Zusammenhänge zwischen Rang, Inversen, Erzeugendensystem u.a.

Lösbarkeit von Matrizen (M Zeilen, N Spalten)			Für quadratische Matrizen				
Rang r	M Gleichungen (Ax = b)	N Unbekannte (Ax = 0)	Inverse	Determinanten	Erzeugend	Linear unabhängig	Eigenwerte
„=“	Für bel. Rechte Seiten lösbar	Nur triviale Lösung	Matrix invertierbar = regulär	det(M) ≠ 0	$a^{(1)}\dots a^{(n)} =: A$ Sind erzeugend	$a^{(1)}\dots a^{(n)} =: A$ Sind lin. Unab.	$\lambda_j \neq 0 \ \forall\ j$
<	Nicht für bel. Rechte Seiten lösbar	Es gibt n-r nichttriviale Lösungen	Matrix nicht invertierbar = singulär	det(M) = 0	$a^{(1)}\dots a^{(n)} =: A$ Sind erzeugend	$a^{(1)}\dots a^{(n)} =: A$ Sind lin. Abh.	$\exists \lambda_j = 0$

Praktische Regeln zu quadratischen Matrizen

	Transponierte	Inverse	Orthogonale	Determinanten
	$(A^T)_{ij} := A_{ji}$	$A \cdot X = I_n$	$(A^T)\,A = I_n$	
A^T	$(A^T)^T = A$	$(A^T)^{-1} := (A^{-1})^T$	$(A^T) = A^{-1}$	$det\ A^T = det\ A$
AB	$(AB)^T = B^T A^T$	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	$(AB)^T AB = I_n$	$det\,(AB) = (det\ A)(det\ B)$
A^{-1}		$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A^{-1}) = A^T$	$\frac{1}{det(A)}$
I_n		$I_n^{-1} = I_n$	$I_n^T = I_n$	
	$(A+B)^T = A^T + B^T$		$Orthogonal \rightarrow$ $:\cdot Jede\ Spalte\ Länge\ 1$ $:\cdot Skalarprodukt\ 2er\ bel.\ Spalten = 0$ $:\cdot Spalten\ bilden\ Orthonormalsystem$	

Bild und Kern

Basis für Kern: Ax = 0 setzen, Gauss, nichttriviale Lösungen.
Basis für Bild: dim(Bild) = m – dim(Kern). Wähle dim(Bild) viele Spaltenvektoren von A, die linear unabhängig sind.

Erzeugendensysteme

Salopp: Eine Ansammlung von Vektoren, die man linear kombinieren kann, um jeden beliebigen Vektor eines Vektorraumes zu erhalten.
Wie finde ich heraus, ob bestimmte Vektoren ein Erzsys für einen bestimmten Vektorraum bilden?
Beispiel:

$$U = span\{1, x, x^2, x^3\} \Leftrightarrow U = \{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3\}$$

$$U = span\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\},\ wobei$$

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

Um dies einzusehen, muss man nur prüfen, ob die Vektoren des oberen Erzsys mit denen des unteren dargestellt werden können.
Dies ist der Fall:

$$\begin{aligned} 1 &= P_0 \\ x &= P_1 \\ x^2 &= \frac{2}{3}P_2+\frac{1}{3}P_0 \\ x^3 &= \frac{2}{5}P_3+\frac{3}{5}P_1 \end{aligned}$$

Erzeugendensysteme deren Vektoren paarweise linear unabhängig sind, werden Basen (Singular Basis) genannt.
Die Anzahl Vektoren einer Basis ist gleich der Dimension des erzeugten Vektorraums.

Determinanten

Berechnung

- Die det einer Matrix mit Nullzeile ist gleich 0
- Die det einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen ist gleich 0.
- $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad-bc$
- $Falls: det(M)=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, mit\ A=m\times m,\ B=m\times n,\ C=n\times n$
  $Dann: det(M)=det(A)\cdot det(C)$
- Laplace-Entwicklung: $det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\cdot det(A_{1j})$ j = Spalte
- $det\ A^T=det\ A$
- Die det einer 3Ecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

Rechenregeln

- Eine Zeilen, Spaltenvertauschung => det wechselt Vorzeichen. $\begin{pmatrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} Z2 \\ Z1 \\ Z3 \end{pmatrix}=1\ ZSV$
- Addiert man ein Vielfaches einer anderen Zeile, ändert sich die det nicht! Also Gausselimination ok!
- Multipliziert man eine Zeile mit dem Faktor a, wird auch die det mit a multipliziert.
- Was für Zeilen gilt, gilt auch für Spalten.

