



Wallace Matias Felix de Paiva

**Desenvolvimento, Fabricação e Controle de
um Manipulador Robótico**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio.

Orientador : Marco Antonio Meggiolaro
Coorientadora: Vivian Suzano Medeiros

Rio de Janeiro
Dezembro de 2023

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha família pelo apoio incondicional ao longo da minha vida. Em especial, agradeço à minha mãe, Jacy Matias, cujo estímulo constante e suporte foram fundamentais para que eu perseguisse meus estudos, recebendo todo o respaldo necessário durante a graduação. Ao meu pai, Arialdo Felix, mesmo não tendo tido a oportunidade de testemunhar minha entrada na faculdade, sei que sentiria orgulho. Além disso, agradeço à minha irmã, Amanda Matias, e ao meu gato, Tom, por estarem presentes nessa caminhada.

Um agradecimento especial à minha namorada, Maria Eduarda, pelo apoio constante ao longo do tempo que estamos juntos, por todo amor e carinho.

Agradeço aos membros e ex-membros da equipe de combates de robôs da PUC-Rio, Riobotz, e do laboratório de robótica, LabRob, por todo o conhecimento compartilhado e desenvolvido, pelas amizades e experiências proporcionadas ao longo dos projetos.

Não posso deixar de expressar minha gratidão ao meu orientador, Marco Antonio Meggiolaro, cuja orientação, conhecimento e dedicação foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Além de ser meu orientador neste projeto, depositou confiança em mim em outros projetos, durante meu período na Iniciação Científica e coordenando a Riobotz e o LabRob.

Agradeço à minha coorientadora Vivian Suzano Medeiros por sua paciência e assistência nos momentos mais cruciais.

Expresso minha gratidão à PUC-Rio por sua infraestrutura e pelos profissionais dedicados. Ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, agradeço pela qualidade do ensino, aos projetos desenvolvidos e pelo crescimento pessoal proporcionado, elementos essenciais para a execução do curso.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todos os meus amigos, sejam da faculdade ou não, colegas de sala ou de trabalho. Pelos momentos de companheirismo em que pude compartilhar conhecimento e risadas. Sua contribuição não apenas moldou minha trajetória acadêmica e profissional, mas também desempenhou um papel fundamental na minha formação como adulto e cidadão.

Resumo

Desenvolvimento, Fabricação e Controle de um Manipulador Robótico

O cenário industrial enfrenta desafios significativos devido aos altos custos associados à aquisição de manipuladores robóticos, especialmente no contexto brasileiro, onde a oferta de modelos comerciais nacionais é limitada. Este trabalho propõe uma solução para essa demanda, buscando desenvolver um manipulador robótico de 3 graus de liberdade a partir de um manipulador fora de uso do Laboratório de Robótica, o MA2000. O objetivo é contribuir academicamente introduzindo conceitos fundamentais de robótica ao longo do processo de concepção, fabricação e controle.

Durante o desenvolvimento, foram conduzidos estudos detalhados sobre a modelagem do manipulador, levando em consideração suas limitações, e realizada a escolha cuidadosa de componentes eletrônicos, bem como a fabricação de peças utilizando manufatura aditiva. A montagem do manipulador envolveu a integração de peças impressas em PLA, com testes de bancada focados na funcionalidade da garra e na eletrônica implementada.

O projeto também apresenta o desenvolvimento de um controle proporcional-derivativo (PD) utilizando a biblioteca de Peter Corke, aplicado a uma trajetória definida. Os resultados obtidos demonstraram um acoplamento satisfatório com as respostas desejadas.

Os códigos de implementação em Python e MATLAB, utilizados para testes e simulações, assim como as modelagens CAD, estão disponíveis no repositório aberto do projeto. Além de oferecer uma solução prática para a demanda de manipuladores acessíveis, o projeto visa estimular o interesse e a compreensão mais aprofundada da robótica no ambiente acadêmico..

Palavras-chave

Manipulador robótico; Controle de trajetória; Controlador PD;
Manufatura aditiva.

Abstract

Development, Manufacture and Control of a Robotic Manipulator

The industrial scenario faces significant challenges due to the high costs associated with acquiring robotic manipulators, especially in the Brazilian context where the availability of national commercial models is limited. This project proposes a solution to this demand, aiming to develop a 3-degree-of-freedom robotic manipulator based on a decommissioned manipulator from the Robotics Laboratory, the MA2000. The goal is to contribute academically by introducing fundamental robotics concepts throughout the design, manufacturing, and control process.

During the development, detailed studies on the manipulator's modeling were conducted, taking into account its limitations. Careful selection of electronic components and the additive manufacturing of parts were carried out. The assembly of the manipulator involved the integration of parts printed in PLA, with bench tests focused on the functionality of the gripper and the implemented electronics.

The project also presents the development of a proportional-derivative (PD) control using Peter Corke's library, applied to a defined trajectory. The obtained results demonstrated satisfactory coupling with the desired responses.

Implementation codes in Python and MATLAB, used for testing and simulations, as well as CAD models, are available in the project's open repository. In addition to offering a practical solution for the demand for accessible manipulators, the project aims to stimulate a deeper interest and understanding of robotics in the academic environment.

Keywords

Robotic manipulator; Trajectory control; PD controller; Additive manufacturing.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Objetivos	12
1.2	Revisão Bibliográfica	12
1.3	Elementos anatômicos do Manipulador	14
1.3.1	Elos (<i>Links</i>)	14
1.3.2	Juntas (<i>Joints</i>)	15
1.3.3	Efetuador (<i>End-effector</i>)	16
1.3.4	Graus de Liberdade (<i>Degrees of Freedom</i>)	16
1.3.5	Estrutura da cadeia cinemática	17
2	Manipulador utilizado	19
2.1	Modelo Físico Inicial	19
2.2	Modelo Projetado CAD	23
2.3	Impressão	26
2.4	Eletrônica	30
3	Modelagem e Simulação	34
3.1	Modelagem cinemática	34
3.1.1	Cinemática Direta	34
3.1.2	Cinemática Inversa	38
3.2	Singularidade	40
3.3	Modelagem Dinâmica	41
3.3.1	Definição das forças generalizadas	42
3.3.2	Definição das coordenadas generalizadas	43
3.3.3	Definição das velocidades generalizadas	44
3.3.4	Cálculo das velocidades angulares e lineares absolutas	45
3.3.5	Cálculo das velocidades angulares e lineares parciais	45
3.3.6	Cálculo das acelerações angulares e lineares absolutas	45
3.3.7	Cálculo dos momentos iniciais	46
3.3.8	Cálculo das forças iniciais	46
3.3.9	Cálculo das forças ativas e dos momentos ativos nos elos	47
3.3.10	Cálculo das forças ativas generalizadas	47
3.3.11	Cálculo dos torques	48
3.4	Simulação	48
3.4.1	Controle do manipulador - PID / PD	52
4	Resultados	54
4.1	Resultado do controle de posição	55
5	Conclusão	63
A	<i>Datasheet</i> do Filamento PLA da Empresa PrintaLot	66
B	Transformação homogênea	69

Lista de figuras

1.1	Robôs industriais - Exemplo 1	9
1.2	Robôs industriais - Exemplo 2	10
1.3	Robôs industriais - Exemplo 3	11
1.4	Principais focos relacionado à impressão 3D em 2021. [20]	13
1.5	Manipulador acadêmico [13]	13
1.6	Sequência de elos numa junta de braço robótico [9]	14
1.7	Tipos de juntas utilizadas em robôs [9]	15
1.8	Movimentos de garras [12]	16
1.9	Representação dos graus de liberdade de um sistema tridimensional	17
1.10	Cadeias cinemáticas [4]	18
1.11	Cadeias cinemáticas híbridas [4]	18
2.1	Puma	19
2.2	MA2000	20
2.3	Caixas de redução	21
2.4	Potenciômetro	22
2.5	Modelo CAD	23
2.6	Modelo CAD do Elo 0	24
2.7	Modelo CAD do Elo 1 e 2	24
2.8	Modelo CAD da garra	24
2.9	Vista isométrica do modelo	25
2.10	Vista lateral do modelo	25
2.11	Impressora 3D Ultimaker 3	26
2.12	Visão Detalhada do Preenchimento (Infill) em uma Impressão 3D	28
2.13	Impressão do Elo 2	29
2.14	Garra aberta e fechada	29
2.15	Fixação do Servo Motor e engrenagem motora	30
2.16	Roboteq e sua fiação	31
2.17	Raspberry Pi Pico	31
2.18	Pinagem - Raspberry Pi Pico	32
2.19	Conversor ADS1115 Module	32
2.20	Esquemático da eletrônica para um funcionamento de um motor das juntas	32
2.21	Resoldagem - potenciômetro	33
3.1	Definição dos parâmetros <i>Denavit-Hartenberg</i> em sistemas [19]	35
3.2	Esquemático simplificado do manipulador	37
3.3	Representação do modelo simplificado	39
3.4	Exemplo empregado na modelagem da cinemática inversa para um manipulador com 2 graus de liberdade [14]	39
3.5	Esquemático simplificado do manipulador	43
3.6	Vizualização no Matlab, usando a Toolbox	50
3.7	Área de trabalho máxima	51
4.1	Manipulador montado sem a eletrônica	54

4.2	Teste de funcionamento da garra impressa	55
4.3	Visualização da Trajetória 1	56
4.4	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 20; Derivativo = 5	57
4.5	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 50; Derivativo = 5	57
4.6	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 100; Derivativo = 5	58
4.7	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 100; Derivativo = 20	58
4.8	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 200; Derivativo = 30	59
4.9	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 300; Derivativo = 40	59
4.10	Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 350; Derivativo = 40	60
4.11	Visualização da Trajetória 2	61
4.12	Simulação da Trajetória 2 - Proporcional = 350; Derivativo = 40	61
4.13	Visualização da Trajetória 3	62
4.14	Simulação da Trajetória 3 - Proporcional = 350; Derivativo = 40	62
A.1	Filamento PLA	66

Lista de tabelas

2.1	Motores MA2000	21
2.2	Relação de transmissão nos eixos do manipulador	22
2.3	Parâmetros de massa e inércia dos elos do braço	26
2.4	Parâmetros de impressão	27
3.1	Parâmetros de DH	35
3.2	Velocidades lineares e angulares parciais	45
3.3	Limites das juntas [graus]	50
3.4	Pontos para criação da trajetória [graus]	51
4.1	Pontos para criação da trajetória [rad]	56
A.1	Dados mecânicos fornecidos pela empresa	67
A.2	Dados de tolerância fornecidos pela empresa	67

1

Introdução

Os processos industriais estão constantemente evoluindo e se aprimorando por meio do avanço tecnológico e científico. Essa evolução é impulsionada pela busca incessante por maior eficiência, produtividade e segurança nas operações de manufatura. Em um comparativo que abrange um século de progresso industrial, Nye [17] destaca que, graças à robótica, a linha de montagem atual atingiu um nível de produtividade sem precedentes.

Nesse cenário, os manipuladores robóticos têm ganhado cada vez mais destaque nas linhas de produção como uma solução versátil e altamente eficaz para automatizar tarefas complexas e repetitivas. Eles garantem a execução rápida e padronizada dessas tarefas, contribuindo para o aumento da eficiência industrial. As aplicações mais comuns dos robôs industriais incluem soldagem, pintura, fabricação, montagem e inspeção [15]. Devido à sua importância e utilidade, o mercado oferece uma ampla variedade de modelos de manipuladores robóticos, como os exemplos a seguir.



1.1(a): Robô RVT6L-A901SS [5]



1.1(b): Robô Panda [8]

Figura 1.1: Robôs industriais - Exemplo 1

O RVT6L-A901SS, Figura 1.1(a), da Epson é um robô com um design compacto e de alta precisão. Ele é projetado para aplicações que exigem alta velocidade e precisão, como montagem de componentes eletrônicos e manipulação de pequenas peças. Com sua capacidade de carga e alcance, é uma escolha adequada para ambientes de manufatura de alta precisão. O robô Panda, Figura 1.1(b), da Franka Emila possui 7 graus de liberdade, com capacidade de carga de 3 kg, possuindo um projeto mecânico compacto e corpo com superfícies lisas. Em suas juntas, existem sensores de torque, permitindo um controle de torque, além de ser colaborativo.



1.2(a): Robô CRP-RH20-06-W [21]

1.2(b): Robô IRB 1600 [1]

Figura 1.2: Robôs industriais - Exemplo 2

O robô CRP-RH20-06-W, Figura 1.2(a), da Technik Robótica é um robô colaborativo versátil, projetado para interação segura com humanos em ambientes de trabalho. Com características de peso e tamanho adequados, é uma escolha ideal para espaços de trabalho reduzidos e aplicações que requerem colaboração homem-máquina. O IRB 1600, Figura 1.2(b), é um robô de peso estrutural mais elevado, 260 kg, com capacidade de carga de 10 kg, que possui 6 eixos. Um modelo muito utilizado para diversas funções envolvendo manipulação de peças/produtos e pintura.



1.3(a): Robô SCARA Série RS406 [10]



1.3(b): Robô de Pintura P-40iA [6]

Figura 1.3: Robôs industriais - Exemplo 3

O Robô SCARA Série RS406 da HIWIN, Figura 1.3(a), é conhecido por sua precisão e eficiência. Com um design compacto, é adequado para aplicações que envolvem montagem e manipulação de peças. Este robô SCARA oferece desempenho confiável em ambientes industriais. O Robô de Pintura P-40iA da FANUC, Figura 1.3(b), é uma escolha popular para tarefas de pintura em indústrias diversas. Possui um design adequado para trabalhos de pintura precisos e eficazes, contribuindo para a qualidade e eficiência na aplicação de revestimentos.

No entanto, os manipuladores robóticos atualmente disponíveis no mercado continuam a apresentar custos significativamente elevados, o que impõe limitações à sua acessibilidade e adoção em uma variedade de contextos. Isso é especialmente evidente em instituições de ensino, pesquisa e em pequenas e médias empresas. No cenário brasileiro, em particular, a dificuldade significativa em adquirir manipuladores robóticos de fabricação nacional é evidente, o que representa um obstáculo ao progresso e à disseminação dessa tecnologia no país.

Portanto, este trabalho se propõe a desenvolver um manipulador robótico que aproveita as partes estruturais de um robô comercial antigo e incorpora técnicas de fabricação mais recentes e acessíveis, com uso de manufatura aditiva. Isso visa tornar o projeto mais viável economicamente, reduzindo custos. A natureza multidisciplinar do desenvolvimento do manipulador representa um desafio complexo, abrangendo aspectos mecânicos, eletrônicos e de controle.

Por fim, o manipulador resultante será disponibilizado com o propósito acadêmico de introduzir conceitos fundamentais de robótica, incluindo o projeto de manipuladores, controle, dinâmica e cinemática. Este projeto visa

contribuir para a disseminação do conhecimento e o desenvolvimento da tecnologia de robótica de forma mais acessível.

1.1 Objetivos

O objetivo deste estudo é o desenvolvimento e fabricação de um manipulador robótico, com base no braço robótico MA2000¹, e o subsequente controle do mesmo. O manipulador será configurado com 3 graus de liberdade, dos quais 2 serão provenientes do braço do MA2000 e 1 será fabricado por meio da tecnologia de manufatura aditiva. A utilização da manufatura aditiva tem como finalidade otimizar o processo de produção, reduzir custos e possibilitar a personalização das estruturas, resultando em maior flexibilidade e adaptabilidade.

O sistema proposto deve ser capaz de se posicionar em qualquer ponto dentro de seu espaço de trabalho e ter a capacidade de segurar objetos usando uma garra simples. Os elos do manipulador serão simulados por meio do software MATLAB², com a "ROBOTICS TOOLBOX"³ desenvolvida por Peter Corke , para realizar a simulação do controle PID.

1.2 Revisão Bibliográfica

Os robôs são divididos em duas categorias na literatura: robôs móveis e manipuladores. O primeiro é composto por robôs cuja base não é fixa e sua posição varia por meio de interações com o meio externo [11]. Já o último, sendo o foco deste trabalho, possui uma definição bem aceita pela Associação de Indústrias de Robôs dos Estados Unidos (Robot Industries Association - RIA). Esses são "manipuladores reprogramáveis e multifuncionais, projetados para manipular materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especializados, por meio de movimentos variáveis programados para a realização de tarefas diversas"[19].

Com o avanço tecnológico, as metodologias de produção têm evoluído significativamente, e a manufatura aditiva emerge como uma revolução no desenvolvimento rápido de peças. O diferencial desses processos de adição é a facilidade de uso e automação, eliminando a necessidade de moldes, ferramentas especiais e reduzindo a intervenção do operador. Eles utilizam

¹Equipamento desenvolvido pela TecQuipment, DC Servo Controlled 6 Axis Robot (Product Code: MA2000)

²MATLAB (MathWorks) :<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

³Um manual de todas as funções disponíveis na biblioteca está disponível em: <https://www.petercorke.com/RTB/r9/html/SerialLink.html>

informações geométricas diretamente do sistema CAD para um planejamento automatizado do processo [2].

Um recorte de 2021, vide Figura 1.4, obtido no portal de dados e estatísticas Statist mostra onde estava o principal foco de uso da impressão 3D [20], com destaque para o desenvolvimento de produtos e prototipagem.

