1 Analytische Funktionen

1.1 Definition

$f : \Omega \to \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{C}$ offen heisst analytisch, falls $\exists f'(z) \forall z \in \Omega$
Die komplexe Ableitung von f in $z \in \Omega$ ist $f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

1.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-DGL)

$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$
f analytisch $\Leftrightarrow u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$

1.3 Spezielle Funktionen und Regeln

1.3.1 Potenzreihen

Konvergente Potenzreihen definieren analytische Funktionen mit der Ableitung $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n (z-a)^{n-1}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \;\; a_n \in \mathbb{C}$, konvergiert absolut für $|z - a| < R$

Konvergenzradius bei Potenzreihen

Quotientenkriterium	$r = \lim_{k \to \infty} \left\| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\|$
Wurzelkriterium	$r = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \left(\sqrt[k]{\|a_k\|} \right)}$
geometrische Reihe	$r = 1$ bei $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ falls $\|q\| < 1$
binomische Reihe	$r = 1$ bei $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k$ falls $\|z\| < 1$

Beispiel: Konv.radius von $f(z) = \frac{1}{z-2}$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum \left(\frac{z}{2}\right)^k$$

$$\frac{z}{2} < 1 \Leftrightarrow z < 2 = \text{Konvergenzradius}$$

Binomische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k = (1+z)^\alpha \text{ für } |z| < 1$$

$$\begin{aligned}
&\alpha = n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}: && (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot z^k \\
&\alpha = -n; n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}: && \frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \cdot z^k \\
&\alpha = -1 && \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \\
&\alpha = \frac{1}{2} && \sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \cdot z^k
\end{aligned}$$

1.3.2 Logarithmus

$$\begin{aligned}
\text{Mehrwertiger Logarithmus:} \quad & \mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z} \\
\text{Hauptwert des Logarithmus:} \quad & \mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0} \to \mathbb{C} \\
& z \mapsto \mathrm{Log}(z) = \log|z| + i \cdot \arg(z) \quad -\pi < \arg(z) < \pi
\end{aligned}$$

Log ist analytisch, mit Ableitung $\mathrm{Log}(z)' = \frac{1}{z}$

1.3.3 Allgemeine Potenz

$$\begin{aligned}
& z \mapsto z^a := e^{a \,\mathrm{Log}\, z} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0} \\
\Leftrightarrow \quad & re^{i\varphi} \mapsto (re^{i\varphi})^a := r^a \cdot e^{i\varphi \cdot a}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Potenz ist analytisch mit Ableitung $(z^a)' = a \cdot z^{a-1}$

1.3.4 Satz der inversen Funktion

$(f^{-1})(z) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Ist eine Funktion analytisch, so ist auch ihre inverse Funktion analytisch.

1.4 Abbildungen

1.4.1 Tangentialabbildung

Sei γ durch f analytisch. Die Parameterdarstellung lautet: $t \mapsto \omega(t) = f(z(t))$
Der Tangentialvektor dieser Bildkurve ist $\omega'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$
In z_0 lautet die Tangentialabbildung $v \mapsto f'(z_0)v$
Analytische Funktionen mit $f' \neq 0$ sind winkeltreu.

1.4.2 Möbiustransformationen (MT)

Eine MT hat die Form $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad ad - bc \neq 0$

In Matrizenschreibweise: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Eigenschaften

Die Eigenschaften von Matrizen gelten auch für MT, wobei gilt:

- Die Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entsprechen derselben MT.
- Inverse MT: $\left(f^{-1}\right)(z) = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Komposition von MT: $(f_1 \circ f_2)(z) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$
- MT bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition (aber nicht abelsch!)
- Auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sind MT wie folgt definiert:
  $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$

  $f(\infty) = \left(\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az+b}{cz+d}\right) = \dfrac{a}{c}$

Grundtransformationen

1. $\mathrm{id}(z) = z$
2. $\mathrm{t}(z,b) = z + b, b \in \mathbb{C}$ Translation um b
3. $\mathrm{s}(z,a) = az, a \in \mathbb{C}$ Drehstreckung um a $\Re(a) = 0 \Rightarrow$ Drehung, $\Im(a) = 0 \Rightarrow$ Streckung
4. $\mathrm{I}(z) = \dfrac{1}{z}$

