Peter Frommenwiler • Kurt Studer

Mathematik

für Maturitätsschulen

Algebra und Datenanalyse

Cornelsen

Peter Frommenwiler • Kurt Studer

Mathematik

für Maturitätsschulen

Algebra und Datenanalyse

Eine Aufgabensammlung

Cornelsen

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Zu diesem Werk gehört:
Mathematik für Maturitätsschulen
Algebra und Datenanalyse, Lösungen
ISBN 978-3-06-450956-6

Bildquellen:
akg/de AgostiniPicture Lib.: 85; 107
akg-images: 29;
©BRIDGEMANART.COM: Titel (1), (2); 7(1); 34; 42; 66; 69; 76(1); 86; 151; 195; 230; 240
Corbis: 216
Culture-images/ua: 14; 106
Imagebroker.com: 7(2); 36; 88; 149; 152; 194; 219
Imagebroker.net: 43; 91; 108; 155; 161; 187; 231
Imago: 75; 145; 156; 214
Interfoto/Photoaisa: 112
Interfoto/SB: 120(1)
© LEEMAGE/images.de: 7(3); 38; 76(29; 87; 177; 192; 221
Picture-alliance/dpa: 271
Picture-alliance/maxppp: Tite(3); 95

Verlagsredaktion: Elisabeth Berten
Technische Umsetzung: zweiband.media, Berlin
Umschlaggestaltung: zweiband.media, Berlin

www.cornelsen.ch

12. Auflage, 1. Druck 2013

© 2013 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlags.

ISBN 978-3-06-450955-9

Druck: Stürtz GmbH, Würzburg

Vorwort zur 12. Auflage

Die vorliegende Aufgabensammlung wurde für den Mathematikunterricht an Maturitätsschulen erarbeitet, wobei der Aufbau in Anlehnung an den Rahmenlehrplan für die technische Berufsmaturität (ausgenommen Geometrie) konzipiert wurde.
Gemäss dem aktuellen Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität ist diese neue Auflage um das Kapitel 4. Datenanalyse erweitert worden.
Die Aufgabensammlung enthält Übungsmaterial und praxisbezogene Beispiele. Für die Umsetzung der Ideen eines modernen Mathematikunterrichts sind selbstverständlich zusätzliche Materialien, Sequenzen und interdisziplinäre Anwendungen notwendig.
Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Aufgaben in die Bereiche Arithmetik, Gleichungen, Funktionen und Datenanalyse eingeteilt. Aus methodischen Überlegungen ist es aber sinnvoll und möglich, die Themen in einer anderen Reihenfolge zu behandeln.

Zu den Aufgaben:
- Grundsätzlich wird in der Menge der reellen Zahlen gerechnet.
- Die mit (*) bezeichneten Aufgaben weisen einen aussergewöhnlichen Schwierigkeitsgrad auf und (oder) erfordern einen erhöhten Zeitaufwand.
- Für Aufgaben mit (■) ist der Einsatz eines elektronischen Hilfsmittels (grafikfähiger Rechner oder Computer) zweckmässig bzw. notwendig.

Wichtig ist, dass Lehrerinnen und Lehrer, abgestimmt auf ihren individuellen Unterricht und angepasst an die unterschiedlichen Anspruchsniveaus der Schülerinnen und Schüler, aus der Vielfalt der Aufgaben eine Auswahl treffen.

Ein Hinweis zu Taschenrechner und Computer:
Der Rechner ist in der Mathematik ein wichtiges Hilfsmittel, das Schülerinnen und Schüler kontinuierlich einsetzen sollen, um bei dessen Handhabung stufengemäss die erforderliche Routine zu erlangen. Trotzdem ist es aber zweckmässig, dass jene Aufgaben, bei denen ausschliesslich mathematische Gesetzmässigkeiten zu üben sind, weitgehend ohne Rechner gelöst werden.
Die Autoren erachten es als sinnvoll und notwendig, bestimmte Aufgaben (mit ■ bezeichnet) mit einem Computerprogramm beziehungsweise einem grafikfähigen Rechner zu lösen (z.B. Gauss-Algorithmus, Nullstellenberechnungen, Graphen von Funktionen usw.).
Es ist dabei unerlässlich, die eingesetzten Programme so weit als möglich im Unterricht zu besprechen, damit die Schülerinnen und Schüler deren Struktur und Ablauf erfassen können.
Unter den oben aufgeführten Gesichtspunkten angewendet, ermöglicht die vorliegende Aufgabensammlung einen methodisch-didaktisch vielfältigen Einsatz.

Autoren und Verlag
im August 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Arithmetik 7

1.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen 8
1.1.1 Zahlenmengen 8
1.1.2 Der Betrag einer Zahl 9
1.1.3 Terme 10
1.1.4 Polynome 12
1.1.5 Ordnungsrelationen 13

1.2 Addition, Subtraktion 15

1.3 Multiplikation 16
1.3.1 Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln 16
1.3.2 Faktorzerlegung 18

1.4 Division 21
1.4.1 Erweitern und kürzen 21
1.4.2 Addieren und subtrahieren 22
1.4.3 Multiplizieren 24
1.4.4 Dividieren 25
1.4.5 Polynomdivision 28
1.4.6 Vermischte Aufgaben 29

1.5 Potenzen 32
1.5.1 Definition von a^n 32
1.5.2 Addieren und subtrahieren von Potenzen 34
1.5.3 Anwendung der Potenzsätze 35
1.5.4 Vermischte Aufgaben 39
1.5.5 Zehnerpotenzen 40

1.6 Wurzeln 44
1.6.1 Die Quadratwurzel 44
1.6.2 Definition von $\sqrt[n]{a}$ und Potenzdarstellung von $\sqrt[n]{a^m}$ 50
1.6.3 Das Rechnen mit Wurzeln 53
1.6.4 Vermischte Aufgaben 59

1.7 Logarithmen 60
1.7.1 Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen) 60
1.7.2 Logarithmen mit beliebiger Basis 62
1.7.3 Logarithmengesetze 64

2. Gleichungen 69

2.1 Aussagen und Aussageformen 73
2.1.1 Aussagen 73
2.1.2 Verknüpfung von Aussagen 74
2.1.3 Aussageformen 77
2.1.4 Äquivalenz von Aussageformen 79

2.2	**Lineare Gleichungen**	**81**
2.2.1	Gleichungen ohne Parameter	81
2.2.2	Gleichungen mit Parametern	89
2.2.3.	Lineare Ungleichungen	92
2.3	**Quadratische Gleichungen**	**93**
2.3.1	Definition	93
2.3.2	Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen	94
2.3.3	Lösungsverfahren	95
2.3.3.1	Sonderfälle	95
2.3.3.2	Allgemeiner Fall	97
2.3.3.3	Substitution	99
2.3.4	Textaufgaben	100
2.3.5	Parameteraufgaben, Satz von Vieta	103
2.3.6	Zerlegung von $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren	104
2.4	**Besondere Gleichungstypen**	**105**
2.4.1	Bruchgleichungen	105
2.4.2	Wurzelgleichungen	111
2.4.3	Produkt = Null	115
2.4.4	Exponentialgleichungen	117
2.4.5	Logarithmische Gleichungen	121
2.5	**Gleichungen mit mehreren Unbekannten**	**124**
2.5.1	Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten	124
2.5.2	Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten	130
2.5.3	Nicht lineare Gleichungssysteme	136
2.6	**Vermischte Textaufgaben**	**140**
2.7	**Gleichungen 3. und höheren Grades, transzendente Gleichungen**	**157**

3. Funktionen 161

3.1	**Kartesisches Koordinatensystem**	**165**
3.2	**Der Funktionsbegriff**	**166**
3.3	**Lineare Funktionen**	**170**
3.3.1	Definition der linearen Funktion	170
3.3.2	Der Graph einer linearen Funktion	172
3.3.3	Aufgaben aus der Praxis	175
3.3.4	Berechnung von Flächen	177
3.3.5	Senkrechte Geraden	178
3.3.6	Abschnittsweise definierte Funktionen	179
3.3.7	Betragsfunktionen	180
3.3.8	Geradenscharen	181
3.3.9	Grafisches Lösen linearer Gleichungssysteme	182

3.4 Quadratische Funktionen **183**
3.4.1 Der Graph einer quadratischen Funktion 184
3.4.2 Quadratische Ungleichungen 186
3.4.3 Bestimmung der Funktionsgleichung 187
3.4.4 Schnittpunkte von Graphen 189
3.4.5 Parabel und Tangente 190
3.4.6 Parabelscharen 191
3.4.7 Geometrische Örter 191
3.4.8 Extremwertaufgaben 192
3.4.9 Grafisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme 193
3.4.10 Aufgaben aus Physik und Technik 193
3.5 Potenzfunktionen **196**
3.6 Polynomfunktionen **199**
3.7 Rationale Funktionen **204**
3.8 Umkehrung von Funktionen **209**
3.9 Wurzelfunktionen **213**
3.10 Exponentialfunktionen **215**
3.11 Logarithmusfunktionen **227**
3.12 Winkelfunktionen **232**
3.13 Optimieren **237**
3.13.1 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten 237
3.13.2 Lineare Optimierung 239
3.13.3 Extremwertaufgaben 242

4. Datenanalyse 247

4.1 Grundlagen **248**
4.2 Daten erheben und grafisch darstellen **250**
4.3 Lage- und Streumasse **253**
4.3.1 Lagemasse 253
4.3.2 Streumasse 254
4.4 Histogramm **259**
4.5 Boxplot **263**
4.6 Möglichkeiten der Manipulation in der Statistik **267**
4.6.1 Festlegung der Mitte 268
4.6.2 Illusion der Präzision 268
4.6.3 Grafische Darstellung 269

Anhang 273

A. Grundbegriffe der Mengenlehre **273**
B. Rechnen mit Näherungswerten **281**
Stichwortverzeichnis **288**

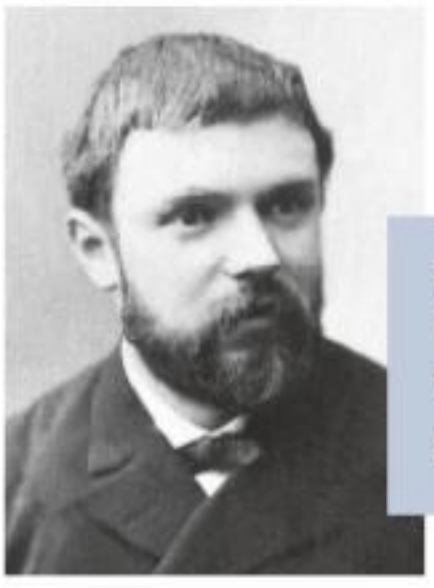
Die besten Bücher sind die, von denen jeder Leser meint, er hätte sie selbst machen können.

Blaise Pascal, 1623–1662, franz. Mathematiker und Philosoph

Mathematik ist ein geistreicher Luxus.

Friedrich der Grosse, 1712–1786, preussischer König

1. Arithmetik



Der Mathematiker studiert die reine Mathematik nicht, weil sie nützlich ist; er studiert sie, weil er sich an ihr erfreut und er erfreut sich an ihr, weil sie schön ist.

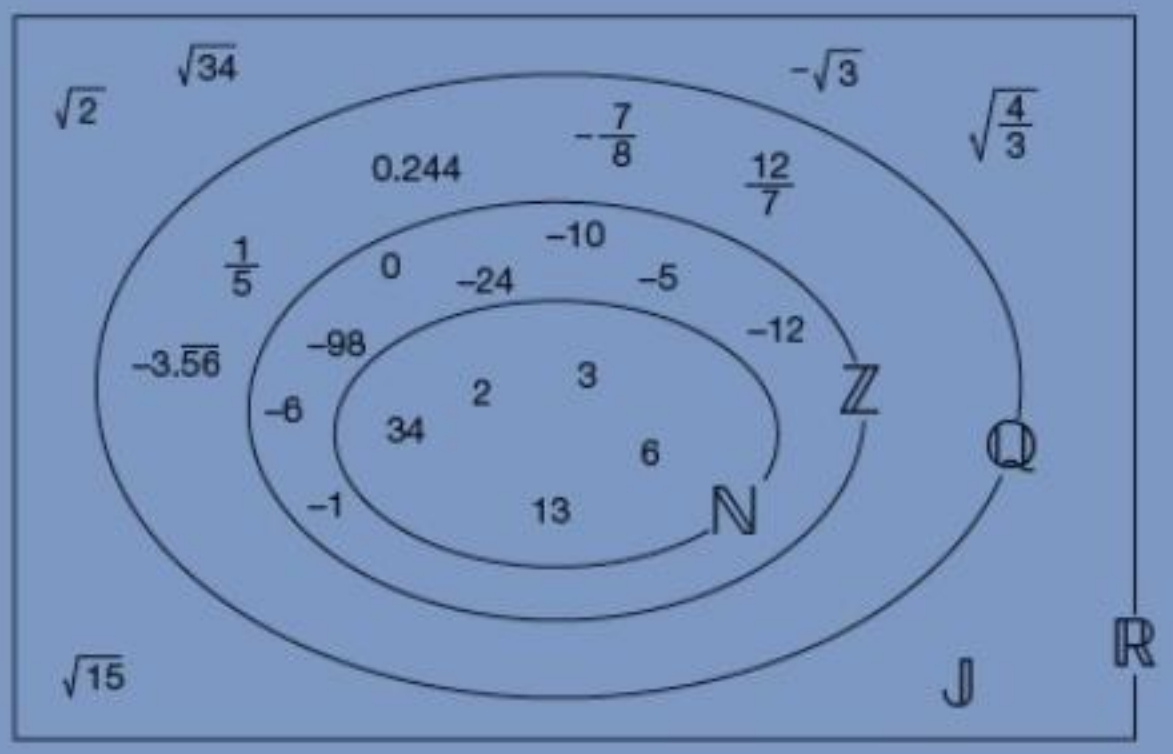
Henri Poincaré, 1854–1912, franz. Mathematiker und Philosoph

Gott ist ein Kind, und als er zu spielen begann, trieb er Mathematik. Sie ist die göttlichste Spielerei unter den Menschen.

Vinzenz Erath, 1906–1976, deutscher Schriftsteller

1.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen

1.1.1 Zahlenmengen



natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\right\}$
irrationale Zahlen	$\mathbb{J}$
reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$

1. Verwandeln Sie in eine gekürzte Bruchzahl.

a) 7.08 b) $7.0\overline{8}$ c) $1.\overline{756}$ d) $0.\overline{027}$

e) $3.6\overline{9}$ f) $0.5\overline{183}$ g) $0.12\overline{34}$ h) $2.\overline{230769}$

2. Verwandeln Sie in eine gekürzte Bruchzahl.

a) $0.\overline{90} - 0.6$ b) $\sqrt{0.30\overline{5} + 0.3\overline{8}}$ c) $0.\overline{428571} + 0.\overline{5}$ d) $\dfrac{0.6\overline{428571}}{2.\overline{285714}}$

3. Was bedeutet «$\sqrt{3}$ ist nicht rational»?

4. Zu welcher «kleinstmöglichen» Zahlenmenge $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ gehören folgende Zahlen?

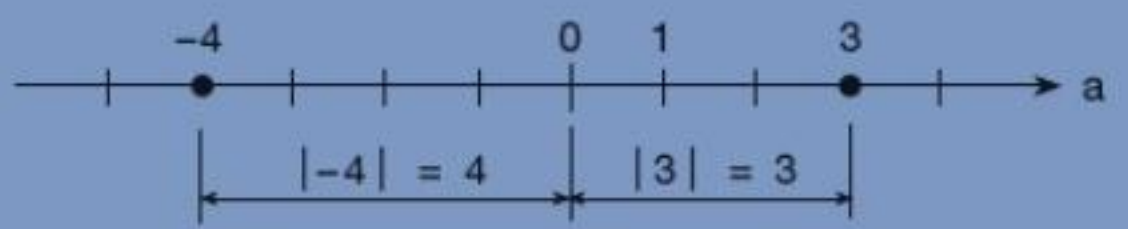
-12	4π	$-2.\overline{16}$	$\sqrt{2^4}$	6754
$5+\sqrt{5}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	$1+\sqrt{2}$	$\sqrt{64}$	$\pi-3$

1.1.2 Der Betrag einer Zahl

$$|a| = \begin{cases} a\ , \text{ falls } & a \geq 0 \\ -a\ , \text{ falls } & a < 0 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Geometrische Veranschaulichung von $|a|$ an der Zahlengeraden:

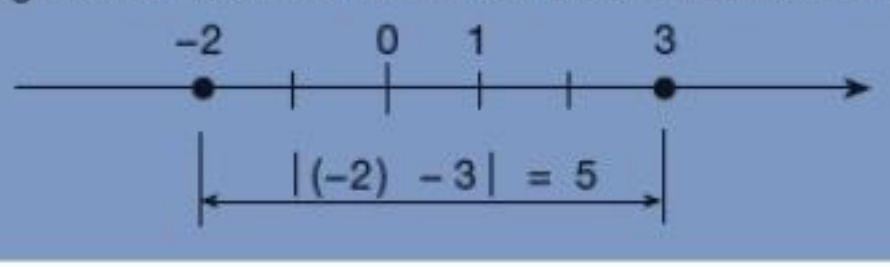
$|a|$ entspricht dem **Abstand** zwischen dem Bildpunkt von a und dem Nullpunkt:



Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a-b| = |b-a| \quad ; \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad ; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$$

Auf der Zahlengeraden bedeutet $|a-b|$ der Abstand zwischen den Bildpunkten von a und b.



5. Berechnen Sie.

a) $|5-2|$ b) $|2-5|$ c) $|6-6|$

d) $2-|-0.8|$ e) $|-0.5|+|-0.6|$ f) $\big||-3|-|-4|\big|$

g) $(-5)\cdot|-5|$ h) $-|0.5\cdot(-0.3)|$ i) $(-2):|-0.5|$

6. Widerlegen Sie mit einem Zahlenbeispiel.

Für alle $a\,;\,b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a+b| = |a|+|b|$

7. Welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die folgende Gleichung?

a) $|x| = 6$ b) $|x| = 2.3$ c) $|x| = -3$ d) $|x - 3| = 2$

e) $|x + 5| = 3$ f) $|x - 8| = 8$ g) $|x| = x$

Wir wissen, dass es ein Unendliches gibt, aber wir sind unwissend über sein Wesen.

Blaise Pascal, 1623–1662, franz. Mathematiker und Philosoph

1.1.3 Terme

Ein **Term** ist eine Zahl, eine Variable oder eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern.

Beispiele: -2.1 ; 0 ; $\sqrt{5}$; a ; $-x$; A ;

$|m|$; $\sqrt{a-b}$; k^n $x(x+2y)-x:y$

Gegenbeispiele: $1:0$; $0:0$; $2<5$; $a+a=2a$

Mit **T(x)** bezeichnen wir einen Term, der die Variable x enthält.
Setzt man für x z.B. die Zahl 3 ein, so schreiben wir **T(3).**

Beispiele: $T(x) = 2x^2 - 4x$ $T(3) = 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 6$

$T(a;b) = a^b - 2ab$ $T(2;3) = 2^3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = -4$

$T(1;1) = 1^1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -1$

Tritt in einem Term <u>dieselbe Variable mehrmals</u> auf (z.B. $x^2 - 3x$), so muss sie jeweils mit derselben Zahl belegt werden.
Treten in einem Term <u>verschiedene Variablen</u> auf (z.B. $2a + 3b$), so dürfen diese mit verschiedenen oder mit gleichen Zahlen belegt werden.

Die Zahl **Null** in der Multiplikation: $a \cdot 0 = 0$

in der Division: $0 : a = 0$, falls $a \neq 0$

$a : 0$ ist nicht definiert

8.

a) $T(z) = 5z^3 - (3z)^2 + 20z - 7$

$T(3) = ?$
$T(-1) = ?$
$T(-2) = ?$

b) $T(x) = \dfrac{2x^3 - 4x}{(x-2)^2}$

$T(-1) = ?$
$T(0) = ?$
$T(2) = ?$

c) $T(a;b) = \dfrac{3a^2 + 2b}{(a+b)^2}$

$T(2;2) = ?$
$T(-2;-5) = ?$
$T(4;-4) = ?$

d) $T(r;s;t) = \dfrac{5rs + 4s^2}{r + s + t^2}$

$T(2;3;4) = ?$
$T(5;-2;-3) = ?$

e) $T(a;b) = \dfrac{2a \cdot |b|}{|a-b|}$

$T(-1;-4) = ?$
$T(-3;0) = ?$
$T(-5;-5) = ?$

Befasst Euch zuerst mit Mathematik, denn die Mathematik ist die Zahl und die Zahl ist Gott. Es gibt allerdings etwas, was uns Gott mehr offenbart und das ist das Leben. Die Zahl und das Leben, darin liegt die ganze Wahrheit, denn es umfasst die Ewigkeit.

Jean-Henri Fabre, 1823–1915, franz. Insektenforscher

9. Analysieren und benennen Sie den folgenden Term.

a) $3x^y$ b) $(3x)^y$ c) $(a-2)a + 3$

d) $(a-2)(a+3)$ e) $(2x - y) : x + y : 2$ f) $(3a + b + c) : (5c - 3)^3$

g) $(g + h + 3gh)^2 \cdot 5h - 2$ h) $(a + 4a^3 \cdot 5b)^2$ i) $25b^3 - 3ac(5a - 2)^3$

j) $a - \sqrt{3x^2 - 3} \cdot 7y^3$ k) $\dfrac{m + n \cdot \sqrt{m + n^2}}{2a}$ l) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2} + z^3}{3z^2}}{4yz} + z$

1.1.4 Polynome

Hier sollen nur Polynome mit einer einzigen Variablen betrachtet werden.

Beispiele: Polynom 1. Grades: x ; $2.6x$; $\frac{1}{3}x - \sqrt{2}$; $4(2x + 11)$

allgemein: $\mathbf{a_1x + a_0}$

Polynom 2. Grades: $-12x^2$; $7u^2 - 3.9$; $x(x - 6)$; $-8y^2 + y - 1.2$

allgemein: $\mathbf{a_2x^2 + a_1x + a_0}$

Polynom 3. Grades: $2k^3$; $2h^3 - \sqrt{3}\,h$; $(2x - 5)^3$; $x(x^2 - 3x)$

allgemein: $\mathbf{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}$

Gegenbeispiele:

$2x^2 + \frac{1}{x}$	Variable x kommt im Nenner vor
$3a + 8 - \sqrt{a}$	Variable a ist unter der Wurzel
$2^n + n^2$	Variable n kommt im Exponenten vor
$\lvert x \rvert - 5x + 3$	Betrag der Variablen

Definition: Ein **Polynom in x** ist ein Term, der auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (1)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Bezeichnungen:

- Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heissen **Koeffizienten.**
- Der höchste Exponent n gibt den **Grad** des Polynoms an.
- Der Term (1) heisst **Grundform** eines Polynoms.
  Beispiel: $x(3 + 2x)$ lautet in der Grundform $2x^2 + 3x$.
  Ein Polynom n-ten Grades hat in der Grundform höchstens $n + 1$ Summanden.

10. Welcher Term ist ein Polynom?

(1) $(1-\sqrt{2})a^2$ (2) $x^{2.5}$ (3) $2u^3-3\sqrt{u}$ (4) $\sqrt{2}\cdot t^3+2t^3-5$

(5) $7x+3|x|$ (6) $2n(1-n^3)$ (7) $y^3-6+\frac{1}{y}$ (8) $x^5-2x^2+3^x$

11. Notieren Sie die Koeffizienten des Polynoms ($a_0 = ?$, $a_1 = ?$, ...).

a) $8-x$ b) $3x-5x^2$ c) $x^3-2x^2-2.6$

d) $-5y^4-\frac{y^2}{3}+\frac{y}{2}$ e) $2x(1-x^2)$ f) $u^3+u-\sqrt{2}\,u$

1.1.5 Ordnungsrelationen

Symbol	Sprechweise, Bemerkung	Beispiele
$a < b$	«a ist kleiner als b» «a kleiner b» Anstatt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.	$2 < 3$ $-2.1 < -2$
$a > 0$	«a ist positiv»	$\sqrt{2} > 0$
$a < 0$	«a ist negativ» Unterscheide zwischen $-a$ und $a < 0$.	$(-2)^3 < 0$
$a \leq b$	«a ist kleiner oder gleich b» d.h. $a < b$ <u>oder</u> $a = b$	$2 \leq 5$ $2 \leq 2$
$a < x < b$	«x grösser a und kleiner b» «x liegt zwischen a und b» d.h. $a < x$ <u>und</u> $x < b$	$3 < \pi < 4$ $\lvert x\rvert < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$

12. Wie viele Zahlen aus der Grundmenge G liegen zwischen -8.12 und 7.01?

a) $G = \mathbb{N}$ b) $G = \mathbb{Z}$ c) $G = \mathbb{Q}^+$ d) $G = \mathbb{R}$

13. Setzen Sie zwischen die beiden Zahlen eines der Zeichen $>$, $<$ oder $=$, sodass eine wahre Aussage entsteht.

a) π .... $\sqrt{10}$ b) $-\sqrt{3}$ .... $-\sqrt{2}$ c) $|-3|$ .... $|-4|$

d) $\frac{1}{3}$ .... 0.333 e) π .... $\frac{22}{7}$ f) 2 .... $1.\overline{9}$

g) $|2-3|$ .... $|3-2|$

14. Welche Aussagen sind falsch?

a) $|-4| < |2|$ b) $|5| > |-5|$ c) $-2 < -1.4$

d) $0.\overline{9} < 1$ e) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| > 0$

f) für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $-a < 0$

g) für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a - b| < |b - a|$

h) $2 \leq 2$ i) $2 < 2$ j) $0.777 > \frac{7}{9}$

k) $3.1 < \pi < 3.2$

Der ganze Himmel ist Harmonie und Zahl.

Pythagoras, um 582 bis 497 v. Chr.,
griech. Philosoph und Mathematiker

15. Für welche reellen Zahlen a und b ist die Ungleichung erfüllt?

a) $a \cdot b > 0$ b) $a \cdot b < 0$ c) $\frac{a}{b} > 0$ d) $\frac{a}{b} < 0$

16. Für welche ganzen Zahlen x ist die Ungleichung erfüllt?

a) $|x| < 3$ b) $-3.2 \leq x < 4.2$ c) $|x| \leq 3$

d) $|x + 2| \leq 10$ e) $|x - 2| \leq 10$ f) $|x| \geq x$

17. Stellen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung auf der Zahlengeraden grafisch dar; wobei $\mathbb{R}$ die Grundmenge sei.

a) $-4 < a < -1$ b) $-2 \leq a \leq 4$ c) $|a| \leq 2$ d) $|a - 8| \leq 1.5$

18. a) Die Länge a eines Werkstückes soll die Betragsungleichung $|a - 23\text{ mm}| \leq 0.2\text{ mm}$ erfüllen. Zwischen welchen Werten darf a liegen?

b) Schreiben Sie $4.55\text{ cm} \leq b \leq 4.65\text{ cm}$ als Betragsungleichung.

Die Zahlen sind freie Schöpfung des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer zu fassen.

Julius Wilhelm Dedekind, 1831–1916, Mathematiker

1.2 Addition, Subtraktion

19. Vereinfachen Sie.

a) $a - (a - ((-b - a) + 2a))$

b) $10x - [-(-(x + y) - (x - y)) - x]$

c) $2a - [3b - (2c + 4d) - (3a + (2b - c))]$

d) $3m - 4n - [-(-(2m + n) - (m - 2n)) + n]$

e) $-2a^3 - [4a^2 - ((-a^3 + 6a^2) - 3a^3 + 10a^2) - 3a^3]$

f) $b^3 - [-b^2 + 2 - ((-3b^3 + 1 + b^2) + 1)]$

Logik ist die Leidenschaft, zwei und zwei zu addieren.

Helmar Nahr, *1931, deutscher Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler

20. Setzen Sie jeweils für A einen Term und für □, ■, ◇ und ◆ ein Operationszeichen (+ oder –) ein, sodass eine allgemeingültige Gleichung entsteht.
Suchen Sie alle Möglichkeiten.

a) $(a \square b) \blacksquare (a \blacklozenge b) = 2b$

b) $r \square (s \blacksquare 37) + (s \blacklozenge 37) = r \blacklozenge 74$

c) $c - 3d \blacksquare [\lozenge (2c \lozenge d) + c - 3d] = 2c - d$

d) $p \square (q \blacklozenge r) \square r \blacksquare (p \square q) = 0$

e) $5u \square (3u \blacklozenge A) = 3.5u$

f) $38v \blacksquare (-A \blacklozenge 11v) = 20v$

Rechnen muss ein Knabe lernen, damit er sein Leben berechne, denn die gesamte Vernunft, zumal die Führung menschlicher Dinge, heisst Rechnen.

Johann Gottfried Herder, 1744–1803, Geschichtsphilosoph und Schriftsteller

1.3 Multiplikation

1.3.1 Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln

Distributivgesetz:

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

Unterscheide:

$a(bc) = abc$

Binomische Formeln:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a - b)^2 = (b - a)^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Trinomische Formel:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

21. Multiplizieren Sie aus.
Schreiben Sie die Lösung als möglichst einfache algebraische Summe.

a) $(4y + 6x)(3a - 5b) - (2x - 6y)(2a + 3b)$

b) $(4x + 2b)(6x^2 - b^2)$

c) $(4a - 5x)(5c + 4b)4n$

d) $6ax(6d - c)(4b + 4y)3n$

e) $(4 + 2a - 3c)(12 - 2d - 5b) - (12d - 6b)9a$

f) $(3a - 2b)(2c - 4d)(5x - 2y)$

g) $(2a - 6c)(4b - 2d) - (2a - 6c)(5b - 3d)(-3x)$

h) $(a - 1)(4a^2 + 3a - 1)$

22. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln.

a) $(5x + 3y)^2$

b) $(a - 9b)(9b + a)$

c) $(-5x^2 - 2y)^2$

d) $(4m^2 - 9n^2)^2$

e) $(2 - a)^2 - (a + 2)(2 - a) + (a + 2)^2$

f) $(a + 1)(a - 1)^2$

g) $(2 + 3k)^2(2 - 3k)^2$

h) $(4r + 3s)(3s - 4r)(2r - 3s)$

23. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln.

Beispiel: $[a+b+c]\,[a+b-c] = [(a+b)+c]\,[(a+b)-c] = (a+b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

a) $(1 + a + b)(1 + a - b)$ b) $(2x - y - 2)(2x - y + 2)$

c) $(4 + z - w^2)(4 + z + w^2)$ d) $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$

24. Berechnen Sie mithilfe von $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

a) $(x + 1)^3$ b) $(b - 3)^3$ c) $(3m - 4n)^3$

25. Berechnen Sie mithilfe von $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

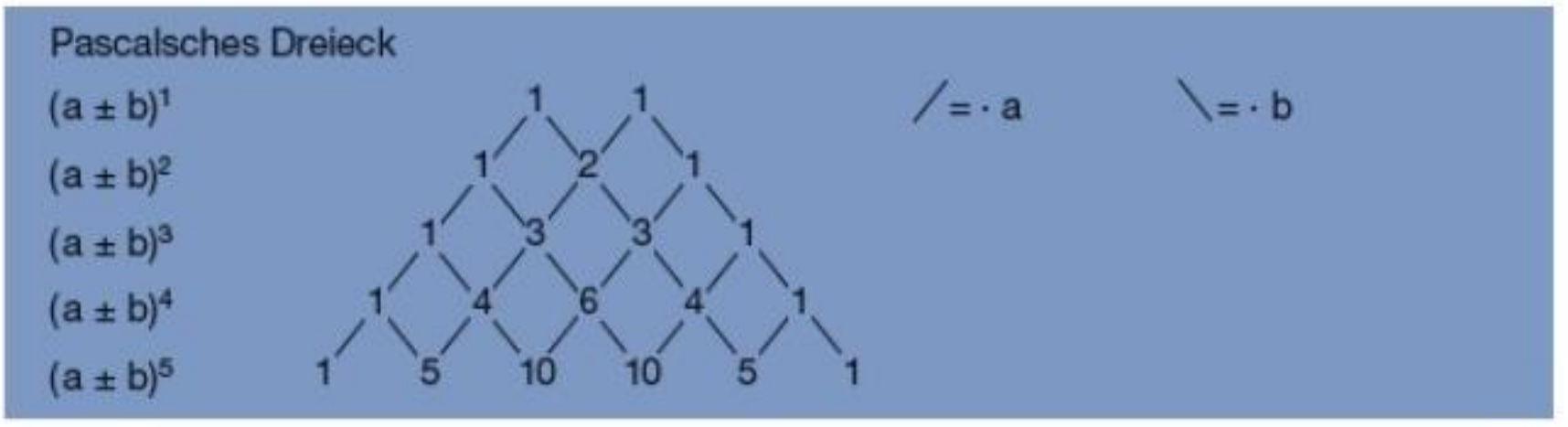
a) $(2a + 3b + 1)^2$ b) $(u - v - w)^2$ c) $(4a - 3b + 2c)^2$

26. Schreiben Sie die folgende Potenz als algebraische Summe mithilfe des Pascalschen Dreiecks.

a) $(a - b)^4$ b) $(c + 2d)^4$ c) $(2x + 3)^5$

d) $(-y + x)^5$ e) $(1 - a)^6$ f) $(2u - 3v)^6$

Pascalsches Dreieck



27. Bringen Sie das Polynom auf die Grundform.

a) $2a(1 - a^3)$ b) $(2 - x)^3$

c) $\frac{1}{2}(3 - 2u)^2$ d) $t(t - 1)(t + 3)$

28. Bringen Sie das Polynom auf die Grundform.

a) $\sqrt{2} \cdot x - 3x + 8$ b) $3 - 2.1x^2 - 4.9x^2$

c) $1 + a - a^3 + \frac{1}{3}a + 1.6a^3$ d) $(2 - 3n)^2 - \sqrt{5} \cdot n^2$

1.3.2 Faktorzerlegung

Siehe auch «2.4.3 Produkt = Null».

Wir unterscheiden vier Methoden:

1) **Ausklammern eines gemeinsamen Faktors** (Aufgaben 29, 30)

Beispiel: $6a^3b^2 - 3a^2b^3 + 9a^2b$

$= 3a^2b(2ab - b^2 + 3)$

2) **Mehrmaliges Ausklammern** (Aufgaben 31, 32)

Beispiel: $u^2 - uv - uw - 3u + 3v + 3w$

$= u(u - v - w) - 3(u - v - w)$

$= (u - v - w)(u - 3)$

3) **Binom** $a^2 - b^2$ (Aufgaben 33, 34)

Beispiel: $(x^2 + 2)^2 - (x - 2)^2$

$= [(x^2 + 2) - (x - 2)]\,[(x^2 + 2) + (x - 2)]$

$= [x^2 - x + 4]\,[x^2 + x]$

$= (x^2 - x + 4)(x + 1)x$

4) **Polynom 2. Grades** $ax^2 + bx + c$ (Aufgaben 35 bis 39)

Beispiel: $x^2 + 3x - 28 = (x + 7)(x - 4)$

29. Klammern Sie (-1) aus.

a) $a - b$ b) $-2m - 3n$ c) $-2a^2 + 3a - 7$

Zerlegen Sie in möglichst viele Faktoren (Nr. 30–43)

30. a) $4a^4 - 8a^3 + 20a^2 - 4a$ b) $9a^2b^2 - 12a^2b + 3ab^2$

c) $12x^2y - 8x^2y^3 - 32x^3y$ d) $n(x - y) - (x - y)$

e) $(4a - 5b)(3p - 2q) - (a + 5b)(3p - 2q)$ f) $m(a - b) + n(b - a)$

g) $r(a - 2) - r^2(2 - a) + r^3(2 - a)$

h) $(x + 1)(x - y) - (x - 3)(x - y) + (x + 2)(y - x)$

31. a) $ac - ad + bc - bd$ b) $ab - ac - b + c$

c) $2x^3 - 3x^2 + 10x - 15$ d) $-6a^4 + 10a^3 + 15a - 25$

e) $20ab - 1 + 4b - 5a$ f) $(a - 1)(x - y) - x + y$

g) $16ac - 24bc - 40ad + 60bd$ h) $10abc - 4 - 2a + 20bc$

i) $25xy^3 - 50y^3z - 15x^2y^2 + 30xy^2z$

32. a) $ax - bx + 2x - ay + by - 2y$ b) $2ax - b - 5ay - 2bx + a + 5by$

c) $2x^2 + 10xy - 30z - 12xz + 25y + 5x$ d) $10ac - 2ad - 5bc + 4ae - 2be + bd$

e) $30r^2 + 30s - 45rs - 20t - 20r + 30\,rt$

f) $38a^3 - 36a^2c - 57a^2 + 54ac - 19a + 18c$

33. Verwenden Sie die binomische Formel $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$.

a) $1 - x^2$ b) $9a^2 - 49b^2$

c) $u^3 - 25u$ d) $8m^2 - 98n^2$

e) $2x^3y - 18xy^3$ f) $h^4 - 16$

g) $25x^2 - (2x + 3)^2$ h) $(a^2 - 2)^2 - (a + 1)^2$

i) $4(a - b)^2 - 81c^2$ j) $100t^2 - 9(u - t)^2$

k) $(2d - 1)^2 - 36(2 - d)^2$ l) $a^4 - (a^2 + a + 1)^2$

34. Bringen Sie den Term zuerst auf die Form $\mathbf{A^2 - B^2}$.

Beispiel: $4a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = (2a)^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$

$= (2a)^2 - (b - c)^2 = (2a - b + c)(2a + b - c)$

a) $a^2 + 2ae + e^2 - b^2$ b) $s^2 - f^2 + g^2 - 2gs$

c) $x^2 - 6x + 9 - y^2$ d) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$

e) $4a^2 - y^2 - 9x^2 + 6xy$ f) $1 - u^2 - x^2 - 2ux$

g) $9x^2 - 6xy - (z^2 - y^2)$ h) $4a^2 - 25b^2 - 9c^2 + 30bc$

i) $4v^2 + 49u^2 - (25t^2 + 28uv)$

35. a) $x^2 + 8x + 15$ b) $a^2 - a - 12$ c) $r^2 - 15r + 54$

d) $b^2 + 3b - 28$ e) $h^2 + 24h + 135$ f) $u^2 + 2u - 143$

g) $v^2 - 12v + 36$ h) $m^2 - 43m - 240$ i) $t^2 + 2t - 168$

j) $a^4 + 20a^2 + 96$ k) $b^4 - 4b^2 - 77$ l) $x^4 + 3x^2 - 108$

36. a) $3a^2 + 13a - 30$ b) $9m^2 + 48m + 64$ c) $6x^2 - 29x + 20$

d) $35y^2 + 3y - 2$ e) $4k - 4 - k^2$ f) $15b - 28 - 2b^2$

37. a) $a^2 + 28ab + 75b^2$ b) $x^2 - 15xy + 54y^2$ c) $p^2 - 8pq - 65q^2$
d) $2a^2 + 22ab + 48b^2$ e) $15u^2 - 17uv - 42v^2$ f) $14x^2 - 41xy + 15y^2$

38. a) $y^2 - (c - 3)y - 3c$ b) $z^2 + (w - 4)z - 4w$ c) $5p - (5 + p)z + z^2$
d) $-(2t - 5)u - 10t + u^2$

39. *Beispiel:* $9(a + b)^2 - 12(a + b) - 5 = (3(a + b))^2 - 12(a + b) - 5$
$= [3(a + b) + 1][3(a + b) - 5] = (3a + 3b + 1)(3a + 3b - 5)$

a) $15 + (r - t)^2 + 8(r - t)$ b) $(p + q) - (p + q)^2 + 12$
c) $77 + 4(d - e) - (d - e)^2$ d) $-143 + 2(m - n) + (m - n)^2$
e) $9(m + n)^2 - 12(m + n) - 5$ f) $7 + 24(f + g) - 16(f + g)^2$

40. *Beispiel:* $2pq(r - s) + q(r - s)^2 + p^2q = q[p^2 + 2p(r - s) + (r - s)^2]$
$= q(p + (r - s))^2 = q(p + r - s)^2$

a) $-(a - b)2c + c^2 + (a - b)^2$ b) $t^4 + t^2(u + v)^2 - (u + v)2t^3$

Alle Methoden kombiniert und in beliebiger Reihenfolge.

41. a) $a^5 - 81a$ b) $3a^2(b - 2) - ab(2 - b) + a(b - 2)$
c) $2x^3 - 22x^2 + 20x$ d) $10pq - 10q - p^2 + p$
e) $a^2 + ax - bx - b^2$ f) $4n^2 - m^2 - p^2 + 2mp$

42. a) $3x^3 - 18x^2 + 24x$ b) $(a^2 - 1)^2 - (a + 2)^2$
c) $2a^2 - 15ab + 18b^2$ d) $5ax - 3ay - 5x + 3y + 5bx - 3by$
e) $u^2(v - 1) - 3u(1 - v) - 2(1 - v)$ f) $9m^2 - n^2 - 9p^2 + 6np$

43. a) $2u^2 + 7u + 3$ b) $32x^5 - 162x$
c) $8axy - 20ax - 2ay^2 + 5ay$ d) $4x^2 - 9a^2 - 6ab - b^2$
e) $a^2(x^2 - 1) + a(1 - x^2) - 6(x^2 - 1)$ f) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2ad - 2bc$

44. Zerlegen Sie A in ein Produkt mit möglichst vielen Faktoren.
$A = a(y - 1)^3 + (3a - 1)(y - 1)^2 + (2a - 2)(y - 1)$

1.4 Division

Siehe auch «1.6.1 Die Quadratwurzel»; Nr. 135, 136, 138, 139

1.4.1 Erweitern und kürzen

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{a-b}{b-a} = -1$$

45. Erweitern Sie den Bruch so, dass der in der Klammer angegebene Nenner entsteht.

a) $\frac{x}{-y}$ (y)

b) $\frac{x-5}{y-4x}$ $(4x-y)$

c) $\frac{pq}{p+q}$ (q^2-p^2)

d) $\frac{5x}{3x-2}$ $(9x^2-4)$

46. Erweitern Sie mit (-1).

a) $\frac{4x-2}{-x}$

b) $\frac{4-a}{1-a}$

c) $\frac{-m-1}{m-1}$

d) $\frac{-a(a-1)}{-b}$

e) $\frac{(n-1)(n-2)}{-n}$

f) $\frac{(x-y)^2}{-x-y}$

47. Kürzen Sie vollständig; falls möglich.

a) $\frac{6a^2-6ab}{3a^2-6ab+3b^2}$

b) $\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$

c) $\frac{a+b-a^2}{a+b}$

d) $\frac{x^2-y^2}{(y-x)^2}$

e) $\frac{ax+a-x-1}{ax-a-x+1}$

f) $\frac{12c^2-cd-d^2}{d^2-cd-20c^2}$

Der Mensch ist offenbar zum Denken geschaffen, das ist seine Würde und sein ganzes Verdienst.

Blaise Pascal, 1623–1662, frz. Mathematiker und Philosoph

48. Kürzen Sie vollständig; falls möglich.

a) $\dfrac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^5 - 8x^3 + 16x}$ b) $\dfrac{a^4 + 1}{a^2 + 1}$ c) $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}{x^2 + 2xz + z^2 - y^2}$

d) $\dfrac{a^4 - 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$ e) $\dfrac{4u^2 - 6u}{8u^3 - 16u^2 - 18u + 36}$ f) $\dfrac{3n^2 + 8n + 4}{n^2 - 4n + 4}$

49. Kürzen Sie vollständig.

a) $\dfrac{a^2 + ax - bx - b^2}{a^2 - b^2 - x^2 - 2bx}$ b) $\dfrac{-2(p+q)(p-q)^2 + (p-q)^3 + (p+q)^2(p-q)}{5p^4 - 10p^3q + 5p^2q^2}$

1.4.2 Addieren und subtrahieren

$$\frac{p^2 - 8p}{2p^2 + p - 15} - \frac{p^2}{5p - 2p^2}$$

1) Einzelbrüche kürzen

$$= \frac{p^2 - 8p}{2p^2 + p - 15} - \frac{p^2}{p(5 - 2p)} = \frac{p^2 - 8p}{2p^2 + p - 15} - \frac{p}{5 - 2p}$$

2) Hauptnenner bestimmen (Einzelnenner in Faktoren zerlegen)

$$= \frac{p^2 - 8p}{(2p - 5)(p + 3)} - \frac{-p}{2p - 5} \quad [\text{Hauptnenner} = (2p - 5)(p + 3)]$$

3) Einzelbrüche erweitern und addieren resp. subtrahieren

$$= \frac{p^2 - 8p - (-p)(p + 3)}{(2p - 5)(p + 3)} = \frac{p^2 - 8p + p^2 + 3p}{(2p - 5)(p + 3)} = \frac{2p^2 - 5p}{(2p - 5)(p + 3)}$$

4) Ergebnis, wenn möglich, kürzen

$$= \frac{p(2p - 5)}{(2p - 5)(p + 3)} = \frac{p}{p + 3}$$

50. Bestimmen Sie das kgV folgender Terme.

a) $6r$; $3rs$; $4s$; $8rx^2$; $8x^2$; $12sx^2$ b) a ; $a + b$; $a + b + c$

c) a ; $a - 1$; $(a - 1)^2$; $(a - 1)^3$ d) $1 - p^2$; $p - 1$; $p + 1$

51. Bestimmen Sie das kgV folgender Terme.

a) $8a^2 - 8b^2$; $(4a - 4b)^2$

b) $y^2 - 3y + 2$; $y^2 + y - 6$

c) $t^2u - u^3$; $t^2 - tu$; $tu + t^2$

d) $u - 1$; $u + 2$; $u^2 - 1$; $u^3 + 2u^2 - u - 2$

Die Arznei macht kranke, die Mathematik traurige und die Theologie sündhafte Leute.

Martin Luther, 1483–1546, deutscher Reformator

52. Schreiben Sie als *einen* gekürzten Bruch.

a) $1 - a - \frac{2a}{a-1}$

b) $\frac{5}{u-1} + \frac{2}{1-u}$

c) $5z + \frac{3}{z} + \frac{z-3}{3-z}$

53. Schreiben Sie als *einen* gekürzten Bruch.

a) $\frac{u}{u+v} - \frac{u-v}{2(u+v)}$

b) $\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}$

c) $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{2-x}$

d) $\frac{m}{m-n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2}$

e) $\frac{(3x-2)^2}{4-9x^2} + \frac{27x^2-12}{27x^2-36x+12}$

f) $\frac{7a-2a^2}{1-4a^2} + \frac{a+1}{2a-1} - \frac{2a}{2a+1}$

54. Schreiben Sie als *einen* gekürzten Bruch.

a) $\frac{m+13}{m^2+m-6} - \frac{m+1}{m^2-3m+2}$

b) $\frac{x+5}{x^2-2x-3} + \frac{9x-7}{x^2-x-6} - \frac{4x+3}{x^2+3x+2}$

c) $\frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a-b}{ab+b^2} + \frac{a^2-3ab}{a^2b-b^3}$

d) $\frac{n+1}{2n-2} + \frac{2n^2-3n}{n^2+n} + \frac{n^2+3}{2-2n^2}$

e) $\frac{1}{h-1} - \frac{4}{4h+4} + \frac{h-2}{h^2-h-2} - \frac{3h+6}{3h^2+3h+3}$

f) $\frac{2ax-3by}{2x^2y-2xy^2} - \frac{2ax+3by}{2x^2y+2xy^2} - \frac{2ax-2ay}{x^3-x^2y-xy^2+y^3}$

55. Schreiben Sie als algebraische Summe mit möglichst einfachen Summanden.

Beispiel: $\frac{2a+5-b}{b} = \frac{2a}{b} + \frac{5}{b} - 1$

a) $\frac{10a+2}{5}$ b) $\frac{12m-8n+2}{-4}$ c) $\frac{12x^3-x^2+9}{3x}$

d) $\frac{a^2-a-1}{a^2}$ e) $\frac{8m^2+12mn-4n^2-(4mn)^2}{-4m^2n}$ f) $\frac{2(a+b)-2a^2}{a+b}$

56. Bringen Sie das Polynom auf die Grundform.

a) $\frac{6x-x^3}{7}$ b) $\frac{6-4a+2a^2}{4}$

c) $\frac{k(k-2)^2}{2}$ d) $\frac{1.5-\sqrt{3}\,x+x}{3}$

1.4.3 Multiplizieren

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^2\left(1+\frac{a^2}{a^2+a}\right)\left(2-\frac{2a^2+2a-1}{a^2+a}\right)$$

1) Einzelbrüche kürzen

$$= \left(1+\frac{1}{a}\right)^2\left(1+\frac{a}{a+1}\right)\left(2-\frac{2a^2+2a-1}{a(a+1)}\right)$$

2) Jeden Faktor als Bruch schreiben

$$= \left(\frac{a+1}{a}\right)^2\left(\frac{a+1+a}{a+1}\right)\left(\frac{2a^2+2a-2a^2-2a+1}{a(a+1)}\right) = \frac{(a+1)^2}{a^2}\cdot\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1}{a(a+1)}$$

3) Rechenregel anwenden

$$= \frac{(a+1)^2(2a+1)}{a^2(a+1)a(a+1)}$$

4) Kürzen

$$= \frac{2a+1}{a^3}$$

57. Vereinfachen Sie so weit als möglich. Geben Sie die Lösung als gekürzten Bruch an.

a) $(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

b) $\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)$

c) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)^2$

d) $\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{2x}{x+y}-\frac{x-y}{x}\right)$

58. Vereinfachen Sie so weit als möglich.

a) $\frac{u}{u+1}\left(\frac{1}{u}-u\right)-\frac{u}{1-u}\left(\frac{1}{u}+u\right)$

b) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{b^2}$

c) $(a-1)\left(a+\frac{1}{1-a}\right)\left(1+a-\frac{a^2}{a+1}\right)$

d) $\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1}\right)$

e) $x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^2\left[1-\left(\frac{x}{x-2}\right)^2\right]$

1.4.4 Dividieren

Doppel- und Mehrfachbrüche werden mit der sogenannten **Erweiterungsmethode** vereinfacht.

Beispiel:
$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}}=\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 24}{\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right)\cdot 24}=\frac{8+6}{9-20}=-\frac{14}{11}$$

kgV (3; 4; 8; 6) = 24

Der Erweiterungsterm ist das kgV aller Teilnenner.

59. Vereinfachen Sie mithilfe der Erweiterungsmethode.

a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

b) $\frac{\frac{2}{a}}{b}$

c) $\frac{x}{\frac{3}{y}}$

d) $\frac{\frac{a}{a-1}}{a+1}$

e) $\frac{2n}{\frac{3}{n-2}}$

f) $\frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{x^3}}$

60. Vereinfachen Sie den Doppelbruch mithilfe der Erweiterungsmethode.

a) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$ b) $\dfrac{1+\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}}$ c) $\dfrac{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}{m-n}$

d) $\dfrac{a+b}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$ e) $\dfrac{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{a+b}{d}}$ f) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$

61. Vereinfachen Sie den Doppelbruch mithilfe der Erweiterungsmethode.

a) $\dfrac{x}{1-\frac{x}{x-1}}$ b) $\dfrac{4}{\frac{3a}{3-a}-a}$ c) $\dfrac{1}{\frac{2x^2}{1+x}-2x}$

d) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}+1}$ e) $\dfrac{\frac{4}{a^2}-\frac{4}{ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}}$ f) $\dfrac{\frac{1}{a-1}+1}{\frac{a}{a-1}-1}$

> Dieses Prinzip ist so vollkommen allgemein, dass keine Anwendung möglich ist.
>
> George Polya, 1887–1985, Mathematiker

62. Vereinfachen Sie mithilfe der Erweiterungsmethode.

a) $\dfrac{u+\frac{1}{u-1}}{u-\frac{1}{u-1}}$ b) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+1}{\frac{1}{1+a}-1}$ c) $\dfrac{x-y-\frac{x-y}{y+x}}{\frac{x}{y}-\frac{x}{x+y}}$

d) $\dfrac{\frac{b}{b^2-1}}{\frac{1}{b+1}-\frac{1}{b-1}}$ e) $\dfrac{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b-a}}$ f) $\dfrac{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}-\frac{1-x^2}{(x-1)^2}}$

63.* Vereinfachen Sie den Mehrfachbruch.

a) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3}}}$ b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}$ c) $\dfrac{u-\dfrac{1}{u}}{u-\dfrac{u}{u+\dfrac{1}{u}}}$

d) $\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-x}}}$ e) $\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{z}}}}$ f) $3k+\dfrac{56}{7+\dfrac{21k}{\dfrac{64-9k^2}{8+3k}}}$

Eifer ist Begeisterung, gemildert durch Vernunft.

Blaise Pascal, 1623–1662, franz. Mathematiker und Philosoph

64.* Vereinfachen Sie den Mehrfachbruch.

a) $\dfrac{e-\dfrac{25}{e}}{\dfrac{-e^2+2e+15}{\dfrac{e^2-9}{3-e}}-2e}$ b) $\dfrac{\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}}$

c) $\dfrac{\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{b}}{2a+\dfrac{(2b-3a)^3}{\dfrac{(27a^2+12b^2)(3a+2b)}{9a+6b}-12ab}}$

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717–1783, Philosoph, Mathematiker und Musiktheoretiker

1.4.5 Polynomdivision

65. Führen Sie folgende Division aus.

a) $(9x^3 - 6x^2 - 8x) : (3x - 4)$

b) $(7x^2 - 36 + 6x^3) : (3 - 2x)$

c) $(135a^2 + 77 - 30a + 26a^3) : (7 - 4a + 13a^2)$

d) $(81a^4 - 256b^4) : (3a + 4b)$

66. Führen Sie folgende Division aus.

a) $(8x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 10xy + 2xz + 10yz) : (2x + 3y - z)$

b) $(4a^3 - a^2 - 6a^2b + 2ab - 5ab^2 + 2b^3) : (a - 2b)$

67. Führen Sie folgende Division aus.

a) $(3m^4 + 6 - 2m^2 + m^3) : (m^2 + 2m)$

b) $x^4 : (x + 1)$

c) $(x^3 + y^3 + x^2y + 2xy^2) : (x + y)$

d) $(a^2 + b^2) : (a - b)$

68. Welche Zahl muss man für x einsetzen, damit die folgende Division aufgeht?

a) $(3a^4 + 2a^3 - 4ax - 6) : (a - 2)$

b) $(b^3 + 2bx - 6b^2 - 1) : (b - 6)$

c) $(8n^3 - 2n^2 + nx + 1) : (2n + 1)$

d) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + x) : (a - 2)$

69. Welchen Term muss man für x einsetzen, damit die folgende Division aufgeht?

$(20a^3 - 27a^2b + x + 5ab - 3b^2) : (4a^2 - 3ab + b)$

70. Für welchen Wert von k erhält man bei den folgenden beiden Divisionen den gleichen Rest?

$(x^2 - 8x + k + 7) : (x - 3)$ und $(x^2 - 9x - 3k) : (x - 4)$

71. Kürzen Sie.

a) $\dfrac{x^2(x - 6) - (10 - 13x)}{x - 2}$

b) $\dfrac{4u - 6}{8u^3 - 16u^2 - 18u + 36}$

1.4.6 Vermischte Aufgaben

72. Vereinfachen Sie so weit als möglich.

a) $$\frac{1-\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\frac{x^2+1}{x^2-1}-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

b) $$v-(z+v)\,\frac{\frac{z+v}{z-v}+\frac{4vz}{v^2-z^2}}{\frac{v}{z}-1}$$

c) $$\frac{u-3v}{u^2-v^2}\cdot\frac{u+v}{u}+\frac{3uv-v^2}{u^2-2uv+v^2}:\frac{v^2}{u-v}$$

d) $$\left(\frac{a+x}{2x}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2-\frac{\frac{a+x}{x}-\frac{2x}{x-a}}{\frac{a^2+x^2}{x-a}}$$

73. Bringen Sie den folgenden Term auf die einfachste Form.

a) $$\frac{4a+3}{a+1}:\frac{2a+1-\frac{1}{8a+4}}{2a+1+\frac{a}{2a+1}}$$

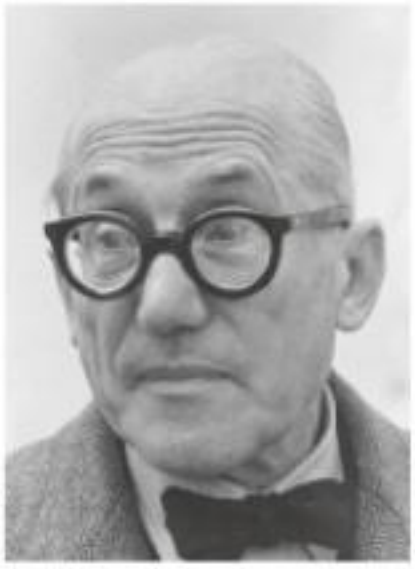
b) $$\left(1+\frac{b}{a}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{2b^2(b-c)^2}{2ab-2a^2}$$

c) $$[(x-2)^3+x^3-8]:(x-2)$$

d) $$\frac{\frac{1-7a}{a^2-4a+3}-\frac{a}{a-3}}{\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{6a}}$$

Die Natur ist mathematisch, die Meisterwerke der Kunst sind im Einklang mit der Natur; sie drücken die Naturgesetze aus und bedienen sich ihrer. Folglich ist das Kunstwerk mathematisch und der Wissenschaftler kann das strengste Urteil anlegen und unfehlbare Formeln anwenden.

Le Corbusier, 1887–1965, Schweizer Architekt



74. Vereinfachen Sie so weit als möglich.

a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{(a-b)^2}{a+b}-(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

b) $\dfrac{1-\frac{1}{c+1}}{1+\frac{d^2-1}{1-c^2}}-\dfrac{1-\frac{1}{d}}{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}$

c) $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a-b)}{\frac{a-1}{1-\frac{1}{a}}+b}\cdot ab-\frac{a^2-ab-a+b}{2(a-1)}$

d) $\left(1-\frac{a}{b-a}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{b}{a}-1}-\left(\frac{1}{1-\frac{b}{a}}\right)^2}$

75. Vereinfachen Sie so weit als möglich.

a) $3a+\dfrac{56}{7+\frac{21a}{\frac{64-9a^2}{8+3a}}}$

b) $\dfrac{\frac{u-v}{u+v}-\frac{u}{u-v}}{\frac{u+v}{u-v}-\frac{v}{u+v}}$

c) $\dfrac{\frac{m}{m+1}-\frac{m}{m+2}}{\frac{m}{m+2}-\frac{2m}{m+1}}$

d) $\dfrac{\left(\frac{q}{p}-\frac{p}{q}\right)^2(pq)^2}{(p+q)(q-p)}$

76. Bringen Sie den Term auf die einfachste Form.

a) $(3x+3y):\dfrac{5x+5y}{\frac{(x-3y)(x+2y)}{(3y-x)(y-x)}-\frac{2xy+2y^2}{x^2-y^2}}$

b) $\dfrac{1}{b-\frac{2ab}{a+b}}+\dfrac{1}{\frac{2ab}{a+b}-a}-\dfrac{b-a}{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2-ab}$

c) $\left[p^2\left(\frac{1+p}{1-p}-\frac{1-p}{1+p}\right)\right] : \left[\left(1-\frac{1}{1+p}\right)\left(\frac{1+p}{1-p}-1\right)\right]$

d) $\frac{(a+b)^2(a-b)^2+2(a+b)(a-b)^3+(a-b)^4}{(a^3-2a^2b+ab^2)((a+b)^2-(a-b)^2)}$

77. Bringen Sie den Term auf die einfachste Form.

a) $(c+d)\,\frac{\frac{c+d}{c-d}+\frac{4cd}{d^2-c^2}}{\frac{d}{c}-1}$

b) $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{a+\frac{1}{b}}{a+\frac{c}{bc+1}}$

c) $\frac{\frac{x^2-xy+y^2}{y^2}-1}{(x^2-y^2)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)\left(x+\frac{x}{y}\right)}$

d) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b-c}{a}+\frac{ac}{b^2-bc}}{\frac{a}{b-c}+\frac{b-c}{a}+2}$

78. Vereinfachen Sie.

a) $\frac{1-\frac{1}{w+2}}{1+\frac{w^2-1}{1-(w+1)^2}}\cdot\frac{1-\left(\frac{w}{w+1}\right)^2}{\frac{2w}{w+1}-\frac{2}{w+1}}$

b) $\frac{1}{1+\frac{z^2}{1+2z}}-\frac{\frac{z+1.5}{1+z}+\frac{z+0.5}{1-z}}{\frac{2}{z}-\frac{1}{\frac{3z^3-z}{3z-1}-z^2}}$

1.5 Potenzen

1.5.1 Definition von a^n $(n \in \mathbb{Z})$

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad (n \geq 2)$$

Der Term a^n heisst **Potenz;** a heisst **Basis,** n heisst **Exponent.**

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Beachte: $(-a)^n \neq -a^n$, *Beispiel:* $(-2)^4 \neq -2^4$

$ka^n \neq (ka)^n$, *Beispiel:* $2a^3 \neq (2a)^3$

79. Berechnen Sie ohne Rechner.

a) $(-2)^3$; -2^3 ; $-(-2)^3$ b) $(-2)^4$; -2^4 ; $-(-2)^4$

c) 2^{-2} ; $(-2)^{-2}$; -2^{-2} d) 2^{-3} ; $(-2)^{-3}$; -2^{-3}

e) $3^0 - 3^{-1} - 3^{-2}$

80. Berechnen Sie ohne Rechner den Wert von $2x^{-3}$ für:

$x =$ -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3

81. Berechnen Sie ohne Rechner den Wert von x^{-x} für:

$x =$ -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3

82. Berechnen Sie die folgende Potenz ohne Rechner.

Beispiel: $-0.4^{-3} = -\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = -\left(\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$

a) 0.25^{-2} b) 0.2^{-3} c) -0.3^{-4} d) $(-0.125)^{-3}$

e) -0.75^{-3} f) 1.5^{-4} g) $(2^{-1} + 3^{-1})^{-1}$ h) $(2^0 - 2^{-2} - 2^{-3})^{-2}$

83. Schreiben Sie als Potenz, deren Basis eine möglichst kleine natürliche Zahl ist.

a) $\frac{1}{8}$ b) 0.0001 c) $\frac{1}{81}$ d) 0.25

e) $\frac{1}{625}$ f) 0.0625 g) $\frac{1}{216}$ h) 0.008

84. Schreiben Sie mit positivem Exponenten.

a) $3a^{-2}$ b) $(3a)^{-2}$ c) $-5m^{-5}$ d) $(-4x)^{-2}$

e) ab^{-6} f) $-pq^{-4}$ g) $2(a+b)^{-6}$ h) $2ab^{-5}$

i) $3(ab)^{-2}$

85. Schreiben Sie mit positivem Exponenten und ohne Doppelbruch im Resultat.

a) $1 + x^{-2}$ b) $2a^{-1} - 3b^{-2}$ c) $\frac{1}{x^{-4}}$

d) $\frac{1}{3a^{-3}}$ e) $\frac{a}{2(a+b)^{-2}}$ f) $\frac{x^{-2}}{y^{-3}}$

g) $\frac{5a^{-2}}{3b^{-1}}$ h) $\frac{ax^{-1}}{b^{-1}c^{-2}}$ i) $\frac{a^0 + a^{-1}}{a^{-1} - a^{-2}}$

86. Schreiben Sie mit positivem Exponenten und möglichst einfach.

Verwenden Sie $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$

a) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}$ b) $\left(-\frac{a}{3}\right)^{-4}$ c) $-\left(\frac{m}{n}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{-1}{n}\right)^{-5}$ e) $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{-10}$ f) $-\left(-\frac{2}{x}\right)^{-4}$

87. Schreiben Sie ohne Bruchstrich, verwenden Sie negative Exponenten.

a) $\frac{1}{3x}$ b) $\frac{2}{x^2}$ c) $\frac{a}{b}$

d) $\frac{n}{1+n^2}$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ f) $\frac{2p^2}{3q^3}$

1.5.2 Addieren und subtrahieren von Potenzen

$$ax^m + bx^m - cx^m = (a + b - c)x^m$$

Beispiel für Potenzen mit verschiedenen Exponenten:

$$7 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n + 8 \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot (2 \cdot 2^n) - 3 \cdot 2^n + 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^n\right) = 14 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 15 \cdot 2^n$$

88. Fassen Sie zusammen, ohne die Potenzen auszurechnen! Schreiben Sie das Resultat in der Form ax^y.

a) $1.4 \cdot 3^5 - 0.9 \cdot 3^5$

b) $3.6 \cdot 5^9 - 12 \cdot 5^9 + 1.2 \cdot 5^9$

c) $7^6 - 1.9 \cdot 7^5$

d) $0.35 \cdot 10^7 - 4.1 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5$

e) $3.8 \cdot 10^9 - 0.5 \cdot 10^{10} - 23 \cdot 10^8$

f) $4 \cdot 2^3 - 9.3 \cdot 2^2 + 0.15 \cdot 2^4$

g) $25 \cdot 7^8 - 3.5 \cdot 7^9 - 0.9 \cdot 7^{10}$

h) $21.5 \cdot 12^{13} - 1520 \cdot 12^{11} + 25120 \cdot 12^{10}$

89. Bringen Sie den Term auf die Form ax^y, wobei y gleich dem in der Klammer stehenden Term ist.

a) $6 \cdot 2^n - 11 \cdot 2^{n-1}$ (n)

b) $6 \cdot 5^{k+1} - 14 \cdot 5^k - 80 \cdot 5^{k-1}$ (k)

c) $12 \cdot 4^{t+5} - 0.7 \cdot 4^{t+7} - 0.05 \cdot 4^{t+9}$ (t+5)

d) $-\frac{5}{4} \cdot 5^{20} - \frac{6}{25} \cdot 5^{21} + 5 \cdot 5^{19}$ (19)

e) $-\frac{3}{2} \cdot 6^{14} - 18 \cdot 6^{12} + 0.3 \cdot 6^{15}$ (11)

f) $3.7 \cdot 3^{n+2} - 0.5 \cdot 3^{n+3} - 253 \cdot 3^n$ (n)

Die Mathematik handelt ausschliesslich von den Beziehungen der Begriffe zueinander ohne Rücksicht auf deren Bezug zur Erfahrung.

Albert Einstein, 1879–1955, Physiker

1.5.3 Anwendung der Potenzsätze

Potenzsätze für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

(1) Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$

(2) Gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $(b \neq 0)$

(3) Potenzieren einer Potenz: $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

90. Berechnen Sie ohne Rechner. Wenden Sie die Potenzsätze an.

a) $2^4 \cdot 5^4$ b) $5^5 \cdot 5^7 : 5^{10}$ c) $(2\sqrt{3})^4$

d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ e) $(\sqrt{3}+1)^4(\sqrt{3}-1)^4$ f) $(3^{-3} \cdot 3^5) : (3^2 \cdot 3^{-4})$

g) $\frac{8^9}{0.8^9}$ h) $27 \cdot 3^{-6}$ i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} : \left(\frac{9}{8}\right)^{-4}$

j) $\frac{2^3 \cdot 3^5}{6^4}$ k) $\frac{2^3 \cdot 15^3}{6^3}$ l) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^5(\sqrt{2}+\sqrt{5})^5$

m) $(3^3)^5 : (3^2)^6$ n) $\frac{9^7}{27^3}$ o) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{-4}$

p) $(-8)^5 \cdot (2^{-4})^4$ q) $\frac{(-4)^2 \cdot 2^4}{8^2}$ r) $\frac{4^n \cdot 25^{n+1}}{10^{2n+1}}$

> Der Wissenschaftler ist ein Mann, der lieber zählt als vermutet.
>
> Unbekannt

91. Schreiben Sie als Potenz.

a) $5 \cdot 5^4 \cdot 5^{-2}$ b) $3^4 \cdot 4^4 : 5^4$ c) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 \cdot (-4)^0$

d) $(-8)^4 : (-8^{10})$ e) $(-49) \cdot 7^{10} : 7^4$ f) $(-10)^{2n} : (-2^{2n})$

g) $3^5 \cdot 5^{-5}$ h) $2^n \cdot 3^{-n} \cdot 5^n$ i) $(-3^2)(-3)^3 : 3^{-2}$

j) $4^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-k}$ k) $2^{10} + 2^{10}$ l) $3^n + 3^n + 3^n$

92. Schreiben Sie als Potenz.

a) $a^n \cdot a^n$ b) $t^{3n} : t^n$ c) $\frac{(x+y)^5}{x^5}$

d) $2^n \cdot n^n$ e) $a^k : a$ f) $a^0 \cdot a \cdot a^{2n} \cdot a^{3n}$

g) $a^{n+1} : a^{n-1}$ h) $(x-1)^m \cdot x^m$ i) $\left(\frac{1}{a}\right)^x : \left(\frac{1}{b}\right)^x$

j) $a : a^7$ k) $a^{x+1} \cdot a^{x-1}$ l) $(u^2 - v^2)^m : (u - v)^m$

Die Mathematik allein befriedigt den Geist durch ihre ausserordentliche Gewissheit.

Johannes Kepler, 1571–1630, deutscher Astronom

93. Schreiben Sie als Potenz mit möglichst einfacher Basis.

a) $(a+b)^3 \cdot (a-b)^3$ b) $a^{m+n} : a^{m-n}$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{b}{2}\right)^5$

d) $(-a^5) \cdot (-a^6)$ e) $(-a)^4 \cdot (-b^4)$ f) $(a-1)^m : (1-a)^m$

g) $u \cdot u^{2k-3} : u^{1-k}$ h) $(-x)^3(-x^4)$ i) $\left(\frac{x}{y}\right)^7 : \left(-\frac{x}{y}\right)^4$

j) $(-a)^4 \cdot (-a^6)$ k) $(5a)^n : (5a^n)$ l) $(ab - ac)^k : (bc - c^2)^k$

94. Schreiben Sie als Potenz, falls möglich.

a) $x^{2n+6} : (-x)^{2n-6}$ b) $\left(\frac{1}{a}\right)^n : \left(\frac{a}{3}\right)^n$ c) $a^b \cdot b^a$

d) $\frac{a^{3n}}{(-a)^{2n+1}}$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1}$ f) $(x-y)^5 \cdot (y-x)$

g) $(-a)^{-6} \cdot (-a^6)$ h) $3^m (-3)^n$ i) $\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-n}$

j) $(a-b)^3(b-a)^6$ k) $(u-v)^n : (v-u)^n$ l) $(-x)^{2n-1} : (-x^{3n+1})$

95. Schreiben Sie als gewöhnliche Potenz.

a) $(-a^3)^4$ b) $(-a^4)^3$ c) $(-(x^{-1})^{-2})^6$

d) $(-u^{-2})^{-3}$ e) $-(y^{-10})^0$ f) $(-(-b)^3)^{-4}$

96. Vereinfachen Sie. Im Resultat dürfen neben Zahlen nur Potenzen mit der Basis a, b oder c mit jeweils positiven Exponenten vorkommen.

a) $(3a^2)^4$ b) $\left(\frac{2}{3}c^4\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{3}b^3\right)^2$

d) $\left(\frac{a^{-1} \cdot b^{-3}}{c^2}\right)^{-2}$ e) $(5a^n \cdot b^{n+1})^n$ f) $(-(2a^{-1})^{-2})^3$

g) $(2a^2b)^3(3ab^2)^3$ h) $\left(\frac{2a^{-1}b^2}{3ac^{-2}}\right)^{-3}$

97. Vereinfachen Sie.

a) $\left(\frac{3a^{-2}b^2}{4a^{-4}b^3}\right)^{-2} : \left(\frac{2a^{-1}}{3ab^{-2}}\right)^3$ b) $\left(\frac{u}{v}\right)^n \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^{3n+4} : \left(\frac{-v}{u}\right)^{2n+1}$

c) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{3n}$ d) $\dfrac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n+1} \cdot (a^2-b^2)^n}{a\left(\frac{a}{b}-1\right)^n}$

98. Vereinfachen Sie.

a) $\dfrac{f^{-(2g+3)}}{(-f)^{-(4g+3)}}$ b) $\left(\frac{5u-w}{6u+2w}\right)^{-7} : \left[\left(\frac{6u+2w}{5u-w}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5u-w}{6u+2w}\right)^6\right]$

c) $\dfrac{5a^6(r+s)^{-2}}{6b^5c^7} \cdot \dfrac{3b^3c^6(x+y)^3(r+s)^6}{a^4}$

Wissenschaftler ist jemand, dessen Einsichten grösser sind als seine Wirkungsmöglichkeiten. Gegenteil: Politiker.

Helmar Nahr, *1931, deutscher Mathematiker und Ökonom

99. Verwandeln Sie in eine Potenz, deren Basis eine möglichst kleine natürliche Zahl ist.

a) 4^2 b) 81^4 c) 128^n d) 1000^7 e) 216^{k+1}

100. Bringen Sie die Potenz auf die Form $a \cdot b^x$, wobei a und b Zahlen sind und x eine Variable ist.

Beispiel: $3^{3k-2} = \frac{3^{3k}}{3^2} = \frac{(3^3)^k}{9} = \frac{1}{9} \cdot 27^k$

a) 3^{n+1} b) 4^{2k+3} c) 7^{2m-2} d) 10^{2-k}

e) 5^{-3n-2} f) $(-2)^{3-4n}$

101. Wenden Sie die binomischen Formeln an.

a) $(a^{10} + b^5)^2$ b) $(a^{10} + 1)(a^{10} - 1)$

c) $(m^{-1} - n^{-2})^2$ d) $(x^m - x^n)(x^m + x^n)$

e) $(2a^{-3} - 3a^3)^2$ f) $(2p^n - 3q^n)(2p^n + 3q^n)$

g) $(r^m + 1)(r^m - 1)^2$ h) $(a^n + b^n)^2(a^n - b^n)^2$

102. Potenzieren Sie mithilfe des Pascalschen Dreiecks.

a) $(x^2 + 1)^5$ b) $(e^3 - 2)^4$ c) $(u^{-1} - 1)^6$ d) $(a + a^{-1})^5$

103. Bestimmen Sie x. Verwenden Sie jeweils $a^x = a^b \Rightarrow x = b$.

a) $10^{2x} = 10^8$ b) $a^x \cdot a^{x-2} = a^{x+1}$

c) $2^x = 16 \cdot 2^7$ d) $2^{(x2)} = 16$

e) $(100^{100})^{100} = 10^x$ f) $2^x = \frac{8^4}{4^8}$

g) $(3^x)^6 = \frac{1}{81}$ h) $\frac{25^k}{125^3} = 5^x$

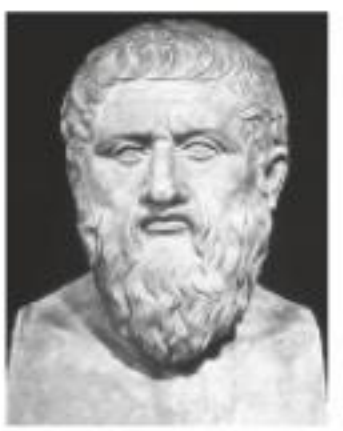
i) $13 \cdot 3^n - 4 \cdot 3^n = 3^x$ j) $3 \cdot 2^{10} - 10 \cdot 2^8 = 2^x$

k) $50 \cdot 5^{n-1} + 3 \cdot 5^{n+1} = 5^x$ l) $\frac{2^{3x+1} \cdot 4^{5x-3}}{8^{4x-1}} = 32$

m) $9^{(9^9)} : (9^9)^9 = 9^x$

Wenn jemand Mathematiker fragt: Ihr Wunderlichen – von was für Zahlen sprecht Ihr eigentlich – Was werden sie wohl antworten? Dass sie von Zahlen reden, die man nur denken kann, unmöglich aber auf irgendeine Art handhaben.

