac{3}{2}\right|$$

8.4 Taylor-Entwicklung

Formel: $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + f_x\Delta x + f_y\Delta y$

$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(\Delta x)^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}(\Delta y)^2\right) + \ldots +$

$+\frac{1}{N!}\left(\binom{N}{0}f_{x^N}\Delta x^N + \binom{N}{1}f_{x^{N-1}y}(\Delta x)^{N-1})\Delta y + \ldots\right)$

$+\, o\left(\begin{vmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{vmatrix}^m\right)$

Die partiellen Ableitung sind immer an der Stelle (x_0, y_0) auszuwerten.

$\Delta x = (x - x_0)\;\; \Delta y = (y - y_0)$

Beispiel: Berechne näherungsweise $\alpha := \sqrt{3.03^2 + 3.95^2}$

$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \sqrt{x^2+y^2}$diffbar für $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$x_0 = 3 \quad y_0 = 4 \quad x = 3.03 \quad y = -3.95$

$\Rightarrow\;\; \Delta x = 0.03 \quad \Delta y = -0.05$

$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$f_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad f_{xy} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Alles gemäss obiger Formel einsetzen

$\sqrt{9+16} + \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot 0.03 + \frac{4}{3^2+4^2} \cdot -0.05$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{4^2}{(3^2+4^2)^{3/2}} \cdot 0.03^2 + 2 \cdot \frac{-3\cdot 4}{(3^2+4^2)^{3/2}} \cdot 0.03 \cdot -0.05 + \frac{3^2}{(3^2+4^2)^{3/2}} \cdot (-0.05)^2\right) =$

$5 + \frac{0.03\cdot 3}{5} + \frac{-0.05\cdot 4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{0.03^2\cdot 16}{125} + \frac{-0.0015\cdot -24}{125} + \frac{-0.05^2\cdot 9}{125}\right) = 4.9781116$

Tipp: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

8.5 Extrema

Hesse-Matrix

Die Hesse Matrix ist die "2.Ableitung" in höherer Dimension.

$H_f := \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$,wobei $f_{x_jx_k} = f_{x_kx_j} \forall j,k$

Kritische Punkte

Bei einem kritischen Punkt x_0 ist $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$
Jede lokale Extremalstelle ist ein kritischer Punkt, aber nicht umgekehrt.

1. partielle Ableitungen gleich 0 setzen.
2. Daraus entstehende Lineare Gleichungssysteme lösen.
3. So erhaltene kritische Punkt auf Typ prüfen mittels $\nabla^2 f$

Falls $\nabla^2 f(x_0)$	pos. oder neg. semidefinit	$\Rightarrow$ entartet
	negativ definit	$\Rightarrow$ lokales Maximum
	positiv definit	$\Rightarrow$ lokales Minimum
	indefinit	$\Rightarrow$ Sattelpunkt

Bei entarteten Punkten muss die Umgebung des Punktes untersucht werden, um festzustellen, ob es sich um ein Extrema, Sattelpunkt oder Mischung handelt.

Definitheit von symmetrischen Matrizen

Eine symmetrische Matrix A mit Eigenwerten λ_i ist:

pos. definit, falls:	$\lambda_i(A) > 0 \ \forall i$
pos. semidefinit, falls:	$\lambda_i(A) \geqslant 0 \ \forall i$
neg. definit, falls:	$\lambda_i(A) < 0 \ \forall i$
neg. semidefinit, falls:	$\lambda_i(A) \leqslant 0 \ \forall i$
indefinit, falls:	$\lambda_i(A) > 0 \wedge \lambda_i(A) < 0$

Für $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ geht die Bestimmung auch direkt:

pos. definit, falls:	$\det(H_f) > 0 \wedge f_{xx} > 0$
pos. semidefinit, falls:	$\det(H_f) = 0 \wedge f_{xx} > 0$
neg. definit, falls:	$\det(H_f) > 0 \wedge f_{xx} < 0$
neg. semidefinit, falls:	$\det(H_f) = 0 \wedge f_{xx} < 0$
indefinit, falls:	$\det(H_f) < 0$

Globale Extrema

Sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

1. Teile B in offene Teilmengen B^* auf.
2. Finde alle lokalen Extrema in B^* UND separat auf den Rändern und Eckpunkten.
3. Vergleiche alle erhaltenen Kandidaten.

