Divide and Conquer

Algoritmos y Estructuras de Datos II

Darío Reyes

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

25 de octubre de 2019

Divide and Conquer

Divide and Conquer

Es una **estrategia algorítmica**. Consiste en:

1. **Dividir** el problema en k subproblemas del mismo tipo, pero más chicos.
2. **Conquistar** resolviendo los subproblemas, recursivamente o directamente (si son lo suficientemente fáciles o chicos).
3. **Combinar** las soluciones obtenidas para resolver el problema original.

Los problemas pueden tener varias soluciones, pero en este contexto esperamos que puedan pensar en una solución D&C.

Esquema General

DC(X)

```
if X es chico (o simple) then
    Retornar solución ad hoc de X
else
    Descomponer X en subinstancias X_1, X_2,...,X_k
    for i ∈ [1..k] do
        Y_i = DC(X_i)
    Combinar las soluciones Y_i para construir una solución para X
```

Merge Sort

- **MergeSort** es un algoritmo D&C para ordenar un arreglo.
- **Merge** fusiona de forma ordenada dos arreglos ordenados, con costo O(n)

MergeSort(A)

---

if $|A| \leq 1$ **then**
  return A

A1 $\leftarrow$ MergeSort(A[0 .. $\frac{n}{2}$)) $\quad\triangleright$ T($\frac{n}{2}$)
A2 $\leftarrow$ MergeSort(A[$\frac{n}{2}$..n)) $\quad\triangleright$ T($\frac{n}{2}$)

A $\leftarrow$ Merge(A1, A2) $\quad\triangleright$ $\Theta(n)$

return A

Complejidad: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$

Merge Sort

1. **Dividir** el arreglo en dos mitades.
2. **Conquistar:** Si los arreglos son de un elemento ya están ordenados, sino, hacer recursión sobre ellos y los obtengo ordenados.
3. **Combinar:** Merge para obtener el arreglo ordenado a partir de las dos mitades ordenadas.

Búsqueda Binaria

Podemos pensar a una búsqueda binaria como un algoritmo de D&C donde dividimos nuestro problema en un solo sub-problema.

Buscar(elem, l, r) $\to$ int — Buscamos en el rango [l, r)

```
if r - l = 1 then                  // Rango de un solo elemento
    if A[l] = elem then                                        ▷ Θ(1)
        return l
    else
        return -1

m ← (l + r) / 2

if elem ≤ A[m] then
    return Buscar(elem, m, r)                                  ▷ T(n/2)
else
    return Buscar(elem, l, m)                                  ▷ T(n/2)
```

Complejidad: $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$

Búsqueda Binaria

1. **Dividir** el arreglo en una mitad (elegida a partir de cuanto vale el elemento a la mitad del arreglo).
2. **Conquistar:** Si el arreglo tiene un elemento, me fijo si es el que estoy buscando, sino, hago recursión sobre la mitad en donde podría estar el elemento.
3. **Combinar:** No hace falta.

Recurrencias

Complejidades

¿Cómo calculamos estas complejidades?

- **Merge Sort:** $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
- **Búsqueda Binaria:** $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$

Recurrencias

Las recurrencias de D&C (en general) tienen la siguiente forma:

$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) & n > 1 \\ \Theta(1) & n = 1 \end{cases}$$

- a es la cantidad de subproblemas a resolver.
- c es la cantidad de particiones y $\frac{n}{c}$ es el tamaño de los subproblemas a resolver.
- $f(n)$ es el costo de todo lo que se hace en cada llamado además de los llamados recursivos.
- Estamos asumiendo que resolver un caso base cuesta $\Theta(1)$.

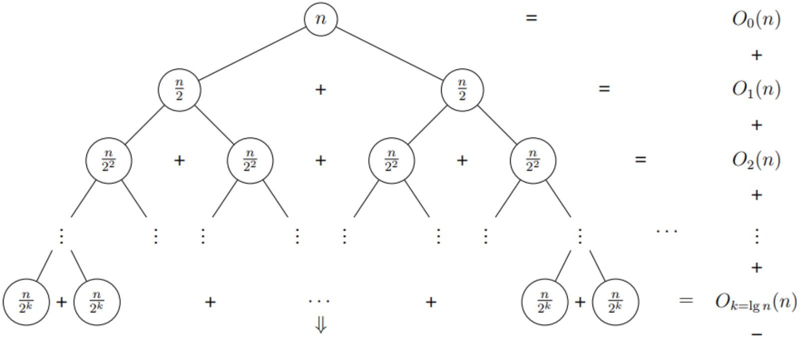
Cálculo de complejidad

- **Opción 1**: Dibujar el arbol de llamadas recursivas, calcular cuanto demora cada nodo y sumar para todos los nodos.
- **Opción 2**: Adivinar cuanto va a dar y probar por inducción que tiene esa complejidad a partir de la recurrencia. Se lo conoce también como método de sustitución.
- **Opción 3**: Usar el Teorema Maestro.