Platon, 427–347 v. Chr., griech. Philosoph



104. Schreiben Sie als *einen* gekürzten Bruch.

a) $\frac{1-x^2}{x^8}+\frac{1+x}{x^6}-\frac{1}{x^5}$

b) $\frac{1}{a^b}+\frac{1}{a^{b+1}}$

c) $\frac{1}{b^x}-\frac{1}{b^y}$

d) $\frac{1}{a^n}-\frac{2}{a^{n-1}}+\frac{1}{a^{n-2}}$

e) $\frac{x^5+1}{x^{m+2}}-\frac{2x^2-2}{x^m}+\frac{2-x}{x^{m-2}}$

f) $\frac{1-2e^2}{e^p}+\frac{2-3e^2}{e^{p-2}}+\frac{3}{e^{p-4}}$

105. Zerlegen Sie so weit als möglich in Faktoren.

a) $a^{n+2}-a^n$

b) a^n-a^{n-2}

c) $x^{12}-x^8$

d) $m^3-2m^4+m^5$

e) $p^{2n-1}-p^{2n+1}$

f) $e^{x-1}+2e^x+e^{x+1}$

g) $x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}$

h) $a^{2n}-1$

i) $x^{2n}-y^{2m}$

106. Kürzen Sie vollständig.

a) $\frac{x^{1000}-x^{100}}{x^{100}}$

b) $\frac{2a^{10}+8a^9-5a^6+3a^5}{a^5}$

c) $\frac{(-2x)^n}{-2x^n}$

d) $\frac{h^9+2h^8+h^7}{h^5+h^6}$

e) $\frac{u^6-v^6}{u^3+v^3}$

f) $\frac{a^{2n}-1}{a^n-1}$

g) $\frac{b^{4m}-b^{3m}}{b^{3m}-b^{2m}}$

h) $\frac{a^{2x}-b^{2y}}{b^y-a^x}$

i) $\frac{e^{3k}-e^k}{e^{2k-1}+e^{k-1}}$

1.5.4 Vermischte Aufgaben

107. Für welches z nimmt der folgende Ausdruck den Wert 128 an?

$$\frac{8^{1-z}\cdot 4^{5z+3}\cdot 2^{3z+1}}{2^{2z+3}\cdot 8^{z-1}\cdot 4^{z+3}}$$

108. Vereinfachen Sie.

a) $\frac{m^{-(2n+3)}}{(-m)^{-(4n+3)}}$

b) $\left(\frac{z-3}{z+5}\right)^{2p+1}\cdot\left(\frac{5+z}{-3+z}\right)^{p+1}:\left(\frac{3-z}{z+5}\right)^{4p}$

c) $\frac{g^5+2}{2g^9}-\frac{3-g^6}{3g^{10}}-\frac{(2g-1)^2}{4g^{11}}$

d) $\left(\frac{2x-y}{3x+y}\right)^{-8}:\left[\left(\frac{3x+y}{2x-y}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2x-y}{3x+y}\right)^2\right]$

109. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

a) $\left(1+\frac{2}{t}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{t}-\left(\frac{t}{2}-1\right)^{-1}\right]^{-2}$

b) $[2(-b)^{-3}]^{-2}-\left[4\left(-\frac{b}{2}\right)^2\right]^3+(-2)^{11}\cdot[-(4b^{-1})^{-2}]^3$

c) $\dfrac{\left[\frac{3(u-1)}{2}\right]^{-1}}{[3(u-v)]^{-2}} : \left[1+\frac{1}{u}-2v^{-1}+\dfrac{(1-v^{-1})^2}{\frac{1}{u}-1}\right]$

d) $\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{2}{pq}-\left(\frac{pq}{r}\right)^{-2}\right] : \left[\left(\frac{1}{p}+q^{-1}-\frac{r}{pq}\right)(p+q+r)\right]$

1.5.5 Zehnerpotenzen

Zehnerpotenz: Eine Potenz mit der Basis 10, z.B. 10^3 ; 10^0 ; 10^{-7}

Exponentenschreibweise oder **wissenschaftliche Form** einer Zahl:

$$\mathbf{a \cdot 10^k} \quad ; \quad 1 \le a < 10$$

Produkt einer Zahl a zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz 10^k ($k \in \mathbb{Z}$)

Beispiele: $2340 = 2.34 \cdot 10^3$, $0.087 = 8.7 \cdot 10^{-2}$

SI-Vorsätze:

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung (Faktor)
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hekto	h	10^2
Deka	da	10^1
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}

110. Geben Sie in Exponentenschreibweise an.

a) 281 Millionen b) 62 Milliarden c) 0.35 Trillionen

d) 0.02 Billionen e) $456 \cdot 10^{-6}$ f) $0.00018 \cdot 10^{-4}$

111. Geben Sie in Exponentenschreibweise an mit der in eckiger Klammer angegebenen Einheit.

a) 0.081 km [mm] b) 210 m^2 [cm^2] c) 0.4 Liter [mm^3]

d) 300 000 $\frac{km}{s}$ [$\frac{m}{s}$] e) 4800 mm^3 [m^3] f) 72 $\frac{mm}{h}$ [$\frac{m}{s}$]

112. Geben Sie in Exponentenschreibweise an mit der in eckiger Klammer angegebenen Einheit.

a) 460 µm [m] b) 333 kN [N] c) 0.19 dl [l]

d) 26 MHz [Hz] e) 0.21 Gt [t] f) 600 ns [s]

g) 56 TW [W] h) 0.2 µs [s] i) 1.2 cl [l]

j) 0.02 MV [V] k) 0.4 mA [A] l) 8.1 TJ [J]

m) 25 pF [F] n) 500 ng [g]

113. Berechnen Sie mithilfe von Zehnerpotenzen und *ohne Rechner.*
Geben Sie die Lösung in der wissenschaftlichen Form an.

a) $400\,000\,000 \cdot 90\,000$ b) $0.0008 : 500\,000$

c) $(30\,000\,000 \cdot 0.000\,05)^2$ d) $(0.000\,06 \cdot 0.0005)^3$

e) $10^{20} - 10^{17}$ f) $2 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{9}$

g) $\dfrac{3\,600\,000 \cdot 0.000\,02^2}{0.000\,0003 \cdot 2000^3}$ h) $\dfrac{200 \cdot 10^4 \cdot (10^{10} - 10^8)}{0.000\,003\,3}$

Wir wollen die Freiheit und Strenge der Mathematik in alle Wissenschaften hineintreiben, so weit dies nur irgend möglich ist; nicht im Glauben, dass wir auf diesem Wege die Dinge erkennen werden, sondern um damit unsere menschliche Relation zu den Dingen festzustellen. Die Mathematik ist nur das Mittel der allgemeinen und letzten Menschenerkenntnis.

Friedrich Nietzsche, 1844–1900, deutscher Philosoph

Lösen Sie die folgenden Aufgaben zuerst näherungsweise ohne Rechner (mithilfe von Zehnerpotenzen); anschliessend mit dem Rechner (Eingabe in Exponentenschreibweise).

114. Auf einem Globus von 1m Durchmesser soll der 8848 m hohe Mt. Everest dargestellt werden. Wie hoch (in mm) muss der Berg «modelliert» werden? Erdradius $r_E = 6370$ km

115. Wie viele Blutkörperchen enthalten 6 Liter Blut eines Menschen, wenn 1 mm^3 durchschnittlich 5 Millionen enthält?

116. Eine Ölschicht auf ruhendem Wasser ist ca. 10^{-8} m dick.
Welche Fläche (in km^2) kann 1 Liter Öl bedecken?

117. Wie gross ist die mittlere Dichte (in kg/dm^3) der Erde?

Masse der Erde $m_E = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg , Erdradius $r_E = 6370$ km

Kugelvolumen $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

118. Aus wie vielen Zellen ist der menschliche Körper aufgebaut? Der mittlere Durchmesser einer Zelle beträgt 10 μm. Für die Berechnung des Körpervolumens wählen Sie eine Dichte von 1 kg/dm^3 und eine Masse von 80 kg.
(Die Form der Zelle soll näherungsweise als Würfel angenommen werden).

119. Wie viele km hat ein Lichtjahr (LJ)?

1 LJ = Weg des Lichtes in 1 Jahr
Lichtgeschwindigkeit c = 300 000 km/s
1 Jahr = 365 Tage

Das Weltall ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt überall und dessen Umfang nirgendwo ist.

Blaise Pascal, 1623–1662, franz. Mathematiker und Philosoph

Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.

Galileo Galilei, 1564–1642, Physiker und Astronom

120. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 150 Mio. km.

a) Wie lange ist das Licht von der Sonne zur Erde unterwegs?

b) Wie viele Jahre hätte ein mit 100 km/h fahrender Schnellzug für diese Strecke?

121. Die Sonne strahlt in einer Sekunde eine Energie von $3.8 \cdot 10^{26}$ J ab.

a) Nach der Einsteinschen Gleichung $E = mc^2$ entspricht der Masse m eine bestimte Energie E; c = 300 000 km/s.
Welchen Massenverlust erleidet die Sonne pro Sekunde?

b) Die Masse der Sonne beträgt zur Zeit $2 \cdot 10^{30}$ kg. Welche theoretische Lebensdauer (in Jahren) ergibt sich noch unter der Annahme konstanter Energieabgabe? (Verwenden Sie die Lösung von Aufgabe a)

122. 1 cm^3 Luft enthält bei Normalbedingungen (0 °C und 1 bar) 26.9 Trillionen Moleküle. Unter der Annahme, dass diese Anzahl Moleküle gleichmässig über die gesamte Erdoberfläche verteilt wird.
Wie viele Moleküle würden auf 1 cm^2 entfallen?

Erdradius r_E = 6370 km
Kugeloberfläche $S = 4\pi r^2$

123. Wie viele Elektronen treffen während einer Sekunde auf den Bildschirm eines Fernsehgerätes, wenn der Elektronenstrahl eine Stromstärke von 0.8 mA hat?
Ladung Q = Stromstärke I · Zeit t
Masseinheit der Ladung: 1 Coulomb (C) = 1 Ampere (A) · 1 Sekunde (s)
Die Ladung eines Elektrons beträgt $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

1.6 Wurzeln

1.6.1 Die Quadratwurzel

Unter $\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ verstehen wir jene nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt:

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a \qquad a \geq 0$$

Beachte:

(1) $\sqrt{a}$ ist für $a < 0$ nicht definiert (dies gilt für die Zahlenmenge $\mathbb{R}$).

(2) $\sqrt{a}$ ist nie negativ, z.B. $\sqrt{4} \neq -2$

(3) $\sqrt{a^2} = a$ für $a \geq 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$ für $a \in \mathbb{R}$

Rechengesetze:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{für } a \geq 0, b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{für } a \geq 0, b > 0$$

124. Für welche reellen Zahlen a ist der Wurzelterm definiert?

a) $\sqrt{-a}$ b) $\sqrt{\frac{1}{a}}$ c) $\sqrt{a^2}$

d) $\sqrt{a^3}$ e) $\sqrt{a^4}$ f) $\sqrt{a+2}$

g) $\sqrt{a-5}$ h) $\sqrt{5-a}$ i) $\sqrt{2a+3}$

j) $\sqrt{1-3a}$ k) $\sqrt{|a|}$ l) $\sqrt{|a-6|}$

125. Welche Aussagen sind falsch?

a) $\sqrt{-9} = -3$ b) $-\sqrt{9} = -3$ c) $\sqrt{9} = -3$

d) $\sqrt{(-4)^2} = -4$ e) $\sqrt{2^2+3^2} = 2+3$ f) $\sqrt{2-2} = \sqrt{2}-\sqrt{2}$

g) $\sqrt{3+5} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ h) $\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

j) $\sqrt{a^2} = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

k) $\sqrt{a^2} = -a$ für alle $a < 0$

l) $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$ für alle $a \in \mathbb{R}$

m) $\left(\sqrt{|a|}\right)^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

126. Berechnen Sie ohne Rechner.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ c) $(\sqrt{5})^3$

d) $(\sqrt{3})^5$ e) $(\sqrt{2})^6$ f) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

g) $\sqrt{5}(\sqrt{20}+\sqrt{5})$ h) $\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ i) $\sqrt{3\sqrt{2}-2}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}+2}$

j) $\sqrt{45}:\sqrt{5}$ k) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{6}}$ l) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}\cdot\sqrt{2\frac{2}{3}}$

127. Vereinfachen Sie so weit als möglich und geben Sie den Definitionsbereich des gegebenen Terms an.

a) $\sqrt{(-a)^2}$ b) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ c) $\sqrt{36a^2-12a+1}$

d) $\sqrt{x^3}:\sqrt{x}$ e) $\sqrt{2t}\cdot\sqrt{9t}\cdot\sqrt{8t^2}$ f) $\sqrt{8u}\cdot\sqrt{3v}\cdot\sqrt{6uv}$

g) $\sqrt{\frac{2a^2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b^3}{32}}$ h) $\sqrt{ab}:\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ i) $\sqrt{\frac{2c^2}{d}}:\sqrt{\frac{d^3}{32}}$

128. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln (ohne Rechner).

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$ b) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{7})$ c) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ e) $(2\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{5}+2\sqrt{6})$ f) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})^2$

g) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ h) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2$ i) $(\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1})^2$

j) $(\sqrt{\sqrt{6}+3}-\sqrt{3-\sqrt{6}})^2$ k) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})$

l) $(4+\sqrt{2}-\sqrt{3})(4+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

129. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln.

a) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2$ b) $(a-\sqrt{1-a^2})^2$ c) $(b+\sqrt{1-b})^2$

d) $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2$ e) $(\sqrt{3-y}-\sqrt{y+2})^2$ f) $(2\sqrt{n+1}-3\sqrt{n-2})^2$

g) $\left(\sqrt{x+\frac{1}{a}}-\sqrt{x-\frac{1}{a}}\right)^2$

h) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)$ i) $(1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$

130. Bringen Sie den Faktor unter das Wurzelzeichen.

Beispiel: $3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$

a) $3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{1}{4}\sqrt{5}$ c) $10\sqrt{0.3}$

d) $0.2\sqrt{50}$ e) $(-2)\sqrt{5}$ f) $\left(-\frac{2}{5}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}$

g) $\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *h) $\left(2-\sqrt{7}\right)\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ *i) $\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

131. Bringen Sie den Faktor unter das Wurzelzeichen. Alle Variablen stehen für positive Zahlen.

a) $2a \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}$ b) $-a\sqrt{b}$ c) $pq \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}$

d) $n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{n}}$ e) $xy \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ f) $(a+b) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2 - b^2}}$

132. (1) Prüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Gleichungen ohne Rechner.

$$2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2 + \frac{2}{3}} \quad ; \quad 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{3 + \frac{3}{8}}$$

(2) Verallgemeinern Sie die obigen Zahlenbeispiele:

$$n \cdot \sqrt{\frac{n}{x}} = ?$$

Berechnen Sie anschliessend x aus n.

133. Radizieren Sie teilweise.

Beispiel: $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{72}$

e) $\sqrt{125}$ f) $\sqrt{147}$ g) $\sqrt{1000}$ h) $\sqrt{50\,000}$

i) $\sqrt{120\,000}$ j) $\sqrt{\frac{1}{98}}$ k) $\sqrt{\frac{20}{63}}$

134. Radizieren Sie teilweise.

(Beachte: $\sqrt{a^2} = |a|$)

a) $\sqrt{16a}$ b) $\sqrt{n^3}$ c) $\sqrt{2c^2}$

d) $\sqrt{k^2x}$ e) $\sqrt{3p^4}$ f) $\sqrt{x^3 + x^2}$

g) $\sqrt{63m^3n^2}$ h) $\sqrt{8a^5 - 12a^4}$ i) $\sqrt{(ax)^2 - (ay)^2}$

j) $\sqrt{3a^2 - 6a + 3}$

135. Erweitern Sie die Brüche so, dass der Nenner rational (wurzelfrei) wird.
Schreiben Sie die Lösung falls möglich in der Form

$a + b\sqrt{n}$ $(a, b \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N})$

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$

e) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$ f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ g) $\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5} + \sqrt{7}}$ h) $\frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}$ k) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ l) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

136. Vereinfachen Sie so weit als möglich.
Das Resultat soll im Nenner keine Wurzeln aufweisen.
Geben Sie jeweils den Definitionsbereich des gegebenen Terms an.

a) $\frac{a^2}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$ c) $\frac{b - a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

d) $\frac{1 - x}{1 + \sqrt{x}}$ e) $\frac{2 + \sqrt{a}}{2 - \sqrt{a}}$ f) $\frac{m^2 - n^2}{\sqrt{m + n}}$

g) $\frac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{2x} - \sqrt{x}}$ h) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}$ i) $\frac{x + 1 + 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

j) $\frac{\sqrt{x - y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - y}}$ k) $\frac{\sqrt{n - 1} - \sqrt{n + 1}}{\sqrt{n - 1} + \sqrt{n + 1}}$

Die Normalform eines Wurzelterms

Beispiele: $\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$; $3\sqrt{3}-\sqrt{10}+\frac{1}{8}\sqrt{15}$

Gegenbeispiele: $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{0.4}$; $2\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; $3\sqrt{12}+\sqrt{20}$; $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$

Unter der **Normalform eines Wurzelterms** (ohne Variablen) verstehen wir die Darstellung

$$a_0 + a_1\sqrt{n_1} + a_2\sqrt{n_2} + \ldots.$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots. \in \mathbb{Q}$ und $n_1, n_2, \ldots. \in \mathbb{N}$

Alle Radikanden n_i sind quadratfrei und voneinander verschieden.

137. Bringen Sie die Wurzelterme auf die Normalform.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}$ c) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}$

d) $\sqrt{5}+\sqrt{20}$ e) $\sqrt{12}-\sqrt{27}$ f) $\sqrt{32}+\sqrt{98}$

g) $6\sqrt{27}+4\sqrt{45}-2\sqrt{75}-4\sqrt{80}$ h) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{10}\right)$ i) $\left(2+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$

j) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ k) $\left(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

138. Bringen Sie die Wurzelterme auf die Normalform.

a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt{0.05}$ d) $\sqrt{0.3}$

e) $\frac{3}{\sqrt{8}}$ f) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

i) $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ j) $\frac{\sqrt{\sqrt{7}+2}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$ k) $\frac{2\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ l) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Das Irrationale ist die Quadratwurzel des Bösen.

Douglas R. Hofstadter, *1945, amerik. Physiker

139. Bringen Sie die Wurzelterme auf die Normalform.

a) $\frac{1}{\sqrt{20}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

c) $1 - \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

d) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3-\sqrt{5}}$

f) $\frac{2}{2+\sqrt{5}} + \frac{3}{5+\sqrt{20}}$

g) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{18}}{2-\sqrt{2}}$

140. Berechnen Sie mithilfe des Pascalschen Dreiecks.
Geben Sie die Lösung in der Normalform an.

Hinweis: Berechnen Sie z.B. $(\sqrt{2})^5$ wie folgt:

$$(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})\sqrt{2} = 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}$$

a) $(\sqrt{2}+1)^6$ b) $(\sqrt{3}-1)^5$ c) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^4$ d) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^3$

Während einer nur Zahlen und Zeichen im Kopf hat, kann er nicht dem Kausalzusammenhang auf die Spur kommen.

Arthur Schopenhauer, 1788–1860, Philosoph

1.6.2 Definition von $\sqrt[n]{a}$ und Potenzdarstellung von $\sqrt[n]{a^m}$

Unter $\sqrt[n]{a}$ verstehen wir jene nicht negative Zahl, deren n-te Potenz den Wert a ergibt:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \text{für } a \geq 0\,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\sqrt[\text{Wurzelexponent}]{\text{Radikand}}$$

Spezialfälle: $\sqrt[n]{0} = 0\,, \qquad \sqrt[n]{1} = 1$

Beachte:

(1) $\sqrt[n]{a}$ ist für $a < 0$ nicht definiert. [1)]
z.B. $\sqrt[3]{-8} \neq -2$

(2) $\sqrt[n]{a}$ ist nie negativ
z.B. $\sqrt[4]{16} \neq -2$ obwohl $(-2)^4 = 16$

(3) $\sqrt[n]{\ldots}$ ist nur für natürliche Zahlen n definiert, die grösser als 1 sind.
z.B. $\sqrt[-3]{5}$ und $\sqrt[0.2]{4}$ sind nicht definiert.
Der Wurzelexponent 2 wird weggelassen.

(4) $\sqrt[n]{a^n} = a \qquad$ für $a \geq 0$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} \qquad$ für $a \geq 0$

---

1) Gelegentlich wird $\sqrt[n]{a}$ auch für ungerades n und $a < 0$ definiert:

$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}\,, \qquad$ z.B. $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass viele Rechengesetze beim Umformen solcher Terme nicht gelten.

Die Potenzdarstellung eines Wurzelterms

für $a \geq 0$, $n, z \in \mathbb{N}$ und $n \neq 1$ gilt:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}}$$

$$a^{-\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^{-z}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^z}} \qquad a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{z}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^z}}$$

141. Für welche reellen Zahlen x ist der Wurzelterm definiert?

a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[3]{|x|}$ c) $\sqrt[3]{x^2}$ d) $\sqrt[3]{x^3}$ e) $\sqrt[3]{-x}$

f) $\sqrt[4]{-x}$ g) $\sqrt[5]{x^{-2}}$ h) $\sqrt[5]{x^{-3}}$ i) $\sqrt[4]{|x-2|}$ j) $\sqrt[5]{|x+3|}$

142. Schreiben Sie die Potenzen als Wurzelterm.

a) $x^{\frac{1}{2}}$ b) $t^{\frac{2}{3}}$ c) $m^{\frac{a}{b}}$ d) $2u^{\frac{4}{3}}$ e) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$

f) $\left(1 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$ g) $ax^{\frac{n+1}{n-1}}$ h) $c^{0.2}$ i) $e^{0.8}$ j) $3^{0.\overline{3}}$

k) $ab^{0.1}$ l) $2 \cdot 3^{1.1}$

143. Schreiben Sie die Potenzen als Wurzelterm. In der Lösung sollen keine negativen Exponenten vorkommen.

a) $u^{-\frac{3}{4}}$ b) $a^{-\frac{1}{3}}$ c) $b^{-\frac{4}{5}}$ d) $5x^{-0.4}$ e) $x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}$

f) $ab^{-1.3}$ g) $\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{5}{6}}$ h) $\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{x}{y}}$ i) $\frac{1}{a^{-\frac{2}{3}}}$ j) $\frac{x}{y^{-0.6}}$

144. Schreiben Sie als Potenz.

a) $\sqrt[3]{a^4}$ b) $\sqrt[5]{x^7}$ c) $\sqrt[6]{\frac{u}{v}}$ d) $\sqrt[m]{c^k}$ e) $\sqrt[3]{a+b}$

f) $\sqrt{(n+1)^3}$ g) $\sqrt[5]{a^{-3}}$ h) $\sqrt[4]{xy^2}$ i) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ j) $\sqrt[a]{x^{a-1}}$

145. Berechnen Sie mithilfe eines Rechners auf drei Dezimalen genau.

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[10]{0.1}$ d) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[7]{9^9}$ f) $\sqrt[10]{10}$ g) $\sqrt[100]{10}$ h) $\sqrt[1000]{10}$

Statistik ist ein Verfahren, welches gestattet, geschätzte Grössen mit der Genauigkeit von Hundertstelprozent auszudrücken.

Helmar Nahr, *1931, deutscher Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler

146. In der Statistik wird das sogenannte geometrische Mittel verwendet.

Das geometrische Mittel g der n Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ ist:

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_n}$$

Berechnen Sie das geometrische Mittel der folgenden Zahlen und vergleichen Sie es mit dem arithmetischen Mittel $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)$$

a) 2 und 3 b) 3 ; 4 und 5 c) 10 ; 12 ; 15 und 19

Wenn ein Mann mit einem Fuss auf einem heissen Ofen und mit dem anderen in einer Kühltruhe steht, würde ein Statistiker sagen, dass der Mann sich durchschnittlich in angenehmer Temperatur befindet.

Walter Heller

Es gibt drei Arten von Lügen: Lügen, infame Lügen und Statistik.

Benjamin Disraeli, 1804–1881, engl. Staatsmann und Schriftsteller

1.6.3 Das Rechnen mit Wurzeln

Die fünf Potenzsätze von «1.5.3 Anwendung der Potenzsätze» sind auch für rationale Zahlen als Exponenten gültig.

Potenzsätze: für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $m, n \in \mathbb{Q}$

(1) Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

(2) Gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (b \neq 0)$$

(3) Potenzieren einer Potenz: $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

Wurzelgesetze:

für $a > 0$, $b > 0$; $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ und $n \neq 1$

(1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \qquad (k \in \mathbb{Z})$

(4) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (k \in \mathbb{N})$

(5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

147. Vereinfachen Sie, falls möglich.

a) $2 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt[3]{a} + \sqrt{a}$

d) $4 \cdot \sqrt[4]{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt[6]{5} - \sqrt[5]{5}$

f) $5 \cdot \sqrt[n]{a} - 8 \cdot \sqrt[n]{a} + 2 \cdot \sqrt[n]{a}$

g) $\sqrt[m]{x} + \sqrt[m]{y}$

148. Berechnen Sie ohne Rechner.

Beispiel: $\sqrt[3]{27^{-2}} = 27^{-\frac{2}{3}} = (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[10]{7^{10}}$ c) $\sqrt{4^5}$ d) $\sqrt[3]{1\,000\,000}$

e) $\sqrt[6]{9^3}$ f) $\sqrt[3]{8^4}$ g) $\sqrt[10]{32^6}$ h) $\sqrt[4]{81^3}$

i) $\sqrt[3]{0.008^2}$ j) $\sqrt[5]{32^{-4}}$ k) $\sqrt[3]{125^{-2}}$ l) $\sqrt{100^{-1}}$

m) $\sqrt[6]{\frac{1}{64^5}}$ n) $\sqrt[3]{\left(\frac{135}{40}\right)^{-2}}$

149. Vereinfachen Sie mithilfe des Wurzelgesetzes: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

a) $\sqrt[4]{a^2}$ b) $\sqrt[6]{u^{18}}$ c) $\left(\sqrt[12]{x}\right)^4$ d) $\sqrt[4]{25x^2y^6}$ e) $\sqrt[a]{n^{3a}}$

f) $\sqrt[3k]{u^k}$ g) $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{3n}$ h) $\sqrt[n+2]{b^{5n+10}}$ i) $\sqrt[10]{\frac{9m^4}{n^2}}$ j) $\sqrt[5n]{\frac{a^{10}b^5}{c^{20}}}$

150. Vereinfachen Sie mithilfe der Wurzelgesetze.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3}+1}$ c) $\sqrt[5]{a^2} : \sqrt[5]{a}$

d) $\sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{a^{n+2}}$ e) $\sqrt[3]{(x-y)^2} : \sqrt[3]{y-x}$ f) $\sqrt[10]{15a^5b^7} : \sqrt[10]{3ab}$

g) $\sqrt[3]{a^{2n+5}} \cdot \sqrt[3]{a^{n+4}}$ h) $\sqrt[5]{y^{n+5}} : \sqrt[5]{y^{n-5}}$ i) $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b^2}\right)$

j) $\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\right)\left(\sqrt[n]{x^k}-\sqrt[n]{y^k}\right)$

151. Bestimmen Sie die grössere der beiden Zahlen.

Beispiel: $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[4]{3}$; $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16} \\ \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[4]{3}$ ist grösser

a) $\sqrt{0.3}$ und $\sqrt[4]{0.1}$ b) $\sqrt{5}$ und $\sqrt[3]{11}$ c) $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$

152. Bringen Sie den Faktor unter das Wurzelzeichen.

Beispiel: $2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$

a) $10 \cdot \sqrt[3]{0.02}$ b) $2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[5]{27}$

d) $(-2) \cdot \sqrt[5]{2}$ e) $-3 \cdot \sqrt[4]{5}$ f) $-\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$

g) $\left(-\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ h) $\left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ i) $\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$

153. Bringen Sie den Faktor unter das Wurzelzeichen.
(Alle Variablen stehen für positive Zahlen.)

a) $x \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ b) $-a\sqrt[k]{b}$ c) $a^2 \cdot \sqrt[n]{a^{-2}}$

d) $(-2m) \cdot \sqrt[4]{m}$ e) $u^2v \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{v}{u}\right)^3}$ f) $x \cdot \sqrt[n]{x - \frac{1}{x}}$

154. Radizieren Sie teilweise.

Beispiel: $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{135}$ c) $\sqrt[4]{200\,000}$ d) $\sqrt[5]{2^8}$

e) $\sqrt[4]{48}$ f) $\sqrt[3]{500}$ g) $\sqrt[4]{3^5}$ h) $\sqrt[5]{5^{-6}}$

i) $\sqrt[3]{\frac{2^7}{3^{10}}}$

155. Radizieren Sie teilweise.

a) $\sqrt[3]{a^5}$ b) $\sqrt{x^7}$ c) $\sqrt[3]{n^{10}}$ d) $\sqrt[3]{8ab^3}$

e) $\sqrt[4]{\frac{u^5}{v^6}}$ f) $\sqrt[3]{16x^6y^9}$ g) $\sqrt[4]{a^6 - a^5}$ h) $\sqrt[n]{x^{2n+1}}$

i) $\sqrt[k]{a^{k+3} \cdot b^{3k+2}}$ j) $\sqrt[a]{p^{2a} + p^a}$

156. Schreiben Sie mit einem einzigen Wurzelzeichen.
Der Wurzelexponent soll so klein wie möglich sein.

Beispiel: $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{6^3} \cdot \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[12]{6^3 \cdot 5^2}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt{5} : \sqrt[6]{5}$ c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ d) $\sqrt[3]{9} : \sqrt[5]{27}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{4}$ f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}$ g) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$ h) $\sqrt[4]{5} : \sqrt[5]{10}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{8}}$ j) $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{10}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{15} \cdot \sqrt[12]{3}}$

157. Schreiben Sie mit einem einzigen Wurzelzeichen mit möglichst kleinem Wurzelexponenten.

a) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{a^{-1}}$ b) $\sqrt[4]{x} : \sqrt[5]{x}$ c) $\sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt[4]{t^3} \cdot \sqrt[6]{t^5}$

d) $\sqrt[5]{a} : \sqrt[6]{b^2}$ e) $\sqrt[6]{m^2 - n^2} : \sqrt[3]{m - n}$ f) $\sqrt[8]{\dfrac{x}{y}} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{y}{x}}$

g) $(\sqrt[3]{u})^2 \cdot \sqrt[4]{v^6} \cdot \sqrt{u^2 v^3}$ h) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2} \cdot \sqrt[4]{x^3 y}}{\sqrt[4]{x^0 y^2 z} \cdot \sqrt[3]{xz^{-2}}}$ i) $\sqrt[m]{a^x} \cdot \sqrt[n]{a^x}$

j) $\sqrt[a]{b} : \sqrt[b]{a}$ k) $a^n : \sqrt[n]{a}$ l) $\sqrt[n]{x} : x^2$

158. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln (ohne Rechner).
Schreiben Sie die Lösung mit Wurzelzeichen.

a) $(\sqrt[3]{2} - 1)^2$ b) $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{5})^2$ c) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{3})$

d) $(\sqrt[6]{2} - \sqrt[5]{2})^2$ e) $(\sqrt[10]{5} - \sqrt[10]{2})(\sqrt[10]{5} + \sqrt[10]{2})$ f) $(\sqrt[4]{2} + \sqrt[8]{3})^2$

g) $(\sqrt[3]{2} + 1)^3$ h) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5})^3$ i) $(\sqrt[4]{3} - \sqrt{3})^3$

j) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4})$

159. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln.
Schreiben Sie die Lösung mit Wurzelzeichen.

a) $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^2$ b) $(\sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{y})(\sqrt[n]{x} + \sqrt[m]{y})$ c) $(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2$

d) $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^{-1}})^2$ e) $(\sqrt[n]{u^2} - \sqrt[2n]{v})^2$ f) $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^3$

160. Erweitern Sie so, dass der Nenner wurzelfrei wird.

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[7]{64}}$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[n]{b^{n-2}}}$ g) $\frac{1}{\sqrt[n]{x^3}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[k]{u^n}}$

*i) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ *j) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$ *k) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$

161. Schreiben Sie mit einem einzigen Wurzelzeichen mit möglichst kleinem Wurzelexponenten.

a) $\sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^6}}$ e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{m^5 n^{10}}}$ f) $\sqrt[n-1]{\sqrt[n+1]{y^{2n}}}$

162. Schreiben Sie mit einem einzigen Wurzelzeichen.

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

d) $\sqrt[4]{b^3 \cdot \sqrt[3]{b}}$ e) $\sqrt[3]{u^2 \cdot \sqrt[5]{u^{-3}}}$ f) $\sqrt[3]{x^2 y \sqrt{xy^{-1}}}$

g) $\sqrt[4]{2b^{-1} \cdot \sqrt[3]{5b^2}}$ h) $\sqrt[n]{r \cdot \sqrt[2n]{s^2}}$ i) $\sqrt[3]{(a \cdot \sqrt[8]{a^{-5}})^2}$

j) $t \cdot \sqrt[n]{t^{1-n} \cdot \sqrt[n]{t^{1-n}}}$ k) $\sqrt{m \cdot \sqrt[3]{m}} \cdot \sqrt[3]{m\sqrt{m}} \cdot \sqrt[6]{m}$

163. Schreiben Sie mit einem einzigen Wurzelzeichen .

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3}}}}$ c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ d) $\sqrt[4]{b \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt{b}}}$

e) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$ f) $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{b \cdot \sqrt[4]{c}}}$ g) $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{x\sqrt[k]{x}}}$

164. Bestimmen Sie die positive Lösung x.

a) $\sqrt[4]{x} = 3$ b) $\sqrt[6]{x} = \sqrt{2}$ c) $\sqrt[5]{x} = -6$ d) $x^{0.2} = \sqrt{3}$

e) $x^{\frac{2}{3}} = 25$ f) $x^{\frac{3}{4}} = 5$ g) $x^{0.8} = 16^{-1}$ h) $\sqrt[n]{x^k} = 7$

165. Bestimmen Sie x. Verwenden Sie jeweils $a^x = a^b \Rightarrow x = b$

a) $2^x = \sqrt[5]{2}$ b) $4^x = 8$ c) $9^x = 243$

d) $7 \cdot \sqrt[n]{3} + 2 \cdot \sqrt[n]{3} = 3^x$ e) $16^{-x} = 2^{10}$ f) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[8]{4}} = 2^x$

g) $(\sqrt{10})^x = \sqrt[8]{10}$ h) $\sqrt[x]{5} = \sqrt[8]{25}$ i) $\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x+1]{a}} = \sqrt[20]{a}$

166. Wo steckt der Fehler?

a) $2 = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(-2)^4} = (\sqrt[4]{-2})^4 = -2$

b) $-3 = (-3)^1 = (-3)^{0.5+0.5} = (-3)^{0.5} \cdot (-3)^{0.5} = [(-3)(-3)]^{0.5} = 9^{0.5} = 3$

c) Peter definiert $\sqrt[3]{-8} = -2$ und «beweist»

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{2 \cdot \frac{1}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$$

> Ein Mathematiker ist ein Mensch, der einen ihm vorgetragenen Gedanken nicht nur sofort begreift, sondern auch erkennt, auf welchem Denkfehler er beruht.
>
> Helmar Nahr, *1931, deutscher Mathematiker und Ökonom

167. Vereinfachen Sie so weit als möglich.
Schreiben Sie die Lösung mithilfe von Wurzelzeichen.

a) $\left(\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)^3 \cdot \sqrt[5]{(ab)^4} : \sqrt{a+b}$

b) $\sqrt{\sqrt{\frac{b^3}{a}}\left[(ab^3)^{\frac{1}{2}} - (ab^3)^{-\frac{1}{2}}\right]}$

c) $\dfrac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}}$

d) $xy \cdot \sqrt[n]{x^{2n} + y^{2n}} \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^n - \left(\frac{y}{x}\right)^n}$

1.6.4 Vermischte Aufgaben

168. Vereinfachen Sie so weit als möglich.

a) $\left(\frac{m}{\sqrt{n}} + \frac{n}{\sqrt{m}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1}{m}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$

b) $a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x^{-1}} \cdot \sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^{-1} \cdot \sqrt{x^{-1} \cdot \sqrt{x^{-1}}}}}$

d) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{b^2}\right)^{-4}} \cdot \sqrt{b \cdot \sqrt[3]{b^2}}}}{b \cdot \sqrt[6]{b\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b^{-1} \cdot \sqrt[3]{b^2}}}$

e) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt{a^{-8}}}{\sqrt[3]{a^{-5}}}} : \dfrac{\sqrt[6]{a^{\frac{3}{4}}}}{\sqrt[3]{a^2}}$

f) $\left(\dfrac{x^2+1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^9}}}\right)^2$

169.* a) $\dfrac{\sqrt{3a^{-1}}\,(a^{2n+1})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3a^n \cdot \sqrt{a}} \cdot a^{n-1}} = x \cdot a^y$ $\quad x = ?\quad y = ?$

b) $\dfrac{(a-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}) \cdot \sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} \cdot \sqrt[3]{a^5}}{(a-1) \cdot \sqrt[4]{a\sqrt{b}} \cdot \sqrt[8]{\sqrt[3]{b}}} = a^x \cdot b^y$ $\quad x = ?\quad y = ?$

c) $b \cdot \sqrt[n]{b^{1-n} \cdot \sqrt[n]{b^{1-n}}} = \sqrt[x]{b}$ $\quad x = ?$

170.* Vereinfachen Sie so weit als möglich.
Schreiben Sie die Lösung mithilfe von Wurzelzeichen.

a) $3 \cdot \sqrt[3]{16} + 2 \cdot \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} - 3 \cdot \sqrt[3]{250}$

b) $\dfrac{ab^2 \cdot \sqrt[5]{a^3b} - a^3b \cdot \sqrt[5]{ab^2}}{\left(\sqrt[5]{ab}\right)^7}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dfrac{m^{\frac{5}{2}}\, n^{-\frac{6}{5}}}{m\, n^{-1}} \left(2m^{-\frac{2}{3}}\, n^{\frac{3}{5}}\right)^2}}$

d) $\dfrac{\sqrt[2m+2n]{(p^2+2pq+q^2)^{m+n}} - qp^0}{\dfrac{p^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{p}} \cdot \sqrt[6]{p} + 2p^{-\frac{5}{6}}\, p^{\frac{4}{3}}}$

e) $\dfrac{(\sqrt[4]{u})^3 \cdot \sqrt[6]{v} \cdot \sqrt{v^{-1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[12]{u}}\right)^5 \cdot \sqrt[6]{v^{-5}} \cdot (\sqrt[3]{u})^2} + \dfrac{u\sqrt{v} - v\sqrt{u}}{\sqrt{u} - \sqrt{v}}$

f) $\dfrac{(\sqrt[3]{xy})^2 + \sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{y \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x}}$

g) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{a}}}{a \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}}}$

1.7 Logarithmen

1.7.1 Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen)

Unter **lg a** (oder: $\log_{10} a$) versteht man jene Zahl (Exponent), mit der man 10 potenzieren muss, um a zu erhalten:

$$10^{\lg a} = a \qquad \text{für } a > 0$$

oder:

$$10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a \qquad \text{für } a > 0$$

lg a: «Zehnerlogarithmus von a», oder «Logarithmus von a zur Basis 10»

Sonderfälle: $\lg 1 = 0$; $\lg (10^k) = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Beachte:
(1) lg a ist für $a \leq 0$ nicht definiert.
(2) Auf dem Rechner ist der Zehnerlogarithmus mit LOG bezeichnet.

171. Erklären Sie mit Worten, was man unter lg 5 versteht.

172. Schreiben Sie die folgende Gleichung in der Form lg a = b.

a) $10^3 = 1000$ b) $10^0 = 1$ c) $10^{-2} = 0.01$
d) $10^x = 2$ e) $10^k = k + 1$ f) $10^m = n$
g) $\sqrt{10} = c$ h) $\sqrt[4]{10} = p$ i) $\sqrt[n]{10} = n^2$

173. Berechnen Sie mithilfe von $\lg (10^a) = a$; jedoch ohne Rechner.

a) lg 10 000 b) lg 10 c) lg 1 d) lg 0.1
e) lg 0.0001 f) $\lg \sqrt{10}$ g) $\lg \sqrt[3]{100}$ h) $\lg \sqrt[4]{0.01}$
i) $\lg (100^3)$ j) lg 0 k) lg (lg 10)

174. Berechnen Sie ohne Rechner.

a) $10^{\lg 5}$ b) $10^{1+\lg 2}$ c) $10^{3-\lg 5}$ d) $10^{-1+\lg 20}$

175. Zwischen welchen *ganzen Zahlen* liegt der Logarithmus?
Die Aufgabe ist *ohne Rechner* zu lösen.

Beispiel: $\lg 300$; $\lg 10^2 < \lg 300 < \lg 10^3 \Rightarrow 2 < \lg 300 < 3$

a) $\lg 2$ b) $\lg 90\,000$ c) $\lg 0.5$ d) $\lg 0.0003$

e) $\lg 99$ f) $\lg 0.123$

176. Bestimmen Sie x <u>ohne</u> Rechner.
(In der Lösung dürfen keine gebrochenen Exponenten vorkommen.)

a) $\lg x = 1$ b) $\lg x = 0$ c) $\lg x = 5$ d) $\lg x = \frac{1}{3}$

e) $\lg x = -2$ f) $\lg x = 0.75$ g) $\lg x = 0.3$ h) $\lg x = -0.5$

i) $\lg x = -0.2$ j) $\lg x = -0.01$

177. Bestimmen Sie x mit dem Rechner auf 2 Dezimalen genau.

a) $\lg x = 1.2$ b) $\lg x = -1.2$ c) $\lg x = 0.12$ d) $\lg x = \pi$

178. a) Für welche Werte von a ist $\lg a$ definiert?

b) Für welche Werte von a wird $\lg a$ ganzzahlig?

179. Bestimmen Sie x und den Definitionsbereich von $\lg(T(x))$.

a) $\lg(x+1) = 1$ b) $\lg(x-2) = 0$ c) $\lg(x+2) = 0$

d) $\lg(3x-2) = -1$ e) $\lg(10-5x) = 3$ f) $\lg\sqrt{2x-1} = 0.5$

g) $\lg(x^3) = 2$ h) $\lg(x^2) = -1$ i) $\lg\sqrt[3]{x} = \frac{1}{4}$

180. Schreiben Sie die folgende Zahl näherungsweise in der Form 10^x.
Bestimmen Sie x mit dem Rechner auf 2 Dezimalen genau.

a) 200 b) $3.8 \cdot 10^8$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{5}$ e) -2

181. Für die Empfindlichkeit S eines Filmes gibt es die ASA- und die DIN-Skala.
Zwischen diesen beiden Skalen besteht die Beziehung:

$$S_{DIN} = 1 + 10 \lg(S_{ASA})$$

a) Berechnen Sie die DIN-Empfindlichkeit, wenn $S_{ASA} = 64$; 100 ; 200 ; 400 ; 1000 ist.

b) Lösen Sie die obige Gleichung nach S_{ASA} auf und berechnen Sie die ASA-Empfindlichkeit für folgende DIN-Werte: 19 ; 20 und 25.

1.7.2 Logarithmen mit beliebiger Basis

Unter $\log_b c$ versteht man jene Zahl (Exponent), mit der man b potenzieren muss, um c zu erhalten:

$$b^{\log_b c} = c \qquad \text{für } b > 0\,;\ b \neq 1\,;\ c > 0$$

oder: $b^x = c \Leftrightarrow x = \log_b c$

$\log_b c$: «Logarithmus von c zu Basis b»

Sonderfälle: $\log_b b = 1$; $\log_b 1 = 0$; $\log_b (b^k) = k$ $(k \in \mathbb{R})$

Häufig benutzte Basen:

Basis 10:	$\log_{10} c = \lg c$	(Zehnerlogarithmus)
Basis e = 2.718..	$\log_e c = \ln c$	(natürlicher Logarithmus)
Basis 2:	$\log_2 c = \mathrm{lb}\, c$	(Zweierlogarithmus)

182 Erklären Sie mit Worten, was man unter $\log_3 5$ versteht.

183. a) Warum ist $\log_b c$ nur für $c > 0$ definiert?
b) Warum ist $\log_b c$ für $b = 1$ nicht definiert?

Eine Definition ist das Einfassen der Wildnis einer Idee mit einem Wall von Worten.

Samuel Butler, 1835–1902, engl. Schriftsteller

184. Schreiben Sie die folgende Gleichung in der Form $\log_a b = c$.

a) $3^4 = 81$ b) $6^{-3} = \frac{1}{216}$ c) $2^n = m$
d) $p^k = m$ e) $10^x = y$ f) $e^x = x^2$

185. Berechnen Sie mithilfe von $\log_a (a^k) = k$.

a) $\log_5 125$ b) $\log_7 7$ c) $\log_2 \sqrt{2}$ d) $\log_4 2$
e) $\log_6 1$ f) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ g) $\log_n\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\log_a (\sqrt[n]{a})$

186. Bestimmen Sie x.

a) $\log_3 x = -2$ b) $\text{lb}\, x = 5$ c) $\ln x = 2$ d) $\log_9 x = 0.5$

e) $\lg x = -3$ f) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ g) $\log_5 (x + 1) = 2$ h) $\log_2 (x^2) = 4$

187. Bestimmen Sie die Basis b.

a) $\log_b 64 = 3$ b) $\log_b 8 = -3$ c) $\log_b \left(\frac{1}{25}\right) = 2$ d) $\log_b 16 = 1$

e) $\log_b 2 = 0$ f) $\log_b 5 = 0.5$

188. Der atmosphärische Luftdruck p nimmt mit zunehmender Höhe h ab.
■

Es gilt: $h = H \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$

h: Höhe über dem Meeresspiegel H = 8005 m
p: Luftdruck in Höhe h p_0: Luftdruck auf Meereshöhe (h = 0 m)

a) Wie hoch fliegt ein Flugzeug, von dem aus der Luftdruck von 0.28 bar gemessen wird, während eine Bodenstation auf Meereshöhe 1.05 bar meldet?

b) Auf welcher Höhe ist der Luftdruck halb so gross wie auf Meereshöhe?

c) Berechnen Sie den Luftdruck auf dem Mount Everest (8848 m ü. M.), wenn er auf Meereshöhe 1.00 bar beträgt.

Die Zahl ist Anfang und Ende des Denkens.
Mit dem Gedanken wird die Zahl geboren.
Über die Zahl hinaus reicht der Gedanke nicht.

Inschrift (am Mittag-Leffler-Institut in Djursholm, Schweden)

189. Die Primzahlen werden mit wachsendem x ($x \in \mathbb{N}$) immer seltener. Ihre Verteilung ist
■ unregelmässig.
In der Zahlentheorie bezeichnet man mit Π (Π ist der «Name» der Funktion) die *Anzahl* der Primzahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Der sogenannte Primzahlsatz besagt, dass für grosse x gilt: $\Pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$

Beispiele: $\Pi(10) = 4$; $\Pi(10^3) = 168$
$\Pi(10^5) = 9592$; $\Pi(10^{10}) = 455\,052\,512$

Berechnen Sie den Näherungswert $\frac{x}{\ln x}$ und dessen relativen Fehler für

a) $x = 10$ b) $x = 10^3$ c) $x = 10^5$ d) $x = 10^{10}$

1.7.3 Logarithmengesetze

Die folgenden Gesetze gelten für eine beliebige Basis b ($b > 0$, $b \neq 1$), deshalb schreiben wir anstatt $\log_b x$ einfach $\log x$.

(1) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

(2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ $\qquad x > 0,\ y > 0,\ m \in \mathbb{R}$

(3) $\log(x^m) = m \cdot \log x$

190. Berechnen Sie zuerst «logarithmisch» (Logarithmenbasis: 10 oder e), dann gewöhnlich. Vergleichen Sie die beiden Resultate.

a) $7805 \cdot 16.2$ b) $56810 : 87.3$ c) $\frac{1234 \cdot 9876}{91}$

d) 2^{100} e) $\sqrt[4]{21700}$ f) $\sqrt[3]{(6.1 \cdot 10^5)^2}$

191. Zerlegen Sie den Term mithilfe der Logarithmengesetze.
(Die Logarithmenbasis wurde weggelassen.)

a) $\log(2x)$ b) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$ c) $\log(2^{10})$

d) $\log\left(\frac{1}{x}\right)$ e) $\log(n^{-2})$ f) $\log(5pq)$

g) $\log\left(\frac{1}{x-y}\right)$ h) $\log(a(a-2))$ i) $\log((a-b)^2)$

192. Zerlegen Sie den Term mithilfe der Logarithmengesetze.
(Die Logarithmenbasis wurde weggelassen.)

a) $\log\left(\frac{1}{k^6}\right)$ b) $\log\left(\frac{1}{(a+1)^3}\right)$ c) $\log\left(\left(\frac{1}{x-2}\right)^4\right)$

d) $\log\left(\frac{u}{u+1}\right)$ e) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)$ f) $\log\left(\frac{2a}{bc}\right)$

g) $\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$ h) $\log\left(\frac{3a^2}{5b^3}\right)$ i) $\log(7m^2n^3)$

Alles systematische Denken entspricht einem Spiel nach bestimmten Regeln.

Koestler

193. Zerlegen Sie den Term mithilfe der Logarithmengesetze.
(Die Logarithmenbasis wurde weggelassen.)

a) $\log \sqrt{x}$ b) $\log \sqrt{n^3}$ c) $\log \sqrt[3]{1-k}$

d) $\log \sqrt{\frac{1}{a}}$ e) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ f) $\log \sqrt{3-\sqrt{2}}$

g) $\log \sqrt{ab}$ h) $\log \sqrt[4]{\frac{u}{v}}$ i) $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

194. Zerlegen Sie mithilfe der Logarithmengesetze und bestimmen Sie den Definitionsbereich des gesuchten Terms. (Die Logarithmenbasis wurde weggelassen).

a) $\log (a^2 + a)$ b) $\log (a^2 - b^2)$ c) $\log (u^2 - 1)$

d) $\log (x^2 + y^2 - 2xy)$ e) $\log (2x^5 - 3x^4)$ f) $\log (n^2 - 6n + 8)$

g) $\log (a^2 - 2a + 1)$ h) $\log (-3x^2 + x + 10)$

195. Vereinfachen Sie so weit als möglich. (e bedeutet stets die Eulersche Zahl.)

a) $\ln (3e)$ b) $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ c) $e^{\ln 2}$ d) $\ln \sqrt{e}$

e) $\ln (2e)^2$ f) $e^{3 \ln 4}$ g) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ h) $\ln\left(\frac{e}{\sqrt[3]{e}}\right)$

i) $e^{-\ln 5}$ j) $\ln (\ln e)$ k) $e^{0.5 \ln 25}$ l) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Zehnerlogarithmen

196. Berechnen Sie ohne Rechner.

a) $\lg 7 + \lg\left(\frac{1}{7}\right)$ b) $\lg 40 + \lg 25$ c) $\lg 6000 - \lg 60$ d) $3 \lg 2 + 3 \lg 5$

197. Drücken Sie mithilfe von lg 3 aus.

Beispiel: $\lg 3000 = \lg (3 \cdot 1000) = \lg 3 + \lg 1000 = 3 + \lg 3$

a) $\lg 300$ b) $\lg 300000$ c) $\lg 0.3$ d) $\lg 0.0003$

e) $\lg \frac{1}{3}$ f) $\lg \frac{1}{30}$ g) $\lg 9$ h) $\lg 81$

i) $\lg \frac{1}{27}$ j) $\lg \sqrt{3}$ k) $\lg \sqrt{243}$

198. Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmusterm zusammen.

a) $1 + \lg 8$ b) $2 + \lg 2$ c) $\lg 7 - 1$

d) $\lg 500 - 3$ e) $3 + 2 \lg 2$ f) $3 \lg 4 - 2$

g) $2 - 10 \lg 2$ h) $-3 - 2 \lg x$ i) $a + b \cdot \lg x$

199. Geben Sie die folgende Zahl in der wissenschaftlichen Form an.
■ Der Faktor vor der Zehnerpotenz soll auf 2 Dezimalen gerundet werden.

Beispiel:
$2^{1000} = 10^{\lg(2^{1000})} = 10^{1000 \lg 2} = 10^{301.03\ldots} = 10^{301+0.03\ldots} = 10^{0.03\ldots} \cdot 10^{301} \approx 1.07 \cdot 10^{301}$

a) 999^{999} b) $(9^9)^9$ c) $9^{(9^9)}$

d) $5^{(5^5)}$ e) $2^{3\,021\,377} - 1$ (bis 1998 grösste bekannte Primzahl)

200. Bestimmen Sie *alle* natürlichen Zahlen, die kleiner als 50 sind und deren Logarithmus mithilfe von lg 2 und lg 3 berechnet werden kann.
Beispiel: 12, denn $\lg 12 = \lg(3 \cdot 4) = \lg 3 + 2 \lg 2$

Logarithmen mit beliebiger Basis

201. Welche Gleichungen sind falsch, d. h. nicht allgemein gültig?

1) $\log_b(2x) = 2 \cdot \log_b x$ 2) $\log_b(u + v) = \log_b u + \log_b v$ 3) $\lg(10^a) = a$

4) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x$ 5) $\lg(10a) = 1 + \lg a$ 6) $\log_b(m^3) = m \cdot \log_b 3$

7) $\lg a + \lg(2a) = \lg(3a)$ 8) $\log_b(-x) = -\log_b x$ 9) $\log_b \sqrt{x} = \sqrt{\log_b x}$

10) $\frac{\lg a}{\lg b} = \lg\left(\frac{a}{b}\right)$

202. Schreiben Sie als Logarithmus von einer Zahl.
(Die Logarithmenbasis wurde weggelassen).

a) $\log 5 + \log 12$ b) $\log 20 - \log 4$ c) $\log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{4}{5}\right)$

d) $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 4$ e) $\frac{1}{2} \log 16 - \frac{1}{3} \log 8$ f) $2 \log 3 + \frac{1}{3} \log 4 - 4 \log 2$

Die Mathematik handelt ausschliesslich von den Beziehungen der Begriffe zueinander ohne Rücksicht auf deren Bezug zur Erfahrung.

Albert Einstein, 1879–1955,
Förderer der mathematischen und physikalischen Wissenschaft

203. Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmusterm zusammen.
(Die Logarithmenbasis wurde weggelassen.)

a) $\log a + \log 3$ b) $\log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\left(\frac{b}{a}\right)$ c) $\log (x^2) - \log x$

d) $\log u - \log \sqrt{u}$ e) $\log a + \log b - \log c$ f) $\log 2 + 2 \log a$

g) $\log (2r) - 2 \log r$ h) $\frac{1}{n} \log (k - 1)$ i) $\log (x - 1) + \log (x + 1)$

204. Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmusterm zusammen.
(Die Logarithmenbasis wurde weggelassen.)

a) $3 \log a - 2 \log\left(\frac{1}{a}\right)$ b) $n \log a - n \log b + n \log c$

c) $\frac{1}{2} \log a - \frac{2}{3} \log b$ d) $\log (a - b) - \log (b - a)$

e) $\frac{1}{3} (\log m - \log n)$ f) $\frac{1}{2} (\log x - 3 \log y)$

g) $\log (ab) + \log\left(\frac{a}{b}\right) - 3 \log (a - b)$ h) $(n + 1) \log x - \frac{1}{3} \log (x^{6n})$

i) $\frac{1}{2} (\log m + \log (mn)) - \log n$ j) $2 \log u + \frac{1}{2} (\log (u + v) + \log (u - v))$

205. Wo steckt der Fehler?

a) $2 \cdot \log a = \log (a^2) = \log (-a)^2 = 2 \cdot \log (-a) \quad \Rightarrow \quad \underline{\log a = \log (-a)}$

b) Aus $\lg\frac{1}{2} = \lg\frac{1}{2}$ und $2 < 3$ folgt:

$$2 \lg\frac{1}{2} < 3 \lg\frac{1}{2}$$
$$\lg \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\underline{\frac{1}{4} < \frac{1}{8}}$$

c) Behauptung: Alle geraden Zahlen sind Null.

Beweis:
$$(-1)^{2n} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$\lg (-1)^{2n} = \lg 1$$
$$2n \lg (-1) = 0$$
$$2n = 0 \qquad (\text{oder} \quad \lg (-1) = 0)$$

Ein Mathematiker ist ein Mensch, der einen ihm vorgetragenen Gedanken nicht nur sofort begreift, sondern auch erkennt, auf welchem Denkfehler er beruht.

Helmar Nahr, *1931, deutscher Mathematiker und Ökonom

Exponentialgleichungen (siehe auch «2.4.4 Exponentialgleichungen»)

206. Berechnen Sie x auf 3 geltende Ziffern genau.

■

a) $2^x = 3$ b) $\pi^x = 10$ c) $5^x = 0.6$

d) $0.6^x = 6$ e) $2^{-x} = 20$ f) $5^{\sqrt{x}} = 100$

g) $3^{\frac{1}{x}} = 0.8$ h) $2 \cdot 3^{2x-1} = 12$ i) $12 \cdot 2^{\frac{-x}{6}} = 60$

207. Berechnen Sie x auf 3 geltende Ziffern genau.

■

a) $e^x = 10$ b) $e^x = \pi$ c) $e^{-x} = 2$

d) $e^{2x-3} = 5$ e) $e^{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$ f) $8 \cdot e^{10-x} = 0.6$

208. Lösen Sie die Gleichung nach x auf, ohne die Sonderfälle zu beachten.

a) $a^x = b$ b) $K_n = K_0 \cdot q^x$ c) $e^{2x} = a$

d) $a \cdot e^{10-x} = b$ e) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{-x}{T}}$ f) $N = N_0 \cdot n^{x-a}$

209. Drücken Sie mithilfe von Zehnerlogarithmen aus.

Beispiel: $\log_2 5 = ?$

$\log_2 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \lg(2^x) = \lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 5}{\lg 2}$

also $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$

a) $\log_3 7$ b) $\log_5 10$ c) $\ln x$ d) $\log_2 x$

Es besteht die Gefahr, dass die Mathematiker mit dem Teufel im Bunde, den Geist trüben und in die Bande der Hölle verstricken.

Augustinus, 354–430, Kirchenlehrer, in «De genesi ad literam»

Vorstellungskraft ist wichtiger als Wissen.

Albert Einstein, 1879–1955, Physiker

2. Gleichungen

Die ganze Mathematik ist eigentlich eine Gleichung im Grossen für die andern Wissenschaften.

Novalis, 1772–1801, philosophische und mathematische Studien

Gleichungen

Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 durch das Gleichheitszeichen, so nennt man $T_1 = T_2$ eine Gleichung.

Eine Gleichung ist entweder eine Aussage oder eine Aussageform.

Beispiele:	$2 + 3 = 5$	$3^2 = 2^3$	$x = \frac{1}{x}$
	$a + a = 2a$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$(m + n)^2 = m^2 + n^2$
	$y + 1 = y$	$\sqrt{t} = t^2 - 1$	$\lvert z - 1 \rvert = z + 1$
Gegenbeispiele:	$\frac{x}{0} = 2$	$a < 5$	$0 \leq x < 1$	$b \neq 5$

Allgemeines über Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichung:
Gleichung, die genau einen Platzhalter hat. (Bestimmungsgleichungen werden im Folgenden abgekürzt «Gleichungen» genannt.)

Beispiele:	$x = \frac{1}{x}$	$a + a = 2a$	$y + 1 = y$	$\sqrt{t} = t^2 - 1$
Gegenbeispiele:	$2 + 3 = 5$	$(m + n)^2 = m^2 + n^2$		

Unbekannte: Platzhalter einer Gleichung. (Wird auch Lösungsvariable genannt.)

Grundmenge einer Gleichung:
Menge aller Zahlen, die für die Unbekannte zugelassen sind. Symbol: G
Im Folgenden ist immer $\mathbb{R}$ die Grundmenge, falls nicht etwas anderes vorgeschrieben ist.

Bei Textaufgaben hängt G von der Bedeutung der Unbekannten ab.
z.B.: Bedeutet die Unbekannte eine Anzahl Objekte, so gilt: $G = \mathbb{N}_0$

Definitionsmenge einer Gleichung $T_1 = T_2$:

Menge aller Zahlen aus der Grundmenge G, für welche die Terme T_1 und T_2 definiert sind. Symbol: D

Es gilt: $D = D_1 \cap D_2$, D_1 ist Definitionsmenge von T_1, D_2 jene von T_2.

Die Definitionsmenge ist eine Teilmenge der Grundmenge: $D \subset G$ oder $D = G$

Beispiele: $\frac{1}{x} = \frac{x}{x+2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$

$\sqrt{x} + 2x = \sqrt{x+5}$ $D = \mathbb{R}_0^+$

Lösung:
Eine Zahl (bzw. ein Term) aus der Definitionsmenge, welche die Gleichung erfüllt, d.h. wenn nach dem Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Lösungsmenge:
Menge aller Lösungen einer Gleichung. Symbol: L

Beispiele: $a + 1 = a \Rightarrow L = \{\ \}$ $x(x-2) = 0 \Rightarrow L = \{0; 2\}$

$x + x = 2x \Rightarrow L = \mathbb{R}$

Probe:
Einsetzen einer (berechneten) Zahl (bzw. eines Terms) in die ursprüngliche Gleichung und Bestimmung des Wahrheitswertes der entstandenen Aussage.

Parameter:
Enthält eine Gleichung neben der Unbekannten auch noch andere Platzhalter, so nennt man diese Parameter.

Im Folgenden wird bei Gleichungen mit Parametern die Unbekannte stets mit x bezeichnet.

Beispiel: $ax - b^2 = bx + 2$ x: Unbekannte a, b: Parameter

Umformen einer Gleichung

Äquivalente Gleichungen:
Zwei Gleichungen, die bezüglich einer Grundmenge G die gleiche Lösungsmenge besitzen. Symbol: $\Leftrightarrow$

Beispiel: $2x = x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

Gegenbeispiel: $x^2 = 4 \quad \not\Leftrightarrow \quad x = 2$

Äquivalenzumformungen:
Gleichungsumformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern.

(1) Termumformungen (falls der Definitionsbereich des Terms sich nicht ändert).

Beispiel: $5x + 2x - 5 = x(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = x^2 - 3x$

(2) Addieren oder subtrahieren einer Zahl a $(a \in \mathbb{R})$.

Beispiel: $2x^2 - 6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 9$

(3) Multiplizieren mit einer Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Beispiel: $\frac{x}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

(4) Dividieren durch eine Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Beispiel: $3x^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$

(5) Addieren oder subtrahieren eines Terms T(x) – x ist die Unbekannte –, dessen Definitionsmenge nicht kleiner ist als jene der gegebenen Gleichung.

Beispiele: $6x^2 = 2x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 5$

$\sqrt{x} - \sqrt{x+2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 7 + \sqrt{x+2}$

Gegenbeispiel: $x = -2 \quad \not\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x} = -2 + \sqrt{x}$

Diese Umformungen führen in jedem Fall zu äquivalenten Gleichungen.
Daraus folgt aber nicht, dass bei allen übrigen Umformungen (z.B. Quadrieren, Wurzel ziehen) stets nichtäquivalente Gleichungen entstehen.

2.1 Aussagen und Aussageformen

2.1.1 Aussagen

Eine **Aussage** ist ein mit Worten und Zeichen formulierter «Satz», bei dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.
Man kann also einer Aussage die **Wahrheitswerte** wahr (w) oder falsch (f) zuordnen.

Beispiele:

	Aussage?	Wahrheitswert
Der Rhein ist ein europäischer Fluss.	ja	wahr
Quadratzahlen sind nie ungerade.	ja	falsch
$45 - 23 = 21$	ja	falsch
Die Menge M ist eine unendliche Menge.	nein	–
Welche Primzahl ist grösser als 5?	nein	–
Die englische Monarchie wird bald abgeschafft.	ja	?
Bring mir jenes Buch!	nein	–

210. Ist der folgende Satz eine Aussage? Ist sie wahr oder falsch?

a) Berlin liegt nördlicher als Zürich.
b) Kürzen Sie den Bruch $\frac{56}{70}$.
c) 1 ist eine Primzahl.
d) Welches ist die grösste Quadratzahl?
e) 120 hat genau 15 Teiler.
f) 5x ist ohne Rest durch 5 teilbar.
g) Nehmen Sie hier Platz.
h) Für $x \in \mathbb{N}$ gilt: 2x ist eine gerade Zahl.

211. Ist der folgende Satz eine Aussage? Ist sie wahr oder falsch?

a) Im Jahre 2020 wird es die Vereinigten Staaten von Europa geben.
b) Wo wird der beste Käse hergestellt?
c) Durch Erweitern wird der Wert eines Bruches verändert.
d) St. Gallen ist die schönste Stadt der Schweiz.
e) Die Summe der fünf kleinsten Primzahlen ist keine Primzahl.
f) $7^2 - 5 > 6^2 + 8$
g) Es gibt eine Zahl x, deren Kehrwert wieder den Wert x hat.

2.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Die Verknüpfung «und»

Zwei Aussagen A, B können durch das Wort «und» miteinander verknüpft werden, dadurch entsteht eine neue Aussage «A und B».

Beispiel: A : 12 ist durch 3 teilbar. B : 12 ist durch 4 teilbar.

A und B: 12 ist durch 3 und durch 4 teilbar.

Der Wahrheitswert der Aussage «A und B» hängt natürlich vom Wahrheitswert der Einzelaussagen A bzw. B ab; nicht aber vom Inhalt der beiden Aussagen A bzw. B. Diese Abhängigkeit wird durch eine sogenannte **Wahrheitstafel** definiert:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die Verknüpfung durch «und» heisst **Konjunktion.**
Für «und» verwendet man das Zeichen $\wedge$.
Eine Konjunktion ist also nur dann wahr, wenn beide Einzelaussagen wahr sind.

Die Verknüpfung «oder»

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Peter wird am Montag oder am Dienstag abreisen.
Die Aussage enthält zwei Möglichkeiten. In diesem Sinne verwendetes «oder» heisst **«ausschliessendes oder».**
In diesem Fall ist die folgende Formulierung eindeutiger:
«Peter reist entweder am Montag oder am Dienstag ab».

Fall 2: Die Zahl 12 ist durch 3 oder durch 4 teilbar.
Diese Aussage enthält drei Möglichkeiten.
In diesem Sinne verwendetes «oder» heisst **«einschliessendes oder».**

In der Mathematik wird «oder» immer im einschliessenden Sinn verwendet.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Verknüpfung durch «oder» heisst **Disjunktion.**
Für «oder» verwendet man das Zeichen $\vee$.
Eine Disjunktion ist immer dann wahr, wenn mindestens eine der Einzelaussagen wahr ist.

212. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussage.

a) 91 ist durch 7 und durch 17 teilbar.

b) Jedes Rechteck besitzt einen Umkreis und einen Inkreis.

c) $3.1 < \pi$ und $\pi < 3.2$ (kürzer: $3.1 < \pi < 3.2$)

d) $\frac{1}{3} > 0.3$ und $\frac{1}{3} = 0.3$

213. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussage.

a) 91 ist durch 7 oder durch 17 teilbar.

b) Eine natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.

c) Jedes Rechteck besitzt einen Umkreis oder einen Inkreis.

d) $\frac{1}{3} > 0.3$ oder $\frac{1}{3} = 0.3$ (kürzer: $\frac{1}{3} \geq 0.3$)

Als Mathematik können wir … das Gebiet bezeichnen, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden und ob das, was wir sagen, auch wahr ist.

Bertrand Russell, 1872 – 1970, Mathematiker und Philosoph

214. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

a) 121 ist durch 7 teilbar und Quadratzahl.

b) 121 ist durch 7 teilbar oder Quadratzahl.

c) 196 ist durch 7 teilbar und Quadratzahl.

d) 196 ist durch 7 teilbar oder Quadratzahl.

e) $(6.2^4 < 6.2^5) \vee (6.1^3 > 6.1^4)$

f) $(\pi > 22/7) \wedge (\pi > 3.14)$

g) $(\pi^2 < 10) \wedge (0.5\pi < \sqrt{3})$

h) $(5^3 - 20 \neq 3 \cdot 5 \cdot 7) \vee (0.7^2 > 0.5)$

215. Stellen Sie die Wahrheitstafel auf.

a) $(A \wedge B) \vee B$ b) $(A \vee B) \wedge B$ c) $A \vee (A \wedge B)$

Sich über die Philosophie lustig machen, ist wirklich philosophieren.

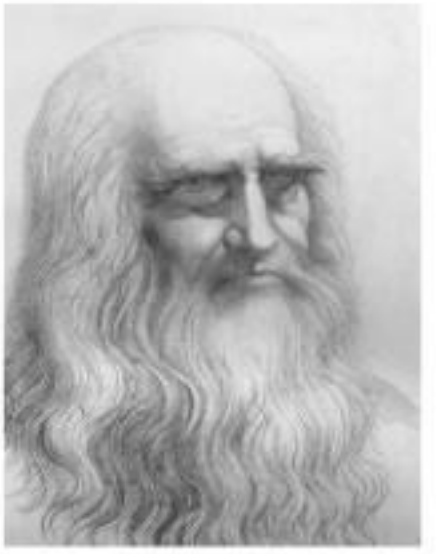
Blaise Pascal, 1623 – 1662, frz. Mathematiker und Philosoph

Alle wirklich grossen Erfindungen wurden zuerst intuitiv erahnt, dann logisch erhärtet.

Eveline Gottzein, *1931, Mathematikerin

Wer die Sicherheit der Mathematik verachtet, stürzt sich in das Chaos der Gedanken.

Leonardo da Vinci, 1452 – 1519, ital. Maler



Ich glaube ..., dass es, im strengsten Verstand, für den Menschen nur eine einzige Wissenschaft gibt, und diese ist die reine Mathematik.

Die sogenannten Mathematiker von Profession haben sich, auf die Unmündigkeit der übrigen Menschen gestürzt, einen Kredit von Tiefsinn erworben, der viel Ähnlichkeit mit dem vom Heiligen hat, den die Theologen für sich haben.

Georg Christoph Lichtenberg, 1742 – 1799, deutscher Schriftsteller, Prof. für Physik

2.1.3 Aussageformen

Eine **Aussageform** ist ein «Satz», der mindestens eine Leerstelle (man sagt auch Platzhalter oder Variable) enthält, und der in eine Aussage übergeht, wenn für alle Leerstellen Elemente einer Grundmenge eingesetzt werden.

Beispiele:

Aussageform	Grundmenge	Beispiel einer Aussage	Wahrheitswert
$5x = 35$	$\mathbb{R}$	$5 \cdot 7 = 35$	wahr
n ist eine Quadratzahl	$\mathbb{N}$	8 ist eine Quadratzahl	falsch
$8y < 11^2$	$\mathbb{Q}$	$8 \cdot 9.6 < 11^2$	wahr

Beachte:
- Jede Bestimmungsgleichung ist eine Aussageform.
- Aussageformen besitzen keinen Wahrheitswert.

Aussageformen mit genau einem Platzhalter

Grundmenge G Menge aller Elemente, die in einer Aussageform anstelle der Variablen eingesetzt werden können.

Lösungsmenge L Alle Elemente der Grundmenge, die für die Variable eingesetzt, eine wahre Aussage ergeben.

Man unterscheidet:

$L = \{ .. , .. \}$ Die Lösungsmenge ist keine leere Menge und nicht gleich der Grundmenge, d.h. die Aussageform ist bezüglich der Grundmenge G **erfüllbar.**
Beispiel: $(x + 3)(x - 4) = 0$ $G = \mathbb{R}$

$L = G$ Die Lösungsmenge enthält alle Elemente der Grundmenge, d.h. die Aussageform ist bezüglich der Grundmenge **allgemeingültig.**
Beispiel: $x(x + 2) = x^2 + 2x$ $G = \mathbb{R}$

$L = \{ \}$ Die Lösungsmenge ist eine leere Menge, d.h. die Aussageform ist bezüglich der Grundmenge **nicht erfüllbar.**
Beispiel: $3x + 4 = 3x$ $G = \mathbb{R}$

Verknüpfung von Aussageformen

$A \wedge B$ Die Lösungsmenge ist die **Schnittmenge** der Lösungsmengen der beiden Aussageformen A und B. $L(A \wedge B) = L(A) \cap L(B)$

$A \vee B$ Die Lösungsmenge ist die **Vereinigungsmenge** der Lösungsmengen der beiden Aussageformen A und B. $L(A \vee B) = L(A) \cup L(B)$

216. Teilen Sie die «Sätze» ein in wahre Aussage, falsche Aussage, Aussageform.

a) Das Produkt von zwei positiven Zahlen ist stets positiv.

b) $-5 < -2$

c) $-a$ ist negativ.

d) Für jede reelle Zahl a gilt: $-a$ ist negativ.

e) Ist p eine Primzahl grösser als 2, so ist $p + 1$ keine Primzahl.

f) $x^2 = 2$

g) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, sodass gilt $x^2 = 2$.

h) $3^4 \neq 4^3$

i) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

j) Jedes Quadrat ist ein Rechteck.

k) In jedem Dreieck halbiert eine Winkelhalbierende die Gegenseite.

217. Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Ist die Aussageform allgemein gültig, erfüllbar oder nicht erfüllbar?

a) $2.5z - 6 = 31$ $G = \mathbb{R}$

b) $2.5z - 6 < 31$ $G = \mathbb{N}$

c) Im p schneiden sich die Diagonalen rechtwinklig.
$G = \{$Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboid$\}$

d) q ist der kürzeste Monat im Jahr. G = Menge aller Monate

e) $3^x \leq 81$ G = Menge der Primzahlen

f) $3^x \leq 81$ G = Menge der Quadratzahlen

g) $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$ $G = \mathbb{R}$

h) x ist Quadratzahl und x ist Primzahl. $G = \mathbb{Z}$

218. Überprüfen Sie die Lösungsmenge für die Grundmenge $G = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen).

a) $x^2 \leq 0$ $L = \{\ \}$

b) $x^2 > 0$ $L = \mathbb{Z}$

c) $x^2 < 9$ $L = \{0, 1, 2\}$

d) $(2x+4)^2 = 4x^2 + 15x + 12$ $L = \{-4\}$

e) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 10$ $L = \{0\}$

f) $(x + 3)^2 \leq x^2 + 6x + 10$ $L = \mathbb{N}$

219. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für die Grundmenge $G = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen).

a) $x \leq 8.5 \ \wedge \ x > -1.5$

b) $y^2 < 100 \ \wedge \ |y| > 1$

c) $|z| \leq 2 \ \vee \ z^2 > 25$

d) $x = x + 2 \ \vee \ 2x = x$

e) $a^2 = -a \ \wedge \ |a| < 8$

f) $2x + 5 = 0.5 \ \wedge \ |x| > 5$

g) $2^{|b|} \geq 20 \ \vee \ 3b = -12$

h) $|p| \leq 4 \ \vee \ p^2 \leq 4$

2.1.4 Äquivalenz von Aussageformen

Zwei Aussageformen heissen **äquivalent** in der Grundmenge G, wenn sie in G die gleiche Lösungsmenge haben.

Zeichen: $A \Leftrightarrow B$ («A ist äquivalent zu B»)

Beispiele: $G = \mathbb{N}$, n ist eine Primzahl $\Leftrightarrow$ n hat genau zwei Teiler

$G = \mathbb{R}$, $x + 2x = 5 \Leftrightarrow 3x = 5$

220. Sind die Aussageformen A und B äquivalent in der Grundmenge G?

a) $G = \mathbb{R}$; A: x ist positiv B: x ist nicht negativ

b) $G = \mathbb{N}$; A: n ist durch 3 teilbar B: Die Quersumme von n ist durch 3 teilbar

c) $G = \mathbb{N}$; A: m ist eine Quadratzahl B: m hat eine ungerade Anzahl Teiler

221. Sind die Aussageformen A und B äquivalent in der Grundmenge G?

a) G ist die Menge aller Vierecke.
A: Die Diagonalen von x sind gleich lang. B: x ist ein Rechteck.
(Hinweis: Jedes Quadrat ist ein Rechteck)

b) G ist die Menge aller Vierecke.
A: x hat vier gleich lange Seiten. B: x ist ein Quadrat.

c) G ist die Menge aller Dreiecke.
A: x hat mindestens eine Symmetrieachse. B: x ist gleichschenklig.

d) G ist die Menge aller Dreiecke.
A: x ist rechtwinklig. B: Die Seiten von x verhalten sich wie 3 : 4 : 5.

222. Sind die Aussageformen A und B äquivalent in der Grundmenge $\mathbb{R}$?

a) A: $\frac{2}{x} = 5$ B: $5x = 2$

b) A: $a^2 = (a-4)^2$ B: $a = a - 4$

c) A: $n^2 = 4$ B: $n = 2$

d) A: $x(x-2) = 0$ B: $x = 2$

e) A: $x > 0$ B: $x^2 > 0$

f) A: $|x| < 2$ B: $x < 2$

Äquivalenzumformungen

(1) Termumformungen
(falls der Definitionsbereich des Terms sich nicht ändert)

Beispiel: $5x - 2x + 6 = 4(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 6 = 4x - 12$

(2) Addieren oder subtrahieren einer Zahl a $(a \in \mathbb{R})$

Beispiel: $2x + 6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3$

(3) Multiplizieren mit einer Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Beispiel: $\frac{x}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

(4) Dividieren durch eine Zahl a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Beispiel: $3x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

(5) Addieren oder subtrahieren eines Terms von der Form ax^n
(x ist die Unbekannte)

Beispiele: $8x = 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -1$

$6x^2 = 2x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 5$

Diese Umformungen führen in jedem Fall zu äquivalenten Gleichungen.
Daraus folgt aber nicht, dass bei allen übrigen Umformungen (z. B. Quadrieren, Wurzel ziehen) stets nichtäquivalente Gleichungen entstehen.

2.2 Lineare Gleichungen

Eine Bestimmungsgleichung heisst **linear** (oder Gleichung ersten Grades), wenn sie zur folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$\mathbf{ax + b = 0} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiele: $3x = 7$ $\quad \sqrt{3}x = \pi$ $\quad 0.7 = 2.5x$

$0 = 0.79x - 5$ $\quad 12 : 6.2 = 5x$ $\quad x^2 = x(x + 1) - 5$

$ax + b = 0$ nennen wir **Grundform** einer linearen Gleichung.

223. Welche Gleichungen sind linear? Lösen Sie diese.

a) $8x = 3x$

b) $\frac{2x - 3}{5} = \frac{x + 2}{4}$

c) $5x = x(6 - x)$

d) $2x(x + 1) + 9 = x(2x - 3) - 10$

e) $(x - 5)^2 = x^2$

f) $\sqrt{x} = x - 2$

224. Für welchen Wert von m wird die Gleichung $(4x - m)x = (3x^2 + 1)m$ linear?

2.2.1 Gleichungen ohne Parameter

225. a) $(x + 1)(4x - 3) = 2(x + 1)(2x + 3)$

b) $(x + 3.5)(x + 4.5) = (x + 5.5)(x + 6.5) - 28$

c) $4(7.5x + 12)x - 8x(3.75x + 12) = 328 - (94x + 144)$

d) $(x - 3)(2x - 5) + 5(1.4x - 5) = 2(x - 1)^2 - 12$

e) $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2 + (8x - 3)^2 = (7x - 2)(11x - 1)$

f) $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + (2x - 9)^2 = (x - 8)(6x - 8)$

g) $(5x + 1)(2x - 1) - (2x + 1)(3x - 5) = 4(x + 3)(x - 1) - 4$

h) $(8 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2 - 6 = (9 - 5x)^2 + 20x - 4$

226. a) $-\frac{x}{4}-\frac{3x-18}{6}=17-\left(\frac{3}{4}x-8\right)$

b) $\frac{3(x-6)}{4}+15+\frac{2(x-3)}{3}=25+\frac{x-1}{2}-\frac{x+13}{5}$

c) $\frac{8x+3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{5x+6}{3}-\frac{13}{3}$

d) $5+\frac{1}{2}(11x-37)=\frac{31}{10}x+\frac{2}{5}(6x-40)+\frac{5}{2}$

e) $3\left(\frac{5}{6}x-\frac{16}{5}\right)+\frac{10}{3}x=2\left(\frac{11}{2}+\frac{8}{3}x\right)-11.6$

f) $3x-\frac{2x-7}{3}-\frac{x-2}{5}=\frac{2x+5}{3}+\frac{3x-6}{5}+x$

g) $\frac{3x+5}{7}-\left(\frac{x+2}{3}-1\right)=\frac{2x+5}{3}-\frac{x-4}{2}-\frac{1}{14}x$

h) $3x-\frac{2x+5}{7}=16-\frac{7x+19}{2}-\frac{2x+1}{3}$

227. Bestimmen Sie die gesuchten Zahlen.

a) Verdoppelt man die Differenz aus 24 und dem Vierfachen einer unbekannten Zahl, so erhält man 15 mehr als das Doppelte dieser Zahl.

b) Die Differenz aus dem Neunfachen einer gesuchten Zahl und der Zahl 5 ist um 93 grösser als die Differenz aus dem Vierfachen der Zahl und 25.

c) Vermindert man das Elffache einer Zahl um die Differenz aus 25 und dem Dreifachen der Zahl, so erhält man genauso viel, wie wenn man 20 um das Zwölffache der Zahl vermehrt.

d) Das um 30 vermehrte Fünffache einer Zahl ist um ebenso viel grösser als 155, wie das um 33 vermehrte Dreifache dieser Zahl kleiner als 155 ist.

e) Addiert man zu einer Zahl 12 und multipliziert die Summe mit 5, subtrahiert von dem Produkt 72 und dividiert die Differenz durch 4, so erhält man die Zahl selbst.

f) Nimmt man das Dreifache einer zweiziffrigen Zahl, deren Quersumme 13 ist, und addiert dazu noch 5, so erhält man das um 30 verminderte Fünffache einer anderen Zahl, die mit den gleichen, nur in umgekehrter Reihenfolge stehenden Ziffern geschrieben wird.

g) Zerlegen Sie 116 so in 4 Summanden, dass jeder folgende Summand um 1 grösser ist als das Doppelte des vorhergehenden.

h) Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 6. Addiert man zu der Zahl die Zahl 18, so erhält man eine Zahl mit denselben Ziffern wie die unbekannte, aber in umgekehrter Reihenfolge.

i) Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 9. Vertauscht man die Ziffern, so erhält man das 0.375-fache der Zahl.

j) Von drei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen wird von der Summe der kleinsten und mittleren Quadratzahl das Doppelte der grössten subtrahiert. Dabei erhält man (−73).

k) Fügt man auf beiden Seiten einer zweistelligen natürlichen Zahl die Ziffer 8 hinzu, so ist die neue vierstellige Zahl um 51 grösser als das 119-fache der ursprünglichen Zahl.

l) Eine natürliche Zahl ergibt durch 13 dividiert den Rest 2 und durch 6 dividiert den Rest 1. Die Differenz der Quotienten, ohne Berücksichtigung der Reste, ist 20.

m) Eine natürliche Zahl ergibt durch 5 bzw. 7 bzw. 9 dividiert den Rest 1 bzw. 6 bzw. 5. Die Summe der Quotienten, ohne Berücksichtigung der Reste, ist 17.

*n) Addiert man die ersten n natürlichen Zahlen, so erhält man gleich viel, wie wenn man die grösste Zahl mit 35 multipliziert.

228. Beweisen Sie.

a) Es ist nicht möglich, vier aufeinander folgende natürliche Zahlen zu finden, sodass das Produkt aus der grössten und der kleinsten Zahl gleich dem Produkt der beiden anderen Zahlen ist.

b) Die Differenz der Quadrate von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen.

c) Die Summe der Quadrate von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist um 1 grösser als das doppelte Produkt dieser Zahlen.

229. a) Bei einer Treppe mit 22 Stufen könnten 2 Stufen eingespart werden, wenn jede Stufe 1.6 cm höher gemacht würde. Wie hoch ist die ganze Treppe?

b) Eine Leiter hat 27 Sprossen. Hätte man den Abstand zwischen den Sprossen 6 cm grösser gemacht, so wäre man mit 6 Sprossen weniger ausgekommen, wenn man annimmt, dass die erste und die letzte Sprosse an der gleichen Stelle bleiben. Welchen Abstand haben die Sprossen?

230. a) Der Vater, der heute 4-mal so alt ist wie der Sohn, ist in 6 Jahren um 3 Jahre jünger als das dreifache Alter des Sohnes. Wie alt sind beide heute?

b) Mutter und Tochter waren vor 2 Jahren zusammen 90 Jahre alt. Vor 12 Jahren war die Mutter um 2 Jahre jünger als das doppelte Alter der Tochter. Wie alt sind beide heute?

231. a) Ein Kapital ist zu $5\frac{1}{4}$ % angelegt und bringt jährlich € 395.– mehr Zins als ein anderes, um € 6000.– kleineres Kapital mit einem Zinsfuss von $4\frac{3}{4}$ %.
Wie gross sind die beiden Kapitalien?

b) Weil ein Kapital von € 27 000.– um $\frac{3}{4}$ % höher angelegt ist als ein anderes von € 30 000.–, ergibt sich ein um € 30.– höherer Jahreszins.
Welches sind die Zinssätze?

c) Jemand muss zwei Kredite von zusammen € 87 000.– zu 3.5 % und 4 % verzinsen. Wären die Zinssätze vertauscht, so ergäbe sich ein um € 85.– niedrigerer Jahreszins. Wie hoch sind die beiden Kredite?

d) Ein Vermögen ist wie folgt angelegt:
Ein Drittel zu 5 %, ein Neuntel zu 4 % und der Rest zu 4.5 %.
Der gesamte Zinsertrag beträgt € 2282.50. Wie gross ist das Vermögen?

e) Zwei Kapitalien von zusammen € 67 500.– ergeben gleich viel Zins, wobei aber das eine zu 7 % während des ganzen Jahres und das andere zu 6% nur während 8.5 Monaten einen Zinsertrag einbringt. Wie gross sind die Kapitalien?

f) Jemand möchte für sein Vermögen einen durchschnittlichen Zinsfuss von 5 % erreichen. Welches Kapital, zu $5\frac{1}{2}$ % verzinst, müsste noch dazukommen, wenn schon ein erstes Kapital von € 14 400.– zu $4\frac{1}{4}$ % und ein zweites Kapital von € 8000.– zu $5\frac{1}{2}$ % angelegt sind?

g) Ein Kapital von € 36 000.– wurde am 1. Februar auf ein Sparkonto einbezahlt. Im Laufe des Jahres wurde der Zinssatz von $5\frac{1}{2}$ % um $\frac{1}{2}$ % gesenkt. Der Zinsertrag betrug am Ende des Jahres € 1762.50.
Nach wie vielen Monaten wurde der Zinssatz geändert?

h) Jemand macht am 1. März eine Einlage von € 66 000.– bei einem Zinsfuss von 4.5 %. Während des Jahres erhöht sich der Zinsfuss um 1 %, sodass am Ende des Jahres auch ein um € 357.50 höherer Zins resultiert.
Wann fand die Erhöhung statt?

232. a) Stellt man eine bestimmte Anzahl eines Artikels her, so beträgt der Selbstkostenpreis pro Stück € 16.–. Von den Gesamtkosten sind dabei 65 % feste Kosten, also Kosten, die unabhängig von der Stückzahl sind. Durch Verbesserung des Produktes erhöht sich der Selbstkostenpreis pro Stück um € 8.–. Durch gleichzeitige Erhöhung der Stückzahl um 175 machen die festen Kosten nur noch 20 % der Gesamtkosten aus. Welche Stückzahl war ursprünglich vorgesehen?

b) Für eine Computeranlage verlangt ein Händler € 13 000.–. Der Käufer offeriert € 11 000.–. Sie einigen sich schlussendlich so, dass der Verkäufer den Preis um ebenso viel Prozent senkt wie der Käufer sein Angebot erhöht.
Wie hoch ist dieser Prozentsatz?

233. a) Zwei Materialien A und B haben ein Gesamtgewicht von 14 kg und kosten zusammen € 412.50. Wie viele kg sind je dabei, wenn von Material A das kg € 22.– und von Material B € 41.– kostet?

b) Bei einer Tombola kauft jemand eine Anzahl Lose für je € 2.–. Neben 35 Nieten brachten die Treffer je € 150.– ein, sodass schlussendlich ein Gewinn von € 226.– erzielt wurde. Wie viele Lose wurden gekauft?

c) Durch Erhöhung des Mitgliederbestandes von heute 250 um 32 % bei gleichzeitiger Senkung des Jahresbeitrages um € 2.– möchte ein Club Mehreinnahmen von jährlich € 420.– erzielen. Wie hoch war der bisherige Mitgliederbeitrag.

234. a) 12 kg einer Warensorte mit einem Kilopreis von € 8.50 werden mit einer zweiten Warensorte, von der das kg € 10.50 kostet, gemischt.
Wie viel muss man von der zweiten Sorte nehmen, wenn die Mischung für € 10.– pro kg verkauft werden soll?

b) Eine Firma mischt 62 %igen und 86 %igen Spiritus.
Wieviel braucht es von jeder Sorte, um 300 Liter 65 %igen zu erhalten?

235. a) Die Ortschaften A und B liegen 99 km auseinander. Ein Auto, das mit 60 km/h fährt, verlässt A um 9.00 Uhr in Richtung B. Um 9.15 Uhr verlässt ein anderes Auto das Dorf B in Richtung A, seine Geschwindigkeit beträgt 84 km/h.
Wann treffen sich die beiden Autos?

b) Ein Schiff fährt stromabwärts und erreicht sein Ziel in 5 Stunden. Fährt es mit gleicher Maschinenleistung stromaufwärts, so benötigt es für dieselbe Strecke 2 Stunden mehr. Bei ruhendem Wasser ist die Schiffsgeschwindigkeit 20 km/h.
Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit.

236. Eine Uhr zeigt genau zwei Uhr.
Nach wie vielen Minuten und Sekunden werden ihre beiden Zeiger zum ersten Mal

a) übereinanderstehen?

b) einen Winkel von 90° bilden?

quod erat demonstrandum q.e.d. (was zu beweisen war)
(Schlussformel aller seiner math. Beweisführungen)

Euklid, um 325 – 283 v. Chr., griech. Mathematiker

237. Zwei Fahrzeuge bewegen sich auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit. Das eine benötigt für einen Umlauf 60 Sekunden, das andere 36 Sekunden.
Wie viele Sekunden verstreichen zwischen zwei aufeinander folgenden Begegnungen, wenn sie sich

a) in gleicher Richtung bewegen?

b) in verschiedenen Richtungen bewegen?

Denn was man messen kann, das existiert auch.

Max Planck, 1858 – 1947, Physiker

238. Eine erste Röhre füllt eine Wanne allein in 2 Stunden, eine zweite allein in 5 Stunden und eine dritte allein in 7.5 Stunden.
Wie lange dauert es bis die Wanne

a) voll ist, wenn alle Röhren gleichzeitig offen sind?

b) voll ist, wenn die erste Röhre 20 min. weniger lang offen ist als die beiden anderen?

c) zu zwei Drittel gefüllt ist, wenn die dritte Röhre eine halbe Stunde weniger lang offen ist als die beiden anderen.

239. Ein Behälter A fasst den 3.5-fachen Inhalt eines Behälters B. Füllt man A zur Hälfte und B zu einem Viertel, so benötigt man 6.8 Liter mehr, als wenn man A zu drei Zehnteln und B zu einem Zehntel füllt.
Wie viele Liter fasst jeder Behälter?

240. a) In einem Holzmagazin werden 150 gleich lange Balken in einer trapezförmigen Beige von insgesamt 15 Schichten bereitgestellt. Jede Schicht weist einen Balken weniger auf als die nächsttiefer liegende Schicht.
Wie viele Balken befinden sich in der untersten Schicht?

b) Eine Fläche von der Form eines Quadrates wird in lauter gleich grosse Quadrate unterteilt. Einem Gärtner steht eine bestimmte Anzahl Bäume zur Verfügung. In jedem Eckpunkt der kleinen Quadrate wird ein Baum gepflanzt. Es bleiben dabei 17 Bäume übrig. Werden die Quadrate des Netzes verkleinert, und zwar so, dass pro Reihe ein Baum dazukommt, dann fehlen insgesamt 14 Bäume.
Wie viele Bäume stehen zur Verfügung?

c) Man möchte eine Anzahl von kleinen quadratischen Plättchen so aneinander fügen, dass wieder eine quadratische Fläche entsteht. In einem ersten Versuch bleiben 71 Plättchen übrig. Im zweiten Versuch, bei dem pro Seite ein Plättchen mehr gesetzt wird, sind 76 Plättchen zu wenig.
Wie viele Plättchen sind total vorhanden?

241. a) Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit. Verkürzt man jede Seite des Rechtecks um 2 dm, so wird sein Flächeninhalt um 36.8 dm^2 kleiner.
Berechnen Sie die Seiten des Rechtecks.

b) Länge und Diagonale eines Rechtecks ergeben zusammen 2.5 m. Die Breite beträgt 0.5 m.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks.

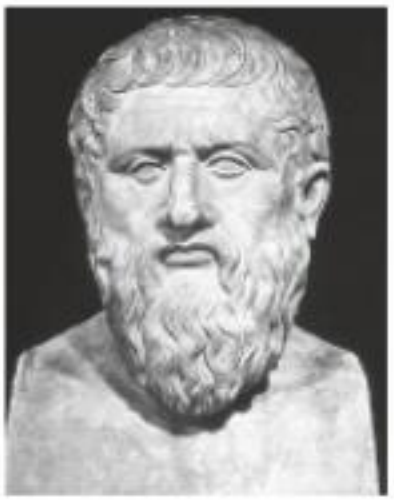
c) Die Fläche eines Quadrates ist um 1.75m^2 kleiner als diejenige eines Rechtecks. Dabei unterscheiden sich die Rechtecksseiten von den Quadratseiten um 1 m bzw. 1.5 m.
Wie lang ist die Quadratseite? (Bestimmen Sie alle Lösungen.)

d) Die längere Diagonale eines Rhombus misst 48 cm. Der halbe Umfang ist um 36 cm grösser als die andere Diagonale. Berechnen Sie die Rhombusseite.

242. Ein würfelförmiges Gefäss mit der Kantenlänge 40 cm (Innenmass) ist bis auf die Höhe 30 cm mit Wasser gefüllt. Ein 80 cm langer Stab mit quadratischer Querschnittsfläche von 10 cm Seitenlänge wird senkrecht so weit eingetauscht, bis das untere Ende des Stabes 15 cm über dem Gefässboden liegt. Berechnen Sie die Eintauchtiefe des Stabes.

Die Bedeutung der Geometrie beruht nicht auf ihrem praktischen Nutzen, sondern darauf, dass sie ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben.

Platon, 427 – 347 v. Chr., griech. Philosoph

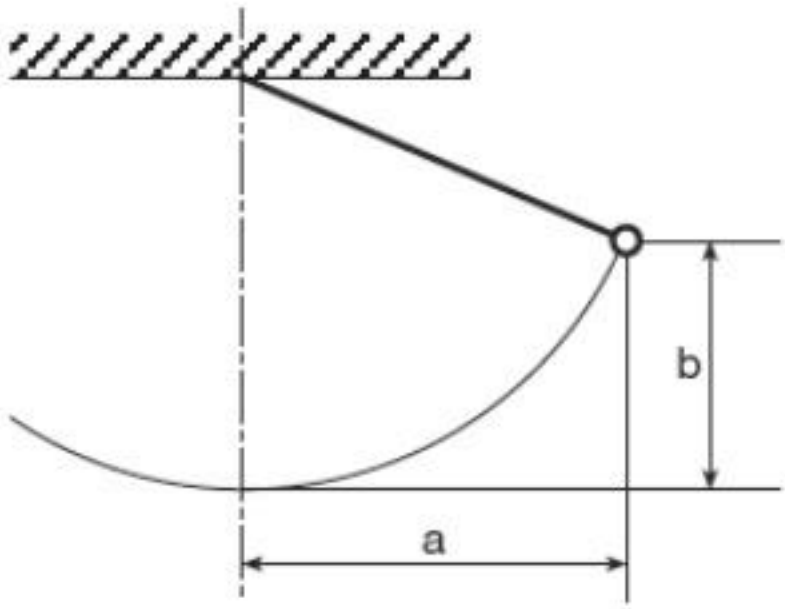


243. a) Ein Durchmesser eines Kreises wird auf einer Seite um 12 cm verlängert. Vom so erhaltenen Endpunkt werden Tangenten an den Kreis gezogen.
Wie gross ist der Kreisdurchmesser, wenn die Tangentenschnitte je 26 cm lang sind?

b) Von zwei Kreisen, die sich gegenseitig von aussen berühren, kennt man den Radius r_1 = 25 cm des grösseren Kreises. Die Berührungspunkte ihrer gemeinsamen Tangente haben die Entfernung t = 45 cm. Berechnen Sie den Radius r_2 des anderen Kreises.

c) An zwei gleich grosse, einander berührende Kreise vom Radius r = 10 cm ist eine gemeinsame äussere Tangente gelegt. Berechnen Sie den Radius desjenigen Kreises, der die Tangente und die beiden Kreise berührt.

244.



Ein mathematisches Pendel (Fadenpendel) erreicht während des Pendelvorganges eine horizontale Auslenkung von a = 2.0 m und eine maximale Höhendifferenz von b = 0.4 m.
Wie lang ist der Faden?

245.* a) Der Spielplan eines Pingpong-Turniers sieht vor, dass jeder gegen jeden einmal spielt. 6 Spieler melden sich aber vorzeitig ab. Dadurch fallen 111 Spiele aus.
Wie viele Spieler werden schlussendlich teilnehmen?

b) An einem Tanzanlass nehmen gleich viele Frauen wie Männer teil. Wären je 12 Frauen und Männer weniger dabei, ergäbe dies 552 weniger Paarkombinationen.
Wie viele Frauen und Männer sind anwesend?

c) Der Unterschied der Eckenzahl zweier konvexer Vielecke beträgt 5. Dadurch ist auch die Anzahl der Diagonalen um 75 verschieden.
Wie viele Ecken haben die beiden Vielecke?

d) An einer Veranstaltung nehmen Ehepaare und 8 Einzelpersonen teil. Bei der Begrüssung gibt jede Person jeder anderen die Hand, nicht jedoch dem eigenen Ehepartner. Wären 2 Ehepaare weniger anwesend, so würde sich die Zahl der Händedrücke um 116 reduzieren.
Wie viele Ehepaare nehmen teil?

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.

Johann Wolfgang Goethe, 1749 – 1832, deutscher Dichter

2.2.2 Gleichungen mit Parametern

Die Unbekannte ist stets mit x bezeichnet.

246. a) $(a-x)(x-2)-(b-x)(x+2)=4(x-b)$ b) $(a-x)b+(a-c-x)(x-b)=x(a-x)$

c) $(a+b)(x-b)=a^2-b^2$ d) $(b-x)(x+a)-b(a-b)=(a+x)(a-x)$

e) $(2u+x)(2u-x)=2u^2-x(2u+x)$ f) $(a+x-b)(a-x-b)=(a-x)(b+x)-ab$

247. a) $\frac{x}{m+n}+n=2m-n$ b) $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{b}-a$

c) $\frac{a-x}{c}+b=\frac{bc+x}{c}$ d) $\frac{a-bx}{c}+x=\frac{cx-b}{c}$

e) $\frac{a-x}{b}=\frac{x+b}{a}$ f) $2(x-1)-c=\frac{2(x-b)}{b}$

g) $\frac{ax}{a-c}-1=a+c$ h) $\frac{x}{m}+\frac{3}{n}x-a=b-\frac{5x}{mn}$

i) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+c=mx$ j) $\frac{ax}{m}-\frac{bx}{n}=\frac{a+b}{2}-\frac{cx}{3m}$

k) $\frac{4x}{a}+\frac{6x}{c}=\frac{2x}{b}+2$ l) $\frac{x}{n}+a-\frac{x}{m}+b=mx+c$

248. Lösen Sie die Formel nach jeder Variablen auf.

a) $U=2\pi r$ b) $A=0.5gh$ c) $A=0.5(a+c)h$ d) $F_G=mg$

e) $s=vt$ f) $U=R\cdot I$ g) $U=2a+2b$ h) $E_p=mgh$

i) $\Delta Q=c\cdot m\cdot \Delta T$ j) $l=l_0(1+\alpha t)$ k) $F_A=\rho g V_K$

249. Man denke sich ein Seil um den Erdäquator gelegt (dabei werde die Erde als Kugel mit Radius R idealisiert). Nachher werde das Seil um s verlängert und so um die Erde «gelegt», dass es überall denselben Abstand von der Erdoberfläche hat.
Berechnen Sie diesen Abstand.

250. a Kilogramm einer Warensorte mit einem Kilopreis von p Franken werden mit einer zweiten Warensorte, von der das Kilogramm q Franken kostet, gemischt.
Wie viel muss man von der zweiten Warensorte nehmen, wenn die Mischung für einen Kilopreis von r Franken verkauft werden soll?

251. Ein mathematisches Pendel (Fadenpendel) erreicht während des Pendelvorganges eine horizontale Auslenkung b und eine maximale Höhendifferenz a.
Bestimmen Sie die Länge s des Fadens.

252. Ein Schiff fährt stromabwärts, es erreicht sein Ziel in der Zeit t_1. Fährt es mit gleicher Maschinenleistung stromaufwärts, so benötigt es für dieselbe Strecke die Zeit t_2.
Bei ruhendem Wasser ist die Schiffsgeschwindigkeit v.
Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit w.

253. Eine Maschine wird durch die Herstellerfirma zum Preis A verkauft. Ein Käufer ist aber nur bereit, den Betrag B zu bezahlen. Schlussendlich einigen sie sich so, dass die Firma den Preis um ebenso viel Prozent senkt wie der Käufer sein Angebot erhöht.
Bestimmen Sie den Prozentsatz und den Verkaufspreis.

254. Ein Produktionsauftrag kann durch eine erste Maschine allein in a Tagen, durch eine zweite allein in 1.5a Tagen ausgeführt werden. Eine dritte Maschine leistet nur einen Viertel der ersten Maschine.
Wie lange dauert

a) die Erfüllung des Auftrages, wenn alle Maschinen gleichzeitig eingesetzt werden?

b) die Erfüllung des Auftrages, wenn die dritte Maschine b Tage weniger eingesetzt wird als die beiden anderen?

c) die Ausführung der Hälfte des Auftrages, wenn nur die zweite und dritte Maschine im Einsatz sind?

255. a) Zwei quadratische Grundstücke unterscheiden sich in ihrer Seitenlänge um a, in ihrem Flächeninhalt um ΔA. Berechnen Sie die Seitenlängen der beiden Grundstücke.

b) Ein Rechteck ist um c länger als breit. Verlängert man seine Länge um a und verkürzt seine Breite um b ($b < a$), so entsteht ein neues flächengleiches Rechteck. Bestimmen Sie die Breite des ursprünglichen Rechtecks.

c) Die Fläche eines Quadrates ist um ΔA kleiner als diejenige eines Rechtecks, dessen Länge um a länger und dessen Breite um b ($b < a$) kürzer ist als die Quadratseite. Bestimmen Sie die Quadratseite.

d) Die Breite und die Diagonale eines Rechtecks ergeben zusammen die Strecke z. Die Länge beträgt a ($a < z$). Berechnen Sie die Fläche des Rechtecks.

e) Die längere Diagonale eines Rhombus hat die Länge e. Die Summe zweier Rhombusseiten ist um p grösser als die andere Diagonale. Berechnen Sie die Rhombusseite.

256. a) Ein Durchmesser eines Kreises wird auf einer Seite um die Strecke u verlängert. Vom so erhaltenen Endpunkt werden Tangenten an den Kreis gezogen. Bestimmen Sie den Durchmesser des Kreises, wenn die Tangentenabschnitte je die Länge t ($t > u$) haben.

b) Zwei Kreise, die sich gegenseitig von aussen berühren, haben die Radien R und r ($r < R$). Die Berührungspunkte ihrer gemeinsamen Tangente haben die Entfernung t. Bestimmen Sie den Radius r aus R und t.

c) An zwei gleich grosse, einander berührende Kreise vom Radius R ist eine gemeinsame äussere Tangente gelegt. Berechnen Sie den Radius desjenigen Kreises, der zwischen den Kreisen und der Tangente einbeschrieben werden kann.

257. Ein würfelförmiges Gefäss mit der Kantenlänge a (Innenmass) ist bis auf die Höhe h mit Wasser gefüllt. Ein Stab der Länge l ($l > h$) mit einer quadratischen Querschnittsfläche der Seitenlänge b wird senkrecht so weit eingetaucht, bis das untere Ende des Stabes vom Gefässboden den Abstand c hat.
Berechnen Sie die Eintauchtiefe des Stabes.

Die Philosophie ist geschrieben in dem grossen Buche, das uns immer vor Augen liegt, wir können es jedoch nicht verstehen, wenn wir nicht zuvor dessen Sprache und Zeichen lernen; diese Sprache ist die Mathematik, und die Zeichen sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren.

Galileo Galilei, 1564 – 1642, Physiker und Astronom

258. Lösen Sie die Gleichung für die angegebenen Parameterwerte.

a)	$ax - 15 = 10a$	$a = -10\ ;\ 0\ ;\ 1$
b)	$cx - 6x - c = 0$	$c = 5.9\ ;\ 6\ ;\ 6.1$
c)	$a^2x + 1 = a + x$	$a = 2\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ -1$
d)	$2ax - 24 = (x - 3)(a + 4)$	$a = 4\ ;\ -4\ ;\ 0$
e)	$x(c - d) = d$	$c = d = 0\ ;\ c = d = 1\ ;\ c = 5$ und $d = 0$
f)	$ax - 15 = 10b$	$a = 0$ und $b = -1\ ;\ a = 0$ und $b = -1.5$

259. Lösen Sie die Gleichung mit Fallunterscheidung für alle Parameterwerte.

a) $px = 35$ b) $(m + 1)x = 2$ c) $(a + 13)\,x = 0$

d) $k\,x = 3x$ e) $ax + a = 5x$ f) $x - b = 3b(2 - x)$

g) $px - p^2 = 0$ h) $a(x + 2) = a^2$ i) $4x + k^2 = k(x + 4)$

j) $a^2x - a = x - 1$ k) $(p^2 - p - 12)x = p + 3$ l) $a^2 - b^2 = (b - a)x$

m) $(a - b)x = ab$ n) $ax - b^2 = bx$

Denken heisst Möglichkeiten erwägen.

Ernst Schlick, 1840 – 1913, deutscher Ingenieur,
Erfinder des Schiffskreisels zur Dämpfung der Schlingerbewegung

2.2.3 Lineare Ungleichungen

Beispiele: $x > 12$, $m \geq m + 1$, $2a - 8 < \frac{2}{3}a + 5$, $\frac{2x - 5}{3} \leq \frac{3x}{5} - \frac{1}{6}$

Eine lineare Ungleichung ist eine **Aussageform**.

Die Begriffe *Lösung, Lösungsmenge* und *Grundmenge* haben dieselbe Bedeutung wie bei den Gleichungen.

Äquivalenzumformungen für Ungleichungen
Es sind dieselben Umformungen wie bei den Gleichungen (siehe Seite 80), ausgenommen die *Multiplikation und Division mit einer negativen Zahl*.

Beispiel: richtig: $-2x < 6 \Leftrightarrow 0 < 2x + 6 \Leftrightarrow -6 < 2x \Rightarrow L =]-3\,;\infty\,[$

falsch: $-2x < 6 \overset{:(-2)}{\Rightarrow} x < -3 \Rightarrow L =]-\infty\,;-3\,[$

260. a) $3x \leq x$ b) $2x + 1 < 3x - 6$ c) $10\,(x - 1) > 7\,(x + 1)$

d) $x + 4 \geq 7\,x - 2\,(x - 2)$ e) $\frac{2x - 5}{3} \leq \frac{3x}{5} - \frac{1}{6}$ f) $10 < 12 - 2x < 20$

g) $-1 \leq \frac{8 - 5a}{3} < 1$

Für welche reellen Zahlen a ist der Wurzelterm definiert?

h) $\sqrt{a - 8}$ i) $\sqrt{5a + 12}$ j) $\sqrt{3 - 2a}$

2.3 Quadratische Gleichungen

2.3.1 Definition

Eine Bestimmungsgleichung heisst **quadratisch** (oder Gleichung zweiten Grades), wenn sie zur folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

Beispiele: $3.5x^2 = 0$ $\quad 0.78x^2 = 12$ $\quad 3x^2 - 6x = 0$

$4x^2 - \pi x - \sqrt{3} = 0$ $\quad 10x - 2x^2 = 8.5$

$ax^2 + bx + c = 0$ nennen wir **Grundform** einer quadratischen Gleichung.

261. Welche Gleichungen sind quadratisch? Bringen Sie diese auf die Grundform.

a) $x^2 - 2x = 7x$ b) $\frac{1}{x} = -x^2$ c) $x^2 = 2 + \sqrt{x}$

d) $(x-1)^2 = (2-x)^2$ e) $2x^2 - 1 = 1 - \sqrt{2}x^2$ f) $x(x+4) = x(4-x)$

g) $3x^2 - 2 = \frac{1}{x}$ h) $2^x = 10$ i) $(ax)^2 = 4ax + 1$

j) $\frac{ax^2 + a}{b} = \frac{bx + b}{a}$

262. Für welchen Wert von a und b wird die folgende Gleichung quadratisch?

a) $ax^3 + 7x^2 - 6 = 5(x^3 - x)$ b) $(x+a)^2(a-1)x + x^2 = a^2$

c) $\frac{a}{b}x^4 - bx^3 + 6 = 3x^3 + 7x^2$

Eine Definition ist das Einfassen der Wildnis einer Idee mit einem Wall von Worten.

Samuel Butler, 1835–1902, englischer Schriftsteller

2.3.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen

Äquivalenzumformungen

(1) Termumformungen
(falls der Definitionsbereich des Terms nicht ändert)

Beispiel: $5x + 2x - 5 = x(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 5 = x^2 - 3x$

(2) Alle vier Grundoperationen mit einer Zahl a, $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

(3) Addieren oder subtrahieren eines Terms T(x) – x ist die Unbekannte –, dessen Definitionsbereich nicht kleiner ist als jener der gegebenen Gleichung.

Beispiele: $6x^2 = 2x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 5$

$\sqrt{x} - \sqrt{x+2} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 7 + \sqrt{x+2}$

Diese Umformungen führen in jedem Fall zu äquivalenten Gleichungen.
Daraus folgt aber nicht, dass bei allen übrigen Umformungen (z. B. Quadrieren, Wurzel ziehen) stets nichtäquivalente Gleichungen entstehen.

263. Durch welche Umformung geht die Gleichung A in die Gleichung B über? Bestimmen Sie die Lösungsmengen L_A und L_B und entscheiden Sie, ob die beiden Gleichungen äquivalent sind.

a) A: $x^2 - x = 0$
B: $x(x - 1) = 0$

b) A: $x^2 = 2x$
B: $x = 2$

c) A: $x^2 = 4$
B: $x = 2$

d) A: $x^2 + 7x = x^2 + 8$
B: $7x = 8$

e) A: $(x - 3)(x + 6) = 0$
B: $x - 3 = 0$

f) A: $x^2 = 25$
B: $|x| = 5$

g) A: $(x + 2)^2 = 16$
B: $x + 2 = 4$

h) A: $x(x^2 + 1) = x^2 + 1$
B: $x = 1$

264. Durch welche Umformung geht die Gleichung A in die Gleichung B über? Bestimmen Sie die Lösungsmengen L_A und L_B und entscheiden Sie, ob die beiden Gleichungen äquivalent sind.

a) A: $x = 8$
B: $0 \cdot x = 0$

b) A: $(2x)^2 = (3x)^2$
B: $2x = 3x$

c) A: $6x^2 = 5x^2 + 1$
B: $x^2 = 1$

d) A: $(x + 3)^2 = (x - 3)^2$
B: $x + 3 = x - 3$

e) A: $2x^2 = 8x$
B: $x = 4$

f) A: $x^2 = (x - 7)^2$
B: $x = x - 7$

g) A: $x^2 = (7 - x)^2$
B: $x = 7 - x$

h) A: $x(x + 2) = (x + 2)(x - 1)$
B: $x = x - 1$

2.3.3 Lösungsverfahren

2.3.3.1 Sonderfälle

$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ $\quad a, b \neq 0$

$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$

$x(ax + b) = 0$ (Produkt = Null)

$x = 0$ oder $ax + b = 0 \Rightarrow L = \{0; -\frac{b}{a}\}$

265. a) $x^2 + x = 0$ b) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x = 0$

c) $\frac{3}{4}x^2 = \frac{2}{3}x$ d) $(2x - 3)^2 = (3x)^2 + 9$

e) $(ax)^2 = 2ax \quad (a \neq 0)$ f) $3x^3 - 8x = x(3x + 3)(x + 4)$

g) $4px^2 + 4px = 20x \quad (p \neq 0)$ h) $\frac{1}{2}(mx + 4)^2 = \frac{1}{4}(-8mx + 32) \quad (m \neq 0)$

i) $2(3 - 2.5x) + 3x^4 = \sqrt{3}(x^2 + \sqrt{3})(\sqrt{3}x^2 + 2)$

$\mathbf{ax^2 + c = 0}$ $\quad a \neq 0$

$$\mathbf{x^2 = d} \quad \begin{cases} d > 0 \Rightarrow L = \{\sqrt{d}; -\sqrt{d}\} \\ d = 0 \Rightarrow L = \{0\} \\ d < 0 \Rightarrow L = \{\ \} \end{cases}$$

266. a) $3x^2 = 108$ b) $0.2x^2 - 1 = 0$ c) $8x^2 - 0.5 = 0$

d) $0 = 4x^2 + 1$ e) $0.\overline{3}x^2 - 0.5 = 0.\overline{6}$ f) $0.2x^2 + 0.1\overline{6} = -0.\overline{6}$

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker, 1823–1891,
Geschäftsmann und Mathematiker

267. a) $\frac{x^2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{3}$

b) $(2x-3)(3x-2)-(3x-1)(x+3) = 9-21x$

c) $(x+1)(x+2) = (x+2)(x-3)-(2x-1)^2$

d) $-nx + m^2x^2 = -\left(x+\frac{n}{2}\right)^2 \qquad (m, n \neq 0)$

e) $(2x+a)(2x-a) = 2x^2$

f) $\left(\frac{b}{3}+3x\right)\left(\frac{b}{3}-3x\right) = \left(x-\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{b}{2}\right)$

g) $(mx)^2 + mx = m^2 + (x-2)m + 1 \qquad (m \neq 0)$

268. a) $(x+3)^2 = 25$ b) $(x-12)^2 = 81$ c) $(x+1.5)^2 = 5$

d) $(2x+5)^2 = -7$ e) $(0.2x+3)^2 = 12.25$

269. a) $(x-p)^2 = q^2$ b) $(cx-c)^2 = d^2 \quad (c \neq 0)$ c) $(5m-2x)^2 = 3n^2$

d) $(6f+11x)^2 = -f^2 \quad (f \neq 0)$

270. a) $(7x-3.5)^2 = 49$ b) $\left(\frac{5x-8.5}{2}\right)^2 = 20.25$

c) $\left(\frac{6.2-2x}{3.2}\right)^2 = -19$ d) $\left(\frac{2x^2+5x}{21}\right)^2 = 0$

e) $0 = -7\left(\frac{4(x+3)x}{13}\right)^2$ f) $\left(\frac{a^2x}{b^2}\right)^2 = 4a^2 \quad (a, b \neq 0)$

g) $\left(\frac{ax+b}{3}\right)^2 = -20$ h) $\left(\frac{ax+4b}{3}\right)^2 = 16 \quad (a \neq 0)$

i) $\left(\frac{ax^2+bx}{b}\right)^2 = 0 \quad (a, b \neq 0)$

271. Bringen Sie die Gleichung zuerst auf die Form: $\mathbf{(x+m)^2 = n}$

a) $x^2 - 12x + 36 = 25$ b) $x^2 + 32x + 256 = 169$

c) $x^2 - 5x + 6.25 = 30.25$ d) $x^2 - 4x + 4 = -5$

e) $4x^2 - 24x + 36 = x^2 - 16x + 64$

272. Bringen Sie die Gleichung zuerst auf die Form: $(x + m)^2 = n$

a) $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$ b) $x^2 + 2cx + c^2 - d^2 = 0$

c) $1 - u^2 - x^2 - 2ux = 0$ d) $x^2 - 6x + 9 - y^2 = 0$

e) $4x^2 - 25b^2 + 30bc - 9c^2 = 0$ f) $4v^2 + 49u^2 - 25x^2 - 28uv = 0$

273. a) $(\sqrt{3}x - 3)(3 - 2x) = 0$ b) $(2x - a)^2 = -2$

c) $8x = (6x)^2$ d) $(ax - 3)^2 = (x - a)^2 \quad (a \neq 1, a \neq -1)$

e) $3x^2 - (2x - 3)^2 = -9$ f) $d^2x^2 + dx = d^2 + (x - 2)d + 1 \quad (d \neq 0)$

g) $\left(\frac{7x - 3}{9}\right)^2 = (5 - 2x)^2$ h) $-qx = -\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - p^2x^2 \quad (p, q \neq 0)$

i) $\frac{1}{2}(tx + 4)^2 = \frac{1}{4}(-8tx + 32) \quad (t \neq 0)$

2.3.3.2 Allgemeiner Fall

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

Fallunterscheidung:

$D > 0 \Leftrightarrow$ 2 Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0 \Leftrightarrow$ 1 Lösung $x = \frac{-b}{2a}$

$D < 0 \Leftrightarrow$ keine reelle Lösung

274. Lösen Sie mit der Methode der quadratischen Ergänzung.

a) $x^2 - 8x + 14 = 0$ b) $2x^2 = 6x - 8$

c) $3x^2 + x = 6$ d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

275. Wenden Sie die Lösungsformel an.

a) $x^2 + 6x + 2 = 0$ b) $y^2 = 4y + 2$ c) $1.01 - 0.2z = -z^2$

d) $\sqrt{8}x = x^2 + 2$ e) $16m^2 - 320m = -1599$ f) $\frac{3r^2 + 4r}{12} - 11 = 0$

g) $\frac{9}{16} + 2x^2 = \frac{6x^2 + 1}{2}$ h) $\frac{1}{9} + x^2 - \frac{2}{3}x = 0$ i) $-350x + 1224 = -25x^2$

j) $6.21 - 2.2x = -x^2$ k) $\frac{6}{5}u^2 + 10 = 7u$ l) $y(y - 2) = 5$

276. Bestimmen Sie die gesuchten Zahlen.

a) Welche zwei Zahlen mit einer Differenz von 2.5 ergeben ein Produkt von 350?

b) Bei welchen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen übertrifft das Produkt ihre doppelte Summe um 68?

c) Eine zweiziffrige Zahl hat die Quersumme 6. Vertauscht man die Ziffern und multipliziert die neue Zahl mit der ursprünglichen, so ist das Produkt um 408 grösser als das Siebenfache der ursprünglichen Zahl.

d) Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 4 kleiner als die Einerziffer. Die Summe der Quadrate der Ziffern ist gleich der fünffachen Quersumme.

e) Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 4 grösser als die Einerziffer. Das dreifache Produkt der beiden Ziffern beträgt das Achtfache ihrer Quersumme.

f) Das Produkt der um 7 vergrösserten Zahl und der um 7 verkleinerten Zahl ist um 49 kleiner als die Quadratzahl.

g) Welche positive zweiziffrige Zahl, deren zweite Ziffer um 7 kleiner ist als die erste, ist gleich dem Quadrat ihrer Quersumme?

h) Man dividiert eine gedachte natürliche Zahl durch 8, subtrahiert vom Quotienten 15 und quadriert die entstandene Differenz. Das 100-Fache dieses Quadrates ist um 60 kleiner als das 94-Fache der gedachten Zahl.
Berechnen Sie die zu Beginn gedachte Zahl.

i) Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist um 2 grösser als die Hunderterziffer, die halb so gross ist wie die Einerziffer. Die Summe der Quadrate der drei Ziffern ist gleich dem Fünffachen der Quersumme der Zahl.

j) Das Produkt der beiden kleinsten von sechs aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist dreimal so gross wie die Summe der vier übrigen Zahlen.
Berechnen Sie die kleinste Zahl.

k) Zwei natürliche Zahlen stehen im Verhältnis 3 : 5. Vermindert man jede um 6, so ist das Quadrat der einen Zahl 9-mal so gross wie das Quadrat der anderen.
Wie heissen die beiden Zahlen?

277. Bestimmen Sie die exakten Lösungen der folgenden Gleichung.

a) $6z + z^2 = -7$

b) $-30p + 3p^2 = -74$

c) $3x^2 + 2 = 2\sqrt{6}x$

d) $-2\sqrt{2}t + 1 = -2t^2$

e) $q^2 - 0.5q + 3 = 0$

f) $(y-6)(y-5) + (y-7)(y-4) = 0$

278. Bestimmen Sie die Lösungen auf 3 Dezimalen genau.

a) $z\left(6z - \sqrt{2}\right) - (z+1) - 2\left(1 + \sqrt{2}\right) = 0$

b) $p(1+6p) - \sqrt{3}(2-p) = 4$

c) $\left(\sqrt{3}a + 2\right)\left[\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)a + 1\right] = 4 - 3a^2$

d) $b^2 + \sqrt{3}b + \sqrt{6} = -\dfrac{2b}{\sqrt{2}}$

e) $(x-1)(x+5) = (x+2)(4-x)$

f) $\sqrt{3}n^2 + n - \sqrt{6}n = \sqrt{2}$

279. Lösen Sie die Gleichung ohne Fallunterscheidung.

a) $x^2 - xc = a$

b) $ax^2 - 2ax + a + 1 = 0$

c) $x^2 + 3x = bx + 2b + x$

d) $ux^2 - ux = vx - v$

e) $(cx)^2 + (1 - x)d^2 = c^2x$

f) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

g) $mnx^2 + m = m^2x + nx$

h) $x^2 - 2p^2 + 5pq = 2q^2 - px - qx$

i) $(x^2 - 1)(n + 2) + (2x + 1)(n + 1) = (n + 1)(n + 2)x^2$

280. Lösen Sie die Gleichung mit Fallunterscheidung für alle Parameterwerte $k \in \mathbb{R}$.

a) $x^2 + 3x + k = 0$

b) $kx^2 = 2x + 1$

c) $x(x - 2) = k(2x - k)$

d) $k(x^2 + x + 1) = 3(kx + 1)$

e) $(kx)^2 + 2kx = x^2 + 2x - 1$

f) $x^2 - kx + 9 = 0$

281. Bei den folgenden Gleichungen ist die Anwendung der Lösungsformel selten der einfachste Weg.

a) $\left(\frac{3.7 - 7x}{56}\right)^2 = -469$

b) $0 = -34\left(\frac{402(x + 17)x}{97}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{3}x + \frac{3}{7}\right)\left(\frac{8 + 3x}{5}\right) = 0$

d) $(7 - p^2x)^2 = (p - x)^2 \quad (p \neq 1, p \neq -1)$

e) $2x^2 - (4x - 2.5)^2 = -6.25$

f) $\frac{(5x + 1)^2}{38} - x = \frac{61}{152}$

g) $2x^2 = -\frac{9}{16} + \frac{6x^2 + 1}{2}$

h) $\frac{3x^2 + 4x}{12} - 11 = 0$

2.3.3.3 Substitution

282. Lösen Sie die Gleichung mithilfe einer geeigneten *Substitution*.

a) $3.5x^4 + 3.5x^2 - 105 = 0$

b) $4x^4 + 4x^2 = 63$

c) $-4x^4 = -32.84x^2 + 49$

d) $10x^4 = -29x^2 - 20.449$

e) $1000x^6 - 16x^3 = -0.064$

f) $x^8 = -65x^4 + 1296$

283. Lösen Sie die Gleichung mithilfe einer geeigneten *Substitution.*

a) $(x-3)^2 - 13(x-3) - 48 = 0$

b) $100 - 25(x^2+4) = -(x^2+4)^2$

c) $5(x^2-4) = -(x^2-4)^2$

d) $(x^2+4)^2 + 36 = 12(x^2+4)$

e) $-6\left(\frac{1}{3}(5x+0.5)\right) + 8.75 = -\left(\frac{1}{3}(5x+0.5)\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}(-x-3)\right)^2 + 60 = -12.5\left(\frac{1}{2}(-x-3)\right)$

g) $|x-2|^2 = 3|x-2| + 18$

h) $|2x-6|^2 + 40 = 28|x-3|$

284. Lösen Sie mithilfe einer geeigneten *Substitution.*

a) $\left(x^2-(c+d)x\right)^2 + 2cd\left(x^2-(c+d)x\right) = -c^2d^2$

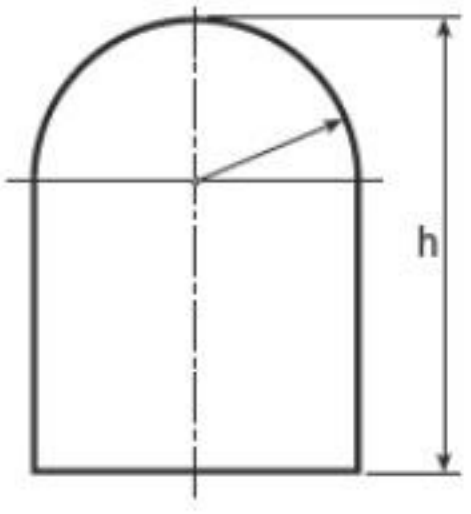
b) $n^2 = -2n(mx^2-mx-nx) - (mx^2-mx-nx)^2$

2.3.4 Textaufgaben

285. Die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten eines Quaders unterscheiden sich um je 2 cm (bzw. 4 cm). Wie lang sind die Kanten, wenn die Oberfläche des Körpers 5758 cm^2 misst?

286. Durch Verkürzung der gegenüberliegenden Seiten des Quadrates um 10 cm und Verlängerung der übrigen Seiten um 15 cm entsteht ein Rechteck, dessen Flächeninhalt um 4 % kleiner ist als derjenige des Quadrates. Berechnen Sie die Quadratseite.

287.



Ein Fenster hat die gezeichnete Form mit einem Flächeninhalt von 18 m^2 und einer Höhe h = 6.5 m.

Berechnen Sie die Breite des Fensters.

288. Verkürzt man alle Kanten eines Würfels um 6 cm, so verändert sich das Volumen um 6214.5 cm^3. Wie lang war die ursprüngliche Kantenlänge?

289. Eine Hohlkugel aus Stahl hat eine Masse von 5 kg und eine Wanddicke von 6 mm. Wie gross ist der innere Radius, wenn die Dichte 8 kg/dm³ beträgt? $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$

290. Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die Seite c = 15 cm und den Flächeninhalt A = 200 cm². Die Differenz zwischen den parallelen Seiten a und c (a > c) ist doppelt so gross wie jene zwischen der Seite c und der Höhe. Berechnen Sie die Seite a und die Höhe des Trapezes.

291. Ein Geschäftsmann beginnt mit einem Kapital von € 2000.– einen Briefmarkenhandel. Den Gewinn des ersten Jahres schlägt er voll zum Kapital. Im zweiten Jahr gewinnt er einen gleich hohen Prozentsatz, wodurch das Kapital auf € 2645.– anwächst.
Wie viele Prozente hat er jährlich gewonnen?

292. Eine Baumaschine mit einem Anschaffungswert von € 24 000.– wurde zweimal mit dem gleichen Prozentsatz abgeschrieben und hat zur Zeit einen Wert von € 16 335.–.
Wie viele Prozente beträgt der Abschreibungssatz?

293. Einem Kapital von € 45 000.– wurde bei konstantem Zinssatz am Ende des Jahres der Zins gutgeschrieben. Für das zweite Jahr wurde der Zinssatz um 0.5 % gesenkt, was einen Jahreszins von € 2875.50 ergab. Wie hoch war der ursprüngliche Zinssatz?

294. Zu den € 11 000.– Guthaben eines Sparkontos wird am Ende des Jahres der Jahreszins gutgeschrieben. Gleichzeitig erfolgt ein Barbezug von € 1770.–. Nach dem zweiten Jahr wird der Jahreszins wiederum gutgeschrieben, sodass schlussendlich das Guthaben € 10 700.– beträgt.
Wie hoch war der über beide Jahre konstante Zinsssatz?

295. Ein Kapital von € 12 000.– wird Ende Jahr um den Jahreszins erhöht. Gleichzeitig erfolgt eine Einlage von € 1000.– und eine Erhöhung des Zinssatzes um 1 %.
Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr, wenn der gesamte Zinsertrag beider Jahre € 1547.90 beträgt?

296. Bei der internen Telefonzentrale einer Firma gibt es total 406 Verbindungsmöglichkeiten. Wie viele Telefonstationen sind vorhanden?

297. a) Welches Vieleck hat 350 Diagonalen?
b) Bei welchem Vieleck beträgt die Summe der Anzahl Seiten und Diagonalen 136?

298. In einem Restaurant stehen eine Anzahl Glacésorten zur Auswahl. Eine Portion Glacé besteht aus zwei Kugeln gleicher oder verschiedener Sorte.
Bestimmen Sie die Anzahl Sorten, wenn es maximal 91 Auswahlmöglichkeiten gibt.

299. a) An einer Veranstaltung begrüsst jedes ankommende Ehepaar die bereits anwesenden Paare mit der Hand. Wie viele Paare nehmen teil, wenn schlussendlich 544 Händedrücke stattgefunden haben?

b) Bei einem Anlass begrüsst jedes ankommende Paar und jede der 7 Einzelpersonen die schon anwesenden Gäste.
Wie viele Paare nehmen schlussendlich teil, wenn total 515 Händedrücke erfolgen?

Aufgaben mit Parameter

300. Das um a^2 verminderte Quadrat von z übertrifft das Produkt $a \cdot b$ um soviel, wie $b \cdot z$ kleiner als $(-2ab)$ ist. Berechnen Sie z.

301. a) Welche positive Zahl muss man zu a addieren und von a subtrahieren, damit die Summe der Quadrate der beiden Ergebnisse gleich a ist?

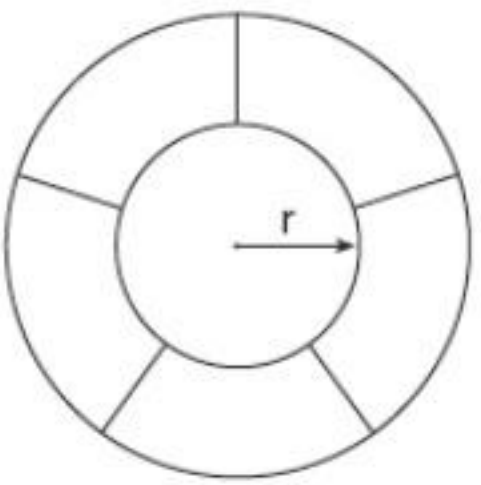
b) Für welche Werte von a hat die Aufgabe a) mindestens eine Lösung?

302. An einem Schachturnier spielt jeder gegen jeden einmal.
Wie viele Spieler nehmen teil, wenn total p Partien ausgetragen werden?

303. Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Höhe h und die Hypotenuse c.
Berechnen Sie den kürzeren Hypotenusenabschnitt.

304. In einem rechteckigen Garten mit der Länge a und der Breite b soll ein rechteckiges Blumenbeet angelegt werden, dessen Seiten überall gleich weit vom Gartenrand abstehen und das die Hälfte der Gartenfläche einnimmt. Wie breit wird der Randstreifen?

305.



Jedes der 5 Kreisringteile hat denselben Flächeninhalt wie der innere Kreis.
Berechnen Sie die Breite des Kreisringes aus r.

306. Die Seitenlängen eines Rechtecks betragen 8 cm und 20 cm. Werden die kürzeren Seiten um x vergrössert und die längeren um ebenso viel verkleinert, so ist der neue Flächeninhalt das k-fache des alten. Welches ist der grösste Wert von k, für den die Bedingungen erfüllbar sind, und wie lang sind für diesen Wert von k die neuen Seiten?

307. Der Durchmesser d eines Kreises wird um b verlängert. Bestimmen Sie d, wenn die Kreisfläche nun das a-Fache ($a > 1$) der ursprünglichen Kreisfläche beträgt.

308. Eine Strecke der Länge a wird so geteilt, dass die Differenz der Quadratflächen über den beiden Teilstrecken gleich der Rechtecksfläche aus den beiden Teilstrecken ist. Berechnen Sie die kürzere Teilstrecke.

309. Eine Strecke der Länge s wird durch einen Punkt in zwei Abschnitte geteilt. Die Länge des kleineren Abschnittes verhält sich zur Länge des grösseren wie die Länge des grösseren Abschnittes zur Länge der ganzen Strecke (Goldener Schnitt).
Berechnen Sie die Länge des grösseren Abschnittes aus der Streckenlänge s.

310. Der Wert K_0 einer Liegenschaft wird nach einem Jahr um einen bestimmten Prozentsatz p % erhöht. Ein Jahr darauf erfolgt jedoch wieder eine Reduktion um den gleichen Prozentsatz, sodass ein neuer Anlagewert K_2 entsteht.
Berechnen Sie den Prozentsatz p aus K_0 und K_2.

311. Der Umsatz einer Firma betrug A Euro. Er stieg innerhalb eines Jahres um einen bestimmten Prozentsatz und fiel im folgenden Jahr um den gleichen Prozentsatz, sodass der Umsatz des zweiten Jahres B Euro betrug.
Bestimmen Sie diesen Prozentsatz. (Im Resultat muss das %-Zeichen stehen.)

312. Ein Kapital K wächst innerhalb von 2 Jahren um den Betrag Z, wobei der erste Jahreszins gutgeschrieben wird.
Berechnen Sie den Zinssatz p % aus K und Z. (Im Resultat muss das %-Zeichen stehen.)

2.3.5 Parameteraufgaben, Satz von Vieta

313. Für welche Parameterwerte hat die Gleichung genau eine Lösung?

a) $x^2 + 2x + 3a = 0$

b) $x = k(x^2 + x + 1)$

c) $m(x^2 + 1) + 2x(m + 2) = 0$

d) $(x - p)^2 = 9x$

314. Berechnen Sie den Parameter u und die Lösung x_2.

a) $x^2 + 9x + u = 0$ $\quad x_1 = -5$ b) $ux^2 + 10x = 1$ $\quad x_1 = 0.2$

c) $(x - u)^2 = 2x$ $\quad x_1 = 2$

315. Bestimmen Sie eine Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$, mit möglichst einfachen ganzzahligen Koeffizienten (a, b, c), welche die folgenden beiden Zahlen als Lösung hat.

a) $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{4}$ b) 2 ; -1 c) 0 ; $-\frac{8}{7}$ d) $-2 + \frac{1}{6}\sqrt{5}$; $-2 - \frac{1}{6}\sqrt{5}$

316. Ermitteln Sie die vollständige Lösungsmenge, wenn die Lösung x_1 vorgegeben ist.

a) $x^3 + 3x^2 - 3x = 14$ $\quad x_1 = 2$ b) $6x^3 - 11x^2 + 6x = 1$ $\quad x_1 = 1$

c) $4x^3 + 16x^2 = x + 4$ $\quad x_1 = 0.5$ d) $x^3 + 125x = 20x^2 + 250$ $\quad x_1 = 5$

e) $10x^3 - 111x^2 + 111x = 10$ $\quad x_1 = 1$ f) $40x^3 - 38x^2 = 1 - 11x$ $\quad x_1 = 0.5$

317. Berechnen Sie den Parameter a so, dass die eine Lösung der Kehrwert der anderen ist.

a) $6x^2 + 13x + a = 0$ b) $ax^2 - 25x + 12 = 0$ c) $4x^2 + ax - 4 = 0$

318. Wie gross muss der Parameter a in der Gleichung $x^2 + ax + 108 = 0$ gewählt werden, damit die eine Lösung das Dreifache der anderen ist?

319. In der Gleichung $4x^2 - 35x + a = 0$ ist der Parameter a so zu bestimmen, dass die eine Lösung gleich dem Quadrat der anderen ist.

320. Bestimmen Sie in der Gleichung $x^2 + px + 10 = 0$ den Parameter p so, dass die Lösungen ganzzahlig sind.

2.3.6 Zerlegung von $ax^2 + bx + c$ in Linearfaktoren

321. Zerlegen Sie in Linearfaktoren.

a) $a^2 - 35a - 3726$ b) $y^2 - y - 24.75$ c) $4m^2 + 95m + 231$

d) $5x^2 - \sqrt{200} \cdot x + 10$ e) $2h^2 - \sqrt{3} \cdot h + \sqrt{2}$ f) $3b^3 - 30b^2 - 300b$

322. Kürzen Sie.

a) $\frac{2a^2 + 7a - 204}{2a^2 - 25a + 68}$ b) $\frac{2n^2 + 27n - 45}{3n^2 + 56n + 165}$ c) $\frac{6p^3 - 5p^2 - 21p}{6p^2 - 29p + 35}$

2.4 Besondere Gleichungstypen

2.4.1 Bruchgleichungen

Unter einer **Bruchgleichung** versteht man eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Nenner vorkommt.

Beispiel 1:

$$\frac{10}{15-5x} - \frac{x}{x^2+3x} = \frac{5x-1}{x^2-9}$$

1) Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der Gleichung bestimmen:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,0\,;\,3\}$$

2) Brüche kürzen (*alle* Nenner faktorisieren):

$$\frac{2}{3-x} - \frac{1}{x+3} = \frac{5x-1}{(x-3)(x+3)}$$

3) Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren:

Hauptnenner: $(x-3)(x+3)$

$$-2(x+3) - (x-3) = 5x-1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

4) Vergleich mit der Definitionsmenge:

$$-\frac{1}{4} \in \mathbb{D}\ ,\ \text{also}\ \mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

Beispiel 2:

$$\frac{x^2-2}{x-2} + 1 = \frac{2}{x-2}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Hauptnenner: $x-2$

$$(x^2-2) + (x-2) = 2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2 \ \text{ oder } \ x = -3$$

$$2 \notin \mathbb{D}\ ,\ -3 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{-3\}$$

323. Durch welche Umformung geht die Gleichung A in die Gleichung B über? Bestimmen Sie die Lösungsmengen L_A und L_B und entscheiden Sie, ob die beiden Gleichungen äquivalent sind.

a) A: $\frac{45}{a} = \frac{87}{a}$ B: $45a = 87a$

b) A: $\frac{5z-9}{1.5z-1} = \frac{3(2z-5)}{1.5z-1}$ B: $5z-9 = 3(2z-5)$

c) A: $\frac{4}{u+2} = \frac{8u}{u^2-4}$ B: $4(u-2) = 8u$

d) A: $\frac{4}{v+2} = \frac{8v+3}{v^2-4}$ B: $4(v-2) = 8v+3$

e) A: $\frac{4}{x+2} = \frac{8x-16}{x^2-4}$ B: $4(x-2) = 8x-16$

f) A: $\frac{4y+5}{2y-5} = \frac{y+2.5}{\frac{2y-5}{3}}$ B: $\frac{4y+5}{3} = y+2.5$

g) A: $\frac{x}{x+3} = \frac{9}{x(x+3)}$ B: $x^2 = 9$

Die Zahl ist das Wesen aller Dinge

Pythagoras, um 582 bis 497 v. Chr.,
griech. Philosoph und Mathematiker

zu 324 bis 328: *Diese Bruchgleichungen führen auf eine lineare Gleichung.*

324. a) $\frac{45}{2y-9} - 2 = -\frac{27}{9-2y}$ b) $\frac{6x+5}{2} + \frac{4x-13}{11x+1} = 3x$

c) $\frac{4z+6}{2z-10} - \frac{6z-43}{5-z} = 124$ d) $\frac{8u-3}{8} - \frac{6u-3}{10-2u} = u$

e) $-\frac{5}{\frac{x-5}{7}} = -3 + \frac{3.5x}{2.5 - \frac{x}{2}}$ f) $\frac{44v+3}{11} - 4v = \frac{7v-5}{43-5v}$

325. a) $\frac{5}{4} - \frac{5x-16}{6x} = \frac{8}{3x} + \frac{7x+12}{15x}$ b) $\frac{x+2}{x-4} - \frac{14}{3x-12} - \frac{3}{2x-8} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{5}{x^2-9} - \frac{3}{x^2-6x+9} = 0$ d) $\frac{6}{3m^2-6m} = \frac{10m}{12m-6m^2} + \frac{7}{9m}$

326. a) $\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+2}+\frac{x+3}{x^2+6x+9}=1$

b) $\frac{1-4t}{t^2-3t+2}-\frac{3(t-1)}{t^2-8t+12}+\frac{7t}{t^2-6t}=0$

c) $\frac{3x+4}{x-5}-\frac{x-9}{x-7}=\frac{2x^2-13x+27}{x^2-12x+35}$

d) $\frac{3}{z+3}-\frac{3}{z+8}=\frac{5}{z-8}-\frac{5}{z-5}$

e) $\frac{3}{1+\frac{1}{p}}-\frac{1+\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}=2$

f) $\frac{\frac{2}{0.9}-\frac{2}{y}}{\frac{1}{0.9}+\frac{1}{y}}=\frac{2}{3}$

327. Bestimmen Sie die Zahlen.

a) Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz ihrer Kehrwerte.

b) Zähler und Nenner eines Bruches ergeben zusammen 100. Vervierfacht man den Zähler und addiert zum Nenner 11, so entsteht ein Bruch mit dem Wert 2.

c) Die Summe zweier Zahlen beträgt 255. Dividiert man die grössere durch die kleinere, so erhält man 3 Rest 11.

d) Dividiert man das um 1 verminderte Anderthalbfache einer Zahl durch das um $\frac{1}{4}$ vergrösserte Doppelte dieser Zahl, so erhält man (–3).

e) Dividiert man das um 19 vermehrte Fünffache einer Zahl durch das Vierfache der um 8 verminderten Zahl, so ergibt sich 2 Rest 32.

328. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $\frac{a-cx}{ax-a}+\frac{1+x}{1-x}=1$

b) $\left(r-\frac{s}{1+x}\right)(p+q)=\left(r+\frac{s}{1+x}\right)(p-q)$

c) $\frac{x}{a-x}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a}{a+x}$

d) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}=0$

e) $\frac{bc}{ax+bx}-\frac{a^2+b^2}{2ab+2b^2}=\frac{c(a-b)}{2bx}-\frac{xa^2-cb^2}{abx+xb^2}$

Es gibt keine Königsstrasse, die zur Geometrie führt.
(Zu König Ptolemäus, der die Geometrie auf eine abgekürzte Weise erlernen wollte.)

Euklid, um 325–283 v. Chr., griechischer Mathematiker

zu 329 bis 333: *Diese Bruchgleichungen führen auf quadratische Gleichungen.*

329. a) $\frac{2-x}{2+x} = \frac{x-8}{x+8}$ b) $\frac{2z+19}{2+z} = \frac{47}{3z+6}$

c) $\frac{v^2}{v-2} = 3 - \frac{4}{2-v}$ d) $\frac{7+x}{7-x} - \frac{x+9}{x-9} = \frac{76}{x^2-16x+63}$

e) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{6}{x-7} = 0$

330. Die Anwendung der Lösungsformel ist nicht der einfachste Weg.

a) $\left(\frac{7x-3}{9}\right)^2 = (5-2x)^2$ b) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = 9$ c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = -2$

331. a) $\frac{u}{3} - \frac{u^2-19}{3u+6} = 3 + \frac{4u-7}{6-3u}$ b) $\frac{5v-2}{2v} + \frac{3v-2}{5-2v} = \frac{v+16}{v+1}$

c) $\frac{3w-5}{w+1} + \frac{2w+13}{2w-5} = \frac{4w+2}{w-1}$ d) $\frac{2z+5}{z-1} - \frac{3z+4}{2(z-1)} = \frac{2z-7}{z+1}$

332. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $mnx + \frac{m}{x} = m^2 + n$ b) $\frac{x^2-1}{n+1} + \frac{2x+1}{n+2} = x^2$

c) $\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2 = (x+c)^2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+p} + \frac{1}{x+2p} = 0$

e) $\frac{x^2+q^2}{x^2} = 4 - \frac{x+q}{x}$ f) $\frac{x+1}{2u} \cdot \frac{u-v}{x} = \frac{2}{u+v} \cdot \frac{u}{x+1}$

Es muss das Ziel der wissenschaftlichen Bestrebungen sein, den Geist so zu lenken, dass er über alle sich ihm darbietenden Gegenstände begründete und wahre Urteile fällt.

René Descartes, 1596–1650, franz. Philosoph und Mathematiker

333. Bestimmen Sie die Zahl.

a) Zähler und Nenner eines Bruches unterscheiden sich um 2. Addiert man zu diesem Bruch seinen Kehrwert, so erhält man $\frac{13}{6}$.

b) Multipliziert man einen Bruch, bei dem der Nenner um 1 grösser ist als das Quadrat des Zählers, mit 15, so erhält man 1 Rest 25.

c) Die Summe aus dem Kehrwert einer ganzen Zahl und dem hundertfachen Kehrwert ihres Quadrates ergibt mit 9 multipliziert den Wert 4.6.

d) Bei einer Berechnung wurde fälschlicherweise das Quadrat einer Zahl n mit $\frac{3}{n-3}$ multipliziert. Dadurch entstand ein Wert, der gegenüber dem richtigen Resultat um den Betrag 27 zu klein war. Für die richtige Berechnung hätte man vom Produkt aus 9 und $\frac{3}{n-3}$ das Dreifache der Zahl n subtrahieren sollen.

334. Lösen Sie die Gleichung mit Fallunterscheidung für alle Parameterwerte.

a) $\frac{x-1}{x+1} = b \quad (b \in \mathbb{R})$

b) $d = \frac{-1+x}{x-d} \quad (d \in \mathbb{R})$

*c) $\frac{u-8}{x-u} = -\frac{1}{x} \quad (u \in \mathbb{R}^+)$

*d) $\frac{p}{x} = \frac{x}{x-q} - 1 \quad (p, q \in \mathbb{R}^+)$

335. a) Wie lang sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse 30.5 cm und dessen Flächeninhalt 82.5 cm^2 betragen?

b) Berechnen Sie die Seiten eines Rechtecks, dessen Diagonalen je 34 m und dessen Flächeninhalt 480 m^2 messen.

c) Werden bei einem Rechteck mit dem Flächeninhalt 54 m^2 zwei Parallelseiten je um 2 m und die anderen Parallelseiten je um 5 m verlängert, so wird der Flächeninhalt auf 110.5 m^2 erhöht. Berechnen Sie die Breite des Rechtecks.