Doppelverhältnis

Eine MT ist durch drei verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 definiert.
$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$ (Doppelverhältnis)
Damit ist $f(z_1) = 0, f(z_2) = \infty, f(z_3) = 1$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 - z_2 & -z_1(z_3 - z_2) \\ z_3 - z_1 & -z_2(z_3 - z_1) \end{pmatrix}$
Vielfach kann man eine MT aber auch ohne das Doppelverhältnis "direkt" bestimmen.

Beispiel: Finde eine MT, sodass $f(0) = 1, f(\infty) = 0, f(1) = \infty$

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$f(0) = \dfrac{b}{d} = 1, f(\infty) = \dfrac{a\infty + b}{c\infty + d} = 0, f(1) = \dfrac{a+b}{c+d}$

$b = d, a\infty + b = 0 \Rightarrow \infty = -\frac{b}{a} \Rightarrow a = 0, c + d = 0 \Rightarrow -c = d$

$f(z) = \dfrac{d}{-dz+d} = \dfrac{1}{1-z}$

1.4.3 Riemannscher Abbildungssatz

Zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω mit $\Omega \neq, \Omega \neq \mathbb{C}$ gibt es eine analytischee bijektive konforme Abbildung $f : \Omega \to D$ mit analytischem Inversen $f^{-1} : D \to \Omega$ auf der offenen Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$

Beispiele

2 Komplexe Integration

$$\text{Komplexes Integral:} \quad \int_a^b f(z)dz = \int_a^b \mathrm{Re}(f(z))dz + i\int_a^b \mathrm{j}(f(z))dz \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

$$\text{Komplexes Linienintegral:} \quad \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt \tag{2}$$

wobei γ eine Kurve ist von p nach q in Ω mit stetig diffbarer Parameterdarstellung $t \to z(t), a \leqslant t \leqslant b, z(a) = p, z(b) = q$

2.1 Beispiele

$\gamma : t \mapsto at, 0 \leqslant t \leqslant 1$
$\gamma'(t) = a$

$\gamma : t \mapsto re^{it}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
$\gamma'(t) = ire^{it}$
Gegenuhrzeigersinn: positive mathematische Richtung

$\gamma : t \mapsto a + re^{it}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
$\gamma'(t) = ire^{it}$

$\gamma : t \mapsto (b-a)t+a, 0 \leqslant t \leqslant 1$
$\gamma'(t) = b - a$

$x = \mathrm{Re}(z) = t$
$y = \mathrm{j}(z) = t^2$
$\Rightarrow$ keine Parametrisierung, sondern Formel (1) verwenden.

2.2 Eigenschaften des Linienintegrals

1. $\displaystyle\int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz$
2. $\displaystyle\int_\gamma f(z) + g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$
3. $\displaystyle\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$
4. $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$
5. $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \max |f(z)| \cdot \text{Länge von } \gamma$

2.3 Cauchy'scher Integralsatz

Wenn $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet ist, d.h. auf dem jede analytische Funktion f eine Stammfunktion hat und γ eine Kurve in Ω von p nach q ist, dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(q) - F(p)$$

Das bedeutet, dass das Integral nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht aber vom gewählten Weg, solange die Wege in einem Elementargebiet liegen. Ist γ eine geschlossene Kurve, so gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Elementargebiete sind z.B. einfach zusammenhängende Gebiete, und $f(z)$ analytisch ist.

Beispiel

Berechne das Wegintegral $\int_\gamma \frac{1+z^2}{z} dz$, wobei γ

1. γ_1 der Kreisbogen von 1 nach $i, z(t) = e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, ist.

2. γ_2 die Strecke von 1 nach i ist.

3. γ_3 der Kreisbogen von 1 nach $i, z(t) = e^{-it}, 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$, ist.

Zunächst stellen wir fest, dass die Funktion überall analytisch ist, ausser in $z = 0$.