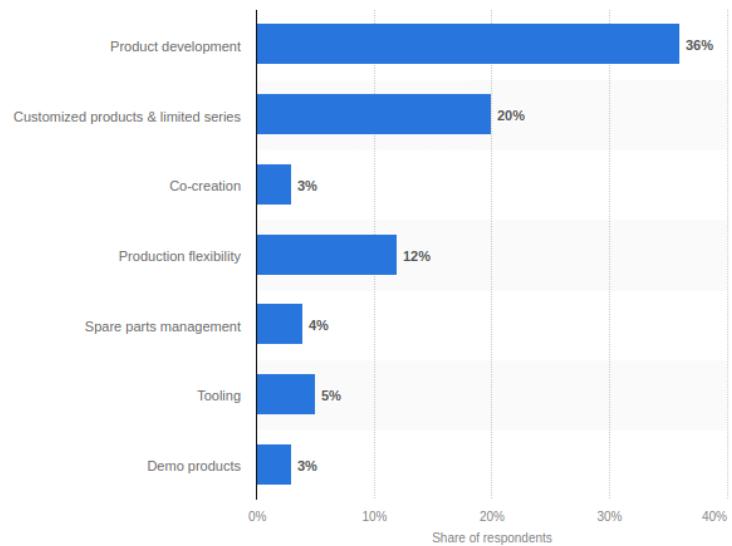


Figura 1.4: Principais focos relacionado à impressão 3D em 2021. [20]

Consequentemente, as empresas estão adentrando cada vez mais nesse campo, incorporando peças impressas em suas estruturas. Os manipuladores robóticos também têm aproveitado essa tecnologia, especialmente no âmbito acadêmico, devido à sua capacidade de projetos personalizados e ao baixo custo de operação e manutenção. Um exemplo disso é apresentado em [13], que utiliza a impressão 3D para o desenvolvimento de um manipulador de 4 graus de liberdade.



Figura 1.5: Manipulador acadêmico [13]

1.3

Elementos anatômicos do Manipulador

Os robôs, em sua diversidade, apresentam diferentes formas anatômicas que variam conforme a aplicação específica, resultando em distintas geometrias. No contexto deste projeto, o manipulador em foco pertence à categoria PUMA, caracterizado pelo movimento de suas juntas assemelhando-se ao braço humano. A literatura clássica comumente se refere às primeiras três juntas, objeto central deste estudo, como RRR, indicando um robô articulado com movimentos rotacionais.

De modo geral, a estrutura dos braços robóticos industriais é composta por uma série de corpos denominados elos. Idealmente, esses elos são rígidos, resistindo à deformação sob a ação de forças externas. Para uma compreensão mais aprofundada sobre manipuladores, a anatomia destes será detalhada de maneira mais abrangente.

1.3.1

Elos (*Links*)

Os elos, corpos rígidos de diversos tamanhos e formatos, mantêm sua integridade frente às forças aplicadas. Ao serem unidos por meio de juntas, possibilitam o movimento do manipulador em um sistema cartesiano, permitindo deslocamentos nos eixos x, y e z. A numeração dos elos segue uma sequência crescente, começando em 0 a partir da base, designando o elo inicial (elo 0), até o elo de saída, onde o efetuador final é fixado. A configuração típica de um braço robótico é ilustrada na figura a seguir.

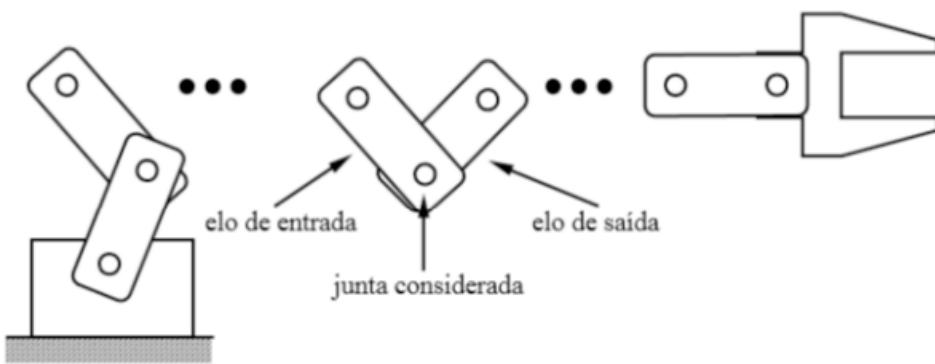


Figura 1.6: Sequência de elos numa junta de braço robótico [9]

1.3.2

Juntas (*Joints*)

As juntas em um manipulador são articulações que conectam os elos, determinando e possibilitando os movimentos relativos entre eles. Diversos tipos de juntas são empregados em robôs, conforme ilustrado na Figura 1.7. Cada tipo de junta está associado a uma quantidade específica de graus de liberdade, conforme será explicado posteriormente.

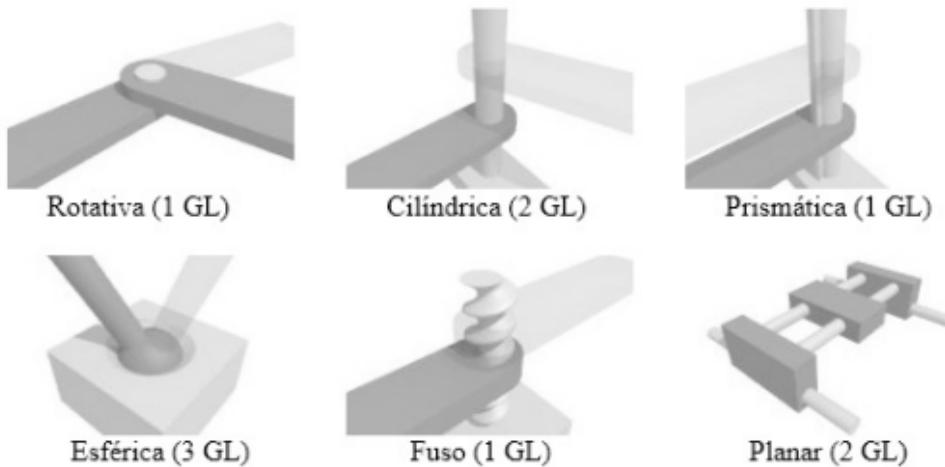


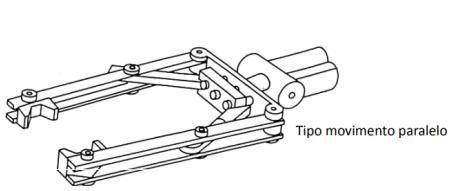
Figura 1.7: Tipos de juntas utilizadas em robôs [9]

- Rotativa: por meio de uma linha imaginária estacionária, denominada eixo de rotação, proporciona movimentos rotacionais entre dois elos. Além disso, pode se diferenciar se o eixo de rotação for paralelo (junta torcional) ou se for perpendicular (junta rotacional);
- Prismática ou linear: composta por dois elos que possuem movimento de deslizamento entre si, com um deslocamento em linha reta;
- Cilíndrica: formado pela combinação de movimentos das duas juntas anteriores (rotativa e prismática), possuindo um deslocamento linear e rotativo;
- Esférica: através da combinação similar a três juntas rotacionais, proporciona rotações dentro de três eixos distintos;
- Fuso ou parafuso: por meio de um conjunto de encaixe parafuso e rosca, faz um movimento helicoidal definido, executando deslocamento linear e rotacional em um eixo central;
- Planar: formado pela combinação de duas juntas prismáticas, movimentando-se por um plano definido pelos deslocamentos lineares.

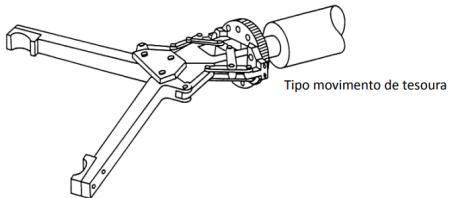
1.3.3

Efetuador (*End-effector*)

O efetuador desempenha a função designada ao manipulador e está conectado ao último elo deste, podendo ser uma estrutura contendo ferramentas de trabalho ou, alternativamente, apresentar uma garra (gripper). Este último tipo é o mais simples, com movimento de abertura e fechamento para a manipulação de objetos. A escolha do tipo de ferramenta depende da função específica para a qual o manipulador foi projetado.



1.8(a): Garra de movimento paralelo



1.8(b): Garra de movimento tesoura

Figura 1.8: Movimentos de garras [12]

Desse modo, a localização espacial do efetuador é chamado de *end effector*, referindo-se ao ponto final da cadeia cinemática do manipulador. Sua posição que define o ponto P , a distância de referência no sistema de coordenadas do sistema em relação a base.

1.3.4

Graus de Liberdade (*Degrees of Freedom*)

A caracterização de um manipulador robótico envolve a especificação do número de graus de liberdade, indicando a quantidade de movimentos que o manipulador pode executar no espaço bidimensional ou tridimensional, vide Figura 1.9. Esse número indica a quantidade de parâmetros independentes necessários para especificar a configuração do robô [22]. Cada tipo de junta define um ou mais graus de liberdade, somando-se para estabelecer as capacidades de movimentação dos elos. O número total de graus de liberdade é determinado pela soma dos graus de liberdade de cada junta.

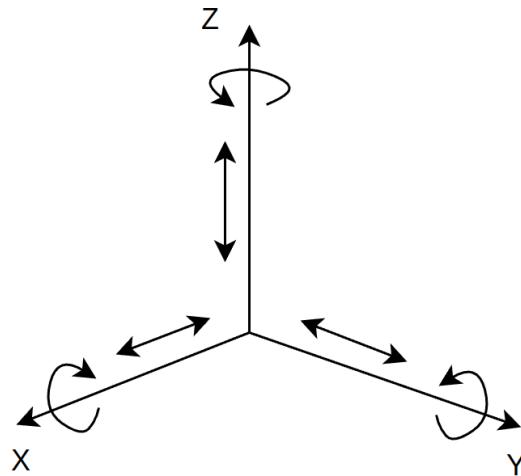


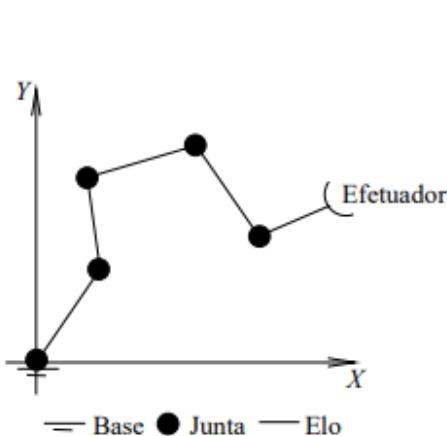
Figura 1.9: Representação dos graus de liberdade de um sistema tridimensional

De acordo com o número de graus de liberdade e o espaço operacional, os manipuladores são classificados como redundantes, não redundantes e sub-atuados. A redundância ocorre quando o número de graus de liberdade excede as variáveis independentes necessárias para a tarefa no espaço operacional; não redundante, quando ambos são iguais; sub-atuado, quando o número de graus de liberdade é inferior às variáveis necessárias.

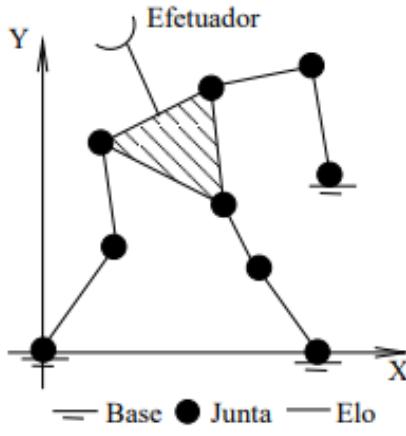
A determinação do número de graus de liberdade em um mecanismo pode ser realizada utilizando o critério de Grübler-Kutzbach [22]. Este critério leva em consideração os graus de liberdade do espaço de trabalho, o número de elos no mecanismo, o número de juntas no mecanismo e a quantidade de graus de liberdade permitidos por junta.

1.3.5 Estrutura da cadeia cinemática

Os manipuladores se distinguem pela estrutura da sua cadeia cinemática, podendo ser categorizados como de cadeia cinemática aberta ou fechada, conhecidos como manipuladores seriais e paralelos, respectivamente. Nos manipuladores seriais, os elos estão conectados em um único percurso, enquanto nos manipuladores paralelos, pelo menos uma cadeia cinemática é fechada, exigindo que dois elos quaisquer se conectem por, no mínimo, dois percursos distintos chamados de pernas. As cadeias seriais que unem a base ao efetuador em manipuladores paralelos são denominadas pernas, as quais podem incluir tanto juntas atuadas quanto passivas.



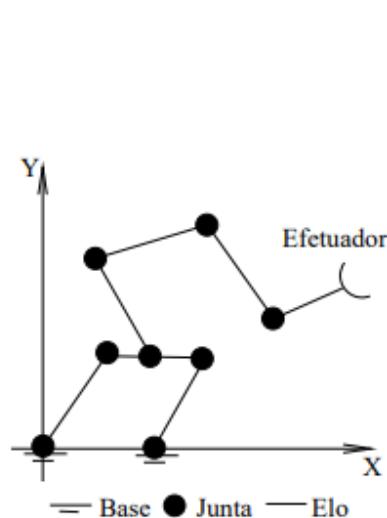
1.10(a): Cadeia cinemática serial [4]



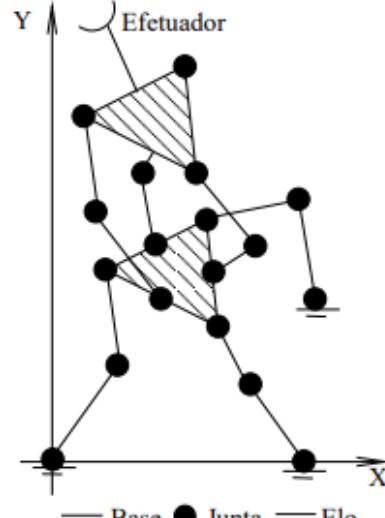
1.10(b): Cadeia cinemática paralela [4]

Figura 1.10: Cadeias cinemáticas [4]

Manipuladores paralelos, devido à sua estrutura fechada, são mais robustos e precisos devido à distribuição de carga entre as pernas e maior rigidez. Embora sejam mais rápidos, apresentam desafios como volume de trabalho reduzido e complexidade na arquitetura. Uma abordagem híbrida, combinando cadeias abertas e fechadas, busca aproveitar as vantagens de manipuladores seriais e paralelos [4].



1.11(a): Cadeia cinemática híbrida: sequência de cadeias abertas e fechadas [4]



1.11(b): Cadeia cinemática híbrida: sequência de cadeias fechadas [4]

Figura 1.11: Cadeias cinemáticas híbridas [4]

2

Manipulador utilizado

O manipulador utilizado neste estudo é o MA2000, fornecido pelo La-
bRob e desenvolvido pela TQ (TecQuipment). Este manipulador é um braço
articulado do tipo PUMA (Programmable Universal Manipulation Arm) com
6 graus de liberdade. O PUMA é conhecido como um projeto popular de robô
articulado, originalmente projetado para atender às demandas da indústria
automobilística. A estrutura do manipulador é composta por uma base, elos
articulados e um efetuador final com uma garra. Os primeiros três graus de
liberdade apresentam articulações rotativas, responsáveis pelo posicionamento
do braço na faixa de 0 a 270°, enquanto os três seguintes controlam a orientação
do efetuador na extremidade do braço.

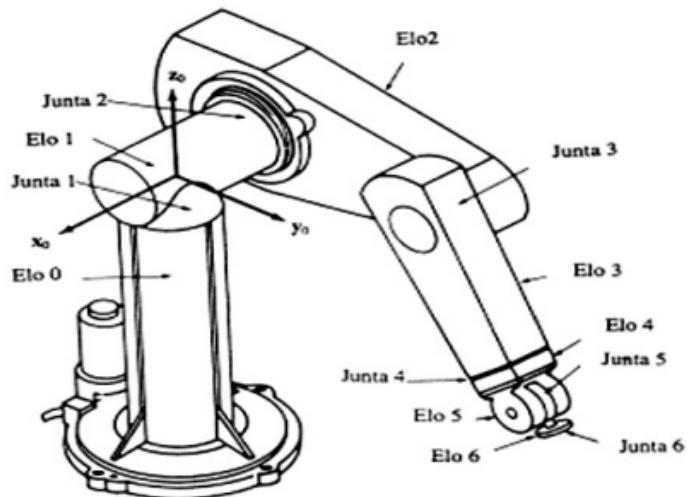


Figura 2.1: Puma

Neste capítulo, exploraremos o modelo físico presente no Laboratório de Robótica, suas considerações e a aplicação da manufatura aditiva para substituição de partes da estrutura, culminando no modelo final.

2.1

Modelo Físico Inicial

A Figura 2.2 ilustra o modelo físico inicial do manipulador, conforme recebido de fábrica. Focando na sua estrutura física, esta é composta por hardware responsável pela execução dos movimentos mecânicos, abrangendo as articulações das estruturas dos elos, atuadores (motores DC e servomotores), engrenagens, correias, potenciômetros e o sistema pneumático da garra. Devido

à antiguidade da estrutura do robô e ao fato de não ter sido utilizado por um longo período quando encontrado, tornou-se necessário realizar uma manutenção para garantir o seu funcionamento adequado. A manutenção incluiu a verificação das caixas de redução, dos motores e dos potenciômetros, estes últimos sendo testados diretamente em uma fonte.



Figura 2.2: MA2000

Para o desenvolvimento do manipulador, foram considerados apenas os três primeiros elos, sendo do tipo RRR. Os três últimos elos se demonstraram não funcionais. Nesse contexto, é crucial analisar os componentes presentes para caracterizá-lo. Inicialmente, o braço estava desmontado e desprovido de eletrônica, possuindo apenas a fiação. Além da estrutura dos elos, havia motores, caixas de redução, potenciômetros e o sistema de transmissão.