Nota: No son las únicas opciones que existen

Arbol de recursión

$$T(n) = 2(n/2) + O(n)$$



$$O\left(\sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot \frac{n}{2^i}\right) = O\left(\sum_{i=0}^{k} n\right) = O(k \cdot n) \Leftrightarrow O(n \cdot \log n)$$

Fuente: `https://courses.csail.mit.edu/6.006/spring11/rec/rec08.pdf`

Método de sustitución

Se basa en **proponer** una cota para T(n) y probarla por inducción.

Por ejemplo, si $T(n) = 2\ T(\frac{n}{2}) + n$, veamos que $T(n) \in O(n \log n)$.
El caso base es trivial.
Queremos ver que $T(n) \leq c\ n \log n$

$$\begin{gathered}
T(n) = 2\ T(\tfrac{n}{2}) + n \\
\text{(por HI) } T(n) \leq 2\ c\ \tfrac{n}{2} \log(\tfrac{n}{2}) + n \\
= c\ n \log(\tfrac{n}{2}) + n \\
= c\ n\ (\log n - 1) + n \\
\leq c\ n \log n - (c-1)n \\
\leq c\ n \log n \text{ (tomando } c \geq 1)
\end{gathered}$$

Cuidado: Para que la demostración valga tenemos que llegar a *exactamente* lo que queríamos probar.

Teorema maestro

Si nuestra recurrencia es de la forma

$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) & n > 1 \\ \Theta(1) & n = 1 \end{cases}$$

(con a ≥ 1 y c > 1) entonces:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_c a}) & \text{Si } \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(n) \in O(n^{\log_c a - \varepsilon}) \\ \Theta(n^{\log_c a} \log n) & \text{Si } f(n) \in \Theta(n^{\log_c a}) \\ \Theta(f(n)) & \text{Si } \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(n) \in \Omega(n^{\log_c a + \varepsilon}) \text{ y} \\ & \exists \delta < 1, \exists n_0 > 0 \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ se cumple: } a.f(\frac{n}{c}) \leq \delta f(n) \end{cases}$$

Teorema maestro - Merge Sort

Calculemos la complejidad de Merge Sort usando el teorema maestro.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

- $a = 2$, cantidad de subproblemas
- $c = 2$, cantidad de particiones ($\frac{n}{2}$ el tamaño del subproblema)
- $\log_c a = \log_2 2 = 1$

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_c a})$$

$$n \in \Theta(n^1)$$

Por el caso 2 del Teorema Maestro,

$$T(n) \in O(n \log n)$$

Teorema maestro - Búsqueda Binaria

Nuestra recurrencia es:

$$T(n) = 1\,T(\frac{n}{2}) + O(1)$$

- Tenemos que $\log_c a = \log_2 1 = 0$.
- Comparando f(n) con $n^{\log_c a} = n^0 = 1$ vemos que caemos en el segundo caso del teorema maestro, porque f(n) $\in \Theta(1)$.
- Entonces la complejidad es $\Theta(n^0 logn) = \Theta(logn)$

Ejercicios

Máximo de una montaña

Ejercicio 1

Un arreglo de enteros *montaña* está compuesto por una secuencia estrictamente creciente seguida de una estrictamente decreciente.

Suponemos que hay al menos un elemento menor y uno mayor que el máximo (las secuencias creciente y decreciente tienen al menos 2 elementos)

Por ejemplo, el arreglo [-1, 3, 8, 22, 30, 22, 8, 4, 2, 1]

Dado un arreglo montaña de longitud n, queremos encontrar al máximo. La complejidad del algoritmo que resuelva el problema debe ser $O(\log n)$

Máximo de una montaña - Solución

Muy similar al algoritmo anterior. Acá considero rango [l, r].
Cuidado: Usar índices y no copiar el subarreglos.