Beispiele

- *Beispiel ZSV*

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & c \\ d & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ d & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & c \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 & c \\ d & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & c & 0 & 7 \\ 1 & 2 & d & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & c & 0 & 7 \\ 0 & 2+c & d & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & c & 0 & 7 \\ 0 & 2+c & d & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad det=(-1)^5\cdot(-1)\cdot(2+c)\cdot 1\cdot 3$$

$$3(2+c)=\underline{6+3c}$$

- *Beispiel Laplace-Entwicklung*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\ 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\ 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\ 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2-2\cdot 1-2(2\cdot 2-1\cdot 1)+4(2\cdot 2-1\cdot 3)=2$$

- *Beispiel Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor*

$$A=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&2\\4&1&2\end{vmatrix}\rightarrow 2\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&2\\4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&2\\2&3&2\\4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&2\\0&-1&0\\0&-7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&2\\0&-1&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=(-1)^0\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)=4=2\cdot det(A)\rightarrow 2=det(A)$$

Berechnung der Inversen

Handliche Formel für 2 x 2 Matrix: $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&1&0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}1.Zeile-3.Zeile\\2.Zeile+3.Zeile\\.\end{array}$$

1. Wie im Beispiel rechts von der zu invertierenden Matrix eine Permutationsmatrix aufschreiben.
   Alternativ: Falls eine Matrix mit einer rechten Seite zu invertieren ist, anstatt der Permutationsmatrix die rechte Seite hinschreiben.
2. Ziel: Die linke Seite soll so umgeformt werden, dass sie die Gestalt der Permutationsmatrix (Einheitsmatrix) annimmt.
   Schritt 1: Linksdreiecksmatrix mittels Gausselimination
   Schritt 2: Um das Rechtsdreieck zu null zu machen, Vielfaches von 3. Zeile zu 2. und 1. Zeile addieren, dann Vielfaches von 2 zu 1. Zeile. Im Prinzip die umgekehrte Gausselimination

LR-Zerlegung

1. Lasse rechte Seite der Matrix weg. Löse die Matrix mit Gausselimination.
2. Die Nullen im Linksdreieck werden mit den Koeffizienten gefüllt, mit denen man eine Zeile zu einer anderen addiert.
3. Es gilt A = LR
4. Für beliebige rechte Seiten x gilt nun:

$$\begin{array}{rcll}Ax=LRx&=&b&\\Lc&=&b&Vorwärtseinsetzen\\Rx&=&c&Rückwärtseinsetzen\end{array}$$

Vektorräume

Definition

Ein reeller Vektorraum V ist eine Menge von Vektoren, wobei eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahl definiert sind.

(A1) $a+b=b+a$

(A2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(A3) $\exists\, Nullvektor\, 0: a+0=a$

(A4) $\forall a\ \exists -a: a+(-a)=0$

(M1) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$

(M2) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a,\ \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$

(M3) $1a=a$

$Dabei\ sind\ a, b, c \in Vektorraum\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Unterräume

Definition

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V heisst Unterraum von V, falls

(a) $a, b\in U\rightarrow a+b\in U$

(b) $a\in U\wedge\alpha\in\mathbb{C}\rightarrow\alpha a\in U$

Entscheidend dafür, dass U auch einen Vektorraum darstellt, ist die „Abgeschlossenheit“

Beispiele für keinen Unterraum sind:

- $V=\mathbb{R}^2, U=span\left\{\begin{pmatrix}x^2\\x\end{pmatrix}\right\}$
- $Lösungen\ x\ von\ Ax=c\ für\ c\neq 0$

Matrixnormen

$$1-Norm, Spaltensummennorm: \|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \|Q\|_2 = 1 \text{ für } Q \text{ orthogonal}$$

$$\infty-Norm, Zeilensummennorm: \|A\|_\infty = max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_2 = max_i |\lambda_i| \text{ für } A \text{ symmetrisch}$$

$$2-Norm, max.Eigenwert\ von\ A^T A \text{ für } A\ quad.: \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

$$-1\ Norm: \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}} \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{min_i |\lambda|} \text{ für } A \text{ symmetrisch}$$

Vektornormen

(N1) $\|a\| \geqslant 0$

(N2) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$

(N3) $\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$ //Dreiecksungleichung

Die Norm ist eine Vorschrift, die jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet, die obige Regeln erfüllt.

Maximumsnorm: $\|x\|_\infty := max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$

Euklidische Norm: $\|x\|_2 := \sqrt{(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)}$

Lp-Norm: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$

Skalarprodukt

Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$: $x^T y =: \langle x, y \rangle$

Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$: $\bar{x}^T y =: \langle x, y \rangle$

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, falls $\langle x, y \rangle = 0$ ist.