1. γ_1 führt von 1 nach i, ein mögliches Gebiet ist also $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi/4 < \arg(z) < 3\pi/4\}$. Dieses Gebiet ist einfach zusammenhängend, also ist der Cauchy'sche Integralsatz anwendbar, und es ist:
$\int_{\gamma_1} \frac{1+z^2}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} + z dz = \left[\mathrm{Log}(z) + \frac{1}{2}z^2\right]_1^i = \mathrm{Log}(i) + \frac{1}{2}i^2 - \mathrm{Log}(1) - \frac{1}{2}1^2$
$= \log(|i|) + i \cdot \arg(i) - \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} = \frac{i\pi}{2} - 1$
Dieses Ergebnis können wir verifizieren, indem wir das Integral mit der gegebenen Parametrisierung nochmals als herkömmliches Linienintegral integrieren.
$\int_{\gamma_1} \frac{1+z^2}{z} dz \quad z'(t) = ie^{it}$
$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+e^{2it}}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{\pi/2} 1 + e^{2it} dt = i\left[t + \frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^{\pi/2} = \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{i\pi}{2} - 1$

2. Die Strecke von 1 nach i liegt im selben einfach zsh. Gebiet wie γ_1. Also ist der Cauchy'sche Integralsatz anwendbar und das Integral ergibt genau das Gleiche, nämlich $\frac{i\pi}{2} - 1$

3. γ_3 geht auch von 1 nach i, aber auf der "anderen Seite". Ein mögliches Gebiet, in dem γ_1 und γ_3 durchlaufen würden, wäre $\{z \in \mathbb{C} : 0 < z < 1, 0 < \arg(z) < 2\pi\}$ Dieses Gebiet ist aber nicht einfach zsh. wegen der Singularität in $z = 0$. Dafür ist für $\gamma_1 \cup -\gamma_3$ (Achtung Orientierung!) die Cauchy'sche Integralformel anwendbar. Es ergibt sich:
$\int_{\gamma_1 \cup -\gamma_3} \frac{1+z^2}{z} = 1 \cdot 2\pi i \cdot (1 + 0^2) = 2\pi i$. Also ist $-\int_{\gamma_3} = 2\pi i - \int_{\gamma_1} \Rightarrow \int_{\gamma_3} = \frac{i\pi}{2} - 1 - 2\pi i = \frac{-3i\pi}{2} - 1$

2.4 Stammfunktionen

Aus dem Cauchy'schen Integralsatz lassen sich folgende Kriterien für Stammfunktionen herleiten:
Besitzt f eine Stammfunktion, dann

1. $\int_\gamma f(z) dz = 0$ auf einem geschlossenen Weg γ

2. Die Stammfunktion lautet $F(z) = \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$,
wobei f analytisch in Ω, $[a, z] \subset \Omega$, γ beliebige Kurve von a nach z
Nach Riemann reicht es, dass f analytisch in $\Omega \setminus \{a\}$

2.5 Umlaufzahl

Die Umlaufzahl $N(\gamma, a)$ gibt an, wie oft ein Punkt a von einem Weg γ umrundet wird.

Rechnerisch: $N(\gamma, a) := \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$

Graphisch: Wähle Halbgerade von a, die γ in endlich vielen Punkten trifft.

$$N(\gamma, a) := \# \text{ Kreuzungen in positivem Sinn } \circlearrowleft$$
$$- \# \text{ Kreuzungen in negativem Sinn } \circlearrowright$$

2.6 Cauchy'sche Integralformel

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, Ω einfach zusammenhängend, γ eine geschlossene Kurve und $a \in \Omega, a \notin \gamma$

Dann gilt: $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = N(\gamma, a) \cdot f(a)$

Sowie: $\dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = N(\gamma, a) \cdot \left(f^{(n)}\right)(z)$

$\Rightarrow$ Analytische Funktionen sind unendlich oft differenzierbar und alle höheren Ableitungen sind analytisch.