Cada motor possui sua respectiva caixa de redução, sendo que os motores das juntas 1 e 3 são os mesmos. A Tabela 2.1 apresenta os motores e as reduções.

Tabela 2.1: Motores MA2000

Componente	Marca	Modelo
Motor 1 e 3	MAXON	2332.908-10.151-051
Motor 2	ESCAP	34 L11 224 E5
Redução 1 e 3	MAXON	Spur Gearhead GS 38 A (100:1)
Redução 2	ESCAP	P42 (123:1)



2.3(a): Caixa de redução juntas 1 e 3



2.3(b): Conjunto motor-redução junta 2

Figura 2.3: Caixas de redução

No sistema de transmissão, que possibilita o movimento rotacional dos elos, são utilizadas polias dentadas. Esses sistemas são comumente empregados para transmitir torque e movimento, como é o caso desse manipulador. Cada eixo do sistema de coordenadas está associado ao movimento de uma polia dentada. Desse modo, se faz necessário conhecer as relações de transmissão (r_{t_i}), para compreender melhor o funcionamento do movimento. Esse sistema é bastante conhecido na literatura, com equacionamentos que relacionam o torque (T_i), a velocidade angular (ω_i) e o número de dentes da polia (N_i). Para demonstração do equacionamento, utilizamos o subíndice 1 para a polia de menor diâmetro (geralmente chamada de polia motora) e 2 para a de

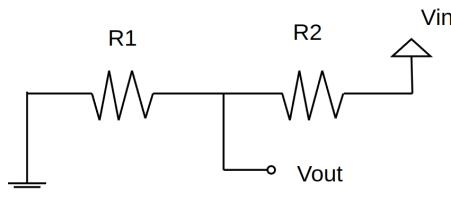
maior diâmetro (polia movida). As relações de transmissão são apresentadas na Tabela 2.2.

$$r_{t_i} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (2-1)$$

Tabela 2.2: Relação de transmissão nos eixos do manipulador

Eixo de referência	Polia motora	Polia movida	Relação de transmissão
Primeiro eixo	10	60	6
Segundo eixo	12	62	$\frac{31}{6}$
Terceiro eixo	10	40	4

Nos eixos de rotação das juntas, que correspondem aos eixos das polias movidas mencionadas anteriormente, cada um possui um potenciômetro que atua como sensor para fornecer o *feedback* angular. O potenciômetro apresenta um comportamento linear em relação ao seu giro (de 0 a 360°), respondendo à voltagem fornecida a eles. Durante o uso, será necessário verificar o comportamento inicial do potenciômetro para calibrar o *feedback* do θ . A equação que o modela é apresentada na Tabela 2-2.



2.4(a): Esquemático do funcionamento do potenciômetro



2.4(b): Eixo onde fica fixado o potenciômetro

Figura 2.4: Potenciômetro

$$V_{out} = V_{in} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2-2)$$

2.2

Modelo Projetado CAD

O SolidWorks é um software CAD 3D amplamente utilizado para a modelagem de peças e conjuntos mecânicos. Ele oferece ferramentas para caracterização das peças, permitindo definir o material de cada componente a partir de uma extensa lista de materiais com suas propriedades físicas e mecânicas. Além disso, realiza automaticamente cálculos, como massa, centro de gravidade, momentos de inércia e propriedades de seção transversal, sendo essenciais para a obtenção de dados na modelagem e simulação de manipuladores. Portanto, foi utilizado para obter um modelo CAD do robô em questão.

Na Figura 2.5, apresenta-se o modelo no software. Esse modelo foi obtido através da medição das peças originais do modelo físico, exceto pelas peças destacadas em vermelho, que foram modificadas para possibilitar a utilização de impressão 3D. Dessa forma, foi possível criar um conjunto que pode ser conectado às peças existentes e à estrutura para completar o robô, incluindo a conexão de um *end effector*.

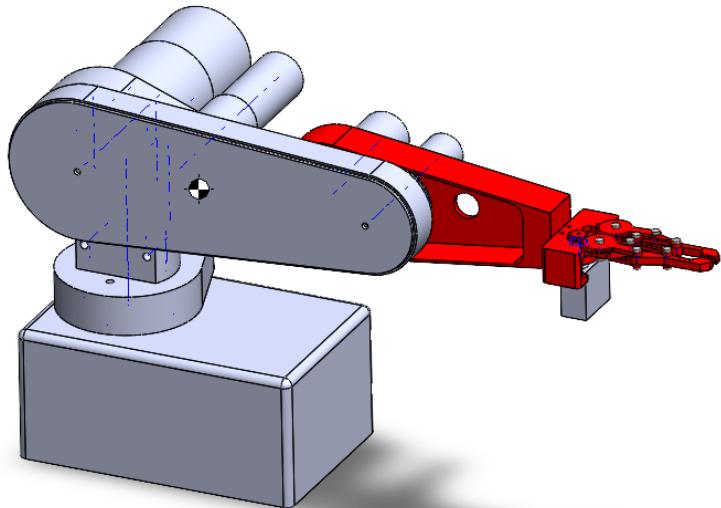
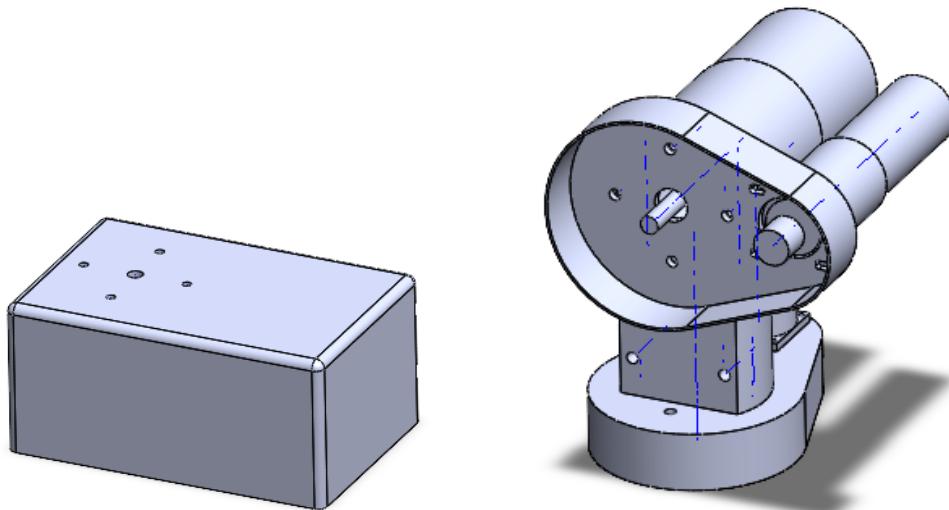


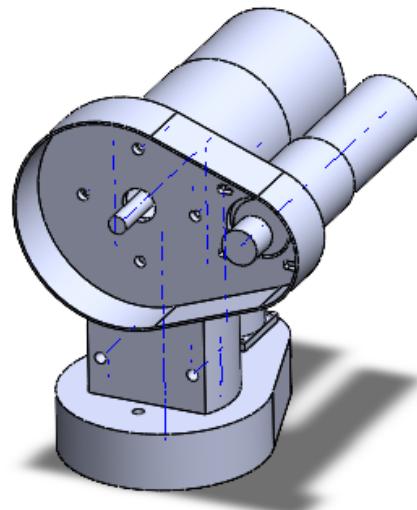
Figura 2.5: Modelo CAD

O Elo 0, conforme mostrado na Figura 2.6, é dividido em duas estruturas, onde a primeira comprehende a base e a segunda consiste no conjunto que efetivamente possui o movimento rotacional. A Figura 2.7 apresenta a estrutura do Elo 1 e 2. Enquanto o Elo 1 utiliza as peças originais, o Elo 2 é composto principalmente por peças impressas em 3D. Essa modificação foi necessária devido à remoção dos 3 últimos elos do manipulador físico inicial, o que impossibilitava a conexão de uma garra na extremidade. Assim, a estrutura

foi remodelada com base no modelo original, realizando ajustes de medidas e encaixes pertinentes.

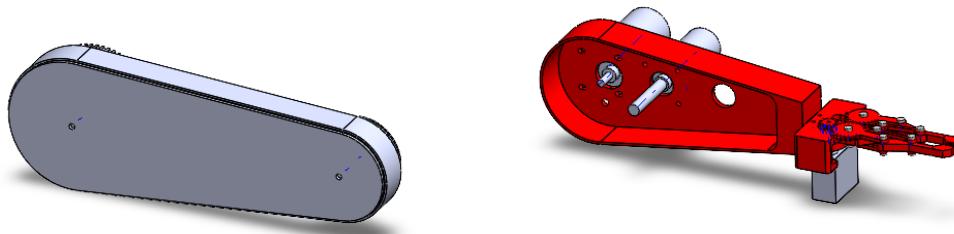


2.6(a): Base do manipulador



2.6(b): Conjunto Rotacional

Figura 2.6: Modelo CAD do Elo 0



2.7(a): Modelo CAD do Elo 1

2.7(b): Modelo CAD do Elo 2

Figura 2.7: Modelo CAD do Elo 1 e 2

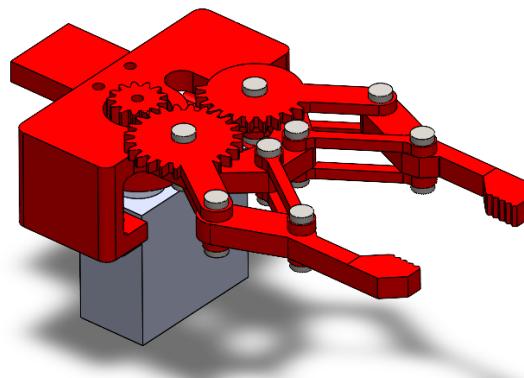


Figura 2.8: Modelo CAD da garra

No processo de definição do modelo no CAD, foram estabelecidos os sistemas de coordenadas, conforme ilustrado nas Figuras 2.9 e 2.10. Esses sistemas de coordenadas são cruciais para a modelagem matemática do manipulador e para a simulação, como será explicado mais detalhadamente posteriormente. Com os sistemas de coordenadas definidos, foram obtidos os parâmetros de massa e inércia, os quais serão implementados na construção do robô na simulação no MATLAB, de modo a incluir a dinâmica. A modelagem CAD está disponível no repositório¹ aberto do trabalho.

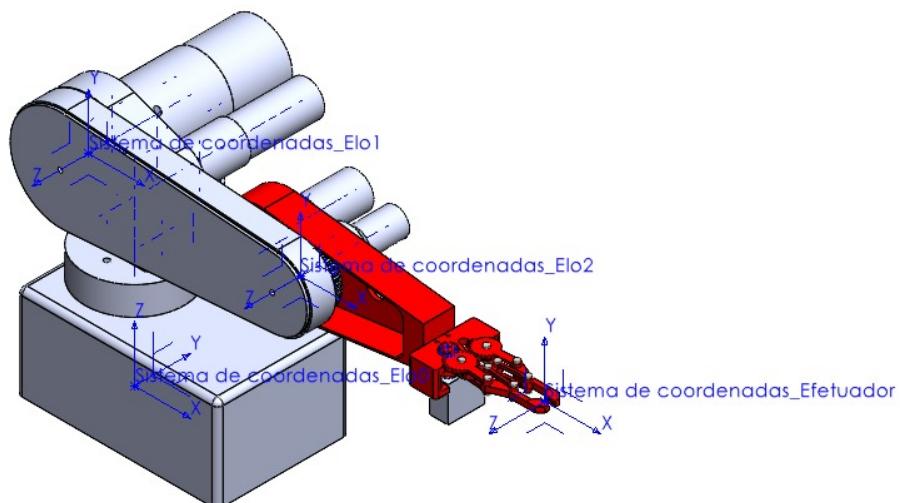


Figura 2.9: Vista isométrica do modelo

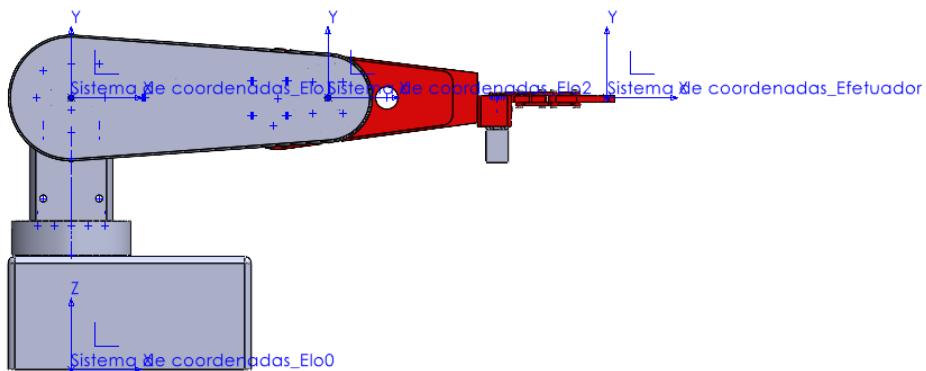


Figura 2.10: Vista lateral do modelo

¹Repositório no GitHub: https://github.com/wallace-matias/TCC_manipulador

Tabela 2.3: Parâmetros de massa e inércia dos elos do braço

Componente	Massa [Kg]	Momentos de Inércia [kgm ²]					
		I _{xx}	I _{yy}	I _{zz}	I _{xy}	I _{xz}	I _{zy}
Elo 0	3.259	0.156	0.155	0.010	0.001	0.012	0.016
Elo 1	0.754	0.001	0.012	0.013	0.000	0.001	0.000
Elo 2 (com Gripper)	0.582	0.002	0.007	0.005	0.000	0.000	0.000

2.3 Impressão

As impressões foram realizadas utilizando a Ultimaker², usando a tecnologia *Fused Deposition Modeling*(FDM) , empregando PLA³ no corpo das peças, material disponível no laboratório. Além disso, a escolha do material PLA oferece não apenas facilidades na impressão, como também uma opção ambientalmente amigável, uma vez que se deriva de materiais renováveis.

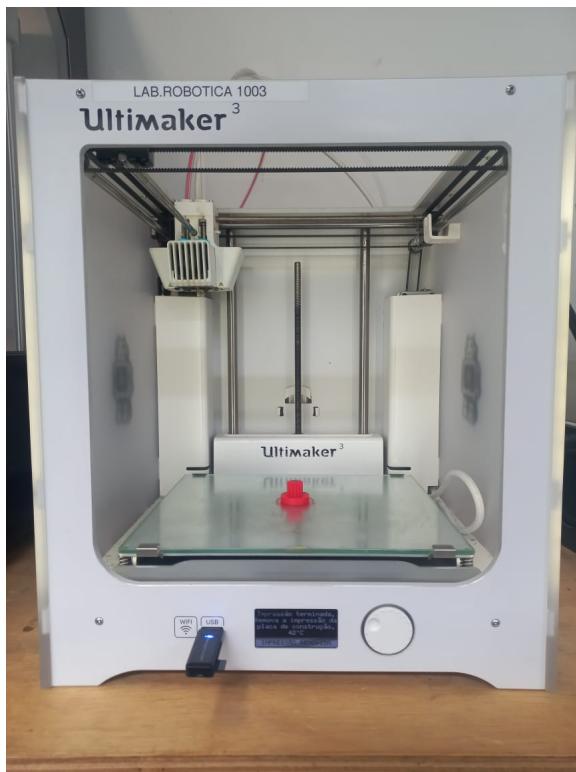


Figura 2.11: Impressora 3D Ultimaker 3

Para aprimorar a qualidade de impressão e o acabamento das peças, foram realizados testes, considerando a calibração da máquina e otimizando as configurações, como evidenciado na Tabela 2.4. A Figura 2.12 proporciona uma

²Impressora de tecnologia FDM da marca Ultimaker

³Filamento da marca PrintaLot. *Datasheet* se encontra no Apêndice A

visão interior de uma das peças durante o processo de fatiamento no software Cura. Nesse contexto, o infill, que se refere ao preenchimento interno da peça, desempenha um papel crucial na determinação da resistência e da leveza da estrutura final. A escolha da técnica de infill permite equilibrar a economia de material com a integridade estrutural da peça, sendo um aspecto fundamental na otimização da impressão 3D.

Tabela 2.4: Parâmetros de impressão

	Material	PLA
	Bico	0.4 mm
	Profile	Normal - 0.15 mm
Quality	Layer Height	0.15
Shell	Wall Thickness	1.2
	Wall Line Count	4
	Top/Bottom Thickness	1.2
	Top Thickness	1.2
	Top Layers	8
	Bottom Thickness	1.2
	Bottom Layers	8
	Horizontal Expansion	0
Infill	Infill Density (%)	30
	Infill Pattern	Cross 3D
Material	Printing Temperature (°C)	210
	Built Plate Temperature (°C)	60
Speed	Print Speed (mm/s)	60
Travel	Enable Retraction	On
	Z Hop When Retracted	On
Cooling	Enable Print Cooling	Off



Figura 2.12: Visão Detalhada do Preenchimento (Infill) em uma Impressão 3D

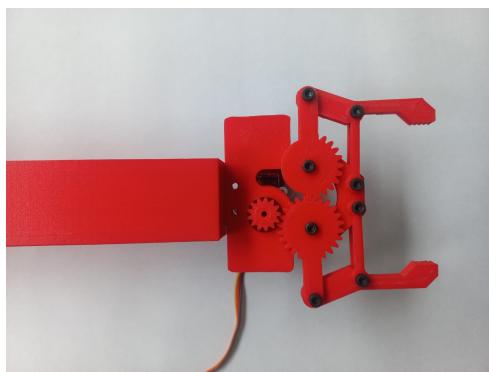
Após a conclusão dos testes, todas as etapas de impressão foram realizadas, incluindo a fabricação do corpo do Elo 2 e das peças que compõem as garras do manipulador. Posteriormente, foi necessário implementar um processo de pós-tratamento, visando à remoção de rebarbas e ajustes em furos decorrentes da expansão do material durante a impressão. Destaca-se que a otimização das configurações de impressão e a aplicação do pós-tratamento, contribuindo para aprimorar o acabamento das peças, desempenham papéis cruciais na fabricação de componentes mais precisos e funcionais para o manipulador robótico. Essa abordagem garante não apenas a precisão dimensional, mas também a qualidade estética e funcional das peças produzidas.