Winkel: $\cos(\gamma) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$

Die orthogonale Projektion eines Vektors x auf den Vektor y ≠ 0 ist gegeben durch den Vektor $\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$

Schwarz'sche Ungleichung: $\forall x, y \in V: \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Falls x,y zueinander orthogonal, gilt Pythagoras: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Regeln

(S1) linear im 2. Faktor

i) $\langle x, y^{(1)} + y^{(2)} \rangle = \langle x, y^{(1)} \rangle + \langle x, y^{(2)} \rangle \quad \forall x, y^{(1)}, y^{(2)} \in V$

ii) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

(S2) symmetrisch

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(S3) positiv definit

i) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$

ii) $aus \langle x, x \rangle = 0 \ folgt \ x = 0$

Rotationsmatrizen (Givens-Matrizen)

$um\ die\ x-Achse$

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$um\ die\ y-Achse$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$um\ die\ z-Achse$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(i,k,\theta)=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \quad G(i,k,\theta)_{j,l}=\begin{cases}\cos\theta & \text{falls } j=i, l=i \text{ oder } j=k, l=k\\ \sin\theta & \text{falls } j=i, l=k\\ -\sin\theta & \text{falls } j=k, l=i\\ 1 & \text{falls } j=l\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Givens-Matrizen sind orthogonal.

Householdermatrizen

Sei u ein Spaltenvektor mit $u^T u=\sum_{i=1}^n u_i^2=1$ Dann lautet die Householdermatrix $H:=I_n-2\mathrm{uu}^T$ H sind orthogonal, symmetrisch und besitzen die Eigenwerte -1 (mit Vielfachheit 1) und 1 (mit Vielfachheit n-1)

Ausgleichsrechnung

Beispiel:

Gegeben sind die 4 Punkte $P_i=(x_i, y_i), i=1,2,3,4$ in der Ebene, wobei

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y_i	5.39	2.79	-0.61	2.43

Bestimme eine Funktion $y=f(x)=\alpha\cos(\pi x)+\beta\sin(\pi x)+\gamma$, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y-Richtung $\sum_{i=1}^{4}[f(x_i)-y_i]^2$ minimal wird.

Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}\alpha\cos(\pi x_i)+\beta\sin(\pi x_i)+\gamma &= y_i\\ \alpha+\gamma &= 5.39\\ \beta+\gamma &= 2.79\\ -\alpha+\gamma &= -0.61\\ -\beta+\gamma &= 2.43\end{aligned}$$

//Funktionswerte einsetzen

$$a:=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad c:=\begin{pmatrix}5.39\\ 2.79\\ -0.61\\ 2.43\end{pmatrix}$$

//Gleichungen zu Matrizen machen

Normalengleichungen

$$\begin{aligned}&\langle a^{(1)}, a^{(1)}\rangle x_1+\langle a^{(1)}, a^{(2)}\rangle x_2+\langle a^{(1)}, a^{(n)}\rangle x_n=\langle a^{(1)}, c\rangle\\ &\vdots\\ &\langle a^{(n)}, a^{(1)}\rangle x_1+\langle a^{(n)}, a^{(2)}\rangle x_2+\langle a^{(n)}, a^{(n)}\rangle x_n=\langle a^{(n)}, c\rangle\end{aligned}$$

wobei $a^{(n)}$ die n-te Spalte von a bedeutet und $\langle\Box\rangle$ das Skalarprodukt. Konkret sind $x_1:=\alpha, x_2:=\beta, x_3:=\gamma$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 2 & 0 & 0.36\\ 0 & 0 & 4 & 10\end{array}\right) \begin{array}{l}\alpha=3\\ \beta=0.18\\ \gamma=2.5\end{array}$$

Koordinatentransformation

$$\begin{array}{ccc} x\in V^n & F\rightarrow & x'\in V^n\\ T\uparrow & & T\uparrow\\ y\in W^n & G?\rightarrow & y'\in W^n\end{array}$$

Es ist: $$\begin{aligned}F\circ T &= T\circ G\\ \Leftrightarrow G &= T^{-1}\circ F\circ T\end{aligned}$$ Wahl des T: Vergleiche Eigenwertproblem

Bei Standardbasis-Aufgaben: Standardbasis als $y^{(1)}y^{(2)}..y^{(n)}$ setzen, $T=x^{(1)}x^{(2)}..x^{(n)}$ und $F=T^{-1}\circ G\circ T\ resp.\ TF=GT.$

Lineare Differentialgleichungen

Vorgehen mittels Transformationsmethode:

