Definitionen, Sätze, Lemmas und Korollare

1 Vektorräume

Satz 4.1 Verschiedene Basen für einen Vektorraum bestehen aus gleich vielen Vektoren.

Lemma 4.2 Ein Erzeugendensystem für einen Vektorraum V besteht aus gleich vielen oder mehr Vektoren wie die Anzahl linear unabhängiger Vektoren von V.

Satz 4.3 Sei V ein Vektorraum mit Dimension n.

- Mehr als n Vektoren in V sind linear abhängig.
- Weniger als n Vektoren in V sind nicht erzeugend.
- n Vektoren sind linear unabhängig, gdw. sie erzeugend sind, gdw. bilden sie eine Basis.

Satz 4.4 In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt: Seien $||x||$ und $||x||'$ zwei Normen. Dann gibt es eine Konstante $c \geqslant 1$, so dass für jeden Vektor x gilt: $\frac{1}{c}||x||' \leqslant ||x|| \leqslant c||x||$

Satz 4.5

- Die orthogonale Projektion eines Vektors x auf den Vektor $y \neq 0$ ist gegeben durch den Vektor $\frac{\langle y,x \rangle}{\langle y,y \rangle} y$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ (Schwarz'sche Ungleichung)
- $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist eine Norm in V.
- $\langle x, y \rangle = 0 \quad (x \perp y) \Rightarrow ||x + y||^2 = ||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

Satz 4.6 In einem reellen n-dim Vektorraum sind die paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $e^{(1)}, e^{(2)}, ..., e^{(k)}$ linear unabhängig.

Korollar 4.7 n paarweise orthogonale Einheitsvektoren bilden eine orthonormale Basis in einem reellen n-dim VR

2 Lineare Abbildungen

Def. Abb. $F : x \in V \mapsto y = F(x) \in W$ lin. Abb. von endlichdim. VR V nach endl. VR W, falls

- $F(x + y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in V$
- $F(\alpha x) = \alpha F(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in V$

Def. Kern $A := \{x \in V^n | Ax = 0\} \quad \dim(Kern) = n - r$

Bild $A := \{y \in V^m | \exists x \in V^n : Ax = y\} \quad \dim(Bild) = r$ Vgl. Bildmenge aus Analysis

Satz 6.1 Sei $A = (a^{(1)}...a^{(n)})$ eine $m \times n$-Matrix und r die Anzahl Pivotzeilen. Dann gilt

- Bild A = span $\{a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(n)}\}$ (Basis Bild: Wähle daraus $\dim(BildA)$ lin.unabh. Spaltenvektoren)
- Kern A: $Ax = 0$ und Gaussalgorithmus anwenden
- Kern A ist ein Unterraum von V^n, Bild A ist ein UR von V^m
- dim(Kern A) + dim(Bild A) = $n = \dim V^n$
- dim(Bild A) = dim(Bild A^T)

Korollar 6.2 Sei A eine $m \times n$-Matrix, B_1 reguläre $m \times m$-M, B_2 reg. $n \times n$-M.

- Rang A = Rang A^T
- Rang $B_1 A$ = Rang A
- Rang AB_2 = Rang A

Satz 6.3 Weniger als n linear unabhängige Vektoren können mit Hilfe des Gaussverfahrens zu einer Basis ergänzt werden.

Satz 6.4 Zusammengesetzte lin.Abb. sind wieder linear.

$$\begin{aligned} \text{Sei } F : x \in V^n &\mapsto Ax = y \in V^m \\ \text{Sei } G : y \in V^m &\mapsto By = z \in V^p \\ \text{Dann } H := G \circ F = H : x \in V^n &\mapsto BAx = z \in V^p \end{aligned}$$

Satz 6.7

- Lin.Abb. $F : x \in V^n \mapsto Ax = x' \in V^n$ umkehrbar $\Leftrightarrow$ A regulär
- $F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = I$

Satz 6.8 **Koordinatentransformation**

$$\begin{aligned} F : x \in V^n &\mapsto Ax = x' \in V^n && F \text{ lin.Abb.} \\ S : y \in W^n &\mapsto Ty = x \in V^n && S \text{ Koord.transf., } T \text{ neue Basisvektoren} \\ G = S^{-1} \circ F \circ S : y \in W^n &\mapsto T^{-1}ATy = y' \in W^n \end{aligned}$$

V^n und W^n sind exakte Kopien, somit sind F und G äquivalent

Def. B heisst **ähnlich** zu A et vice versa, falls $\exists$ reguläres T, sodass $B = T^{-1}AT$ (B, A, T sind $n \times n$-M.) vgl. Satz 7.2

Satz 6.9 Eigenschaften der Matrixnorm

- $||A||_* \geqslant 0, ||A||_* \Rightarrow A = 0$
- $||\alpha A||_* |\alpha| ||A||_*$
- $||A + B||_* \leqslant ||A||_* + ||B||_*$
- $||Ax||_* \leqslant ||A||_* ||x||_*$
- $||AB||_* \leqslant ||A||_* ||B||_*$