Para a montagem da garra, foram utilizadas porcas de parafusos, atuando como eixos de rotação entre cada peça. O funcionamento da garra é realizado por meio de um servo motor, o HK 15298B⁴, da HobbyKing. A engrenagem motora é fixada em uma placa de transferência que acompanha o kit do servo motor; entretanto, foi necessário confeccionar pinos por usinagem que se ajustam por interferência, além de ajustar a altura do parafuso, cortando-o, que conclui essa montagem. Este processo ilustra a importância de adaptações específicas para garantir a integridade e a funcionalidade da garra.

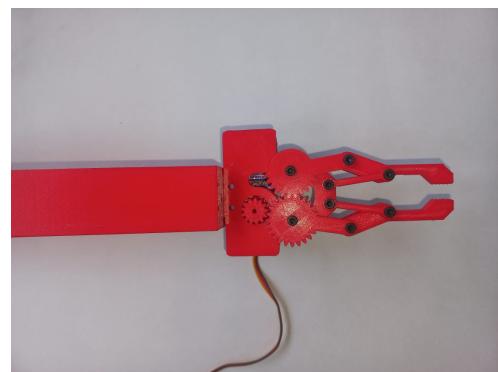
⁴Site do motor HK 15298B: [https://hobbyking.com/pt_pt/hobbykingtm-coreless-digital-hv-mg-bb-servo-11-5kg-0-17sec-66-4g.html?__store=pt_pt#qa\[bW9kZT03JnBhZ2U9MSZxdWVzdG1vb19zZWFnY2hfY29udGVudD0=\]](https://hobbyking.com/pt_pt/hobbykingtm-coreless-digital-hv-mg-bb-servo-11-5kg-0-17sec-66-4g.html?__store=pt_pt#qa[bW9kZT03JnBhZ2U9MSZxdWVzdG1vb19zZWFnY2hfY29udGVudD0=])



Figura 2.13: Impressão do Elo 2



2.14(a): Vista superior - Garra aberta



2.14(b): Vista superior - Garra fechada

Figura 2.14: Garra aberta e fechada



2.15(a): Componentes da engrenagem motora



2.15(b): Vista traseira

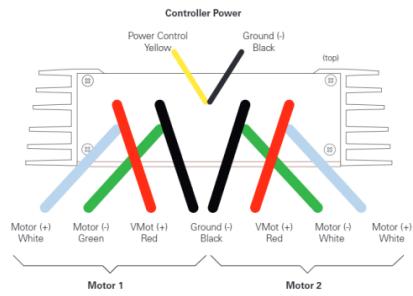
Figura 2.15: Fixação do Servo Motor e engrenagem motora

2.4 Eletrônica

Conforme mencionado anteriormente, o manipulador inicialmente não possuía componentes eletrônicos, apresentando apenas a presença de fios. Após uma análise preliminar dos motores e encoders presentes no robô, desenvolveu-se uma solução eletrônica adequada. Optou-se pelo uso do controlador da Rovateq, Figura 2.16, projetado para motores do tipo DC, reconhecido por oferecer recursos avançados de controle de velocidade e posição. Este controlador é amplamente empregado em diversas aplicações, como robótica móvel, veículos elétricos, automação industrial e sistemas de movimentação de câmeras.



2.16(a): Roboteq



2.16(b): Fiação do Roboteq

Figura 2.16: Roboteq e sua fiação

Para a leitura dos potenciômetros, escolheu-se o conversor ADC ADS1115, Figura 2.19, capaz de realizar leituras analógicas do sensor e converter esses sinais em formato digital. Além disso, o Raspberry Pi Pico, como representado na Figura 2.17, foi selecionado como o computador para processar os códigos de controle, os quais são escritos em Python e executados por meio do software Thonny. Um esquemático da conexão dos componentes eletrônicos para acionar um motor DC, presentes nas juntas, é apresentado na Figura 2.20.

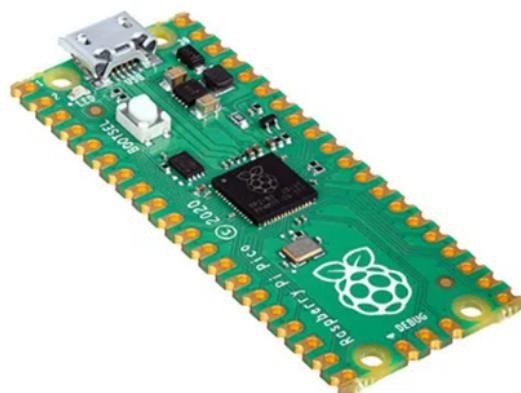


Figura 2.17: Raspberry Pi Pico

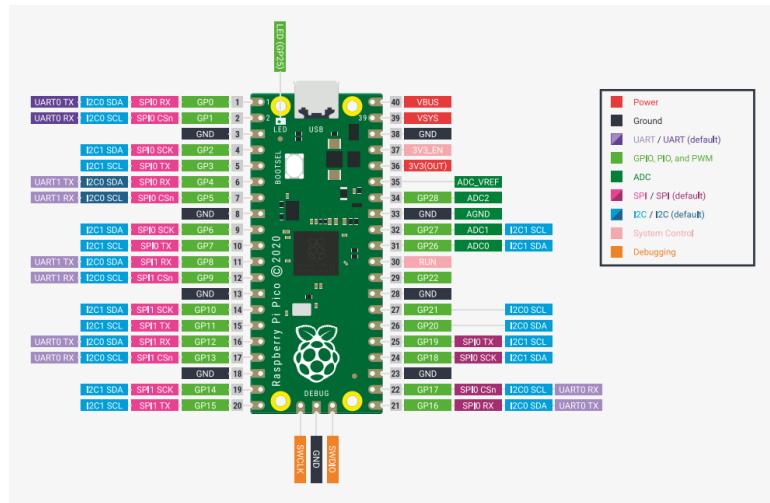
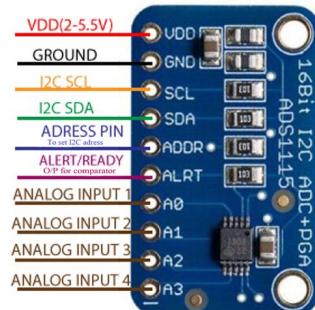


Figura 2.18: Pinagem - Raspberry Pi Pico



2.19(a): Conversor ADC



2.19(b): Pinagem do Conversor ADC

Figura 2.19: Conversor ADS1115 Module

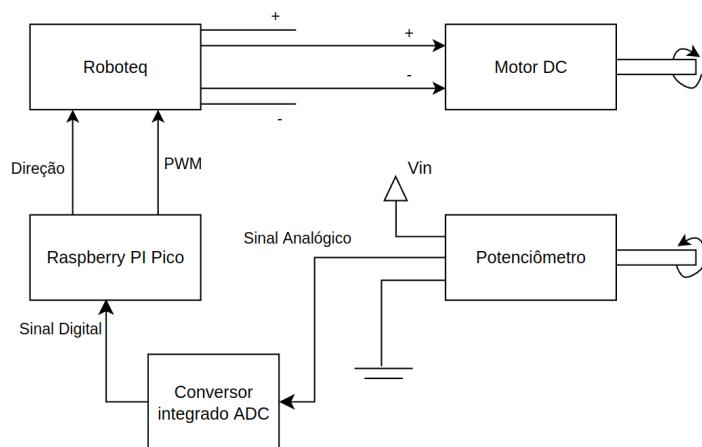


Figura 2.20: Esquemático da eletrônica para um funcionamento de um motor das juntas

Em relação à fiação, procedeu-se com a reutilização do que já estava na estrutura, reparando extremidades danificadas e ressoldando os componentes conforme necessidade. Quando necessário, realizou-se a substituição de fios, assegurando a integridade do sistema. Um exemplo do processo de ressoldagem é apresentado na Figura 2.21.



2.21(a): Pinos do potenciômetro



2.21(b): Fios soldada

Figura 2.21: Resoldagem - potenciômetro

3

Modelagem e Simulação

3.1

Modelagem cinemática

A modelagem cinemática compreende o manipulador em respeito a sua descrição geométrica, uma vez que desconsidera as forças e torque responsáveis por seus movimentos. Essa modelo se divide em duas partes distintas: cinemática direta e cinemática inversa. A primeira transforma os ângulos desejados em uma posição no espaço do manipulador. Por outro lado, cinemática inversa obtém os ângulos necessários dos elos nas juntas do robô para que seja alcançado a posição desejada para o *end effector*.

3.1.1

Cinemática Direta

A cinemática direta (CD) visa determinar a posição e orientação do *end effector*, mediante os ângulos de cada junta do manipulador. Para tal, a notação de *Denavit-Hartenberg*(DH) pode ser utilizado para representar esses componentes para cada elo do manipulador, fazendo uso de transformações homogêneas, vide Apêndice B.

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{CD} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

A representação de DH descrever a translação e rotação entre os eixos adjacentes das juntas, com um sistema de coordenadas fixos entre eles, vide Figura 3.1, usando um método matricial de matrizes de transformações homogêneas 4x4. Ela é uma ferramenta comumente utilizada para descrever a cinemática de sistemas mecânicos articulados com n graus de liberdade [18]. Os sistemas de coordenadas são formados mediante a 3 regras [14]:

- Eixo Z_{i-1} : colocado coincidente ao eixo de movimento da junta i ;
- Eixo X_i : colocado de modo normal ao eixo Z_{i-1} e ao eixo Z_i ;
- Eixo Y_i : colocado normal aos eixos anteriores, utilizando a regra da mão direta e completando o sistema ortonormado.

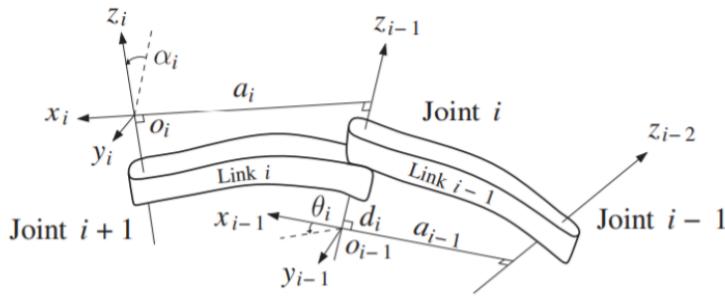


Figura 3.1: Definição dos parâmetros *Denavit-Hartenberg* em sistemas [19]

De acordo com a representação, os parâmetros de *Denavit-Hartenberg* são definidos da seguinte forma:

- θ_i = ângulo de articulação medido entre os eixos X_{i-1} e X_i sobre o eixo Z_{i-1} ;
- d_i = deslocamento entre a origem do sistema de coordenadas $i - 1$ ao interceder o eixo Z_{i-1} ;
- a_i = deslocamento entre o sistema de coordenadas i ao longo do X_i e a interseção com o eixo Z_{i-1} ;
- α_i = ângulo de torção medido sobre o eixo X_i , entre os eixos Z_{i-1} e Z_i .

Com isso, visto no Apêndice B, as matrizes de transformação contendo coordenadas homogêneas são obtidas através da seguinte matriz:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

Para esse manipulador, foi considerado esses parâmetros de DH:

Tabela 3.1: Parâmetros de DH

Junta	θ	d	a	α
1	θ_1	L_0	0	90°
2	θ_2	d_1	L_1	0
3	θ_2	d_2	L_2	0

Onde,

- $L_0 = 242,9 \text{ mm}$
- $L_1 = 230 \text{ mm}$
- $L_2 = 250 \text{ mm}$

- $d_1 = 53,45 \text{ mm}$
- $d_2 = -19,7 \text{ mm}$

Dito isso são obtidas a matrizes de cada elo, juntamente com a matriz de transformação final 0A_3 , formada pela multiplicação dos anteriores, que representa a posição e orientação do efetuador final.

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & L_1 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & L_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$${}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \quad (3-6)$$

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & [P_e]_{[3x1]} \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Onde, a posição (P_e) do *end effector*, considerando o modelo real, em função das posições das juntas é dada por:

$$P_{efetuador} = \begin{bmatrix} L_1 c_1 c_2 - d_2 s_1 - d_2 s_1 + L_2 c_1 c_2 c_3 - L_2 c_1 s_2 s_3 \\ d_1 c_1 + d_2 c_1 + L_1 c_2 s_1 + L_2 c_2 c_3 s_1 - L_2 c_1 s_2 s_3 \\ L_0 + L_1 s_2 + L_2 s_{23} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

Para simplificação foi utilizado:

- $c_i = \cos \theta_i$
- $s_i = \sin \theta_i$
- $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

Contudo, é considerado um modelo simplificado, a fim de viabilizar a modelagem cinemática inversa, desconsiderando os deslocamentos entre os eixos Z_i . Desse modo, é refeito os parâmetros de DH e as suas devidas matrizes homogêneas.

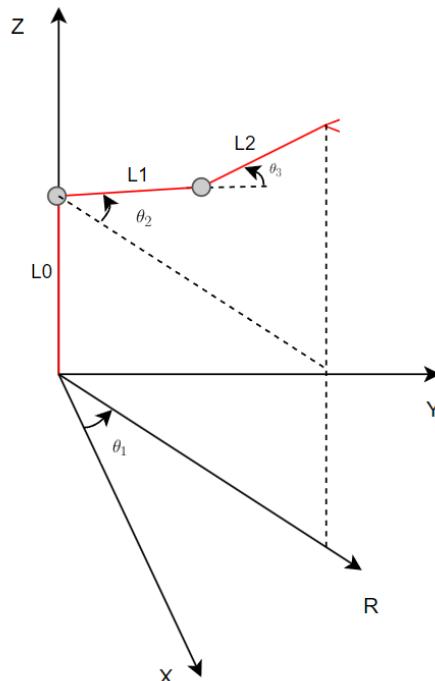


Figura 3.2: Esquemático simplificado do manipulador

$${}^0A_{s1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

$${}^1A_{s2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & L_1 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

$${}^2A_{s3} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & L_2 \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & L_2 \sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & [P_e]_{[3x1]} \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

Onde,

$$P_{efetuador,s} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)(L_1 \cos(\theta_2) + L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \sin(\theta_1)(L_1 \cos(\theta_2) + L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ L_0 + L_1 \sin(\theta_2) + L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

3.1.2

Cinemática Inversa

A cinemática inversa visa resolver o problema do robô equacionando-o de modo a receber as coordenadas de posição $[P_x, P_y, P_z]$ e a orientação (γ) definida do *end effector* e produzir como saída os ângulos das juntas.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \xrightarrow{CI} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

Uma abordagem simples para abordar o problema da cinemática inversa do robô é através do método geométrico [19]. O modelo simplificado do manipulador, conforme visto na Figura 3.2, pode ser analisado em dois planos, representados nas Figuras 3.3. O plano YX é utilizado para determinar θ_1 , enquanto o plano ZR é empregado para calcular os ângulos θ_2 e θ_3 . No caso deste último, a literatura pode ser consultada para obter as equações relacionadas à cinemática inversa de um manipulador planar de dois graus de liberdade [14], exemplificado na Figura 3.4.