2.7 Riemann'scher Hebbarkeitssatz

Sei f analytisch auf $\Omega \setminus \{a\}$, beschränkt auf einer Umgebund von a. Dann hat f eine analytische Fortsetzung auf Ω

Beispiel: $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ nicht definiert in $z = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \ldots} = 1$$

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

2.8 Satz von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt, mit $|f(z)| \leqslant M \ \forall z$. Dann ist f konstant. Beweis siehe z.B. Wikipedia

2.9 Taylorreihe

Sei f analytisch auf Ω

$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dfrac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \dfrac{f'''(a)(z-a)^3}{3!} + \ldots$

Die Taylorreihe konvergiert $\forall z$ in der grössten offenen Kreisscheibe um a in Ω

Beispiel

Taylorreihe von $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ um $z_0 = 1$

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$

$\frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$

$A \cdot (z-i) + B \cdot (z+i) = 1$

$\Rightarrow z(A+B) = 0 \Rightarrow A = -B$

$\Rightarrow (-A+B)i = 1 \Rightarrow B = 1/2i, A = -1/2i$

$= \frac{-1}{2i(z+i)} + \frac{1}{2i(z-i)}$

$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-1+1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-\frac{-(z-1)}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+i}\right)^k (z-1)^k$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}} (z-1)^k$

Analog ist $\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-i)^{k+1}} (z-1)^k$

$= \frac{-1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}} (z-1)^k + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-i)^{k+1}} (z-1)^k =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2i} \left(-\frac{1}{(1+i)^{k+1}} + \frac{1}{(1-i)^{k+1}}\right) (z-1)^k$usw...

2.10 Laurentreihe (LR)

Eine analytische Funktion $f(z)$ auf dem Ringgebiet $R = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-a| < R\}, 0 \leqslant r \leqslant R \leqslant \infty$ kann in eine LR entwickelt werden, wobei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

$$c^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=s} f(z)(z-a)^{n-1} dz \quad \forall s, r < s < R$$

Beispiel

Finde die LR für $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ um $z_0 = 0$ und Gebiet $\Omega = |z| < 1$ resp. $\Omega = |z| > 1$

$$\text{PBZ:} \quad \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
$$A(z-2) + B(z-1) = 1$$
$$\text{Setze z=2:} B = 1$$
$$\Rightarrow A = -1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad R: |z| < 1$$
$$\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{-1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k \quad R: \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$
$$\frac{-1}{2-z} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{-1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \quad R: \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$$
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k \quad R: \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$$

Ist der Entwicklungspunkt bspw. $z_0 = i$, so sind einige Umrechnung nötig:
$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z+i-i} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^k$$
$$R: \left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |1-i| = \sqrt{2}$$

2.11 Isolierte Singularitäten

Im folgenden sind die isolierten Singularitäten mit a bezeichnet.

1. Hebbare Singularität
   $\Rightarrow$ Hauptteil nicht vorhanden
   $\Rightarrow \lim_{z \to a} f(z) =: f(a)$
   $\Rightarrow f(z)$ analytisch, $\exists$ Taylorreihe
   Bsp: $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

2. Pol n-ter Ordnung
   $\Rightarrow$ Hauptteil von folgender Form: $\displaystyle\sum_{n=1}^{j} c_{-n}(z-a)^{-n}$
   $\Rightarrow \lim_{z \to a} f(z) = \infty$
   Bsp: $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$

3. wesentliche Singularität
   $\Rightarrow$ Hauptteil ist unendlich: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$
   $\Rightarrow \nexists \lim_{z \to a} f(z)$
   Bsp: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Beispiel

Finde die isolierten Singularitäten von $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ und deren Ordnung
Singularitäten: $z_k = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$
$\lim\limits_{z \to 2\pi ik} f(z) = \infty \Rightarrow$nicht hebbar!
$\lim\limits_{z \to 2\pi ik} (z - 2\pi ik) \cdot f(z) = \dfrac{z - 2\pi ik}{e^z - 1} =^H \lim\limits_{z \to 2\pi ik} \dfrac{1}{e^z} = \dfrac{1}{1} \Rightarrow$ Singularitäten 1. Ordnung mit $c_{-1} = 1$