336. a) Ein Lastwagen kann Schutt in x Fahrten wegführen, während ein kleinerer Lastwagen 9 Fahrten mehr benötigt. In je 23 Fahrten können beide gemeinsam den Schutt abtransportieren.
Wie viele Fahrten braucht der grössere Lastwagen allein?

b) Füllt eine kleine Pumpe alleine einen Teich, so dauert dies 15 Stunden länger als wenn die grosse Pumpe allein arbeitet. Beide Pumpen zusammen bräuchten 5 Stunden weniger als die grosse allein.
Wie lange dauert die Füllung des Teiches mit der grossen Pumpe?

c) Für die Produktion einer bestimmten Anzahl eines Massenartikels sind drei Maschinen verfügbar. Maschine A benötigt allein 20 Tage länger als alle drei Maschinen zusammen, Maschine B allein jedoch nur 10 Tage länger.
Wie viel Zeit brauchen alle drei Maschinen zusammen, wenn Maschine C allein sechsmal soviel Zeit wie alle drei zusammen benötigt?

d) Eine Druckmaschine braucht für die Erfüllung eines Auftrages 12 Minuten länger als das neuere Modell. Nachdem die alte Maschine schon 18 Minuten allein produziert hat, wird die neue dazugeschaltet. Nach weiteren 10 Minuten ist der ganze Auftrag erledigt. Wie lange hätte das alte Modell allein benötigt?

e) Ein Wasserbecken hat zwei Zuleitungen. Um das Becken vollständig zu füllen, braucht die eine Zuleitung allein 30 Minuten länger als die andere allein. Lässt man beide Zuleitungen offen, so wird das Becken in 21.6 Minuten zu 17 % gefüllt. In welcher Zeit füllt die leistungsstärkere Zuleitung das Becken allein?

f) Ein Tank wird durch eine Zuleitung in einer bestimmten Zeit gefüllt. Das Entleeren durch das Abflussrohr dauert 8 Stunden länger. Aus Unachtsamkeit bleibt während des Füllens das Abflussrohr geöffnet. Der Tank ist folglich erst nach 30 Stunden voll.
Wie lange dauert die Leerung des Tanks bei geschlossener Zuleitung?

337. a) Zwei Fahrzeuge legen je eine Strecke von 30 km zurück. Da das eine Fahrzeug eine um 5 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit hat, braucht es 5 min weniger Fahrzeit. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des langsameren Fahrzeugs.

b) Ein Zug fährt wegen eines Defekts mit 15 min Verspätung weg. Mit einer um 10 km/h erhöhten Geschwindigkeit kann er aber das 180 km entfernte Ziel doch noch rechtzeitig erreichen. Wie gross ist seine normale Geschwindigkeit?

c) Ein Radfahrer plante für eine Strecke von 50 km eine Zeit von 3 h ein. Nach 40 km ist der zeitliche Rückstand aber so gross, dass das Ziel nur noch mit einer um 4 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit rechtzeitig erreicht werden kann. Berechnen Sie die Geschwindigkeit für das letzte Teilstück.

d) Zwei Radfahrer fahren auf einer Rennbahn mit konstanten Geschwindigkeiten. A braucht für eine Runde 7 s weniger als B und überrundet daher B alle 140 s. Wie viele Sekunden benötigt A für eine Runde?

338. Lösen Sie die folgende Gleichung mithilfe einer geeigneten *Substitution*.

a) $9x^4 + 4 = 37x^2$

b) $x^2 = 8 + \frac{10}{x^2}$

c) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 12$

d) $x^3 - \left(\frac{6}{x}\right)^3 = 19$

e) $\frac{x^2 + x}{48} - \frac{48}{x^2 + x} = 4.8$

f) $\frac{x + p}{x + q} + \frac{x + q}{x + p} = 2.5$

g) $2x^2 - 14x + 20 = \frac{3}{x^2 - 7x + 10} - 5$

h) $4b - a\left(\frac{x + a + b}{x + a - b} - 2\right) = 2b\left(\frac{x + a + b}{x + a - b}\right)$

i) $|x^2 - 3| + 1 = \frac{6}{|x^2 - 3|}$

2.4.2 Wurzelgleichungen

Unter einer **Wurzelgleichung** versteht man eine Gleichung, bei der die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel vorkommt.

Beispiel 1: $\mathbf{2\sqrt{x+1} = 3 + 2\sqrt{x-2}}$

1) Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der Gleichung bestimmen:

$$0 \leq x+1 \text{ und } 0 \leq x-2$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \text{ und } 2 \leq x$$
$$\mathbb{D} = [-1\,;\infty[\ \cap\ [2\,;\infty[\ = [2\,;\infty[$$

2) Gleichung quadrieren:

$$(2\sqrt{x+1})^2 = (3 + 2\sqrt{x-2})^2$$
$$4(x+1) = 9 + 4(x-2) + 12\sqrt{x-2}$$

3) Wurzelterm isolieren und wieder quadrieren:

$$4x + 4 = 9 + 4x - 8 + 12\sqrt{x-2}$$
$$\frac{1}{4} = \sqrt{x-2}$$
$$\frac{1}{16} = x - 2$$
$$x = \frac{33}{16}$$

4) Probe mit der Definitionsmenge: $\frac{33}{16} \in \mathbb{D}$, also $\mathbb{L} = \left\{\frac{33}{16}\right\}$

Beispiel 2: $\mathbf{\sqrt{5-x} + \sqrt{2x-18} = 2}$

Definitionsmenge:

$$0 \leq 5 - x \text{ und } 0 \leq 2x - 18$$
$$\Leftrightarrow x \leq 5 \text{ und } 9 \leq x$$
$$\mathbb{D} =]-\infty\,;5] \cap [9\,;\infty[\ = \{\ \}$$
$$\mathbb{D} = \{\ \} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$$

Beispiel 3: $\mathbf{2 - x = \sqrt{x^2 - 9}}$

Definitionsmenge des Wurzelterms

$$0 \leq x^2 - 9$$
$$\mathbb{T} =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;\infty[$$
$$(2-x)^2 = (\sqrt{x^2-9})^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 9$$
$$x = \frac{13}{4} \in \mathbb{T}$$

Die Probe zeigt, dass $\frac{13}{4}$ *keine* Lösung ist: $\mathbb{L} = \{\ \}$

Um Scheinlösungen auszuschliessen, muss bei Wurzelgleichungen unbedingt die Probe durchgeführt werden.

339. Durch welche Umformung geht die Gleichung A in die Gleichung B über? Bestimmen Sie die Lösungsmengen L_A und L_B und entscheiden Sie, ob die beiden Gleichungen äquivalent sind.

a) A: $\sqrt{x+2} = -5$ B: $x + 2 = 25$

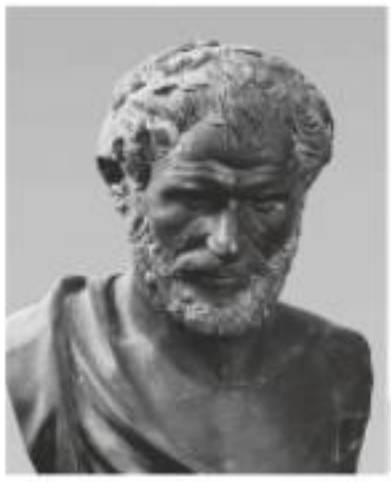
b) A: $\sqrt{y+7} = \sqrt{2y-4}$ B: $y + 7 = 2y - 4$

c) A: $z\sqrt{z-10} = \sqrt{z^3-160}$ B: $z^2(z-10) = z^3 - 160$

d) A: $\sqrt{3u-5} = -\sqrt{-4u+9}$ B: $3u - 5 = -4u + 9$

e) A: $\sqrt{\frac{v-4}{9}} = \frac{2\cdot\sqrt{v-16}}{3}$ B: $\frac{v-4}{9} = \frac{4}{9}(v-16)$

f) A: $\sqrt{\frac{v-4}{9}} = \frac{2\cdot\sqrt{1.5v-4.75}}{3}$ B: $\frac{v-4}{9} = \frac{4}{9}(1.5v-4.75)$



Denn auch Denken schadet bisweilen der Gesundheit.

Aristoteles, 384 – 321 v. Chr., griech. Philosoph

Zu 340 bis 344: *Diese Wurzelgleichungen führen auf lineare Gleichungen*

340. a) $4 = 40 - 6\sqrt{y}$ b) $4 + \sqrt{100z} = 24$ c) $21 = 6 + 3\sqrt{-u}$

d) $2 + 2\sqrt{\frac{25}{t}} = 12$ e) $6.5 - \sqrt{1+4w} = \frac{3}{2}$ f) $\sqrt{19 + 2\sqrt{\frac{4x+4}{x-4}}} = 5$

341. a) $8 - 3\sqrt{2u-1} = 2$ b) $\sqrt{x+5} - 3\sqrt{4-x} = 0$

c) $\sqrt{a^2+7a+6} - 3 = a$ d) $3\sqrt{y+2} + 2\sqrt{2y+11} = 9\sqrt{y+2}$

e) $3\sqrt{3p-5} - 2 = \sqrt{12p-20} + 2$ f) $\sqrt{n} + \sqrt{2n} = 1 - \sqrt{3n}$

342. a) $\sqrt{a+9} - \sqrt{a} = 1$ b) $\sqrt{y+2} = \frac{1-y}{\sqrt{y-3}}$

c) $\sqrt{p+104} - \sqrt{p} = 8$

d) $\sqrt{a-2} - \sqrt{a-10} = 2\sqrt{a-7}$ e) $\sqrt{4m} - 3 = \frac{2m-17}{\sqrt{m}-1}$

f) $\frac{5}{\sqrt{u+3}} - \sqrt{u+3} = \sqrt{u-1}$ g) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x-7} - \sqrt{x+14} = 0$

343. Bestimmen Sie die Zahlen.

a) Zwei Zahlen unterscheiden sich um 10, ihre Wurzeln dagegen nur um 3.

b) Subtrahiert man 2 von der Wurzel einer Zahl, so ergibt sich gleich viel, wie wenn man aus der um 2 verminderten Ausgangszahl die Wurzel zieht.

c) Die Differenz zweier Zahlen ist 20. Ihr geometrisches Mittel ist um 3 kleiner als ihr arithmetisches Mittel.

344. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $\sqrt{x - ab} + b = a$ $\quad (a > b > 0)$

b) $\sqrt{m + \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{m+n}{2}} + \sqrt{\frac{m-n}{2}}$ $\quad (m > n > 0)$

c) $\sqrt{x - a} + b = \sqrt{cx - ac}$ $\quad (b > 0, c > 1)$

d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$ $\quad (a > b > 0)$

e) $\sqrt{x + 2a} - \sqrt{x + 2b} = 2\sqrt{x}$ $\quad (a > b > 0)$

f) $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \frac{b}{\sqrt{b - x}}$ $\quad (a > 0, b > 0)$

Zu 345 bis 348: *Diese Wurzelgleichungen führen teilweise auf quadratische Gleichungen.*

345. a) $\sqrt{2z + \sqrt{z + 31}} + \sqrt{2z - \sqrt{z + 31}} = 6$

b) $y + \sqrt{y^2 - 3y + \sqrt{y^2 + 4y + 3}} = 1$

c) $\sqrt{2x - 1 + \sqrt{2x^2 + x - 6}} = 4$

d) $\sqrt{\sqrt{x + 16} - \sqrt{x}} = 2$

e) $\sqrt{p + 7 + \sqrt{5(p - 2)}} = 3$

f) $\frac{3s + \sqrt{2s - 3}}{45} = \frac{7}{3s - \sqrt{2s - 3}}$

g) $\frac{\sqrt{8t - \frac{7}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4} - t}} = \frac{\sqrt{34 + 4t}}{\sqrt{\frac{17}{4} - \frac{t}{2}}}$

346. Bestimmen Sie die Zahlen.

a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 18.5, die Summe ihrer Wurzeln 6.

b) Das arithmetische Mittel der beiden Ziffern einer Zahl mit Quersumme 10 ist um 2 grösser als das geometrische Mittel.

c) Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 25.5.
Es ist um 13.5 grösser als das geometrische Mittel.

347. a) Von einem Punkt A aus werden die Tangenten an zwei konzentrische Kreise mit den Radien 20 m und 8 m gelegt. Wie weit muss A vom Kreiszentrum entfernt sein, wenn der kleinere Tangentenabschnitt halb so lang wie der grössere sein soll?

b) In einem rechtwinkligen Dreieck misst die kleine Kathete 13.5 m und die Höhe auf die Hypotenuse 10.8 m. Berechnen Sie die grosse Kathete.

c) Wird eine Strecke AB durch einen Punkt T im goldenen Schnitt geteilt, gilt folgende Beziehung:
Die längere Teilstrecke AT ist das geometrische Mittel aus der kürzeren Strecke TB und der Gesamtstrecke AB.
Die Strecke AB misst 20 m. Bestimmen Sie die längere Teilstrecke.

d) Definition: Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Entfernung von einem Punkt F gleich ist wie der Abstand von einer Geraden g.
Gegeben: Punkt F (6/8) und Gerade g, die auf der x-Achse liegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten jener Punkte der Parabel, deren y-Koordinate halb so gross ist wie die x-Koordinate ($e_x = e_y$).

e) Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände r_1 und r_2 von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.
Gegeben: F_1 (1/3); F_2 (6/5); $r_1 + r_2 = 15$.
Bestimmen Sie die Koordinaten jener Punkte der Ellipse, bei denen die x-Koordinate gleich ist wie die y-Koordinate ($e_x = e_y$).

348. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $\sqrt{x + \frac{1}{a}} + \sqrt{x - \frac{1}{a}} = \frac{2}{a}$

b) $4\sqrt{x + 2a} - 2\sqrt{x + a} = \frac{4a - 12x}{\sqrt{4x + 4a}}$

c) $\sqrt{b - c - x} + \sqrt{x + b - c} = \sqrt{2(b - c)}$

d) $\sqrt{a + 4b + 4x} - \sqrt{a + 4b - 4x} = 4\sqrt{b}$

349. Lösen Sie mithilfe einer geeigneten *Substitution*. (Ohne Fallunterscheidung)

a) $\sqrt{x} - \sqrt{a} = x - a \quad (a > 0)$

b) $\sqrt{x^2 + 4x} = 7 - \frac{10}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

c) $\frac{b + \sqrt{x - 4bc}}{b - \sqrt{x - 4bc}} = \frac{2b}{c} - 1 \quad (c < b)$

d) $\frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 2}{\sqrt{18x^2 - 9} + 14} = \frac{3\left(8 - \sqrt{2x^2 - 1}\right)}{28 - \sqrt{2x^2 - 1}}$

e) $\frac{24}{2(x^2 - 0.25)} + \frac{\sqrt{2x^2 - 0.5} - 7}{\sqrt{2x^2 - 0.5}} = 7 - \frac{7}{\sqrt{2x^2 - 0.5}}$

f) $c\left(\frac{\sqrt{adx^2}}{a} - b\right) = d\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{\sqrt{adx^2}}\right) \quad (a, b, c, d > 0)$

350. Für welche Werte des Parameters a hat die Gleichung mindestens eine Lösung?

a) $\sqrt{x} = 1 - a^2$ b) $\sqrt{x+a} = \sqrt{ax}$ c) $x = \sqrt{x+a}$

2.4.3 Produkt = Null

(siehe auch 1.3.2 Faktorenzerlegung)

Zu 351 bis 355: *Aufgaben ohne Bruch- und Wurzelgleichungen.*

351. a) $x(x+9) = 0$ b) $(y-6)(7-2y) = 0$ c) $0.5a(4a-5) = 0$

d) $1.7p\left(\frac{1}{7}(8p-4)\right) = 0$

352. a) $x^2 - 5x = 0$ b) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$ c) $z^2 - 3z - 28 = 0$

d) $a^2 + 54 - 15a = 0$ e) $2n^2 + n = 6$ f) $(x-a)^2 + 8(x-a) + 15 = 0$

g) $4k^3 + 12k^2 - 40k = 0$

353. a) $x^2 - 81 = 0$ b) $y^2 - 5 = 0$ c) $p^2 + 7 = 0$

d) $x^2 - a = 0 \quad (a > 0)$ e) $n^4 = 16$ f) $a^3 - 100a = 0$

g) $x^4 - 4x^2 - 77 = 0$ h) $b^4 + 3b^2 = 108$

354. Verwenden Sie: $\mathbf{A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \vee A = -B}$

a) $(5x-12)^2 - x^2 = 0$ b) $(5x)^2 = (x+2)^2$ c) $(7a-5)^2 = (2a+5)^2$

d) $(2x-1)^2 - 36(2-x)^2 = 0$ e) $x^2 + 2ax + a^2 = 1$ f) $(k^2 + k - 1)^2 = k^4$

355. a) $z^2(2z-3) + 24(3-2z) = 2z(3-2z)$ b) $8u^3 + 36 = 16u^2 + 18u$

c) $2x^3 + 9x^2 - 5x = x(x+5)^2$ d) $x(x^2-4) = (x-2)^3$

e) $y^4 - y^3 = 1 - y$ f) $21x^4 - 15x^3 + 168x = 120$

g) $6x^6 - 2x^5 + 162x^3 = 54x^2$

356. Bestimmen Sie eine Gleichung mit der folgenden Lösungsmenge:

a) $\{-1; 0; 1\}$ b) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right\}$ c) $\left\{-\sqrt{3}; 0; 1; \sqrt{3}\right\}$

d) $\{\ \}$ e) $\{a; 2a; 3a\}$

Zu 357 und 358: *Diese Gleichungen führen auf Bruch- und Wurzelgleichungen.*

Beachte: Bei Bruch- und Wurzelgleichungen ist die **Probe** unbedingt durchzuführen.

357. a) $\frac{2x}{3}\left(\frac{8x-3}{7}\right)\left(\frac{5x+6}{4x-3}\right)=0$

b) $\frac{x^2-9}{x}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+2}\right)=0$

c) $\sqrt{x}(12-6x)=0$

d) $\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}-5\right)=0$

e) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x}}=0$

f) $\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}=0$

g) $x^2\left(\frac{2-3x}{x-2}\right)\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+2}\right)\left(\frac{1}{4x-1}\right)=0$

h) $x^2\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x-3}\right)\left(\frac{1}{x^2-4}\right)=0$

Jede Wissenschaft ist so weit Wissenschaft, wie Mathematik in ihr ist.

Immanuel Kant, 1724–1804, deutscher Philosoph

358. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $\frac{2ax}{bx+c}\cdot\frac{x+b}{ax^2-c^2}=0$

b) $\frac{x+p}{p^2-3}\cdot\frac{\sqrt{4p^2-x^2}}{4}=0$

c) $\left(\frac{\sqrt{m-4}}{m}+6\right)\cdot\left(\frac{mx^2-5.5mx-25.5m}{x+3}+5m\right)=0$

d) $x^3\cdot\sqrt{\frac{u^2+1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x^2+ux-2u^2}{x-2u}\right)=0$

e) $\left(\frac{x-a}{a}\right)^2=4$

f) $\left(\sqrt{x}-a\right)^2=b^2$

2.4.4 Exponentialgleichungen

Siehe auch im Teil «Arithmetik», Nr. 206 bis 208

Unter einer **Exponentialgleichung** versteht man eine Gleichung, bei der die Unbekannte mindestens einmal im Exponenten vorkommt.

Beispiel 1:

$$\mathbf{5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x-1} = 1000 + 9 \cdot 5^{x}}$$

$$5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x-1} - 9 \cdot 5^{x} = 1000$$

$$5^{x-1}(5^3 - 2 - 9 \cdot 5) = 1000$$

$$5^{x-1} = \frac{1000}{78}$$

$$\lg(5^{x-1}) = \lg\left(\frac{1000}{78}\right)$$

$$(x-1) \cdot \lg 5 = 3 - \lg 78$$

$$x = \frac{3 - \lg 78}{\lg 5} + 1 \qquad \mathbb{L} = \{2.585\}$$

Beispiel 2:

$$\mathbf{e^{2x+1} - 3e^{x+2} = 12} \qquad e = 2.718\ldots$$

$$e \cdot e^{2x} - 3e^2 e^{x} = 12$$

$$e^{2x} - 3e \cdot e^{x} = \frac{12}{e}$$

Substitution: $y = e^{x}$

$$y^2 - 3ey - \frac{12}{e} = 0$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert:

$$y_1 = 8.664 \qquad y_2 = -0.510$$

Rücksubstitution:

$$e^{x} = 8.664 \qquad e^{x} = -0.510$$

$$x \cdot \ln e = \ln 8.664 \qquad \Rightarrow \text{keine Lösung,}$$

$$x = \ln 8.664 \qquad \text{weil } e^{x} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$x = 2.159$$

$$\mathbb{L} = \{2.159\}$$

Lösen Sie die Gleichungen mithilfe des natürlichen Logarithmus. In den folgenden Aufgaben bedeutet e stets die Eulersche Zahl.

359. a) $3^x = 2^{x+1}$ b) $2^{3k} = 3^{2k}$ c) $6^{y^2} = 3^y$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3m-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2-m}$ e) $2^{(3^x)} = 3^{(2^x)}$ f) $e^{2t} = 2^{t+e}$

360. a) $2 \cdot 3^{y+1} = 10^y$ b) $5^{u+1} = 4^u \cdot 6^{2u}$ c) $5^{2k+1} = 10 \cdot 4^{2k-1}$

d) $12^x + 4 \cdot 3^{4-x} = 0$

361. a) $2^{x+1} = 3^x + 3^{x-1}$ b) $6^t + 7^t = 7^{t+2}$ c) $3^{n+3} - 5^{n+2} = 3^n - 5^{n+3}$

d) $2 \cdot 5^{p-2} + 2^p = 12 \cdot 5^{p-3} + 3 \cdot 2^{p-3}$

362. a) $5^u + 5^{u+2} = 100$ b) $3^{2t+1} = 50 + 3^{2t-1}$ c) $e^x + e^{x+1} + e^{x+2} = 1$

d) $2 \cdot 7^{y+2} - 3 \cdot 7^y = 13 - 5 \cdot 7^{y+1}$

363. Lösen Sie die Gleichung mit einer geeigneten Substitution.

a) $3^x + 3^{2x} = 20$ b) $2 \cdot 5^{2k} = 3.6 \cdot 5^k - 1$ c) $4^v - 2^{v+4} = 60$

d) $10^m = 1 + 10^{-m}$ e) $5 \cdot 2^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 10$ f) $e^{y-1} - e^{2-y} = 2$

364. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $a^x = b^{x+n}$ b) $m^x = a \cdot n^{2x}$ c) $a^{x+1} - a^{x-1} = b^x$

d) $u^x + u^{x+1} + u^{x+2} = 1$ e) $v = v_E\,(e^{kx} - e^{-kx})/(e^{kx} + e^{-kx})$

365.* Für welche Werte des Parameters k hat die Gleichung $a^x + k \cdot a^{-x} = 1$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ genau eine Lösung?

366. Für einen Potenzflaschenzug gilt: $F = \dfrac{G}{\eta \cdot 2^n}$

F: minimale Kraft, die nötig ist, um die Last G zu heben.
G: Gewichtskraft der Last
η: Wirkungsgrad
n: Anzahl Rollen

Wie viele Rollen werden mindestens benötigt, wenn die Last das Zehnfache der aufgewendeten Kraft wiegt und $\eta = 0.6$ beträgt?

367.

Für einen Riemenantrieb gilt die Ungleichung

$F_1 \leq F_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$,

wenn das Rutschen des Riemens verhindert werden soll.

F_1: Kraft im ziehenden Riementeil

F_2: Kraft im gezogenen Riementeil

μ_0: Haftreibungszahl

α: Umschlingungswinkel im Bogenmass (rad)

Wie gross muss α mindestens sein, wenn gilt: $F_1 = 2 \cdot F_2$ und $\mu_0 = 0.25$?

368. Der atmosphärische Luftdruck p hängt von der Höhe h ab.
Es gilt die sodasse Barometerformel:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$$

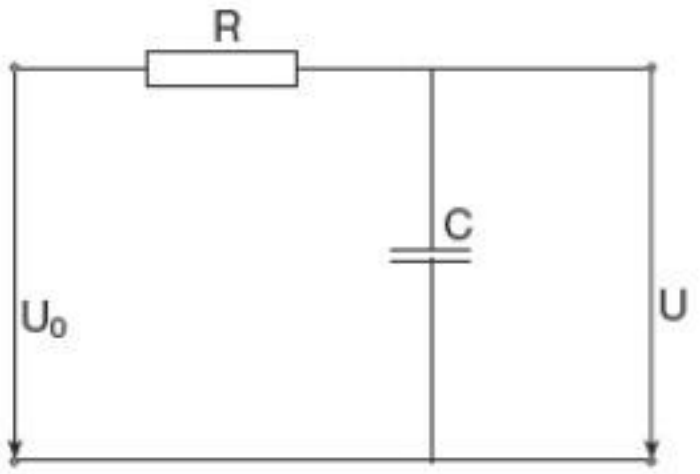
p: Luftdruck in der Höhe h
h: Höhe über dem Meeresspiegel

p_0: Luftdruck auf Meereshöhe (h = 0m)
H = 8005 m

a) Wie hoch fliegt ein Flugzeug, von dem aus ein Luftdruck von 0.36 bar gemessen wird, während eine Bodenstation auf Meereshöhe 0.97 bar meldet?

b) Auf welcher Höhe ist der Luftdruck halb so gross wie auf Meereshöhe?

369.



Das Anlegen einer Gleichspannung U_0 liefert über dem Kondensator eine Spannung U, für die gilt:

$$U(t) = U_0\left(1 - e^{\frac{-t}{R \cdot C}}\right)$$

R: Widerstand in Ohm (Ω)
C: Kapazität in Farad (F)
t: Zeit in Sekunden

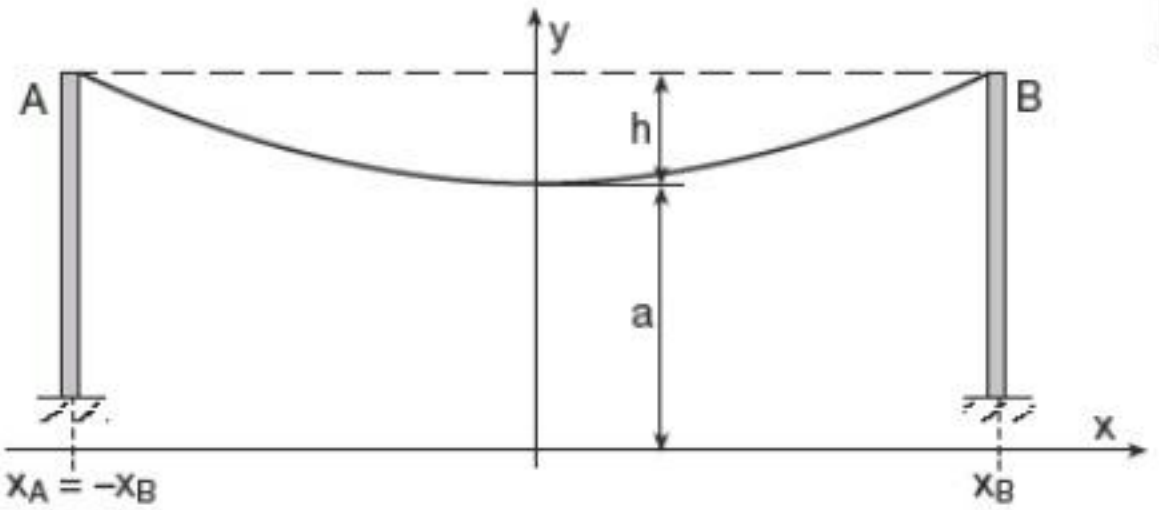
a) Nach welcher Zeit t ist die Spannung U auf 80 % ihres Endwertes U_0 angewachsen, wenn R = 400 MΩ und C = 0.30 μF betragen?

b) Lösen Sie die Gleichung nach t auf.

... dass die Mathematik in irgendeiner Weise auf die Gebilde unserer Erfahrung passt, empfand ich als ausserordentlich merkwürdig und aufregend.

Werner Heisenberg, 1901–1976, Physiker

370.



Zwischen zwei gleich hohen Masten wird ein Seil aufgehängt. Die Kurve, die das frei hängende Seil bildet, wird durch die Gleichung der Kettenlinie beschrieben:

$$y = f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Berechnen Sie den Abstand AB zwischen den beiden Masten, wenn a = 1.2 m und h = 0.4 m betragen.

Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch blosses Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?
Hierauf ist nach meiner Meinung kurz zu antworten: Insofern die Sätze der Mathematik sich auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Albert Einstein, 1879–1955, Physiker

2.4.5 Logarithmische Gleichungen

Unter einer **logarithmischen Gleichung** versteht man eine Gleichung, in der die Unbekannte im Argument eines Logarithmus vorkommt.

Beispiel 1: $\lg(x) + \lg(x-3) = 1$

1) Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der Gleichung bestimmen:

$0 < x$ und $0 < x - 3$

$0 < x$ und $3 < x$

$\mathbb{D} =]0;\infty[\cap]3;\infty[=]3;\infty[$

2) Gleichung auf die Form $\lg(T(x)) = k$ bringen:

$\lg(x(x-3)) = 1$

3) Exponieren zur Basis 10:

$$10^{\lg(x(x-3))} = 10^1$$
$$x(x-3) = 10$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$(x-5)(x+2) = 0$$
$$x = 5 \text{ oder } x = -2$$

4) Probe mit der Definitionsmenge:

$5 \in \mathbb{D}$, $-2 \notin \mathbb{D}$, also $\mathbb{L} = \{5\}$

Beispiel 2: $\ln(3-x) = 2 - \ln(x-5)$

Definitionsmenge:

$0 < 3 - x$ und $0 < x - 5$

$x < 3$ und $5 < x$

$\mathbb{D} =]-\infty;3[\cap]5;\infty[= \{\ \}$

$\mathbb{D} = \{\ \} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$

Beispiel 3: $\ln(x+2) = 2 + \ln(x-2)$

Definitionsmenge:

$0 < x + 2$ und $0 < x - 2$

$-2 < x$ und $2 < x$

$\mathbb{D} =]2;\infty[$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 2$$

Exponieren zur Basis e:

$$\frac{x+2}{x-2} = e^2$$
$$x = \frac{2(e^2+1)}{e^2-1} \approx 2.6 \in \mathbb{D}$$
$$\mathbb{L} = \left\{\frac{2(e^2+1)}{e^2-1}\right\}$$

Wir beschränken uns auf Gleichungen mit $\lg(\ldots)$ und $\ln(\ldots)$.

371. a) $\lg(2x+10)=2$ b) $\lg(1-5p)=-0.5$ c) $\lg\left(\sqrt{2u-3}\right)=0.2$
d) $\ln(2-y)=-2$ e) $4.2+\ln(x^3)=7.6$ f) $1.8-\ln\left(\sqrt[3]{2t}\right)=2.1$

372. a) $\lg(2^k)=5$ b) $\ln(5^m)=2$ c) $\lg(5^x)=\lg(2^x)+2$
d) $\ln(10^y)-\ln(5^y)=-1$

373. a) Sven und Pascal lösen die Gleichung $\lg(x^2)=1$ wie folgt:

Sven:
$$\begin{aligned}\lg(x^2) &= 1\\ x^2 &= 10\\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{10}\\ L &= \{\sqrt{10};-\sqrt{10}\}\end{aligned}$$

Pascal:
$$\begin{aligned}\lg(x^2) &= 1\\ 2\cdot\lg(x) &= 1\\ \lg(x) &= 0.5\\ x &= 10^{0.5}\\ L &= \{\sqrt{10}\}\end{aligned}$$

(1) Welche Lösungsmenge ist richtig?
(2) Warum erhält Pascal nur eine Lösung?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge.
(1) $\lg\left((x+7)^2\right)=0$ (2) $\ln\left((1-y)^2\right)=2$
(3) $\lg\left(\left(\frac{t}{2t-1}\right)^2\right)=0$ (4) $\ln\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right)=2$

Behauptung: Alle Zahlen sind gleich Null.

Beweis:
$$\begin{aligned}a &= b\\ a^2 &= ab\\ a^2-b^2 &= ab-b^2\\ (a+b)(a-b) &= b(a-b)\\ a+b &= b\\ a &= 0\end{aligned}$$
(a steht für eine beliebige reelle Zahl)

374. a) $2 \cdot \lg(x) = \lg(2x)$ b) $\lg(u-5) = \lg(u) - \lg(5)$

c) $\ln(y) + \ln(y+4) = 2 \cdot \ln(y+1)$ d) $\ln(k) + \ln(2k) = \ln(3k)$

e) $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = 2$ f) $\dfrac{\ln(u-3)}{\ln(u)} = 0.5$

375. a) $\lg(2a) - \lg(a^2) = 0.1$ b) $\ln(x) + \ln(x^2) + \ln(x^3) = 1$

c) $\ln(2t+1) - \ln(t) = 1$ d) $\lg(y+2) + \lg(y-2) = 0$

e) $\lg(k+3) = 2 + \lg(k-3)$ f) $\ln(x+1) = 0.6 - \ln(x)$

g) $\lg(u^2) + \lg\left(\sqrt{u}\right) = 6$ h) $x^{\lg(x)} = 10$

376. Lösen Sie die Gleichung mit einer geeigneten Substitution.

a) $5^{\ln(x)} = 2 \cdot 3^{\ln(x)}$ b) $\lg(t^2) \cdot \lg(t) = 0.5$

c) $\lg\left(\sqrt{p}\right) = \sqrt{\lg(p)}$ d) $\lg\left(\sqrt{u}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\lg(u)}$

e) $\left(1 + \ln(x)\right) \cdot \ln(x) = 2$

377. Lösen Sie die Formel nach der angegebenen Variablen auf.

a) $h = H \cdot \ln\left(\dfrac{p_0}{p}\right)$; $p = ?$ b) $n \cdot \lg(q) = \lg(K_n) - \lg(K_0)$; $K_n = ?$

c) $t = \dfrac{\lg(m_0) - \lg(m)}{\lg(2)} \cdot T$; $m = ?$ d) $t = a + \dfrac{\ln(N) - \ln(N_0)}{\ln(n)}$; $n = ?$

Mathematik ist die exakteste Wissenschaft und ihre Schlussfolgerungen sind absolut beweisbar. Das ist jedoch nur deshalb so, weil die Mathematik nicht versucht, absolute Schlussfolgerungen zu ziehen. Alle mathematischen Wahrheiten sind relativ, bedingt.

Karl Steinmetz, 1865 – 1923, Mitarbeiter Edisons

378. Lösen Sie die Gleichung nach x auf ohne Fallunterscheidung.

a) $\ln(x) - \ln(a) = b \quad (a > 0)$ b) $\lg(x-a) = \lg(x) - \lg(a) \quad (a > 1)$

c) $\lg(x) + \lg(ax) = b \quad (a > 0)$ d) $\lg(x) + \lg(x+1) = a$

2.5 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

2.5.1 Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Eine Gleichung mit den Unbekannten x und y heisst **linear**, wenn sie zur folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$a\,x + b\,y = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a, b \neq 0$$

$a\,x + b\,y = c$ nennen wir **Grundform** einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten.

Die Grundmenge der Gleichungen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, falls nichts anderes angegeben ist.

379. Welche Gleichungen sind linear? Bringen Sie diese auf die Grundform.

(1) $2x + 3y = xy$ (2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ (3) $\frac{a}{3} - 2 = \frac{b}{4} + a$

(4) $2 - y = \frac{x}{y}$ (5) $\frac{u-3}{2} = 5v - 3u + 1$ (6) $5x + 1 = 2xy$

(7) $\sqrt{3x} = \sqrt{5y}$ (8) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (9) $(3m - 2)^2 = (n + 8)^2$

380. Bestimmen Sie alle Lösungen für $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

a) $\sqrt{2}\,x + y = 5$ b) $2x + 5y = 30$ c) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 4$

381. Lösen Sie die Gleichung $3x + 4y = 27$

(1) für $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (2) für $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. (3) für $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Der Mathematiker ist ein Hersteller von Schemata.

Thomas Hardy, 1840 – 1928, engl. Dichter

382. a) $\left|\begin{array}{l} 3x + y = 73 \\ 2x - y = 32 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2a + 5b = 1 \\ 6a + 7b = 3 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} x = 3y - 19 \\ y = 3x - 23 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 3a - 7b = 2 \\ 15a - 35b = 12 \end{array}\right|$ e) $\left|\begin{array}{l} 0.16u - 0.04v = 1 \\ 0.38u - 0.22v = 2 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{l} \frac{c}{2} + \frac{d}{3} = 7 \\ \frac{c}{3} + \frac{d}{2} = 8 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{l} \frac{m}{2} + \frac{n}{3} = 1 \\ 6m + 4n = 12 \end{array}\right|$ h) $\left|\begin{array}{l} 3x = 2 + 5y \\ 6 = \frac{24}{3x} + \frac{10y}{x} \end{array}\right|$

383. Lösen Sie mit der Additionsmethode.

a) $\left|\begin{array}{l} 1.5x - 2y = 5 - 0.6y \\ 0.5x + 2.8y = 30 - 1.5x \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} c\sqrt{2} = d + \sqrt{2} \\ 2 = c + d \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 5p - 3q = 4(p + 2) \\ 3(2q + 3) = 2p + 7q \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{l} (v - 12)(u + 5.5) = (u - 3)(v + 5) \\ (v - 12)(u + 5.5) = (u - 3)v + 12.5 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} (m+5)(n-2) = (m+2)(n-1) - 2m \\ (m-4)(n+7) = (m-3)(n+4) \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{l} \frac{a+4}{2} = b + 1 \\ \frac{a+2}{3} = b - 1 \end{array}\right|$

384. a) $x - 1 = 2x - 3y + 4 = y$ b) $4a - 7 = 2a + 5b = 8 - a$

c) $-x + 3y = 6 - 3x = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}y - 3x$

385. Lösen Sie möglichst elegant.

a) $\left|\begin{array}{l} \frac{7(a-b)}{11} + \frac{a}{4} = 4.8 \\ \frac{7(a-b)}{11} - \frac{3a}{4} = 2.4 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{5(3y-x)}{4} - \frac{3x}{7} = 3x + 0.5 \\ \frac{7(3y-x)}{4} - 15.5 = \frac{4}{7}x \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{3(2r+s)}{4} + \frac{s}{3} = 15 \\ \frac{3(2r+s)}{4} + \frac{s}{2} = 28.5 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{l} \frac{v+w}{2} = -\frac{4w}{3} + 10 \\ -w = -5 + \frac{w+v}{2} \end{array}\right|$

386. a) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{3}{3-12m} = \dfrac{14}{2-n} \\ \dfrac{2}{2+8m} = \dfrac{4}{2+n} \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{u+2v-2}{v-2u+4} = 12 \\ 2u+2v = 18 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{z-12}{7-w} = \dfrac{z-13}{11-w} \\ \dfrac{2z+4}{10+z} = \dfrac{34-2w}{18-w} \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{2y+4}{5} + \dfrac{14y+5z}{10} = 3 \\ \dfrac{14z+4y}{8} - \dfrac{5z-y}{3} = 1 \end{array} \right|$

387. Welche Werte muss man für a und b einsetzen, damit das folgende Gleichungssystem die Lösung $x = 2$; $y = 1$ besitzt?

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{3y}{a} = 3 \\ \dfrac{x}{3a+3b} - \dfrac{2y}{a} = -1 \end{array} \right|$$

388. a) $(a+b):(a+1):(9-b) = 3:2:1$

b) $(x+2y-7):(2y-x+15):(2x+y+19) = 1:2:3$

Systeme, die auf lineare Gleichungssysteme führen

389. Lösen Sie mit der Additionsmethode.

a) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{3}{f} + \dfrac{8}{g} = 3 \\ \dfrac{15}{f} - \dfrac{4}{g} = 4 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{5}{m} - \dfrac{3}{n} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{4}{m} + \dfrac{5}{n} = \dfrac{8}{15} \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{8.4}{p} - \dfrac{4.5}{q} = -1 \\ \dfrac{15.4}{p} - \dfrac{2.5}{q} = 2 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{2}{5s} + \dfrac{2}{5t} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{2s} - \dfrac{1}{2t} = \dfrac{1}{12} \end{array} \right|$

390. Lösen Sie mit einer geeigneten Substitution.

a) $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{a+b} = 5 - \frac{4}{a-b} \\ -\frac{9}{a+b} = -1 - \frac{2}{a-b} \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{8}{z+1} - \frac{1}{y+z-2} = 7 \\ \frac{13}{z+1} + \frac{2}{y+z-2} = 15 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{5q}{4p+q} = 1 - \frac{3}{2p-4q} \\ \frac{7q}{4p+q} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2p-4q} \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} m - 1 = -\frac{4}{m-n} \\ \frac{3}{m-n} = 5.25 - 3m \end{array}\right|$

391. Lösen Sie mit einer geeigneten Substitution.

a) $\left|\begin{array}{l} \frac{7u}{u-v} + 3u + 3v = 75 \\ \frac{9u}{u-v} - 4u - 4v = 10 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{r} 5\sqrt{s} - 2\sqrt{t} = 10 \\ 2s = 4t - 7 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 5e + 5f - \sqrt{3e+f} = 2 \\ 2e + 2f + \sqrt{3e+f} = 5 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{r} \sqrt{m^2 - n^2} = 6 - \sqrt{m-n} \\ \sqrt{m-n} = \sqrt{m^2 - n^2} - 4 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} \frac{33}{\left(\frac{2}{r} + 3s\right)} + \frac{24}{\left(5s - \frac{3}{r}\right)} = 5 \\ \frac{55}{\left(\frac{2}{r} + 3s\right)} + \frac{144}{\left(5s - \frac{3}{r}\right)} = 17 \end{array}\right|$

Systeme mit Parametern

Die Unbekannten sind stets mit x und y bezeichnet.

Zu 392 bis 397: *Lösen Sie das System ohne Fallunterscheidung.*

392. a) $\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = -5u \\ 3x - 2y = -5v \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 5x + 3y = 4m + n \\ 3x + 5y = 4m - n \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 6x - 1.5y = 10.5a + 7.5b \\ 4.5x - 3y = 6a + 7.5b \end{array}\right|$

393. a) $\left|\begin{array}{r} 2(x + y) = a + 1 \\ y = ax \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} x = a - y \\ y = x + b \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} 3px + \frac{qy}{2} = 5 \\ 5px - 5 + 1.5qy = -4px + 10 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} (a+b)x + (a-b)y = 2a \\ (a+b)x - (a-b)y = 2b \end{array}\right|$

394. a) $\left|\begin{array}{l} \frac{p}{x-q}+\frac{q}{y+q}=2 \\ \frac{p}{x-q}-\frac{q}{y+q}=1 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{x+p}-\frac{1}{x+y-q}=1 \\ \frac{3}{x+p}+\frac{2}{x+y-q}=5 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{c-y}+\frac{y}{d+y}=2 \\ \frac{x}{c-y}-\frac{y}{d+y}=1 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{c+x}-\frac{1}{c+d-y}=1 \\ \frac{3}{c+x}+\frac{2}{c+d-y}=5 \end{array}\right|$

395. a) $\left|\begin{array}{c} sx=(r-s)y \\ r(y-2)=s(x+y)+2r \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} (m-n)x+my=m^2 \\ (m-n)x+ny=n^2 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{m}-\frac{y}{n}=0 \\ nx+my=4mn \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{c} \frac{x-c}{d}+\frac{y-d}{c}=0 \\ \frac{x+y-d}{c}+\frac{x-y-c}{d}=0 \end{array}\right|$

396. a) $\left|\begin{array}{r} -v^2x+(u+v)y=uv \\ (u-v)x+y=u \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{c} ax=by \\ x+ay=\frac{a^2+b}{ab} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} mx+y=m^2+n^2 \\ x+y=m+n^2 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{c} x+y=a+b \\ \frac{x}{y}=\frac{a}{b} \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} tx+sy=s^2tx-st^2 \\ tx+sy=s^2x-st \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{c} (p+q)x-(p-q)y=q-p \\ \frac{x}{p-q}+\frac{y}{p+q}=\frac{1}{p-q} \end{array}\right|$

397. a) $\left|\begin{array}{r} rx+sy=t \\ x:y=u:v \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{r} p^2x-q^2y=p^2+q^2 \\ px+qy=2p \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} cx+dy=c^2+d^2 \\ cy+dx=c^2+d^2 \end{array}\right|$

398. Lösen Sie das System mit Fallunterscheidung für alle Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$.

a) $\left|\begin{array}{l} x+ay=1 \\ 3x+y=1 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{r} 6x-8y=-a \\ 9x-12y=4 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x+ay=a^2 \\ x+3y=9 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{r} ax+2y=1 \\ x+ay=2 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{l} 2x+ay=1 \\ ax+3y=2 \end{array}\right|$

f) $\left|\begin{array}{r} ax+2y=4 \\ x+y=a \end{array}\right|$

Grafische Lösungsmethode siehe «3.3.9 Grafisches Lösen linearer Gleichungssysteme»

Textaufgaben

399. Zwei Lastwagen mit einer Ladefähigkeit von 2 t bzw. 3 t sollen insgesamt 25 t Baumaterial transportieren. Wie können die Lastwagen eingesetzt werden, wenn sie jeweils voll beladen werden sollen?

400. Bestimmen Sie die gesuchten Zahlen.

a) Subtrahiert man vom Fünffachen einer Zahl das Doppelte einer zweiten Zahl, so erhält man (– 39). Das Vierfache der ersten Zahl und das Dreifache der zweiten Zahl ergeben zusammen (– 114).

b) Summe und Quotient zweier Zahlen ergeben je 5.

c) Durch Umstellen der beiden Ziffern einer Zahl erhöht sich ihr Wert um 18. Dividiert man die ursprüngliche Zahl durch das Vierfache ihrer Quersumme, so erhält man 1 Rest 12.

d) Dividiert man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man 7 Rest 3. Vertauscht man die Ziffern der ursprünglichen Zahl und dividiert diese durch die um 3 verminderte Quersumme, so erhält man 5 Rest 2.

e) Die doppelte Summe zweier Zahlen beträgt 140. Dividiert man die eine Zahl durch 8 und die andere durch 9, so ist die Summe der Quotienten 8.

401. Auf einem Rundkurs von $9\frac{1}{3}$ km Länge treffen sich zwei mit konstanter Geschwindigkeit fahrende Radfahrer bei gleicher Bewegungsrichtung alle 70 Minuten, bei entgegengesetzter Richtung alle 10 Minuten. Wie gross sind ihre Geschwindigkeiten?

402. In einer quaderförmigen Materialkiste mit quadratischer Grundfläche hat ein dünner Stab gerade noch Platz. Dies wäre auch möglich, wenn die Grundkanten je um 3 dm verkürzt und die Höhe um 3 dm verlängert oder wenn die Grundkanten je um 3 dm vergrössert und die Höhe 9 dm verkleinert würden.
Welches waren die ursprünglichen Abmessungen?

403. Mischt man 9 Liter und 6 Liter von zwei verschiedenen Kochsalzlösungen, so hat die Mischung 13 %. Nimmt man jedoch von der ersten Lösung 7 Liter mehr und von der zweiten Lösung viermal soviel wie vorher, so entsteht eine 12 %-Mischung.
Wieviel Prozent Kochsalz enthält jede Lösung?

404. Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder eines Getriebes ist 7 : 11. Hätte jedes Rad 4 Zähne mehr, so wäre das Verhältnis 2 : 3. Wie viele Zähne hat jedes Rad?

405. Eine an eine senkrechte Wand gestellte Leiter erreicht eine um 15 cm veränderte Höhe, wenn man ihren Fuss um 1 m gegen die Wand verschiebt. Zieht man jedoch die Leiter von der ursprünglichen Lage um 1.40 m von der Wand weg, so rutscht das obere Ende der Leiter um 37 cm nach unten.
Wie weit war der Fuss der Leiter ursprünglich von der Wand entfernt?

406. Ein quaderförmiges Wasserbecken von 12 m Länge, 5 m Breite und 4.5 m Höhe wird durch zwei Abflüsse A und B entleert. Sind A während 2 Stunden und B während 1.5 Stunden offen, sinkt der Wasserspiegel um 1.28 m. Bei vertauschten Öffnungszeiten sinkt der Wasserspiegel jedoch um 1.205 m.
Wie viele Liter fliessen bei jedem Abfluss pro Minute ab?

2.5.2 Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten

Die Grundmenge der Gleichungen ist $\mathbb{R}^n$, falls nichts anderes angegeben ist.

407. Welche Gleichungen sind linear? Bringen Sie diese auf die Grundform $(ax + by + cz = d)$.

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (2) $3(x - y) = 2(y + z - 3)$ (3) $(x + 5y)^2 = (4z - 1)^2$

(4) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ (5) $\frac{x}{3} - y + 3z = \frac{y}{2} - x - 8$ (6) $\sqrt{2x + z} = \sqrt{3y - 1}$

408. Lösen Sie die folgende Gleichung:
(1) für $G = \mathbb{R}^3$
(2) für $G = \mathbb{N}^3$

a) $x + y + 2z = 8$ b) $x + 2y + 3z = 12$

409. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem für die angegebene Grundmenge.

a) $\left| \begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ y + 2 = 5z \end{array} \right|$ $G = \mathbb{R}^3$ b) $\left| \begin{array}{r} 3x + y = z + 1 \\ 2z = 5 - x \end{array} \right|$ $G = (\mathbb{N}_0)^3$

c) $\left| \begin{array}{c} 0.6x + 0.2y = 1.6z + 1 \\ \frac{y}{3} + 1 = \frac{5x}{3} \end{array} \right|$ $G = \mathbb{N}^3$ d) $\left| \begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ y + z + 1 = 3x \end{array} \right|$ $G = (\mathbb{R}^+)^3$

e) $\left|\begin{array}{l} 1.5a - 5 = 2b + 0.5c \\ 12b + 3c = 9a - 20 \end{array}\right|$ $G = \mathbb{R}^3$

f) $\left|\begin{array}{l} 2a + 5c = b + 7 \\ 2b - 4c = 4 - 3a \end{array}\right|$ $G = (\mathbb{R}^+)^3$

410. Lösen Sie das folgende System ohne Rechner.

a) $\left|\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x + z = 9 \\ z - y = -4 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 4x + 7y = 10 \\ 3x + 8z = 13 \\ 3y + 5z = 16 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} y - 1 = x \\ x + z - 6 = 0 \\ 7 - z = y \end{array}\right|$

411. Lösen Sie ohne Rechner.

a) $\left|\begin{array}{r} x + y = 5 - 2z \\ x + z = 8 - 2y \\ 11 - z = 2x + y \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{r} 2x - y = 15 - 5z \\ 2z + 1 = x + 3y \\ 4x + 5y + z - 10 = 0 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} 3a + 3c = 2b + 16 \\ a + b + c = 7 \\ 2c - 3b = 13 - 4a \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{r} 3v + 1 = 4u + 5w \\ u - 7w = 14 - 2v \\ 9w + 1 = 5v - 6u \end{array}\right|$

412. $-7x - 2z = -2y + 0.5x = -2z + 3x - 8y = z + 0.5x$

413. ■

a) $\left|\begin{array}{l} 4x - 3.5y + 4z = -26.9 \\ 4.5x + 2y - 5z = 18.9 \\ -2x + 4y + 3z = 25.2 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 8a + 7b = 6c + 3 \\ 5c + 3 = 4b \\ 3b + 2c = a + 9 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{2r}{3} + t = \frac{2s}{3} - 14 \\ 5t + 62 = \frac{7r}{6} - \frac{4s}{5} \\ \frac{r}{8} + \frac{s}{2} = \frac{-3t}{4} \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 6\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right) - 3z = -10.5 \\ 5\left(2y - \frac{4}{7}z\right) + 7.5x = -10 \\ \frac{5}{9}\left(\frac{3x}{5} - \frac{12}{5}z\right) = -4\left(\frac{5}{3}y + z\right) \end{array}\right|$

414. ■

a) $\left|\begin{array}{l} 4x - 2z = y + 9 \\ 2y - 3z = 8 - 3x \\ 8y + x = 5z + 22 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{r} 2x = 3z - 6y - 6 \\ 6 - 3z = 4x + 3y \\ 4x + 9z = 3y + 18 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} 5y = 6x + 9z + 1 \\ 4x - 3y = 1 - 5z \\ x - 7z = 14 - 2y \end{array}\right|$

415. Lösen Sie das folgende System
(1) für $G = \mathbb{R}^4$ (2) für $G = (\mathbb{R}^+)^4$ (3) für $G = \mathbb{N}^4$

$$\left|\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 &=& 17 - 2x_4 \\ 7x_2 + 3x_3 &=& 2x_4 + 35 \\ 5x_1 + 15 &=& 4x_3 - 2x_4 \end{array}\right|$$

416. ■

a) $$\left|\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_4 &=& 2x_2 - 5x_3 + 1 \\ 3x_2 &=& x_3 - 2x_4 + 3 \\ 6(x_2 + 1) &=& 9x_1 + 15x_3 + 3x_4 \\ 15x_2 + 10x_4 &=& 5x_3 + 17 \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{rcl} x_1 - 4x_2 &=& 20 \\ 5x_2 - 7x_3 &=& -14 \\ 3x_3 + 9x_4 &=& 7 \\ 12x_1 - 17x_4 &=& 68 \end{array}\right|$$

417. Lösen Sie mithilfe einer geeigneten Substitution. (Lösungen auf 3 Dezimalen runden)
■

a) $$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1.23 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{5}{z} = 2.11 \\ \frac{3}{x} - \frac{6}{y} + \frac{2}{z} = 2.68 \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{l} \frac{6}{x+y} + \frac{5}{y-2z} = 4 \\ \frac{2}{x+y} - \frac{4}{2x-z} = 1 \\ \frac{10}{y-2z} - \frac{3}{2x-z} = -3 \end{array}\right|$$

Systeme mit Parametern

Die Unbekannten sind stets mit x, y und z bezeichnet.

418. Lösen Sie das folgende System ohne Fallunterscheidung.

a) $$\left|\begin{array}{rcl} x + y + z &=& a \\ x + z &=& b \\ y + z &=& c \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{rcl} 3x + y - 2z &=& a + 5 \\ 2x - y + 4z &=& 8a - 2 \\ x + 3y - 2z &=& 3a + 3 \end{array}\right|$$

c) $$\left|\begin{array}{rcl} x + 4y &=& 2z + p \\ y - 3x &=& z + 2p \\ 2x + z &=& 3(y + p) \end{array}\right|$$

419. Lösen Sie das folgende System mit Fallunterscheidung für alle Parameterwerte $p \in \mathbb{R}$.

a) $$\left|\begin{array}{rcl} 8 + 3y - 2z &=& x \\ 5 + x + y &=& 0 \\ 2 - x &=& pz \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{rcl} x + 2y &=& z + 7 \\ y + 4 &=& 2x + 3z \\ 3x + y + 2z &=& p \end{array}\right|$$

c) $$\left|\begin{array}{rcl} px + y + z &=& 0 \\ x + py + z &=& 0 \\ x + y + pz &=& 0 \end{array}\right|$$

Textaufgaben

420. Bestimmen Sie die Zahlen.

a) Die Quersumme einer dreiziffrigen Zahl ist 18.
Vertauscht man die erste und die dritte Ziffer, so entsteht eine um 396 grössere Zahl. Die ursprüngliche Zahl wird jedoch um 9 kleiner, wenn man die zweite und dritte Ziffer vertauscht.

b) Drei Zahlen ergeben als Summe 116. Subtrahiert man von der ersten und der zweiten Zahl je 8, so verhalten sich die Resultate wie 2 : 3. Subtrahiert man jedoch von der zweiten und dritten Zahl je 4, so verhalten sich die Resultate wie 1 : 2.

421. Gesucht ist die kleinste vierstellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:
Die Quersumme beträgt 24. Die Summe aus Tausender- und Hunderterziffer ist genau so gross wie die Summe aus Zehner- und Einerziffer. Die Tausenderziffer ist um 2 grösser als die Hunderterziffer.

422. ■ Das totale Fassungsvermögen dreier Behälter beträgt 405 Liter. Füllt man den vollen ersten Behälter in den zweiten um, so bleiben zwei Siebtel zurück. Füllt man hingegen den vollen Inhalt des zweiten und dritten Behälters in den ersten um, so ist dieser erst nach Zugabe weiterer 15 Liter voll. Wie viel fasst jeder Behälter?

423. ■ Ein Kapital von € 300 000.– ist in drei Posten zu 4 %, 5 % und 6 % angelegt. Schlägt man nach einem Jahr die Zinsen dazu, so werden alle Posten gleich gross.
Wie gross waren die Posten am Anfang? (Auf ganze Euro runden)

424. ■ Drei Kapitalien bringen zusammen € 3317.50 Ertrag. Das erste ist dabei während $1\frac{1}{2}$ Jahren zu 4.5 % angelegt, das zweite während 11 Monaten zu 5 % und das dritte während 16 Monaten zu 5.5 %. Das erste Kapital verhält sich zum zweiten wie 3 : 5, das zweite zum dritten wie 6 : 5. Bestimmen Sie die drei Kapitalien.

425. ■ Drei Zahnräder eines Getriebes haben zusammen 80 Zähne. Bei 10 Umdrehungen des ersten Rades drehen sich das zweite 18 mal und das dritte 45 mal.
Wie viele Zähne hat jedes Rad?

Ein Wissenschaftler ist ein Mann, der lieber zählt als vermutet. Unbekannt

426. Ein Arbeitsauftrag kann durch 3 Maschinen X, Y und Z erledigt werden, wenn
■ X und Y zusammen 15 Stunden
oder Y und Z zusammen 20 Stunden
oder X und Z zusammen 12 Stunden in Betrieb sind.
In wie vielen Stunden kann der Auftrag durch jede Maschine allein erfüllt werden?

427. Drei Spieler beschliessen, dass nach jeder Partie der Verlierer das Guthaben der
■ anderen verdoppeln muss. Jeder Spieler verliert eine Partie, und nach diesen drei Partien besitzt jeder der drei Spieler € 40.–
Bestimmen Sie den Anfangseinsatz eines jeden Spielers.

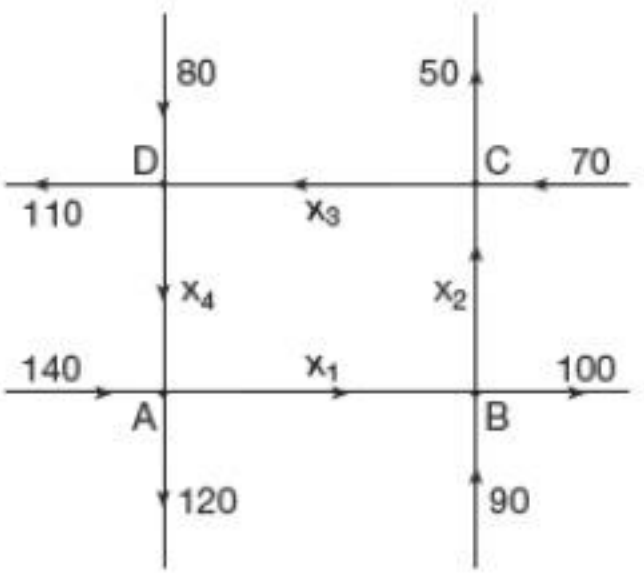
428. Um von der Stadt A zur 120 km entfernten Stadt B zu gelangen, muss ein Pass über-
■ quert werden. Ein Automobilist erreicht in der Ebene eine mittlere Geschwindigkeit von 60 km/h, beim Aufstieg 30 km/h und bei der Hinunterfahrt 40 km/h. Von A nach B benötigt er 2 Stunden und 21 Minuten, von B nach A 2 Stunden und 24 Minuten.
Bestimmen Sie die einzelnen Teilstrecken.

429. Ein Kaffeehändler stellt Kaffeemischungen verschiedener Preisklassen her. Von einer
■ Bohnensorte A würden 500 g im Verkauf € 8.–, Sorte B € 10.–, Sorte C € 12.– und Sorte D € 15.– kosten.

a) Eine Mischung von 500 g soll Bohnen der Sorten A, B, C enthalten und € 9.– kosten.
(1) Stellen Sie für die Anteile a, b, c der entsprechenden Sorten ein Gleichungssystem auf, und geben Sie alle Lösungen an ($a, b, c \in]0 ; 1[$).
(2) Wie gross muss der Anteil der Sorte A mindestens sein?
(3) Wie gross kann der Anteil der Sorte C höchstens sein?

b) Eine Mischung von 500 g aus den Sorten B, C und D soll € 11.– kosten.
Bestimmen Sie den minimalen und maximalen Anteil für jede der drei Sorten.

430.
■

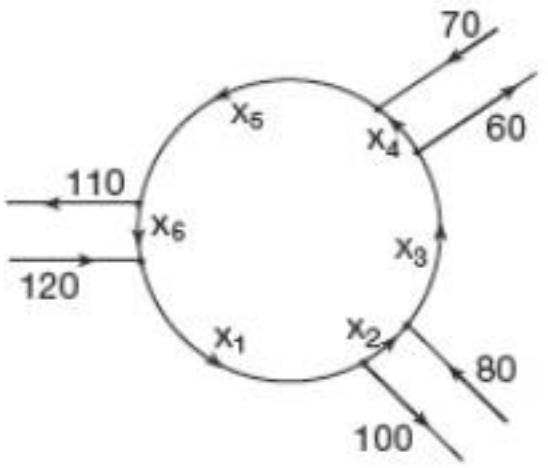


Die Figur stellt ein Netz von Einbahnstrassen dar. Die Pfeile bezeichnen die erlaubten Fahrtrichtungen. Die angegebenen Zahlen und die Grössen $x_1, \ldots, x_4$ bezeichnen den Verkehrsfluss in Anzahl Autos pro Stunde.

a) Bestimmen Sie die Verkehrsflüsse $x_1, \ldots, x_4$.

b) Wegen Bauarbeiten wird der Verkehrsfluss von C nach D auf maximal 100 Autos/h beschränkt. Wie gross sind dann die übrigen Verkehrsflüsse maximal?

431.
■

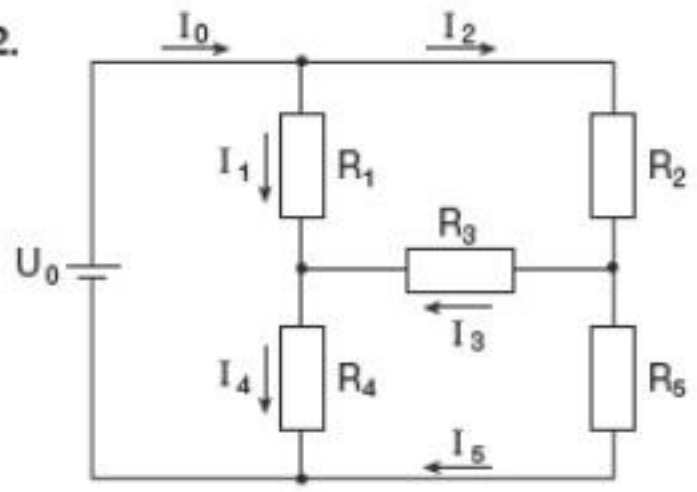


An einem Kreisverkehr enden die Strassen mit den angegebenen Verkehrsflüssen, die in der Hauptverkehrszeit festgestellt wurden.

a) Bestimmen Sie die Verkehrsflüsse $x_1, \ldots, x_6$.

b) Welcher Verkehrsfluss ist am kleinsten, welcher am grössten?

432.
■



Berechnen Sie die Stromstärken $I_0, I_1, \ldots, I_5$ für folgende Werte:

$U_0 = 30$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$,
$R_3 = 16\ \Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$, $R_5 = 24\ \Omega$

Die Rechenmaschine bringt Wirkungen zustande, die dem Denken näher kommen als alles, was Tiere tun; aber sie vollbringt nichts, was zur Behauptung veranlassen könnte, sie habe Willenskraft wie Tiere.

Blaise Pascal, 1623–1662, frz. Philosoph und Mathematiker

433. Der Graph einer Polynomfunktion n-ten Grades verläuft durch die Punkte
■ $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a) $P_0(-1/1)$, $P_1(0/-3)$, $P_2(2/5)$; Polynom 2. Grades

b) $P_0(-3/4)$, $P_1(1/10)$, $P_2(2/8)$; Polynom 2. Grades

c) $P_0(3/5)$, $P_1(1/1)$, $P_2(-2/1)$, $P_3(-4/-8)$; Polynom 3. Grades

d) $P_0(5/5)$, $P_1(3/1)$, $P_2(1/3)$, $P_3(-1/1)$, $P_4(-3/5)$; Polynom 4. Grades

2.5.3 Nicht lineare Gleichungssysteme

Aufgaben, die sich für eine grafische Lösungsmethode gut eignen, findet man unter «3.4.9 Grafisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme».

Genauigkeit der Lösungen: Irrationale Lösungen sollen als Näherungswerte mit 3 geltenden Ziffern angegeben werden.

434. a) $\left|\begin{array}{r} a^2+b^2=20 \\ a+b=3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} m^2+mn=2 \\ n-3m=7 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} 2u+3v=18 \\ u\cdot v=10 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{r} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2 \\ x-y=4 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{r} s^2-st-t^2=19 \\ s-t=7 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{r} x+y=60 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6 \end{array}\right|$

g) $\left|\begin{array}{r} 5a^2-3ab+b^2=10-2a+b \\ 2a-b=1 \end{array}\right|$ h) $\left|\begin{array}{r} x^2-x-2=y \\ x\cdot y=0 \end{array}\right|$

435. a) $\left|\begin{array}{r} \sqrt{x+5}+\sqrt{5-y}=6 \\ x+y=8 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{2}{\sqrt{v}}=1 \\ \frac{5}{\sqrt{u}}+\frac{8}{\sqrt{v}}=12 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{r} \sqrt{a-5}+\sqrt{b+2}=5 \\ \sqrt{a+b}=4 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{l} \frac{8}{\sqrt{m-2}}-\frac{3}{\sqrt{n+2}}=5 \\ \frac{4}{\sqrt{m-2}}+\frac{9}{\sqrt{n+2}}=4 \end{array}\right|$

436. a) $\left|\begin{array}{rcr} a^2-3bc+6c-a & = & 0 \\ a+b & = & 2 \\ a+c & = & 4 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} a^2+b^2+c^2=105 \\ a:b:c=1:3:5 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{rcr} xy+xz+yz & = & -11 \\ 5x+3y+z & = & 6 \\ 2x+6y+3z & = & 1 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{rcr} x^2+y^2+z^2+x+y+z & = & 26 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 29 \\ x+2y-z & = & 4 \end{array}\right|$

437. a) $\left|\begin{array}{l} ab + a = 24 \\ ab + b = 28 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2m^2 - 3n^2 = 6 \\ 3m^2 - 2n^2 = 19 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \\ 2x^2 - 5xy - 7x + 8y = -10 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{l} u^2 + v^2 + u + v = 18 \\ u^2 - v^2 + u - v = 6 \end{array}\right|$

438. a) $\left|\begin{array}{l} 2x^2 + xy - 3y^2 = x + 12 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} 6x^2 - 2xy + y^2 = 3y - x + 8 \\ 4x^2 - y^2 = 0 \end{array}\right|$

439. a) $\left|\begin{array}{l} s^2 - st = 20 \\ t^2 - st = -5 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} \frac{2}{a^2} + \frac{5}{b^2} = 1 \\ \frac{3}{a} + \frac{5}{b} = 1 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 28 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{r} (m+1)(n+3) = 2 \\ (m-1)(n-2) = -4 \end{array}\right|$

440. Berechnen Sie den Quotienten $\frac{x}{y}$.

a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4$ b) $8x^2 - 2xy = 0$ c) $2x^2 - xy - y^2 = 0$

d) $3x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ e) $\frac{x}{y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

441. a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \\ x^2 - y^2 = 30 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} x^2 - xy - y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{array}\right|$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst aus der ersten Gleichung den Quotienten $\frac{x}{y}$.
(siehe vorhergehende Aufgabe)

442. Lösen Sie das System ohne Fallunterscheidung.

a) $\left|\begin{array}{l} x \cdot y = a \\ x - y = b \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} a(x - y) = xy \\ b(x + y) = xy \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x(x - y) = a \\ y(y - x) = b \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{r} x + y = m \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m \end{array}\right|$

443. Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?

a) $\left| \begin{array}{r} x + y = a \\ xy = a \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 4x + 3 \\ ax - y = -2 \end{array} \right|$

Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten

444. Bestimmen Sie alle Lösungen für $G = \mathbb{R}^2$:

a) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$

b) $\frac{1}{x} + y = \frac{1}{y} + x$

445. Welche Zahlentrippel (a / b / c) mit a, b, c $\in \mathbb{N}$ erfüllen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$?

Textaufgaben

446. Zwei Kapitalien, die sich um € 2800.– unterscheiden, geben bei einem um $\frac{1}{4}$% unterschiedlichen Zinsfuss je € 1470.– Jahreszins.
Berechnen Sie die beiden Kapitalien.

447. Um von einer Aktion zu profitieren, bestellt ein Händler Käse im Betrag von € 6300.– und bezahlt auch gleichzeitig. Weil das Kilogramm schliesslich € 0.70 weniger kostet, bekommt er als Ausgleich 15 kg mehr.
Zu welchem Preis pro Kilogramm erhält er schlussendlich die Ware?

448. Ein Kollektivbillet für 28 Schüler kostet x €. Verteilt auf alle 28 hätte jeder y € zu bezahlen. Damit eine Anzahl Schüler gratis fahren kann, bezahlen die restlichen Schüler € 1.– mehr. Würde man drei weitere Schüler zusätzlich gratis fahren lassen, müssten die zahlenden Schüler € 2.– mehr bezahlen.
Wie gross sind die Beträge x und y?

449. Verlängert man in einem Rechteck die kleinere Seite um 3 cm und verkürzt man die grössere um 2 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 22 cm^2 grösser ist als der Inhalt des Rechtecks.
Wie gross sind die Seiten des Rechtecks?

450. Berechnen Sie die Seiten eines Rechtecks mit einer Diagonale von 24.3 cm Länge und einem Flächeninhalt von 282.75 cm^2.

451. An einem Ausflug nehmen total 200 Personen (Teilnehmer und Begleiter) teil. Jeder Teilnehmer zahlt € 10.– mehr als ein Begleiter. Die Teilnehmer zahlen total € 5760.– und die Begleiter zusammen € 160.–.
Wie viele Begleiter nehmen teil?

452. Für ein Fest werden Paar- und Einzelkarten verkauft, wobei zwei Einzelkarten zusammen € 5.– mehr kosten als eine Paarkarte. Aus total 60 verkauften Karten werden € 1890.– für Paarkarten und € 450.– für Einzelkarten eingenommen.
Wie viele Einzelkarten werden verkauft?

453. Ein Bürofachgeschäft kauft für € 891.– Kugelschreiber ein. Diese werden mit einem Gewinn von € 1.05 pro Stück verkauft. Nachdem wieder € 891.– eingegangen sind, bleiben noch 126 Kugelschreiber übrig.
Wie viele Kugelschreiber waren es am Anfang?

454. Eine quadratische Säule hat eine Oberfläche von 1897 cm^2 und eine Körperdiagonale von 32.3 cm.
Berechnen Sie die Kantenlängen.

455. Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Inkreisradius von 7 cm und eine Hypotenuse von 42 cm.
Berechnen Sie die Katheten.

456. In einem zylindrischen Gefäss hat ein sehr dünner Stab von 19 dm Länge gerade noch Platz. Zudem beträgt die Wandinnenfläche (Mantel) 536 dm^2.
Berechnen Sie die Höhe des Gefässes.

2.6 Vermischte Textaufgaben

Vorbemerkung: Es sind bewusst auch Aufgaben mit überflüssigen Angaben eingestreut.

> Bildung ist die Fähigkeit, Wesentliches von Unwesentlichem zu unterscheiden und jenes ernst zu nehmen.
>
> Paul de Lagarde, 1827 – 1891, Sprachforscher und Politiker

457. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zu ihrem Produkt wie 1 : 10. Die Differenz ihrer Kehrwerte beträgt 0.05. Wie heissen die beiden Zahlen?

458. Von vier aufeinander folgenden ungeraden Zahlen ist die dritte Potenz der kleinsten Zahl um 11 416 kleiner als das Produkt der drei übrigen Zahlen.
Bestimmen Sie die vier Zahlen.

459. In einem Gemeindeparlament sitzen total 63 Mitglieder aus den Parteien SP, CVP und FDP. Nach einem Jahr wechseln zwei CVP-Leute zur FDP. Dadurch hat die CVP nur noch 8 Mitglieder mehr im Parlament als die FDP.
Bei der nächsten Wahl verliert die FDP 7 Sitze, davon zwei an die SP. Andere bis jetzt nicht im Parlament vertretene Parteien bleiben auch weiterhin ohne Sitz. Dadurch hat die CVP genau dreimal soviele Vertreter wie die FDP.
Wie viele Mitglieder jeder Partei waren ursprünglich im Gemeindeparlament?

460. Zwei natürliche Zahlen m und n sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:
- n ist kleiner als m
- Der Ausdruck $289 - n^2 + 2mn - m^2$ ist gleich Null.
- Die Summe der beiden Zahlen ist 23.

Um welche Zahlen m und n handelt es sich?

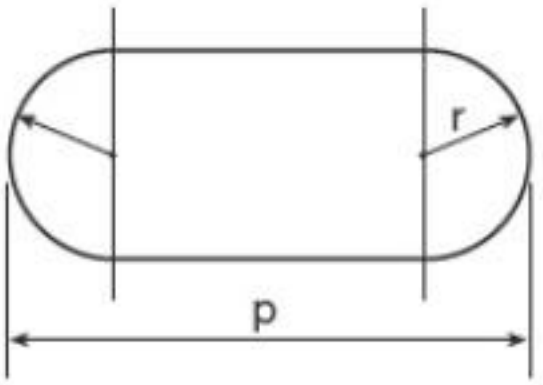
461. Die folgenden Zahlenwerte bedeuten jeweils die Summe zweier Seitenlängen eines Dreiecks:
64 cm ; 54.9 cm und 47.5 cm
Berechnen Sie die Länge jeder Seite.

462. Ein 2.50 m hoher Behälter wird bei geschlossenem Abfluss durch eine Leitung in 4 Stunden gefüllt. Der Abfluss allein leert den vollen Behälter in 6 Stunden.
Nach welcher Zeit ist der Behälter total gefüllt, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind und der Behälter schon zu einem Drittel gefüllt ist?