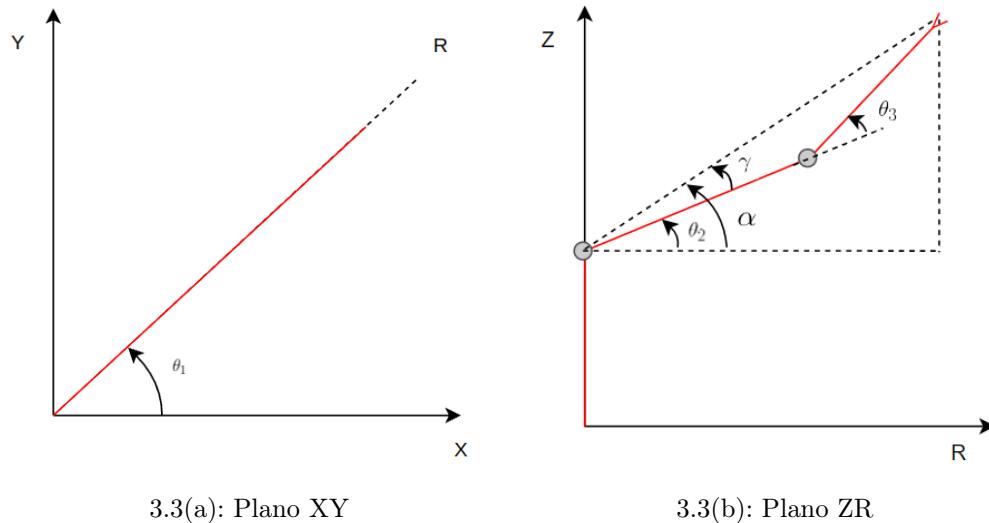


Figura 3.3: Representação do modelo simplificado

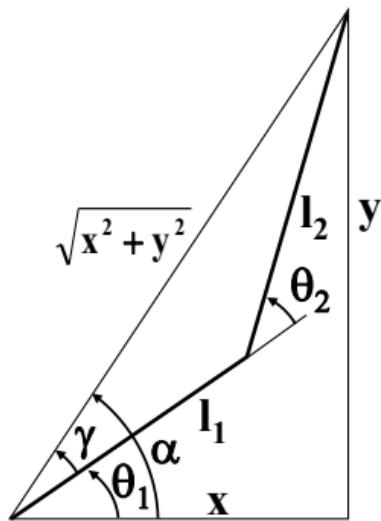


Figura 3.4: Exemplo empregado na modelagem da cinemática inversa para um manipulador com 2 graus de liberdade [14]

A partir disso, são obtidos as seguintes equações para o manipulador simplificado. Pelo plano XY, se obtém:

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{Y}{X} \right) \quad (3-15)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (3-16)$$

Em relação ao plano ZR, por meio das leis dos cossenos, chega-se em:

$$L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos(\theta_3) = (Z - L_0)^2 + R^2 \quad (3-17)$$

Uma vez isto definido, é obtido o θ_3 .

$$\cos(\theta_3) = \frac{(Z - L_0)^2 + R^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \quad (3-18)$$

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{(Z - L_0)^2 + R^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}\right) \quad (3-19)$$

Após isso, é obtido os demais equacionamentos.

$$\cos(\gamma) = \frac{(Z - L_0)^2 + R^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{(Z - L_0)^2 + R^2}} \quad (3-20)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{(Z - L_0)^2 + R^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{(Z - L_0)^2 + R^2}}\right) \quad (3-21)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R}{Z - L_0}\right) \quad (3-22)$$

$$\theta_2 = \alpha - \gamma \quad (3-23)$$

3.2 Singularidade

Quando se aborda a modelagem e controle de um manipulador real, torna-se crucial considerar os desafios físicos que introduzem restrições mecânicas reais. Garantir que os resultados desejados correspondam a configurações reais de deslocamento é fundamental nesse contexto. O termo "singularidades" é empregado para descrever situações em que tais desafios físicos se manifestam nos manipuladores robóticos, gerando restrições de movimento em um ou mais direções. Essas singularidades frequentemente ocorrem quando o manipulador transita de uma configuração totalmente esticada para um movimento subsequente, gerando complicações.

No contexto do modelo cinemático, a presença de singularidades é indicada quando o determinante da matriz jacobiana se torna zero.

$$\det(J) = 0 \quad (3-24)$$

Onde

$$\begin{aligned} \det(J) = & J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{21}J_{32} - \\ & -(J_{13}J_{22}J_{31} + J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{31}) \end{aligned} \quad (3-25)$$

A matriz jacobiana é formada pelas derivadas parciais das posições do efetuador final em relação aos ângulos das juntas, obtidas por meio da cinemática direta e apresentadas em $P_{efetuador,s}$. Essa matriz, Equação 3-26, representa a relação infinitesimal entre os deslocamentos das juntas e a localização do efetuador final para uma configuração específica do manipulador. Por definição, a Jacobiana é sempre definida, Equação 3-27, uma vez que a cinemática direta proporciona isso, não sendo válido em relação a Jacobiana inversa.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

$$\dot{p} = J\dot{q} \quad (3-27)$$

Em relação ao comportamento do manipulador, a ocorrência de singularidades pode resultar em alterações significativas nos ângulos das juntas, levando a movimentos descontrolados e bruscos. É importante notar que, geralmente, as singularidades [16] podem representar um desafio na solução da cinemática inversa, especialmente em métodos que utilizam a pseudo-inversa da matriz jacobiana. Entretanto, vale destacar que este não é o caso no âmbito deste projeto, uma vez que foi utilizado uma metodologia geométrica.

3.3

Modelagem Dinâmica

A modelagem dinâmica tem como objetivo estabelecer uma relação entre o torque e forças aplicadas no sistema com as variações de movimentos em cada elo. A dinâmica direta busca determinar as variações de movimento (posição, velocidade e aceleração) a partir das forças e momentos conhecidas, enquanto a dinâmica indireta realiza o equacionamento oposto, buscando obter os torques nas juntas.

No contexto deste projeto, não foi necessário obter todos os equacionamentos, uma vez que foram utilizadas funções específicas da Toolbox do Peter Corke. Esta abordagem é mais detalhada no Capítulo 3.4, onde, por meio da resolução de equações diferenciais, o sistema é solucionado para a dinâmica direta, uma vez dado o torque no controle.

No entanto, com o intuito de orientar possíveis investigações futuras, serão delineados os procedimentos para a modelagem dinâmica, optando-se pela abordagem indireta. Esta abordagem é particularmente útil no contexto do dimensionamento de motores, pois permite a determinação do torque necessário para o funcionamento do motor [13], especialmente em situações em que este não está previamente definido.

Neste projeto, não foi necessário realizar essa verificação, uma vez que foram utilizados os mesmos motores fornecidos pelo fabricante. Além disso, ocorreu uma redução no número de elos, resultando em uma diminuição de massa e, consequentemente, em um sistema superdimensionado. Entre os métodos disponíveis para essa escolha, destacam-se o método de Lagrange, o método de Newton-Euler e o método de Kane.

O método de Lagrange trabalha com as propriedades de energia potencial e cinética para descrever as equações de movimento do sistema. O método de

Newton-Euler é uma combinação das Leis de Newton (observando o sistema como partícula) e das leis de Euler (com princípios dinâmicos para corpos rígidos).

O primeiro, apesar de eliminar as forças que não realizam trabalho, entretanto torna o problema mais complexo devido a tratativa necessária para o cálculo diferencial das equações de energia. Já o segundo, trabalha a partir da utilização das forças de contato e de restrição atuantes no sistema, uma vez que essas forças são devidamente documentadas é possível chegar às equações de movimento. Contudo, o modelo cinemático do sistema só pode ser obtido por relações vetoriais. Por fim, há o método de Kane que há as vantagens dos modelos anteriores, desconsiderando as desvantagens [7].

De forma geral, o método de Kane possui ambas as vantagens dos métodos de Lagrange e de Newton-Euler. Há uma demanda computacional grande para resolver sistemas de equações de grandes dimensões, o que torna o método de Lagrange menos produtivo, além de que as forças de contato e restrição necessárias no método de Newton-Euler necessitam de uma tratativa maior caso tenham grandes valores, precisando diminuir os passos de integração a fim de evitar divergências na solução do sistema [7]. Dessa forma, é escolhido o método de Kane para a modelagem dinâmica.

O método de Kane adota uma abordagem que combina os modelos previamente apresentados, fundamentando-se no equilíbrio das forças generalizadas, ativas e inerciais, atuantes no sistema. A generalização, por meio da criação de coordenadas generalizadas que descrevem o estado de cada elo, é empregada para simplificar a derivação. Para essa modelagem, foi considerado apenas os dois últimos elos, retratados de forma planar no plano ZR. As equações de Kane são formuladas seguindo as etapas a seguir:

3.3.1

Definição das forças generalizadas

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (r = 1, \dots, M) \quad (3-28)$$

Onde F_r e F_r^* representam, respectivamente, as forças generalizadas externas e de inércia, e M representa a quantidade de graus de liberdade no sistema. Para calcular essas forças, é necessário primeiro conhecer as coordenadas e velocidades generalizadas, velocidades angulares e lineares (absolutas e parciais), acelerações angulares e lineares absolutas, bem como os momentos inercias do problema. O cálculo para essas forças são realizados a partir das seguintes equações:

$$F_r = \sum_{i=1}^n \left(m_i \alpha_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial u_i} + T_i \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial u_i} \right) \quad (3-29)$$

$$F_r^* = \sum_{i=1}^n \left(m_i a_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial u_i} + (I_i \alpha_i + \omega_i \times I_i \omega_i) \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial u_i} \right) \quad (3-30)$$

Onde,

- n = quantidade de corpos do sistema;
- m_i = massa do corpo i ;
- α_i = aceleração angular do centro de massa do corpo i ;
- T_i = momento resultando dos momentos externos atuantes no corpo i ;
- ω_i = velocidade angular do centro de massa do corpo i ;
- a_i = aceleração linear do centro de massa do corpo i ;
- v_i = velocidade linear do centro de massa do corpo i
- I_i = momento de Inércia do corpo i em relação ao seu eixo baricêntrico

3.3.2

Definição das coordenadas generalizadas

As coordenadas generalizadas são responsáveis por descrever o posicionamento e orientação dos corpos no sistema. A Figura 3.5 representa os dois últimos elos pertencentes ao robô, juntamente com seus parâmetros dinâmicos e centros de massa, além das coordenadas generalizadas e a direção dos sistemas de coordenadas das juntas.

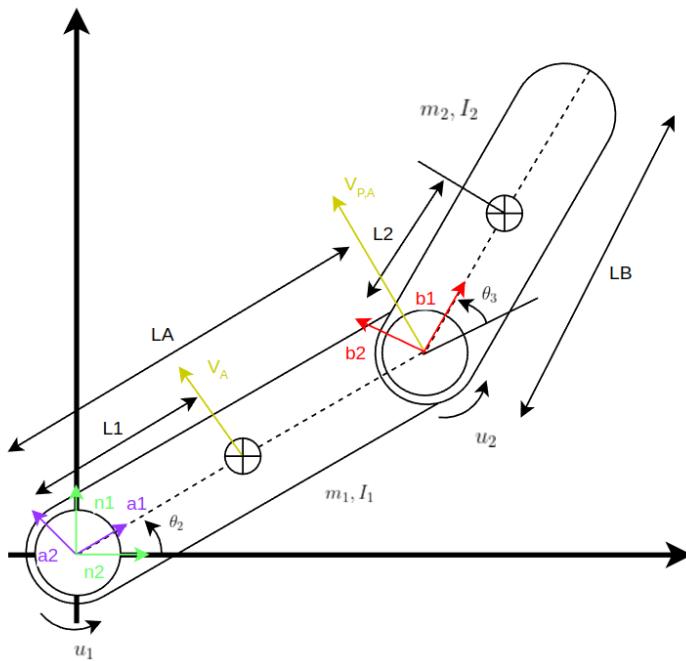


Figura 3.5: Esquemático simplificado do manipulador

Descrição das variáveis empregadas no problema:

- $Elo\ 1$ = segundo elo do manipulador;
- $Elo\ 2$ = terceiro elo do manipulador;
- A = centro de massa do Elo 1;
- B = centro de massa do Elo 2;
- L_1 = comprimento do segundo elo;
- L_2 = comprimento do terceiro elo;
- L_A = comprimento até o centro de massa do segundo elo;
- L_B = comprimento até o centro de massa do terceiro elo;
- m_1 = massa do segundo elo;
- m_2 = massa do terceiro elo;
- I_1 = momento de inércia do segundo elo;
- I_2 = momento de inércia do terceiro elo.

3.3.3

Definição das velocidades generalizadas

As velocidades generalizadas serão obtidas através da combinação linear das derivadas temporais, com as taxas de variação em relação ao tempo, das coordenadas generalizadas:

$$u_1 = \dot{q}_1 \quad (3-31)$$

$$u_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \Rightarrow \dot{q}_2 = u_2 - u_1 \quad (3-32)$$

3.3.4

Cálculo das velocidades angulares e lineares absolutas

As velocidades angulares e lineares absolutas, levando em consideração o sistema de coordenadas global, são calculadas da seguinte forma:

$$\omega_A = \dot{q}_1 \hat{a}_3 \quad (3-33)$$

$$\omega_B = \dot{q}_1 \hat{a}_3 + \dot{q}_2 \hat{b}_3 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \hat{b}_3 = u_2 \hat{b}_3 \quad (3-34)$$

$$v_A = L_1 u_1 \hat{a}_2 \quad (3-35)$$

$$\begin{aligned} v_B &= v_{P,A} + \omega_B \times r_{P,B} \\ &= L_A u_1 \hat{a}_2 + u_2 \hat{b}_3 \times L_2 \hat{b}_1 \\ &= L_A u_1 \hat{a}_2 + L_2 u_2 \hat{b}_2 \\ &= L_A u_1 (s_3 \hat{b}_1 + c_3 \hat{b}_2) + L_2 u_2 \hat{b}_2 \\ &= L_A u_1 s_3 \hat{b}_1 + (L_A u_1 c_3 + L_2 u_2) \hat{b}_2 \end{aligned} \quad (3-36)$$

3.3.5

Cálculo das velocidades angulares e lineares parciais

As velocidades parciais $(v_A)_r$ e $(v_B)_r$ representam as velocidades lineares dos centros de massa de cada elo nos próprios sistemas de coordenadas, que estão agrupados por velocidade generalizada. Da mesma forma, as velocidades $(\omega_A)_r$ e $(\omega_B)_r$ são as velocidades parciais angulares dos centros de massa de cada elo no próprios sistemas de coordenadas, também agrupadas por velocidade generalizada.

Tabela 3.2: Velocidades lineares e angulares parciais

-	$(\omega_A)_r$	$(\omega_B)_r$	$(v_A)_r$	$(v_B)_r$
$r = 1$	\hat{a}_3	0	$L_1 \hat{a}_2$	$L_A s_2 \hat{b}_1 + L_A c_2 \hat{b}_2$
$r = 2$	0	\hat{b}_3	0	$L_2 \hat{b}_2$

3.3.6

Cálculo das acelerações angulares e lineares absolutas

$$\alpha_A = u_1 \hat{a}_3 \quad (3-37)$$

$$\alpha_B = u_2 \hat{a}_3 \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{dv_A}{dt} + \omega_A \times v_A \\ &= \frac{d(L_1 u_1 \hat{a}_2)}{dt} (\dot{u}_1 \hat{a}_3) \times L_1 u_1 \hat{a}_2 \\ &= L_1 \dot{u}_1 \hat{a}_2 + L_1 u_1^2 \hat{a}_1 \end{aligned} \quad (3-39)$$

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{dv_B}{dt} + \omega_B \times v_B \\ &= (L_A \dot{u}_1 s_3 - L_A u_1^2 c_3 + L_2 u_2^2) \hat{b}_1 + (L_A \dot{u}_1 c_3 - L_A u_1^2 s_3 + L_2 \dot{u}_2) \hat{b}_2 \end{aligned} \quad (3-40)$$

3.3.7

Cálculo dos momentos inerciais

Os momentos inerciais T_A^* e T_B^* são calculados por meio da seguinte equação geral do momento, originada a partir da equação de Euler:

$$T_i = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times I_i \omega_i \quad (3-41)$$

Sabendo que o problema se encontra no caso planar, tem-se:

$$\omega_i \times I_i \omega_i = 0 \quad (3-42)$$

$$T_i^* = I_i \alpha_i \quad (3-43)$$

Logo:

$$T_A^* = -\dot{u}_1 I_A \hat{a}_3 \quad (3-44)$$

$$T_B^* = -\dot{u}_2 I_B \hat{b}_3 \quad (3-45)$$

3.3.8

Cálculo das forças inerciais

Calcula-se as forças inerciais:

$$\begin{aligned} (F_A^*)_1 &= -m_A a_A(v_A)_1 + T_A^*(\omega_A)_1 \\ &= -m_A (L_1 \dot{u}_1 \hat{a}_2 + L_1 u_1^2 \hat{a}_1) (L_1 \hat{a}_2) + (-\dot{u}_1 I_A \hat{a}_3) (\hat{a}_1) \\ &= -m_A L_1^2 \dot{u}_1 - I_A \dot{u}_1 \end{aligned} \quad (3-46)$$

$$(F_A^*)_2 = 0 \quad (3-47)$$

$$(F_A^*)_3 = 0 \quad (3-48)$$

$$\begin{aligned} (F_B^*)_1 &= -m_B a_B(v_B)_1 + T_B^*(\omega_B)_1 \\ &= -m_B L_A (L_A \dot{u}_1 - L_2 u_2^2 s_3 + L_2 \dot{u}_2 c_3) \end{aligned} \quad (3-49)$$

$$\begin{aligned} (F_B^*)_2 &= -m_B a_B(v_B)_2 + T_B^*(\omega_B)_2 \\ &= -m_B (L_A L_2 u_1^2 s_3 + L_A L_2 \dot{u}_2 c_3 + L_2^2 \dot{u}_2) - I_B \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (3-50)$$

$$(F_B^*)_3 = 0 \quad (3-51)$$

$$\begin{aligned} F_1^* &= (F_A^*)_1 + (F_B^*)_1 \\ &= -m_A L_1^2 \dot{u}_1 - I_A \dot{u}_1 - m_B (L_A L_2 u_1^2 s_3 + L_A L_2 \dot{u}_2 c_3 + L_2^2 \dot{u}_2) - I_B \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (3-52)$$

$$\begin{aligned} F_1^* &= (F_A^*)_1 + (F_B^*)_1 \\ &= -m_A L_1^2 \dot{u}_1 - I_A \dot{u}_1 - m_B (L_A L_2 u_1^2 s_3 + L_A L_2 \dot{u}_2 c_3 + L_2^2 \dot{u}_2) - I_B \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (3-53)$$

$$\begin{aligned} F_2^* &= (F_A^*)_2 + (F_B^*)_2 \\ &= -m_B (L_A L_2 u_1^2 s_3 + L_A L_2 \dot{u}_2 c_3 + L_2^2 \dot{u}_2) - I_B \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (3-54)$$

