Algoritmos y Estructuras de Datos II
Solución del Primer parcial – 22 de Mayo de 2015

Ej. 2. Inducción estructural

Resolución

a) Básicamente plantear el predicado unario consiste en quitar el cuantificador que liga a la variable sobre la que vamos a hacer inducción.

Predicado Unario:

$$\mathrm{P}(a) \equiv \mathrm{long}(\mathrm{preorder}(a)) \equiv \mathrm{tamaño}(a)$$

El esquema de inducción consiste en los casos base y los pasos inductivos que vamos a tener que probar.

En este caso tenemos un único generador básico (nil) y un único recursivo (tern), que toma una instancia de árbol ternario.

El esquema es entonces:

$$P(nil) \wedge (\forall i, m, d : \mathrm{at}(\alpha))(P(i) \wedge P(m) \wedge P(d) \;\Rightarrow\; (\forall x : \alpha)P(tern(x, i, m, d))$$

Y marcando CB(s), PI(s), HI(s), TI(s):

$$\overbrace{P(nil)}^{CB} \wedge \overbrace{(\forall i, m, d : \mathrm{at}(\alpha))(\underbrace{P(i) \wedge P(m) \wedge P(d)}_{HI} \;\Rightarrow\; \underbrace{(\forall x : \alpha)P(tern(x, i, m, d))}_{TI}}^{PI}$$

b) Resolución del caso base:

Queremos ver que se cumpla:

$$\mathrm{P}(nil) \equiv \mathrm{long}(\mathrm{preorder}(nil)) \equiv \mathrm{tamaño}(nil)$$

Una opción es desarrollar ambos lados de la igualdad y ver si se llega a lo mismo.

Por un lado,

$$\mathrm{long}(\mathrm{preorder}(nil)) \underset{p_0}{\equiv} \mathrm{long}(<>) \underset{l_0}{\equiv} 0$$

Y por el otro,

$$\mathrm{tamaño}(nil) \underset{t_0}{\equiv} 0$$

Por lo tanto, dado que $0 \equiv 0$, queda demostrado que se cumple $\mathrm{P}(nil)$.

c) Resolución del paso inductivo:

Se desarrolla cada componente de la igualdad.
($\forall$ i,m,d:at(α))

$$\mathrm{long}(\mathrm{preorder}(term(x, i, m, d))) \underset{p_1}{\equiv} \mathrm{long}(x \bullet (\mathrm{preorder}(i) \;\&\; \mathrm{preorder}(m) \;\&\; \mathrm{preorder}(d)) \underset{l_1}{\equiv}$$
$$1 + \mathrm{long}(\mathrm{preorder}(i) \;\&\; \mathrm{preorder}(m) \;\&\; \mathrm{preorder}(d))$$

Se desarrolla el otro lado de la igualdad.

$$\text{tamaño}(term(x,i,m,d)) \underset{t_1}{\equiv} 1 + \text{tamaño}(i) + \text{tamaño}(m) + \text{tamaño}(d) \underset{HI}{\equiv}$$
$$1 + \text{long}(\text{preorder}(i)) + \text{long}(\text{preorder}(m)) + \text{long}(\text{preorder}(d))$$

Si se observan los dos predicados a los que se ha llegado, hablan sobre la longitud de preorder.

Preorder devuelve una secuencia y si se quiere llegar a que ambos predicados sean iguales, se va a precisar un lema que hable sobre la longitud de secuencias y la concatenación.

Así se precisaría un lema que brinde la siguiente equivalencia:

$$\text{long}(\text{preorder}(i) \ \& \ \text{preorder}(m) \ \& \ \text{preorder}(d)) \equiv \text{long}(\text{preorder}(i)) + \text{long}(\text{preorder}(m)) + \text{long}(\text{preorder}(d))$$

Dado que se puede aplicar el lema sucesivamente, se podría simplificar a una expresión que involucre tan sólo dos secuencias:

$$(\forall \text{ s,t:secu}(\alpha))(\text{long}(s \ \& \ t) \equiv \text{long}(s) + \text{long}(t))$$

Se pueden hacer algunas pruebas para convencerse que el lema se cumple para toda secuencia y luego, es necesario que el lema sea demostrado por inducción.

Se completa la demostración utilizando el lema:

$$\text{long}(\text{preorder}(term(x,i,m,d))) \underset{p_1}{\equiv} \text{long}(x \bullet (\text{preorder}(i) \ \& \ \text{preorder}(m) \ \& \ \text{preorder}(d)) \underset{l_1}{\equiv}$$
$$1 + \text{long}(\text{preorder}(i) \ \& \ \text{preorder}(m) \ \& \ \text{preorder}(d)) \underset{lema}{\equiv} 1 + \text{long}(\text{preorder}(i)) + \text{long}(\text{preorder}(m)) +$$
$$\text{long}(\text{preorder}(d))$$

Demostración por inducción del lema

Predicado Unario:

$$\text{P}(s) \equiv (\forall \text{ t: secu}(\alpha) \ \text{long}(s \ \& \ t) \equiv \text{long}(s)+\text{long}(t)$$

Esquema de Inducción:

$$P(<>) \wedge (\forall t : secu(\alpha))(long(s\&t) \equiv long(s) + long(t))$$

Demostración Caso Base:

$\forall$ t: secu(α)

$$\text{long}(<> \ \& \ t) \underset{\&_0}{\equiv} \text{long}(t)$$

$$\text{long}(<>) + \text{long}(t) \underset{l_0}{\equiv} 0 + \text{long}(t) \equiv \text{long}(t)$$

Demostración Paso Inductivo:

$\forall$ t: secu(α)

$$\text{long}((a \bullet s) \ \& \ t) \underset{\&_1}{\equiv} \text{long}(a \bullet (s \ \& \ t)) \underset{l_1}{\equiv} 1 + \text{long}(s \ \& \ t) \underset{HI}{\equiv} 1 + \text{long}(s) + \text{long}(t)$$

$$\text{long}(a \bullet s) + \text{long}(t) \underset{l_1}{\equiv} 1 + \text{long}(s) + \text{long}(t)$$