Extrema mit Nebenbedinungen (Lagrange-Ansatz)

Sei nun $f : B = \{x \in U | g(x) = 0\}$
Dann sind bedingt kritische Punkte von f bzgl. g:

1. $\nabla g(x_0) = 0$ (Nebenbedingung singulär)

2. $\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Lagrange-Ansatz: $L : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\nabla L = (\nabla f - \lambda \nabla g, -g)$

Kritische Punkte von L sind kritische Punkte vom Typ 2

Beispiel: Bestimme die Extrema von $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := -\sqrt{3}x + 3y + 2z$

auf der Einheitssphäre$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, B$ kompakt, f stetig $\Rightarrow \exists$ Extrema

$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ ist überall $\neq (0, 0, 0)$ auf B

$\Rightarrow$ Jede Extremalstelle ist bedingt kritischer Punkt vom Typ 2

$L : (x, y, z, \lambda) = -\sqrt{3}x + 3y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

Krit. Punkte von L:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\sqrt{3} - \lambda 2x \qquad = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{3}}{2\lambda}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3 - \lambda 2y \qquad = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2\lambda}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 3 - \lambda 2z \qquad = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\lambda}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \qquad = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

λ in x, y, z einsetzen:

$(x, y, z) = \pm \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)$

$f(x, y, z) = \pm 4$

Mehrere Nebenbedingungen

Lagrange-Ansatz: $L : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \mu \cdot h \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

8.6 Implizite Funktionen

Sei $U \in \mathbb{R}^2$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Fkt. und $L := \{(x,y) \in U | f(x,y) = 0\}$
Sei $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$ (sonst ist L singulär)
Sei $I \times J \subset U$ und $\phi: I \to J, \quad x \mapsto y = \phi(x)$
Sei (x_0, y_0) ein Punkt in $I \times J$

$$\text{Dann ist} \quad \phi'(x_0) = -\frac{f_x}{f_y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
$$\phi''(x_0) = -\frac{f_x}{f_y} + 2\frac{f_{xy}f_x}{f_{y^2}} - \frac{f_{y^2}f_{x^2}}{f_{y^3}}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

9 Vektorwertige Funktionen

9.1 Funktionalmatrix (Jacobimatrix)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen; $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}: U \to \mathbb{R}^m$

Dann ist $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
eine $m \times n$-Matrix, genannt die Funktionalmatrix resp. Jacobimatrix

Zusammenhang mit Hessematrix

Sei $P: U \to \mathbb{R}^2$ eine C^2-Funktion.
Dann ist $(\nabla P)^T$ eine vektorwertige Funktion mit 2 Variablen
$\Rightarrow$ Die Funktionalmatrix von $(\nabla P)^T$ ist eine $n \times n$-Matrix, die genau der Hessematrix $\nabla^2 P$ entspricht.

9.2 Funktionaldeterminante (Jacobideterminante)

$\det \nabla f(x_0)$ heisst Funktionaldeterminante.

9.3 Kettenregel für vektorwertige Funktionen

Formel: $\quad \nabla(g \circ f) = \underbrace{(\nabla g)\big(f(x)\big)}_{\text{m Spalten}} \cdot \underbrace{(\nabla f)\big(x\big)}_{\text{m Zeilen}} \quad \leftarrow$ Matrixmultiplikation

9.4 Inverse

Sind f, g zueinander invers, so ist ∇f eine invertierbare Matrix und d.h.
$\nabla g\big(f(x)\big) = (\nabla f)^{-1} \Leftrightarrow g(y) = \Big(\nabla f\big(g(y)\big)\Big)^{-1}$

10 Mehrdimensionale Integration

10.1 Grundeigenschaften

Notation: $\mu(z)$ entspricht dem eindimensionalen dx,dy,... und bezeichnet das Differential.
$\mu(B)$ wiederum bezeichnet das Volumen von B.