3.3.9

Cálculo das forças ativas e dos momentos ativos nos elos

As forças ativas referem-se às forças externas que atuam de maneira planar em relação aos pesos dos dois elos, com relação à base do sistema. O cálculo dessas forças pode ser realizado da seguinte forma:

$$F_A = -m_A g \hat{n}_2 \quad (3-55)$$

$$T_A = \tau_1 \hat{a}_3 - \tau_2 \hat{b}_3 \quad (3-56)$$

$$F_B = -m_B g \hat{n}_2 \quad (3-57)$$

$$T_B = \tau_2 \hat{b}_3 \quad (3-58)$$

3.3.10

Cálculo das forças ativas generalizadas

Para calcular as forças ativas generalizadas, utilizando as forças iner- ciais calculadas conforme apresentado no Capítulo 3.3.8, prossegue-se com o seguinte cálculo:

$$F_1 = F_A + (v_A)_1 + T_A(\omega_A)_1 + F_B(v_B)_1 + T_B(\omega_B)_1 \quad (3-59)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= -m_A g \hat{n}_2 (L_1 (-s_2 \hat{n}_1 + c_2 \hat{n}_2)) + (\tau_1 \hat{a}_3 - \tau_2 \hat{b}_3) \hat{n}_3 - \\ &- m_B g \hat{n}_2 (L_A s_3 (c_{23} \hat{n}_1 + s_{23} \hat{n}_2) + L_A c_3 (-s_{23} \hat{n}_1 + c_{23} \hat{n}_2)) \end{aligned} \quad (3-60)$$

$$F_1 = -m_A g c_2 L_1 + \tau_1 - \tau_2 - m_B g (L_A s_3 s_{23} + L_A c_3 c_{23}) \quad (3-61)$$

$$F_2 = F_A(V_A)_2 + T_A(\omega_A)_2 + F_B(V_B)_2 + T_B(\omega_B)_2 \quad (3-62)$$

$$F_2 = -m_B g \hat{n}_2 (L_2 (-s_{23} \hat{n}_1 + c_{23} \hat{n}_2)) + \tau_2 \hat{b}_3 \hat{b}_3 \quad (3-63)$$

$$F_2 = -m_B g L_2 c_{23} + \tau_2 \quad (3-64)$$

3.3.11

Cálculo dos torques

A última etapa do método de Kane envolve o cálculo dos torques por meio das equações:

$$\begin{aligned} F_1 + F_1^* &= -m_A g c_2 L_1 + \tau_1 - \tau_2 - m_B g (L_A s_3 s_{23} + L_A c_3 c_{23}) - \\ &- m_A L_1^2 \dot{u}_1 - I_A \dot{u}_1 - m_B (L_A s_3 (L_A \dot{u}_1 c_3 + L_2 \dot{u}_2 + L_A u_2 u_1 s_3) \\ &+ L_A c_3 (L_A \dot{u}_1 s_3 - L_A u_1 u_2 c_3 - L_2 u_2^2)) \\ F_1 + F_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (3-65)$$

$$\begin{aligned} F_2 + F_2^* &= -m_B g L_2 c_{23} + \tau_2 - m_B L_2 (L_A \dot{u}_1 c_3 + L_2 \dot{u}_2 + L_A u_2 u_1 s_3) - I_B \dot{u}_2 \\ F_2 + F_2^* &= 0 \end{aligned} \quad (3-66)$$

Com isso, podemos chegar nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= m_B g L_2 c_{23} + m_B L_2 (L_A \dot{u}_1 c_3 + L_2 \dot{u}_2 + L_A u_2 u_1 s_3) - I_B \dot{u}_2 \\ &= m_B L_2 (g c_{23} + L_A \dot{u}_1 c_3 + L_2 \dot{u}_2 + L_A u_2 u_1 s_3) - I_B \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (3-67)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_A g c_2 L_1 + m_B L_2 (g c_{23} + L_A \dot{u}_1 c_3 + L_2 \dot{u}_2 + L_A u_2 u_1 s_3) - \\ &- I_B \dot{u}_2 + m_B g (L_A s_3 s_{23} + L_A c_3 c_{23}) + m_A L_1^2 \dot{u}_1 \\ &+ I_1 \dot{u}_1 + m_B (L_A s_3 (L_A \dot{u}_1 c_3 + L_2 \dot{u}_2 + L_A u_2 u_1 s_3) - \\ &- L_A c_3 (L_A \dot{u}_1 s_3 - L_A u_1 u_2 c_3 - L_2 u_2^2)) \end{aligned} \quad (3-68)$$

3.4

Simulação

A simulação do funcionamento do manipulador é essencial para obter uma compreensão aprimorada do modelo físico, garantindo um desempenho otimizado no ambiente de trabalho, considerando os movimentos possíveis com os grau de liberdade, respeitando suas limitações. A simulação é realizada no ambiente MATLAB, utilizando a "ROBOTICS TOOLBOX" desenvolvida por Peter Corke.

A seguir, são apresentadas algumas funções mais cruciais¹, provenientes da biblioteca Peter Corke, juntamente com os parâmetros que recebem e suas aplicações para o projeto:

- **Link** (tipo da junta, parâmetros DH, limites das juntas): Define cada elo, especificando o tipo, os limites das juntas e os parâmetros

¹Um manual abrangente de todas as funções disponíveis na biblioteca pode ser encontrado em: <https://www.petercorke.com/RTB/r9/html/SerialLink.html>

dinâmicos.

- **SerialLink (elos, nome do robô)**: Estabelece o robô com base nos elos e juntas fornecidos.
- **robot.fkine (robô, posição das juntas)**: Calcula a cinemática direta do robô, ou seja, determina a posição do efetuador final com base na configuração das juntas.
- **robot.teach**: Permite a visualização do robô e a modificação em tempo real dos ângulos de cada junta.
- **L(i).r**: Define o centro de massa do elo i.
- **L(i).m**: Estabelece a massa do elo i.
- **L(i).I**: Determina o momento de inércia do elo i.
- **jtraj (ponto1, ponto2, duração)**: Interpola uma trajetória para os ângulos das juntas entre dois pontos num intervalo de tempo. A saída é um vetor que contém posições, velocidades e acelerações das juntas, considerando os parâmetros iniciais do sistema.
- **accel(posição das juntas, derivada, torque)**: Fornece aceleração das juntas, considerando os parâmetros iniciais do sistema.
- **fdyn(duração, torque, posição inicial)**: Calcula a dinâmica direta, integrando a dinâmica do robô ao longo do intervalo de tempo e retorna os angulos das juntas e as velocidades.

Para iniciar a simulação, o primeiro passo, após a construção do manipulador no MATLAB, é a definição das limitações impostas ao sistema, estabelecendo suas movimentações de modo a evitar trajetórias que possam resultar em colisões entre os próprios elos. A toolbox é utilizada para uma visualização mais detalhada do modelo, com as mudanças de ângulos possíveis, conforme ilustrado na Figura 3.6, a fim de estabelecer os limites das juntas a serem considerados, conforme apresentado na Tabela 3.3.

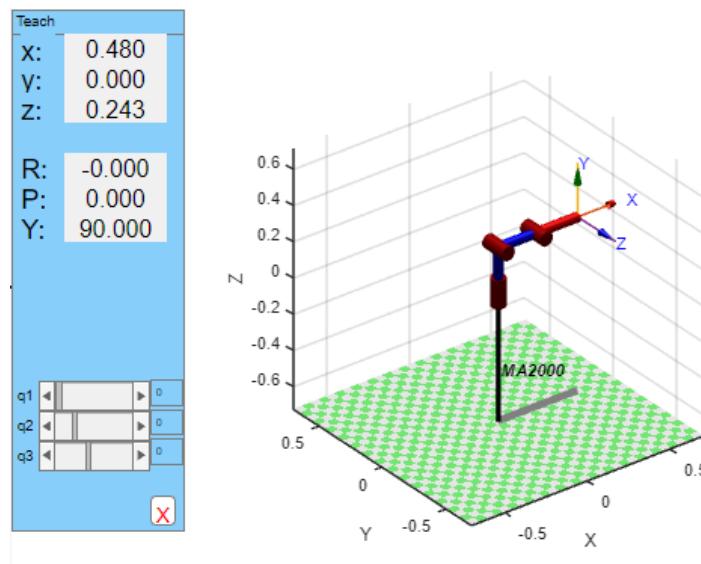


Figura 3.6: Vizualização no Matlab, usando a Toolbox

Tabela 3.3: Limites das juntas [graus]

	Mínimo [graus]	Máximo [graus]
Junta 1	0°	240°
Junta 2	-45°	150°
Junta 3	-pi/2	pi/2

Dessa forma, a área de trabalho do manipulador é definida. Na Figura 3.7, apresenta-se a área de trabalho máxima do manipulador, considerando os limites impostos. Essa área é configurada como um fragmento de uma esfera, com o raio igual à soma dos elos 1 e 2, e a origem na junta 2.

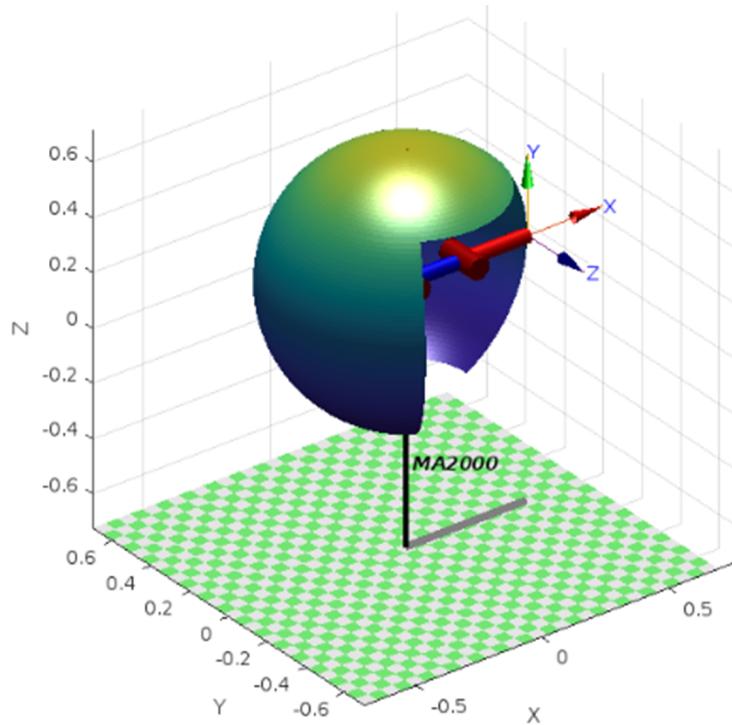


Figura 3.7: Área de trabalho máxima

Com a área de trabalho definida, são escolhidas trajetórias para realizar as simulações, contemplando três trajetórias distintas. A primeira mantém fixa a angulação do último elo, a segunda fixa o primeiro elo, e a terceira permite a movimentação de todos os elos. Dessa maneira, é possível observar o comportamento em diferentes cenários. As trajetórias são formadas utilizando a função `jtraj` da biblioteca e, posteriormente, é realizado um teste para verificar se há singularidades no caminho, calculando a determinante da jacobiana dos pontos obtidos. Com base nisso, são definidos os melhores pontos a serem usados, conforme apresentado na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Pontos para criação da trajetória [graus]

Trajetória	Ponto Inicial	Ponto Final
1	[0°, 30°, 10°]	[30°, 100°, 10°]
2	[10°, 30°, 10°]	[10°, 90°, 60°]
3	[20°, 40°, 10°]	[50°, 100°, 45°]

3.4.1

Controle do manipulador - PID / PD

Os controladores PID desempenham um papel essencial na indústria, com uma presença marcante em cerca de 90 a 95% de todas as aplicações de controle automático, conforme evidenciado no Borase (2021) [3]. Esses controladores envolvem um laço de realimentação que incorpora a lei de um compensador PID.

O controlador PID, abreviação para Proporcional-Integral-Derivativo, é uma estrutura que combina três componentes principais: o termo proporcional (P), o termo integrador (I) e o termo derivativo (D). Cada um desses termos desempenha um papel específico na resposta e no desempenho do sistema controlado. A formulação matemática deste controlador é dada pela seguinte equação:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3-69)$$

Nesta equação, $u(t)$ representa o sinal de controle, $e(t)$ é o sinal de erro no domínio do tempo, sendo a diferença entre o valor desejado (referência) e o valor real (*feedback*). O erro $e(t)$ é associado a um ganho, que, por sua vez, está relacionado às parcelas proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativa (K_d) do controlador. O ganho é um valor numérico que determina o quanto cada parcela contribui para a resposta do sinal de controle, definindo como o controlador responde ao estado do sistema.

O termo proporcional contribui de forma direta à magnitude do sinal de controle proporcional ao erro, no tempo presente da ação, amplificando. Apesar de ajudar a diminuir o erro de forma rápida, pode resultar em oscilações e *overshoot* (a ultrapassagem do sinal de referência).

O termo integrador leva em consideração a acumulação do erro ao longo do tempo, visando corrigir erros no regime permanente, sendo a longo prazo. Este pode reduzir perturbações constantes do sistema.

O termo derivativo considera a taxa de variação do erro, prevendo a tendência futura do erro. Dessa forma, consegue estabilizar o sistema dentro do regime transiente, podendo evitar problemas mencionados no uso do controlador proporcional. Contudo, pode amplificar erros e é sensível a perturbações rápidas.

De modo geral, essa combinação permite que o controlador PID ajuste dinamicamente seu comportamento para proporcionar uma resposta eficiente e estável em uma ampla variedade de sistemas dinâmicos.

Neste projeto, entretanto, será implementada uma modificação do controle PID, excluindo a parte integradora. A escolha de omitir a componente

integrativa é motivada pela estrutura imprecisa do manipulador em questão. A presença de folgas no sistema resultaria em uma acumulação significativa de erros, tornando o termo integrador impraticável para o funcionamento eficiente do manipulador.

Dessa forma, ao considerar apenas as parcelas proporcionais e derivativas, obtém-se a resposta do controle, que se manifesta como o torque gerado em cada junta. Assim, o controlador ajusta o torque no sistema de acordo com a trajetória desejada, utilizando informações sobre a diferença entre a posição atual e a posição desejada (controle proporcional) e a taxa de variação dessa diferença (controle derivativo). Essa abordagem visa melhorar a estabilidade e a precisão do sistema, proporcionando uma resposta eficiente às alterações na trajetória desejada.

$$\tau = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3-70)$$

4

Resultados

Quanto à montagem do manipulador, procedeu-se à integração das peças impressas em PLA, resultando no modelo montado, conforme apresentado na Figura 4.1. Entretanto, a incorporação da eletrônica desenvolvida ainda não foi totalmente concluída. Todo o material necessário encontra-se disponível no Laboratório de Robótica (LabRob), assim como a eletrônica parcialmente montada. A montagem final da eletrônica não foi realizada devido ao prazo estabelecido para a implementação do controle, impedindo a realização de testes práticos em conformidade com as simulações previamente conduzidas, as quais serão discutidas em breve.



4.1(a): Vista do manipulador



4.1(b): Vista do manipulador

Figura 4.1: Manipulador montado sem a eletrônica

Apesar da eletrônica não estar completamente implementada, foram realizados testes de bancada para verificar a funcionalidade da estrutura desenvolvida e fabricada. Nos testes, o foco foi na avaliação da garra, uma

vez que esta foi totalmente projetada e impressa. Após a montagem da garra, foram conduzidos testes de funcionamento. Estes envolveram a execução do código desenvolvido em Python, utilizando o software Thonny, no Raspberry Pi Pico. Um protoboard foi utilizado para facilitar a conexão dos terminais, alimentado por uma fonte. O sucesso foi alcançado na operação, demonstrando que a garra é capaz de abrir e fechar conforme o esperado.

No repositório¹ aberto deste projeto, é possível encontrar os códigos utilizados na implementação, tanto para testes quanto para simulações, além das modelagens CAD.

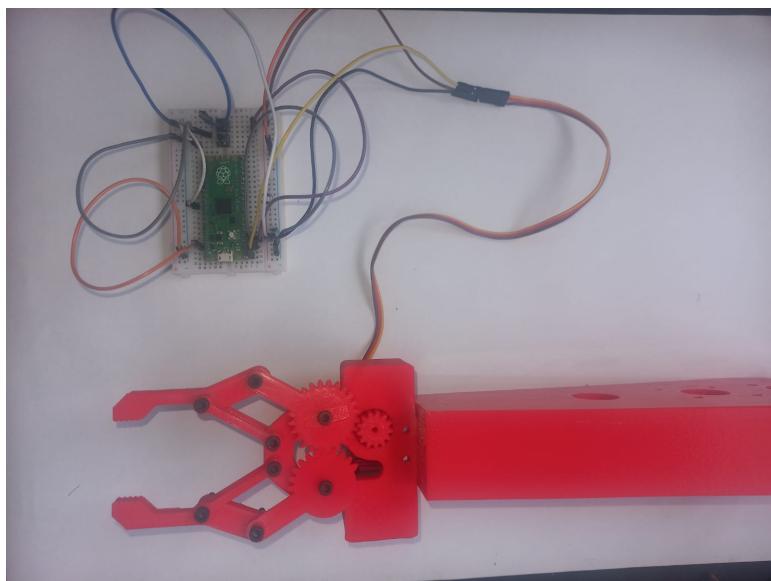


Figura 4.2: Teste de funcionamento da garra impressa

4.1 Resultado do controle de posição

Como mencionado anteriormente, para conduzir as simulações de controle de posição, inicialmente foram identificados pontos fora da singularidade, utilizando o cálculo das jacobianas conforme apresentado no Capítulo 3.2. A escolha desses pontos foi feita de maneira arbitrária e está apresentada na Tabela 3.4. Para facilitar a observação dos gráficos e devido ao funcionamento numérico da toolbox, esses pontos foram convertidos para radianos, com precisão de 3 casas decimais, como demonstrado na Tabela 4.1. A trajetória foi projetada para ser percorrida em 5 segundos.

