Lógica Matemática

Prof. Me. Lucas Ferreira de Castro

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

DEDUÇÃO DE ARGUMENTOS

No Cálculo Proposicional podíamos decidir, pelo menos teoricamente, a validade ou invalidade de um argumento, utilizando-se por exemplo Tabelas Verdade, mas para o Cálculo de Predicados, o matemático e lógico americano A. Church mostrou, em 1936, que quando são envolvidas nas premissas expressões como “Pxy”, “Qxyz”, etc., não existe nenhum processo sistemático para estabelecer a validade dos argumentos.

Logo uma forma de se contornar esse problema é:

1. Eliminação dos quantificadores das premissas;
2. Deduzir com base nas equivalências e regras de inferências do Cálculo Proposicional;
3. Inserção dos quantificadores na conclusão, quando for o caso.

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

REGRAS DE INFERÊNCIA

Nome da Regra	Abrev.	De	Podemos deduzir	Restrições
Particularização Universal	PU	$(\forall x)P(x)$	$P(a)$	A variável "a" não pode estar presente em outro quantificador. Exemplo: $(\forall x)(\exists a)P(x,a)$ para $(\exists a)P(a,a)$
Particularização Existencial	PE	$(\exists x)P(x)$	$P(a)$	Somente deve-se usar esta regra, se esta for o primeiro passo no método dedutivo.
Generalização Universal	GU	$P(x)$	$(\forall x)P(x)$	$P(x)$ não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese na qual x seja uma variável livre ou tenha sido deduzida de uma PE.
Generalização Existencial	GE	$P(x)$	$(\exists x)P(x)$	Não se pode partir de $P(a,x)$ para $(\exists x)P(x,x)$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

PARTICULARIZAÇÃO UNIVERSAL (PU)

Esta regra diz que podemos deduzir $P(a)$, $P(x)$, $P(y)$ etc de $(\forall x)P(x)$, retirando assim o quantificador universal.

"Se P é verdadeira para todos os elementos de um domínio, também será verdadeira para qualquer elemento escolhido arbitrariamente."

$$(\forall x)P(x) \longrightarrow P(x)$$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

PARTICULARIZAÇÃO UNIVERSAL (PU)

Exemplo

Prove o argumento:

"*Todos os homens são mortais.*

Sócrates é humano.

Portanto, Sócrates é mortal."

Se assumirmos que:

$H(x)$ é "x é humano",

$M(x)$ é "x é mortal" e

s é uma variável que representa "Sócrates", temos:

$$(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big) \land H(s) \longrightarrow M(s)$$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

PARTICULARIZAÇÃO UNIVERSAL (PU)

Exemplo

$$(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big) \land H(s) \longrightarrow M(s)$$

Demonstração

1. $(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big)$	PREMISSA
2. $H(s)$	PREMISSA
3. $H(s) \longrightarrow M(s)$	1 - PU
4. $M(s)$	2,3 - MP

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

GENERALIZAÇÃO UNIVERSAL (GU)

Esta regra permite a inserção de um quantificador universal. Isso deve ser feito com bastante atenção, pois somente deve ser utilizado quando *P(x)* é verdadeiro e x é um elemento absolutamente arbitrário, isto é, pode ser qualquer elemento do conjunto universo. A variável x não pode ser uma variável livre em nenhuma hipótese do argumento original.

"Se um objeto, arbitrariamente escolhido dentre seu domínio, tiver uma certa propriedade, todos os demais objetos deste domínio terão também essa propriedade."

$$P(x) \longrightarrow (\forall x)P(x)$$

Lembrando $P(x)$ não pode ter sido deduzida por meio de uma PE.

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

GENERALIZAÇÃO UNIVERSAL (GU)

Exemplo

Prove o argumento:

"*Todos os homens são mortais.*

Todos os sábios são humanos.

Portanto, todos os sábios são mortais."

$H(x)$ é "x é humano",

$M(x)$ é "x é mortal",

$S(x)$ é "x é sábio", temos:

$$(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big) \land (\forall x)\big(S(x) \longrightarrow H(x)\big) \longrightarrow (\forall x)\big(S(x) \longrightarrow M(x)\big)$$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

GENERALIZAÇÃO UNIVERSAL (GU)

Exemplo

$$(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big) \wedge (\forall x)\big(S(x) \longrightarrow H(x)\big) \longrightarrow (\forall x)\big(S(x) \longrightarrow M(x)\big)$$

Demonstração

1. $(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big)$	PREMISSA
2. $(\forall x)\big(S(x) \longrightarrow H(x)\big)$	PREMISSA
3. $H(x) \longrightarrow M(x)$	1 - PU
4. $S(x) \longrightarrow H(x)$	2 – PU
5. $S(x) \longrightarrow M(x)$	3,4 - SH
6. $(\forall x)\big(S(x) \longrightarrow M(x)\big)$	5 - GU

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

GENERALIZAÇÃO EXISTENCIAL (GE)

Esta regra permite a inserção de um quantificador existencial.

