

Credit Portfolio Risk & Return Analyzer

Financial Engineering for Bankers

Walter C Neto

13 de agosto de 2025

1 Visão geral

Este documento descreve a fundamentação teórica e as fórmulas utilizadas no aplicativo *Credit Portfolio Risk & Return Analyzer*. O objetivo é analisar uma carteira de crédito sob a ótica de risco e retorno, estimando:

- o **required spread** (cobertura de EL, custo de capital via K, funding e opex),
- o **mispricing** percentual por exposição,
- a **risk contribution** em pontos-base,
- e os efeitos de **rebalanceamentos** (vender piores / aumentar melhores).

As entradas principais por exposição são: EAD, PD (%), LGD (%), spread observado em bp, opcionalmente prazo (*maturity*) em anos e correlação ρ .

2 Normalização dos dados

O aplicativo normaliza nomes de colunas (sinônimos) e converte números no formato local (ex.: “10,5%” \rightarrow 0,105). As grandezas percentuais são transformadas para fração:

$$PD_f = \frac{PD}{100}, \quad LGD_f = \frac{LGD}{100}. \quad (1)$$

3 Modelo ASRF (Vasicek de um fator)

O cálculo de capital segue o paradigma **ASRF** (*Asymptotic Single Risk Factor*). Para cada exposição i , o valor latente de ativo A_i é:

$$A_i = \sqrt{\rho} Y + \sqrt{1 - \rho} \varepsilon_i, \quad (2)$$

onde $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ é o fator sistêmico e $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ é o idiossincrático. O default ocorre quando $A_i \leq \Phi^{-1}(PD_f)$, com Φ a CDF normal padrão.

3.1 Probabilidade condicional de default

Condicionado em $Y = y$, a probabilidade de default é:

$$PD_{\text{cond}}(y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_f) - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}}\right). \quad (3)$$



3.2 Capital regulatório em nível de confiança

Para um nível de confiança α (tipicamente 99,9%), toma-se $y_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ (quantil adverso do fator). Assim, a perda condicional é aproximada por:

$$\text{Loss}_\alpha \approx \text{LGD}_f \cdot \text{PD}_{\text{cond}}(y_\alpha). \quad (4)$$

O **capital condicional** (por unidade de exposição) é então:

$$K = \max\left(\text{LGD}_f \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}_f) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho}}\right) - \text{PD}_f \cdot \text{LGD}_f, 0\right). \quad (5)$$

No app adota-se $\alpha = 0,999$, logo $\Phi^{-1}(\alpha) \approx 3,090$.

3.3 Ajuste de maturidade (exposições corporativas)

Quando há *maturity* M (anos), aplica-se o multiplicador:

$$b(\text{PD}_f) = (0,11852 - 0,05478 \cdot \ln(\text{PD}_f))^2, \quad (6)$$

$$\text{MA}(M, \text{PD}_f) = \frac{1 + (M - 2,5) b(\text{PD}_f)}{1 - 1,5 b(\text{PD}_f)}. \quad (7)$$

O capital ajustado torna-se $K^* = K \cdot \text{MA}$.

Observação sobre ρ . No app, ρ pode vir do arquivo de entrada (coluna **rho**) ou ser fixado por parâmetro (*slider*). Diferentemente de certas fórmulas regulatórias onde ρ é função de PD, aqui usa-se o valor informado/selecionado.

4 Perda Esperada, Capital e *Required Spread*

A **perda esperada** por unidade de exposição é:

$$\text{EL} = \text{PD}_f \cdot \text{LGD}_f. \quad (8)$$

O app calcula o **required spread** (em bp) como:

$$\text{RequiredBP} = 10,000 \cdot (\text{EL} + \text{Hurdle} \cdot K^*) + \text{FundingBP} + \text{OpexBP}. \quad (9)$$

Isto cobre a perda esperada, um prêmio pelo custo de capital (via K^*), e *overheads* de funding/opex, todos convertidos para pontos-base.

5 Mispricing, Risk Contribution e Métricas de Portfólio

5.1 Mispricing (%)

Comparando o spread observado SpreadBP com o requerido:

$$\text{Mispricing}\% = \frac{\text{SpreadBP} - \text{RequiredBP}}{\max(\text{RequiredBP}, 10^{-9})}. \quad (10)$$

Valores positivos sugerem sobrepreço (*over-earning*); negativos, subpreço (*under-earning*).