Vale ressaltar que o manipulador, conforme apresentado na Figura 3.6, encontra-se em singularidade, tornando-o inadequado para ser utilizado como ponto inicial ou final da trajetória.

¹Repositório no GitHub:https://github.com/wallace-matias/TCC_manipulador

Tabela 4.1: Pontos para criação da trajetória [rad]

Trajetória	Ponto Inicial	Ponto Final
1	[0, 0.524, 0.175]	[0.524, 1.745, 0.175]
2	[0.175, 0.524, 0.175]	[0.175, 1.571, 1.047]
3	[0.349, 0.698, 0.175]	[0.872, 1.745, 0.785]

Para iniciar as simulações, a trajetória 1, conforme mostrado na Figura 4.3, é analisada a fim de realizar testes para os valores de ganhos a serem adotados no modelo, aplicadas as outras trajetórias. Esses testes são cruciais para avaliar o comportamento do manipulador em relação aos valores adotados e fazer os ajustes necessários para obter as respostas desejadas. Pode-se adotar valores de ganho, tanto proporcional quanto derivativo, para cada junta analisada, resultando em 6 ganhos distintos. No entanto, para simplificar a análise, são adotados ganhos comuns para todas as juntas, sendo um valor para o proporcional e outro para o derivativo.

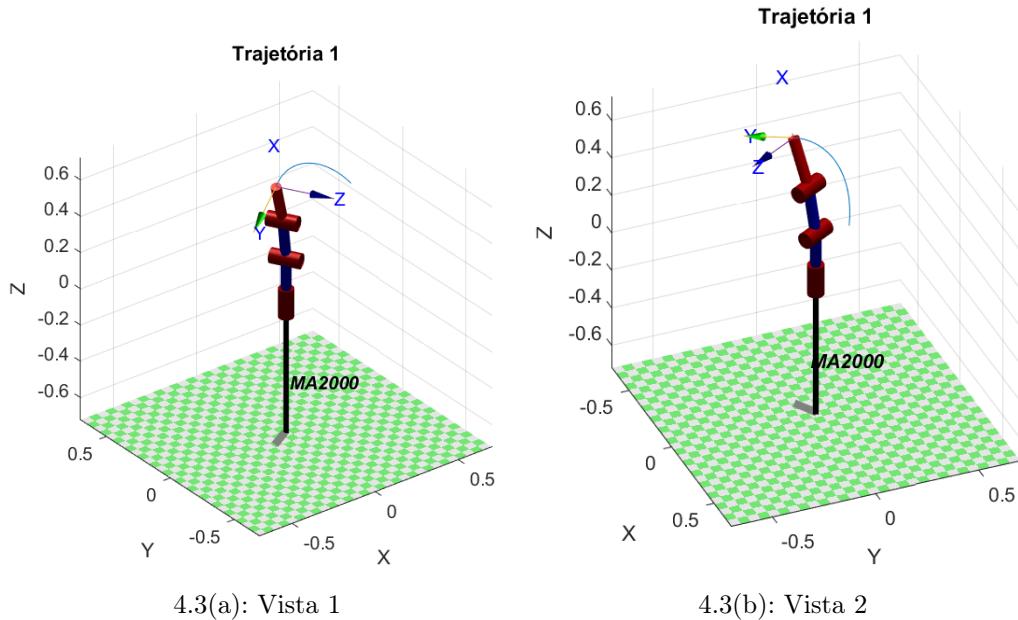
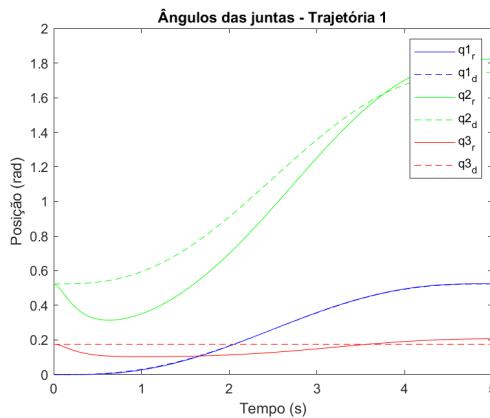


Figura 4.3: Visualização da Trajetória 1

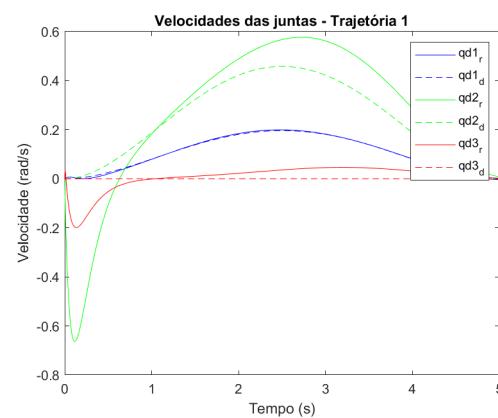
Com isso, são iniciadas as simulações considerando arbitrariamente o ganho proporcional $K_p = 20$ e o derivativo $K_d = 5$. Observa-se na Figura 4.4 que, com exceção da primeira junta, os resultados não estão acoplados ao desejado, apresentando oscilações na resposta e erro considerável tanto na posição quanto na velocidade. Devido à configuração de massa do modelo, o elo 0, que compõe o maior acúmulo de massa e gira na base fixa, sofre menor influência das movimentações do manipulador, o que pode explicar uma

resposta já acoplada ao desejado. Em contrapartida, os demais elos sofrem mais com os momentos de inércia durante a movimentação, resultando em maiores erros.

Dessa forma, são aumentados os ganhos para diminuir esses erros. A Figura 4.5 mostra o resultado ao aumentar apenas o K_p para 50, demonstrando uma melhoria nos resultados com a diminuição do erro durante a trajetória, mas ainda desacoplado do desejado. Além disso, observa-se que a velocidade da segunda junta começa a oscilar mais, apesar da diminuição do desacoplamento inicial.

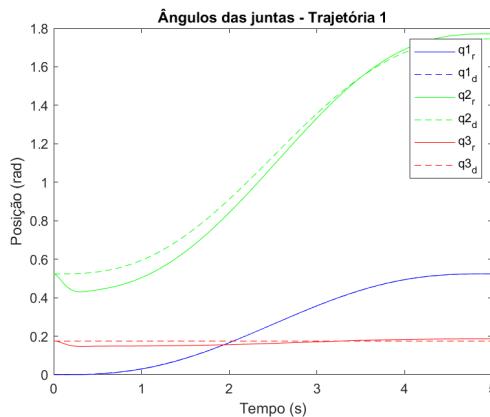


4.4(a): Posição angular das juntas

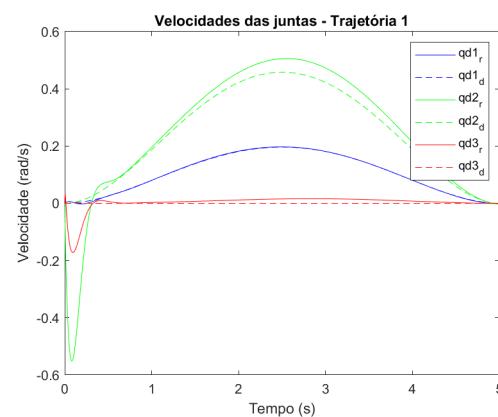


4.4(b): Velocidade das juntas

Figura 4.4: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 20; Derivativo = 5



4.5(a): Posição angular das juntas

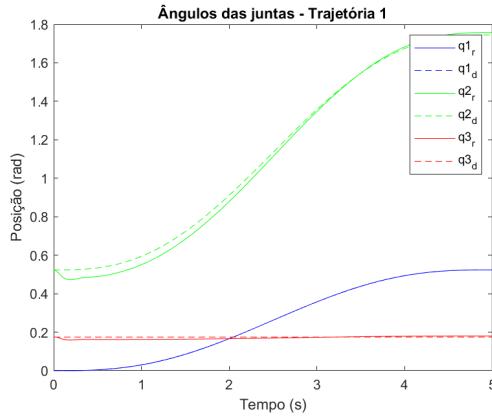


4.5(b): Velocidade das juntas

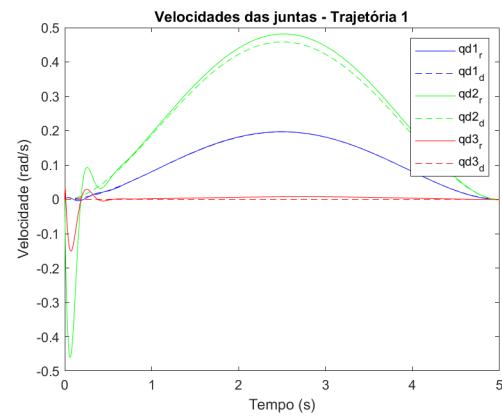
Figura 4.5: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 50; Derivativo = 5

Ao adotar $K_p = 100$ e o $K_d = 5$, com aumento novamente apenas no K_p , observa-se na Figura 4.6 que o erro diminuiu, mas a oscilação no gráfico da velocidade aumenta. Desse modo, é realizado uma simulação aumentando o K_p para 20, vide Figura 4.7. Além de diminuir o desacoplamento inicial,

houve melhora significativa na oscilação, demonstrando que o papel do K_p , como discutido anteriormente. Assim, na Figura 4.8 é mostrado a resposta considerando aumentos em ambos os ganhos, com $K_p = 200$ e $K_d = 30$. São observadas melhorias significativas nos resultados. A fim de aprimorá-los, são aumentados ambos novamente.

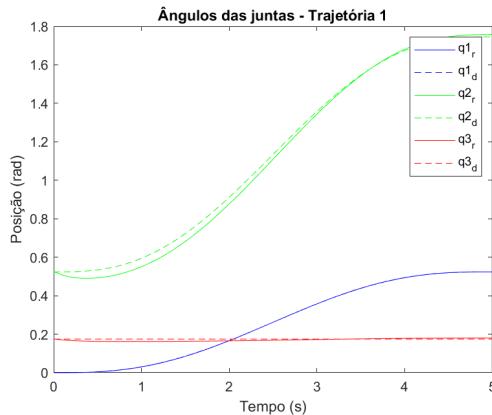


4.6(a): Posição angular das juntas

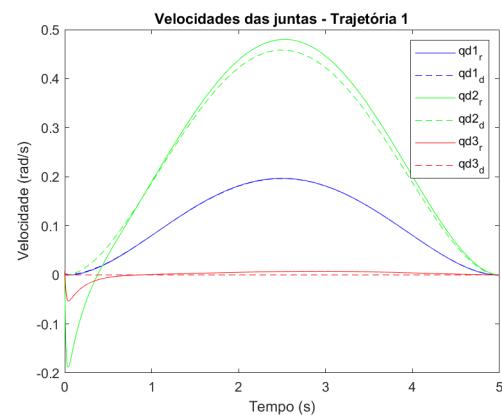


4.6(b): Velocidade das juntas

Figura 4.6: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 100; Derivativo = 5

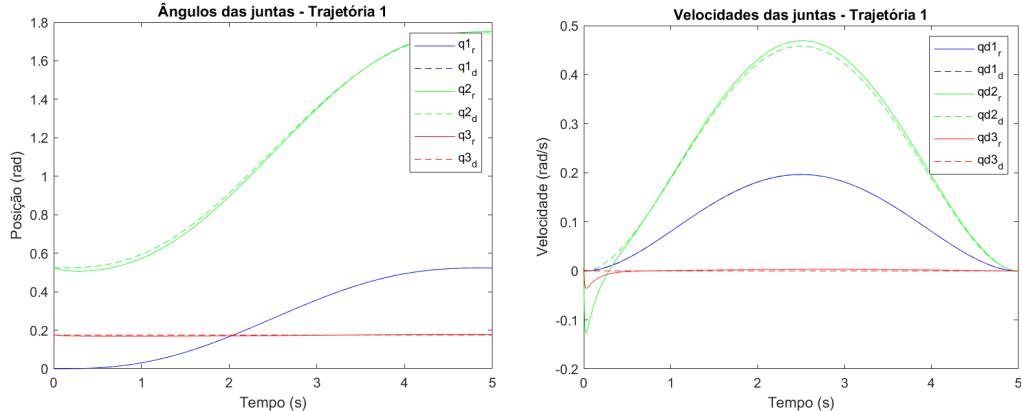


4.7(a): Posição angular das juntas



4.7(b): Velocidade das juntas

Figura 4.7: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 100; Derivativo = 20

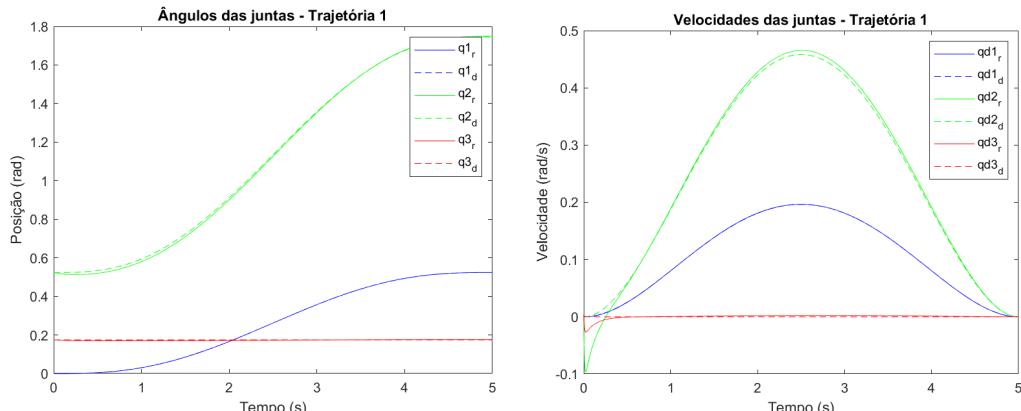


4.8(a): Posição angular das juntas

4.8(b): Velocidade das juntas

Figura 4.8: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 200; Derivativo = 30

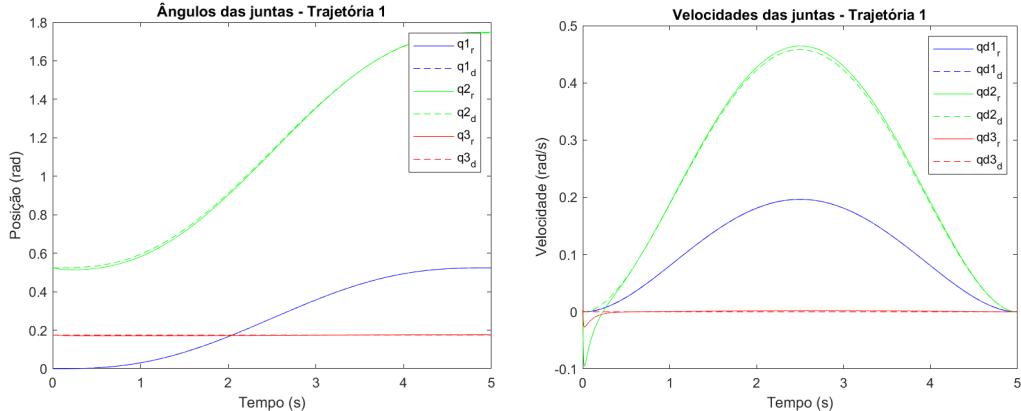
Ao adotar $K_p = 300$ e o $K_d = 40$, vide Figura 4.9, considerando o aumento dos dois ganhos, foram obtidas repostas melhores, mas não significativamente melhores. Aumentando o ganho novamente, para $K_p = 350$, vide Figura 4.10, os resultados são muito similares aos anteriores. Desse modo, o aumento dos ganhos não demonstra mais um impacto tão significativo nas respostas. Considerando que os ganhos finais adotados se mostraram suficientes para o acoplamento da resposta real a resposta desejada, são considerados eles para a verificação do controle para as demais trajetórias.



4.9(a): Posição angular das juntas

4.9(b): Velocidade das juntas

Figura 4.9: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 300; Derivativo = 40



4.10(a): Posição angular das juntas

4.10(b): Velocidade das juntas

Figura 4.10: Simulação da Trajetória 1 - Proporcional = 350; Derivativo = 40

As trajetórias 2 e 3, apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.13, respectivamente, constituem-se como cenários adicionais para análise do controle de posição. As simulações correspondentes, exibidas nas Figuras 4.12 e 4.14, consideram os ganhos $K_p = 350$ e o $K_d = 40$. Os resultados demonstram respostas semelhantes às observadas na Figura 4.10, evidenciando respostas reais acopladas às trajetórias desejadas. O posicionamento é coerente com o desejado, apresentando boa concordância.

Entretanto, no gráfico da velocidade, observa-se um desacoplamento inicial das juntas 2 e 3, mas rapidamente as velocidades se acoplam aos valores desejados. Esse comportamento pode ser atribuído à dinâmica do sistema e à interação entre as juntas, indicando uma resposta dinâmica eficaz do controle PID adotado. Essa análise reforça a robustez do controle implementado, apesar de desafios iniciais de desacoplamento nas trajetórias mais complexas.