Maximo(l, r) -> int

---

if $l = r$ **then** // Rango de un solo elemento
    return A[l]

$m \leftarrow (l + r) / 2$
// Si es creciente seguro el maximo está a la derecha de m
if $A[m] < A[m+1]$ **then**
    return Maximo(m+1, r); ▷ $T(\frac{n}{2})$
else
    return Maximo(l, m); ▷ $T(\frac{n}{2})$

Complejidad: O(log n). Misma justificación que en la búsqueda binaria.

Subsecuencia de suma máxima

Ejercicio 2

Dada una secuencia de n enteros, se desea encontrar el máximo valor que se puede obtener sumando elementos **contiguos**. Por ejemplo, para la secuencia [3, -1, 4, 8, -2, 2, -7, 5], este valor es 14, que se obtiene de la subsecuencia [3, -1, 4, 8].

Si una secuencia tiene todos números negativos, se entiende que su subsecuencia de suma máxima es la vacía, por lo tanto el valor es 0.

Se desea hallar un algoritmo D&C que lo resuelva en **O(n log n)**

Subsecuencia de suma máxima - Solución

SumaSubsecuencia(A) $\rightarrow$ int

if $|A| = 1$ **then** // Rango de un solo elemento
  return max(0, A[0])

s1 $\leftarrow$ SumaSubsecuencia(A[0 .. $\frac{n}{2}$]) $\triangleright$ $T(\frac{n}{2})$
s2 $\leftarrow$ SumaSubsecuencia(A[$\frac{n}{2}$ .. n]) $\triangleright$ $T(\frac{n}{2})$
s3 $\leftarrow$ SumaIncluyendoCentro(A) $\triangleright$ $O(n)$

return max(s1, s2, s3)

SumaIncluyendoCentro(A) $\rightarrow$ int

s1 $\leftarrow$ SumaHaciaDerecha(A[$\frac{n}{2}$..n]) $\triangleright$ $O(n)$
s2 $\leftarrow$ SumaHaciaDerecha(reverso(A[0..$\frac{n}{2}$])) $\triangleright$ $O(n)$
return s1 + s2

Subsecuencia de suma máxima - Solución

SumaHaciaDerecha(A) $\rightarrow$ int

```
maxSuma ← 0                                         ▷ O(1)
sumaAcumulada ← 0                                   ▷ O(1)

for i = 0 to n-1 do                                 ▷ O(n)
    sumaAcumulada += A[i]                           ▷ O(1)
    maxSuma ← max(maxSuma, sumaAcumulada)           ▷ O(1)

return maxSuma
```

- Recurrencia de **SumaSubsecuencia**: $T(n) = 2\,T(\frac{n}{2}) + O(n)$
- Observar que es la misma ecuación que MergeSort. Podemos demostrar de la misma forma que la complejidad es $O(n \log n)$

- **Bonus:** Se podía resolver en $O(n)$ usando el algoritmo de Kadane.

Matriz creciente

Ejercicio 3

Se tiene una matriz A de n x n números naturales, de manera que $A[i,j]$ representa al elemento en la fila i y columna j ($1 \leq i, j \leq n$). Se sabe que el acceso a un elemento cualquiera se realiza en tiempo $O(1)$. Se sabe también que todos los elementos de la matriz son distintos y que todas las filas y columnas de la matriz están ordenadas de forma creciente (es decir, $i < n \Rightarrow A[i,j] < A[i+1,j]$ y $j < n \Rightarrow A[i,j] < A[i,j+1]$).

1. Implementar, utilizando la técnica de dividir y conquistar, la función:

   está(in n: nat, in A: matriz(nat), in e: nat) $\rightarrow$ bool

   que decide si un elemento e dado aparece en alguna parte de la matriz. Se debe dar un algoritmo que tome tiempo estrictamente menor que $O(n^2)$. Notar que la entrada es de tamaño $O(n^2)$.
2. Calcular y justificar la complejidad del algoritmo propuesto. Para simplificar el cálculo, se puede suponer que n es potencia de dos.

Matriz creciente - Comentarios

- **Cuidado**: el tamaño de la entrada es $O(n^2)$. Si hacemos un algoritmo que recorra *todas* las posiciones no vamos a cumplir con la complejidad pedida.
- Dividiendo la matriz en dos partes no vemos una forma clara de resolverlo. No necesariamente tienen que ser siempre dos partes.
- Suele ser conveniente prestar atencion a las características del problema. Notar en este caso que los valores están ordenados de una forma particular.
- Puede resolverse sin D&C, queda de ejercicio.