463. In einer 12 m hohen Halle mit 750 m^2 Bodenfläche gibt es 40 W-, 60 W- und 100 W-Lampen, die alle immer gleichzeitig brennen. Würden die 60 W- durch 40 W- und die 100 W- durch 75 W-Lampen ersetzt, so nähme die Gesamtleistung um 1020 W ab. Würden jedoch die 60 W- durch die 40 W-Lampen ersetzt, wäre die Energieeinsparung 2.4-mal so gross, wie wenn die 100 W- durch 75 W-Lampen ersetzt würden. Würden andererseits alle 60 W- und 100 W- durch 75 W-Lampen ersetzt, so nähme der Energieverbrauch um 6 % zu.
Wie viele Lampen gibt es von jeder Sorte in dieser Halle?

464. In einem Betrieb werden pro Stunde n Glühlampen hergestellt. Dabei sind 5 % der hergestellten Glühlampen unbrauchbar. Um den dabei entstehenden Verlust gerade wettzumachen, werden die fehlerlosen mit einem Preisaufschlag von € 0.03 verkauft. Wie hoch sind die Anfertigungskosten pro hergestellte Glühlampe?

465.



Ein Körper besteht aus einem geraden Zylinder mit zwei aufgesetzten Halbkugeln (siehe Figur).

Berechnen Sie den Radius r aus der Körperoberfläche S und der Gesamtlänge p. Was kann aus dem Resultat gefolgert werden?

466. Jemand bestellt mit Vorauszahlung für € 3045.– Rohmaterial. Der Lieferant schickte jedoch 7 kg weniger, weil der Kilopreis um € 0.50 gestiegen ist.
Bestimmen Sie den neuen Kilopreis und die Menge der Lieferung.

467. Ein Rechteck von 108.0 m Länge und 86.4 m Breite wird in lauter gleiche Quadrate aufgeteilt. Die Summe der Umfänge all dieser Quadrate ist 40 mal so gross wie der Umfang des Rechtecks. Wie lang ist eine Seite eines solchen Quadrates?

468. Von einer Alkohol-Wasser-Lösung werden 37.2 % durch eine 92.5 %ige Lösung ersetzt. Die neue Lösung ist 56.4 %ig. Wieviel %ig war die Ausgangslösung?

469. Von einem Quader ist Folgendes bekannt:
Die Länge der Diagonale der beiden Begrenzungsflächen mit dem kleinsten Flächeninhalt beträgt 6 cm, die Länge der Diagonale der Begrenzungsflächen mit dem grössten Flächeninhalt beträgt 7 cm und die Länge der Raumdiagonale ist 8 cm.
Berechnen Sie das Volumen des Quaders.

470. Mit einer Zahl z wird der folgende Prozess durchgeführt:
«Die Zahl mit 2 multiplizieren, dann 1 subtrahieren»
Darauf wird dieser Prozess noch zweimal mit dem Resultat des direkt vorangehenden Prozesses wiederholt, das Endresultat sei u.
Wendet man auf die gleiche Ausgangszahl z den Prozess:
«Zuerst die Zahl durch 2 dividieren, dann 1 addieren»
an und wiederholt ihn zweimal in der gleichen Art wie oben, so erhält man das gleiche Resultat u. Wie lautet die Zahl z?

Zur Abwechslung und Unterhaltung lösten wir mathematische Rätsel, welche Alkuin für den grossen Karl gefertigt hatte. Viele vermochten nicht allen diesen Rechnungen zu folgen, und bevor wir zur Geometrie übergingen, traten diejenigen aus, welche sich fortan den Studien der Medizin, Rechtswissenschaft und den Künsten der Malerei und der Bildhauerei widmen sollten.

Strabo, Mönch der Klosterschule Reichenau, aus seinem Tagebuch

471. Ein Geschäftsmann hat sein Vermögen von € 94 000.– in zwei Teilen an Zins gelegt; den ersten zu 5.5 % und den zweiten zu 6.25 %. Beide Teile bringen den gleichen Jahreszins ein. Zu welchem Zinsfuss müsste die Gesamtsumme von € 94 000.– angelegt werden, um den gleichen Ertrag zu erzielen?

472. Bei der Herstellung eines Artikels entstehen, unabhängig von der Stückzahl, feste Kosten von € 2250.–, die übrigen Kosten sind proportional zur Stückzahl.
Werden 150 Stück dieses Artikels hergestellt, so machen die festen Kosten 60 % der Gesamtkosten aus.
Wie viele Stücke muss man produzieren, damit die festen Kosten nur noch 30 % der Gesamtkosten ausmachen?

473. Ein Angestellter verdiente vor 30 Jahren pro Stunde € 20.–. Für Überstunden erhielt er eine Zulage. So bekam er in einer Woche mit 48 Arbeitsstunden € 980.– Lohn.
In einer anderen Woche arbeitete er 50 Stunden und erhielt € 1030.– Lohn.
Berechnen Sie die Stundenzulage für Überstunden sowie die normale wöchentliche Arbeitszeit.

474. Farben der Sorte A und der Sorte B mit Kilopreisen von € 12.– bzw. € 10.– werden gemischt. Ein Kilogramm Mischung kommt nun auf € 10.90 zu stehen.
Nähme man bei gleicher Gesamtmenge der Mischung von der Sorte A 3 kg weniger, so würde das Kilogramm nur noch € 10.40 kosten.
Wie viele kg nahm man anfänglich von jeder Sorte?

475. Bewegt sich ein Punkt P auf einem Halbkreis mit Durchmesser AB, so wird die Strecke AP verglichen mit der ursprünglichen Länge um 3 cm verkürzt und die Strecke BP
um 2 cm verlängert. Bewegt sich der Punkt P hingegen vom gleichen Ausgangspunkt aus auf dem Halbkreis in die andere Richtung, so wird AP um 4 cm länger und BP um 3.6 cm kürzer.
Bestimmen Sie die ursprüngliche Länge der Strecke AP.

476. Eine Maschine vom Typ A, zwei vom Typ B und zwei vom Typ C benötigen für die Produktion einer gewissen Menge eines Artikels 5 Tage. Ersetzt man die Maschine A durch eine Maschine C, so werden 6 Tage benötigt. A allein braucht 20 Tage.
Wie viele Tage würde eine Maschine vom Typ C allein brauchen?

477. Auf der linken Schale einer Waage liegen 189 Kugeln gleichen Gewichts von 24 g, auf der rechten Schale eine unbekannte Anzahl x gleicher Würfel. Die Waage ist im Gleichgewicht. Nimmt man nun aus der linken Schale 21 Kugeln weg und aus der rechten Schale 18 Würfel, von denen man die Hälfte auf die linke Schale legt, so herrscht wieder Gleichgewicht.
Bestimmen Sie die ursprüngliche Anzahl x der Würfel in der rechten Schale.

478. In einem Rechteck mit dem Seitenverhältnis 2 : 3 wird eine Seite um 8 % verkürzt. Um wie viel Prozent muss man die andere Seite verlängern, damit der Flächeninhalt um 23 % zunimmt?

479. Von einem ungleichseitigen Dreieck kennt man alle drei Seiten: a, b und c.
In welchen Abständen von den Ecken berührt der Inkreis des Dreiecks die Seiten?

480. a) Welches reguläre Vieleck hat 6-mal so viele Diagonalen wie Seiten?
b) Welches reguläre Vieleck hat 117 Seiten weniger als Diagonalen?

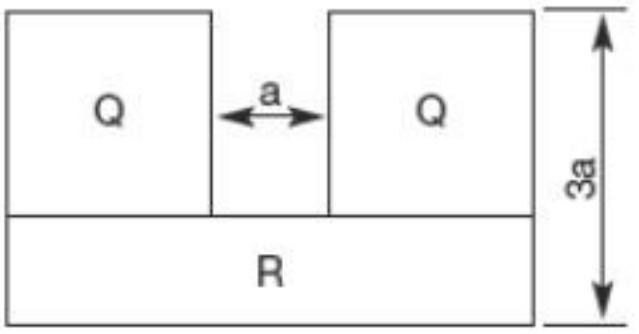
481. Die Summe, das Produkt und der Quotient $\left(\frac{a}{b}\right)$ von zwei Zahlen a und b sind gleich.

Die Kunst des Fortschritts besteht darin, inmitten des Wechsels Ordnung zu wahren, inmitten der Ordnung den Wechsel aufrecht zu erhalten.

Alfred North Whitehead, 1861–1947, Philosoph und Mathematiker

482. In einer Sägerei wurde festgestellt, dass 3 m^3 Eichenholz die gleiche Masse haben wie 5 m^3 Lärchenholz. Ausserdem haben 5 dm^3 Eichenholz und 25 dm^3 Lärchenholz zusammen die Masse 17 kg. Berechnen Sie die Dichte von Eichenholz.

483.



Die beiden Quadrate Q haben zusammen 50 % mehr Flächeninhalt als das Rechteck R.

Berechnen Sie die Quadratseite aus a.

484. Eine Last bewirkt in einem 1.5 m langen Stahlstab mit kreisförmigem Querschnitt eine Zugspannung von 1500 N/cm^2. Wird der Durchmesser des Stabes um 0.5 cm vergrössert, so sinkt die Spannung auf 940 N/cm^2. (Zugspannung = Last/Querschnitt) Wie gross sind Last und ursprünglicher Durchmesser des Stabes?

485. Die Masse einer Hohlkugel aus Messing (8.4 kg/dm^3) beträgt bei 2 cm Wandstärke 7.98 kg. Bestimmen Sie den äusseren Durchmesser der Kugel.

486. Zwei Glasgefässe enthalten zusammen einen Liter zweier verschiedener Flüssigkeiten. Zum Mischen verdoppelt der Laborant die Menge im zweiten Gefäss durch Entnahme aus dem ersten, dann verdreifacht er die Menge des ersten durch Entnahme aus dem zweiten Gefäss. Nachher verdreifacht er die Menge des zweiten durch Entnahme aus dem ersten Gefäss; dann verdoppelt er die Menge des ersten durch Entnahme aus dem zweiten Gefäss. Jetzt enthalten beide Gefässe gleichviel.
Welche Menge enthielten sie zuerst?

487. Fritz hat ein Sparheft. Für das Jahr 2004 erhöht sich das Sparkapital um den Zins von z Euro. Am 31.12.2004 zahlte er noch 17 Drittel mal z Euro ein. Im Jahre 2005 zahlte er weder Geld ein, noch hob er welches ab. Am 1.1.2006 betrug sein Guthaben das 28-fache von z. Zu welchem Zinssatz war das Geld auf der Bank angelegt?

Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Raumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt, also einen sehr realen Stoff. Dass dieser Stoff in einer höchst abstrakten Form erscheint, kann seinen Ursprung aus der Aussenwelt nur oberflächlich verdecken.

Friedrich Engels, 1820–1895, Sozialökonom und Politiker

488. Herr Walther hat zwei Kapitalien zum gleichen Zinssatz angelegt, die zusammen jährlich € 12 000.– Zins abwerfen. Wenn er beide Kapitalien zusammenlegt, erhält er einen um 0.5 % höheren Zinssatz. Herr Walther könnte deshalb sogar € 10 000.– weniger anlegen, um den gleichen Jahreszins zu erhalten.
Welchen Zinssatz gewährt die Bank nach dem Zusammenlegen der Kapitalien?

489. Zwei Baufirmen A und B brauchen zusammen bei voller Belegschaft für die Erstellung eines Bauwerks $3\frac{1}{3}$ Monate. Von der geplanten Belegschaft stehen im ersten Monat 80 % der Firma A und 100 % der Firma B zur Verfügung, weshalb in dieser Zeit nur $\frac{1}{4}$ der Arbeit ausgeführt werden kann. Anschliessend arbeiten die beiden Firmen mit voller Belegschaft bis zur Fertigstellung des Baus.
Wie lange würde die Firma B alleine brauchen, um den Auftrag auszuführen?

Seit meinem zwanzigsten Jahre ist es mit meiner Intelligenz konstant bergab gegangen. Als ich jung war, liebte ich die Mathematik. Als die Mathematik mir zu schwierig wurde, beschäftigte ich mich mit Philosophie. Nachdem mir auch die Philosophie zu kompliziert wurde, begann ich mit Politik.

Bertrand Russell, 1872 – 1970, Mathematiker und Philosoph

490. Ein Gefäss enthält Flüssigkeit, und sein Gewicht samt Flüssigkeit ist G. Giesst man den n-ten Teil der Flüssigkeit aus, dann reduziert sich das Gesamtgewicht um 10 %. Berechnen Sie aus G und n das Gewicht des leeren Gefässes.

491. Ein Behälter enthält Wasser mit einem Frostschutzmittel.
Eine erste Kontrolle ergibt, dass der Behälter gefüllt ist und die Flüssigkeit p % Frostschutzmittel enthält. Nach einiger Zeit stellt man fest, dass aus Versehen 20 % des Behälterinhaltes ausgeflossen sind. Der Behälter soll nun wieder gefüllt werden, wobei gleichzeitig der Gehalt an Frostschutzmittel auf 2p % erhöht werden soll.
Welchen Gehalt an Frostschutzmittel muss die Flüssigkeit haben, mit der der Behälter wieder aufgefüllt wird?

492. Eine Vollkugel mit der Dichte ρ_1 ist gleich gross wie eine Hohlkugel (Radien R und r; $r < R$) mit der Dichte ρ_2. Beide tauchen im Wasser genau gleich weit ein.
Bestimmen Sie r ausgedrückt durch R, ρ_1 und ρ_2.

493. Ein Sparer legt ein Kapital K an. Eine erste Bank bietet ihm einen Jahreszins bei p % und eine Zusatzprämie von € 35.–, falls während eines Jahres mindestens € 2000.– auf der Bank bleiben.
Eine zweite Bank bietet einen höheren Zinsfuss, jedoch keine Prämie. Legt der Sparer € 2000.– auf der ersten Bank an und den Rest auf der zweiten, so gewinnt er pro Jahr € 10.– mehr, als wenn er das ganze Kapital auf der zweiten Bank anlegen würde.
Um wie viel höher ist der von der zweiten Bank offerierte Zinsfuss?

494. Berechnen Sie eine Zahl x mit folgenden Eigenschaften:
- Für jede beliebige Zahl a gilt: $ax = \frac{a}{x}$
- Multipliziert man x mit sich selbst, so erhält man (–x).

495. Zur Herstellung eines Massenartikels stehen drei Maschinen zur Verfügung. Arbeitet die neueste allein, so kann sie eine gewisse Bestellung in einem Arbeitstag ausführen, die zweite allein braucht dazu drei Tage, die älteste allein fünf Tage.
Nachdem diese letztere während zwei Tagen allein in Betrieb war, werden alle drei Maschinen eingesetzt.
Welche Zeit wird jetzt noch benötigt, um die Bestellung auszuführen?

496. a) Um alle vorhandenen Punkte einer Ebene geradlinig zu verbinden, braucht es 136 Strecken. Wie viele Punkte sind es mindestens?

b) Wie viele Geraden müssen es mindestens sein, wenn 946 Schnittpunkte entstehen?

497. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks misst 12 cm. Die Höhe, die auf der Symmetrieachse liegt, beträgt 4 cm. Berechnen Sie die Längen der Dreiecksseiten.

498. Bei einer quadratischen Säule mit einer Oberfläche von 448.9 cm^2 beträgt die Summe aller Kantenlängen 107.2 cm. Berechnen Sie die einzelnen Kantenlängen.

499. Die Masse eines rechteckigen Bildes haben folgende Eigenschaft:
Die Breite verhält sich zur Länge wie diese zur Diagonale.
Berechnen Sie das Verhältnis von Breite zu Länge. (Lösung exakt angeben)

Ich weiss, dass ich an der Geometrie das Glück zuerst kennengelernt habe.

Rudolf Steiner, 1861–1925, Begründer der Anthroposophie

500. Das Produkt von zwei Zahlen ist 10, die Summe ihrer Kehrwerte beträgt 1.
Berechnen Sie die beiden Zahlen.

501. Die Summe zweier positiver Zahlen ist einerseits gleich ihrem Produkt und andererseits gleich der Differenz ihrer Quadrate.
Berechnen Sie die beiden Zahlen.

502. Vater, Mutter und neun Kinder bezahlten für die Billette einer Reise im Ganzen € 104.–. Ein Jahr später zahlt die Familie für die gleiche Reise € 117.–, weil jetzt eines der Kinder eine ganze statt einer halben und ein anderes eine halbe statt gar keiner Fahrkarte haben muss.
Wie viele Kinder müssen bei der zweiten Reise eine ganze und wie viele eine halbe Fahrkarte lösen, wenn ein einziges noch ohne Karte fahren darf?

503. Aus Stoffbahnen A von 12 m und B von 18.5 m Länge sollen Stücke von 3.5 m und 5 m Länge ohne Verlust geschnitten werden. Welche Anzahl der Stoffbahnen A und B müssen bestellt werden, wenn 177 3.5-metrige und 266 5-metrige Stücke weiterverarbeitet werden müssen?

504. An einem Schulausflug nehmen 100 Personen teil. Die Gesamtkosten werden so aufgeteilt, dass jeder Schüler € 10.– weniger zu bezahlen hat als ein Lehrer.
Wie viele Schüler nehmen am Ausflug teil, wenn sie zusammen € 2880.– und die Lehrer zusammen € 160.– zu bezahlen haben?

505. Dem Organisator eines Hallenfussballturniers steht nur eine Halle zur Verfügung. Aufgrund der Anmeldungen errechnet er sich eine Gesamtspielzeit von 8 Stunden und 48 Minuten, wenn er jede Mannschaft gegen jede antreten lässt. Ein Spiel dauert 8 Minuten.
Wie viele Mannschaften haben sich für das Turnier angemeldet?

506. Eine Isolierplatte wiegt 11.3 N und hat ein Volumen von 1130 cm^3. Sie wurde aus Kork mit dem spezifischen Gewicht 2.4 N/dm^3 und Asbest vom spezifischen Gewicht 25 N/dm^3 gefertigt.
Berechnen Sie die Gewichte der zwei verwendeten Materialien.

507. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 10. Ihr geometrisches Mittel ist um 1 kleiner als ihr arithmetisches Mittel. Berechnen Sie die beiden Zahlen auf 2 Dezimalen genau.

508. Ein Bild hat die Länge a und die Breite b. Es soll mit einem Rahmen versehen werden, dessen Flächeninhalt genau so gross wie derjenige des Bildes ist.
Bestimmen Sie die Breite des Rahmens.

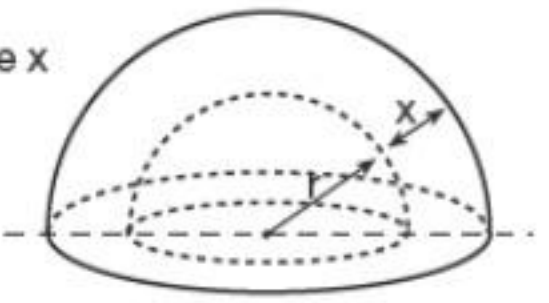
509. Vergrössert man den Umfang einer Spule um 2 cm, so braucht es unter der Voraussetzung, dass der Faden immer direkt auf der Spule liegt, für eine Fadenlänge von 1.54 m 16 Umdrehungen weniger. Berechnen Sie den ursprünglichen Spulenumfang.

510. Die Papierformate A0, A1, A2, A3, A4 ... sind ausgehend vom Format A0 folgendermassen definiert:
- A0 ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $1m^2$
- Durch wiederholtes Falten in Querrichtung soll immer das nächstkleinere Format mit genau demselben Seitenverhältnis entstehen.

Berechnen Sie die Länge und Breite des Formates A1 exakt.

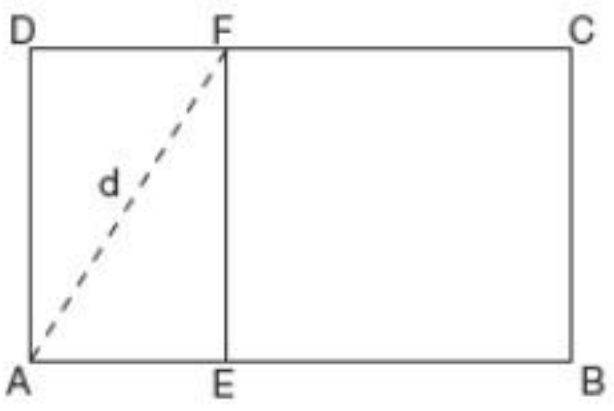
511. Der Radius eines Kreises wird um p % vergrössert.
Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Kreisfläche.
(Im Resultat muss das %-Zeichen stehen.)

512. Eine Hohlkugel mit dem Innenradius r und der Wanddicke x wird halbiert.
Berechnen Sie x, wenn eine Hohlkugelhälfte die Oberfläche S aufweist.



513. Das um a^2 verminderte Quadrat von z übertrifft das Produkt $a \cdot b$ um soviel, wie $b \cdot z$ kleiner als $(-2ab)$ ist. Berechnen Sie z.

514.

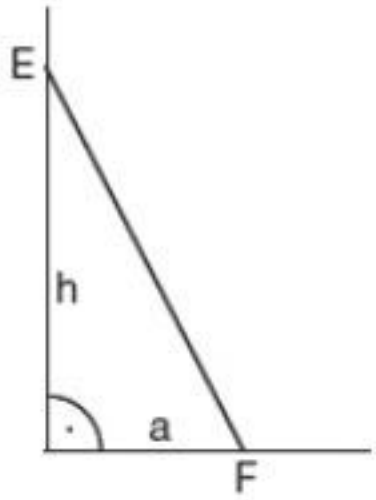


In der Figur verhalten sich die Seiten des Rechtecks AEFD wie diejenigen des Rechtecks ABCD; ferner ist d = EB.

Berechnen Sie das Verhältnis von Länge und Breite des Rechtecks ABCD.

515. Ein Rechteck mit der Länge a und der Breite 0.4a wird in lauter gleiche Quadrate aufgeteilt. Die Summe der Umfänge all dieser Quadrate ist 20-mal so gross wie der Umfang des Rechtecks.
Berechnen Sie die Anzahl Quadrate.

516. An eine Wand ist eine Leiter angelehnt. Das Leiterende E befindet sich h Meter über dem Boden, während sich der Fusspunkt F horizontal um a Meter mit $a < h$ von der Wand entfernt befindet.
Der Fuss F wird nun um eine Strecke $x > 0$ von der Wand weggezogen, sodass sich auch E um dieselbe Strecke x nach unten bewegt.
Wie gross ist x?



517. Die Summe dreier Seiten in einem Viereck ergeben jeweils

a) 23.4 cm, 24.5 cm, 31.4 cm und 28.7 cm.

b) u, 3u, v und 2v

Bestimmen Sie die Vierecksseiten.

518. Ein Ausgleichsbecken hat zwei Zuleitungen A und B und einen Abfluss C. Wird das Becken bei geschlossenem Abfluss C durch B alleine gefüllt, dauert es 9 Stunden länger als wenn es durch A alleine gefüllt wird. Beide zusammen füllen das Becken in 20 Stunden.

a) Welche Zeit benötigt die Zuleitung A alleine für das Füllen des Beckens?

Lässt man hingegen den Abfluss C offen, so erhöht sich die Füllzeit von 20 Stunden auf 25 Stunden.

b) Wie lange dauert eine Entleerung des Beckens bei geschlossenen Zuleitungen?

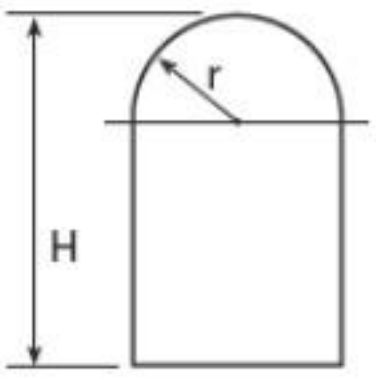
519. Eine Strecke der Länge s wird durch einen Punkt in zwei Abschnitte geteilt. Die Länge des kleineren Abschnittes verhält sich zur Länge des grösseren wie die Länge des grösseren Abschnittes zur Länge der ganzen Strecke (Goldener Schnitt).
Berechnen Sie die Längen der beiden Abschnitte aus der Streckenlänge s.

Natura è scritta in lingua mathematica – Ich glaube, das Buch der Wissenschaft ist das, was uns beständig vor Augen steht, das Universum. Aber da es mit anderen Buchstaben als denen unseres Alphabetes geschrieben ist, kann es nicht von allen gelesen werden; es sind die Buchstaben eines solchen Buches: Dreiecke, Vierecke, Kreise, Kugeln, Kegel, Pyramiden und andere mathematische Figuren, die für diese Lektüre unersetzlich sind.

Johannes Kepler, 1571–1630, deutscher Astronom

520. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein Rechteck mit dem Umfang U einzubeschreiben. Berechnen Sie die Breite des Rechtecks aus r und U.

521.



Ein Körper besteht aus einem geraden Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Figur).

Berechnen Sie aus der Oberfläche S und der Höhe H den Radius r.

522. Berechnen Sie den Radius r eines Kreissektors mit Flächeninhalt A und Umfang U.

523. Ein Gefäss wird durch zwei Zuleitungen gefüllt, wenn die erste 4 Minuten und die zweite 9 Minuten geöffnet sind. Ist hingegen die erste 8 Minuten und die zweite 5 Minuten offen, so laufen 20 % des Gefässinhaltes über.
In wie vielen Minuten wird das Gefäss gefüllt, wenn beide Zuleitungen gleichzeitig offen sind?

524. Eine Platte mit den Abmessungen 20 dm · 20 dm · 5 dm besteht aus einer Buchenholzschicht (0.7 kg/dm^3) und einer Metallschicht. Legt man die Platte ins Wasser, sinkt sie 42.5 cm ein. Würde man bei gleichem Plattenvolumen den Volumenanteil des Metalls um 150 dm^3 erhöhen, so wäre die Platte im Wasser im Schwebezustand.
Bestimmen Sie das Volumen und die Dichte des Metalls.
Um welches Metall könnte es sich handeln?

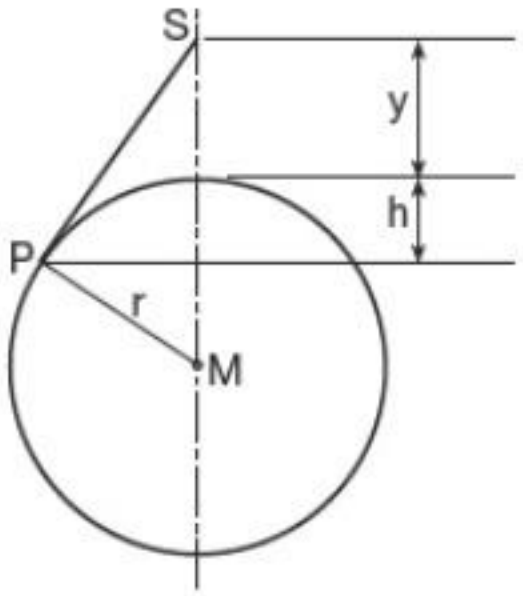
525. Anfänglich sind in einem Becken A 2m^3 Wasser, in einem Becken B 6 m^3. Die Zuleitung von A leistet 10 m^3 pro Stunde, diejenige von B nur halb so viel.
Für wie lange muss die Zuleitung von A geöffnet werden, um im Becken A die n-fache Wassermenge des Beckens B zu erhalten, wenn nach 2 Stunden die Zuleitung von B ebenfalls geöffnet wird?

526. Vier Kinder A, B, C und D teilen eine Anzahl Kugeln nach folgenden Regeln unter sich auf: Der Kugelvorrat wird in drei gleiche Teile zerlegt. Dabei bleibt eine Kugel übrig, sie geht an D. A erhält den einen der drei Teile, die übrigen Kugeln werden wieder zusammengelegt. Dieses Verfahren wird zweimal wiederholt, und zwar fällt B bei der ersten und C bei der zweiten Wiederholung die Rolle zu, die A bei der ersten Teilung gespielt hat. Beide Male bleibt eine Kugel für D übrig. Von den zuletzt verbleibenden Kugeln nehmen sich schliesslich A, B und C je einen Drittel. D geht dieses Mal leer aus. Jetzt hat A 12 Kugeln mehr als B. Wie viele Kugeln sind vorhanden?

527. Ein Hauseigentümer hat für drei Hypotheken zusammen jährlich Z Euro an Zins zu bezahlen. Die erste Hypothek wird zu p % verzinst; bei der zweiten ist der Zinsfuss um 0.5 % und bei der dritten um 1 % grösser als bei der ersten. Die zweite Hypothek ist halb so gross wie die erste und die dritte zwei Fünftel der zweiten.
Man berechne die erste Hypothek aus Z und p.

528. Ein Händler kauft a kg Äpfel, von denen p % verdarben. Um den Verlust gerade auszugleichen, verkaufte er die guten Früchte mit einem Preisaufschlag von e Euro pro kg. Wieviel zahlte der Händler für das kg?

529.



In welcher Mindesthöhe y über der Erdoberfläche muss sich ein Satellit befinden, damit von diesem Punkt aus eine gegebene Fläche A der Erde fotografiert werden kann?
Anleitung: Der Erdradius r ist als bekannt zu betrachten. Die Fläche A ist eine Kugelhaube der Höhe h, und es gilt: $A = 2\pi rh$

530. a) Wie viele Ecken muss ein reguläres Vieleck mit Eckwinkeln von höchstens 140° mindestens haben, wenn die Anzahl seiner Diagonalen grösser als 30 sein soll?

b) Zwei reguläre Vielecke mit den Seitenlängen 5.2 cm und 7.6 cm unterscheiden sich in ihrer Eckenzahl um 4 und in ihrer Diagonalenzahl um 42.
Bestimmen Sie die Anzahl ihrer Seiten.

531. Verdoppelt man in einem regulären Vieleck die Seitenzahl, so wächst jeder Innenwinkel um 20°.
Wie viele Seiten hat das ursprüngliche Vieleck?

Gib mir einen Punkt, wo ich hintreten kann und ich bewege die Erde.

Archimedes, 287–212 v. Chr., Mathematiker

532. Ein Händler kaufte einen Artikel zum Preis von A Euro und bot ihn mit einem Gewinn von p % seinen Kunden an. Weil der Artikel jedoch keinen Anklang fand, reduzierte er den Verkaufspreis um q %. Nachdem auch diese Massnahme nicht den erwünschten Erfolg brachte, reduziert jetzt der Händler den zuletzt gültigen Verkaufspreis nochmals um r % und zwar derart, dass der so resultierende Gewinn gleich Null wird. r ist in Abhängigkeit von A, p und q zu bestimmen.

533. Der Selbstkostenpreis eines Apparates beträgt s Euro. Der Händler muss auf den Verkaufspreis einen Rabatt von p % gewähren. Dadurch beträgt der effektive Gewinn nur noch ein Achtel des zuerst gewünschten Gewinnes.
Wie viele Prozente vom Selbstkostenpreis wollte der Händler ursprünglich gewinnen?

Die Körper wären nicht schön, wenn sie sich nicht bewegten.

Johannes Kepler, 1571–1630, deutscher Astronom

Bewegungsaufgaben

534. Zwei Fahrzeuge brechen gleichzeitig auf, das erste, um von A nach B, das zweite, um von B nach A zu fahren. Beide begegnen sich nach einer Stunde.
Das erste, das in der Stunde 5 Kilometer mehr zurücklegt als das zweite, kommt um 50 Minuten früher an als dieses.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge und die Distanz zwischen A und B.

535. Vom Punkt A zum Punkt B, deren Abstand 96 km beträgt, fliesst ein Fluss mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h.
In A und B starten gleichzeitig zwei Schiffe, die einander entgegen fahren und die sich in 72 km Entfernung von A zum ersten Mal begegnen.
Das flussabwärts fahrende Schiff kehrt in B unmittelbar nach seiner Ankunft wieder um und holt das andere Schiff in 28 km Entfernung von A ein.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Schiffe bezüglich des Wassers.

536. Mit neuem Rollmaterial kann ein Eisenbahnzug im Durchschnitt 11.2 km/h schneller fahren und spart dadurch auf einer Strecke von 196 km 51 Minuten.
Welche Zeit benötigte der Zug mit dem alten Rollmaterial für 196 km?

537. Zwei Körper bewegen sich auf einer Kreisbahn mit konstanten Geschwindigkeiten. Der erste Körper hat eine um 3 m/s höhere Geschwindigkeit als der zweite Körper. Bewegen sich beide Körper von einem Punkt aus gleichzeitig in gleicher Richtung, so überholt der eine Körper den anderen alle 270 Sekunden. Bewegen sich beide Körper von einem Punkt aus gleichzeitig in entgegengesetzte Richtung, so treffen sie sich alle 30 Sekunden.
Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich beide Körper?

538. Ein Fussgänger geht von A nach B mit 4.5 km/h. Er wird $1\frac{1}{3}$ Stunden nach seinem Aufbruch von einem Radfahrer überholt, der 40 Minuten nach dieser Begegnung in B ankommt, dort sofort wendet und in A zu derselben Zeit ankommt, in welcher der Fussgänger B erreicht.
Wie gross ist die Entfernung zwischen A und B?

539. A und B fahren in entgegengesetzten Richtungen auf einer geschlossenen, 10 km langen Rennbahn. A startet im Punkt S, B zwei Minuten später eine halbe Runde (d. h. 5 km) von S entfernt im Punkt P. Die Geschwindigkeit des Fahrzeuges A beträgt 60 km/h.
Die Geschwindigkeit des Fahrzeuges B soll so bestimmt werden, dass das zweite Kreuzen der Fahrzeuge in einem Punkt K stattfindet, welcher in Fahrtrichtung von A 250 m hinter P liegt.

540. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels bewegt sich ein Punkt A, auf dem anderen ein Punkt B. Beide starten im Scheitelpunkt und bewegen sich mit gleicher, konstanter Geschwindigkeit. Der Punkt A startet 3 Sekunden später als B.
Wie gross ist die Geschwindigkeit, wenn 9 Sekunden nach dem Start von A die Distanz zwischen A und B 60 cm beträgt?

541. Ein Mann wandert von seinem Ausgangsort A nach B. Die Strecke misst 12.0 km. 36 Minuten nach seinem Abmarsch folgt ihm ein Jogger auf der gleichen Strecke. Dieser holt den Mann ein, kehrt wieder um und erreicht seinen Ausgangsort zu gleicher Zeit, wie der Wanderer den Ort B erreicht. Die Geschwindigkeit des Joggers beträgt 6.0 km/h.
Wie gross ist die Geschwindigkeit des Wanderers?

Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.

Galileo Galilei, 1564 – 1642, Physiker und Astronom

542. Ein Fahrzeug A braucht auf einem Rundkurs bei konstanter Geschwindigkeit für eine Runde a Sekunden, ein Fahrzeug B bei konstanter Geschwindigkeit b Sekunden ($b < a$).
Bestimmen Sie die Zeit zwischen zwei Begegnungen, wenn sie
a) in entgegengesetzter Richtung b) in gleicher Richtung
fahren.

543. Ein Flugzeug durchflog eine Strecke s bei Mitwind mit der konstanten Reisegeschwindigkeit v_1. Auf dem Rückflug betrug die Durchschnittsgeschwindigkeit nur noch v_2. Das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten betrug 15:14 und die Gesamtdauer der beiden Flüge war t.
Berechnen Sie v_1 aus s und t.

544. Zwei Motorradfahrer A und B starten am gleichen Ort und fahren auf einer Rundstrecke von 1 km Länge in gleicher Richtung. A darf 8 Sekunden früher starten als B. Trotzdem überholt B 42 Sekunden nach seinem Start den Fahrer A, und nach weiteren 4 Minuten 10 Sekunden überholt er ihn zum zweiten Mal.
Mit welchen durchschnittlichen Geschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde fahren die beiden?

545. Marc und Koni trainieren mit ihren Motorrädern auf einer Rundstrecke von 24.0 km Länge. Sie fahren gleichzeitig vom Start in gleicher Richtung ab. Marc überholt Koni alle 36 Minuten. Er benötigt für eine Runde 6 Minuten weniger als Koni.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Motorradfahrer in km/h.

> Wo Messungen und Mathematik regieren, da ist der moderne Mensch geneigt, sich zu unterwerfen.
>
> Karl Jaspers, 1883–1969, deutscher Philosoph

546. Zwei Fahrzeuge bewegen sich auf der gleichen Strecke AB. Fahrzeug 1 startet in A und würde die Strecke in 52 Stunden durchmessen. Fahrzeug 2 startet $8\frac{1}{3}$ Stunden später in B und würde die Strecke AB in 41.5 Stunden zurücklegen.
Nach welcher Fahrzeit befindet sich das erste Fahrzeug noch $\frac{3}{16}$ der Gesamtstrecke von Fahrzeug 2 entfernt?

547. Zwei Fahrzeuge F_1 und F_2 bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten v_1 respektive v_2 auf einem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge s. Sie starten zur gleichen Zeit im Punkt A.
F_1 fährt von A nach B und via C nach A zurück. F_2 macht dieselbe Strecke, aber in umgekehrter Richtung. F_2 passiert C um 12 Minuten früher, den Punkt B aber um 18 Minuten später als F_1.
Nach welcher Zeit t kreuzen sich die beiden?

Ganz besonders liebe ich die Analogien als meine zuverlässigen Lehrmeister, die um alle Geheimnisse der Natur wissen.

Johannes Kepler, 1571–1630, deutscher Astronom

548. Ein Motorschiff entwickelt in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit v_m. Das Wasser, in dem es sich bewegt, hat eine zur Fahrtrichtung parallel gerichtete Geschwindigkeit v_w. Zur Berechnung der Fahrzeit t für Hin- und Rückweg (= 2s) ist eine Formel zu erstellen.

549. Zwei Autos A und B fahren aus einer Entfernung von s km mit konstanten Geschwindigkeiten einander entgegen und treffen sich nach t_1 Minuten. Startet A t_2 Minuten früher als B, so treffen sie sich t_3 Minuten nach dem Start von A.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit von B ausgedrückt durch s, t_1, t_2 und t_3.

550. Peter und Karl stehen sich an den Rändern R und Q eines Bassins direkt gegenüber. Sie springen gleichzeitig ins Wasser und schwimmen mit unterschiedlicher, aber konstanter Geschwindigkeit aufeinander zu.
Sie treffen sich ein erstes Mal a Meter vom Rand R entfernt, beide wenden am jeweils anderen Rand und schwimmen sofort zurück. Sie begegnen sich zum zweiten Male b Meter vom Rand R entfernt.
Berechnen Sie den Abstand zwischen den Rändern aus a und b.

551. Urs pedalt von Adorf nach Bewil. Die Distanz ist d. Nach der Zeit t startet Valentin in Adorf und verfolgt Urs. Sobald er Urs eingeholt hat, kehrt er um und fährt nach Adorf zurück. Er kommt genau zur gleichen Zeit an wie Urs in Bewil. Seine Geschwindigkeit ist u; jene von Valentin ist v. Berechnen Sie t aus u, v und d.

In der Tat ist Gott allein vollkommen weise, das heisst mit dem vollkommenen Wissen aller Dinge begabt, aber man kann auch Menschen als mehr oder minder weise bezeichnen, je nachdem sie von den wichtigsten Dingen mehr oder weniger Wahrheiten erkennen.

René Descartes, 1596–1650,
franz. Philosoph und Mathematiker

Ich habe den Schwur getan, in allen Dingen der Vernunft zu folgen und nicht den teilweise von meinen Vorfahren ererbten Instinkten.

Bertrand Russell, 1872–1970, Mathematiker und Philosoph

552. Eine Autokolonne hat die Länge a und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v. Ein Kurier fährt mit seinem Motorrad von der Spitze der Kolonne zum letzten Fahrzeug, kehrt von dort sofort wieder zur Spitze zurück (Wendezeit vernachlässigen), welche er nach der Zeit t wieder erreicht.
Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit des Kuriers aus a, v und t.

553. Zwei Radfahrer fahren mit konstanten Geschwindigkeiten von der Ortschaft A nach der Ortschaft B. Der eine braucht 30 Minuten mehr Zeit als der andere, um von A nach B zu gelangen. Die Geschwindigkeit des einen Fahrers ist um 2 km/h grösser als die des anderen. Würden beide um 2 km/h schneller fahren, so wäre die Zeitdifferenz nur 24 Minuten.
Geben Sie die beiden Geschwindigkeiten und die Streckenlänge an.

554. Drei Lastwagen einer Firma erreichen die Durchschnittsgeschwindigkeiten von 40 km/h, 45 km/h und 60 km/h. Das langsamste Fahrzeug fährt um 07.20 Uhr, die beiden anderen um 08.00 Uhr vom gleichen Lagerplatz weg, um in einem 30 km entfernten Ort Ware abzuholen, die auf derselben Strasse an den Abfahrtsort zurückgebracht werden muss. Die Ladezeit beträgt 10 Minuten.
Zu welcher Zeit (auf Minuten genau) befindet sich das schnellste Fahrzeug zum ersten Mal je gleich weit entfernt von den beiden anderen?

... Deshalb könne ihre Anfangsgründe (der Rechenkünste) gar nicht dunkel und schwer sein; sie sind im Gegenteil so durchsichtig, dass Kinder sie begreifen können, weil ja alles so natürlich vor sich geht. Die Regeln des Vielfachen und Teilens allerdings erfordern viel mehr Fleiss, aber ihr Sinn wird schon bald von den Aufmerksameren eingesehen werden. Übung und Anwendung erfordert diese Fertigkeit wie alle andern.

Philipp Melanchthon, 1497–1560, deutscher Humanist

2.7 Gleichungen 3. und höheren Grades, transzendente Gleichungen

Siehe auch «3. Funktionen», Kap. 3.6 bis 3.12.

Genauigkeit: Irrationale Lösungen sind als Näherungswerte mit 3 geltenden Ziffern anzugeben.

555. a) $x^3 = 60 - 2x$ b) $x^3 - 18x + 12 = 0$ c) $0.1\,(x-2)^4 = 10 - x$
■

556. a) $x^3 - 6.9x^2 + 14.7x - 9.4 = 0$ b) $x^3 - 20x^2 + 96x - 40 = 0$
■

557. a) $x^4 - 20x = 17x^2 + 6$ b) $-5x + 11 = -x^5 - 7x^3$
■

558. a) $\dfrac{x^3 - 12x - 4}{24} = 0$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1}{x^4 + x^3 - 4} = 0$
■

559. Von welcher Zahl ist die dritte Potenz um 1369 grösser als das 14.5-fache ihres
■ Quadrates?

560. Das 196-fache des Quadrates einer Quadratzahl ist gleich wie das Produkt der drei
■ nachfolgenden Quadratzahlen. Bestimmen Sie die grösste der Quadratzahlen.

561. Die dritte Potenz einer Quadratzahl ist um 39 kleiner als das Dreifache des Quadrates
■ der nächsthöheren Quadratzahl. Bestimmen Sie die beiden Quadratzahlen.

562. Eine quaderförmige Säule hat ein Volumen von 498.2 cm^3 und eine Oberfläche von
■ 436.2 cm^2. Das Seitenverhältnis der rechteckigen Grundfläche beträgt 1:3.
Berechnen Sie die Höhe dieser Säule.

563. Die rechteckige Grundfläche einer geraden Pyramide hat das Seitenverhältnis 1:2. Bei
■ einem Volumen von 265.1 dm^3 ergeben sich dabei Seitenkanten der Länge 11.5 dm.
Berechnen Sie die Körperhöhe.

564. Wie tief sinkt eine Kugel aus Buchenholz (0.7 kg/dm^3) mit einem Durchmesser von
■ 20 cm im Wasser ein?

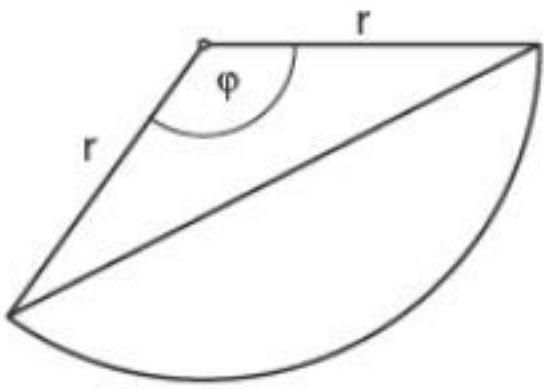
Transzendente Gleichungen

565. a) $\sqrt{x-4.5}+\sqrt[3]{x+2.35}-3.93=0$ b) $\sqrt{x-1.1}+x=5.5+\sqrt[3]{x+0.75}$

566. a) $4\cdot 10^x+4x=15$ b) $3.9+e^x=7.5x$

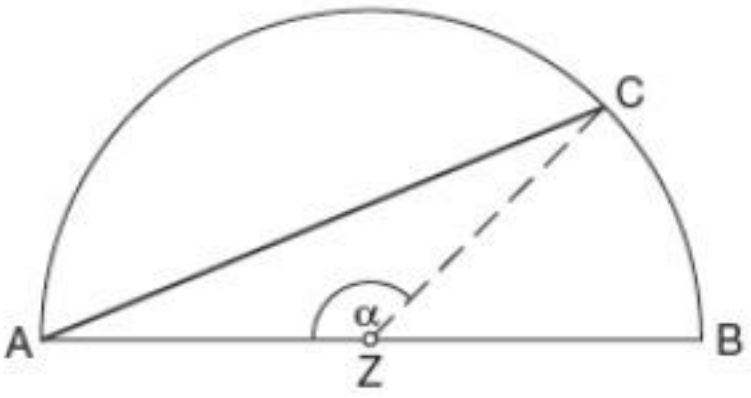
567. a) $0.5e^x-2x=0.5x^2$ b) $\lg x-0.2=\dfrac{1}{(x-5)^2}$

568.



Bestimmen Sie φ so, dass Dreiecks- und Segmentfläche gleich gross werden.

569.



Die Strecke AC soll die Fläche des Halbkreises mit Durchmesser AB halbieren. Berechnen Sie den Winkel α.

570. Zwei Kugeln unterscheiden sich in ihrer Oberfläche um 1872 cm^2 und in ihrem Volumen um 14080 cm^3. Berechnen Sie den Radius der grösseren Kugel.

571. Ein Gefäss von der Form eines geraden Zylinders mit dem Innendurchmesser 40 cm ist bis auf die Höhe h = 50 cm mit Wasser gefüllt. Kippt man das Gefäss um einen Winkel α, so steigt der Wasserspiegel um 3.5 cm. Berechnen Sie den Winkel α. (Die Wandstärke des Gefässes ist zu vernachlässigen.)

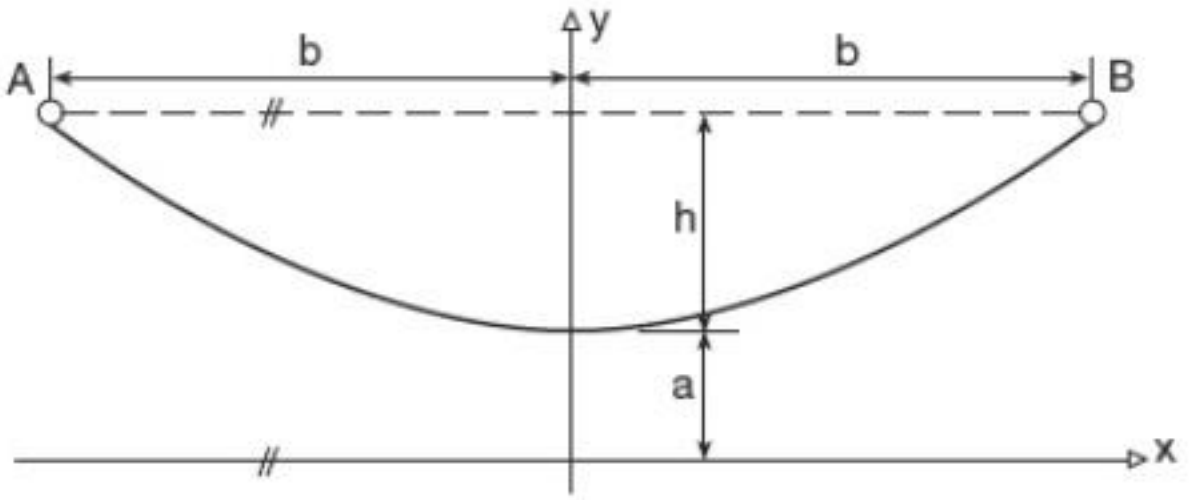
572. Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in einem vollen, liegenden Fass (Form: gerader Zylinder) mit einem Durchmesser von 90 cm, wenn man einen Viertel des Inhalts ausfliessen lässt?

573. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umkreisradius von 6 cm und einen Umfang von 30.4 cm. Berechnen Sie die Länge der Basis und der Schenkel.

574. ■ Um welchen Winkel muss man eine mit Wasser gefüllte Halbkugelschale (Durchmesser d) neigen, damit die Hälfte des Wassers ausfliesst?

a) $d = 28$ cm b) allgemein

575. ■



An den zwei Punkten A und B ($\overline{AB} = 1.6$ m) wird ein Faden der Länge $s = 2$ m befestigt. Berechnen Sie den Durchhang h.

Hinweis: Fadenlänge: $s = a\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)$

Funktionsgleichung für den Faden (Kettenlinie): $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Prüfen Sie das Ergebnis in einem Versuch nach (z. B. zwei Nägel an einer Wand).

Die Mathematik ist eine Mausefalle. Wer einmal in dieser Falle gefangensitzt, findet selten den Ausgang, der zurück in seinen vormathematischen Seelenzustand leitet.

Egmont Colerus, 1888–1939, österr. Schriftsteller

Die gesamte Philosophie ist einem Baume vergleichbar, dessen Wurzel die Metaphysik, dessen Stamm die Physik und dessen Zweige alle übrigen Wissenschaften sind.

René Descartes, 1596–1650,
franz. Philosoph und Mathematiker

3. Funktionen

Das naive Denken geht von der Sache aus, das wissenschaftliche von der Methode.

Carl Friedrich von Weizsäcker, 1912–2007, Physiker

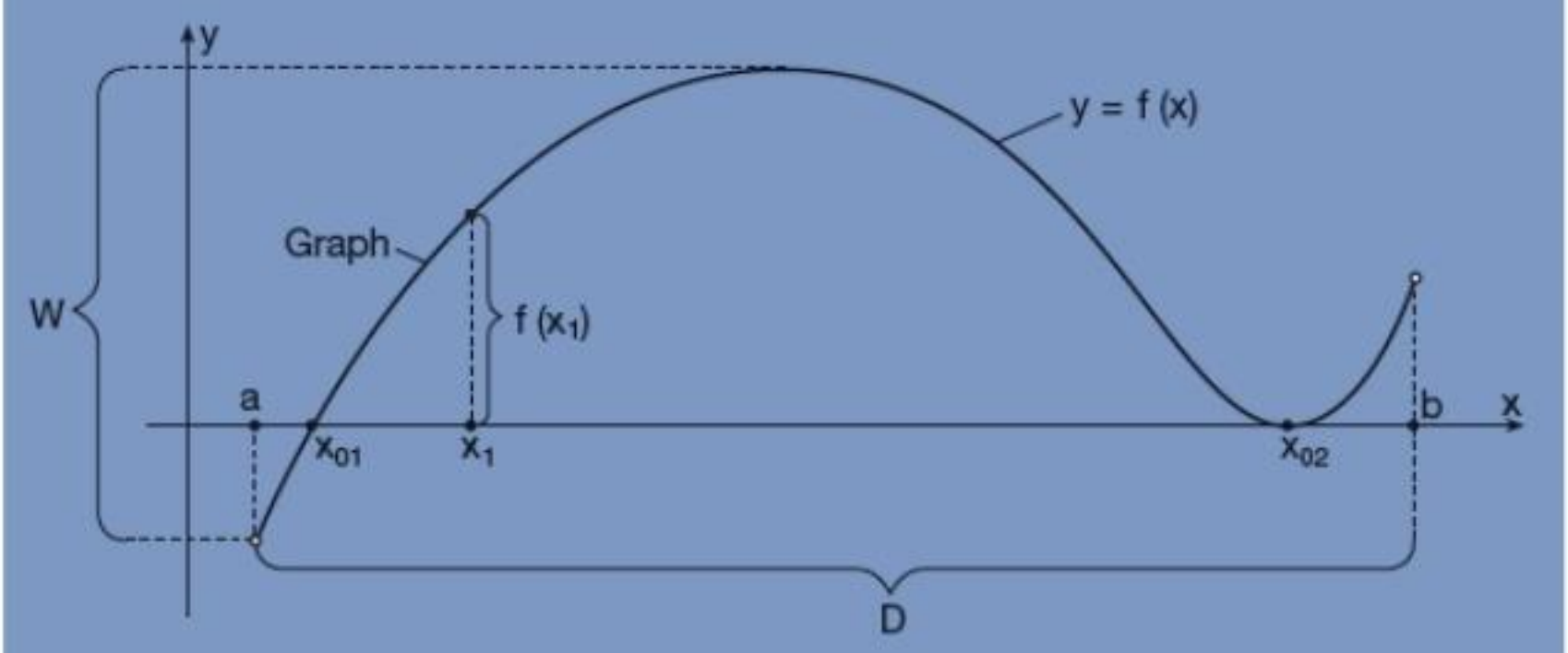
Eine **Funktion** $x \longmapsto y$ ist eine **Zuordnung,** die jeder Zahl x (oder Grösse) einer Menge D *eindeutig* eine Zahl y (oder Grösse) zuordnet.

x heisst **unabhängige Variable.** Ein x-Wert heisst **Argument.**

y heisst **abhängige Variable.** Ein y-Wert heisst **Funktionswert.**

Die Menge D heisst **Definitionsbereich.**

Die Menge W aller Funktionswerte heisst **Wertebereich.**



D	Definitionsbereich	$D = [a\,;b]$;	W: Wertebereich
x_1	Argument, d. h. ein Element der Menge D		
$f(x_1)$	Funktionswert, d. h. ein Element der Menge W		
x_{01} , x_{02}	**Nullstellen** der Funktion f, d. h. ein Argument x_0, dessen zugeordneter Funktionswert Null ist: $f(x_0) = 0$		

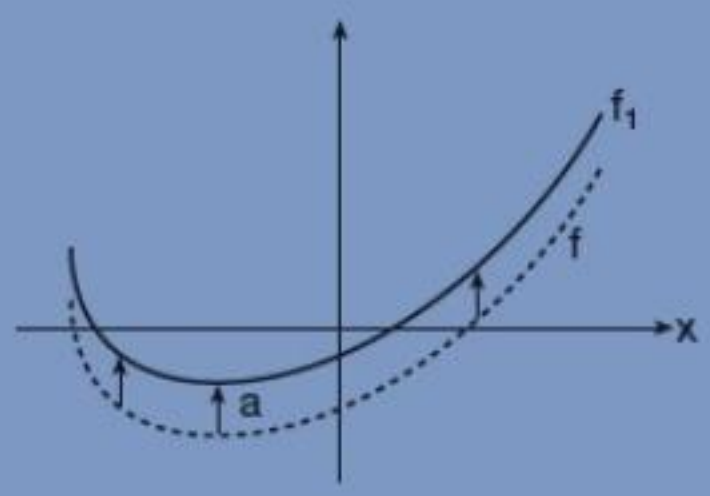
Begriff	Symbol	Beispiel
Funktionsname	$f, g, f_1, \ldots\ldots$	$f\colon x \longmapsto x^2 - 3x$
Funktionsterm	$f(x)$	$x^2 - 3x$
Funktionswert	$f(x_1)$	$f(5) = 10$
Funktionsgleichung	$y = f(x)$	$y = x^2 - 3x$, $f(x) = x^2 - 3x$
Graph k der Funktion f	$k: y = f(x)$	Parabel $p: y = x^2 - 3x$

Für eine Funktion f verwenden wir folgende Schreibweisen:

$f\colon x \longmapsto y$ $\qquad$ $f\colon x \longmapsto f(x)$ $\qquad$ $y = f(x)$

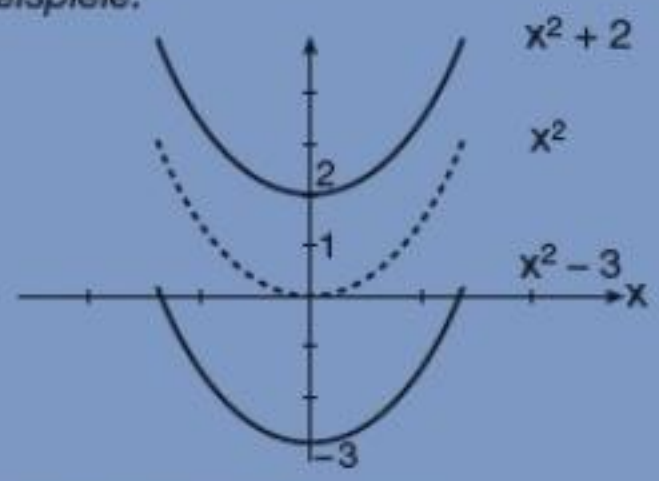
Geometrische Bedeutung einiger Unterschiede im Funktionsterm.

$f_1(x) = f(x) + a \quad (a \in \mathbb{R})$

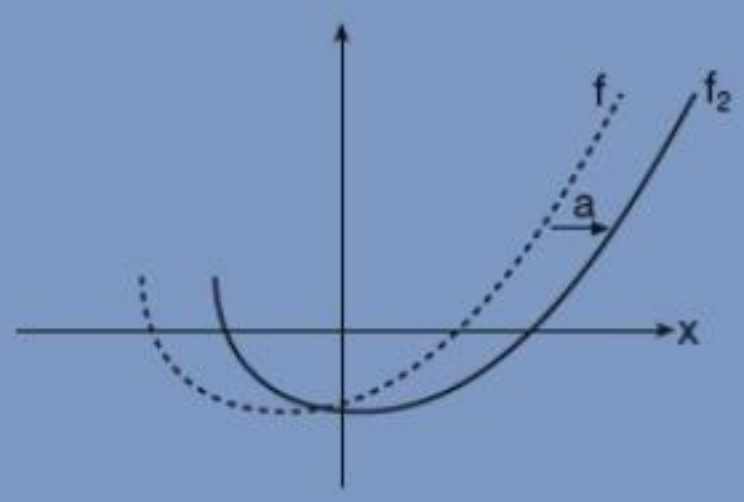


Verschiebung um $|a| \cdot e_y$
in y-Richtung $a > 0$: nach oben
$a < 0$: nach unten

Beispiele:

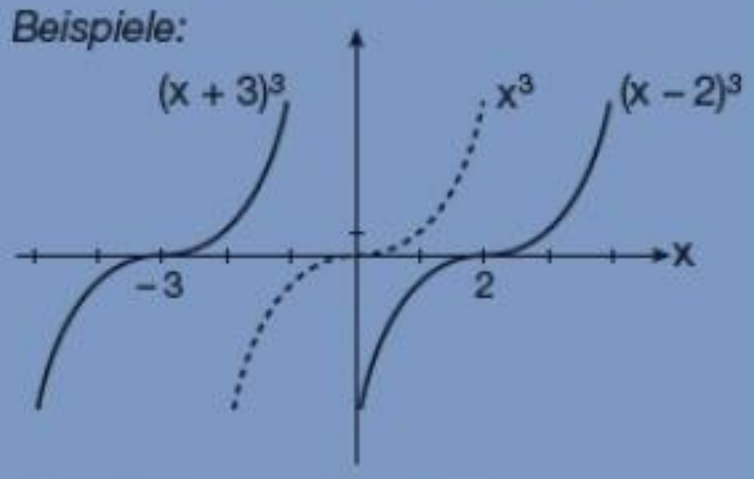


$f_2(x) = f(x - a) \quad (a \in \mathbb{R})$

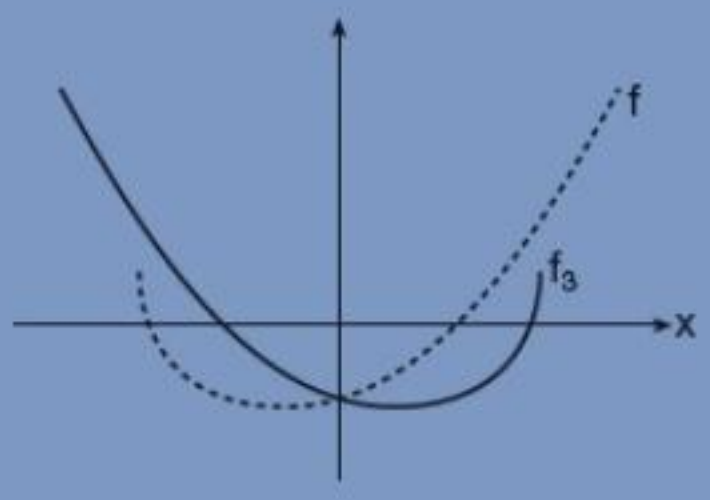


Verschiebung um $|a| \cdot e_x$
in x-Richtung $a > 0$: nach rechts
$a < 0$: nach links
Bemerkung: Probe mit Nullstelle

Beispiele:

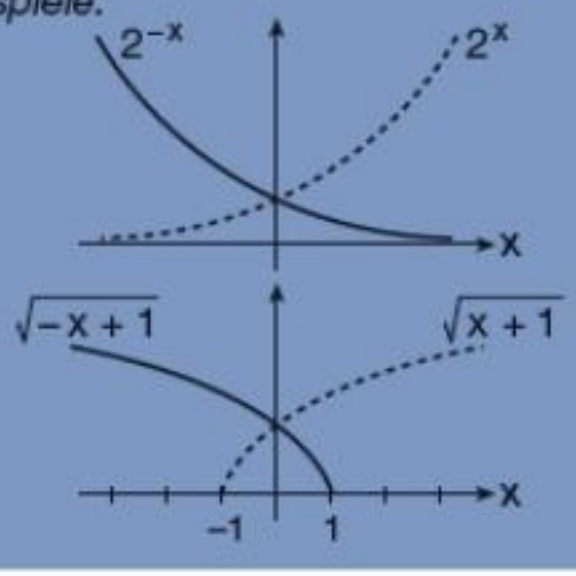


$f_3(x) = f(-x)$

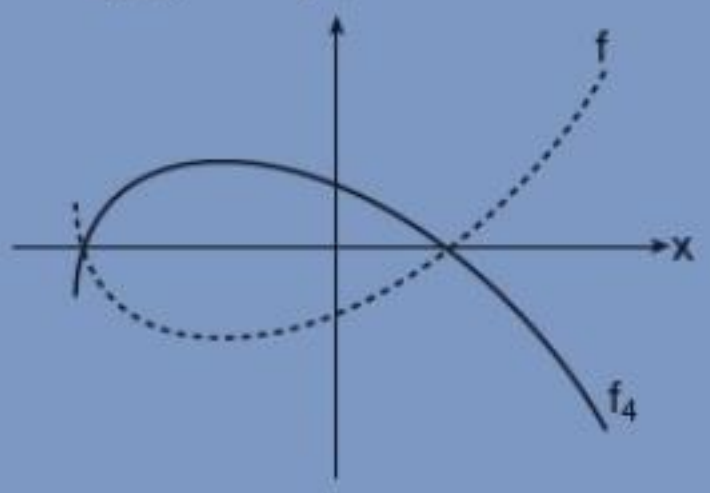


Spiegelung an der y-Achse

Beispiele:

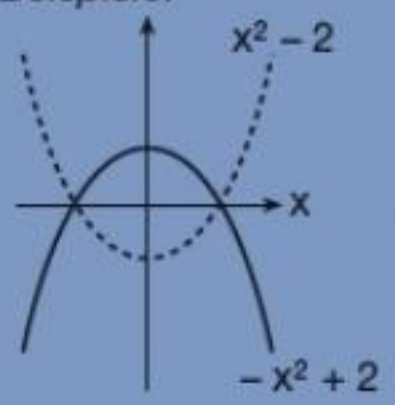


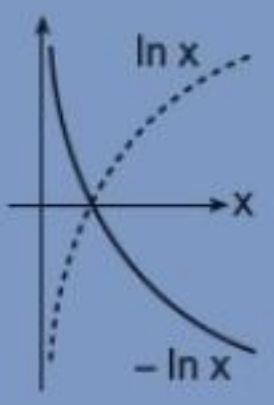
$f_4(x) = -f(x)$



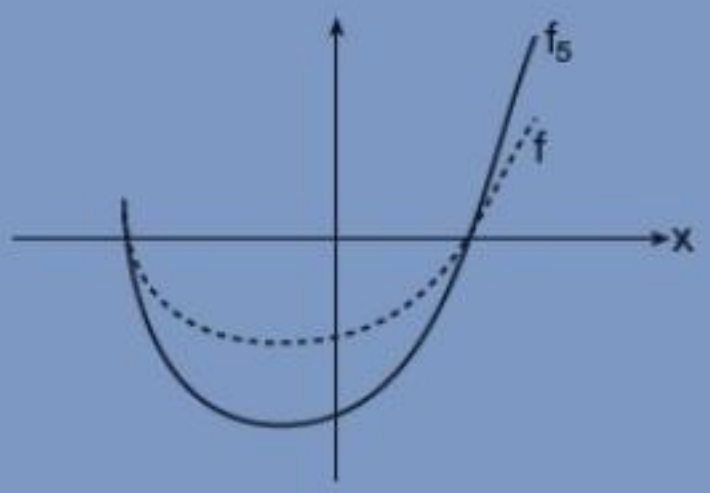
Spiegelung an der x-Achse

Beispiele:





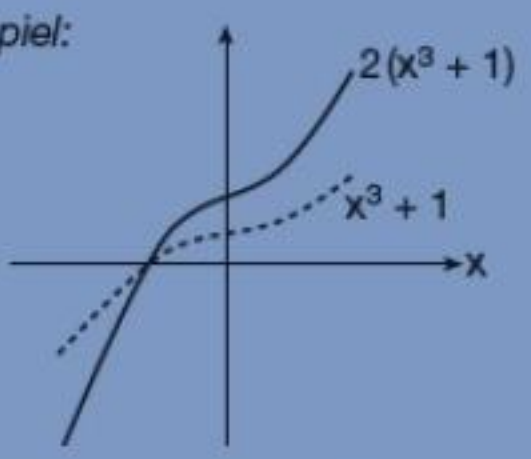
$f_5(x) = a \cdot f(x) \quad (a \in \mathbb{R})$



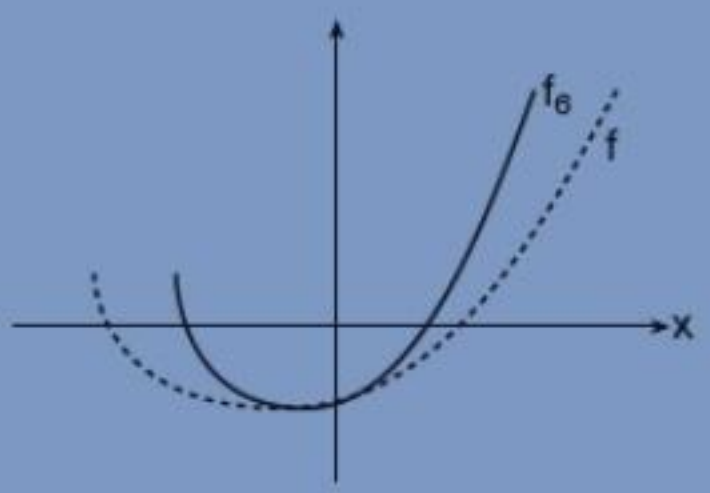
Streckung von der x-Achse aus mit dem Faktor $|a|$.

Ist $a < 0$, so ist zusätzlich noch eine Spiegelung an der x-Achse notwendig.
Bemerkung:
Die Nullstellen von f und f_5 sind dieselben.

Beispiel:



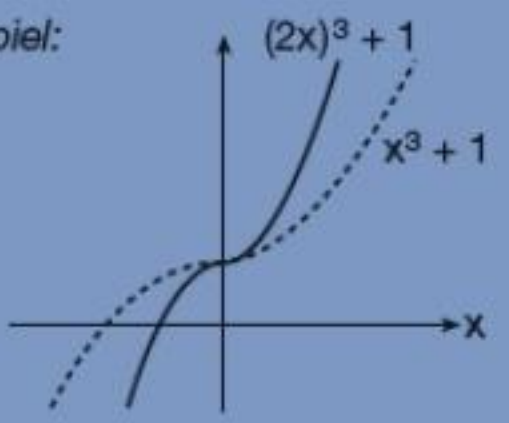
$f_6(x) = f(a \cdot x) \quad (a \in \mathbb{R})$



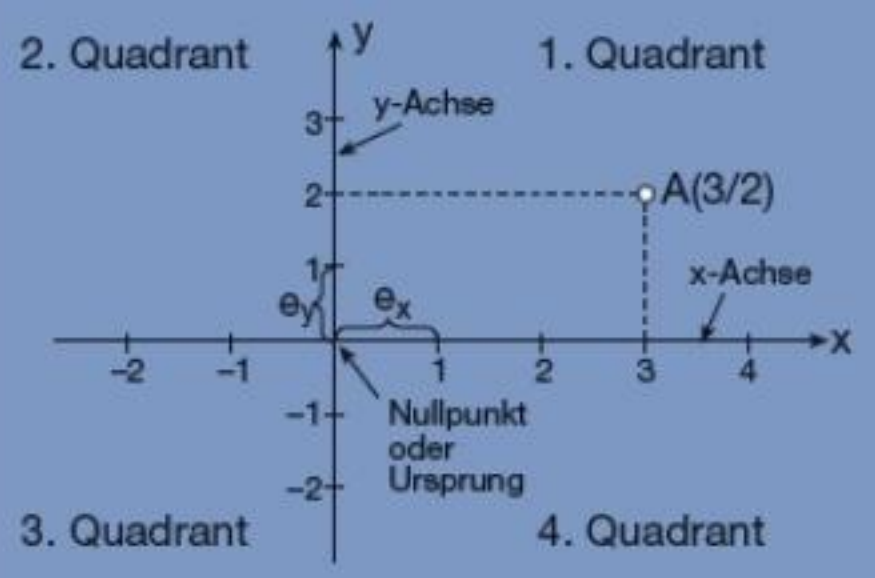
Streckung von der y-Achse aus mit dem Faktor $\frac{1}{|a|}$.

Ist $a < 0$, so ist zusätzlich noch eine Spiegelung an der y-Achse notwendig.
Bemerkung:
Der y-Achsenschnittpunkt bleibt derselbe.

Beispiel:



3.1 Kartesisches Koordinatensystem



e_x: **Einheitsstrecke** auf der x-Achse
e_y: **Einheitsstrecke** auf der y-Achse

Die Einheitsstrecken e_x und e_y dürfen verschieden gross gewählt werden, wenn nicht etwas anderes vorgeschrieben ist.

In einem Koordinatensystem kann man **geordnete Zahlenpaare** (x/y) als geometrische Punkte darstellen.

A (x_A/y_A)

x_A: **x-Koordinate** oder **Abszisse** des Punktes A
y_A: **y-Koordinate** oder **Ordinate** des Punktes A

576. a) Wie ist das kartesische Koordinatensystem definiert?
b) Wozu dient ein Koordinatensystem?
c) Erklären Sie die Begriffe Abszisse und Ordinate eines Punktes.
d) Geben Sie die Koordinaten des Ursprungs an.

577. In welchem Quadranten (I , II , III , IV) liegt der Punkt P?

a) P (−20/3) b) P (15/4) c) P (200/−122)
d) $P\left(-\pi/3-\sqrt{3}\right)$ e) $P\left(-\sqrt{2}/\pi\right)$ f) $P\left(1-\sqrt{3}/\sqrt{3}-3\right)$

578. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$. [$e_x = e_y = 1$ cm]

a) A (−1/−2) ; B (5/6) b) A (−1.5/2) ; B (3.5/−10)

579. Ein Kreis mit Zentrum Z (−2.5/−3) geht durch den Punkt P (2.5/−7.5).
Prüfen Sie durch Rechnung nach, ob Punkt Q auf der Kreisperipherie liegt. [$e_x = e_y$]

a) Q (2/2) b) Q (−6.5/−8.5) c) Q (3.5/0) d) Q (−7.5/1.5)

580. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$.

a) A (3/2) ; B (11/7)
b) A (4/−7) ; B (−3/2)
c) A (−289/−73) ; B (54/−25)
d) A (x_A/y_A) ; B (x_B/y_B)

581. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, der folgende Bedingungen erfüllt:
– P liegt auf der Verbindungsstrecke $\overline{AB}$,
– $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$

a) A (−1/9.5) ; B (−1/2)
b) A (1/2) ; B (6/4.5)
c) A (−5/0.5) ; B (2.5/−1.5)
d) A (−6/−5.5) ; B (29/12)

582. Die Strecke mit den Endpunkten (−4/−1.3) und (3.7/−4) ist die Seite eines Quadrates. Berechnen Sie die übrigen Endpunkte. Alle Lösungen angeben. $(e_x = e_y)$

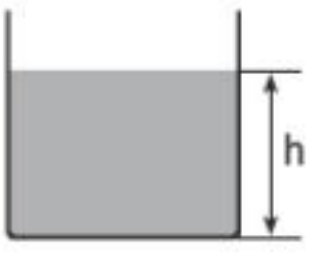
583. Von einem Quadrat ABCD sind die Koordinaten der gegenüberliegenden Punkte A und C bekannt: A (−1/−7) , C (6.5/1.5)
Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M und der übrigen Eckpunkte. $(e_x = e_y)$

584. Gegeben sind die Punkte A (−10.5/−3), B (−1.5/9) und P (10/7.5). $(e_x = e_y)$
Um wie viel muss ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ in x-Richtung verschoben werden, bis die Kreisperipherie durch den Punkt P geht?
Die Aufgabe soll rechnerisch gelöst werden.

3.2 Der Funktionsbegriff

585. a) Wie ist der Funktionsbegriff definiert?
b) Nennen Sie drei Darstellungsarten einer Funktion.
c) Es gibt Funktionen, die nicht durch eine Funktionsgleichung dargestellt werden können. Nennen Sie ein Beispiel.
d) Was versteht man unter einer Nullstelle einer Funktion?

586.