5.2 Risk contribution em bp

Para análise bidimensional, considera-se a **risk contribution** em bp por exposição como:

$$RC_{bp}^{(i)} = 10,000 \cdot K_i^*. \quad (11)$$

No agregado, a métrica síntese usada no app é a média ponderada por EAD:

$$\overline{RC}_{bp} = \sum_i w_i \cdot (10,000 K_i^*), \quad w_i = \frac{EAD_i}{\sum_j EAD_j}. \quad (12)$$

5.3 Tabela de desempenho do portfólio

Para o portfólio (original, após vender piores N , e após aumentar melhores N):

$$\text{Exposure Amount (MM)} : \frac{\sum_i EAD_i}{10^6}, \quad (13)$$

$$\text{Total Spread (bp)} : \sum_i w_i \cdot \text{SpreadBP}_i, \quad (14)$$

$$\text{Expected Spread (bp)} : \sum_i w_i \cdot \text{RequiredBP}_i, \quad (15)$$

$$\text{Unexpected Loss (MM)} : \frac{\sum_i EAD_i \cdot K_i^*}{10^6}. \quad (16)$$

Define-se ainda um índice tipo *Sharpe*:

$$\text{SharpeLike} = \frac{\sum_i w_i \cdot \text{RequiredBP}_i}{\sum_i w_i \cdot (10,000 K_i^*)}. \quad (17)$$

Ele compara “retorno requerido” por unidade de risco (capital) em bp. No app, é apresentado em %.

6 Rebalanceamentos

6.1 Vender piores N

Ordena-se por Mispricing% ascendente e remove-se as N piores exposições (subprecificadas). Recalcula-se a tabela de portfólio.

6.2 Aumentar melhores N

Ordena-se por Mispricing% descendente e multiplica-se a EAD das N melhores por um fator $F > 1$. Recomputam-se as métricas.¹

7 Modo rápido (heurístico)

Como aproximação expedita, o app oferece um modo *heurístico* para o capital:

$$K_{\text{heur}} \approx \text{LGD}_f \cdot \sqrt{\text{PD}_f(1 - \text{PD}_f)} \cdot \sqrt{1 + \rho}. \quad (18)$$

Essa forma não é regulatória, mas serve como *proxy* de risco para análise exploratória quando não se deseja o cálculo ASRF completo.

¹No app, o fator F é controlado por *slider*.



8 Unidades e cuidados práticos

- PD e LGD são fornecidas em %, mas o cálculo utiliza as frações PD_f e LGD_f .
- SpreadBP, FundingBP, OpexBP estão em bp (pontos-base).
- K^* é adimensional (perda relativa por unidade de exposição).
- Em (??), o fator 10,000 converte uma taxa em % para bp.
- Para estabilidade numérica, o app satura PD_f, LGD_f, ρ dentro de intervalos $[10^{-6}, 0.999999]$.

9 Glossário de símbolos

Símbolo	Descrição
EAD	<i>Exposure at Default</i> (exposição)
PD (%)	Probabilidade de default (entrada em %)
LGD (%)	Perda dado default (entrada em %)
PD_f, LGD_f	Frações (0–1) usadas no cálculo
ρ	Correlação ativo–fator sistêmico
K	Capital por unidade de exposição (ASRF)
EL	Perda esperada
RequiredBP	Spread requerido em pontos-base
SpreadBP	Spread observado em pontos-base
Mispricing%	Sinaliza sobre/subprecificação
RC_{bp}	Risk contribution em bp

10 Limitações e extensões

- ASRF assume portfólio infinitamente granular e um único fator sistêmico.
- A escolha de ρ afeta fortemente K; no app, ρ pode ser inserida ou ajustada via parâmetro.
- *Funding* e *Opex* são insumos de negócio, não estimados pelo modelo.
- Extensões naturais: VaR/ES por simulação, ρ setorial, correções de concentração, dependência de maturidade e garantias.

Observação prática (app). O gráfico principal utiliza no eixo x a RC_{bp} por exposição e no eixo y o spread (observado ou requerido). Uma reta de inclinação mediana (*Sharpe Line*) ajuda a comparar razão retorno/risco relativa.

Este documento acompanha o aplicativo para fins de entendimento e validação das fórmulas e hipóteses.