Matriz creciente - Solución

esta?(n, A, e) $\rightarrow$ bool

```
return EstaM(A, e, 0, n, 0, n)
```

Esta(A, e, x_1, x_2, y_1, y_2) $\rightarrow$ bool

if $(x_1 + 1 = x_2$ **and** $y_1 + 1 = y_2)$ **then**
    return e == A[x_1][y_1]
$m_x \leftarrow (x_1 + x_2)/2$
$m_y \leftarrow (y_1 + y_2)/2$

if e $\leq$ A[m_x][m_y] **then**
    return Esta(A, e, x_1, m_x, y_1, m_y) **or**
        Esta(A, e, m_x, x_2, y_1, m_y) **or**
        Esta(A, e, x_1, m_x, m_y, y_2)
else
    return Esta(A, e, m_x, x_2, y_1, m_y) **or**
        Esta(A, e, x_1, m_x, m_y, y_2) **or**
        Esta(A, e, m_x, x_2, m_y, y_2)

Matriz creciente - Complejidad

Queremos calcular la complejidad en función del tamaño de la entrada. El problema es que el tamaño de la entrada es n^2.

Llamemos $m = n^2$ y calculemos la complejidad en función de m.

$$T(m) = 3 * T(\frac{m}{4}) + O(1)$$

$\mathrm{O}(1) \subseteq \mathrm{O}(m^{\log_4 3})$, caemos en el caso 1 del teorema maestro.

Entonces por el teorema, $\mathrm{T(m)} = \Theta(m^{\log_4 3})$

Como $\mathrm{m} = n^2$, tenemos que $\mathrm{T}(n^2) = \mathrm{O}(n^{2\log_4 3}) \subseteq \mathrm{O}(n^{1,60})$, que es estrictamente mejor que $\mathrm{O}(n^2)$.

Ejercicio de parcial

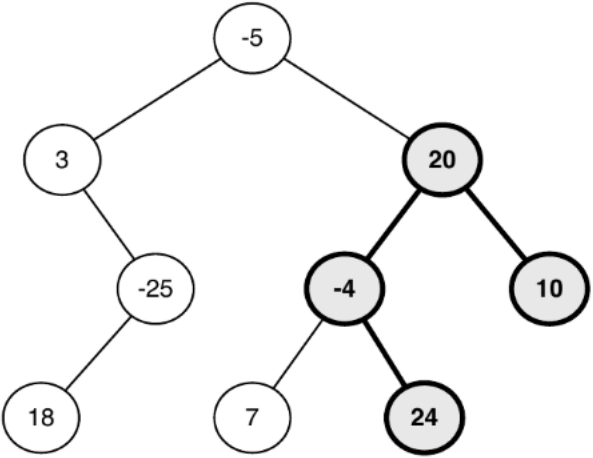
Máxima suma en árbol

Enunciado

Dado un árbol binario de números enteros, se desea calcular la máxima suma de los nodos pertenecientes a un camino entre dos nodos cualesquiera del árbol. Un camino entre dos nodos n_1 y n_2 está formado por todos los nodos que hay que atravesar en el árbol para llegar desde n_1 hasta n_2, incluyéndolos a ambos. Un camino entre un nodo y sí mismo está formado únicamente por ese nodo. **Suponer que el árbol está balanceado**.

Se pide dar un algoritmo $\text{MáximaSumaCamino}(a : \text{ab}(\text{int})) \rightarrow \text{int}$ que resuelva el problema utilizando la técnica de *Dividir y Conquistar*.

Máxima suma en árbol - Ejemplo



Ejemplo de un camino de máxima suma en un posible ab(int).
Resultado correcto: 50.

Máxima suma en árbol

Ejercicio a)

a) El algoritmo debe tener una complejidad temporal de peor caso igual o mejor que $O(n \log n)$ siendo n la cantidad de nodos del árbol.

Máxima suma en árbol - Solución

Similar al problema de subsecuencia máxima, tenemos tres posibilidades: el máximo camino está en el subárbol izquierdo, en el subárbol derecho, o pasa por la raiz del árbol.