2.12 Residuen

Sei f analytisch auf $\Omega \setminus \{a\}, a \in \Omega$
Dann ist das Residuum von f an der Stelle a: $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) :=$ der Koeffizient c_{-1} der LR von f
Das Residuum wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
\text{Einfache Polstelle:} \quad & \operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) \\
\text{Einfache Polstelle 2:} \quad & p, q \text{ analytisch, } q \text{ einfache Nst. bei } a \\
& \operatorname*{res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)} \\
\text{n-fache Polstelle:} \quad & g(z) := (z-a)^n \cdot f(z) \\
& \operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

2.13 Residuensatz

Sei f analytisch auf einem Gebiet $\Omega \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. Sei $G \subset \Omega$ und $\partial G \not\ni a_1, ..., a_n \in G$. Dann ist:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z) dz = \operatorname*{res}_{z=a_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{res}_{z=a_n} f(z)$$

wobei ∂G positiv orientiert (also im Gegenuhrzeigersinn) ist.

Beispiel 1

Berechne das Kurvenintegral $\int_{\partial Q} \frac{z^3+2z}{(z-1)^3}$ wobei $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < 2 \wedge |\jmath(z)| < 2\}$ das Quadrat mit Seitenlänge 4 in achsenparalleler Lage symmetrisch zum Ursprung ist.

Berechnung mit Cauchy-Formel

Die Integralformel lautet: $\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = N(\gamma, a)\cdot\left(f^{(n)}\right)(z)$

Hier ist $n = 2, a = 1, f(z) = z^3 + 2z, N(\gamma, a) = 1$. Dann ist $f'(z) = 3z^2 + 2$ und $f''(z) = 6z \Rightarrow f''(1) = 6$

Alles eingesetzt ergibt: $\int_{\partial Q} \frac{z^3+2z}{(z-1)^3} = \frac{2\pi i\cdot 6}{2} = 6\pi i$

Berechnung mit Residuensatz

Der Residuensatz lautet: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)dz = \operatorname*{res}_{z=a_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{res}_{z=a_n} f(z)$

Wir haben nur eine Polstelle, also ist $\int_{\partial Q} \frac{z^3+2z}{(z-1)^3} = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=1}\frac{z^3+2z}{(z-1)^3}$

Bleibt also noch die Berechnung des Residuums. Dabei handelt es sich um eine 3-fache Polstelle. Hierfür haben wir folgende Formel: $g(z) := (z-a)^n\cdot f(z); \operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{g^{n-1}(a)}{(n-1)!}$

In unserem Beispiel ist $n = 3, a = 1, f(z) = \frac{z^3+2z}{(z-1)^3}$. Somit ist $g(z) = z^3 + 2z$ und $g''(1) = 6$

$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{6}{2!} = 3, \quad \Rightarrow \int_{\partial Q}\frac{z^3+2z}{(z-1)^3} = 2\pi i\cdot 3 = 6\pi i$

Beispiel 2

Berechne $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(\varphi)}d\varphi$

Substitutiere: $z = e^{i\varphi}, \cos(\varphi) = \frac{z+z^{-1}}{2}, dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi$

$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{z}dz$

Ausmultiplizieren und Residuensatz anwenden. Schliesslich Regel 2 zur Berechnung der Residuen.

Beispiel 3

Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1+x^2}dx, \quad x \in \mathbb{R}$

Sei γ der Weg, der aus $-R, R$ und dem Halbkreis $\gamma' : |z| = R; \jmath z > 0$ besteht. Nun wandeln wir das reelle Integral in ein komplexes um.