Ein zylindrisches Gefäss mit 2.6 dm^2 Grundfläche und 4 dm Höhe (Innenmasse) werde mit Wasser gefüllt.
Betrachten Sie die Zuordnung

Füllhöhe h ⟼ Wasservolumen V.

a) Warum ist die Zuordnung $h \mapsto V$ eine Funktion?
b) Wie lautet die Funktionsgleichung?
c) Welches ist die abhängige und welches die unabhängige Variable?
d) Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich an.
e) Geben Sie ein Beispiel für ein Argument und den zugehörigen Funktionswert.
f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. (Definitionsbereich beachten!)

587. Betrachten Sie die Funktion, die einem *Kreisradius r* $(0\text{ cm} < r \leq 5\text{ cm})$ die *Kreisfläche A* zuordnet.
a) Wie lautet die Funktionsgleichung?
b) Welches ist die abhängige und welches die unabhängige Variable?
c) Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich an.
d) Geben Sie ein Beispiel für ein Argument und den zugehörigen Funktionswert.
e) Stellen Sie die Funktion grafisch dar.

588. Die auf einen Körper wirkende Kraft F hänge wie folgt von der Zeit t ab:
$F = f(t) = \sqrt{a + bt}$; $a = 6\,N^2$, $b = -5\,N^2/s$, $D = [0s\,;\,1.2s]$
a) Welches ist die abhängige und welches die unabhängige Variable?
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
c) Geben Sie den Wertebereich an.

589. Untersuchen Sie die maximale Anzahl Diagonalen in einem Vieleck. Betrachten Sie dabei die Funktion *Anzahl Ecken n* $\mapsto$ *Anzahl Diagonalen D* für $3 \leq n \leq 7$.
a) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich.
b) Stellen Sie die Funktion grafisch dar.
c) Wie lautet die Funktionsgleichung?

590.

Masse in kg	Porto in €
bis 1	4.00
über 1 bis 2	4.70
über 2 bis 3	5.30
über 3 bis 4	5.90
über 4 bis 5	6.50

Die nebenstehende Tabelle zeigt ein Beispiel für die Tarife «Paketversand».

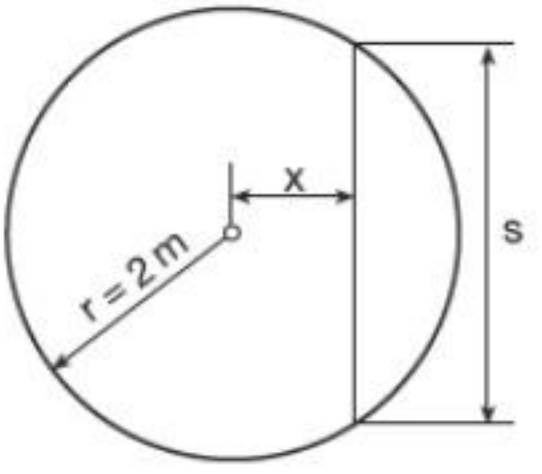
a) Warum ist die Zuordnung *Masse m eines Paketes* $\mapsto$ *Porto P* eine Funktion?
b) Ist die Zuordnung *Porto P* $\mapsto$ *Masse m* auch eine Funktion?
c) Wie gross ist der Funktionswert für $m = 3$ kg?
d) Stellen Sie die Funktion grafisch dar.
e) Gibt es eine Funktionsgleichung?

591. Ein Auto verliert im Laufe eines Jahres 20 % seines Wertes. Der Neuwert betrage € 30 000.–.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion *Zeit t* $\longmapsto$ *Wert W* für die ersten vier Jahre.
Nehmen Sie an, dass der Wert während eines einzelnen Jahres konstant bleibt und im ersten Jahr noch keine Wertabnahme vorgenommen wird.

592. Betrachten Sie in nebenstehender Figur die Funktion
Abstand x $\longmapsto$ *Sehnenlänge s.*

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, den Definitions- und den Wertebereich.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.



593. Die Rundungsfunktion r: $x \longmapsto y$ ordnet jeder reellen Zahl x die nächste *ganze* Zahl y zu. Beispiele: $r(2.49) = 2$; $r(5.7) = 6$; $r(3.5) = 4$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion r für $0 \leq x \leq 3$.

* b) Die Funktion f: $x \longmapsto y$ rundet eine beliebige reelle Zahl x auf eine Dezimale. Bestimmen Sie mithilfe der Rundungsfunktion r eine Funktionsgleichung für f.

594. An einem Schachturnier spielt jeder Teilnehmer gegen jeden genau eine Partie. Betrachten Sie die Funktion: *Anzahl Teilnehmer n* $\longmapsto$ *Anzahl Partien p.*

a) Stellen Sie die Funktion für $n \leq 6$ grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

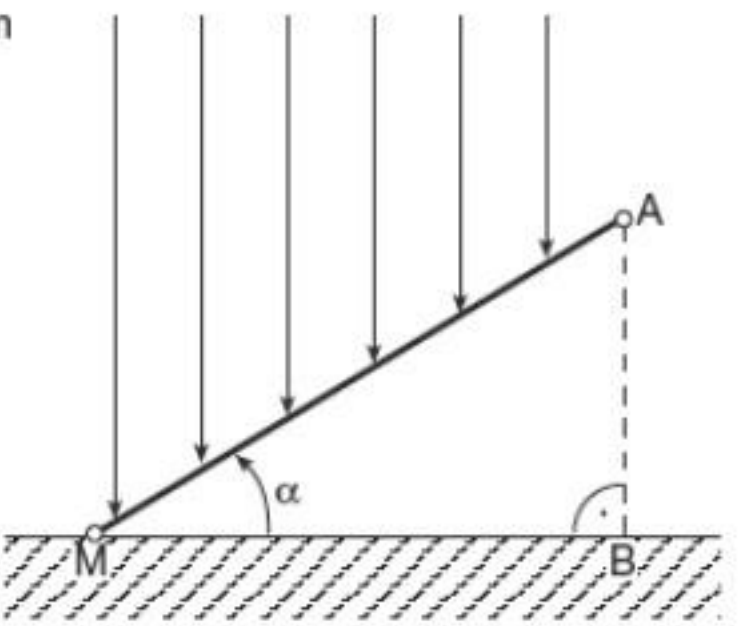
595. Ein Stab mit der Länge $\overline{MA} = 1$ m dreht sich um das Ende M und wird von oben beleuchtet. Dabei entsteht auf der Unterlage ein Schatten von der Länge $\overline{MB}$.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion:

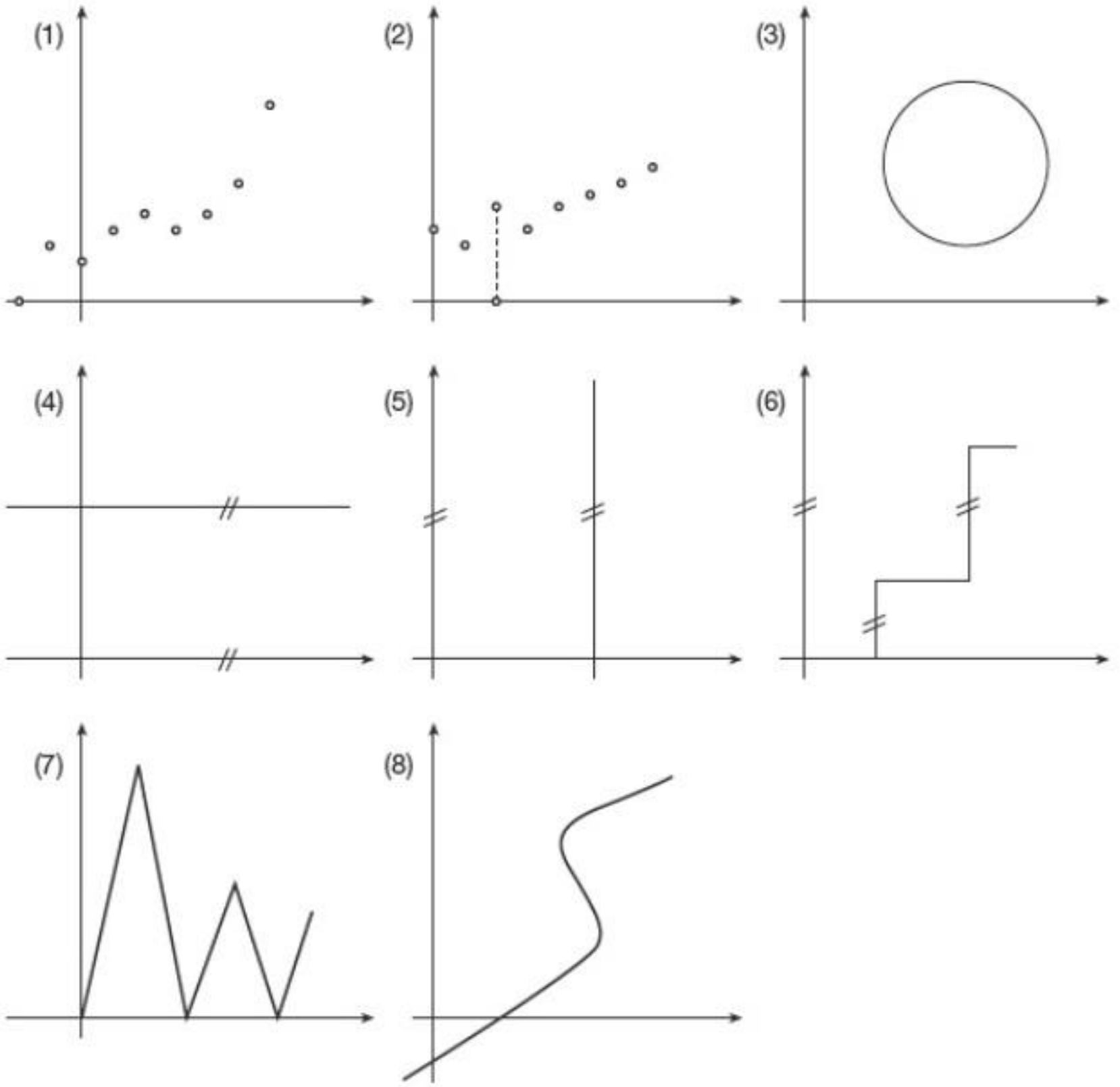
Drehwinkel $\alpha \longmapsto$ *Schattenlänge* $\overline{MB}$

für $0° \leq \alpha \leq 180°$.

(Die Schattenlänge kann näherungsweise grafisch bestimmt werden.)



596. Welches Diagramm stellt den Graphen einer Funktion dar?



597. Welche Zuordnung ist *keine* Funktion?

a) Umfang U eines Quadrates $\longmapsto$ Seitenlänge s des Quadrates, D: $U > 0$

b) Quersumme von n $\longmapsto$ n, $D = \mathbb{N}$

c) Briefporto $\longmapsto$ Gewicht des Briefes (Inlandverkehr)

d) Flächeninhalt A eines regulären 7-Ecks $\longmapsto$ Seitenlänge s des 7-Ecks, D: $A > 0$

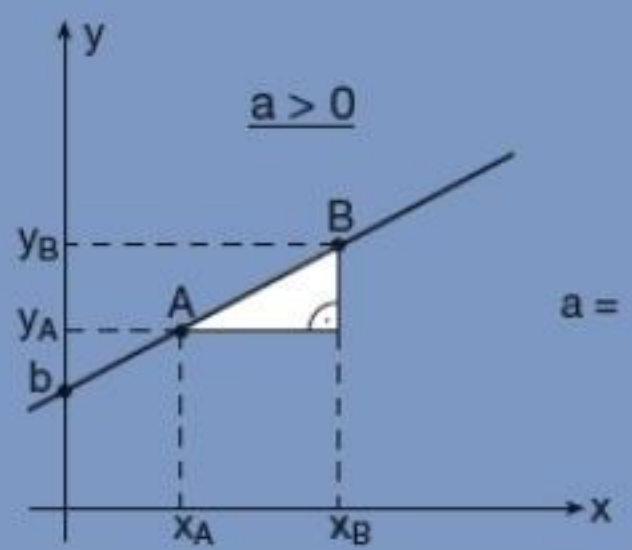
e) Senkrechter Wurf nach oben (Steig- und Fallvorgang):
Höhe über der Abwurfstelle $\longmapsto$ Flugzeit

3.3 Lineare Funktionen

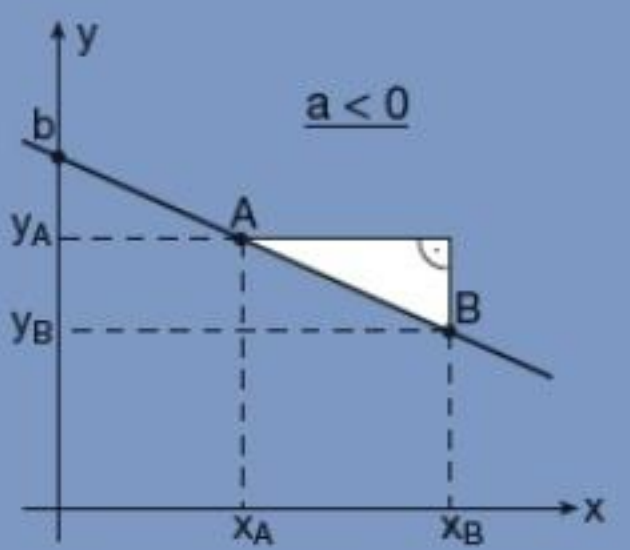
Eine Funktion f mit **$f(x) = ax + b$** $(a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0)$ heisst **lineare Funktion** oder Polynomfunktion ersten Grades.

$f(x) = ax + b$ nennen wir **Grundform** einer linearen Funktion.

Der Graph einer linearen Funktion $y = ax + b$ ist eine **Gerade** (Strecke) mit der **Steigung** a und dem **y-Achsenabschnitt** b.



$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Konstante Funktion

Eine Funktion f mit **$f(x) = c$** $(c \in \mathbb{R})$ heisst **konstante Funktion.**

Der Graph einer konstanten Funktion ist eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt (0/c).

3.3.1 Definition der linearen Funktion

598. a) Was ist eine lineare Funktion?

b) Wie ist die Steigung einer Geraden im Koordinatensystem definiert?

c) Wie viele Nullstellen hat eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$?

d) Geben Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich einer linearen Funktion an.

599. Welche Funktionen sind linear? Schreiben Sie diese in der Grundform.

$f_1(t) = \frac{1}{2t-1}$ $\quad f_2(u) = u + 3\sqrt{u} - 2$ $\quad f_3(n) = \frac{6-2n}{5}$

$f_4(n) = 2^n - n$ $\quad f_5(x) = \frac{x-a}{x-b}$ $\quad f_6(x) = a^2x - a - \frac{1}{x}$

$f_7(x) = a^2x - a - 1$ $\quad f_8(a) = ab - 2a + 3$ $\quad f_9(z) = \frac{a^2 - az}{5b}$

$f_{10}(r) = 2\pi r + b$ $\quad f_{11}(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ $\quad f_{12}(z) = (z-n)^2 - z^2$

600. Formeln aus Wissenschaft und Technik. Welche Funktion ist linear?

a) $S = f(r) = 4\pi r^2$ $\quad$ b) $v = f(s) = \frac{s}{t}$ $\quad$ c) $v = f(t) = \frac{s}{t}$

d) $s = f(t) = v \cdot t$ $\quad$ e) $U = f(I) = R \cdot I$ $\quad$ f) $v = f(t) = v_0 + gt$

g) $V = f(r) = \frac{\pi}{3} r^2 h$ $\quad$ h) $V = f(h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$ $\quad$ i) $T = f(m) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

j) $\sigma = f(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon$ $\quad$ k) $W = f(t) = \frac{U^2}{R} t$ $\quad$ l) $V = f(h) = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$

m) $U = f(r) = 2r\pi + U_0$

601. Welche Zuordnung $x \mapsto y$ ist eine lineare Funktion?
Notieren Sie zuerst die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

a) 5 kg Äpfel kosten 31.50 Euro. x kg Äpfel kosten y Euro.

b) Ein Quadrat hat bei einer Seitenlänge x den Flächeninhalt y.

c) Ein Rechteck mit 400 m^2 Flächeninhalt hat die Seitenlängen x und y.

d) Ein Kapital von 11 000 Euro bringt in x Tagen bei einem Zinssatz von 5.5 % einen Zins von y Euro (1 Jahr = 360 Tage).

e) Der Umfang eines Rechtecks misst 120 m. Die eine Seite misst x m, die andere y m.

f) Vier Zuleitungen können einen Behälter in 9.5 Stunden füllen. x Zuleitungen benötigen für den gleichen Behälter y Stunden.

g) Für eine Strecke s braucht man bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 75 km/h eine Zeit von 4 h. Bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von x km/h braucht man y h.

h) Ein Kapital von y Euro bringt bei einem Zinsfuss von 6 % in x Tagen 480 Euro Zins.

3.3.2 Der Graph einer linearen Funktion

602. Zeichnen Sie den Graphen für $x \in [-6\,;\,6]$.

a) $y = -3$ b) $y = 0.6x + 3$ c) $y = 2 - \frac{x}{2}$

d) $y = \frac{4x - 5}{3}$ e) $y = \frac{2 - x}{6}$ f) $y = -(2.5 + 1.8x)$

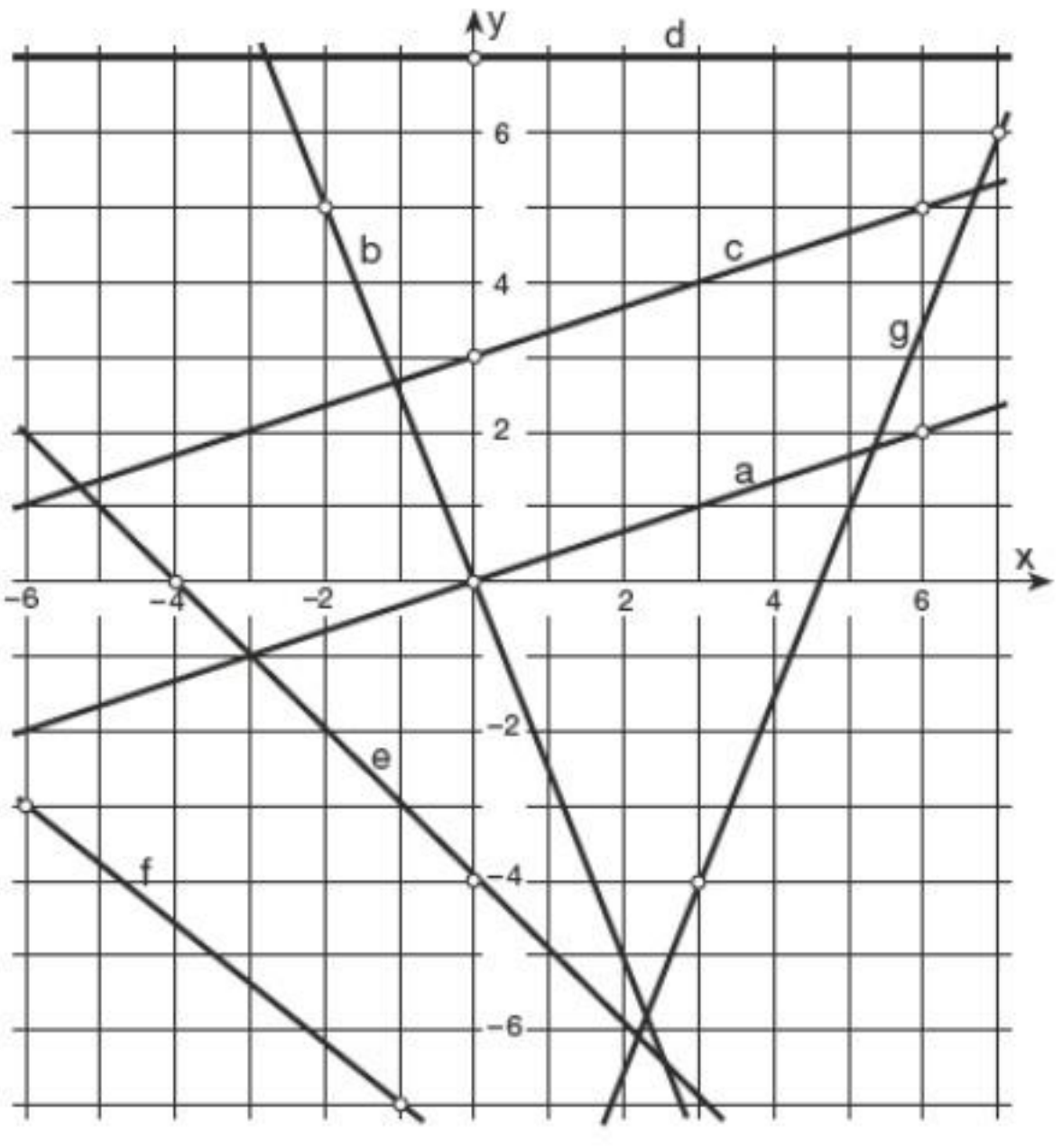
603. Stellen Sie die Funktion grafisch dar.

a) $u = f(r) = 2\pi r$ für $0\text{ cm} \leq r \leq 12\text{ cm}$

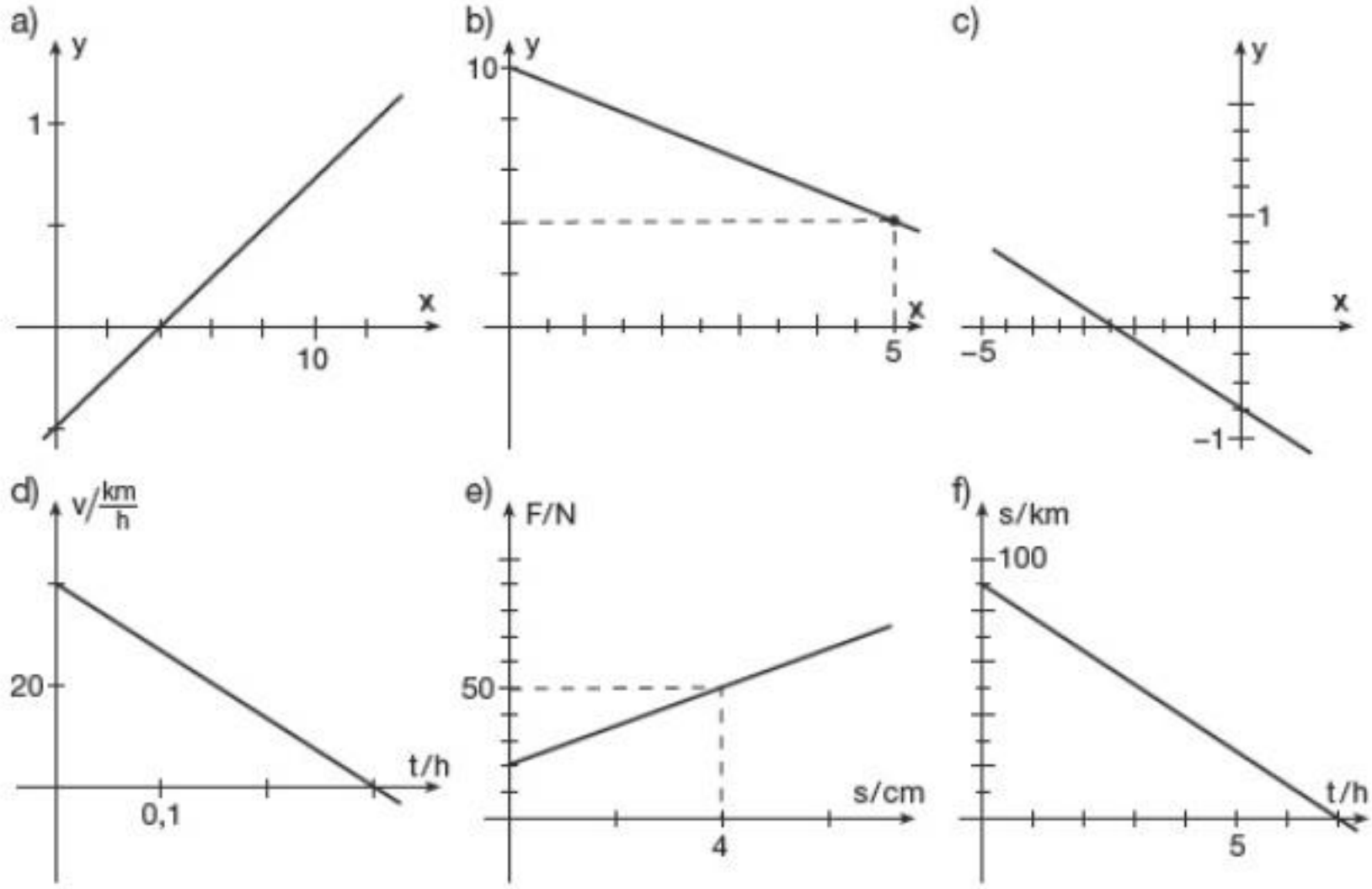
b) $v = f(t) = (15\text{ m/s}) - (3\text{ m/s}^2) \cdot t$ für $0\text{ s} \leq t \leq 8\text{ s}$

c) $F = f(s) = (8\text{ N/cm}) \cdot s + 5\text{ N}$ für $0\text{ cm} \leq s \leq 5\text{ cm}$

604. Bestimmen Sie die Gleichung der gezeichneten Geraden.



605. Der Graph ist eine Gerade. Wie lautet die Funktionsgleichung?



606. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden AB rechnerisch. (Lösung exakt angeben)

a) A (0/1) B (1/3) b) A (−1/1) B (4/−2)

c) A $\left(2/-\frac{7}{3}\right)$ B $\left(1/-\frac{1}{3}\right)$ d) A (−32/97) B (73/412)

e) A (22.6/86) B (37.6/−259) f) A $\left(\sqrt{2}/-\sqrt{3}\right)$ B $\left(-\sqrt{2}/-2\sqrt{3}\right)$

607. Die Gerade mit der folgenden Gleichung schneidet die x-Achse im Punkt A und die y-Achse im Punkt B.
Berechnen Sie die Koordinaten von A und B. (Lösung exakt angeben)

a) $y = 6 - 2x$ b) $y = -\frac{3}{5}x - 10$ c) $y = \frac{20x - 8}{5}$ d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{5}x + \frac{\pi}{2}$

e) $y = ax - a$ f) $y = \frac{-b}{\sqrt{3}}x + b\sqrt{5}$ g) $y = -\frac{c}{5}x - \frac{c}{3}$

608. Ermitteln Sie rechnerisch, welche der Geraden g_1, g_2 und g_3 durch den Punkt P gehen.

a) g_1: $y = -2x - 5$ g_2: $y = 0.2x + 6.7$ g_3: $y = x + 14.5$ P (−6.5/8)

b) g_1: $y = x - 2.75$ g_2: $y = 0$ g_3: $y = 1.25x - 2.75$ P (0/−2.75)

609. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die mit Steigung a durch den Punkt P geht.

a) $a = -\frac{2}{3}$ P (–10/6.5) b) a = 7.2 P (4.6/35)

c) a = 3 P (3.5m/2m) d) a = 2.7k P (–5/0.5k)

e) a = –4.5u P (–8.5/–12.5u)

610. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h, die parallel zur Geraden g und durch den Punkt Q läuft.

a) Gerade g: y = 5.5x + 6 Q (4/4.5) b) Gerade g: y = –3x – 8.5 Q (65.4/13.9)

c) Gerade g: y = 2x + 10q Q (0.5q/2q) d) Gerade g: y = –2ux – 1.5v Q (3/–30u)

611. Die Geraden AB und CD schneiden sich im Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten von S.

a) A (0/0) B (2/4) und C (–2/6) D (4/6)

b) A (10/6) B (0/9) und C (–4/11) D (8/9)

c) A (–10/13.9) B (–25/30.4) und C (12.6/14) D (23.8/19.6)

d) A (9.5/10.6) B (–16.5/23.6) und C (–10.5/–4) D (9.5/–22)

612. Prüfen Sie durch Rechnung nach, ob die drei Punkte R, S und T auf einer Geraden liegen.

a) R (9/–22.8) S (6.5/–13.6) T (–12/52.8)

b) R (–45/–100.8) S (–46/–103.2) T (27/72)

c) R (–53/280.1) S (–11/36.5) T (97/–589.9)

613. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate des Punktes T so, dass die drei Punkte R, S und T auf einer Gerade liegen.

a) R (–3.2/–21.2) S (25.2/49.8) T (2.2/y_T)

b) R (6.4/–54) S (–15/85.1) T (x_T/–2)

614. Die Eckpunkte eines Dreiecks haben folgende Koordinaten:

A (2/9) B (–5/2) C (12/1)

Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Geraden, auf der die Schwerlinie s_c liegt.

615. Gegeben sind die Geraden g_1: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$ und g_2: $y = -\frac{2}{3}x + 7$.
Um wie viel muss die Mittelparallele von g_1 und g_2

a) in y-Richtung b) in x-Richtung

verschoben werden, bis sie durch den Punkt P (6/8) geht? (Aufgabe rechnerisch lösen.)

616. Wie lautet die Gleichung der Geraden g, für die gilt:

a) g ist parallel zur x-Achse und geht durch den Punkt P (m/n).
b) g hat die Steigung –0.4 und schneidet die x-Achse bei 6.
c) g geht durch die Punkte E (m/4m) und F (2m/3m).
d) g geht durch den Punkt Q (2/3) und ist p mal so steil wie die Gerade h: $y = 4x + 3$.

3.3.3 Aufgaben aus der Praxis

617. Die Notenskala bei einer schriftlichen Mathematikprüfung wird wie folgt festgelegt:
0 Punkte $\mapsto$ Note 1 und 15 Punkte $\mapsto$ Note 6

a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion $p \mapsto n$ an. Dabei bedeuten p die Anzahl Punkte und n die Note.
b) Welche Note erhält ein Schüler mit 12 Punkten?
c) Welcher Punktzahl entspricht die Note 3?

618. Im Fach Französisch wird die Notenskala bei einem Dictée wie folgt festgelegt:
0 Fehler $\mapsto$ Note 6 und 25 Fehler $\mapsto$ Note 1

a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion $m \mapsto n$ an. Dabei bedeuten m die Anzahl Fehler und n die Note.
b) Welche Note erhält ein Schüler mit 13 Fehlern? (auf 1 Dezimale runden)
c) Welche Fehlerzahl entspricht der Note 4?

619.

Die Kugeln A und B bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten $v_A = 0.12$ m/s beziehungsweise $v_B = 0.19$ m/s. Beide sind zum Zeitpunkt $t = 0$ bei dem in der Skizze dargestellten Standort. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen $s = f(t)$ der beiden Bewegungen und stellen Sie diese grafisch dar, für $0s \leq t \leq 30s$.

620. Ein Wasserbecken kann durch einen Zufluss mit einem Volumenstrom von 150 Liter/Minute gefüllt und durch einen Abfluss mit einem Volumenstrom von 250 Liter/Minute entleert werden.
Bestimmen Sie für die folgende Situation die Funktionsgleichung $V = f(t)$ (V = Wasservolumen im Becken; t = Zeit) und stellen Sie diese grafisch dar. ($0 \text{ min} \leq t \leq 25 \text{ min}$)

a) 4000 Liter Wasser im Becken werden bei geschlossenem Zufluss vollständig entleert.

b) Zu- und Abfluss sind bei einem Anfangsvolumen von 2700 Liter gleichzeitig geöffnet.

621. Für die drei international gebräuchlichen Temperaturskalen gilt:

	T/Kelvin (K)	γ/Celsius (°C)	φ/Fahrenheit (°F)
Schmelzpunkt von Wasser	273.16	0	32
Siedepunkt von Wasser	373.16	100	212

Bestimmen Sie die folgende Funktionsgleichung (Einheiten weglassen):

a) $\gamma = f(T)$ b) $T = f(\gamma)$ c) $\varphi = f(\gamma)$

d) $\gamma = f(\varphi)$ e) $T = f(\varphi)$ f) $\varphi = f(T)$

622. Zwei Taxiunternehmen A und B haben für ihre Fahrgäste folgende Tarife:
A: Grundgebühr € 4.– und € 1.40 pro gefahrenen Kilometer.
B: Grundgebühr € 5.20 und € 1.20 pro gefahrenen Kilometer.

a) Bestimmen Sie die beiden Funktionsgleichungen $P = f(s)$ (s = Fahrstrecke, P = Fahrpreis) und stellen Sie diese grafisch dar für $0 \text{ km} \leq s \leq 10 \text{ km}$.

b) Bei welcher Fahrstrecke ergeben beide Tarife den gleichen Fahrpreis? Rechnerisch lösen.

623. Einem Vertreter werden von zwei Firmen folgende Angebote gemacht:
Firma A: € 2900.– monatliches Fixum, zusätzlich 6 % des Totals aller Aufträge.
Firma B: € 3500.– monatliches Fixum, zusätzlich 4.5 % des Totals aller Aufträge.

a) Bestimmen Sie die beiden Funktionsgleichungen $E = f(U)$ (E = Einkommen, U = Umsatz) und stellen Sie diese grafisch dar. (0 € $\leq U \leq$ € 50 000.–)

b) Bei welchem monatlichen Umsatz ergibt sich bei beiden Firmen das gleiche Einkommen?

624. Ein Elektrizitätswerk bietet zwei Stromtarife an:
Tarif I: € 8.– Grundgebühr und 12 Cent je kWh
Tarif II: € 9.50 Grundgebühr und 11 Cent je kWh

a) Bestimmen Sie für jeden Tarif die Funktionsgleichung $K = f(E)$ (E = Energieverbrauch, K = Kosten) und stellen Sie beide Funktionen grafisch dar.

b) In welchem Verbrauchsbereich ist Tarif II günstiger?

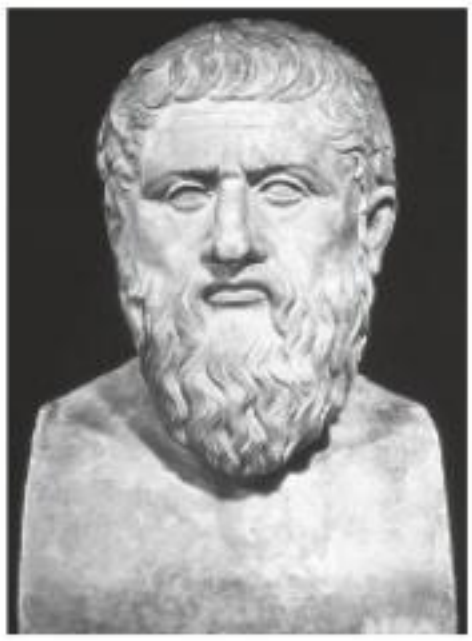
625. Bei der Herstellung eines Artikels entstehen, unabhängig von der Stückzahl, feste Kosten von € 2250.–, die übrigen Kosten sind proportional zur Stückzahl. Werden 150 Stück dieses Artikels hergestellt, so machen die festen Kosten 60 % der Gesamtkosten aus.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $K = f(n)$, n = Stückzahl, K = Gesamtkosten in €.

b) Wie viele Stücke muss man produzieren, damit die festen Kosten nur noch 30 % der Gesamtkosten ausmachen?

Lasst niemanden hier eintreten, der der Geometrie unkundig ist.

Platon, 427–347 v. Chr., griech. Philosoph



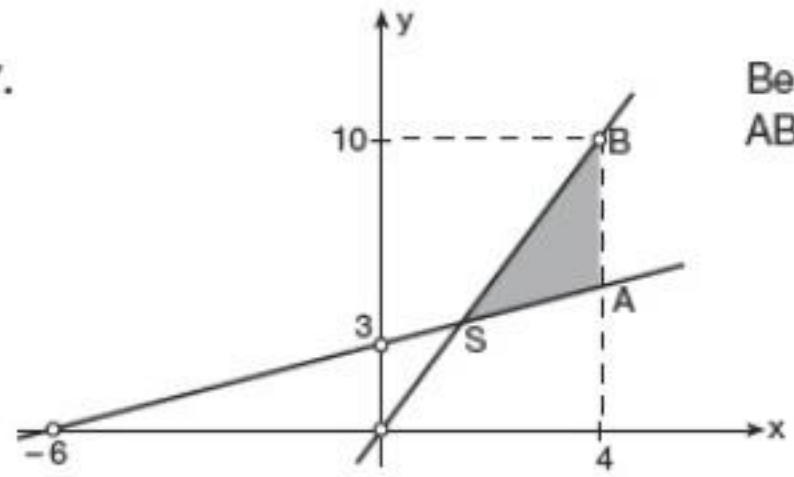
3.3.4 Berechnung von Flächen

626. Gegeben sind die Geraden g und h, die sich im Punkt P schneiden.

$g: y = \frac{1}{3}x + 2$ $\qquad$ $h: y = 8 - x$

Die Gerade g schneidet die y-Achse in A und die Gerade h schneidet sie in B.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks APB, wenn gilt: $e_x = e_y = 1$ cm

627.



Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABS, wenn gilt: $e_x = e_y = 1$ cm

628. Eine Gerade g hat eine Steigung von –2.8 und schliesst mit der x- und der y-Achse eine Dreiecksfläche von 42.35 m² ein.
Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g. ($e_x = e_y = 1$ m)

3.3.5 Senkrechte Geraden

Für die folgenden Aufgaben gilt jeweils $e_x = e_y$.

629. Berechnen Sie die Gleichung jener Geraden, die durch P geht und senkrecht steht zur Geraden g.

a) P (2/5.5) Gerade g: $y = -\frac{1}{3}x + 5$ b) P (–4.5/9.2) Gerade g: $y = 2.5x - 3.5$

630. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A (–8/–9), B (1.5/–4) und C (–3.5/4) sowie ein Punkt P (–4/13.5). Um wieviel muss das Dreieck ABC in y-Richtung verschoben werden, bis seine Höhe h_a durch den Punkt P geht?
Die Aufgabe soll rechnerisch gelöst werden.

631. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind bekannt:

A (1/2) B (9/3) C (5/11)

Berechnen Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H.

632. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind bekannt:

A (–6/–2) B (10/2) C (0/10)

Berechnen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U.

633. Zwei zueinander senkrecht stehende Geraden g_1 und g_2 schneiden die y-Achse bei –3 beziehungsweise 7 und ihr Schnittpunkt hat die x-Koordinate 4.
Berechnen Sie die Gleichung der beiden Geraden.

634. Gegeben sind die Gerade g: $y = ax + b$ und der Punkt P (p/q).
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h, die senkrecht zu g steht und durch den Punkt P geht.

635. Welcher Punkt S auf der Geraden g: $y = 4 - 0.5x$ hat die kleinste Entfernung vom Punkt P?

a) P (0/0) b) P (2/8)

636. Der Punkt P (7/9) wird an der Geraden g: $y = -\frac{1}{6}x + 4$ gespiegelt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes P'.

3.3.6 Abschnittsweise definierte Funktionen

637. Zeichnen Sie den Graphen und geben Sie den Wertebereich W an.

a) $y = \begin{cases} 0 & \text{für } -5 \le x < 0 \\ x & \text{für } 0 \le x \le 5 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 10 - 5x & \text{für } 0 \le x < 2 \\ 1.25x - 2.5 & \text{für } 2 \le x \le 6 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -4 & \text{für } -4 \le x < -2 \\ 2x & \text{für } -2 \le x < 3 \\ 15 - 3x & \text{für } 3 \le x \le 5 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 8 - 1.5x & \text{für } 0 \le x < 2 \\ 4 & \text{für } 2 \le x \le 3 \\ 2x - 4 & \text{für } 3 < x \le 5 \end{cases}$

638. Eine Ware wird zu folgenden Bedingungen angeboten:

Menge m in kg	$0 \le m \le 10$	$10 < m \le 20$	$20 < m$
Preis P in € pro kg	7.50	7.10	6.50

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *Menge m* $\mapsto$ *Preis P.*
b) Welche Gleichungen beschreiben die Funktion *Menge m* $\mapsto$ *Kosten K*?
c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $m \mapsto K$ für $0\ \text{kg} \le m \le 40\ \text{kg}$

639. Eine Firma offeriert Taschenrechner zu folgenden Preisen:
Ein Stück kostet € 50.–. Wenn mehrere Geräte miteinander bezogen werden, wird ein Mengenrabatt gewährt:

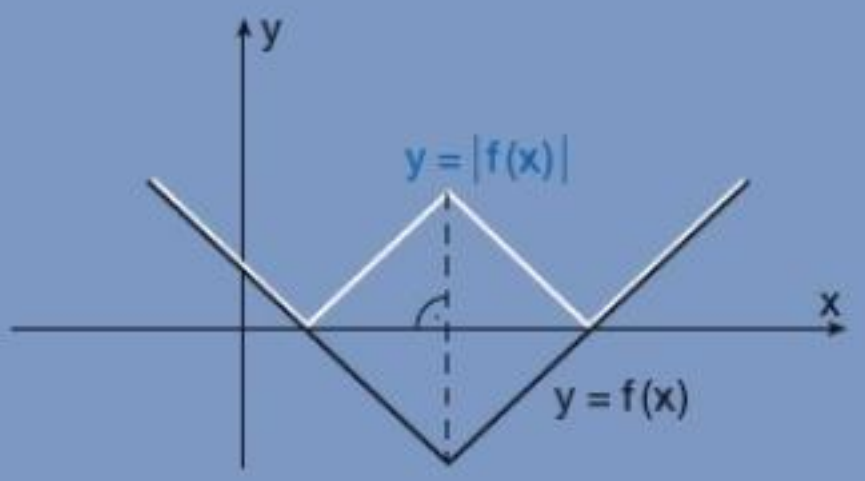
Stückzahl	10 bis 24	25 bis 49	ab 50
Rabatt	15 %	20 %	25 %

a) Welche Gleichungen beschreiben die Funktion *Stückzahl n* $\mapsto$ *Kosten K*?
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für $0 \le n \le 60$.

Mit der ganzen Algebra ist man oftmals nur ein Narr, wenn man nicht noch etwas anderes weiss.

Friedrich der Grosse, 1712–1786, preussischer König

3.3.7 Betragsfunktionen



Der Graph von $y = |f(x)|$ besteht aus allen Teilen des Graphen von $y = f(x)$, die oberhalb der x-Achse liegen, und den an der x-Achse gespiegelten Teilen, die unterhalb derselben verlaufen.

640. Stellen Sie die folgende Funktion grafisch dar für $D = [-5\,;\,5]$.

a) $y = |x|$ b) $y = |2x|$ c) $y = \frac{1}{2}|x|$ d) $y = -0.6\,|x|$

641. Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktion für $D = [-2\,;\,2]$.

a) $y = |x| + 7$ b) $y = |x| - 4$ c) $y = \left|\frac{x}{3}\right| + 3$ d) $y = 4 - \frac{1}{2}|x|$

642. Zeichnen Sie den Graphen für $D = [-4\,;\,4]$. Gehen Sie von der Geraden $y = ax + b$ aus und wenden Sie den obigen Lehrsatz an. Beachte: $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

a) $y = |x+2|$ b) $y = \frac{1}{3}|x - 1.5|$ c) $y = -|2x+5|$ d) $y = -3|2-x|$

643. Zeichnen Sie den Graphen.
Wählen Sie den Definitionsbereich so, dass alle Knickpunkte ersichtlich sind.

a) $y = \big||3x| - 5\big|$ b) $y = \left|-4 - \frac{1}{2}|x|\right|$

c) $y = \big||x-5| - 7\big|$ d) $y = \left|\frac{1}{2}|x+4| - 6\right|$

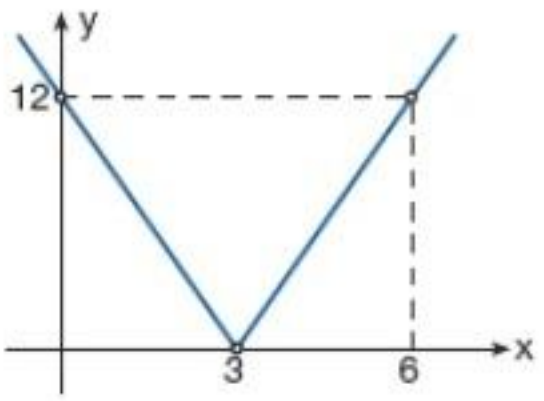
644. Stellen Sie die folgende Funktion grafisch dar.

a) $y = |x+1| + |x-1|\,;\ -2 \le x \le 2$ b) $y = |x| + |x+1| + |x+2|\ ;\ -3 \le x \le 1$

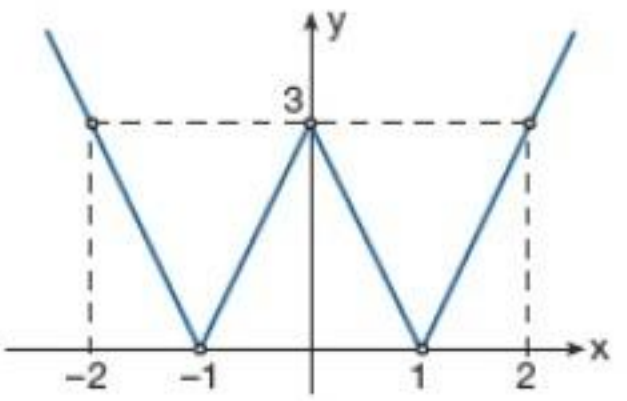
c) $y = \frac{1}{2}(|x| + x) + 1\ ;\ -5 \le x \le 5$ d) $y = \frac{|x|}{x}\ (x \neq 0)\ ;\ -5 \le x \le 5$

645. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Verwenden Sie die Betragsfunktion.

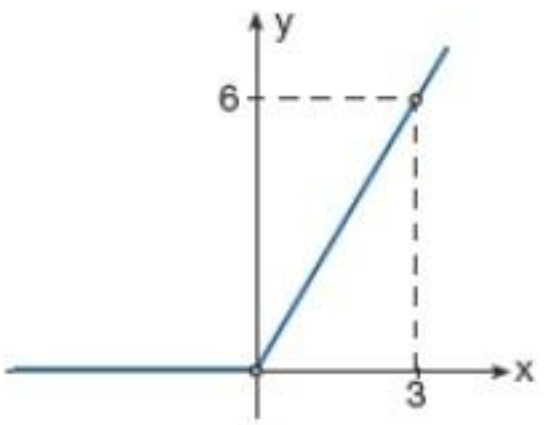
a)



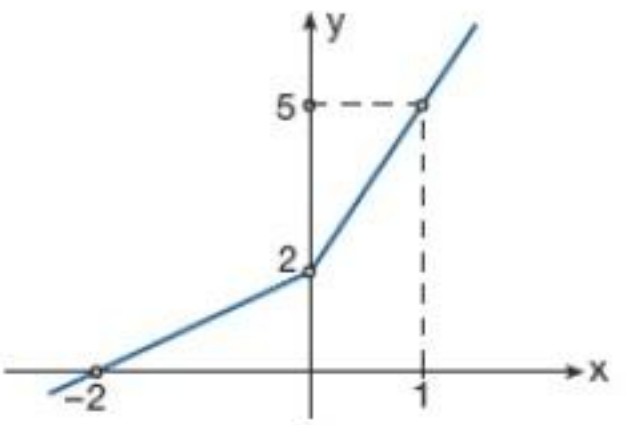
b)



c)



d)



646. Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung bzw. Ungleichung grafisch.

Vorgehen: Betrachten sie die linke und rechte Seite der Gleichung (Ungleichung) je als eine Funktion und stellen Sie diese in demselben Koordinatensystem grafisch dar.

a) $|x| = 4 - \frac{x}{2}$ b) $3x = |5 - x|$ c) $|2x + 10| \leq |5x|$

d) $|x| + 4 > |2x - 1|$ e) $|x| - 3 = |2x + 5|$ f) $\big||x| - 8\big| = \frac{x}{4} + 5$

647. Bestimmen Sie die *Anzahl* Lösungen der folgenden Gleichung in Abhängigkeit des Parameters p $(p \in \mathbb{R})$.

a) $|x| + 3 = p$ b) $\big||x| - 6\big| = p$

c) $\big|8 - |x - 2|\big| = p$ d) $|x + 1| - |x - 1| = p$

3.3.8 Geradenscharen

648. Untersuchen Sie die folgenden Geradenscharen: $(a, t, u \in \mathbb{R})$

a) g_t: $y = 2.8x + t$ b) g_a: $y = a - ax$

c) g_a: $y = |a| \cdot x - 4.5$ d) g_u: $y = 2ux - |3u|$

649. Bestimmen Sie die Gleichung einer Geradenschar bei folgender Bedingung:

a) alle Geraden gehen durch den Punkt P (2/3).
Wählen Sie den y-Achsenabschnitt b als Parameter.

b) alle Geraden gehen durch den Punkt P (–5/–7).
Wählen Sie die Steigung a als Parameter.

c) alle Geraden gehen durch den Punkt P (–4/9) und haben eine negative Steigung.
Wählen Sie die Steigung a als Parameter.

650. Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:
Die Koordinatenachsen und eine Schargerade bilden jeweils ein rechtwinkliges Dreieck im ersten Quadranten mit dem Flächeninhalt 30 m^2. ($e_x = e_y = 1m$)
Bestimmen Sie die Gleichung der Geradenschar.

651. Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:
Der Abschnitt jeder Geraden im ersten Quadranten hat die Länge 8 cm. ($e_x = e_y = 1$ cm)
Bestimmen Sie die Gleichung der Geradenschar.
Wählen Sie den y-Achsenabschnitt b als Parameter.

652. Bestimmen Sie die Gleichung der Geradenschar, die durch den Punkt P (m/n) geht.

a) Wählen Sie den y-Achsenabschnitt b als Parameter.

b) Wählen Sie die Steigung a als Parameter.

3.3.9 Grafisches Lösen linearer Gleichungssysteme

653. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem grafisch.

a) $\left| \begin{array}{r} x + y = -8 \\ 7x - 1.5 = 4.5y \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} 6p - 7q = 2.5 \\ -12.5p + 11q = -17.75 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{r} 3n - 34.5 = 5.5m \\ -12.5n - 64.65 = 20.5m \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} 3.5 = -0.5d + 0.4c \\ 5d = 4c - 52.5 \end{array} \right|$

654. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem grafisch.

a) $\left| \begin{array}{l} y = -0.5\,|x| + 7 \\ y = |x - 2| \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} y = -0.4\,|x| + 4 \\ y = |2\,|x| - 8| \end{array} \right|$

655. $\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right|$ Welche Bedingung müssen die Konstanten a_n, b_n und c_n ($n = 1; 2$) erfüllen, damit das System

a) keine Lösung b) genau eine Lösung c) ∞-viele Lösungen besitzt?

3.4 Quadratische Funktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0)$ heisst **quadratische Funktion** oder Polynomfunktion zweiten Grades.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ nennen wir **Grundform** und $f(x) = a(x - m)^2 + n$ heisst **Scheitelform** einer quadratischen Funktion.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel,** deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft.

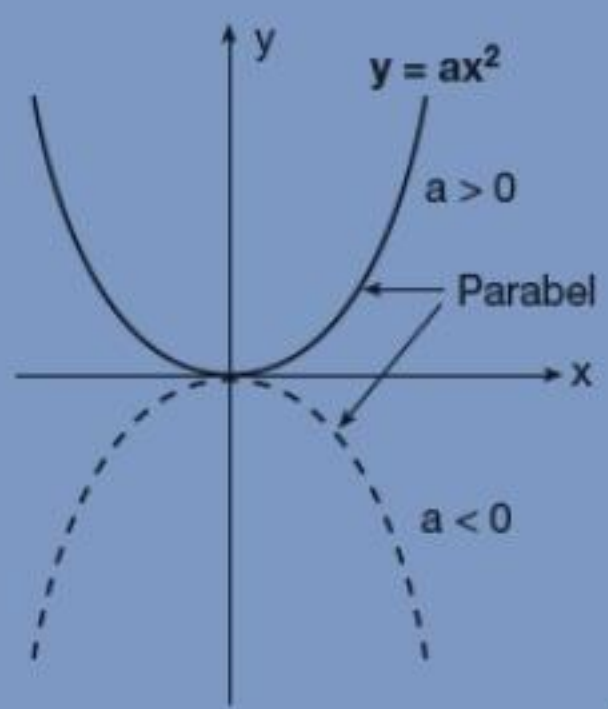
Der Graph von $y = x^2$ heisst **Normalparabel.**

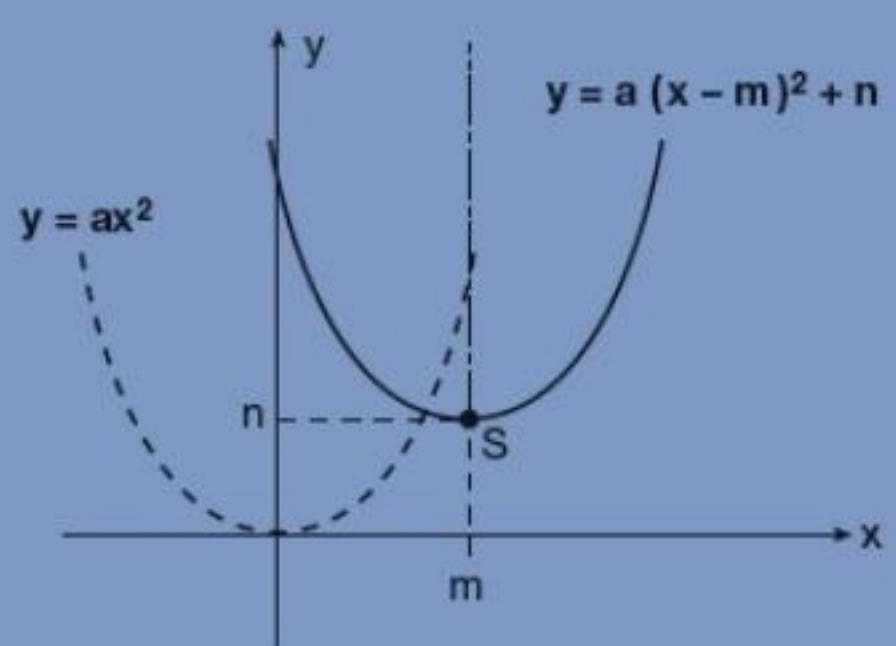
Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ ist zur Parabel $y = ax^2$ kongruent.

$a > 0 \Leftrightarrow$ Parabel ist nach *oben* geöffnet.

$a < 0 \Leftrightarrow$ Parabel ist nach *unten* geöffnet.

$y = a(x - m)^2 + n \Rightarrow$ Scheitel $S(m/n)$





656. a) Was ist eine quadratische Funktion?
b) Wie viele Nullstellen hat eine quadratische Funktion?
c) Wie heisst der Graph einer quadratischen Funktion?

657. Welche der folgenden Funktionen sind quadratisch, welche linear?
Schreiben Sie diese in der Grundform.

$f_1(x) = (x^2 - 1)^2$ $\quad f_2(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$ $\quad f_3(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{5}$

$f_4(x) = \frac{(x-3)x - x^2}{7} - 4x$ $\quad f_5(x) = \frac{\pi(2-x)^2 + \sqrt{2}x}{45}$ $\quad f_6(x) = 4x^2 - 2\sqrt{x} + 1$

$f_7(x) = 3x(x+2) - 3x^2 - 6$ $\quad f_8(x) = \frac{\sqrt{5} - x}{x^2} + 2x$ $\quad f_9(x) = \sqrt{3}(4 + 2x)^2 - \frac{3}{4}x$

658. Welche Funktionen sind quadratisch? Schreiben Sie diese in der Grundform.

$f_1(a) = \frac{a^2 + \sqrt{3}a}{b} - 5$ $\quad f_2(b) = \frac{b-7}{3b^2} + 2b$ $\quad f_3(c) = \frac{1}{2}(c-4)(c+5) - 5$

$f_4(n) = a - 3b - \frac{3}{2}(n+5)^2$ $\quad f_5(t) = \frac{\pi(7-t)^2 + \sqrt{s}\cdot t}{4}$ $\quad f_6(u) = u^2 - \frac{(u-6)^2}{u}$

659. Geben Sie einige quadratische Funktionen aus der Geometrie, Physik ... an.

3.4.1 Der Graph einer quadratischen Funktion

660. Skizzieren Sie den Graphen.
Gehen Sie von der Parabel p: $y = x^2$ aus und nennen Sie die geometrische(n) Abbildung(en). (Siehe Seiten 163 und 164)

a) $y = 1.5x^2$ $\quad$ b) $y = 0.4x^2$ $\quad$ c) $y = -4x^2$

d) $y = 3x^2 + 5$ $\quad$ e) $y = -0.7x^2 - 2.5$ $\quad$ f) $y = -5x^2 + 6$

661. Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung grafisch.
Vorgehen:
- Bringen Sie die gegebene Gleichung auf die Form $x^2 = px + q$.
- Zeichnen Sie die Graphen von $y = x^2$ und $y = px + q$ in dasselbe Koordinatensystem. (Den Graphen von $y = x^2$ $(-9 \le x \le 6)$ brauchen Sie nur einmal zu zeichnen, z. B. auf Millimeterpapier.)

a) $2x^2 = 27$ $\quad$ b) $3x^2 = -22.5x + 40.5$

c) $7.5 + 5x^2 = -x$ $\quad$ d) $6x = 154 - 4x^2$

662. Skizzieren Sie den Graphen.
Gehen Sie von der Parabel p: $y = x^2$ aus und nennen Sie die geometrische(n) Abbildung(en).

a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = (x - 3)^2$ c) $y = -(x + 2)^2$

d) $y = -1.5\,(2 - x)^2$ e) $y = -0.5\,(x + 4)^2 + 4$ f) $y = (3x - 18)^2 + 7$

663. Eine quadratische Funktion habe die Nullstellen x_1 und x_2.
Berechnen Sie die Scheitelkoordinate x_s.

664. Der Scheitel einer Parabel kann wie folgt berechnet werden:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Hilfsfunktion: $h(x) = ax^2 + bx$

Nullstellen von h: $ax^2 + bx = 0 \;\Rightarrow\; x\,(ax + b) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;,\; x_2 = \frac{-b}{a}$

Scheitel S: $x_s = \frac{x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$

$y_s = f(x_s)$

Begründen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens.
Hinweis: Stellen Sie die Funktionen f und h grafisch dar.

665. Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten.

a) $y = 3x^2 - 12x$ b) $y = (x + 4)(2x - 6)$ c) $y = x^2 + 3x + 4$

d) $y = x^2 - 8x - 5$ e) $y = -6(3x - 1)^2$ f) $y = 0.3x^2 - 12x + 9$

g) $y = -3x^2 - 6x + 10$ h) $y = -8x^2 - 24x + 12$

666. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.
Berechnen Sie den y-Achsenschnittpunkt, die Nullstellen und die Scheitelkoordinaten.

a) $y = -3x^2$ b) $y = 0.5\,(x^2 + 6)$ c) $y = x^2 - x$

d) $y = -2x^2 - 3x$ e) $y = x^2 - x + 1$ f) $y = (6 - x)^2$

g) $y = 2(x - 5)(x + 7)$ h) $y = (4 + 2x)^2$ i) $y = 8(x + 0.5)^2 - 1$

667. Stellen Sie die folgende Funktion grafisch dar.

a) $y = |2x^2 - 6x|$ b) $y = |x^2 - 10x + 5|$

668. Lösen Sie die folgende Gleichung grafisch.

a) $|x^2 - 8| = 6$ b) $|2x^2 - 32| = 1.5x + 20$

669. Bestimmen Sie die Anzahl Lösungen der folgenden Gleichung in Abhängigkeit des Parameters a ($a \in \mathbb{R}$).

a) $|x^2 - 20| = a$ b) $|-x^2 + 4x + 12| = a$

3.4.2 Quadratische Ungleichungen

670. Lösen Sie die folgende Ungleichung mithilfe des Graphen einer quadratischen Funktion.

a) $6a^2 < 9a$ b) $m^2 \geq 100$ c) $(x-2)^2 < 9$

d) $-12 < p^2 + 8p \leq 20$ e) $1 < (2t-1)^2 < 16$ f) $|5x^2 - 20x| > 15$

671. Für welche x-Werte ist der Term definiert?

a) $\sqrt{(2x-3)(3x+7.5)}$ b) $3x + \sqrt{2x^2 + 7x + 3}$ c) $\dfrac{\sqrt{-20x^2 + 9x - 1}}{x-2}$

d) $\sqrt{5(x^2 + x + 1)}$ e) $\sqrt{-10x^2 + 20x - 40}$

672. Ein Rechteck hat einen Umfang von 25 cm und einen Flächeninhalt von höchstens 36 cm². Wie breit kann das Rechteck höchstens sein?

673. Welche Zahlen sind um mindestens 10 kleiner als ihre Quadrate?

674. Für welche Parameterwerte hat die Gleichung keine Lösungen?

a) $x^2 + 2ax + 3 = 0$ b) $x^2 - kx + k^2 = 0$ c) $px^2 + px + 2 = 0$

d) $(k+2)x^2 + 4kx + 2 = 0$

675. Für welche Werte des Parameters p ist der folgende Term für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv?

a) $x^2 - px + 3$ b) $(p+1)x^2 + px + 1$

3.4.3 Bestimmung der Funktionsgleichung

Geben Sie die gesuchte Parabel- bzw. Funktionsgleichung stets in der Grundform an.

676. Bestimmen Sie die Gleichung einer Parabel so, dass sie durch die Punkte P, Q und R geht.

a) P(–4/8) ; Q(0/0) ; R(10/15)

b) P(1/–1) ; Q(2/4) ; R(4/8)

c) P(6/–83) ; Q(–1/–16.5) ; R(–2/–27)

677. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Scheitel S so, dass sie durch den Punkt P geht.

a) S(2/1) ; P(0/4)

b) S(–1/0) ; P(1/3)

678. Bestimmen Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen 2 und –3.5 und dem Funktionswert $f(4.5) = 24$.

Dubium sapientiae initium. Zweifel ist der Weisheit Anfang.

René Descartes, 1596–1650, franz. Philosoph und Mathematiker

679. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a) Eine Parabel hat den Scheitelpunkt S(0/80).
Für die beiden Nullstellen x_1 und x_2 gilt: $|x_1 - x_2| = 20$.

b) Eine quadratische Funktion hat die Nullstellen s und –s.
Der maximale Funktionswert ist h.

680. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a) Eine Parabel schneidet die x-Achse bei Null und 12. Der Scheitelpunkt hat die y-Koordinate 8.

b) Eine quadratische Funktion hat die Nullstellen Null und t.
Der maximale Funktionswert ist k.

681. Die Parabel p: $y = 3x^2$ werde so verschoben, dass die neuen Koordinaten des Scheitels (5/–8) sind. Wie lautet die Gleichung der Bildparabel?

682. Bestimmen Sie die Gleichung der Bildparabel.

a) Die Parabel $y = 2x^2 - 8x$ wird von der x-Achse aus mit dem Faktor 3 gestreckt.

b) Die Parabel $y = 4x^2 - 40x + 90$ wird von der Geraden $y = 25$ aus mit dem Faktor 0.5 gestreckt.

c) Die Normalparabel $y = x^2$ wird um $6\ e_y$ nach oben verschoben und dann von der Geraden $y = 10$ aus mit dem Faktor 3 gestreckt.

683. Die Parabel $y = x^2 - x$ werde an der Geraden $y = 2$ gespiegelt.
Geben Sie die Gleichung der Bildparabel an.

684. Die Parabel $y = 3x^2 - 12x + 21$ werde am Punkt P gespiegelt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildparabel.

a) $P(-2/0)$ b) $P(5/5)$

685. Eine nach unten geöffnete Parabel schneidet die x-Achse in den beiden Punkten N (0/0) und M. Ihr Scheitelpunkt sei S. Sie geht ferner durch den Punkt $P(\sqrt{3}/5.25)$.
Das Dreieck NSM ist gleichseitig.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und die Koordinaten des Punktes M.
(Lösung exakt angeben).

686. Eine nach oben geöffnete und zur Normalparabel kongruente Parabel hat den Scheitelpunkt auf der Geraden g: $y = -2$ und schneidet die Gerade h: $y = -2x + b$ in den Punkten $P(-2/y_P)$ und $Q(3/y_Q)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

687. Bestimmen Sie den Parameter u so, dass der Scheitelpunkt der Parabel $y = ux^2 + ux + u$ auf der Gerade $y = -3x - 2$ liegt.

688. Berechnen Sie den Parameter m so, dass der Scheitel der Parabel $y = (mx)^2 + (1 + m)x + 1$ auf der x-Achse liegt.

689. Wie muss man die Parabel $y = ax^2$ verschieben, damit man die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ erhält?

690. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P auf der Parabel $y = 0.2\sqrt{3}x^2 + 4$ so, dass die Strecke zwischen P und dem Scheitelpunkt 10 cm misst. $(e_x = e_y = 1\ \text{cm})$

3.4.4 Schnittpunkte von Graphen

691. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabel $y = -2x^2 + 8x - 7$ mit der Geraden $y = -x + 2$.

692. Berechnen Sie die gemeinsamen Punkte der Geraden $y = 1.8x - 2$ und der Parabel $y = ax^2 + bx + c$, auf welcher die Punkte P (0/0), Q (3/7.5) und R (6/6) liegen.

693. Eine Parabel $y = 1.2x^2 - 7x + 10$ wird von einer Geraden mit der Steigung -7 in den Punkten A (5/5) und B geschnitten.
Berechnen Sie die Koordinaten von B.

694. Von einer Geraden kennt man die Punkte A (6/0) und B (−3/6). Diese Gerade wird im Punkt C (3/…) von einer Parabel geschnitten, deren Scheitelpunkt in S (5/3) liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes zwischen Parabel und Gerade.

> Die Mathematik ist wie die Gottseligkeit zu allen Dingen nütze, aber wie diese nicht jedermanns Sache.
>
> Jakob Kraus, 1753–1807, dt. Philosoph

695. S (3/−4) sei der Scheitel einer Parabel. Die Gerade durch S mit dem y-Achsenschnittpunkt P (0/5) schneide die Parabel im Punkt U mit der Abszisse $x = -3$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

696. Berechnen Sie die Schnittpunkte folgender Kurven:

$y = -0.5x^2 - 3x + 5$ und $y = 0.5x^2 - x - 3$

697. a) Gegeben ist die Parabel $y = 0.5x^2 - x + 1.5$.
Eine Gerade habe die Gleichung $y = ax + b$ $(b > 2)$.
Die Differenz der y-Koordinaten der Geraden und der Parabel ist gegeben durch die Gleichung $d = 4.5 - 0.5(x - 2)^2$. Berechnen Sie a und b.

b) Berechnen Sie jenen x-Wert zwischen 0 und 4, bei welchem d am grössten ist.

3.4.5 Parabel und Tangente

698. Die Parabel $y = 0.5x^2 + 4x + c$ soll die Gerade $y = 0.8x - 10$ berühren.
Bestimmen Sie c.

699. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Parabel, die die Gerade g berührt und durch die Punkte P und Q geht.

a) g: $y = 20x + 24$ P (–5/–4) Q (7.5/258.5)

b) g: $y = -0.3x + 10.6$ P (–4/1.8) Q (–9/–9.2)

700. Die Parabel p_1 mit dem Scheitelpunkt S_1 (2/1) berührt eine zu ihr kongruente, aber nach unten geöffnete Parabel p_2 im Punkt T (5/4).
Geben Sie die Gleichung der Parabel p_2 in der Form $y = ax^2 + bx + c$ an.

701. Eine zur Parabel $y = x^2$ kongruente, ebenfalls nach oben geöffnete Parabel p berührt die Gerade $y = 3x - 2$ im Punkt T. T hat die x-Koordinate 1.5.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p.

702. Gegeben sind die Geraden $y = 5x + 26$ und $y = -3x + 10$.
Bestimmen Sie die Gleichung einer zur Parabel $y = x^2$ kongruenten, ebenfalls nach oben geöffneten Parabel, die die gegebenen Geraden berührt.

703. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Parabel, die die Geraden g_1, g_2 und g_3 berührt.

a) g_1: $y = 6x + 5$ g_2: $y = 3x + 6.5$ g_3: $y = 2x + 5$

b) g_1: $y = -1.4x + 7.15$ g_2: $y = -0.4x + 4.4$ g_3: $y = 0.8x - 2.2$

704. Berechnen Sie den Parameter q so, dass die Parabel $y = x^2$ und die Gerade g genau einen Punkt gemeinsam haben.

a) g: $y = 5.8x + q$ b) g: $y = qx - 17.64$

705. An die Parabel $y = x^2 + 8x + 9$ werden alle Tangenten gelegt, die durch den Ursprung laufen. Berechnen Sie die Gleichung dieser Tangenten.

706. Gegeben sind die Parabeln $y = -0.7x^2 - 5.5x + 6.625$ und $y = 0.8x^2 + 5x - 20$

a) Um wie viel muss eine der beiden Parabeln in y-Richtung verschoben werden, bis sie die andere berührt?

b) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Berührungspunktes.

707. Gegeben sind die Parabeln $y = -2x^2 + 12x + 22$ und $y = -x^2 - 8x + 13.625$. Bestimmen Sie die Gleichung einer zur Normalparabel kongruenten Parabel, die die gegebenen Parabeln berührt.

3.4.6 Parabelscharen

708. Gegeben ist die Parabelschar p_c: $y = -0.8x^2 + 4x + c$.

a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort aller Scheitelpunkte.

b) Für welche c haben die Funktionen $y = -0.8x^2 + 4x + c$ *keine* Nullstellen?

709. Bestimmen Sie die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ aller Parabeln (Parabelschar), die durch die Punkte P und Q gehen. Wählen Sie a als Parameter.

a) P (–4/0) ; Q (3/0) b) P (–9/5) ; Q (2/5)

710. Wo liegen die Scheitelpunkte der Parabelschar p_a: $y = ax^2 + 2x + 3$?

711. Wo liegen die Scheitelpunkte der Parabelschar p_b: $y = 0.5x^2 - bx + 14$?

3.4.7 Geometrische Örter

712. Bestimmen Sie die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, die von der x-Achse und vom Punkt P den gleichen Abstand haben. [$e_x = e_y = 1$ cm]

a) P (0/5) b) P (0/–6) c) P (5/8) d) P (a/b)

713. Gegeben ist der Kreis k mit Zentrum Z (0/0) und dem Radius r = 10 cm. Bestimmen Sie die Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller Kreise, die die x-Achse und den Kreis k berühren. [$e_x = e_y = 1$ cm]

714. Gegeben sind eine Gerade g: $y = 7$ und ein Kreis k mit Z (5/2) und dem Radius $r = 15$ cm. Bestimmen Sie die Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller Kreise, die die Gerade g und den Kreis k berühren. [$e_x = e_y = 1$ cm]

3.4.8 Extremwertaufgaben

715. Für welches x nimmt die Funktion f den grössten bzw. kleinsten Wert an, $D = \mathbb{R}$?

a) $f(x) = 0.75x^2 - 7.5x + 24.75$ b) $f(x) = -0.125x^2 - 1.75x - 12.625$

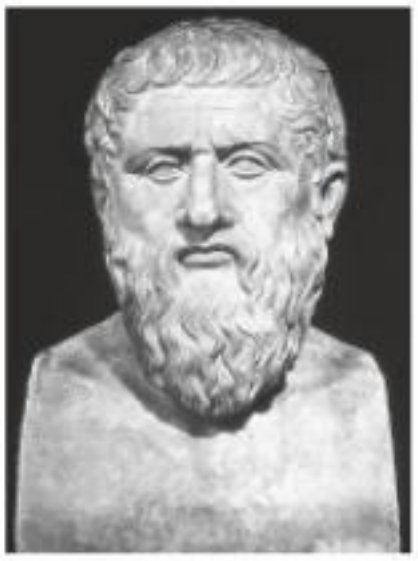
716. Bestimmen Sie das Minimum von $3x^2 + 10x$ für

a) $x \in \mathbb{Q}$ b) $x \in \mathbb{Z}$ c) $x \in \mathbb{N}$

717. Für welchen x-Wert ist der Term $(x - a)(x - b)$ minimal?
Wie gross ist dieses Minimum?

Geometrie ist die Erkenntnis von Gegenständen ewigen Seins.

Platon, 427–347 v. Chr., griechischer Philosoph



718. Die Parabel $y = x^2 - 2x + 3$ wird von der Geraden $y = tx + 5$ in den Punkten P und Q geschnitten.
Bestimmen Sie den Wert von t, für den die Summe der Abstände der beiden Punkte von der x-Achse möglichst klein ist.

719. Gegeben sind die Gerade $y = 0.3x + 1.5$ und die Parabel $y = 0.4x^2 - 1.7x + 9.5$.
Bestimmen Sie $P(x_P/y_P)$ auf der Parabel und $Q(x_Q/y_Q)$ auf der Geraden so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind: $x_Q = x_P$ und $|y_P - y_Q|$ ist minimal.

720. Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei Halbkreisen begrenzt, wobei die Halbkreise den gegenüberliegenden Rechteckseiten angesetzt sind. Wie gross muss der Kreisradius sein und wie lang ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll?

721. Einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b ist ein Rechteck von maximalem Flächeninhalt einzubeschreiben. Das Rechteck soll dabei so liegen, dass eine Ecke mit dem rechten Winkel des Dreiecks zusammenfällt.
Berechnen Sie Länge und Breite dieses Rechtecks.

722. Mit einem Seil der Länge s soll an einer Hauswand eine möglichst grosse Rechtecksfläche abgegrenzt werden, wobei eine Seite des Rechtecks durch die Wand gebildet wird. Bestimmen Sie Länge und Breite des Rechtecks.

723. Von einer rechteckigen Platte mit den Seiten 120 cm und 90 cm ist an einer Ecke ein rechtwinkliges Dreieck so abgebrochen, dass die längere Seite des Rechtecks um 30 cm und die kürzere um 20 cm verkleinert wird. Durch zwei Schnitte, die je parallel zu den bisherigen Seiten verlaufen, soll nun ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hergestellt werden.
Wie gross sind Länge und Breite des neuen Rechtecks?

3.4.9 Grafisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme

724. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem grafisch.

a) $\left| \begin{array}{r} 3x + y = 1 \\ x^2 + x + y = 0 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} (m - n)^2 = 4 \\ 2n + m + 7 = 0 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{r} v - 7 = 1.5u \\ v + 2.5u^2 = 7.5u + 3 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{r} q - 0.7p = -0.5p^2 - 0.3 \\ 1.5p^2 + 2p = 6 - q \end{array} \right|$

3.4.10 Aufgaben aus Physik und Technik

725. Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 14$ m/s senkrecht nach unten abgeworfen. $s = v_0 t + 0.5 gt^2$ Erdbeschleunigung $g \approx 10 m/s^2$
Aus welcher Höhe über dem Abwurfpunkt müsste der Stein fallen gelassen werden, damit die genau gleiche Bewegung entstehen würde?

726. Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 28$ m/s senkrecht nach oben abgeschossen. $h = v_0 t - 0.5 gt^2$ $g \approx 10 m/s^2$

a) Zeichnen sie das h-t-Diagramm vom Abwurfpunkt bis zur Rückkehr.

b) Berechnen Sie die Wurfhöhe und die Steigzeit.

727. Ein Körper wird von einem 40 m hohen Turm horizontal abgeworfen. 50 m vom Turm entfernt trifft er auf dem Boden auf.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wurfparabel (der Scheitel ist an der Abwurfstelle), wenn der Ursprung des Koordinatensystems am Fuss des Turms angenommen wird.
(x: Entfernung vom Turm, $0\text{m} \leq x \leq 50\text{m}$)

Also dass es einer auss meinen Gedanken ist, ob nicht die gantze Natur und alle himmlische Zierligkeit in der Geometria symbolisirt sey.

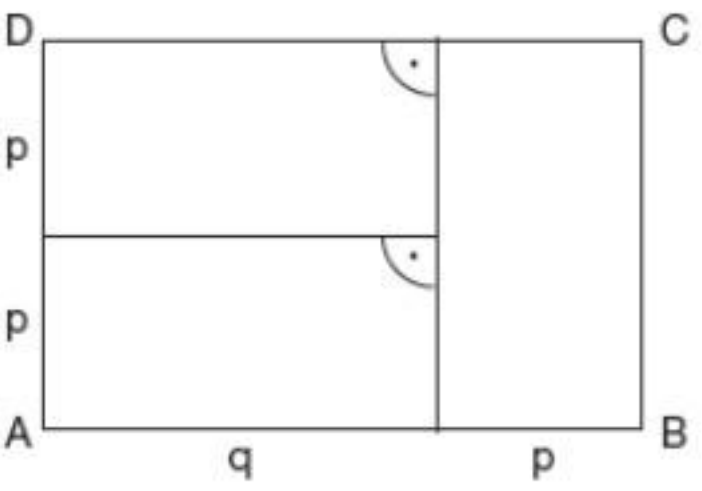
Johannes Kepler, 1571–1630, deutscher Astronom

728. Bei einem schiefen Wurf sind zwei Punkte A (60 m/27m) und B (70 m/15.75 m) der parabelförmigen Flugbahn bekannt.

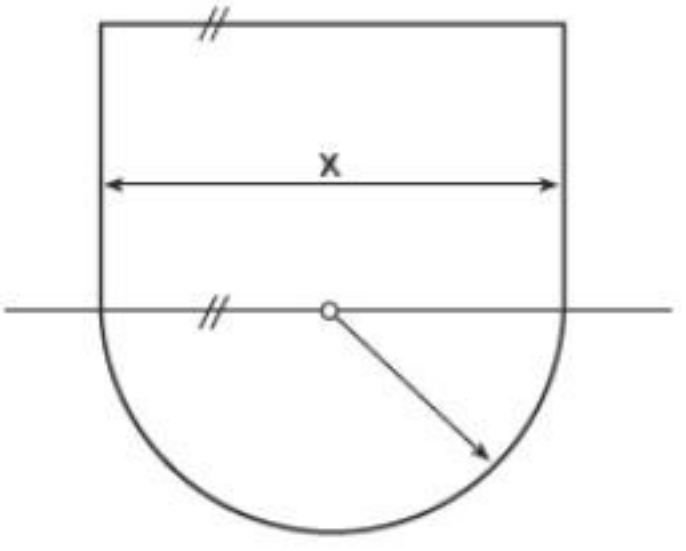
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Flugbahn $y = f(x)$, wenn der Ursprung des Koordinatensystems beim Abwurfpunkt angenommen wird.

b) Berechnen Sie die Wurfweite und die Wurfhöhe.

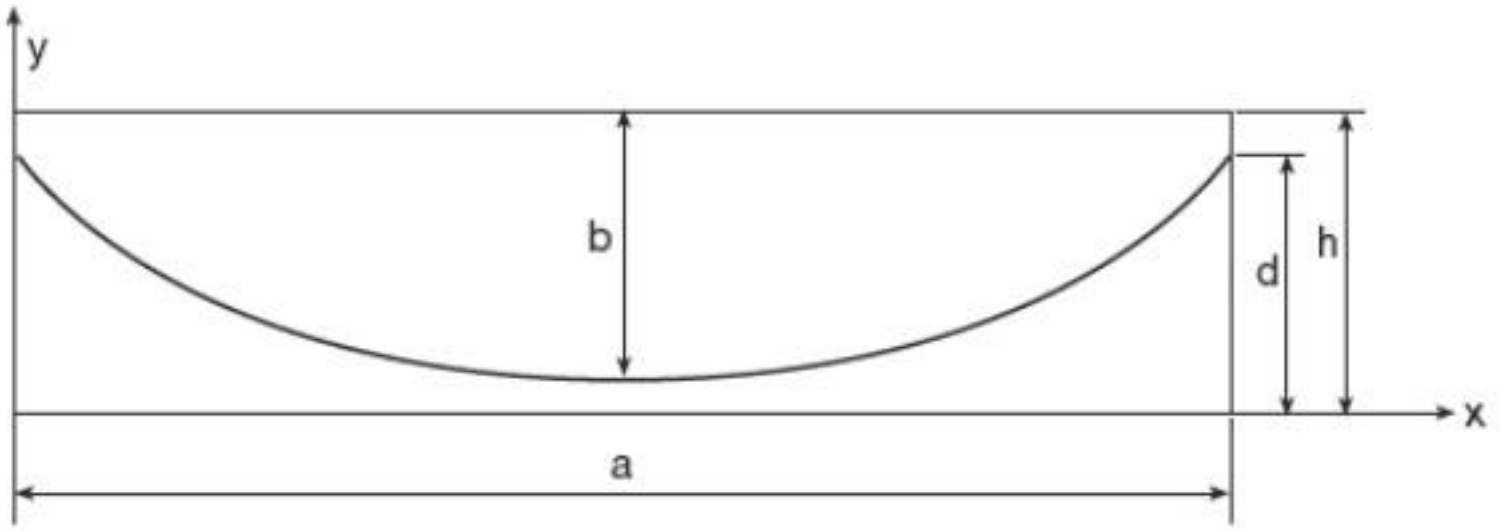
729. Kurt hat eine Rolle Drahtgitter von der Länge a zur Verfügung. Er muss ein rechtwinkliges Gebiet ABCD so umzäunen und abteilen, wie die Figur zeigt.
Für welche Abmessungen p und q wird der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD maximal?



730. Ein Lüftungskanal wird aus ästhetischen Gründen mit der abgebildeten Querschnittsform geplant. Der Umfang des Querschnitts soll 160 cm betragen.
Für welches Mass x wird die Querschnittsfläche maximal?



731. Die Spannkabel einer vorgespannten Betonbrücke verlaufen gemäss Skizze parabolisch.



a = 40 m b = 3.40 m h = 3.60 m d = 3.30 m

Bestimmen Sie für das eingezeichnete Koordinatensystem die Gleichung für das Kabel.

Wir brennen vor Begier, alles zu ergründen und einen Turm aufzuführen, der bis in die Unendlichkeit reicht. Aber unser ganzes Gebäude kracht und die Erde öffnet sich bis in die Tiefen.

Blaise Pascal, 1623–1662,
franz. Mathematiker und Philosoph

732. Die Leistung P einer 6-düsigen Pelton-Turbine ist wie folgt von Wasser- und Turbinenbechergeschwindigkeit abhängig:

$P = 2\rho Q(v_W v_T - v_T^2)$

v_W: Wassergeschwindigkeit (vor Aufprall)
v_T: Geschwindigkeit Turbinenbecher
Q: Durchflussmenge pro Sekunde
ρ: Dichte von Wasser

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_T, bei der die Leistung P maximal wird.

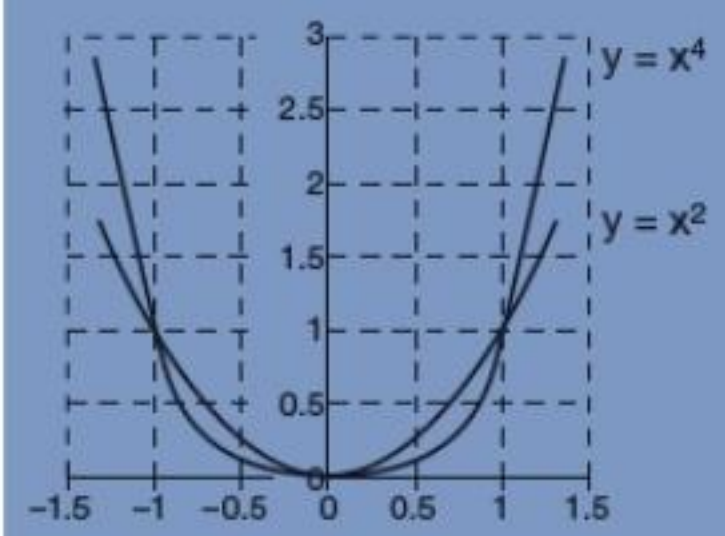
3.5 Potenzfunktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = x^n}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ [1] heisst **Potenzfunktion.**

Der Graph einer Potenzfunktion $y = x^n$ heisst **Parabel n-ter Ordnung.**

Exponent gerade:

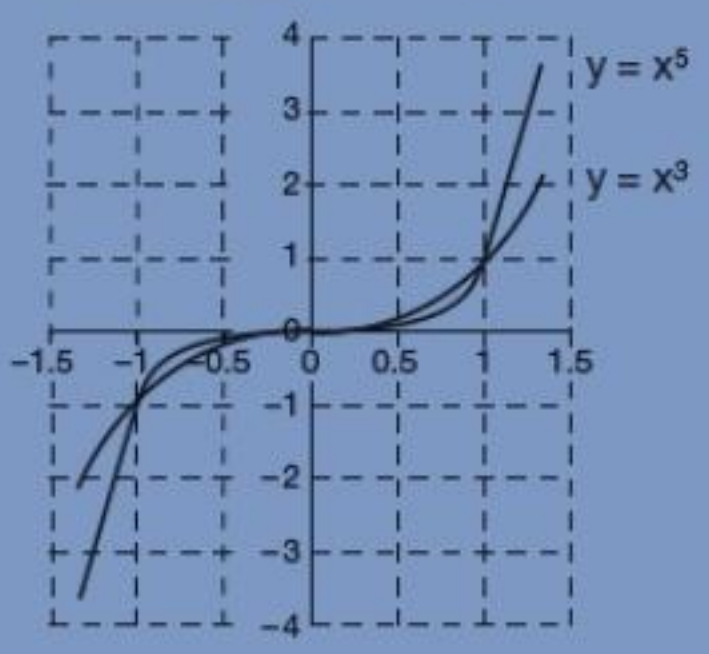
$y = x^{2m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$



Die Graphen sind *achsensymmetrisch* zur y-Achse.

Exponent ungerade:

$y = x^{2m+1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$



Die Graphen sind *punktsymmetrisch* zum Ursprung (0/0).

733. Zeichnen Sie die Graphen für $D = [-3\,;\,3]$ in dasselbe Koordinatensystem.

a) $y = x^4$ $y = x^6$ b) $y = x^3$ $y = x^5$

734. Betrachten Sie die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$, $n = 2, 3, 4 \ldots$

a) Welche Nullstellen haben diese Funktionen?

b) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich an.

c) Wie heissen die Graphen dieser Funktionen?

---

1) Üblicherweise zählt man auch Funktionen mit *negativen* ganzzahligen Exponenten zu den Potenzfunktionen. Da die Graphen dieser Funktionen Hyperbeln und keine Parabeln sind, erscheinen sie im Kapitel «3.7 Rationale Funktionen».

735. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y = x^n$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ in dasselbe Koordinatensystem. Wählen Sie den Grafikbereich $-1.2 \leq x \leq 1.2$
Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen mithilfe dieser Graphen.

(1) $x = x^3$ (2) $x = x^4$ (3) $x^2 = x^4$

(4) $x^4 < 1$ (5) $x^5 \leq 1$ (6) $x < x^3$

(7) $x > x^4$ (8) $x^2 < x^3$ (9) $x^2 < x^4$

736. Bestimmen Sie eine Potenzfunktion $y = x^n$, deren Graph durch den Punkt P geht.

a) $P(2/8)$ b) $P(-3/81)$ c) $P(-2/-128)$ d) $P\left(\frac{1}{2}/\frac{1}{32}\right)$

737. Bestimmen Sie a und n so, dass der Graph von $f(x) = ax^n$ durch die Punkte P und Q geht.

a) $P(1/0.5)$, $Q(2/4)$ b) $P(3/18)$, $Q(6/144)$

c) $P(-2/-64)$, $Q(3/486)$ d) $P(-2/-12)$, $Q(4/-192)$

738. Kann man mithilfe einer Streckung bezüglich der x-Achse eine Parabel vierter Ordnung aus einer Parabel zweiter Ordnung erzeugen? Antwort begründen!

739. Bestimmen Sie die *Anzahl Lösungen* der folgenden Gleichung in Abhängigkeit des Parameters p ($p \in \mathbb{R}$).

a) $x^6 = p$ b) $x^7 = p$

Hinweis: Skizzieren Sie den Graphen von $y = x^n$.

740. Lösen Sie die folgende Gleichung (Ungleichung) grafisch; ohne Rechner.

a) $x^3 = 12x$ b) $0.1x^3 = 10 - 2x$ c) $0.01x^4 - 4x = 15$

d) $0.05x^4 + 3x + 10 = 0$ e) $|x^3| = 27$ f) $|x^3| + 4.5x = 9$

g) $x^3 - 12x > 2$ h) $\frac{1}{2}x^4 + 4x \geq 20$

Mathematik ist die Wissenschaft, welche die notwendigen Schlussfolgerungen zieht.

Benjamin Peirce, 1809–1880, amerik. Mathematiker

741. Skizzieren Sie den Graphen.
Gehen Sie jeweils von der Parabel $y = x^n$ aus und nennen Sie die geometrischen Abbildungen.
Wie viele Nullstellen hat die Funktion?

a) $y = x^3 + 5$ b) $y = x^6 - 10$ c) $y = 0.5x^4$

d) $y = 0.1x^7$ e) $y = -x^6$ f) $y = 0.5x^3 - 13$

g) $y = -0.1x^4 - 8$ h) $y = -2x^5 + 6$ i) $y = 3x^6 - 11$

742. a) Die Parabel $y = x^4$ wird von der x-Achse aus mit dem Faktor 2 gestreckt und anschliessend um $8e_y$ nach unten verschoben.
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildparabel.

b) Wie lautet die Gleichung der Bildparabel, wenn die beiden Abbildungen vertauscht werden?

743. Gegeben ist die Parabel p: $y = 3x^3 - 2$.
Wie lautet die Gleichung der Bildparabel?

a) p wird um $6e_y$ nach oben verschoben.

b) p wird von der x-Achse aus mit dem Faktor 0.5 gestaucht.

c) p wird von der Geraden $y = -5$ aus mit dem Faktor 2 gestreckt.

d) p wird an der y-Achse gespiegelt.

744. Skizzieren Sie den Graphen. Gehen Sie von der Parabel p: $y = x^n$ aus.
Bestimmen Sie zuerst die Nullstelle der Funktion.

a) $y = (x - 5)^2$ b) $y = (x + 3)^4$ c) $y = (x - 7)^3$

d) $y = (x + 12)^5$ e) $y = (10 - x)^6$ f) $y = (9 - x)^3$

745. Gegeben ist die Parabel p (3. Ordnung): $y = x^3$.
Wie lautet die Gleichung der Bildparabel?

a) p wird um $6e_x$ nach rechts verschoben.

b) p wird um $2e_x$ nach links verschoben.

c) p wird um $2e_y$ nach oben verschoben und dann von der x-Achse aus mit dem Faktor 5 gestreckt.

3.6 Polynomfunktionen

Siehe auch Arithmetik, «1.1.4 Polynome»

Eine Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$
heisst **Polynomfunktion** oder ganzrationale Funktion **n-ten Grades.**

Jede lineare Funktion $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ ist eine Polynomfunktion ersten Grades.

Jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.

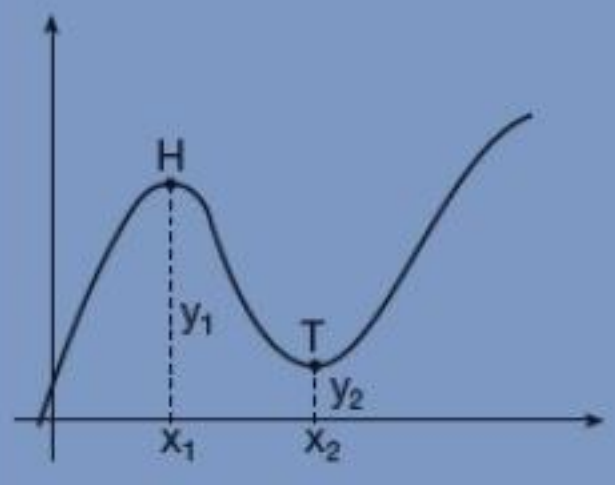
Jede Potenzfunktion $f(x) = ax^n$ $(a \neq 0, n > 1)$ ist eine Polynomfunktion n-ten Grades.

Der Graph einer Polynomfunktion n-ten Grades heisst **Parabel n-ter Ordnung.**

Eine Polynomfunktion verhält sich
(1) für *kleine* $|x|$-Werte $(x \to 0)$ näherungsweise wie die Glieder mit den niedrigsten x-Potenzen.
(2) für *grosse* $|x|$-Werte $(x \to \pm\infty)$ näherungsweise wie das Glied mit der höchsten x-Potenz.

Beispiel: $f(x) = 8x^4 + x^3 - 2x^2 + 6$ Für kleine $|x|$-Werte gilt: $f(x) \approx -2x^2 + 6$,
für grosse $|x|$-Werte: $f(x) \approx 8x^4$

Extremstellen und Extremwerte



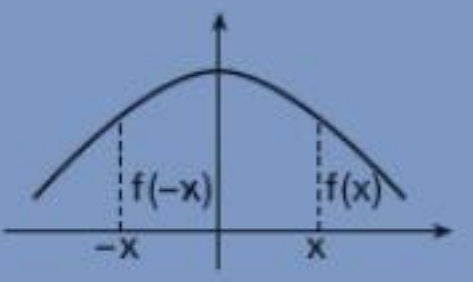
Funktion: x_1, x_2: Extremstellen
y_1: relatives Maximum } Extremwerte
y_2: relatives Minimum

Graph: H: Hochpunkt } Extrempunkte
T: Tiefpunkt

Symmetrie

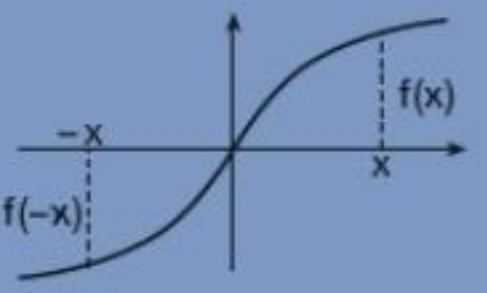
Der Graph einer Funktion f ist *symmetrisch zur y-Achse*, wenn gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennt man eine **gerade Funktion.**



Der Graph einer Funktion f ist *symmetrisch zum Nullpunkt*, wenn gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst **ungerade Funktion.**



746. Welche Funktionen sind Polynomfunktionen? Schreiben Sie diese in der Grundform.

$f_1(x) = \frac{12 - 9x}{3}$ $\quad f_2(x) = -x^9$ $\quad f_3(x) = 2x^3 + 1 - \frac{3}{x}$

$f_4(x) = x(x-1)(x+2)$ $\quad f_5(x) = 5x^4 - 2|x| + 6$ $\quad f_6(x) = (x+1)^4$

$f_7(x) = x^2 + 2^x$ $\quad f_8(x) = x^6 - 5x^{0.2}$ $\quad f_9(x) = \frac{2x^4 - x^3 + 20}{5}$

$f_{10}(x) = x + 2\sin(x)$

747. Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit

■ $f(x) = 8x^4 + x^3 - 2x + 20$, $g(x) = -2x + 20$ und $h(x) = 8x^4$.

(1) Für kleine $|x|$-Werte werde die Funktion f durch g ersetzt. Berechnen Sie den relativen Fehler in % für $x = 0.5$ und $x = 0.2$.

(2) Für grosse $|x|$-Werte werde die Funktion f durch h ersetzt. Wie gross ist der relative Fehler in % für $x = 10$ und $x = 100$?

748. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Funktion für $x \to 0$ und $|x| \to \infty$.
Geben Sie die entsprechenden Näherungsfunktionen an.
Skizzieren Sie anschliessend den Graphen der Funktion. (ohne Rechner!)

a) $y = 4x^3 - 2x + 1$ $\quad$ b) $y = 20 - 6x^2 - x^5$ $\quad$ c) $y = \frac{x^6 - 12x^4}{10}$

d) $y = (x+2)^4$ $\quad$ e) $y = x^3(4 - x) + 50$ $\quad$ f) $y = (3x - 2)(x+1)^3$

Gerade und ungerade Funktionen

749. Vergleichen Sie bei der folgenden Funktion die Funktionswerte an den Stellen a und –a. Welche Bedeutung hat das Ergebnis für den zugehörigen Graphen?

a) $f(x) = x^4 + x^2 + 11$ b) $f(x) = 2x^3 - 5x$ c) $f(x) = x^3 - x^2$

750. Welche Funktionen sind gerade, welche ungerade?
Geben Sie die entsprechenden Symmetrieeigenschaften der Graphen an.

$f_1(x) = 2x$ $f_2(x) = 2x + 1$ $f_3(x) = x^2$ $f_4(x) = 4x^2 - 8$ $f_5(x) = x^2 - x$

751. Welche Funktionen sind gerade, welche ungerade?
Geben Sie die entsprechenden Symmetrieeigenschaften der Graphen an.

$f_1(x) = x^3$; $f_2(x) = x^3 + 3$; $f_3(x) = 2x^3 - 5x$; $f_4(x) = x^3 + 6x - 2$; $f_5(x) = x^4$;
$f_6(x) = 3x^4 - 1$; $f_7(x) = 2x^2 - 3x^4$; $f_8(x) = x^4 + x^2 + x$; $f_9(x) = 9 - 2x^2 - 5x^4$

752. Wie erkennt man anhand des Funktionsterms, ob eine Polynomfunktion gerade oder ungerade ist?

753. a) Welche allgemeine Form hat die Gleichung einer Parabel 4. Ordnung, die zur y-Achse symmetrisch ist?

b) Welche allgemeine Form hat die Gleichung einer Parabel 5. Ordnung, die zum Ursprung punktsymmetrisch ist?

Der Graph einer Polynomfunktion

754. ■ Untersuchen Sie folgende Funktionen für die angegebenen Parameterwerte k (wählen Sie ca. vier Werte für k):
- Berechnen Sie alle Nullstellen (ohne Rechner).
- Wie viele Extremstellen haben die Funktionen?
- Sind die Funktionen gerade oder ungerade?

a) $f(x) = kx^3$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $f(x) = x^3 + kx$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

c) $f(x) = x^3 + kx^2$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ d) $f(x) = x(x - k)^2$, $k \in \mathbb{N}$

755. Untersuchen Sie folgende Funktionen für die angegebenen Parameterwerte k
■ (wählen Sie ca. vier Werte für k):
- Berechnen Sie alle Nullstellen (ohne Rechner).
- Wie viele Extremstellen haben die Funktionen?
- Sind die Funktionen gerade oder ungerade?

a) $f(x) = kx^4$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x) = x^4 + kx$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

c) $f(x) = x^4 + kx^2$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

d) $f(x) = x^4 - kx^3$, $k \in \mathbb{N}$

756. Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion.
■ Zu berechnen sind alle Nullstellen und alle Extrempunkte.
Nicht ganzzahlige Werte sind mit 3 geltenden Ziffern anzugeben.

a) $y = 8x - x^4$

b) $y = x^5 - 5x + 5$

c) $y = x^3 - 150x^2 + 7500x - 10^5$

d) $y = (x^2 - 100)(x - 2)^2$

e) $y = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 12$

f) $y = x^5 - 12x^3 + x$

Bestimmung der Funktionsgleichung

Geben Sie die gesuchte Funktionsgleichung stets in der Grundform an.

757. Bestimmen Sie eine Polynomfunktion f von möglichst kleinem Grad, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Nullstellen: -2 ; 3 und $f(2) = 1$

b) Nullstellen: 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$ und $f(1) = -2$

c) Nullstellen: -5 ; -1 ; 1 ; 5 und $f(0) = 100$

758. Gegeben ist die Parabel 3.Ordnung p: $y = x^3 - 6x^2$.
Wie lautet die Gleichung der Bildparabel?

a) p wird an der x-Achse gespiegelt.

b) p wird an der y-Achse gespiegelt.

c) p wird um $2e_x$ nach rechts verschoben.

d) p wird von der x-Achse aus mit dem Faktor 0.5 gestreckt.

■ e) p wird so von einer Geraden parallel zur x-Achse aus mit dem Faktor 3 gestreckt, dass der Tiefpunkt von p am gleichen Ort bleibt.

759. Die Parabel p: $y = \frac{1}{2}x^3$ werde um $4e_x$ nach rechts und um $k \cdot e_y$ nach oben verschoben. Berechnen Sie k so, dass die Bildparabel die gegebene Parabel zweimal schneidet.

760. ■ Bestimmen Sie eine Polynomfunktion von möglichst kleinem Grad, deren Graph durch die angegebenen Punkte geht.

a) $(-1/1)$, $(0/-3)$, $(2/5)$

b) $(3/5)$, $(1/1)$, $(-2/1)$, $(-4/-8)$

c) $(5/5)$, $(3/1)$, $(1/3)$, $(-1/1)$, $(-3/5)$

Gleichungen und Ungleichungen

761. Wie viele Lösungen hat eine Gleichung 3. Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$?
Hinweis: Wie viele Nullstellen hat eine Polynomfunktion 3. Grades?

762. Lösen Sie die folgende Gleichung grafisch, ohne Rechner.

a) $(x-4)^3 = 10$ b) $(x+3)^4 = 5x + 30$

763. ■ Bestimmen Sie die *Anzahl* Lösungen der folgenden Gleichung in Abhängigkeit des Parameters p $(p \in \mathbb{R})$.

a) $x^3 - 10x^2 = p$ b) $x^4 + x^3 - 12x^2 = p$ c) $x^5 - x^3 - x = p$

764. Lösen Sie die folgende Ungleichung ohne Rechner.

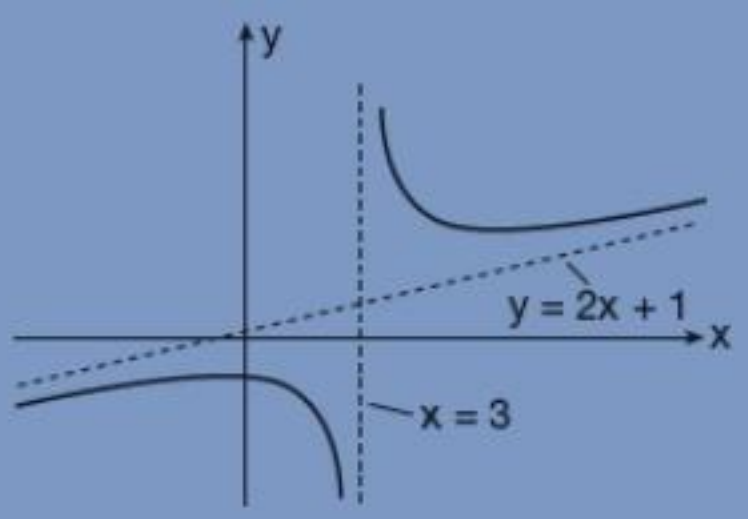
a) $(x+5)(x+1)(x-2) > 0$ b) $(x+4)^2(2x-3) \geq 0$ c) $x^3 - 5x < 0$

d) $(x^2-25)(x+1) \geq 0$ e) $x^4 - x^3 - 9x + 9 < 0$ f) $x^6 - 16 \geq 16x^2 - x^4$

3.7 Rationale Funktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}}$ heisst (gebrochen) **rationale Funktion,** wenn Z(x) und N(x) Polynome sind und der Grad des Nennerpolynoms N(x) mindestens 1 ist.

Beispiele: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2x}{x+5}$, $y = \frac{x-2}{(x+4)^3}$, $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$



$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 20}{x - 3} = 2x + 1 + \frac{23}{x - 3}$$

Die Funktion f hat eine Polstelle: $x_P = 3$.

Die Geraden $x = 3$ (Parallele zur y-Achse) und $y = 2x + 1$ sind Asymptoten des Graphen.

Polstelle: Ein Argument $x = a$ heisst Polstelle (oder Pol) der rationalen Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$, wenn $N(a) = 0$ und $Z(a) \neq 0$ ist.

Asymptote: Nähert sich eine Kurve immer mehr einer *Geraden,* ohne sie zu schneiden oder zu berühren, so heisst diese Gerade Asymptote.

Für grosse $|x|$-Werte kann der Graph näherungsweise durch die nicht senkrechte Asymptote ersetzt werden. Die Gleichung dieser Asymptoten kann mithilfe einer *Polynomdivision* bestimmt werden.

765. Welche Funktionen sind gebrochen rational?

$f_1(x) = \frac{1}{x^6}$, $f_2(x) = 3x + \frac{2}{3}$, $f_3(x) = \frac{x+1}{3}$, $f_4(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $f_5(x) = \frac{1}{(x +$

$f_6(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x-1}$, $f_7(x) = \frac{7-3x}{\sqrt{x^2-4}}$, $f_8(x) = \frac{x^3-4x}{|x|}$, $f_9(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

766. Gibt es rationale Funktionen, die keine Pole haben? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel.

767. Berechnen Sie die Polstellen der folgenden Funktion. Machen Sie eine Fallunterscheidung für den Parameter p ($p \in \mathbb{R}$).

a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+px}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-p}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2-x+p}$

768. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2x^2}{x-2}$.

a) Wie lautet die Gleichung der nicht senkrechten Asymptote g?

b) Für grosse x-Werte werde die Funktion f näherungsweise durch die Gleichung der Asymptote g ersetzt.
Wie gross ist der relative Fehler in % für $x = 10$; 20 und 100?

769. Durch welche Polynomfunktion bzw. konstante Funktion kann die folgende Funktion für grosse $|x|$-Werte näherungsweise ersetzt werden?

a) $y = \frac{10}{x-2}$ b) $y = \frac{12x}{20-x}$ c) $y = \frac{2x^2+x}{x-1}$ d) $\frac{x^3}{x+1}$

Der Graph einer rationalen Funktion

770. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n = 1, 2, 3$ und 4
Definitionsbereich: $D = [-4 ; 4]$
Welche Symmetrie haben die Graphen, wenn $e_x = e_y$ ist?

771. Skizzieren Sie den Graphen mit allen Asymptoten. Gehen Sie von der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ aus und nennen Sie die geometrischen Abbildungen.
Berechnen Sie die Nullstellen, falls vorhanden.

a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{1}{2x}$ c) $y = -\frac{1}{x}$ d) $y = \frac{1}{x} - 8$

e) $y = \frac{1}{x-3}$ f) $y = \frac{1}{x+6}$ g) $y = \frac{1}{2-x}$ h) $y = \frac{1}{2x+6}$

i) $y = \frac{2}{3x-12}$ j) $y = \frac{1}{x-8} + 4$ k) $y = \frac{6}{2x+5} - 10$

772. Skizzieren Sie den Graphen mit allen Asymptoten.
Gehen Sie jeweils von der Hyperbel $y = \frac{1}{x^n}$ aus. Berechnen Sie die Nullstellen.

a) $y = \frac{1}{(x-4)^2}$ b) $y = \frac{1}{(x+2)^3}$ c) $y = \frac{1}{(3-x)^2}$

d) $y = \frac{1}{(5-x)^3}$ e) $y = \frac{16}{(x+6)^4} - 1$ f) $y = \frac{16}{(x-12)^3} + 2$

773. Zeichnen Sie den Graphen mit allen Asymptoten. Zu bestimmen sind:
- die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- die Gleichungen der Asymptoten
- die Symmetrie des Graphen (nur für gerade und ungerade Funktionen)
- die Anzahl Extrempunkte.

a) $y = \frac{5x}{x+5}$ b) $y = \frac{x+3}{3-x}$ c) $y = \frac{3-2x}{10-4x}$

d) $y = \frac{x^2-4}{(x+3)(x-6)}$ e) $y = \frac{x^2-10}{x^2+10}$

774. Wie Nr. 773

a) $y = \frac{x^2}{x-3}$ b) $y = \frac{2x^3}{x^2-9}$ c) $y = \frac{-2x^2+4x+6}{x+2}$

d) $y = \frac{(x-1)(x-2)}{8-2x}$ e) $y = \frac{x^3-16x}{1-x^2}$ f) $y = \frac{2x^3-6x^2}{x^2+1}$

775. Wie Nr. 773

a) $y = \frac{x}{x^2-1}$ b) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ c) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$

d) $y = \frac{x+3}{x^3-x^2}$ e) $y = \frac{x-2}{x^2+4}$

776. $M(x)$ und $N(x)$ seien Polynomfunktionen vom Grade m bzw. $n\,(n > 0)$.
Welche nicht senkrechte Asymptote hat die Funktion $f(x) = \frac{M(x)}{N(x)}$, wenn gilt

a) $m < n$? (Siehe Nr. 775) b) $m = n$? (Siehe Nr. 773)

c) $m = n + 1$? (Siehe Nr. 774)

777. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f. Welche Symmetrie hat er?

b) Der Graph von f hat zwei Extrempunkte. Berechnen Sie diese – *ohne Rechner.*

778. Berechnen Sie die Extrempunkte der Graphen von Aufgabe Nr. 773 d) ; 774 a), d) und 775 b), e).

779. Skizzieren Sie den Graphen mit allen Asymptoten.

a) $y = \left|\frac{1}{x}\right|$ b) $y = \left|\frac{1}{x+6}\right|$ c) $y = \left|\frac{1}{x^2} - 9\right|$ d) $y = \left|\frac{2-12x}{3x+9}\right|$

Bestimmung der Funktionsgleichung

Geben Sie die gesuchte Funktionsgleichung stets in der Form $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ *an.*

780. Berechnen Sie den Parameter m so, dass der Punkt P auf der Hyperbel h liegt.

a) h: $y = \frac{1}{(x+m)^2}$, P(5.5/0.25) b) h: $y = \frac{162}{(x-m)^4}$, P(13/2)

781. Berechnen Sie a und b so, dass die Punkte A und B auf dem Graphen von f liegen.

a) $f(x) = \frac{a}{x+b}$ A(3.5/–1.5) B(–7.5/1.8)

b) $f(x) = \frac{a}{(x+b)^2}$ A(5/1) B(–1/4)

c) $f(x) = \frac{a}{x^b} + 3$ A(2/3.5) B(–1/11)

782. Gegeben ist die Hyperbel h: $y = \frac{3}{x^2}$. Wie lautet die Gleichung der Bildhyperbel?

a) h wird an der x-Achse gespiegelt.

b) h wird an der y-Achse gespiegelt.

c) h wird um $2e_y$ nach unten verschoben.

d) h wird um $7e_x$ nach rechts verschoben.

e) h wird um $5e_x$ nach links verschoben.

f) h wird von der x-Achse aus mit dem Faktor 3 gestreckt.

g) h wird von der y-Achse aus mit dem Faktor 2 gestreckt.

783. Die Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ werde um $2e_x$ nach rechts und um $3e_y$ nach unten verschoben und schliesslich mit dem Faktor 2 von der x-Achse aus gestreckt. Wie lautet die Gleichung der Bildhyperbel?

784. Bestimmen Sie eine möglichst einfache rationale Funktion, die folgende Eigenschaften hat:

a) Nullstelle bei 5 und Polstelle bei 1.

b) Nullstellen bei –3 und 6 sowie Polstellen bei 0 und 2.

785. Bestimmen Sie eine möglichst einfache rationale Funktion, deren Graph die folgenden Geraden als Asymptoten hat und der durch den Punkt P läuft.

a) Geraden $x = 2$ und $y = 3$ P(0/8)

b) Geraden $x = -1$ und $y = x$ P(1/5)

c) Geraden $x = -5$ und $y = 2x + 1$ P(0/–1)

d) Geraden $x = -1$, $x = 1$ und $y = 2 - x$ P(2/2)

Gleichungen und Ungleichungen

786. Lösen Sie die folgende Gleichung grafisch – *ohne Rechner.*

a) $9 - x^2 = \frac{1}{x+2}$

b) $(x+1)^3 = \frac{10}{x}$

c) $x^2 - 10 - \frac{x+4}{x-1} = 0$

d) $\frac{1}{x^2-4} - x - 2 = 0$

787. ■ Bestimmen Sie die *Anzahl* Lösungen der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit des Parameters k ($k \in \mathbb{R}$).

a) $\frac{2x^3}{x^2-12} = k$

b) $\frac{x^3-3x^2}{x^2+2} = k$

c) $x^2 + \frac{1}{x} - kx = 0$

788. Für welche reellen Zahlen a ist der Wurzelterm definiert?

a) $\sqrt{\frac{a+3}{3-a}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}}$

c) $\sqrt{\frac{10-a^2}{(a+5)(a-8)}}$

3.8 Umkehrung von Funktionen

Ist die Umkehrzuordnung einer Funktion f wieder eine Funktion, so heisst die Funktion f **umkehrbar.**
Die durch Umkehrung erhaltene Funktion heisst **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** von f, sie wird mit $\bar{f}$ oder f^{-1} bezeichnet.

Beispiel: Funktion: $A = f(r) = \pi r^2 \quad (r > 0)$

Umkehrfunktion: $r = \bar{f}(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (A > 0)$

Ist die Gleichung $y = f(x)$ einer umkehrbaren Funktion bekannt, so erhält man die Umkehrfunktion $y = \bar{f}(x)$, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst und die Variablen x und y vertauscht.

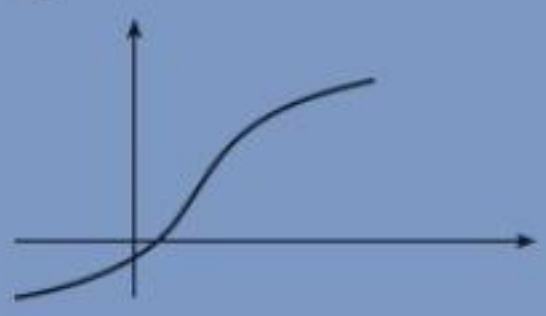
Beispiel: gegebene Funktion f: $y = \frac{x}{2x - 3}$

Auflösen nach x: $x = \frac{3y}{2y - 1}$

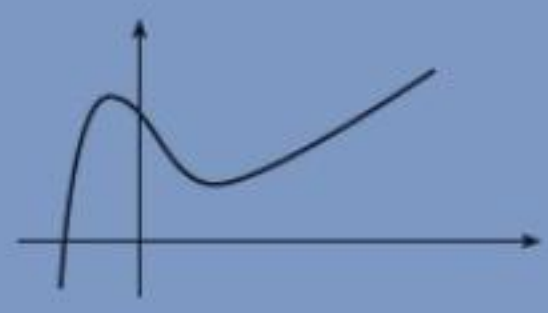
Vertauschen der Variablen: $y = \bar{f}(x) = \frac{3x}{2x - 1}$

Eine Funktion f ist umkehrbar, wenn für zwei beliebige Argumente x_1 und x_2 $(x_2 \neq x_1)$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

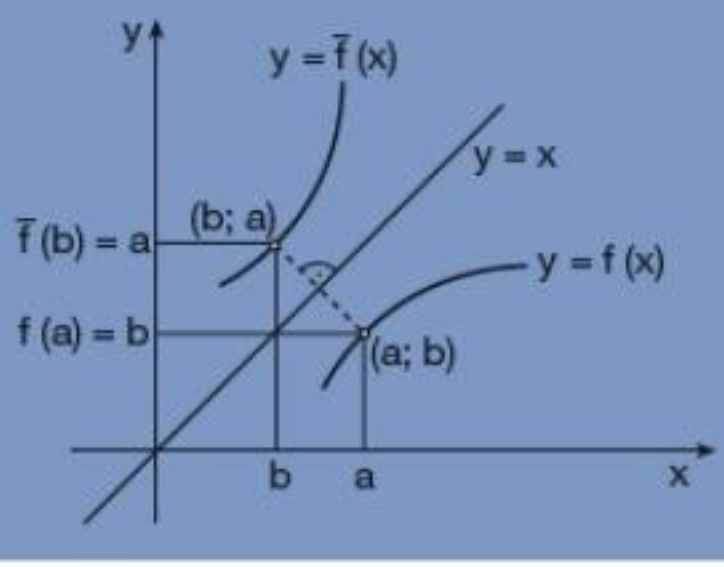
Beispiel:



umkehrbar

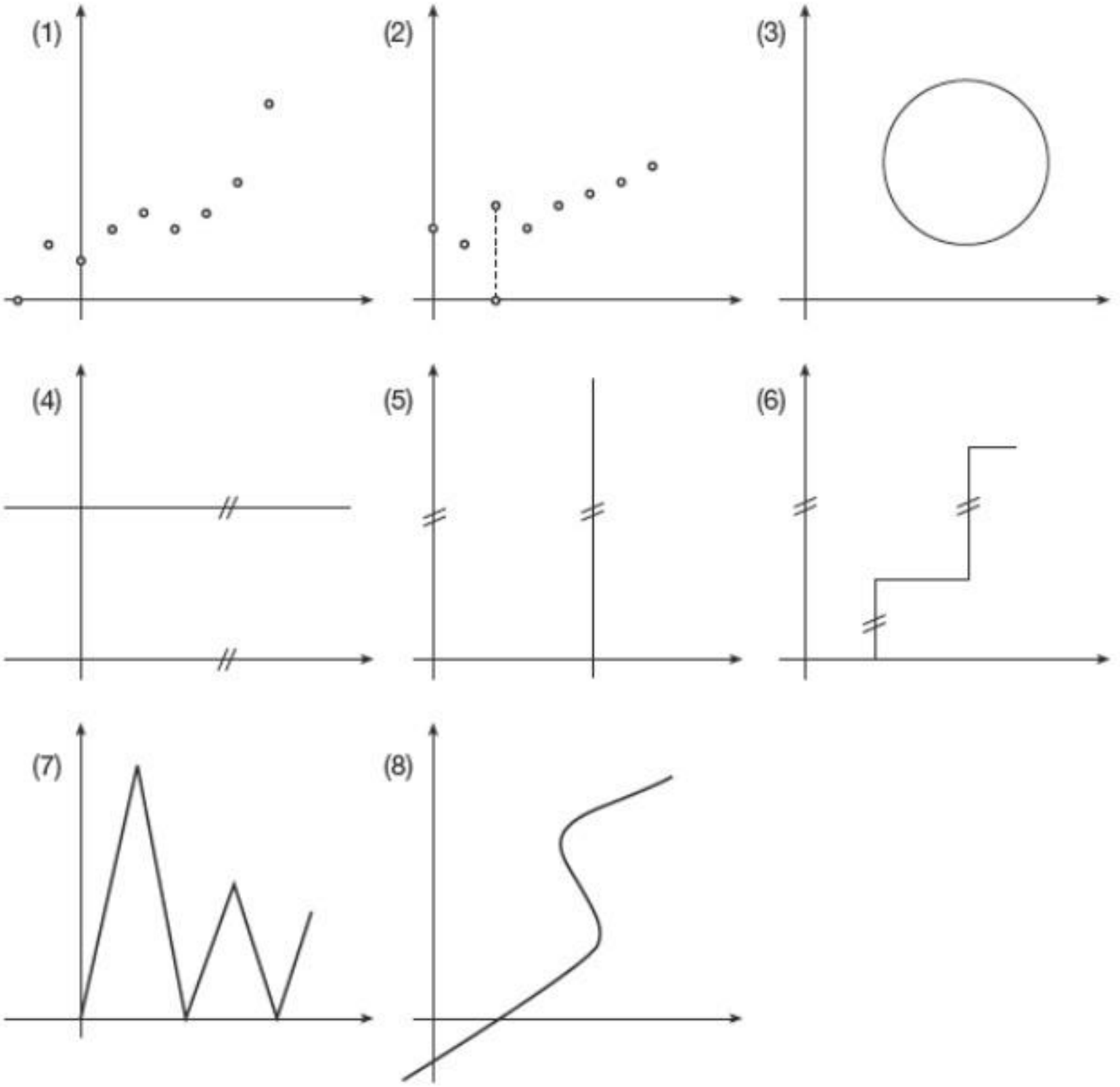


nicht umkehrbar



Werden eine Funktion f und ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$ in demselben Koordinatensystem ($e_x = e_y$) grafisch dargestellt, so liegen die Graphen symmetrisch zur Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des 1. Quadranten).

789. Welches Diagramm stellt den Graphen einer Funktion dar?



790. Welche Zuordnung ist *keine* Funktion?

a) Umfang U eines Quadrates $\mapsto$ Seitenlänge s des Quadrates

b) Quersumme von n $\mapsto$ n ; $n \in \mathbb{N}$

c) Briefporto $\mapsto$ Gewicht des Briefes (Inlandverkehr)

d) Flächeninhalt A eines regulären 7-Ecks $\mapsto$ Seitenlänge s des 7-Ecks

e) Senkrechter Wurf nach oben (Steig- <u>und</u> Fallvorgang):
Höhe über der Abwurfstelle $\mapsto$ Flugzeit

791. Prüfen Sie, ob die Umkehrzuordnung eine Funktion ist.

a) Radius eines Kreises $\mapsto$ Flächeninhalt des Kreises

b) $n \mapsto$ Quersumme von n ; $n \in \mathbb{N}$

c) $x \mapsto$ Betrag von x ; $x \in \mathbb{R}$

d) Anzahl Eier $\mapsto$ Kosten

e) $n \mapsto$ Anzahl Primzahlen, die kleiner als n sind ; $n \in \mathbb{N}$

f) Gewicht eines Paketes $\mapsto$ Portokosten (innerhalb der Schweiz)

g) $n \mapsto$ Anzahl Teiler von n ; $n \in \mathbb{N}$

h) Alter einer Person $\mapsto$ Körpergrösse dieser Person

i) $n \mapsto$ Rest bei der Division von n durch 5 ; $n \in \mathbb{N}$

792. Wie erkennt man am Graphen einer Funktion, ob diese eine Umkehrfunktion besitzt?

793. Untersuchen Sie anhand des Graphen (Skizze), ob die folgende Funktion eine Umkehrfunktion besitzt. Für die gegebene Funktion ist der maximale Definitionsbereich zu wählen, falls nichts anderes angegeben ist.

a) $y = -3x$ b) $y = 7$ c) $y = 2x - 3$

d) $y = x^2$ e) $y = x^2$, $x \geq 0$ f) $y = x^2 - 2x$

g) $y = x^3 + 1$ h) $y = (x+1)^4 - 2$ i) $y = (x-1)^5$

j) $y = \frac{1}{2x}$ k) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ l) $y = \frac{3}{(x+5)^3}$

794. Untersuchen Sie anhand des Graphen (Skizze), ob die folgende Funktion eine Umkehrfunktion besitzt. Für die gegebene Funktion ist der maximale Definitionsbereich zu wählen, falls nichts anderes angegeben ist.

a) $y = \frac{2x}{3x+1}$ b) $y = \frac{1+x}{1-x}$ c) $y = \frac{x^2}{x-2}$

d) $y = |x|$ e) $y = |x+2|$; $x \geq 0$ f) $y = x \cdot |x|$

795. Für welche möglichst grossen Definitionsbereiche ist die Funktion umkehrbar?

■ a) $y = |x|$ b) $y = |x+3| - 2$ c) $y = (x-2)^2$

d) $y = x^3 - 27x$ e) $y = x^4 - 32x^2$ f) $y = \frac{x^2}{x-5}$

796. Die Funktion f sei umkehrbar.
Wie erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f? $(e_x = e_y)$

797. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}$ und deren Definitionsbereich.
Skizzieren Sie anschliessend die Graphen von f und $\bar{f}$, verwenden Sie dabei die Lösung der vorhergehenden Aufgabe.

a) $f(x) = 3x\ ,\quad -2 \le x \le 5$
b) $f(x) = x - 1\ ,\quad -3 \le x \le 3$
c) $f(x) = 8 - 5x\ ,\ 0 \le x \le 1.6$
d) $f(x) = x^2\ ,\quad 0 \le x \le 2$
e) $f(x) = x^2\ ,\quad -2 \le x \le 0$

798. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f und *skizzieren* Sie deren Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$
b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
c) $f(x) = \frac{3x}{2x+8}$
d) $f(x) = \frac{x-4}{4x-1}$
e) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

799. a) Wie erkennt man am Graphen von f, dass $\bar{f} = f$ ist? $(e_x = e_y)$
b) Geben Sie alle *linearen* Funktionen an, die mit ihren Umkehrfunktionen übereinstimmen.
c) Bestimmen Sie a und b der linearen Funktion $f(x) = ax + b$ so, dass gilt $\bar{f} = f$.
d) Geben Sie eine *nicht lineare* Funktion an, die mit ihrer Umkehrfunktion übereinstimmt.

800. Beweisen Sie:
Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$ ist wieder eine lineare Funktion. Warum ist die Einschränkung $a \neq 0$ notwendig?

3.9 Wurzelfunktionen

Der Definitionsbereich aller Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ *sei* $\mathbb{R}_0^+$, *d.h.* $x \geq 0$.

801. a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$, $n = 2, 3, 4 \ldots$ für $x \geq 0$.

b) Welche Potenzfunktionen sind für $x \in \mathbb{R}$ umkehrbar?

802. Zeichnen sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n = 2, 3, 4, 5$ in dasselbe Koordinatensystem. Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 3$

803. *Skizzieren* Sie den Graphen.
Gehen Sie von der Kurve k: $y = \sqrt{x}$ aus und nennen Sie die geometrische(n) Abbildung(en).
Welches ist der maximale Definitionsbereich?

a) $y = \sqrt{2x}$ b) $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ c) $y = -\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x}$ e) $y = \sqrt{x} - 4$ f) $y = \sqrt{x - 4}$

g) $y = \sqrt{x + 2}$ h) $y = 2 - \sqrt{x}$ i) $y = \sqrt{2 - x}$

j) $y = \sqrt{2x - 6}$ k) $y = 3\sqrt{x + 5}$ l) $y = 10\sqrt{x - 1} + 1$

m) $y = 1 - 2\sqrt{x + 1}$ n) $y = 4\sqrt{3 - x} - 2$

804. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Nullstellen und *skizzieren* Sie den Graphen.
Gehen Sie jeweils von der Kurve k: $y = \sqrt[n]{x}$ aus.

a) $y = \sqrt[3]{10x}$ b) $y = 100\sqrt[4]{x}$ c) $y = \sqrt[3]{x - 8}$

d) $y = \sqrt[3]{8 - x}$ e) $y = \sqrt[4]{10x + 1}$ f) $y = \sqrt[5]{2x - 6} - 1$

g) $y = 5 - \sqrt[4]{1 - x}$ h) $y = \sqrt[3]{5 - 2x} + 3$

805. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und *skizzieren* Sie den Graphen.

a) $y = \sqrt{|x|}$ b) $y = \sqrt[3]{|x|}$ c) $y = \sqrt{|x + 4|}$

d) $y = \sqrt[3]{|x - 8|}$ e) $y = \sqrt{4 - |x|}$ f) $y = \sqrt[3]{6 - |2x|}$

806. Bestimmen Sie a und n so, dass der Graph von $f(x) = a \cdot \sqrt[n]{x}$ durch die Punkte A und B geht.

a) $A(1/2)$; $B(64/8)$

b) $A(4/20)$; $B(100/100)$

c) $A(16/-4)$; $B(625/-10)$

d) $A(8/0.4)$; $B(1000/2)$

Was nottut, ist nicht der Wille zu glauben, sondern der Wille zu entdecken, also genau das Gegenteil.

Bertrand Russell, 1872–1970, Mathematiker und Philosoph

807. Lösen Sie die folgende Gleichung grafisch.
■

a) $\sqrt[3]{x} = 2 - 0.2x \quad (x \geq 0)$

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 17$

c) $\sqrt[3]{x} = \frac{x-3}{x-4} \quad (x \geq 0)$

d) $\sqrt{6-x} = 4 - \frac{1}{6}x^2$

e) $\sqrt{x+6} = \frac{1}{(x+4)^2} + 1$

f) $\sqrt{10-x} = \sqrt[3]{x} + 1 \quad (x \geq 0)$

808. Für welche Werte des Parameters a hat die folgende Gleichung mindestens eine Lösung?

a) $\sqrt{x} = a - x$

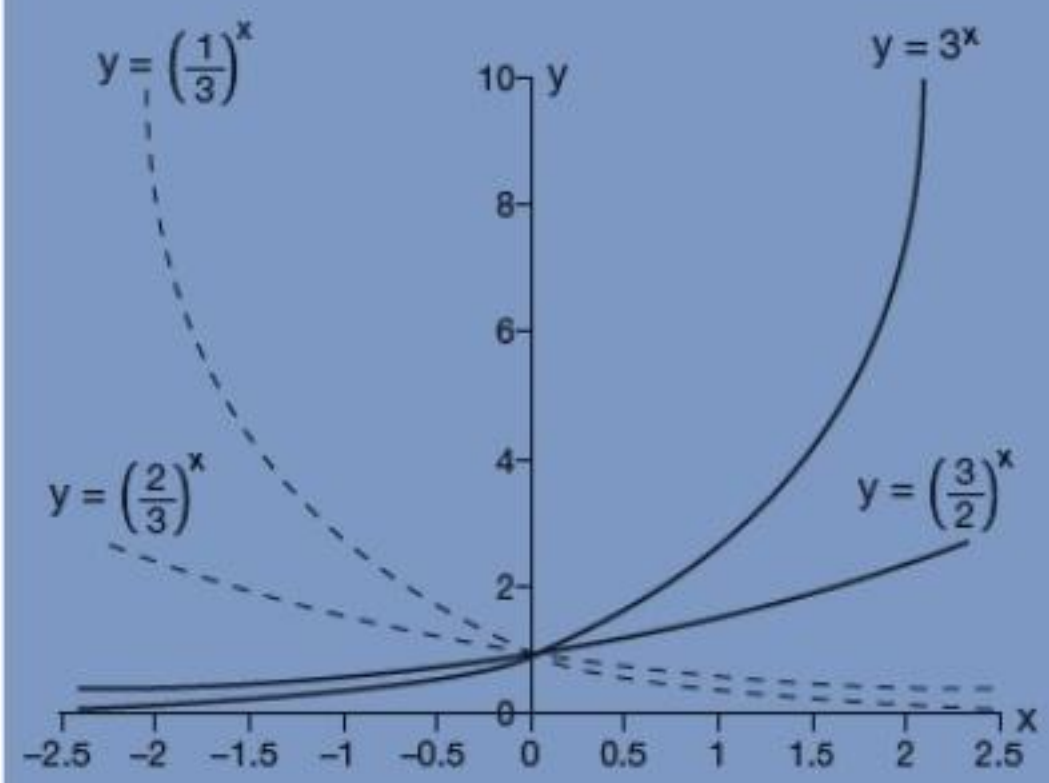
b) $\sqrt[4]{x-a} = 10 - 2x$

c) $\sqrt[3]{x-a} = 4 - x^2$

3.10 Exponentialfunktionen

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = a^x}$ $(a \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1)$ heisst **Exponentialfunktion.**

Beispiele: $y = 0.8^{x+1}$, $y = 8 \cdot 2^{3x-4}$, $f(t) = A \cdot e^{kt}$, $f(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$



Die Graphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen symmetrisch zur y-Achse.

Die x-Achse ist *Asymptote* des Graphen von $y = a^x$.

809. Welche Funktionen sind Exponentialfunktionen?

$f_1(x) = 2^x$ $\quad f_2(x) = x^2$ $\quad f_3(x) = 0.2^{-x}$ $\quad f_4(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

$f_5(x) = x^x$ $\quad f_6(n) = n \cdot 10^n$ $\quad f_7(t) = 1.02^{3t-5}$ $\quad f_8(u) = 10\left(\sqrt{3}\right)^u + 1$

$f_9(r) = \left(\sqrt{r}\right)^3$ $\quad f_{10}(x) = (2e)^x + b$ $\quad f_{11}(t) = U_0 \cdot e^{(-t/RC)}$ $\quad f_{12}(n) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

$f_{13}(p) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

810. Weshalb werden die Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ ausschliesslich für positive a definiert?
Betrachten Sie z. B. die Funktion $y = (-2)^x$ für $x \in \mathbb{Z}$ und anschliessend für $x \in \mathbb{Q}$.

Die Funktion $f(x) = a^x$

811. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 2^x$.

a) Zeichnen Sie den Graphen für $D = [-3; 3]$.

b) Welches ist der maximale Definitionsbereich der Funktion f?
Welches ist der zugehörige Wertebereich?

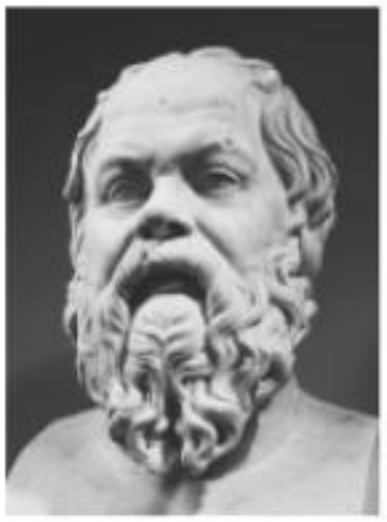
c) Hat die Funktion Nullstellen?

d) Hat der Graph von f Asymptoten? Wenn ja, welche?

e) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen eine Näherungslösung von $2^x = 5$.

812. a) Zeichnen Sie die Graphen von $f(x) = 3^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ in dasselbe Koordinatensystem. Definitionsbereich: $[-2; 2]$

b) Wie erhält man den Graphen von g aus jenem von f? Begründen Sie die Vermutung.



Ich weiss, dass ich nichts weiss.

Sokrates, 470 – 399 v. Chr., griechischer Philosoph

813. Betrachten Sie die Funktionen f_a: $y = a^x$ für $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$.

a) Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen. Machen Sie eine Fallunterscheidung für a.

b) Begründen Sie: Die Graphen haben einen Punkt P gemeinsam.
Geben Sie die Koordinaten von P an.

814. Vergleichen Sie die Graphen von $y = 2^x$ und $y = x^2$ für $0 \leq x \leq 10$.

■

815. Beantworten Sie für die beiden Funktionen $y = 3x$ und $y = 3^x$ die folgende Frage:
Wie ändert sich der Funktionswert, wenn man einen beliebigen x-Wert

a) um 1 erhöht? b) um 4 erhöht? c) verdoppelt? d) halbiert?

816. Wie ändert sich der Funktionswert einer Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, wenn man einen beliebigen x-Wert

a) um 1 erhöht, d.h. $f(x + 1) = ?$
b) um 3 erhöht, d.h. $f(x + 3) = ?$
c) verdoppelt, d.h. $f(2x) = ?$
d) halbiert, d.h. $f\left(\frac{x}{2}\right) = ?$

817. Welche Wertetabellen lassen sich durch eine Exponentialfunktion von der Form $f(x) = a^x$ beschreiben? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Basis a.

(1)

x	2	3	4	5
y	5	10	20	30

(2)

x	2	4	6
y	2	4	8

(3)

x	−4	−3	−2
y	16	8	4

(4)

x	10	15	20
y	27	125	343

(5)

x	1.2	1.4	1.6	1.8
y	6	9	13.5	20

(6)

x	0.5	2	4
y	3	81	6561

818. Bestimmen Sie eine Funktion $f(x) = a^x$ mit folgender Eigenschaft:

a) Wenn x um 1 erhöht wird, nimmt der Funktionswert um 10 % zu.
b) Wenn x um 1 erhöht wird, nimmt der Funktionswert um 20 % ab.
c) Wenn man x um 3 erhöht, verdoppelt sich der Funktionswert.

819. Bestimmen Sie a so, dass der Graph von $f(x) = a^x$ durch den Punkt P geht.

a) $P(2/9)$
b) $P(1.5/27)$
c) $P(-2/0.04)$
d) $P\left(-\frac{1}{4}/\frac{1}{2}\right)$
e) $P(3/0.5)$
f) $P(10/2)$

Die Funktion $f(x) = k \cdot a^{mx+n} + b$

820. *Skizzieren* Sie den Graphen und die Asymptote. Gehen Sie von der Kurve $y = 2^x$ aus und nennen Sie die geometrische(n) Abbildung(en). (Wenn möglich nur Kongruenzabbildungen verwenden.) Wo schneidet der Graph die y-Achse?

a) $y = 2^x - 5$
b) $y = 2^{x-3}$
c) $y = 2^{x+1}$
d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
e) $y = 2^{1-x}$
f) $y = (\sqrt{2})^x$
g) $y = 16^x$
h) $y = 3 \cdot 2^x$
i) $y = 2^{3x-5}$
j) $y = 2^{\frac{3-x}{2}}$
k) $y = 2 - 2^{-x}$
l) $y = 10 \cdot 2^{\frac{x+1}{3}} - 12$

821. Begründen Sie:
Der Graph der Funktion g geht durch eine Streckung von der y-Achse aus dem Graphen der Funktion f hervor. Bestimmen Sie den Streckfaktor k.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$

b) $f(x) = 5^x$, $g(x) = 125^x$

c) $f(x) = 100^x$, $g(x) = 10^x$

d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$

822. Die Exponentialkurve $y = a^x$ wird wie folgt abgebildet.
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildkurve.

a) Verschiebung um $8e_y$ nach unten.

b) Verschiebung um $3e_x$ nach links.

c) Spiegelung an der x-Achse.

d) Spiegelung an der y-Achse.

e) Spiegelung am Nullpunkt.

f) Streckung von der x-Achse aus mit dem Faktor 10.

g) Streckung von der y-Achse aus mit dem Faktor 2.

h) Verschiebung um $5e_x$ nach links und anschliessend Spiegelung an der y-Achse.

823. Bestimmen Sie die Parameter a und k so, dass der Graph von $f(x) = k \cdot a^x$ durch die Punkte A und B geht.

a) $A(0/2)$, $B(3/54)$

b) $A\left(3/\frac{5}{8}\right)$, $B(-2/20)$

c) $A(-2/-0.2)$, $B(3/-4)$

824. Welche Wertetabellen lassen sich durch eine Exponentialfunktion von der Form $f(x) = k \cdot a^x$ beschreiben?
Berechnen Sie gegebenenfalls die Parameter a und k.

(1)

x	3	4	5	6
y	12	24	48	96

(2)

x	2	4	6	8
y	2	6	15	45

(3)

x	−9	−6	−3
y	50	10	2

(4)

x	1.5	2	2.5
y	2.5	0.5	0.1

Die Wissenschaft der reinen Mathematik in ihrer modernen Entwicklung darf von sich behaupten, die ureigenste Schöpfung des menschlichen Geistes zu sein.

Alfred North Whitehead, 1861–1947, engl./amerik. Philosoph und Mathematiker

Gleichungen und Ungleichungen

825. Begründen Sie mithilfe von Graphen:
Die Exponentialgleichung $a^x = b$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$ hat für $b \in \mathbb{R}^+$ genau eine Lösung.

826. Lösen Sie die folgende Gleichung grafisch – *ohne Rechner.*

a) $2^x = 3x$ b) $2^{-x} - 10 = 2x$ c) $x^2 - 2^x = 0$

d) $0.5^x = 10 - x^2$ e) $2^x = \frac{5x-4}{x-1}$ f) $0.5^x = 3 \cdot \sqrt{x+3}$

Ich hörte mich anklagen, als sei ich ein Feind der Mathematik überhaupt, die doch niemand höher schätzen kann als ich, da sie gerade das leistet, was mir zu bewirken völlig versagt blieb.

Johann Wolfgang Goethe, 1749–1832, deutscher Dichter

827. Für welche Werte des Parameters k hat die folgende Gleichung mindestens eine Lösung?

a) $10^x + 10^{-x} = k$ b) $3^x = k \cdot x$ c) $3^x = 2x + k$

828. ■ Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = x^x$ für $0 < x \leq 3$ und lösen Sie damit folgende Aufgaben:

a) Bestimmen Sie eine Näherungslösung der Gleichung $x^x = 2$.

b) Für welche Werte des Parameters a hat die Gleichung $x^x = a$ $(x > 0)$ mindestens eine Lösung?

c) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^x = 2x$ $(x > 0)$?

829. ■ Lösen Sie die Ungleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}^+$.

a) $1.1^x - x < 1$ b) $2^{-x} < \frac{1}{x}$ c) $3^{x-1} < 5x + 1$ d) $3^x < x^3$

830. ■ Bei einem gewissen Medikament wird die Konzentration ρ des Wirkstoffes im Blut nach folgender Funktion angegeben:

$$\rho = 4.1 \cdot (0.80^t - 0.47^t)$$

ρ: Konzentration in mg pro Liter Blut
t: Zeit in Stunden; nach der Einnahme des Medikamentes
In welchem Zeitraum ist die Wirkung des Medikamentes spürbar, wenn dafür eine Konzentration von 0.5 mg/l ausreicht?

Exponentielle Prozesse

$$G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau}$$

G: Grösse, die exponentiell von der Zeit t abhängt
G_0: Wert der Grösse G im Zeitpunkt $t = 0$
t: Zeit (oder eine andere Grösse)
a: Wachstums- oder Abnahmefaktor bezogen auf die Zeitspanne τ
τ: Zeitspanne, auf die sich a bezieht

Beispiel: Eine Bakterienkultur wachse exponentiell: nach 25 min beträgt der Bestand 500, nach 45 min 1200.

$\tau = 20$ min , $a = \frac{1200}{500} = 2.4$, $N_0 = N / a^{t/\tau} = 500 / 2.4^{25/20} \approx 167$

Wachstumsfunktion $N \approx 167 \cdot 2.4^{t/20\text{min}} \approx 167 \cdot 1.045^{t/1\text{min}}$

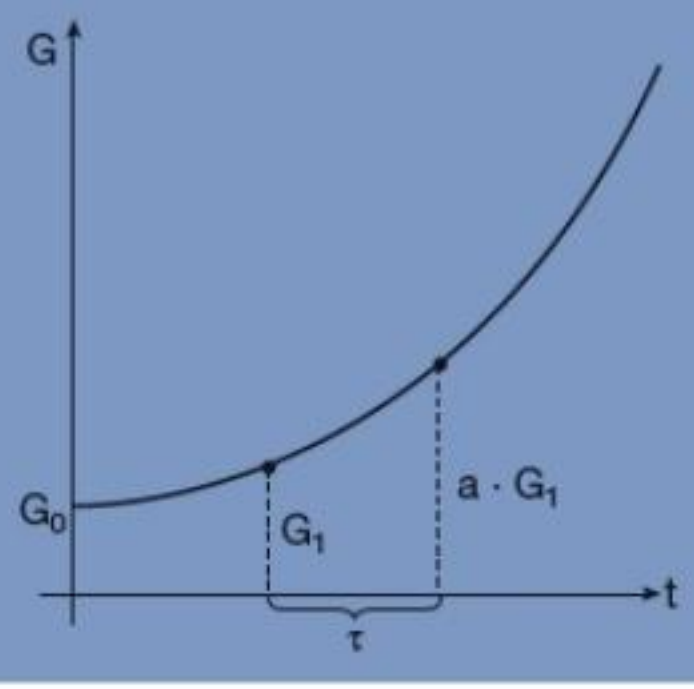
Prozentuale Wachstums- und Abnahmerate

Zur **Wachstumsrate** p % gehört der Wachstumsfaktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und die Wachstumsfunktion $G(t) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{t/\tau}$.

Zur **Abnahmerate** p % gehört der Abnahmefaktor $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ und die Abnahmefunktion $G(t) = G_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{t/\tau}$.

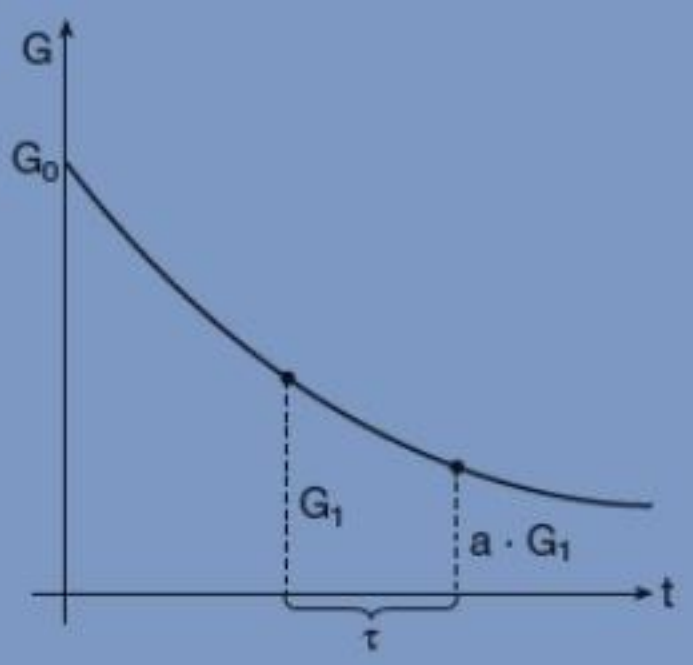
exponentielles Wachstum

$a > 1$



exponentielle Abnahme

$0 < a < 1$



Exponentielles Wachstum

831. Ein Pilz an einer Kellerwand wächst so stark, dass sich die befallene Fläche

(1) jeden Monat verdoppelt. (2) alle 3 Monate verdoppelt.
(3) alle 4 Monate verdreifacht.

Als er entdeckt wird ($t = 0$) beträgt die befallene Fläche 0.4 m^2.

a) Bestimmen Sie für alle drei Fälle die Wachstumsfunktion für $\tau = 1$ Monat.

b) Wie gross würde die Fläche theoretisch in einem Jahr sein?

832. In einem Teich von 800 m^2 Fläche vermehrt sich eine Algenart sehr schnell: Die bedeckte Fläche A verdreifacht sich jede Woche.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung $A = f(t)$ für $\tau = 1\,d$?
Im Zeitpunkt $t = 0\,d$ ist $A = 2.4\ m^2$.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für $D = [0\,d\,;\,40\,d]$.

c) Nach wie vielen Tagen ist der ganze Teich mit Algen bedeckt?

833. Ein Vater will seiner Tochter einen Zuschuss für ein neues Fahrrad geben. Er macht zwei Angebote:

(1) € 15.– sofort, am folgenden Tag € 20.–, dann € 25.–, ..., am 12. Tag € 75.–.
Der Betrag wird 12 Tage lang täglich um € 5.– erhöht.

(2) € 0.05 sofort, am folgenden Tag € 0.10, dann € 0.20...
Der Betrag wird täglich verdoppelt; ebenfalls 12 Tage lang.

a) Bestimmen Sie für jedes Angebot die Funktionsgleichung $B = f(n)$.
B: Betrag (in €) am n-ten Tag n: Anzahl Tage

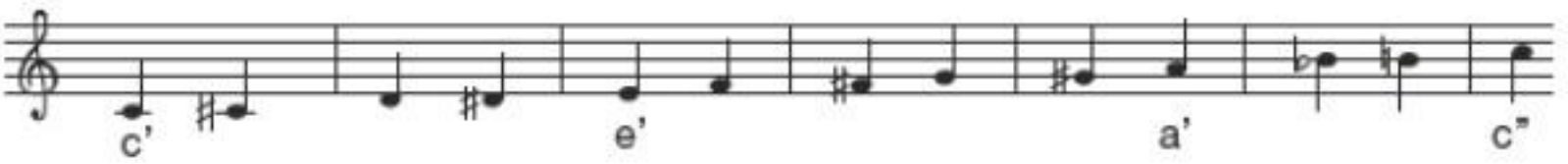
b) Stellen Sie beide Funktionen im gleichen Koordinatensystem grafisch dar.

c) Für welches Angebot sollte sich die Tochter entscheiden?

Es gibt keine Sicherheit in der Wissenschaft, wo nicht die Mathematik angewandt werden kann.

Leonardo da Vinci, 1452 – 1519, Universalgenie

834.



Bei der sogenannten *temperierten Stimmung* wird eine Oktave so in 12 gleich grosse Intervalle (Halbtöne) unterteilt, dass zwei aufeinander folgende Töne das gleiche Frequenzverhältnis haben.

Oktave: «Abstand» zwischen zwei Tönen, deren Frequenzen sich wie 1 : 2 verhalten, z. B. c' – c'' oder a' – a''

a) Wie gross ist das Frequenzverhältnis von zwei aufeinander folgenden Tönen?

b) Berechnen Sie das Frequenzverhältnis der Töne c' und e'.
In der *reinen Stimmung* ist dieses Frequenzverhältnis 4 : 5.
Wie gross ist der Fehler (in %), der durch die temperierte Stimmung entsteht?

c) Welche Frequenz hat der Ton c'', wenn der sogenannte *Kammerton* a' auf 440 Hz festgelegt wurde?

835. Die Anzahl Keime (n) in der Kuhmilch wächst exponentiell. Zwei Stunden nach dem Melken enthielt 1 cm^3 Milch 8000 Keime, nach einer weiteren Stunde waren es 27 000 Keime.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung $n = f(t)$, wenn unmittelbar nach dem Melken die Zeitmessung beginnt?

b) Wie viele Keime enthält 1 cm^3 Milch nach einem Tag?

c) Wie viele Keime sind es 10 min nach dem Melken?

836. Waldbestände wachsen näherungsweise exponentiell, wenn kein Holz geschlagen wird. Ein Bestand, der zur Zeit auf 20 000 m^3 geschätzt wird, wächst jährlich um 2.5 %.

a) Bestimmen Sie die Wachstumsfunktion.

b) Wie gross war der Bestand vor 5 Jahren?

c) Wie gross wird der Bestand in 10 Jahren sein?