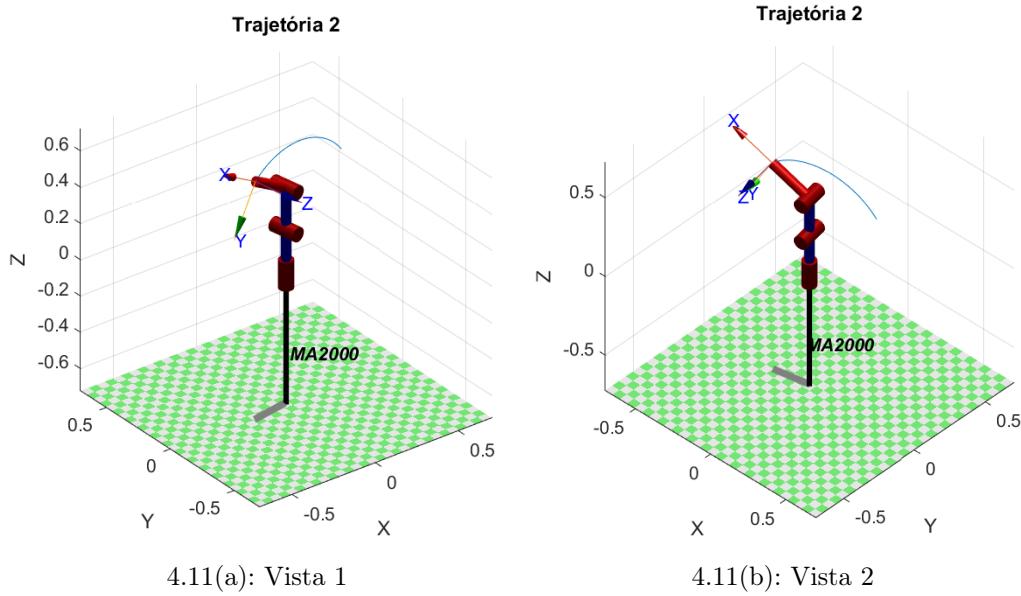


Figura 4.11: Visualização da Trajetória 2

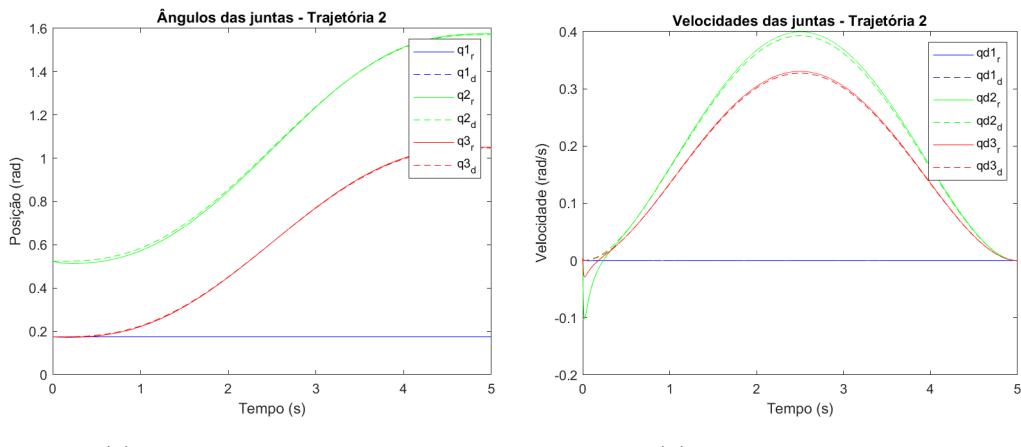


Figura 4.12: Simulação da Trajetória 2 - Proporcional = 350; Derivativo = 40

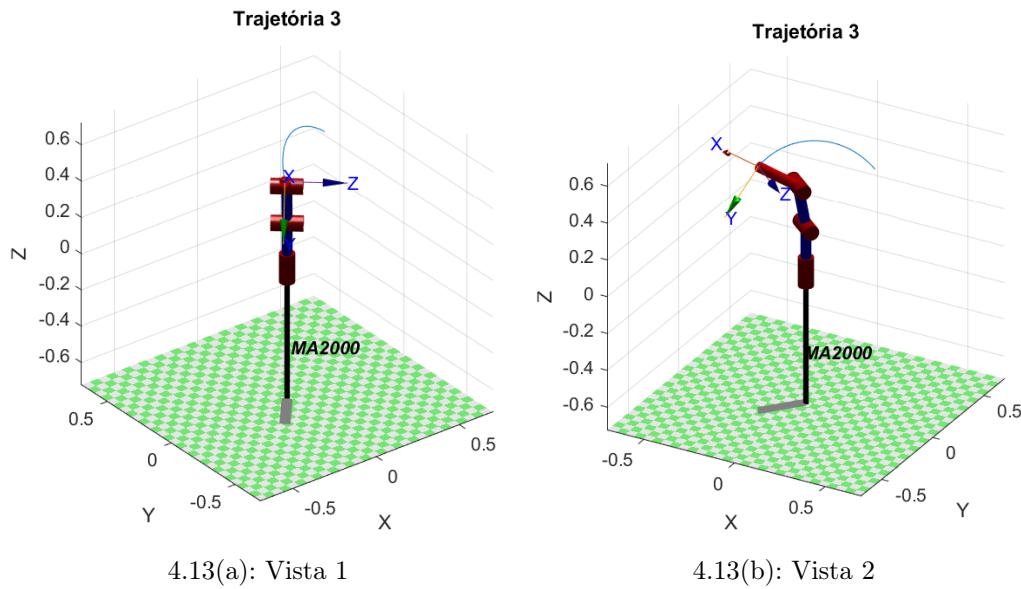


Figura 4.13: Visualização da Trajetória 3

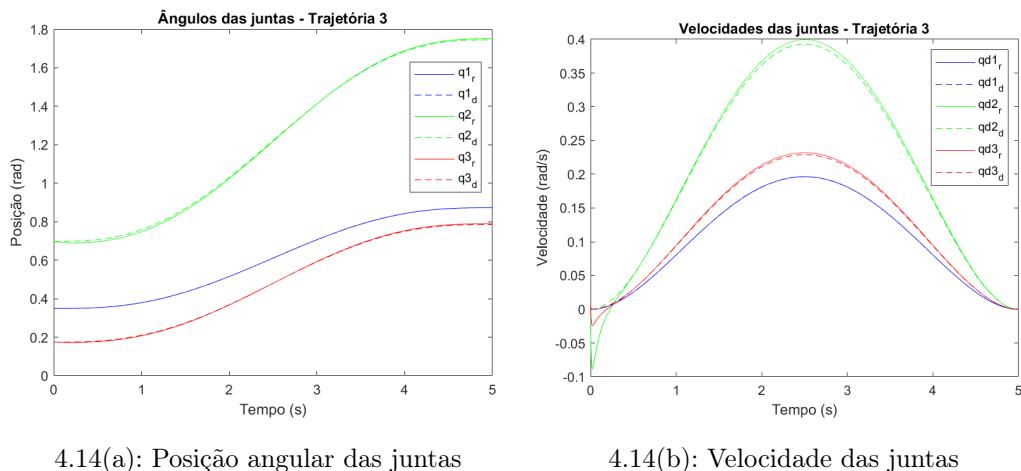


Figura 4.14: Simulação da Trajetória 3 - Proporcional = 350; Derivativo = 40

5

Conclusão

O cenário industrial demanda o uso de manipuladores robóticos, no entanto, a acessibilidade a modelos comerciais é desafiadora devido ao alto custo, especialmente no contexto brasileiro, onde a aquisição de manipuladores nacionais é limitada. Este trabalho aborda essa lacuna propondo o desenvolvimento de um manipulador robótico de 3 graus de liberdade, desde sua concepção e fabricação até o controle. O resultado visa contribuir academicamente, introduzindo conceitos fundamentais de robótica, como projeto, controle, dinâmica e cinematática.

Ao longo do projeto, enfocou-se na fabricação e modelagem do manipulador, incorporando conhecimentos de engenharia na escolha da eletrônica e na fabricação das peças. O manipulador desenvolvido pode servir como uma base sólida para estudos futuros, fornecendo descrições detalhadas da modelagem cinematática direta e inversa, bem como dinâmica. Os arquivos CAD e códigos utilizados, incluindo a modelagem cinematática, o planejamento de trajetórias e o controle, estão disponíveis para facilitar estudos adicionais e servir como material referencial para outros trabalhos.

Embora o trabalho destaque as conquistas na construção física do manipulador, identifica-se um espaço significativo para projetos futuros. Sugere-se a realização de testes práticos, o aprimoramento do uso de controladores, como torque computado e feedforward, e a aplicação de técnicas para obtenção de ganhos, como o método de Ziegler-Nichols. Essas iniciativas permitiriam uma compreensão mais aprofundada do desempenho do manipulador em situações do mundo real.

Por fim, o trabalho busca estimular o interesse no estudo da robótica, oferecendo uma perspectiva prática e aplicada que muitas vezes falta no ambiente acadêmico convencional.

Referências Bibliográficas

- [1] ABB. *Robô IRB 1600*. Disponível em: <https://www.directindustry.com/pt/prod/abb-robotics/product-30265-169124.html>. Acessado: Outubro 2023.
- [2] Carlos Henrique Ahrens, Cristiano Vasconcellos Ferreira, Günther Petrush, Jonas de Carvalho, Jorge Roberto Lopes dos Santos, Jorge Vicente Lopes da Silva, and Neri Volpato. *Prototipagem Rápida: Tecnologias e Aplicações*. São Paulo: Edgar Blücher, 2007.
- [3] Helon Vicente Hultmann Ayala. *Notas de Aula de Modelagem e Controle de Sistemas*, 2022.
- [4] Aníbal Alexandre Campos Bonilla and : Raul Guenther. CinemÁtica diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais, 2004. [Doutorado].
- [5] Epson. *Robô RVT6L-A901SS*. Disponível em: <https://epson.com.br/Para-empresas/Rob%C3%A9tica/Rob%C3%A9s-de-6-Eixos/Rob%C3%A9s-de-6-Eixos-All-In-One-Epson-VT6L/p/RVT6L-A901SS>. Acessado: Outubro 2023.
- [6] FANUC. *Robô de Pintura P-40iA*. Disponível em: <https://www.fanuc.eu/pt/pt/rob%c3%b4s/p%c3%a1gina-filtro-rob%c3%b4s/s%c3%a9rie-de-pintura/p-40ia>. Acessado: Outubro 2023.
- [7] Estevão Fróes Ferrão and Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto. Avaliação da dinâmica de manipuladores robóticos sobre bases flexíveis, 2018. [Mestrado].
- [8] Franka Emika. *Robô PANDA*. Disponível em: <https://www.directindustry.com/pt/prod/franka-emika/product-187686-1906234.html>. Acessado: Outubro 2023.
- [9] Mikell P. Groover, Mitchell Weiss, and Roger N. Nogel and Nicholas G. Odrey. *Robótica: Tecnologia e Programação*. Mc Graw Hill, 1988.
- [10] HIWIN. *Robô SCARA Série RS406*. Disponível em: <https://mectrol.com.br/robo-scara-hiwin-rs406>. Acessado: Outubro 2023.
- [11] Marco Hutter, Roland Siegwart, Thomas Stastny, Konrad Rudin, , and Michael Bösch. *Robot dynamics lecture notes*, 2017. Disponível em: <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/>

- mavt/robotics-n-intelligent-systems/rsl-dam/documents/
RobotDynamics2017/RD_HS2017script.pdf. Acessado: Novembro
2023.
- [12] José Alberto Naves Cocota Júnior. *Elementos de Robótica*. Disponível em: <http://professor.ufop.br/sites/default/files/cocota/files/elemroboticaintro.pdf>. Acessado: Novembro 2023.
- [13] Daniela Ramos Luz, Vivian Suzano Medeiros, and Marcelo Becker. Design, construção, visualização, simulação e controle de manipulador educacional com 4 graus de liberdade, 2022. [Monografia].
- [14] Marco Antonio Meggiolaro. *Notas de Aula Disciplina MEC2402 - Controle de Sistemas Robóticos*, 2022.
- [15] Niku. *Introdução à Robótica - Análise, Controle, Aplicações*. LTC, 2013.
- [16] Rickard Nilsson. Inverse kinematics, 2009. [Mestrado].
- [17] David E. Nye. *America's Assembly Line*. Mit Press, 2015.
- [18] J. C. S. Silva, M. Linder, M. A. S. Irmão, and R. P. S. Silva. *Modelagem Cinemática de um Robô Manipulador*, 2006.
- [19] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 2006.
- [20] Statista. What is your top focus related to 3d printing in 2021? Technical report, Statista, 2023.
- [21] Technik Robótica. *Robô CRP-RH20-06-W*. Disponível em: <https://www.technik-robotica.com.br/CRP-RH20-06-W>. Acessado: Outubro 2023.
- [22] Lung Went Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. New York: John Wiley & Sons, 1999.

A

Datasheet do Filamento PLA da Empresa PrintaLot



Figura A.1: Filamento PLA

Os dados e textos apresentados a seguir é referente a uma tradução direta da folha de dados técnicos fornecida pela empresa¹.

Os filamentos produzidos em PLA (ácido polilático) são os mais utilizados devido à sua facilidade de impressão, excelente aderência entre camadas e origem vegetal, o que o torna um polímero ecológico.

Os filamentos PrintaLot PLA são aditivos quimicamente em baixas proporções com elementos que os tornam mais resistentes, menos rígidos, com melhor estabilidade dimensional e maior fluidez. Outra grande vantagem sobre os filamentos de PLA convencionais é que eles encolhem menos e são menos propensos a empenar.

¹O site para o filamento utilizado se encontra em <https://www.printalot.com.br/pla-vermelho-285-1-kg>. Contudo, os dados técnicos são apresentados em <https://www.printalot.com.br/pla-vermelho-175-1-kg>

Tabela A.1: Dados mecânicos fornecidos pela empresa

Propriedades	Valor típico	Método do ensaio	Condições do ensaio
Físicas			
Densidade g/cc	1,24 g/cm ³	ASTM D792	
Índice de fusão	6,0 g/10 min	ASTM D1238	210°C/2,16 kg
Mecânica			
Resistência à tração	53 Mpa	D 882	
Alongamento na ruptura	6%	D 882	
Módulo elástico em tensão	3,6 Mpa	D 882	
Dureza	-	-	
Resistência à flexão	83 Mpa	ASTM D 790	
Resistência ao impacto	16 J/m	ASTM D 256	izod com entalhe, 1/8"
Térmicas			
Temperatura de deflexão sob carga	55 °C	E2092	66 psi (0,45 MPa)

Tabela A.2: Dados de tolerância fornecidos pela empresa

Diâmetro	Tolerância	Confiança
1,75	± 0,03	>95 %
2,85	± 0,05	>95 %

Recomendações de impressão

Pico:180-230°C

Cama:20-60°C

Recomenda-se o uso do spray adesivo PrintaLot®.

Pré-seco:

Para obter os melhores resultados é aconselhável pré-secar o filamento a 40°C durante 4 horas com circulação forçada de ar.

Apresentações:

Bobinas de 1kg, rolos de 250 gramas e bobinas de 4kg.

Condições de armazenamento

Conservar em recipiente hermético em local fresco e seco, recomenda-se usar gel de sílica.

Manter em temperatura inferior a 50 °C.

Após um mês de armazenamento, recomenda-se a pré-secagem.

B

Transformação homogênea

As matrizes de transformação homogêneas são utilizadas para realizar a composição da translação, rotação e escala em uma única matriz. Primeiramente, é necessário realizar a definição do vetor posição, englobando os eixos do sistema juntamente com um fator de escalamento w : O vetor posição pode ser definido da seguinte forma:

$$v = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \quad (\text{B-1})$$

De forma matricial, é possível representar o vetor posição da seguinte maneira:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

A rotação ou transladação do vetor posição ocorre através da seguinte matriz transformação 4x4. Para o processo de deslocado do vetor posição a uma distância "q" nas direções x, y e z é definido a partir da seguinte matriz transformação:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & qx \\ 0 & 1 & 0 & qy \\ 0 & 0 & 1 & qz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-3})$$

O produto matricial entre a matriz de transformação T com o vetor posição \dot{v} retorna a nova posição do objeto no sistema.

$$T\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & qx \\ 0 & 1 & 0 & qy \\ 0 & 0 & 1 & qz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{B-4})$$

Para o processo de rotação, define-se a matriz de transformação R no eixo x, y e z:

$$R(\theta, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-5})$$

$$R(\theta, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-6})$$

$$R(\theta, z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-7})$$

Dado um ponto de referência "A" em relação a um ponto "B", a transformada homogênea é definida pela expressão:

$${}^A P = {}_B^A T {}^B P \quad (\text{B-8})$$

Onde:

1. ${}^A P$ é o vetor de posição do ponto A
2. ${}_B^A T$ é a matriz de transformação de B em relação a A
3. ${}^B P$ é o vetor de posição do item B

A matriz de transformação de B em relação a A, ${}_B^A T$ é definida da seguinte forma:

$${}_B^A T = \begin{bmatrix} {}_B^A R & {}^A P_{B_{ORG}} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-9})$$

Tem-se:

1. ${}_B^A R$ é a matriz de rotação de B em relação a A
2. ${}^A P_{B_{ORG}}$ é o ponto de origem de B em relação a A

Por fim, é possível chegar na seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_B^A R & {}^A P_{B_{ORG}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-10})$$