"O que é verdadeiro para um dado objeto, é verdadeiro para algum objeto."

$$P(a) \longrightarrow (\exists x)P(x)$$

Lembrando que não é possível deduzir de $P(a, x)$ para $(\exists x)P(x, x)$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

GENERALIZAÇÃO EXISTENCIAL (GE)

Exemplo

Prove o argumento:

"*Todos os homens são mortais.*

Sócrates é humano.

Portanto, existem mortais."

$H(x)$ é "x é humano",

$M(x)$ é "x é mortal" e

s é uma variável que representa "Sócrates", temos:

$$(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big) \land H(s) \longrightarrow \exists x M(x)$$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

GENERALIZAÇÃO EXISTENCIAL (GE)

Exemplo

$$(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big) \wedge H(s) \longrightarrow \exists x M(x)$$

Demonstração

1. $(\forall x)\big(H(x) \longrightarrow M(x)\big)$	PREMISSA
2. $H(s)$	PREMISSA
3. $H(s) \longrightarrow M(s)$	1 - PU
4. $M(s)$	2,3 – MP
5. $\exists x M(x)$	4 - GE

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

PARTICULARIZAÇÃO EXISTENCIAL (PE)

Esta regra diz que podemos deduzir $P(a)$ de $(\exists x)P(x)$, retirando assim o quantificador existencial, sendo *P(a)* um símbolo novo.

"Se P for verdadeira para algum elemento do domínio, podemos dar um nome a esse elemento, mas não podemos supor mais nada sobre o mesmo."

$$(\exists x)P(x) \longrightarrow P(a)$$

Você deve observar todas as suas premissas e, se quiser usar PE em alguma delas, faça-o primeiro.

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

PARTICULARIZAÇÃO EXISTENCIAL (PE)

Exemplo

Prove o argumento:

"*Todos os tigres são ferozes.*

Alguns animais são tigres.

Portanto, alguns animais são ferozes ."

Se assumirmos que:

$A(x)$ é "x é animal",

$T(x)$ é "x é tigre" e

$F(x)$ é "x é feroz", temos:

$$((\forall x)\big(T(x) \longrightarrow F(x)\big) \wedge (\exists x)\big(A(x) \wedge \ T(x)\big)) \longrightarrow (\exists x)\big(A(x) \wedge F(x)\big)$$

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

PARTICULARIZAÇÃO EXISTENCIAL (PE)

Exemplo

$$((\forall x)(T(x) \longrightarrow F(x)) \wedge (\exists x)(A(x) \wedge T(x))) \longrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge F(x))$$

Demonstração

1. $(\forall x)(T(x) \longrightarrow F(x))$	PREMISSA
2. $(\exists x)(A(x) \wedge T(x))$	PREMISSA
3. $A(a) \wedge T(a)$	1 - PE
4. $A(a)$	3 – SIMP
5. $T(a)$	3 - SIMP
6. $T(a) \longrightarrow F(a)$	1 - PU
7. $F(a)$	5,6 - MP
8. $A(a) \wedge F(a)$	4,7 – CONJ
9. $(\exists x)A(x) \wedge F(x)$	8 - GE

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

EXERCÍCIOS

1. Prove a validade do seguinte argumento:

"Todo computador tem porta serial.

Alguns computadores têm porta paralela.

Portanto, alguns computadores têm uma porta serial e uma porta paralela".

Use a notação:

C(x) para "x é computador",

S(x) para "x tem porta serial" e

P(x) para "x tem porta paralela"

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

EXERCÍCIOS

2. Prove a validade do seguinte argumento:

"Algumas plantas são flores.

Todas as flores têm cheiro doce.

Portanto, algumas plantas têm um cheiro doce".

Use a notação:

P(x) para "x é uma planta",

F(x) para "x é uma flor" e

D(x) para "x tem cheiro doce"

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

EXERCÍCIOS

3. Prove a validade do seguinte argumento:

"Nenhum esporte é ruim.

Toda dança é esporte.

Portanto, nenhuma dança é ruim".

Use a notação:

E(x) para "x é um esporte",

R(x) para "x é ruim" e

D(x) para "x é uma dança"

REGRAS DE DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

EXERCÍCIOS

4. Prove a validade do seguinte argumento:

"Existe um astrônomo que não é míope.

Todo mundo que usa óculos é míope.

Todo mundo ou usa óculos ou usa lentes.

Portanto, existe um astrônomo que usa lentes".

Use a notação:

A*(x)* para "x é um astrônomo", e

M(x) para "x é míope" e

O(x) para "x usa óculos" e

L(x) para "x usa lentes"