Lógica Matemática

Prof. Me. Lucas Ferreira de Castro

Quantificadores

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio A e seja Vp seu conjunto-verdade:

$$Vp = \{x \mid x \in A \ \wedge p(x)\}$$

Quando p(x) é uma sentença **universal**, ou seja, $Vp = A$, podemos afirmar:

- “Para todo x de A, p(x) é verdadeira” ou
- “Qualquer que seja x de A, p(x) é verdadeira”

Matematicamente, simbolizamos este fato da seguinte forma:

$$(\forall\, x \in A)(p(x))$$
$$\forall\, x \in A, p(x)$$
$$\forall\, x \in A : p(x)$$

Também é comum omitir-se o domínio:

$$(\forall\, x)(p(x))$$
$$\forall\, x, p(x)$$
$$\forall\, x : p(x)$$

Quantificadores

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Portanto a proposição $(\forall\, x \in A)(p(x))$ é **verdadeira** sempre que $Vp = \mathrm{A}$, e **falsa** sempre que $Vp \neq A$.

O símbolo ∀ transforma a sentença aberta *p(x)* numa proposição.

Essa operação de transformação recebe o nome **quantificação universal**.

Exemplo

$$(\forall\ Fulano)(Fulano\ \text{é}\ mortal)$$

Lê-se: *"Qualquer que seja Fulano, Fulano é mortal"*

Quantificadores

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio A e seja Vp seu conjunto-verdade:

$$Vp = \{x \mid x \in A \ \wedge p(x)\}$$

Quando p(x) é uma sentença **possível**, ou seja, $Vp \subset A$, podemos afirmar:

- "Para algum x de A, p(x) é verdadeira" ou
- "Existe pelo menos um x de A tal que p(x) é verdadeira"

Matematicamente, simbolizamos este fato da seguinte forma:

$$(\exists\ x \in A)(p(x))$$
$$\exists\ x \in A, p(x)$$
$$\exists x \in A : p(x)$$

Também é comum omitir-se o domínio:

$$(\exists\ x)(p(x))$$
$$\exists x, p(x)$$
$$\exists x : p(x)$$

Quantificadores

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Portanto a proposição $(\exists\, x \in A)(p(x))$ é **verdadeira** sempre que $Vp \neq \emptyset$, e **falsa** sempre que $Vp = \emptyset$.

O símbolo ∃ transforma a sentença aberta *p(x)* numa proposição.

Essa operação de transformação recebe o nome **quantificação existencial**.

Exemplo

$$(\exists\, x)(x\ vive\ em\ Marte)$$

Lê-se: *"Existe pelo um x que vive em Marte"*

Quantificadores

VARIÁVEL APARENTE E VARIÁVEL LIVRE

Quando uma variável está quantificada, diz-se que é uma variável **aparente.**

Exemplo

$$(\exists\ x)(x + 2 = 4)$$

Quando uma variável não está quantificada, diz-se que é uma variável **livre.**

Exemplo

$$x + 2 = 4$$

Quantificadores

QUANTIFICADOR DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Suponha uma sentença aberta em R, quando temos certeza que **existe apenas um $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$**, usamos o quantificador existencial de unicidade $\exists!$.

Exemplo

$$(\exists!\ x \in R)(x^3 = 9)$$

Quantificadores

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

Considere as seguintes proposições no universo H (seres humanos):

Proposição	Negação	Equivalência
$(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$		

Quantificadores

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

Considere as seguintes proposições no universo H (seres humanos):

Proposição	Negação	Equivalência
$(\forall\, x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\forall\, x)(x \text{ é } mortal)$	

Quantificadores

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

Considere as seguintes proposições no universo H (seres humanos):

Proposição	Negação	Equivalência
$(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$	$(\exists\ x)\sim(x \text{ é } mortal)$

Quantificadores

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

Considere as seguintes proposições no universo H (seres humanos):

Proposição	Negação	Equivalência
$(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$	$(\exists\ x)\sim(x \text{ é } mortal)$
$(\exists\ x)(x \text{ é } mortal)$		

Quantificadores

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

Considere as seguintes proposições no universo H (seres humanos):

Proposição	Negação	Equivalência
$(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\forall\ x)(x \text{ é } mortal)$	$(\exists\ x)\sim(x \text{ é } mortal)$
$(\exists\ x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\exists\ x)(x \text{ é } mortal)$	

Quantificadores

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

Considere as seguintes proposições no universo H (seres humanos):

Proposição	Negação	Equivalência
$(\forall\, x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\forall\, x)(x \text{ é } mortal)$	$(\exists\, x)\sim(x \text{ é } mortal)$
$(\exists\, x)(x \text{ é } mortal)$	$\sim(\exists\, x)(x \text{ é } mortal)$	$(\forall\, x)\sim(x \text{ é } mortal)$

Quantificadores

EXERCÍCIOS

Livro Introdução à Lógica Matemática

Cap. 16

Questões 05 a 11.

Prof. Me. Lucas Ferreira de Castro