1. Koeffizientenmatrix A hinschreiben, Beispiel:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) &= -2y_1(t) + y_2(t)\\ \ddot{y}_2(t) &= y_1(t) - 2y_2(t) + y_3(t)\\ \ddot{y}_3(t) &= y_2(t) - 2y_3(t)\end{aligned} \rightarrow y(t):=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix}, \ddot{y}(t):=\begin{pmatrix}\ddot{y}_1(t)\\ \ddot{y}_2(t)\\ \ddot{y}_3(t)\end{pmatrix}, A:=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \rightarrow \ddot{y}(t)=A\,y(t)$$

Falls A halbeinfach, dann $U^{-1}AU = diag(EW_A),\ U = EV_A$

2. Eigenwertproblem für A lösen

Je nach Art der Koeffizientenmatrix DGL lösen, in y(t) rückeinsetzen und Anfangswerte einsetzen (siehe Tabelle)

	Harmonischer Oszillator	**Systeme 1. Ordnung**	**Systeme 1. Ordnung mit komplexen Eigenwerten**
Koeffizienten matrix	$\ddot{y}(t)=A\,y(t)$	$\dot{y}(t)=A\,y(t)$	
Herleitung	$\begin{aligned} y(t) &= U\,x(t)\\ \ddot{y}(t) &= U\,\ddot{x}(t)\\ Ay(t) &= U\,\ddot{x}(t)\\ AUx(t) &= U\,\ddot{x}(t)\\ U^{-1}AUx(t) &= \ddot{x}(t)\end{aligned}$	$\begin{aligned} y(t) &= U\,x(t)\\ \dot{y}(t) &= U\,\dot{x}(t)\\ Ay(t) &= U\,\dot{x}(t)\\ AUx(t) &= U\,\dot{x}(t)\\ U^{-1}AUx(t) &= \dot{x}(t)\end{aligned}$	Komplexe Eigenwerte und deren Eigenvektoren treten immer in konjugiert komplexen Paaren auf. Beispiel: $\begin{aligned} EW_1 &:= \lambda = \alpha + i\beta,\ EV_1 := u^{(k)} = v^{(k)} + iw^{(k)}\\ EW_2 &:= \bar{\lambda} = \alpha - i\beta,\ EV_2 := u^{(k+1)} = \overline{u^{(k)}} = v^{(k)} - iw^{(k)}\end{aligned}$
Entkoppelte Gleichungen	$\ddot{x}(t)=D\,x(t)$	$\dot{x}(t)=D\,x(t)$	
Form	$\ddot{x}_i(t)+\omega_i^2 x_i(t)=0,\ \omega_i:=\sqrt{(-\lambda_i)}$	$\ddot{x}_j(t)=\lambda_j x_j(t)$	
Lösung	$x_i(t)=a_i\cos(\omega_i t)+b_i\sin(\omega_i t)$	$x_j(t)=c_j e^{\lambda_j t}$	$\begin{aligned} x_k(t)=c_k e^{\lambda_k t} &= c_k e^{\alpha_k t}[\cos(\beta_k t)+i\sin(\beta_k t)]\\ x_{k+1}(t)=c_{k+1}e^{\lambda_{k+1}t} &= c_{k+1}e^{\alpha_k t}[\cos(\beta_k t)+i\sin(\beta_k t)]\end{aligned}$
Rückeinsetzen	$y(t)=Ux(t)=\left(u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}\right)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$ *bzw.* $y(t)=x_1(t)u^{(1)}+x_2(t)u^{(2)}+..+x_n(t)u^{(n)}$ *bzw.* $y(t)=[a_1\cos(\omega t)+b_1\sin(\omega t)]u^{(1)}+...$	$y(t)=Ux(t)=\left(u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}\right)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$ *bzw.* $y(t)=x_1(t)u^{(1)}+x_2(t)u^{(2)}+..+x_n(t)u^{(n)}$ *bzw.* $y(t)=[c_1 e^{\lambda_1 t}]u^{(1)}+...$	$x_k(t)u^{(k)}+x_{k+1}(t)u^{(k+1)}=$ $2e^{\alpha_k t}\{[\alpha_k\cos(\beta_k t)-b_k\sin(\beta_k t)]v^{(k)}-[a_k\sin(\beta_k t)+b_k\cos(\beta_k t)]w^{(k)}\}$
Anfangswerte	$y(0)=Ux(0)=U\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ *und* $\dot{y}(0)=U\dot{x}(0)=U\begin{pmatrix}\omega_1 b_1\\ \omega_2 b_2\\ \vdots\\ \omega_n b_n\end{pmatrix}$	$y(0)=Ux(0)=U\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$	