Def. $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$ heisst **orthogonal**, falls $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$ heisst **längentreu**, falls $||Ax|| = ||x|| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$

3 Eigenwertproblem

Def. Sei $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{C}^n$, dann heisst $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)^T \in \mathbb{C}^n$ **konjugiert komplexer Vektor**

Eigenwert : $Ax = \underline{\underline{\lambda}}x, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ: $A\underline{\underline{x}} = \lambda\underline{\underline{x}}, \quad x \in \mathbb{C}^n$

Eigenwerte

Satz 7.1 $\lambda =$ EW von $A \Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

- $\lambda =$ EW von A mit EV $x \Rightarrow -\lambda =$ EW von $-A$ mit EV x
- $\lambda =$ EW von $A \Rightarrow \lambda^2 =$ EW von A^2
- $det(A - \lambda I_n)$ ist ein Polynom n-ten Grades für jede $n \times n$-M und heisst **charakteristisches Polynom** der Matrix A. Es wird mit $P_A(\lambda)$ bezeichnet.
- Für $P_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$ der $n \times n$-M. A gilt: $c_n = (-1)^n, c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) =: (-1)^{n-1}\text{Spur}A, c_0 = \det A$
- Jede quadratische Matrix hat mind. 1 und max. n EW
- Die Gesamtheit aller EW heisst **Spektrum**
- Ist λ ein k-facher EW von A, so ist die **algebraische Vielfachheit (aV)** von $\lambda = k$
- Für jeden EW ist 1$\leqslant$ aV $\leqslant$ n
- Jede $n \times n$-M. hat genau n EW, wenn jeder EW mit seiner aV gezählt wird.
- EW (und deren EV)sind reell oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

Satz 7.2

- Ähnliche Matrizen haben das gleiche char.Polynom $\Rightarrow$ Sie haben die gleichen EW mit den gleichen aV.
- Sei $B = T^{-1}AT, x$ EV von A zum EW λ
  Dann: $y = T^{-1}x$ ist EV von A zum selben EW λ

Eigenvektoren

	x EV von $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0 \Leftrightarrow Kern(A - \lambda I_n)$
	Der von den EV aufgespannte Raum heisst **Eigenraum**
Def.	**geometrische Vielfachheit** (gV) des EW λ := dim(Eigenraum)
Satz 7.3	Sei λ EW von A. Dann: $1 \leqslant$ gV(λ) $\leqslant$ aV(λ)
Satz 7.4	Seien $\lambda_1 ... \lambda_k$ verschiedene EW von A mit den EV $u^{(1)} ... u^{(n)}$ Dann: $u^{(1)} ... u^{(n)}$ lin.unabh. $\rightarrow$ **Eigenbasis** zu A.
Satz 7.5	Seien $g_1, ..., g_k$ die gV der verschiedenen EW Dann: $g_1 + g_2 + ... + g_k$ Vektoren sind lin.unabh.
Korollar	Falls Summe aV = n (immer) = Summe gV $\Leftrightarrow$ aV = gV $\forall$ EW $\Rightarrow \exists$ Eigenbasis in quadr.Matrix
Def.	Eine $n \times n$ Matrix heisst **einfach** falls $\forall$ EW: aV = gV = 1 **halbeinfach** falls $\forall$ EW: aV = gV **diagonalisierbar** falls $\exists$ reguläre Matrix T: $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$
Satz 7.6	Für jede quadratische Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent A ist halbeinfach $\Leftrightarrow$ A hat Eigenbasis $\Leftrightarrow$ A ist diagonalisierbar
Korollar(1)	Bildeten $u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n)}$ eine Eigenbasis zu A $\Rightarrow T = (u^{(1)} u^{(2)} ... u^{(n)})$ diagonalisiert A $\Rightarrow D = T^{-1}AT$ ist diagonal und in der Diagonalen von D stehen die entsprechenden EW von A
Korollar(2)	Sei T regulär und D eine Diagonalmatrix Falls $T^{-1}AT = D$, dann bilden die Spalten von T eine Eigenbasis zu A und D = diag(EW(A))

Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen ($A^T = A$)

Satz 7.7 Sei A reell, symmetrisch. Dann

- Alle EW von A sind reell
- EV zu verschiedenen EW sind zueinander orthogonal (Orthonormaleigenbasis)

Satz 7.8 Sei A reell, symmetrisch. Dann

- A ist halbeinfach $\Rightarrow$ diagonalisierbar $\Rightarrow \exists$ Eigenbasis
- $\exists$ orthonormale Eigenbasis zu A
- $\exists\ T : T^T AT =: D = \text{diag(EW)}$, Spalten von T sind entsprechende EV von A