1. $\int_{A\cup B} f(z)\mu(z) = \int_A + \int_B - \int_{A\cap B}$ vgl. Inklusion-Exklusion
2. $\int_B f(z)\mu(z) = 0$,falls $\mu(B) = 0$
3. $\int_B 1\mu(z) = \mu(B)$ Volumen
4. $\int_B f(z) + g(z)\mu(z) = \int_B f(z)\mu(z) + \int_B g(z)\mu(z)$ Regel der Linearität
5. $\int_B \lambda \cdot f(z)\mu(z) = \lambda \cdot \int_B f(z)\mu(z)$ Regel der Konstanten
6. $f(z) \leqslant g(z) \forall z \in B \Rightarrow \int_B f(z)\mu(z) \leqslant \int_B g(z)\mu(z)$
7. $\left| \int_B f(z)\mu(z) \right| \leqslant \int_B |f(z)|\mu(z)$
8. $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in B, f, g : B \to \mathbb{R}$ stetig
   $$\int_B g(x) - f(x)\mu(z) = \mu\left(\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \middle| x \in B, f(x) \leqslant x_{n+1} \leqslant g(x) \right\}\right)$$
   Berechnung des n+1 dimensionalen Volumens

10.2 Satz von Fubini

$$\int_{I\times J} f(x,y)d(x,y) = \int_I \int_J f(x,y)dxdy = \int_J \int_I f(x,y)dydx$$

10.3 Substitution

Formel: $\int_B f(x)\mu(x) = \int_{\tilde{B}} f\big(\varphi(\tilde{x})\big) \cdot |\nabla\varphi(\tilde{x})| \cdot \mu(\tilde{x})$

Beispiel: Berechne die Fläche von $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 \leqslant R^2 \right\}$

Polarkoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} r \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \quad |\nabla\varphi| = r$

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \leqslant r \leqslant R \\ -\pi \leqslant \psi \leqslant \pi \end{matrix} \right\}$$

$$\int_B 1 \cdot \mu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r\ d\varphi\ dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R} \cdot 2\pi = R^2\pi$$

10.4 Masse

$$\begin{aligned}
\text{Diskret:} \quad & M = \sum m_i \\
\text{Kontinuierlich:} \quad & M = \int_B \rho(x)\mu(x) \\
& \text{“Dichte} \cdot \text{Volumen”}
\end{aligned}$$

10.5 Schwerpunkt

$$\begin{aligned}
\text{Diskret:} \quad & S = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\
\text{Kontinuierlich:} \quad & S = \frac{\int_B \rho(x) \cdot \vec{x}\mu(x)}{\int_B \rho(x)\mu(x)}
\end{aligned}$$

10.6 Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
\text{Formel:} \quad & J = \int_B \rho(\vec{r}) \cdot |\vec{r_\perp}|^2 dB \\
& |\vec{e} \times \vec{r}| = |\vec{r_\perp}| \text{ ist der Abstand vom Punkt } \vec{r} \text{ zur Drehachse } \vec{e}
\end{aligned}$$

10.7 Potentiale

Ist $K(x) = (\nabla f)^T$ dann ist f ein Potential von K (Verallgemeinerung von Stammfunktion)
Bsp: K Kraftfeld, f zugehörige potentielle Energie
Ein C^1 Vektorfeld $K = (K_1 \dots K_n)^T$ hat lokal ein Potential gdw. $\forall i \forall j : \dfrac{\partial K_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial K_j}{\partial x_i}$

explizite Berechnung

im $\mathbb{R}^2$ gilt: $(\nabla f)^T = K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$ für $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 2 DGL: $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad Q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}$

1. Berechne $f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \int P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}dx$
   $\Rightarrow$ Allg.Lösung der 1.DGL: $f = f_1 + g(y) \quad g(y)$ muss von x unabhängig sein!
2. f in 2.DGL einsetzen: $Q = \frac{\partial f_1}{\partial y} + g'(y) \Leftrightarrow g = \int Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}dy$
   $\Rightarrow$ Falls $Q - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ nicht unabhängig von x ist, existiert kein Potential!

Beispiel: $K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^3+xy^2\\x^2y-y^5\end{pmatrix}$

1. $f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \int x^3 + xy^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}$
   $\Rightarrow$ Allg.Lösung der 1.DGL: $f = f_1 + g(y)$
2. $x^2y - y^5 = x^2y + g'(y) \Leftrightarrow g = \int y^5 dy = \frac{y^6}{6} + c$
   $\Rightarrow f = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^6}{6} + c$

10.8 skalares Linienintegral

$\varphi : [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n$

Formel: $\int_C f(x)|d\vec{x}| := \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(t)|dt \quad f: C \to \mathbb{R}$

Hauptsatz: $\int_C \operatorname{grad} f(x) \cdot dx = f(q) - f(p),$ C ist der Weg von p nach q