Die Mathematik ist gleichsam eine sinnliche Logik, sie verhält sich zur Philosophie wie die materiellen Künste, Musik und Plastik, zur Poesie.

Friedrich Schlegel, 1772 – 1829, Ästhetiker und Dichter

Mathematik ist die Musik der Vernunft.

James Joseph Sylvester, 1814 – 1897, brit. Mathematiker

Ceux qui ne sont pas mathématiciens sont portés à considerer les mathématiques comme une science inhumaine.

Emile Borel, 1871–1956, franz. Mathematiker und Philosoph

837. Eine Stadt hatte vor 6 Jahren 65 600 Einwohner, heute sind es 82 100.
Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate in %.

838. Die Weltbevölkerung ist seit 1970 wie folgt gewachsen:

Jahr	1970	1980	1990	2000	2010
Bevölkerung in Mrd.	3.706	4.458	5.282	6.115	6.909

(1) Berechnen Sie aus den angegebenen Daten die jährlichen Wachstumsraten.

(2) Beurteilen Sie, ob die Bevölkerungszahlen mit dem exponentiellen Wachstumsmodell vereinbar sind.

(3) Wie gross wäre die Weltbevölkerung im Jahre 2040, wenn man von der Bevölkerungszahl im Jahre 2010 und einer konstanten Wachstumsrate von 1.23% ausgehen würde?

839. a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Wenn eine Grösse jährlich um 3 % wächst, dann wächst sie in 2 Jahren um 6 %, in 3 Jahren um 9 % usw.

b) Eine Grösse wächst jährlich um 5 %.
Um wie viele Prozente ist sie in 2, 3, 4, ..., 8 Jahren gewachsen?
Erstellen Sie eine Wertetabelle. (Prozentwerte auf 1 Dezimale runden.)

c) Bestimmen Sie für die Aufgabe b) die Zuordnungsvorschrift
Zeit t (in Jahren) $\longmapsto$ Wachstumsrate r (in %)

Exponentielle Abnahme

840. Ein Ball fällt aus 5 m Höhe auf den Boden und springt dann mehrmals wieder auf.
Nach jedem Aufprall erreicht er jeweils 60 % der vorhergehenden Höhe.
Wie hoch springt der Ball

a) nach dem dritten Aufprall? b) nach dem n-ten Aufprall?

841. Der Luftdruck p nimmt mit zunehmender Höhe h exponentiell ab.
Bei einem Höhenunterschied von 1 km beträgt die Abnahme 11.7 %.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung $p = f(h)$ für $\tau = 1$ km, wenn auf Meereshöhe ($h = 0$ km) ein
Druck von 1.1 bar gemessen wurde?

b) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \text{ km} \leq h \leq 10 \text{ km}$.

842. In sauberem Meerwasser verliert Licht 75 % seiner Intensität pro Meter Eindringtiefe.

a) Bestimmen Sie die Zuordnungsvorschrift
Wassertiefe s (in m) $\mapsto$ Lichtintensität I (in W/m^2)
Über dem Wasser sei $I = 100\ W/m^2$.

b) Stellen Sie die Funktion grafisch dar für $0\ m \leq s \leq 3\ m$.

843. Ein Auto verliert im Laufe eines Jahres etwa 18 % an Wert.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $W = f(t)$, wenn der Neuwert € 20 000.– beträgt. W: Wert des Autos nach t Jahren.

b) Wie viel Prozent des Neuwertes beträgt der Wert nach 5 Jahren?
Zeigen Sie, dass dieser Prozentwert unabhängig ist vom Neuwert W_0.

c) Ein PW hat heute einen Wert von € 2400.–. Welchen Wert hatte er vor 8 Jahren?

844. ■ Beim *radioaktiven Zerfall* nimmt die Masse m einer radioaktiven Substanz exponentiell mit der Zeit t ab.
Für jede der folgenden Aufgaben sind gesucht:

(1) die Funktionsgleichung $m = f(t)$
(2) der Graph der Funktion
(3) die *Halbwertszeit T* der radioaktiven Substanz
Halbwertszeit: Zeit, nach welcher nur noch die Hälfte der ursprünglichen Masse vorhanden ist.

a) Wismut hat eine Zerfallsrate von 13 % pro Tag.
Im Zeitpunkt $t = 0$ sind 10 g Wismut vorhanden ($\tau = 1$ Tag).

b) Für bestimmte Untersuchungen verwendet man in der Medizin radioaktives Jod.
Von anfänglich 4 mg sind nach 1 Stunde noch 3 mg vorhanden ($\tau = 1$ h).

c) Von einer gewissen Menge des Kohlenstoffisotops C14 sind nach 100 Jahren noch 79.04 g übrig, nach 1000 Jahren noch 70.88 g ($\tau = 1$ Jahr).

Die Physiker haben die Sünde kennengelernt, und das ist ein Wissen, das sie nicht abschütteln können. Es gibt nichts, kein Recht und keine Sache in der Welt, die die Anwendung der Atombombe rechtfertigen könnte.

J. Robert Oppenheimer, 1904 –1967, amerik. Physiker

845. ■ Stellt man einen erhitzten Körper (mit der Temperatur T) in einen Raum mit konstanter Temperatur T_0, so nimmt die Temperaturdifferenz $(T - T_0)$ exponentiell mit der Zeit t ab. Bestimmen Sie für die folgenden Fälle die Funktionsgleichung $T = f(t)$ für $\tau = 1$ min und zeichnen Sie den Graphen.

a) Eine heisse Tasse Kaffee von 92 °C (im Zeitpunkt t = 0 min) steht in einem Zimmer, dessen Temperatur 20 °C beträgt. Nach 5 min ist der Kaffee noch 76 °C warm.

b) Ein gebackener Kuchen wird zum Abkühlen ins Freie gebracht. Die Lufttemperatur misst 12 °C. Nach 10 min beträgt die Temperatur des Kuchens noch 80 °C, nach weiteren 10 min noch 48 °C.

c)* Bei einer erwärmten Milch wurden folgende Messungen gemacht:

t/min	4	10	16
T/°C	68	58	50

Wie hoch ist die Raumtemperatur?

846. Um wie viel Prozent nimmt der Wert einer Maschine jährlich ab, wenn ihr Wert nach 3 Jahren auf die Hälfte des Neuwertes gesunken ist?

847. Ein PC mit einem Neuwert von € 4800.– wird nach 3 Jahren und 8 Monaten für € 1400.– verkauft. Wie viel Prozent beträgt die jährliche Wertabnahme?

Zinseszins

Ein Anfangskapital K_0 ist nach n Jahren bei jährlicher Verzinsung zu p % auf $K(n) = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ angewachsen.

848. Berechnen Sie die fehlende Grösse:

	K_0/€	K(n)/€	p/%	n/Jahre
a)	500		6.5	12
b)		2000	2.75	6
c)	5	50		20
d)		10 000	7.5	8
e)	20	400		30

849. a) Über welchen Betrag (in €) würde man im Jahr 2000 verfügen, wenn bei Christi Geburt 1 Cent zu 4 % Zins angelegt worden wäre?

b) Welchen Wert hat der unter a) berechnete Betrag, wenn mit einer jährlichen Geldentwertung von 2 % gerechnet wird?

850. Bei welchem Zinssatz (in %) verdoppelt sich ein Kapital

a) in 10 Jahren? b) in n Jahren?

851. Eine Erbschaft von € 50 000.– soll unter zwei Geschwistern, die heute 40 bzw. 48 Jahre alt sind, so verteilt werden, dass jedes im Zeitpunkt, in dem es 60-jährig wird, gleich viel besitzt.
Welchen Betrag erhält jedes der Geschwister, wenn der Zinssatz unverändert 4 % beträgt? (Lösung auf ganze € runden.)

852. Vergleichen Sie die folgenden Angebote für den Kauf eines Hauses:
Angebot A: € 180 000.– sind sofort, € 200 000.– nach 5 Jahren zu überweisen.
Angebot B: € 140 000.– sind sofort, € 230 000.– nach 3 Jahren zu überweisen.
Welches Angebot ist günstiger bei einer Kapitalverzinsung von 5 %?

853. Beim Verkauf eines Hauses wurden die folgenden Angebote gemacht:

Angebot A: Die Beträge werden wie folgt fällig:
€ 150 000.– sofort, € 120 000.– nach 2 Jahren und weitere € 150 000.– nach insgesamt 6 Jahren.

Angebot B: Die Beträge werden wie folgt fällig:
€ 130 000.– sofort, € 150 000.– nach 3 Jahren und € 140 000.– nach weiteren 2 Jahren.

Welches Angebot sollte der Käufer bei einer Kapitalverzinsung von 7 % wählen?

854. Auf ein Konto werden regelmässig zu Beginn eines Jahres € 500.– einbezahlt.
Die Bank verzinst das Guthaben mit 6 %. Die Zinsen werden am Ende jedes Jahres gutgeschrieben. Wie hoch ist der Kontostand (auf ganze € gerundet) nach der 1., 2., 3. und n-ten Einzahlung (jeweils am Jahresende)?

855.* Peter leiht seinem Freund Marcel bei einer 6 %igen jährlichen Verzinsung einen Kredit von € 20 000.–. Marcel trägt die Schulden ab, indem er jährlich einen gleichen Betrag (Tilgungsrate) zurückzahlt, erstmals ein Jahr nach Kreditaufnahme.
Wie gross ist die Tilgungsrate, wenn die Schuld

a) in 5 Jahren b) in 10 Jahren

beglichen sein soll?

3.11 Logarithmusfunktionen

Siehe auch «1.7 Logarithmen»

Die Funktion $f(x) = \lg x$

856. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \lg x$

a) Zeichnen Sie den Graphen für $0.1 \leq x \leq 10$.

b) Welches ist der maximale Definitionsbereich der Funktion f?
Welches ist der zugehörige Wertebereich?

c) Welche Nullstellen hat die Funktion?

d) Hat der Graph von f Asymptoten? Wenn ja, welche?

857. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 10^x$ und $g(x) = \lg x$.

a) Beweisen Sie: Die Funktion g ist die *Umkehrfunktion* von f.

b) Wie erhält man den Graphen von g aus dem Graphen von f? $(e_x = e_y)$

858. *Skizzieren* Sie den Graphen und die Asymptote.
Gehen Sie von der Kurve k: $y = \lg x$ aus und nennen Sie die geometrische(n) Abbildung(en). Berechnen Sie die Nullstelle.

a) $y = 2 + \lg x$ b) $y = \lg(x+1)$ c) $y = \lg(x-1)$ d) $y = \lg(x) - 1$

e) $y = \lg(-x)$ f) $y = \lg\left(\frac{1}{x}\right)$ g) $y = \lg(x^2)$ h) $y = \lg\sqrt[3]{x+2}$

i) $y = \lg(2x)$ j) $y = \lg(3-x)$ k) $y = \lg\sqrt{1-x}$ l) $y = \lg(0.5x+3)$

m) $y = |\lg x|$

859. Gegeben ist die Kurve k: $y = \lg x$.
Begründen Sie: Man erhält den Graphen der folgenden Funktion, indem man die Kurve k um $a \cdot e_y$ in y-Richtung verschiebt.
Bestimmen Sie a und den Richtungssinn (Verschiebung nach oben oder nach unten).

a) $y = \lg(10x)$ b) $y = \lg(20x)$ c) $y = \lg\left(\frac{x}{100}\right)$

Der durchschnittlich Gebildete hat sich daran gewöhnt, dass er die Physik, die so sehr das Gesicht unseres Jahrhunderts bestimmt, nun einmal nicht versteht.

Carl Friedrich von Weizsäcker, 1912–2007, deutscher Physiker

860. Die Kurve k: $y = \lg x$ wird abgebildet.
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildkurve und notieren Sie diese in der Form
$y = \lg(f(x))$

a) Verschiebung um $5e_x$ nach links.
b) Verschiebung um $1e_y$ nach oben.
c) Spiegelung an der x-Achse.
d) Spiegelung an der y-Achse.
e) Spiegelung am Nullpunkt.
f) Verschiebung um $2e_x$ nach links und Spiegelung an der y-Achse.
g) Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um $2e_y$ nach oben.

861. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}$.

a) $f(x) = 10^x + 1$ b) $f(x) = 10^{x+1}$ c) $f(x) = 3 \cdot 10^{2x-6}$
d) $f(x) = \lg(x) + 1$ e) $f(x) = \lg(x+1)$ f) $f(x) = 3 \cdot \lg(2x-6)$

862. Begründen Sie mithilfe von zwei Graphen:
Die Bestimmungsgleichung $\lg x = a$ hat für jede reelle Zahl a genau eine Lösung.

863. Lösen Sie die folgende Gleichung grafisch. (Genauigkeit: 3 geltende Ziffern)

■ a) $10 \cdot \lg x = x - 7$ b) $\frac{1}{x} + \lg x = 1.8$ c) $10^{-x} = \lg(x+1)$
d) $x \cdot \lg x = 100$ e) $\sqrt{x-2} = \lg(x^3)$ f) $\lg\left(\frac{1}{x}\right) = 5 - x^2$

864. Lösen Sie die folgende Ungleichung.
■ Bestimmen Sie zuerst den Definitionsbereich der Ungleichung.

a) $\lg x \leq \sqrt{x}$ b) $10 \cdot \lg(x+1) \geq x$ c) $1 - \frac{1}{x} < \lg x$

865. Die vom Menschen wahrgenommene Lautstärke L hängt nach folgendem Gesetz (Weber-Fechnersches Gesetz) von der Schallintensität I ab.

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

L: Lautstärke in phon
I: Schallintensität in Wm^{-2}
I_0: $= 10^{-12}\ Wm^{-2}$ (Hörschwelle des menschlichen Ohres bei 1 kHz)

a) Stellen Sie die Funktion $L = f(I)$ grafisch dar für $I_0 \leq I \leq 10\ Wm^{-2}$.
b) Wie gross ist die Lautstärke für einen gerade noch hörbaren Ton (Hörschwelle)?
c) Um wie viele phon nimmt die Lautstärke zu, wenn die Schallintensität verdoppelt wird?

d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $I = \bar{f}(L)$.

e) Berechnen Sie die Schallintensität für die folgenden Lautstärken:
40 phon (Unterhaltungssprache)
100 phon (Motorrad ohne Schalldämpfer)
120 phon (Flugzeugmotor in 4 m Abstand)

f) Um welchen Faktor erhöht sich die Schallintensität, wenn die Lautstärke um 1 phon zunimmt?

866. Der internationale Skiverband hatte für die alpine Kombination eine Punktebewertung eingeführt, bei der jeder Laufzeit t eine Punktzahl P nach der folgenden Funktion zugeordnet wird:

$$P = \frac{\lg\left(\frac{t}{t_0}\right)}{\lg k} \qquad t_0\text{: Zeit des schnellsten Läufers ; } k = 1.001284$$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, wenn $t_0 = 50\,\text{s}$ beträgt.
Definitionsbereich: $t_0 \leq t \leq 80\,\text{s}$

b) Berechnen Sie die Bestzeit t_0, wenn ein Läufer mit der Zeit 53.81 s die Punktzahl 36.08 erzielt hat.

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $t = \bar{f}(P)$.

Exponentielle Prozesse und Exponentialgleichungen

867. Ein Ball fällt aus 5 m Höhe auf den Boden und springt dann mehrmals in die Höhe. Nach jedem Aufprall erreicht er 60 % der vorhergehenden Höhe.
Nach wie vielen Sprüngen erreicht der Ball erstmals nicht mehr eine Höhe von

a) 1 cm? b) 1 mm?

868. Nach wie vielen Jahren ist ein Kapital von € 700 000.– auf € 2 000 000.– angewachsen, wenn der Zinssatz 4.5 % beträgt (Zinseszins)?

869. Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei einer jährlichen Verzinsung von

a) 4 % b) 5.5 % c) 6 % d) p %

870. Zwei Kapitalien werden gleichzeitig an Zins gelegt:
€ 9000.– zu 4 % und € 10 000.– zu 3.5 %.
Nach wie vielen Jahren sind sie gleich?

871. Am 1. Januar 1990 betrug die Bevölkerung eines Staates A 70 Millionen und eines Staates B 80 Millionen. Die jährlichen Wachstumsraten betragen für A 2 % und für B 0.6 %.
Wann (Jahr und Monat) werden die beiden Staaten dieselbe Einwohnerzahl haben?

872. Tritium ist ein radioaktives Isotop des Wasserstoffes. Es hat eine Halbwertszeit von 12.35 Jahren. Es wird durch die Höhenstrahlung in der Atmosphäre erzeugt und gelangt durch die Niederschläge in den Wasserkreislauf der Natur, wo es mit einer konstanten Konzentration vorkommt. Eine Eisprobe aus einem Gletscher besitzt nur noch 5 % des üblichen Tritiumanteils.

a) Wie alt ist die Probe?

b) Um wie viele Meter ist der Gletscher im Mittel pro Jahr gewachsen, wenn die Probe aus 68 m Tiefe stammt?

Die Endlosigkeit des wissenschaftlichen Ringens sorgt unablässig dafür, dass dem forschenden Menschengeist seine beiden edelsten Antriebe erhalten bleiben und immer wieder von neuem angefacht werden: Die Begeisterung und die Ehrfurcht.

Max Planck, 1858–1947, Physiker

873. In lebenden Organismen besteht Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen sowie aus radioaktiven Atomkernen C14 (Anteil: $3.0 \cdot 10^{-8}$ %). Sobald ein organischer Stoff stirbt, nimmt der C14-Anteil mit einer Halbwertszeit von 5736 Jahren exponentiell ab.
Im Jahre 1960 stellte man in der Leinwand einer altägyptischen Königsmumie einen C14-Anteil von $1.75 \cdot 10^{-8}$ % fest.

a) Wann ist der König gestorben?

b)* Wie genau ist die Lösung von a)? Berechnen Sie den absoluten Fehler. (Annahme: Der absolute Fehler der beiden C14-Anteile sei 0.5 Einheiten der letzten Ziffer.)

Die Funktion $f(x) = \log_b x$

874. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3.5^x$ c) $f(x) = e^x$

875. Zeichnen Sie den Graphen von $y = \log_3 x$ durch Spiegelung der entsprechenden Exponentialkurve.

876. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \lg x$ und $g(x) = \log_2 x$.

a) Durch welche Abbildung erhält man den Graphen von g aus jenem von f?

b) Sind die Graphen von f und g kongruent?

877. Begründen Sie:
Die Graphen aller Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$ $(b > 0, b \neq 1)$ haben nur den Punkt $P(1/0)$ gemeinsam.

878. Beweisen Sie:
Jede Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$ $(b > 0, b \neq 1)$ kann auf die Form $f(x) = k \cdot \ln x$ gebracht werden. Berechnen Sie k für $b = 2$ und $b = 10$.

879.* Für die Abkühlung eines heissen Getränks bei konstanter Zimmertemperatur gilt:

■ $T(t) = A \cdot e^{-kt} + T_0$ T: Temperatur des Getränks in °C t: Zeit in min

Die Messungen bei einem heissen Kaffee ergaben folgende Werte:
$T(0) = 92$, $T(1) = 88.5$ und $T(3) = 82$

a) Berechnen Sie die Parameter A, k und T_0. (Genauigkeit: 3 geltende Ziffern)

b) Welche Bedeutung hat die Temperatur T_0?

c) Wie lange dauert es, bis der Kaffee 60 °C warm ist?

Ich denke, also bin ich.

René Descartes, 1596–1650,
franz. Philosoph und Mathematiker

3.12 Winkelfunktionen

880. Skizzieren Sie den Graphen für $0 \leq x \leq 3\pi$.
Durch welche geometrische Abbildung geht der Graph aus der Kurve
$y = \sin x$ bzw. $y = \cos x$ hervor?

(1)	$y = \sin x + d$	$y = \cos x + d$

a) $y = \sin x + 1.5$ b) $y = \cos x - 0.8$

c) $y = \cos x - 1.2$ d) $y = \sin x - 0.9$

(2)	$y = a \cdot \sin x$	$y = a \cdot \cos x$

e) $y = 1.3 \cdot \sin x$ f) $y = 0.5 \cdot \cos x$

g) $y = -2 \cdot \sin x$ h) $y = -\frac{1}{3} \cdot \cos x$

(3)	$y = \sin (b \cdot x)$	$y = \cos (b \cdot x)$

i) $y = \sin (3x)$ j) $y = \sin (0.5x)$

k) $y = -\sin (0.8x)$ l) $y = \cos (2x)$

m) $y = -\cos \left(\frac{x}{3}\right)$ n) $y = -\cos (1.25x)$

(4)	$y = \sin (x + c)$	$y = \cos (x + c)$

o) $y = \sin \left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ p) $y = \sin \left(x - \frac{7}{24}\pi\right)$

q) $y = \cos \left(x + \frac{5}{12}\pi\right)$ r) $y = \cos \left(x - \frac{5}{9}\pi\right)$

881. Zeichnen Sie den Graphen für $x \geq 0$ (eine ganze Periode).
Zu berechnen sind:
- y-Achsenschnittpunkt
- Periode
- kleinste *positive* Nullstelle
- die Koordinaten des ersten Hoch- und Tiefpunktes

a) $y = -\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

b) $y = \cos(-3x)$

c) $y = \sin(2x) - 1.2$

d) $y = -0.5 \cdot \cos x + 2$

e) $y = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

f) $y = 2 \cdot \cos(0.5x)$

g) $y = -0.8 \cdot \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$

h) $y = -1.5 \cdot \cos\left(x + \frac{1}{12}\pi\right)$

882. Zeichnen Sie den Graphen für $0 \leq x \leq 2\pi$.

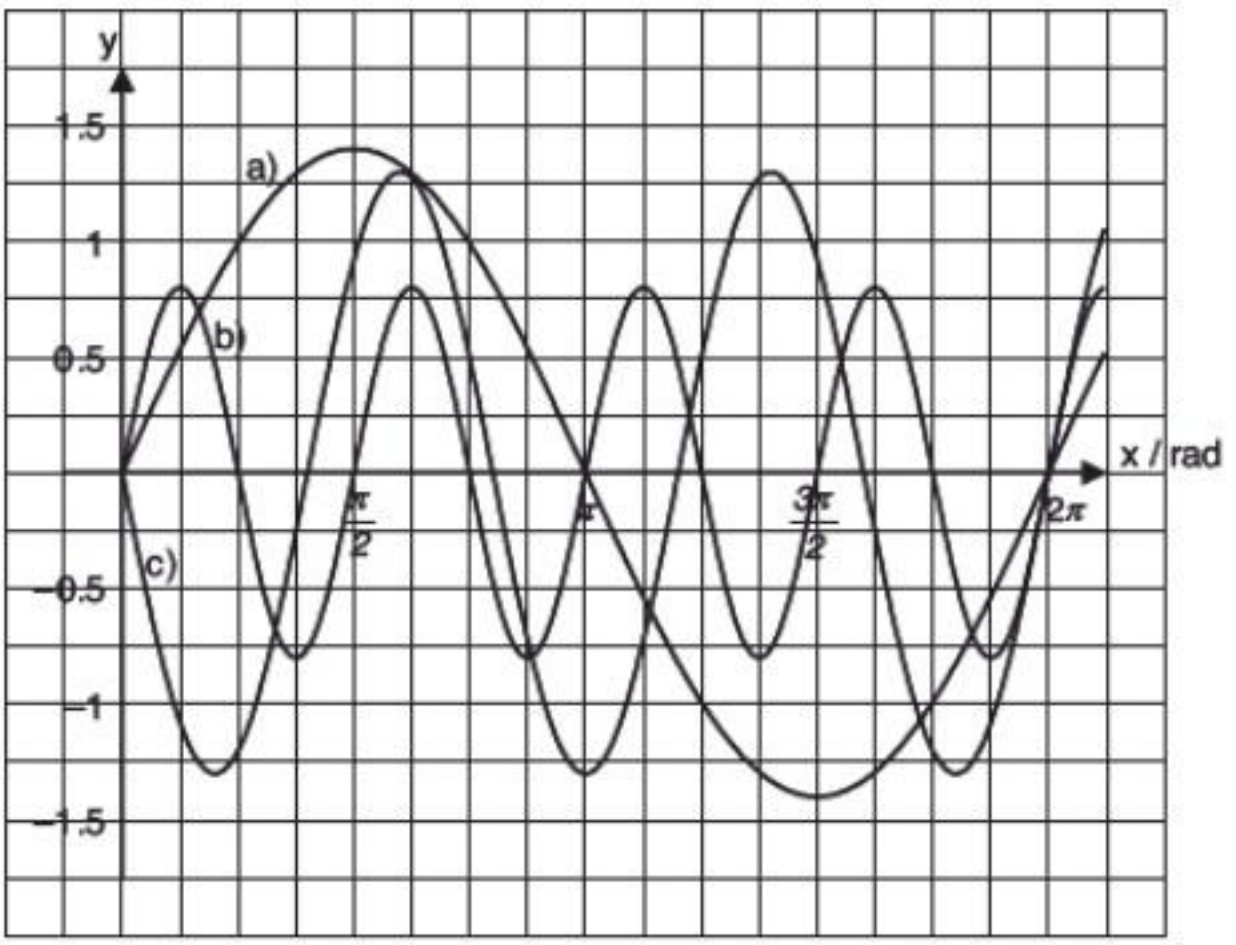
a) $y = 1 - \cos x$

b) $y = (\sin x)^2$

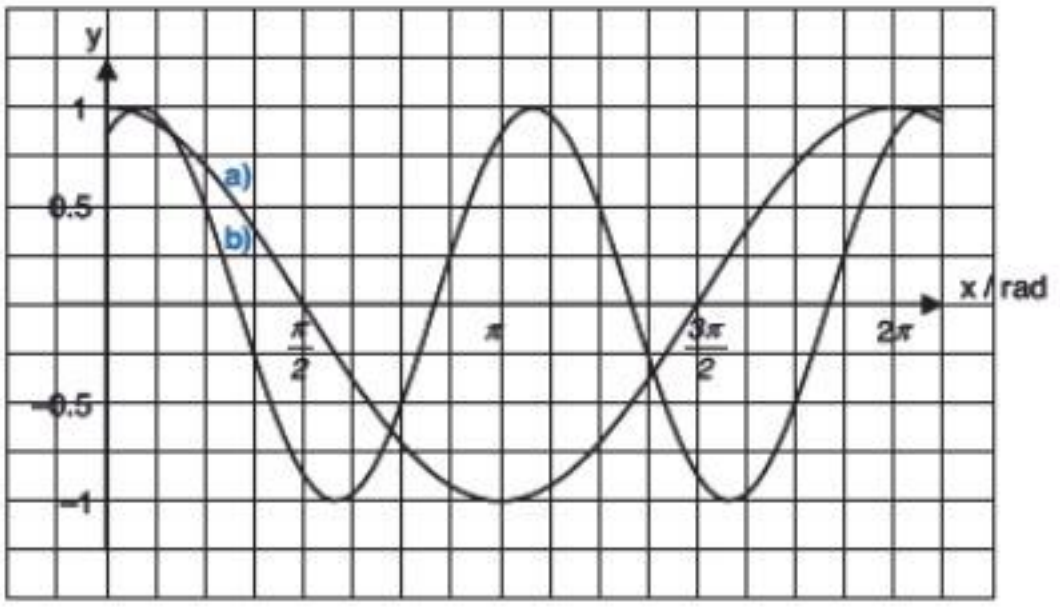
c) $y = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$

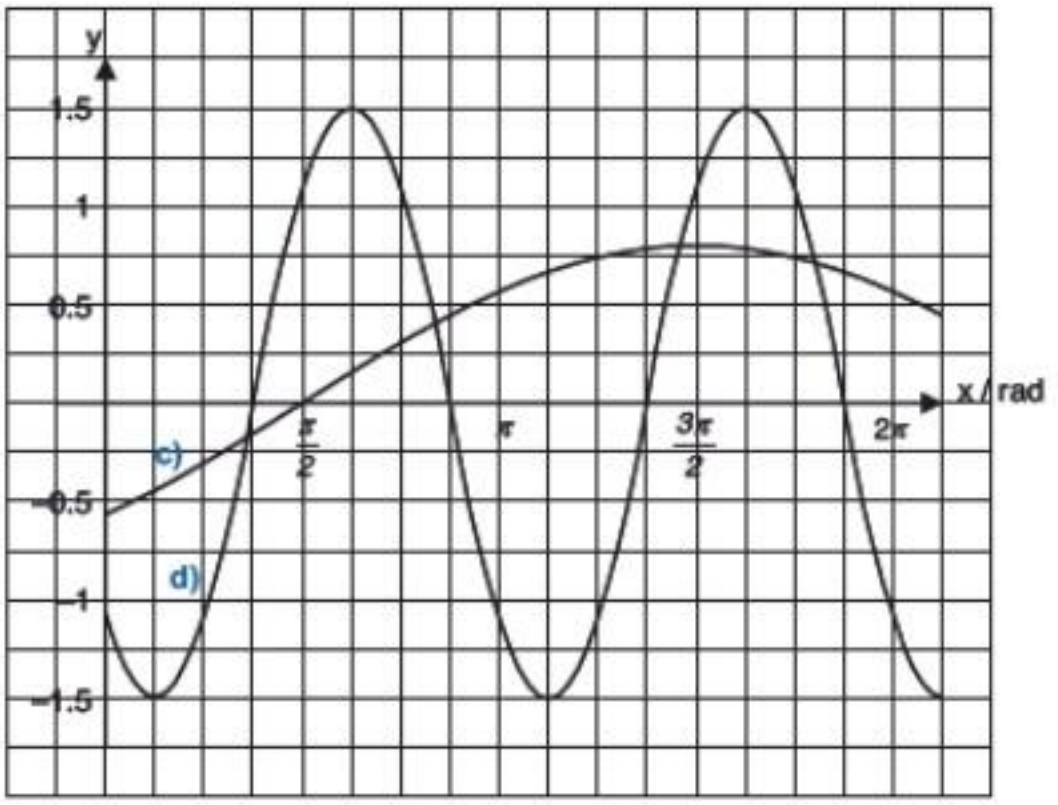
d) $y = \sin x + \cos x$

883. Das folgende Diagramm zeigt drei Sinuskurven.
Geben Sie die Kurvengleichung an.



884. Geben Sie eine zum Graphen passende Funktionsgleichung von der Form $y = a \cdot \sin(bx + c)$ mit $a > 0$ an.





885. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \geq 0$.

■

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$

b) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x) + 0.5$

c) $\tan\left(\frac{x}{3}\right) = |1.2 \cos(x)|$

d) $\sin(x) + \cos(x) = 0$

e) $\sin(2x) = -1.2 \sin(x) + 0.5$

f) $\tan(0.5x) = 5 \sin(x)$

886. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \geq 0$.

■

a) $\sin(3x) = -1.2 \cdot \cos(3x) - 0.7$

b) $3 \cdot \sin(0.5x) \cdot \cos(0.5x) = 1.3$

c) $\sin(x) = -\cos(0.25x)$

d) $\cos(3x) = 0.2x$

887. Die wissenschaftlich nicht fundierte Theorie der Biorhythmen besagt Folgendes: Das Leben des Menschen verläuft vom Tag der Geburt an in wellenförmigen Schwingungen. Dabei gelten folgende Perioden:
- physische Aktivität: 23 Tage
- Gefühlsleben: 28 Tage
- intellektuelle Leistungen (Verstandesleben): 33 Tage

Bei einer bestimmten Person sind am 1. März alle drei Bereiche auf Null.

a) Beschreiben Sie die physische Aktivität durch eine Funktion der Form
$A(t) = Z \cdot \sin(at)$ mit $-10 \leq A \leq 10$. (t in Tagen)
Wie ist der Stand der physischen Aktivität am 25. Mai desselben Jahres?

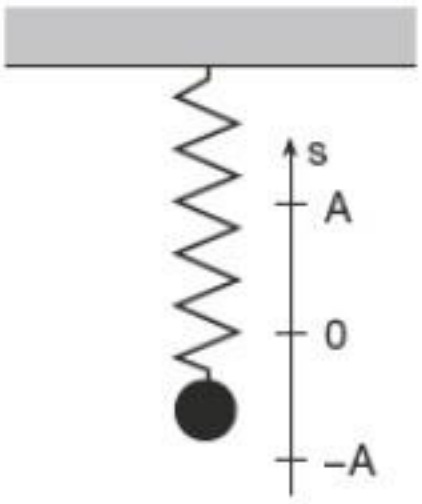
b) Beschreiben Sie die intellektuelle Leistung durch eine Funktion der Form
$L(t) = Z \cdot \sin(bt)$ mit $-10 \leq L \leq 10$. (t in Tagen)
Wie ist der Stand der intellektuellen Leistung am 21. Juni desselben Jahres?

888. Die Gezeiten (Ebbe und Flut) verlaufen mit einer Periode von ca. 12.5 Stunden. Es wird angenommen, dass der Verlauf des Wasserstandes sinusförmig sei. Der Tidenhub (Höhenunterschied zwischen Höchststand und Tiefststand) beträgt bei der englischen Hafenstadt Hull 7 m.

a) Beschreiben Sie den Verlauf des Wasserspiegels durch eine Sinusfunktion
$H = f(t)$. $(-3.5\,\text{m} \leq H \leq 3.5\,\text{m})$
t: Zeit in Stunden
H: Abweichung in Meter vom mittleren Wasserstand.

b) Wie viele Meter über dem Tiefststand steht der Meeresspiegel 7 Stunden nach dem Höchststand?

889.



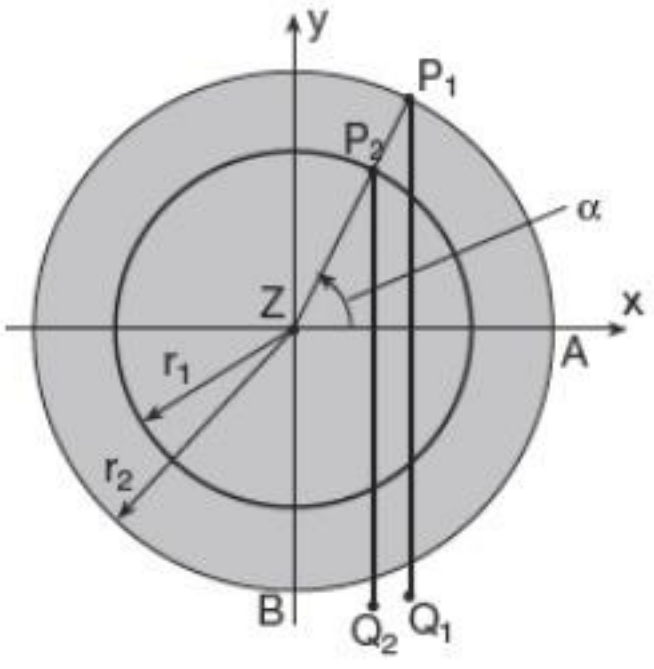
Eine Kugel schwingt an einer vertikal aufgehängten Feder auf und ab.
Diese Schwingung lässt sich durch eine Sinusfunktion $s = f(t)$ (s: Auslenkung, t: Zeit) beschreiben, falls man die Reibung vernachlässigt.
Die maximale Auslenkung (Amplitude) sei A und die Schwingungsdauer T.

Bestimmen Sie die Funktion $s = f(t)$, falls

a) $s = 0\,\text{m}$ für $t = 0\,\text{s}$ ist und sich die Kugel nach oben bewegt.

b) $s = A = 12\,\text{cm}$ für $t = 0\,\text{s}$ ist und $T = 3\,\text{s}$ beträgt.
Berechnen Sie die Auslenkung für $t = 1.2\,\text{s}$.

890.



In den Punkten P_1 und P_2 einer im Gegenuhrzeigersinn drehenden Scheibe hängen vertikal je eine Pendelstange P_nQ_n.

$r_1 = 1.5\,\text{m}$; $r_2 = 3\,\text{m}$

$l_1 = \overline{P_1Q_1} = 4\,\text{m}$

$l_2 = \overline{P_2Q_2} = 5\,\text{m}$

a) Bestimmen Sie die Lage $y = f(\alpha)$ für Q_1 und Q_2.

b) Für welches α haben die Punkte Q_1 und Q_2 gleiche Höhenlage?

c) Das Rad dreht sich einmal in der Zeit T.
Bestimmen Sie die Höhenlage von Q_n $(y_Q = f(t))$ für $t = 0$ bei A und $t = 0$ bei B. (Winkel im Bogenmass)

3.13 Optimieren

3.13.1 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

891. Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.

a) $-2 \leq x \leq 8$
$3 \leq y \leq 5$

b) $0 \leq x \leq 6$
$0 \leq y \leq -0.5x + 5$

892. Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Gebietes.
Für alle Teilaufgaben gilt zusätzlich: $x \geq 0$ und $y \geq 0$

a) $y \leq \frac{2}{3}x + 2$
$y \geq -\frac{2}{3}x + 4$
$y \geq \frac{4}{3}x - 2$

b) $y \leq \frac{1}{2}x + 3$
$y \geq -\frac{1}{3}x + 5$
$y \geq x - 2$

c) $y \leq \frac{1}{2}x - 1$
$y \leq -\frac{2}{3}x + 6$
$y \geq -1.5x + 9$

893. Stellen Sie die Lösungsmenge grafisch dar.
Für die Unbekannten x und y sind nur *natürliche Zahlen* zugelassen.

a) $y \leq -1.2x + 6.8$

b) $y \leq -2x + 9$ $\quad y \geq 2x - 3$

894. Geben Sie die Ungleichungen an, durch die folgendes Gebiet bestimmt ist:

a) Dreiecksfläche mit den Eckpunkten
A(–5/–5) B(3/–2) C(–2/7)

b) Trapezfläche mit den Eckpunkten
A(–1/1) B(8/1) C(2/9) D(–4/5)

c) Drachenviereck mit den Eckpunkten
A(–1/–11) B(4/–9) C(6/–4) D(–6/1)

895. Stellen Sie die Lösungsmenge des folgenden Systems von Ungleichungen grafisch dar.
Bestimmen Sie jene Lösung (x/y) mit dem grössten x-Wert.

a) $\left| \begin{array}{r} x + y - 5 \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y - 4 \leq 0 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} \frac{3}{8}x - y - 3 < 0 \\ -\frac{3}{8}x - y + 1.5 > 0 \\ -2x - y - 8 < 0 \end{array} \right|$

896. Ein Automat zur Herstellung von Grafiken zweier unterschiedlicher Typen I und II kann täglich höchstens eine Stunde beansprucht werden. Grafik I erfordert eine Bearbeitungszeit von 7.5 Minuten, Grafik II von 15 Minuten.
Stellen Sie die möglichen Stückzahlkombinationen grafisch dar.
Wie viele Stückzahlkombinationen sind total möglich?

897. In einem Einkaufszentrum sollen 14 Kassen ersetzt werden. Es steht ein Höchstbetrag von € 18 600.– zur Verfügung, und es werden ein Typ A für € 1200.– und ein Typ B für € 1500.– angeboten.
Zudem besteht der Wunsch nach möglichst vielen Kassen vom Typ B.
Welche Möglichkeiten gibt es?

898. Ein Transportfahrzeug kann höchstens 1500 kg laden. Es besteht der Auftrag, Kisten der Sorte A mit 150 kg und der Sorte B mit 250 kg zu transportieren. Dabei sollen immer mindestens zwei Kisten von jeder Sorte geladen werden.

a) Wie viele Lademöglichkeiten gibt es?

b) Bei welcher Lademöglichkeit wird das Ladegewicht am besten ausgenutzt?

899. Eine Firma stellt zwei Bauteile A und B her, wozu zwei verschiedene Maschinen M1 und M2 zeitlich folgendermassen eingesetzt werden müssen:

M1: für Bauteil A $\frac{1}{2}$ Std. und für Bauteil B $\frac{1}{2}$ Std.

M2: für Bauteil A $\frac{1}{3}$ Std. und für Bauteil B 1 Std.

Die Maschine M1 kann täglich höchstens 5 Stunden, die Maschine M2 täglich höchstens 6 Stunden zur Produktion dieser Bauteile verwendet werden.
Notieren Sie die Ungleichungen und stellen Sie alle Möglichkeiten grafisch dar.
Welche Stückzahlkombination ergibt sich, wenn die beiden Maschinen voll eingesetzt werden?

900. Stellen Sie für das folgende Problem die Ungleichungen auf:
Ein Fahrradhändler kauft zwei verschiedene Fahrradmarken ein:
Marke A: 600 €/Stück Marke B: 900 €/Stück
Er möchte mehr Räder der Marke A als von der Marke B einkaufen, aber höchstens doppelt so viele. Der Gesamtbetrag soll höchstens € 30 000.– ausmachen.

Der Begriff der Mathematik ist der Begriff der Wissenschaft überhaupt.
Alle Wissenschaften sollen daher Mathematik werden.

Novalis, 1772–1801, Dichter, philosophische und mathematische Studien

901. Eine Handelsfirma für Haushaltmaschinen hat Kaffeemaschinen und Mixer auf Lager. Eine Kaffeemaschine kostet € 600.–, ein Mixer € 200.–.
Folgende Bedingungen sollten beim Lagerbestand eingehalten werden:
- Es können höchstens 250 Geräte abgestellt werden.
- Der Lagerbestand darf den Betrag von € 60 000.– nicht übersteigen.
- Die Zahl der Mixer muss mindestens doppelt so gross wie die Zahl der Kaffeemaschinen sein.

Stellen Sie dazu die Ungleichungen auf und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge in einem Diagramm.
Wie viele Kaffemaschinen dürfen maximal am Lager sein?

902. Damit eine Halle optimal beleuchtet werden kann, sind mindestens 6 Beleuchtungskörper notwendig. Bei Verwendung von 250-Watt-Leuchten und 500-Watt-Leuchten darf der stündliche Verbrauch nicht mehr als 2.5 kWh betragen.
Wie viele Installationen sind möglich?

903. In einer Schule sollen die 34 Klassenzimmer mit je 30 neuen Tischen ausgestattet werden. Das kleinere Modell (M1) kostet € 185.–, das grössere (M2) € 240.–. M2 ist aber nur für 22 Zimmer ideal unterzubringen. Die ganze Anschaffung darf höchstens € 220 000.– kosten.
Wie viele Tische der beiden Modelle können gekauft werden, wenn der Wunsch nach möglichst vielen grossen Modellen (M2) erfüllt werden soll?

3.13.2 Lineare Optimierung

904. Ermitteln Sie die optimale Lösung bei folgenden Bedingungen:

$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ $\quad x \leq 6.5$ $\quad y \leq 5$

$x + 2y \leq 14$ $\quad 2x + y \leq 16$

Zielfunktion: $6x + 9y = Z \rightarrow$ Maximum

905. Ermitteln Sie die optimale Lösung bei folgenden Bedingungen:

$x \geq 2.5$ $\quad y \geq 1.5$ $\quad 2x + y \geq 10$ $\quad x + 3y \geq 10$

Zielfunktion: $6x + 9y = Z \rightarrow$ Minimum

906. Ermitteln Sie die optimale Lösung bei folgenden Bedingungen:

$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ $\quad 6x - 4y \leq 48$

$-2x + y \leq 4$ $\quad 4x - 10y \leq 10$

a) Zielfunktion: $4x + 8y = Z \rightarrow$ Maximum

b) Zielfunktion: $-6x + 2y = Z \rightarrow$ Maximum

907. In einem Betrieb werden zwei Arten von Bauteilen (Typ A und Typ B) hergestellt. Vom Typ A können höchstens doppelt soviel verkauft werden wie vom Typ B. Monatlich kann nur das Rohmaterial für 1000 Geräte bezogen werden. Zudem bestehen monatliche Produktionsobergrenzen für Typ A von 700 und für Typ B von 800 Stück. Bestimmen Sie den maximalen Verkaufserlös, wenn Typ A für 80 €/Stück und Typ B für 60 €/Stück verkauft werden.

908. In einem Produktionsbetrieb werden die Produkte X und Y mithilfe von Fräsmaschine und Drehbank hergestellt.
Bearbeitungszeit für Produkt X: 2 Stunden fräsen und 2 Stunden drehen.
Bearbeitungszeit für Produkt Y: 3 Stunden fräsen und 1 Stunde drehen.
Die maximale tägliche Einsatzzeit beträgt für die Fräsmaschine 12 Stunden und für die Drehbank 8 Stunden.
Wie viele Stücke müssen je hergestellt werden, damit der Gesamtgewinn maximal wird, wenn bei Produkt X mit einem Gewinn von € 150.– pro Stück und bei Produkt Y von € 225.– pro Stück gerechnet werden kann?

909. Aus Reis und magerem Schweinefleisch soll ein Eintopf zubereitet werden. Pro Person werden 450 g Eintopf gerechnet, wobei nicht mehr als 300 g Schweinefleisch beigegeben werden darf. Für einen ausgewogenen Geschmack soll der Reisanteil gewichtsmässig höchstens 75 % des Schweinefleischanteils betragen.
1 kg Schweinefleisch enthält 7362 kJ, 1 kg Reis 15 447 kJ.
Wie muss dosiert werden, wenn das Essen möglichst energiereich sein soll?

910. Eine Firma stellt aus Fleisch und Gemüse Konserven her. Dabei sollen nach ernährungswissenschaftlichen Erkenntnissen die wichtigsten Bestandteile wie Fett, Eiweiss und Kohlenhydrate im optimalen Verhältnis beigegeben werden. Der tägliche Mindestbedarf eines Menschen beträgt 100 g Fett, 100 g Eiweiss und 200 g Kohlenhydrate. 1 kg Gemüse enthält im Durchschnitt 50 g Fett, 250 g Eiweiss und 200 g Kohlenhydrate, während 1 kg Fleisch im Durchschnitt 200 g Fett, 75 g Eiweiss und 250 g Kohlenhydrate beinhalten.
Ermitteln Sie das Gewichtsverhältnis zwischen Fleisch und Gemüse, wenn bei einem Preis von € 9.– pro kg Gemüse und von € 25.– pro kg Fleisch die Kosten minimal sein sollen.

Es gibt jedoch noch einen anderen Grund für die hohe Wertschätzung der Mathematik: sie allein bietet den exakten Naturwisschenschaften ein gewisses Mass an Sicherheit, das ohne Mathematik nicht denkbar wäre.

Albert Einstein, 1879–1955,
Förderer der math. und physikalischen Wissenschaft

911. Eine Lichtsignalanlage mit den Ampeln X und Y regelt an einer Kreuzung den Verkehr, wobei es unmöglich ist, dass beide in einer bestimmten Phase gleichzeitig Grün haben können. X gibt mit der Grünphase zwei Spuren frei, Y deren drei, und pro Fahrspur passiert durchschnittlich jede Sekunde ein Fahrzeug das Lichtsignal.
Aufgrund einer Verkehrszählung werden nun folgende Bedingungen gestellt:

- die Grünphase von Y soll länger als diejenige von X, aber höchstens doppelt so lang sein.
- mit Rücksicht auf die Fussgänger sollen beide Grünphasen zusammen nicht länger als 60 Sekunden betragen.

Wie muss die ganze Lichtsignalanlage geschaltet werden (Dauer der Grünphasen), damit in den Grünphasen möglichst viele Fahrzeuge die Kreuzung passieren können?

912. In einem Bürogebäude soll die ganze Bodenfläche von 3000 m² mit neuen Belägen versehen werden. Es stehen drei verschiedene Sorten von Produkten (B1, B2 und B3) zur Verfügung, wobei mindestens 800 m² mit dem Belag B1 ausgestattet werden müssen. Folgende Grundpreise sind dabei einzukalkulieren.

Sorte	Material und Arbeit	Reinigungskosten pro Jahr
B1	30 €/m²	5 €/m²
B2	15 €/m²	8 €/m²
B3	10 €/m²	10 €/m²

Die Reinigungskosten sollen 20 000 € pro Jahr nicht übersteigen.
Wie ist die Verteilung der Produkte zu wählen, damit die Anschaffungskosten möglichst klein werden?

913. Die Raffinerien R1 und R2 einer Erdölfirma produzieren schweres, mittelschweres und leichtes Öl. In der folgenden Tabelle sind die Produktionsmengen und -kosten aufgeführt.

	tägliche Produktion		Mindestbedarf
	Raffinerie R1	Raffinerie R2	im Vierteljahr
schweres Öl	200 t	500 t	32 000 t
mittelschweres Öl	200 t	150 t	21 000 t
leichtes Öl	300 t	150 t	24 000 t
Kosten je Tag	5500 €	4500 €	

Wie viele Tage müssen die beiden Raffinerien in Betrieb sein, so dass die Gesamtkosten minimal werden?

3.13.3 Extremwertaufgaben

Siehe auch: Frommenwiler/Studer «Mathematik für Mittelschulen» **Geometrie**
Kap. 3.5 (Stereometrische Extremwertaufgaben)

914. Für welches x aus dem Definitionsbereich $0 \leq x \leq 9$ nimmt die Funktion f den
■ grössten bzw. den kleinsten Wert an?

a) f: $y = |2x - 12| + 10$

b) f: $y = -2x^2 + 15x + 6$

c) f: $y = -x(6-x)^2$

915. Bestimmen Sie im Definitionsbereich D für die Funktion f die Extremstellen sowie die
■ zugehörigen Extremwerte und den Wertebereich.

a) f: $y = -x^3 + 9x - 14$ D: $-3.6 \leq x \leq 5$

b) f: $y = 0.4x^4 - 1.5x^3 - 5x^2 - 15$ D: $-4 \leq x \leq 6.3$

c) f: $y = 0.5x^5 + 1.4x^4 + 20$ D: $-4 \leq x \leq 2.3$

d) f: $y = \frac{4}{(x-2)^2} - 15$ D: $-12 \leq x \leq 1.8$

e) f: $y = \frac{11}{(x+2.5)} + x^2$ D: $-2 \leq x \leq 4$

f) f: $y = \frac{-2}{(x-5)(7+x)} + x$ D: $-6.8 \leq x \leq 4.9$

916. Bestimmen Sie im Definitionsbereich D für die Funktion f die Extremstellen sowie die
■ zugehörigen Extremwerte und den Wertebereich.

a) f: $y = \frac{x^2}{5} - \sqrt{12x^2 + 25}$ D: $-4 \leq x \leq 17$

b) f: $y = \left| -2 + x^{\frac{2}{3}} \right| - 8$ D: $-5 \leq x \leq 5$

c) f: $y = -2^x + x^3 - 50$ D: $-2.5 \leq x \leq 10$

d) f: $y = |\lg(x^2+1)| + 5$ D: $-10 \leq x \leq 3$

917. An welcher Stelle ist die Differenz der Funktionswerte von
■

a) f: $y = 0.8x^4 - 2x^3 - 4x$ und g: $y = -6x - 16$

b) f: $y = \sqrt{x}$ und g: $y = \lg x$

ein Minimum?

918. Welcher Punkt des Graphen von f: $y = \sqrt{x}$ hat vom Punkt A(3/0) die kleinste
■ Entfernung? $(e_x = e_y)$

919. Welcher Punkt des Graphen mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{x+1} + 1.5$ liegt dem
■ Ursprung (0/0) am nächsten? $(e_x = e_y)$

920. Um wie viel muss einer der beiden Graphen f_1: $y = \frac{7x}{(x-2)^2} + 5$ und
■ f_2: $y = -0.4x^2 + 3x - 6$ in y-Richtung verschoben werden, bis sie sich berühren?

921. Gegeben ist der Graph von $y = -0.1x^2 + 16$.
■ Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze in (0/0) und den übrigen Eckpunkten auf dem Graphen oberhalb der x-Achse soll so festgelegt sein, dass sein Flächeninhalt maximal ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

922. Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser 52 cm soll ein
■ Balken mit rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten werden, sodass seine Belastbarkeit auf Biegung, d. h. sein Widerstandsmoment W maximal wird. $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$
Berechnen Sie die Querschnittsabmessungen b (Breite) und h (Höhe) des Balkens.

923. Die Wurfweite eines schiefen Wurfes berechnet sich nach folgender Formel:
■

$$w = \frac{2v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$$

w: Wurfweite
v_0: Anfangsgeschwindigkeit
g: Erdbeschleunigung
α: Winkel gegenüber der horizontalen Ebene

Bei welchem α wird die grösste Weite erreicht?

924. Ein Stück Draht der Länge 100 cm wird verwendet, um einen Kreis und ein Quadrat zu
■ formen. Wie muss man den Draht teilen, wenn die Summe der Flächeninhalte von Kreis und Quadrat

a) minimal b) maximal

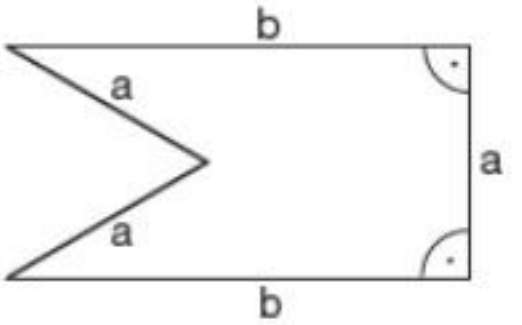
werden soll?

925. Zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y = \lg(x)$ soll ein Rechteck ABCD mit
■ möglichst grossem Flächeninhalt so gelegt werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
- Der Punkt A liegt auf der x-Achse, wobei $2 < x_A < 10$
- B (10/0)
- D liegt auf dem Graphen von $y = \lg(x)$

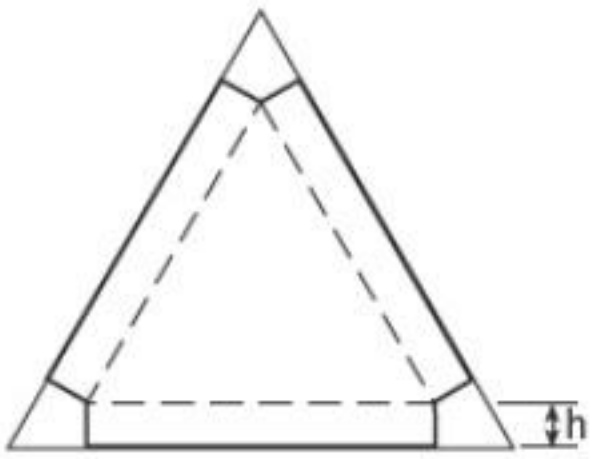
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D. $(e_x = e_y)$

926. Wie gross sind die Längen a und b zu wählen, damit
■
a) bei einem Umfang von 30 m der Flächeninhalt der Figur maximal wird?

b) bei einem Flächeninhalt von 23 m² der Umfang minimal wird?

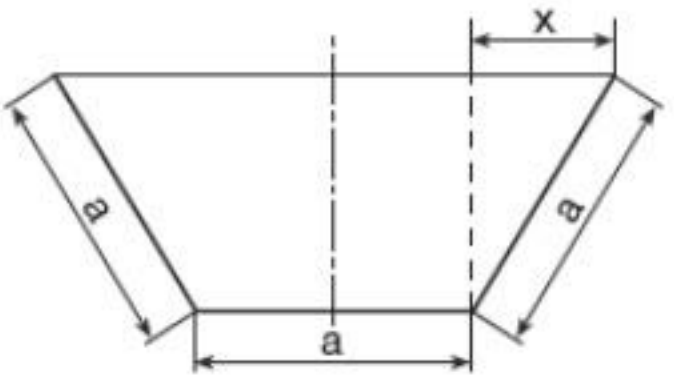


927.
■



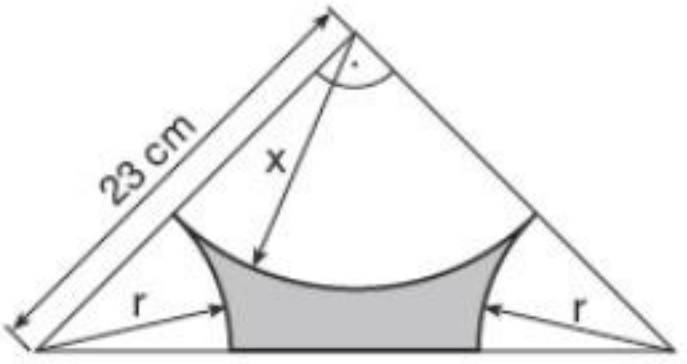
Von einem Blechstück der Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 53 cm wird durch Abschneiden der drei Drachenvierecke ein oben offener Behälter hergestellt. Berechnen Sie die Höhe h für maximales Volumen des Behälters.

928.
■



Aus drei Brettern der Breite $a = 4.8$ dm wird eine Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt hergestellt. Für welches Mass x wird die Querschnittsfläche maximal?

929.
■

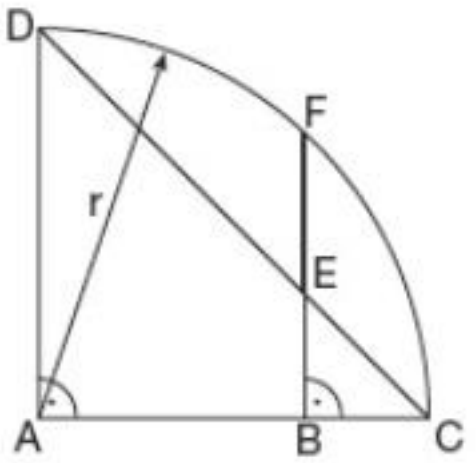


In der Figur berühren die beiden Achtelskreise den Viertelskreis.
Wie gross muss x gewählt werden, damit der Flächeninhalt der schattierten Figur maximal wird?

930. Der Umfang eines Kreissektors soll 86 cm betragen.
■ Berechnen Sie den Radius und den Zentriwinkel, wenn der Flächeninhalt des Sektors maximal sein soll.

931. Ein Schiff fährt flussabwärts von A nach B (53 km) und zurück nach C (33 km).
■ Bei welcher Strömungsgeschwindigkeit ist die Reisezeit für den Weg ABC am kürzesten, wenn die Eigengeschwindigkeit (in ruhendem Gewässer) 12 km/h beträgt?

932. Bestimmen Sie $\overline{AB}$ aus r so, dass
■ $\overline{EF}$ maximal wird.



933. Ein Kreissektor ist einem Kreis mit Radius R einbeschrieben.
■ Wie gross müssen Radius und Zentriwinkel des Sektors gewählt werden, wenn sein Flächeninhalt möglichst gross sein soll?

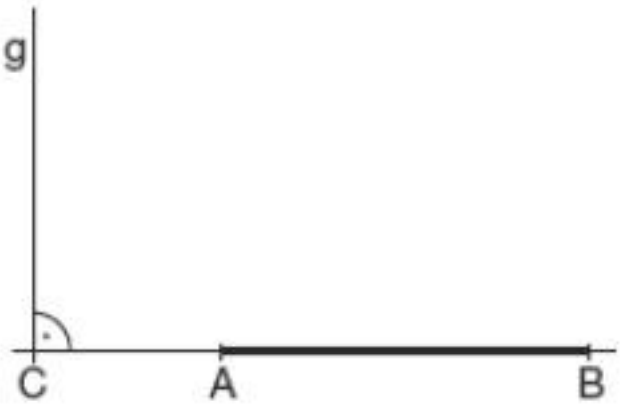
934. Zwei Lichtquellen L_1 und L_2 mit den Lichtstärken $i_1 = 12$ cd (Candela) und $i_2 = 21$ cd
■ liegen in einer Entfernung von 4.50 m auseinander.
Wie weit ist der am schwächsten beleuchtete Punkt zwischen den Lichtquellen von der schwächeren Lichtquelle entfernt?
Anmerkung: Die Beleuchtungsstärke ist proportional der Lichtstärke und indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung.

935. Ein Kanal von 1.10 m Breite mündet rechtwinklig in einen Kanal von 2.10 m Breite.
■ Wie lang darf ein dünnes, 36 cm breites Brett höchstens sein, damit es gerade noch durch den Winkel der beiden 40 cm hohen Kanäle durchgeschoben werden kann?

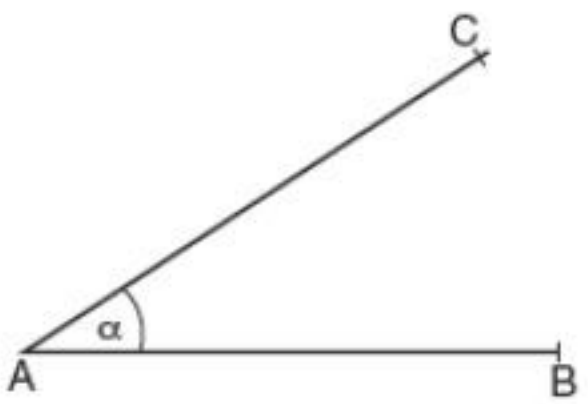
936. Von einem Punkt P legt man die beiden Tangenten an einen Kreis mit Zentrum
■ M (PM = z). Die Berührungspunkte werden dabei mit U und V bezeichnet.
Wie gross muss der Radius des Kreises gewählt werden, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks UMV maximal werden soll?
Lösen Sie die Aufgabe
a) für z = 30 cm.
b) allgemein. (Tipp: Berechnung über $\alpha = \angle PMU$)

937. Ein einarmiger Hebel habe in A seinen Stützpunkt, im Punkt B ($\overline{AB} = 2.20$ m) sei eine
■ Last mit der Gewichtskraft 200 N aufgehängt. Das Eigengewicht des Hebels betrage 15 N/m.
Wie lang muss der Hebel sein, damit die Last durch eine möglichst kleine Kraft ins Gleichgewicht gebracht werden kann?

938. ■ Berechnen Sie die Lage des Punktes P auf der Geraden g so, dass die Strecke AB unter möglichst grossem Winkel gesehen werden kann.
$\overline{AB} = 7.9\,m$; $\overline{AC} = 4.0\,m$



939. ■



In der Darstellung bewegt sich ein Körper von A Richtung C mit der Geschwindigkeit $v_1 = 1.8\,dm/min$. Ein anderer Körper bewegt sich mit $v_2 = 0.7\,dm/min$ von B nach A ($\overline{AB} = 42\,dm$, $\alpha = 53°$).
Berechnen Sie jenen Zeitpunkt, bei dem die Entfernung der beiden Körper minimal ist. Wie gross ist diese Entfernung?

940. ■ Vom Nebenscheitel N(0/b) der Ellipse e: $x^2 + 4y^2 = 4$ soll die Sehne mit maximaler Länge gezogen werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Endpunktes. Wie lang ist die Sehne? ($e_x = e_y = 1$ cm)

941.* ■ Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Graphen von $y = 10^x$ und $y = \lg(x)$. ($e_x = e_y$)

Genau wie das rationale Denken des Mathematikers oder des Juristen oder irgendeines anderen wissenschaftlich gebildeten Menschen ist auch das statistische Denken ein abstrakter Prozess nach Gesetzen eigener Art.

Statistik ist eine Zusammenfassung von Methoden, welche uns erlauben vernünftige Endscheidungen im Falle von Ungewissheit zu treffen.

W. Allen Wallis 1912–1998, Wirtschaftswissenschafter, Statistiker
Harry V. Roberts, 1923–2004, Statistiker

4. Datenanalyse

Mit Statistiken kann man alles beweisen, auch das Gegenteil davon.

James Callaghan, 1912–2005, britischer Premierminister

Ich stehe Statistiken etwas skeptisch gegenüber, denn laut Statistik haben ein Millionär und ein Habenichts je eine halbe Million.

Franklin D. Roosevelt, 1882–1945

Statistik ist eine Wanderkarte. Wenn man sie zu sehen bekommt, ist sie von der Realität schon etwas überholt. Dennoch gibt sie Orientierung. Man muss sie mit Verstand lesen können, sonst geht man in die Irre.

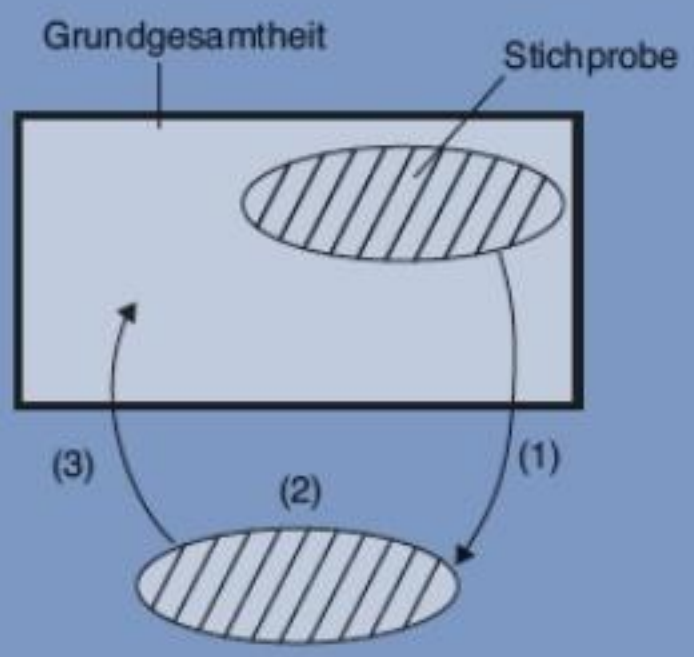
Martin Kruse, *1929, Theologe

4.1 Grundlagen

Statistik ist die Lehre von wissenschaftlichen Methoden, Massenerscheinungen mengemässig zu erfassen, nach **Merkmalen** zu ordnen und systematisch darzustellen.

Millionen einzelner Daten werden in verschiedenen Bereichen tagtäglich gesammelt, beschrieben und analysiert.
Aus entsprechenden Interpretationen werden zukünftige Entwicklungen prognostiziert und oft auch Entscheidungen getroffen.

In der mathematischen Statistik unterscheidet man folgende Schritte:



(1) Stichprobe wählen und Daten erfassen (repräsentative Zufallsauswahl)

(2) Aufbereitung der Stichprobe-Daten (beschreibende oder deskriptive Statistik)

(3) Rückschluss auf die Grundgesamtheit* (beurteilende oder induktive Statistik)

* mit Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dieses Kapitel *4. Datenanalyse* beschränkt sich auf Schritt (2), das heisst nur auf die beschreibende Statistik.

Beispiele für Merkmale: Länge, Farbe, Temperatur, Stimmung, Fettgehalt, Blutgruppe, Lautstärke.

Für die **Werte** eines Merkmals gibt es verschiedene Bezeichnungen:
Merkmalswert, Merkmalsausprägung, Beobachtungswert, Messwert

Alle Merkmalswerte einer Stichprobe nennt man **Daten**, welche man mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) bezeichnet. n: Stichprobenumfang

Es ist mir noch heute rätselhaft, dass man herausbringt, was sechzig Millionen Menschen denken, wenn man zweitausend Menschen befragt.
Erklären kann ich das nicht. Es ist eben so.

Elisabeth Noelle-Neumann, 1916 – 2010, Kommunikationswissenschafterin

Arten von Merkmalen (Daten)
Daten können wie folgt eingeteilt werden:

Daten (Messwerte, Beobachtungswerte)

- **qualitativ** (Beobachtungswert)
  - **nominal**
    keine Rangordnung
    z. B. Nationalität
  - **ordinal**
    Rangordnung ist sinnvoll
    z. B. Helligkeitsstufen
- **quantitativ** (Messwert)
  - **stetig**
    alle Zahlenwerte eines Intervalls
    z. B. Körpergrösse*)
  - **diskreta**
    nur isolierte Zahlenwerte
    z. B. Kinderzahl

Beispiele:

Merkmal	Merkmalsausprägung	Art des Merkmals	Art der Skala
Volumen	1.64 m^3, 1.75 m^3, 1.91 m^3	quantitativ	stetig
Anzahl Tiere	5, 7, 12, 20, ...	quantitativ	diskreta
Vorkommen	immer, oft, selten, nie	qualitativ	ordinal
Farbe	rot, grün, blau, gelb	qualitativ	nominal

942. Entscheiden Sie, welche Merkmale sich mit einer Nominal-, Ordinal-, stetigen oder diskreten Skala erfassen lassen.

a) Zufriedenheit der Besucher b) Blutgruppe c) Hautfarbe
d) Pulsschläge je Minute e) Zivilstand f) Aktienkurs
g) Temperaturverlauf h) Alkoholgehalt i) Lautstärke
j) Interesse an Technik k) Biologienote

943. Geben Sie je ein quantitatives und qualitatives Merkmal aus folgendem Bereich an:

a) Wirtschaft b) Technik

944. Welche der Aussagen (1) und (2) sind richtig?

(1) Jedes Merkmal ist eine physikalische Grösse.
(2) Jede physikalische Grösse kann ein Merkmal sein.

Beispiele für physikalische Grössen: Zeit, Energie, Temperatur, Kraft, Stromstärke, Druck.

*) Wegen Messungenauigkeit kann das Merkmal Körpergrösse nicht alle Zahlenwerte annehmen und kann daher genau genommen nicht als stetiges Merkmal gelten. Es ist jedoch aus theoretischen Gründen zweckmässig alle Zahlenwerte als zugelassen zu denken.

4.2 Daten erheben und grafisch darstellen

Daten können durch statistische Erhebungen (Messungen, Umfragen usw.) gewonnen werden.

Daraus entsteht meist eine **Urliste**,
d. h. eine ungeordnete Auflistung der Beobachtungs- oder Messwerte.

Beispiel (Werte in kg)	3	1	1	5	3	3	4	1	4	3

Um sich einen besseren Überblick zu verschaffen, wird eine nach

Wert oder Rang geordnete Liste									
1	1	1	3	3	3	3	4	4	5

oder eine

Strichliste	
1 kg	III
2 kg	
3 kg	IIII
4 kg	II
5 kg	I

erstellt.

Oft ist eine **Häufigkeitsverteilung** (Häufigkeitstabelle) zweckmässig.

Merkmal	**Absolute Häufigkeit**	**Relative Häufigkeit**
1 kg	3	0.3
2 kg	0	0
3 kg	4	0.4
4 kg	2	0.2
5 kg	1	0.1

Absolute Häufigkeit n_i
Sie gibt an, wie viele Elemente mit dem gleichen interessierenden Merkmalswert gezählt wurden.
Die Summe der absoluten Häufigkeiten ist gleich dem Stichprobenumfang n.

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = n$$

Relative Häufigkeit h_i
Die relative Häufigkeit ergibt sich aus der Division der absoluten Häufigkeit durch den Stichprobenumfang.

$$h_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Stichprobenumfang}} = \frac{n_i}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

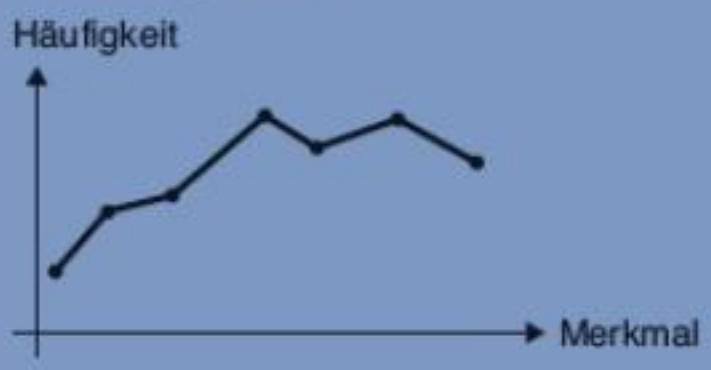
Die Summe aller relativen Häufigkeiten einer Stichprobe ist stets 1.

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$$

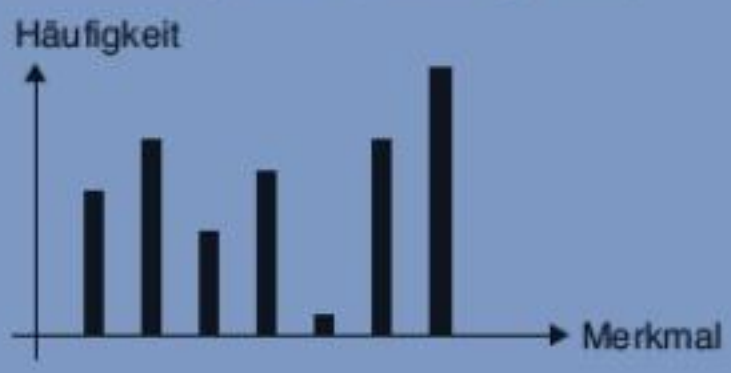
Die relative Häufigkeit kann auch in % angegeben werden.

Einfache Formen **grafischer Darstellungen:**

Liniendiagramm



Säulendiagramm (Stabdiagramm)

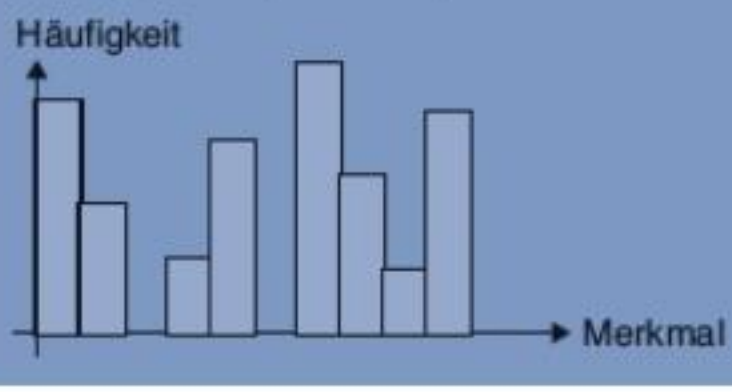


Balkendiagramm

Kreisdiagramm

Der Flächeninhalt bzw. Zentriwinkel der Sektoren ist proportional zur Häufigkeit.

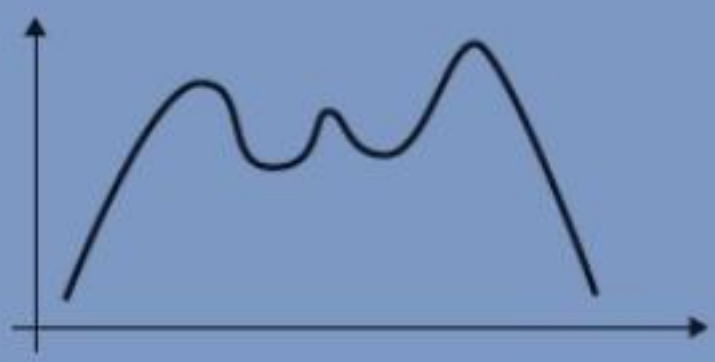
Histogramm (siehe 4.4)



Boxplot (siehe 4.5)

Unimodale Diagramme:
nur 1 Extremwert (Maximalwert)

Symmetrische Verteilung

Schiefe Verteilung

Multimodale Diagramme:
mehrere Extremwerte