Algorithmus zur Berechnung von $y = A^k x$

1. Löse das EW-Problem für A. D.h. Bestimme Matrizen D(EW) und T(dazugehörige EV), so dass $T^{-1}AT = D$ gilt.
2. Löse das lin. Glgsys. $Tz = x$ nach z auf.
3. Berechne D^k, dann $w := D^k z (w_i = d_i^k \cdot z_i = \lambda_i^k z_i)$
4. Berechne $y = Tw$

4 Normalformen

Satz 9.1

- Jede halbeinfache Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix D
- Jede reelle symmetrische Matrix A ist orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix D
- Jede quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer Rechtsdreicksmatrix R (In der Diagonalen von R stehen die EW von A)

Def. Ein $\tilde{D}_{jj}$ der Ordnung 1 ist ein reeller EW von A

Ein $\tilde{D}_{jj}$ der Ordnung 2 hat die Form $\tilde{D}_{jj} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$, wobei $a_j \pm ib_j$ ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar von A ist.

Satz 9.2 Jede reelle halbeinfache quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer reellen Blockdiagonalmatrix

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & & & 0 \\ & \tilde{D}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{D}_{kk} \end{pmatrix}$$ mit Matrizen $\tilde{D}_{jj}$ der Ordnung 1 oder 2.

Jede reelle quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer reellen oberen Blockdreiecksmatrix

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & & & * \\ & \tilde{R}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{R}_{kk} \end{pmatrix}$$ mit Matrizen $\tilde{R}_{jj}$ der Ordnung 1 oder 2.

Satz 9.3 Zu jeder reellen quadratischen Matrix A existiert eine orthogonale Matrix U, sodass $\tilde{S} := U^T AU$ eine reelle obere Blockdreiecksmatrix ist:

$$R^* = \begin{pmatrix} R^*_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R^*_{kk} \end{pmatrix}$$ mit Matrizen R^*_{jj} der Ordnung 1 oder 2. Die Ordnung 2 ist hier etwas anders: Die EW-Paare stehen nicht direkt drin, sondern so, dass man sie zuerst mit dem char.Polynom berechnen muss.

Satz 9.6 **Singulärwertzerlegung** Zu jeder reellen $m \times n$-M. A vom Rang r existieren

eine orthogonale	$m \times m-$Matrix U	$u^{(i)}$ = **Links-Singulärvektoren**
eine orthogonale	$n \times n-$Matrix V	$v^{(i)}$ = **Rechts-Singulärvektoren**
eine	$m \times n-$Matrix S,	s_i = **Singulärwerte** sodass

$A = USV^T$

S hat dabei Diagonalgestalt, d.h. $S = \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{pmatrix} & m \geqslant n \\ (\hat{S}|0) & m \leqslant n \end{cases}$

und $\hat{S} = \text{diag}(s_1, s_2, ..., s_r, s_{r+1}, ..., s_p), p = \min(m, n)$

- $s_1 = ||A||_2, s_1 \geqslant s_2 \geqslant ... \geqslant s_r > 0, s_{r+1} = ... = s_p = 0$
- Die Zahlen s_i^2 sind die EW von $\begin{cases} A^T A & m \geqslant n \\ AA^T & m \leqslant n \end{cases}$
- Für die Spalten $u^{(i)}$ von U und die Spalten $v^{(i)}$ von V gilt:
  $Av^{(i)} = s_i u^{(i)}$
  $A^T u^{(i)} = s_i v^{(i)}, \quad i = 1, ..., p$
  Die "restlichen" $v^{(i)}$ und $u^{(i)}$ sind dann gleich 0

Korollar 9.7 Für jede $m \times n$-Matrix A vom Rang r gilt

$$\begin{aligned} \text{Kern } A &= \text{span}\{v^{(r+1)}, .., v^{(n)}\} = \text{Spalten von } V \\ \text{Bild } A &= \text{span}\{u^(1), ..., u^(r)\} = \text{Spalten von } U \end{aligned}$$

Für die transponierte Matrix A^T gilt

$$\begin{aligned} \text{Kern } A^T &= \text{span}\{u^{(r+1)}, .., u^{(m)}\} = \text{Spalten von } U \\ \text{Bild } A^T &= \text{span}\{v^(1), ..., v^(r)\} = \text{Spalten von } V \end{aligned}$$

Satz 9.8 Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann
$A = s_1 E_1 + s_2 E_2 + ... + s_p E_p, \quad p = \min(m, n)$
wobei $E_i := u^{(i)} {v^{(i)}}^T$ mit Rang $E_i = 1, \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} ((E_i)_{kl})^2 = 1$

Lemma 9.9 Sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix. Dann gilt für die $m \times p$-Produktematrix
$AB = a^{(1)} b^{[1]} + a^{(2)} b^{[2]} + ... + a^{(n)} b^{[n]}$