Länge einer Kurve: $\int_C 1|dx| = \int_a^b |\varphi'(t)|dt$

Länge eines Graph: $\int_a^b \sqrt{1+\psi'(t)^2}dt \quad \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix}t\\\psi(t)\end{pmatrix}$

10.9 skalares Flächenintegral

δ bezeichnet die Fläche (wie μ das Volumen)
$\mathbb{R}^2 \supset B \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}^3$

Formel: $\int_F f(x)\delta(x) := \int_B f\left(\varphi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) \cdot \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| du\,dv$

Fläche: $\int_C 1\delta x = \int_B \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| du\,dv$

Fläche eines Graphs: $\int_B \sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}du\,dv \quad \varphi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\\psi(u,v)\end{pmatrix}$

10.10 Formeln für Rotationskörper

$$\text{Masse o.Ä.:} \quad \int_a^b \int_0^{r(z)} f\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix} 2\pi\rho \; d\rho \, dz$$

$$\text{Volumen:} \quad \int_a^b \pi \cdot r(z)^2 dz$$

$$\text{Fläche:} \quad \int_a^b 2\pi \cdot r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2} dz$$

11 Vektoranalysis

11.1 Differentialoperatoren

$\operatorname{grad} f := \nabla f = \begin{pmatrix}\partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f\end{pmatrix}$	Richtung und Betrag des grössten Anstiegs von f
$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix}\partial_2 K_3 - \partial_3 K_2 \\ \partial_3 K_1 - \partial_1 K_3 \\ \partial_1 K_2 - \partial_2 K_1\end{pmatrix}$	lokale Zirkulationsrate von K
$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \partial_1 K_1 + \partial_2 K_2 + \partial_3 K_3$	lokale Produktionsrate von K
$\triangle f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$	lokale Diffusionsrate von f

11.2 Lokale Eigenschaften

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} K = 0$
$\operatorname{rot} K = 0 \Leftrightarrow$ lokal $\exists f$ mit $\operatorname{grad} f = K$
$\operatorname{div} K = 0 \Leftrightarrow$ lokal $\exists L$ mit $\operatorname{rot} L = K$

Globale Eigenschaften

Folgende Eigenschaften eines Vektorfelds K sind äquivalent:

- K besitzt ein Potential, d.h., ein Skalarfeld f mit $\operatorname{grad} f = K$
- Das Integral von K über jeden Weg hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
- Das Integral über jeden geschlossenen Weg ist Null.
- K heisst konservativ.

Vektorielles Linienintegral

$\varphi : [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\text{Formel:} \quad & \int_C K(x) \cdot dx := \int_a^b K(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(t)| dt \\
\text{Satz von Stokes:} \quad & \int_C K(x) \cdot dx = \int_F \langle \operatorname{rot} K, n \rangle dF \quad F = \text{Fläche in } \mathbb{R}^3, C = \partial F, \text{Kurve} \\
\text{Satz von Green:} \quad & \int_{\partial B} \left\langle K\binom{x}{y}, d\binom{x}{y} \right\rangle = \int_B (Q_x - P_y) dxdy \quad K = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$n =$ Einheitsnormalenvektor
Die Kurve heisst Feldlinie von K, falls gilt $\varphi'(t) = K(\varphi(t))$
Zur Flächenberechnung im $\mathbb{R}^2$ wählt man $K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y/2 \\ x/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} K = 1$
Interpretation: Arbeit oder Zirkulation von K entlang C

Vektorielles Flächenintegral

$$\begin{aligned}
\text{Formel } \mathbb{R}^2\text{:} \quad & \int_\gamma \langle K, n \rangle |dx| = \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot |\gamma^(t)| dt \\
\text{Formel } \mathbb{R}^3\text{:} \quad & \int_{\partial B} \langle K, n \rangle d\partial B := \int_D \left\langle K\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right), (\varphi_u \times \varphi_v) \right\rangle dudv \\
\text{Satz von Gauss:} \quad & \int_{\partial B} \langle K, n \rangle = \int_B \div K d\mu(\vec(x))
\end{aligned}$$

Die Randkurve γ wird so orientiert, dass die Fläche stets links liegt, wenn man entlang γ läuft.
Der Einheitsnormalenvektor n ist gleich $\dfrac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$
Die Richtung von n ist immer nach rechts von γ aus gesehen. Die Oberfläche eines Körpers im $\mathbb{R}^3$ wird stets nach aussen orientiert.