Dann liefert die Standardabschätzung für Linienintegrale (s. Kap. 2.2):

$$\left|\int_{\gamma'}\frac{1}{1+z^2}dz\right| \leqslant \underbrace{\max_{|z|=R}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|}_{\leqslant\frac{c}{R^2}}\cdot\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}dx, x\in\mathbb{R} = \lim_{R\to\infty}\int_\gamma\frac{1}{1+z^2}dz, z\in\mathbb{C}$

Auf dem rechten Integral können wir nun den Residuensatz anwenden. Da $1 + z^2 = (z + i)(z - i)$, lauten die Singularitäten $\pm i$, wobei $-i$ nicht innerhalb γ liegt. Somit ist $\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{1+z^2} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}$. Nach dem Residuensatz ist also:

$\lim_{R\to\infty}\int_\gamma\frac{1}{1+z^2}dz = \frac{2\pi i}{2i} = \pi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

Beispiel 4

Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}$
Wiederum transformieren wir das reelle in ein komplexes Integral, mit demselbem γ wie in Beispiel 2
Damit die Standardabschätzung das gleiche Ergebnis liefert, ist entscheidend, dass $\max_{|z|=R} \left| \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} \right| \leqslant \frac{c}{R^2}$ ist.
Zunächst ist $\max_{|z|=R} \left| \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} \right| = \max_{|z|=R} \left(\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \cdot \left| e^{-i\omega z} \right| \right)$
$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \frac{1}{1+|z|^2}$, also können wir $|z| = R$ direkt einsetzen, wie in Beispiel 2. Für $\left| e^{-i\omega z} \right|$ geht das leider nicht so einfach. Denn $|e^z| = e^x \neq e^{|z|} = e^{x^2+y^2}$. Wir müssen also auf andere Weise zeigen, dass $\left| e^{-i\omega z} \right|$ beschränkt bleibt für $R \to \infty$
$e^{-i\omega z} = e^{-i\omega x} \cdot e^{\omega y}$. Der rechte Faktor $e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - \sin(\omega x)$ ist periodisch, also beschränkt. Für $e^{\omega y}$ ist $y > 0$ auf dem ganzen von γ eingeschlossenen Gebiet. Somit bleibt $e^{\omega y}$ beschränkt gdw $\omega < 0$. Um das Integral vollständig zu berechnen, müssen wir also hier eine Fallunterscheidung für ω machen.

Sei jetzt also $\omega < 0$. Dann ist
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{1}{1+z^2} e^{-i\omega z} dz$$
$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} = \pi e^{\omega} (\omega < 0)$$

Sei jetzt $\omega > 0$. Wir schliessen den Weg in der unteren Halbebene. Um die positive Orientierung zu erhalten, kehren wir die Integrationsgrenzen um:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \lim_{R\to\infty} -\int_\delta \frac{1}{1+z^2} e^{-i\omega z} dz$$
$$= -2\pi i \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}$$
$$= -2\pi i \lim_{z\to -i} (z+i) \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} = -2\pi i \lim_{z\to -i} \frac{z+i}{(z+i)(z-i)} e^{-i\omega z} = -2\pi i \frac{-1}{2i} \pi e^{-\omega} = \pi e^{-\omega} (\omega > 0)$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \pi e^{-|\omega|}$$

3 Fourierreihen (FR)

3.1 Definition

Lipstetige T-periodische Funktionen ($f(t) = f(t+T)$) lassen sich als trigonometrische Reihe darstellen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)\right)$$

mit reellen Koeffizienten a_n, b_n oder wie folgt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i}{T} nt}, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

mit komplexen Koeffizienten c_n

3.2 Definition an Sprungstellen

Sei $S_N(t)$ die Partialsumme der FR von $f(t)$. Dann gilt $\forall t$ keine Sprungstellen: $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(t) = f(t)$
Für t_0 eine Sprungstelle gilt: $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(t_0) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to t_0-} f(t) + \lim\limits_{t\to t_0+} f(t)\right)$

3.3 Bestimmung der Koeffizienten

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \overline{c_n}$
$c_0 = \frac{1}{2}a_0$
$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{\frac{-2\pi i}{T} nt} dt$
$a_n = (c_n + c_{-n}) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$
$b_n = \left(\frac{c_n - c_{-n}}{i}\right) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$
Falls f gerade $\Leftrightarrow f(t) = f(-t)$, dann $b_n = 0 \forall n$
Falls f ungerade $\Leftrightarrow f(-t) = -f(t)$, dann $a_n = 0 \forall n$

3.4 Parseval-Identität

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Beispiel

FR einer nicht-stetigen Funktion.

