

# Lógica Matemática

**Prof. Me. Lucas Ferreira de Castro**



# Sentenças Abertas

## SENTENÇAS ABERTAS COM UMA VARIÁVEL

Chama-se **sentença aberta com uma variável em um conjunto  $A$**  ou apenas **sentença aberta em  $A$** , uma expressão  $p(x)$  tal que  $p(a)$  é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo  $a \in A$ .

O conjunto  $A$  é o **conjunto-universo (domínio)** da variável  $x$ .

Qualquer elemento  $a \in A$  é um **valor** da variável  $x$ .

$p(x)$  é uma **função proposicional com uma variável**.



# Sentenças Abertas

## SENTENÇAS ABERTAS COM UMA VARIÁVEL

Exemplos:

São sentenças abertas em  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  (conjunto dos números naturais) as seguintes expressões:

(a)  $x + 1 > 8$

(b)  $x + 3 = 7$

(c)  $x$  é primo

(d)  $x$  é divisor de 10

(e)  $x$  é múltiplo de 3



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Chama-se de conjunto-verdade ( $Vp$ ) de uma sentença aberta  $p(x)$  em um conjunto  $A$ , o conjunto de todos os elementos  $a \in A$  tais que  $p(a)$  é uma proposição verdadeira ( $V$ ).

$$Vp = \{ x \mid x \in A \wedge p(x) \text{ é } V \}$$

$$Vp = \{ x \mid x \in A \wedge p(x) \}$$

$$Vp = \{ x \in A \mid p(x) \}$$



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

O conjunto-verdade ( $Vp$ ) de uma sentença aberta  $p(x)$  em um conjunto  $A$  é um subconjunto do conjunto  $A$ .

$$Vp \subset A$$



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

### Exemplos

(1) Seja a sentença aberta “ $x + 2 < 9$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 2 < 9 \} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset N$$

(2) Seja a sentença aberta “ $x + 9 > 2$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 9 > 2 \} = N \subset N$$



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

### Exemplos

(3) Seja a sentença aberta “ $x + 9 < 2$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 9 < 2 \} = \phi \subset N$$

(4) Seja a sentença aberta “ $x + 2 > 9$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 2 > 9 \} = \{8, 9, 10, 11, \dots\} \subset N$$



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Se  $p(x)$  é uma sentença aberta em um conjunto  $A$ , há três situações possíveis para o conjunto-verdade:

- (1) Quando  $p(x)$  é verdadeira (V) para **todo**  $x \in A$ .

$$Vp = A$$

Neste caso  $p(x)$  exprime uma **condição universal** no conjunto  $A$ .

- (2) Quando  $p(x)$  é verdadeira (V) para **alguns**  $x \in A$ .

$$Vp \subset A$$

Neste caso  $p(x)$  exprime uma **condição possível** no conjunto  $A$ .

- (3) Quando  $p(x)$  é verdadeira (V) para todo  $x \in A$ .

$$Vp = \phi$$

Neste caso  $p(x)$  exprime uma **condição impossível** no conjunto  $A$ .





# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

### Exemplos

(1) Seja a sentença aberta “ $x + 2 < 9$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 2 < 9 \} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset N$$

**Condição Possível**

(2) Seja a sentença aberta “ $x + 9 > 2$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 9 > 2 \} = N \subset N$$

**Condição Universal**



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

### Exemplos

(3) Seja a sentença aberta “ $x + 9 < 2$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{x \mid x \in N \wedge x + 9 < 2\} = \phi \subset N$$

**Condição Impossível**

(4) Seja a sentença aberta “ $x + 2 > 9$ ” em  $N$ .

O seu conjunto-verdade é:

$$Vp = \{x \mid x \in N \wedge x + 2 > 9\} = \{8, 9, 10, 11, \dots\} \subset N$$

**Condição Possível**



# Sentenças Abertas

## SENTENÇAS ABERTAS COM DUAS VARIÁVEIS

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , chama-se **sentença aberta com duas variáveis em**  $A \times B$  ou apenas **sentença aberta em**  $A \times B$ , uma expressão  $p(x, y)$  tal que  $p(a, b)$  é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo o par ordenado  $(a, b) \in A \times B$ .

### Exemplos

(1) Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{5, 6\}$ . São sentenças abertas em  $A \times B$  as seguintes expressões:

- (a)  $x$  é menor que  $y$  ( $x < y$ )
- (b)  $x$  é divisor de  $y$  ( $x \mid y$ )
- (c)  $y$  é o dobro de  $x$  ( $y = 2x$ )

O par ordenado  $(3, 5) \in A \times B$  satisfaz (a), mas não satisfaz (b) e (c).

O par ordenado  $(2, 6) \in A \times B$  satisfaz (a) e (b), mas não satisfaz (c).

O par ordenado  $(3, 6) \in A \times B$  satisfaz (a), (b) e (c).



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

Chama-se de conjunto-verdade ( $Vp$ ) de uma sentença aberta  $p(x, y)$  em um  $A \times B$ , o conjunto de todos os elementos  $(a, b) \in A \times B$  tais que  $p(a, b)$  é uma proposição verdadeira(V).

$$Vp = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x, y) \}$$

$$Vp = \{ (x, y) \in A \times B \mid p(x, y) \}$$



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

### Exemplos

(1) Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$ .

O seu conjunto-verdade da sentença aberta “ $x < y$ ” em  $A \times B$  é:

$$Vp = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x < y\} = \\ \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \subset A \times B$$



# Sentenças Abertas

## CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

### Exemplos

(3) O conjunto-verdade da sentença aberta “ $2x + y = 10$ ” em  $N \times N$  é:

$$Vp = \{(x, y) \mid x, y \in N \wedge 2x + y = 10\} = \\ \{(0, 10), (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2), (5, 0)\} \subset N \times N$$



# Sentenças Abertas

## SENTENÇAS ABERTAS COM N VARIÁVEIS

Consideremos os  $n$  conjuntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  e o seu produto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ .

Chama-se **sentença aberta com  $n$  variáveis em  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$**  ou apenas **sentença aberta em  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$**  uma expressão  $p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  tal que  $p(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  é falsa (F) ou verdadeira (V) para toda  $n$ -upla  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ .

### Exemplo

- (1) A expressão “ $x + 2y + 3z < 18$ ” é uma sentença aberta em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , sendo  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais.
- Os pares ordenados  $(1, 2, 3)$  e  $(1, 2, 4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  satisfazem a sentença.



# Sentenças Abertas

## EXERCÍCIOS

Livro Introdução à Lógica Matemática

Cap. 14

Questões 01, 02, 03, 05, 06, 07 e 08.