$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t \leqslant T/2 \\ -1 & -T/2 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases}$;$f(t)$ ungerade

$f(t)$ ungerade $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$

FR von $f(t) : \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$

$f(t)$ und sin sind ungerade. Produkt zweier ungeraden Funktionen ist gerade, also gilt:

$b_n = \frac{2}{T} 2 \cdot \int_0^{T/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$

$= \frac{4}{T}\left[-\frac{T}{2\pi n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)\right]_0^{T/2}$

$= \frac{-2}{\pi n} (\cos(\pi n) - 1)$

$= \frac{-2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4\pi}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{T} 3t\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{T} 5t\right) + \ldots + \frac{1}{N}\sin\left(\frac{2\pi}{T} Nt\right)\right)$

4 Fouriertransformationen (FT)

4.1 Definition

Sei f(t) "integrabel", d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$
Dann ist die Fouriertransformierte (FT) von $f(t)$

$$\text{FT} := \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \omega \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

4.2 Eigenschaften von FT

Linearität:	$h(t) = af(t) + bg(t)$	$\Rightarrow \hat{h}(t) = a\hat{f}(t) + b\hat{g}(t)$
Verschiebung:	$g(t) = f(t-a)$	$\Rightarrow \hat{g}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
	$g(t) = e^{iat} f(t)$	$\Rightarrow \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$
Skalierung:	$g(t) = f\left(\frac{t}{a}\right) (a > 0)$	$\Rightarrow \hat{g}(\omega) = a\hat{f}(a\omega)$
Ableitung:	$g(t) = f'(t)$	$\Rightarrow \hat{g}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$
Faltungsprodukt:	Definition im "Fourierraum": $\Big(f * g\Big)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds$	
	$\Big(f * g\Big)(t)$	$\Rightarrow \widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$
Standard-FT:	$f(t) = e^{-\frac{at^2}{2}} \quad a > 0$	$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{-\omega^2}{2a}}$

5 Laplace-Transformationen (LT)

5.1 Definition

Sei $f(t)$ definiert für $t \geqslant 0$
Dann ist die Laplace-Transformierte (LT) von $f(t)$

$$\mathrm{LT} := \mathrm{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Alternativ wird folgende Notation verwendet: $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$

5.2 Eigenschaften von LT

Linearität:	$\mathrm{L}[\lambda f + \mu g]$	$= \lambda\,\mathrm{L}[f] + \mu\,\mathrm{L}[g] \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$
Verschiebung:	$\mathrm{L}[e^{-at}f(t)]$	$= F(s+a)$
Verschiebung 2:	$\mathrm{L}^{-1}[e^{-sa}F(s)] = H(t-a)f(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t \geqslant a \\ 0, & t \leqslant a \end{cases}$	
Skalierung:	$\mathrm{L}[f(at)]\ \ (a > 0)$	$= \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$
Ableitung:	$\mathrm{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s)$	$= sF(s) - f(0)$
	$\mathrm{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right](s)$	$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\mathrm{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right](s)$	$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\frac{d^k f}{dt^k}(0)$
Ableitung 2:	$f(t) = t^k g(t)$	$\Rightarrow F(s)(-1)^k \frac{d^k}{ds^k}G(s)$
Faltungsprodukt:	Definition im “Laplaceraum”: $\Big(f * g\Big)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds \quad f, g : [0, \infty[\to \mathbb{C}$	
	$\Big(f * g\Big)(t)$	$\Rightarrow L[f * g](s) = F(s) \cdot G(s)$
Spezialfall:	$\mathrm{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]$	$= \frac{1}{s}F(s)$
Periodische Fkt:	$f(t+T) = f(t) \forall t > 0$	$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$

5.3 Umkehrfunktion

Sei f stückweise stetig mit Sprungstellen und es gelte $|f(t)| \leqslant ce^{at}, t \geqslant 0, a \in \mathbb{R}$. Dann ist $F(s)$ analytisch für $\mathrm{Re}(s) \geqslant a$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)e^{st}ds \qquad \gamma : \text{Gerade } t \mapsto b + it \text{ für beliebiges } b > a$$