MáximaSumaCamino(A : ab(int)) $\rightarrow$ int

---

if nil?(A) **then**
  return 0 $\qquad \triangleright$ O(1)

S1 $\leftarrow$ MáximaSumaCamino(izq(A)) $\qquad \triangleright$ $T(\frac{n}{2})$
S2 $\leftarrow$ MáximaSumaCamino(der(A)) $\qquad \triangleright$ $T(\frac{n}{2})$
S3 $\leftarrow$ raiz(A) + MaxDesdeRaiz(izq(A)) + MaxDesdeRaiz(der(A)) $\qquad \triangleright$ O(n)

return max(S1, S2, S3)

Máxima suma en árbol - Solución

MaxDesdeRaiz es el camino más grande que empieza en la raiz. Podría ser un camino vacío.

MaxDesdeRaiz(A : ab(int)) $\rightarrow$ int

```
if nil?(A) then
    return 0                                        ▷ O(1)

C0 ← 0                                              ▷ O(1)
C1 ← raiz(A)                                        ▷ O(1)
C2 ← raiz(A) + MaxDesdeRaiz( izq(A) )               ▷ T(n/2)
C3 ← raiz(A) + MaxDesdeRaiz( der(A) )               ▷ T(n/2)

return max(C0, C1, C2, C3)
```

Máxima suma en árbol - Complejidad

- **MaxDesdeRaiz**: Tenemos que T'(n) = 2 T'($\frac{n}{2}$) + O(1).
  Por el primer caso del teorema maestro la complejidad es O(n)

- **MáximaSumaCamino**: su ecuación es T(n) = 2 T($\frac{n}{2}$) + O(n).
  Por el segundo caso del teorema su complejidad es **O(n log n)**

Máxima suma en árbol - V2

Ejercicio b)

b) El algoritmo debe tener una complejidad temporal de peor caso igual o mejor que $O(n)$ siendo n la cantidad de nodos del árbol.

Máxima suma en árbol - V2 - Solución

MaxCamino(A : ab(int)) $\rightarrow \langle camino : int, desdeRaiz : int \rangle$

```
if nil?(A) then
    return ⟨0, 0⟩                                              ▷ O(1)
dataIzq ← MaxCamino( izq(A) )                                  ▷ T(n/2)
dataDer ← MaxCamino( der(A) )                                  ▷ T(n/2)

S1 ← dataIzq.camino                                            ▷ O(1)
S2 ← dataDer.camino                                            ▷ O(1)
S3 ← raiz(A) + dataIzq.desdeRaiz + dataDer.desdeRaiz           ▷ O(1)
cam ← max(S1, S2, S3)                                          ▷ O(1)

desdeR ← max(0, raiz(A),
    raiz(A) + dataIzq.desdeRaiz, raiz(A) + dataDer.desdeRaiz)  ▷ O(1)

return ⟨cam, desdeR⟩
```

MáximaSumaCamino(A : ab(int)) $\rightarrow$ int

```
return MaxCamino(A).camino
```

Máxima suma en árbol - V2 - Complejidad

La complejidad de **MáximaSumaCamino** está dada por la de **MaxCamino**, cuya relación de recurrencia es:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(1)$$

Por el primer caso del teorema maestro, la complejidad es O(n)

Máxima suma en árbol - V3

Ejercicio c)

c) Supongamos que el árbol **NO** está balanceado.
El algoritmo debe tener una complejidad temporal de peor caso igual o mejor que $O(n)$ siendo n la cantidad de nodos del árbol.

Máxima suma en árbol - V3 - Solución

- Podemos usar el mismo algoritmo que en b), pero **NO** podemos usar teorema maestro para justificar la complejidad, pues los llamados recursivos NO necesariamente son $\mathrm{T}(\frac{n}{2})$.

- Para justificar que sigue siendo O(n) podemos hacer el cálculo de costo usando el árbol de la recursión. Cada uno de los n nodos son visitados **por única vez** y tenemos O(1) costo en cada nodo, por lo que el costo final termina siendo O(n).

¿Preguntas?

Referencias y links útiles

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R.L Rivest, and C. Stein. **"Introduction to Algorithms"**. 3rd edition.
- Más información y otras formas de resolver recurrencias. `http://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/algorithms/notes/99-recurrences.pdf`
- Clase del MIT. Aplicaciones: Convex Hull y Calcular Mediana en O(n) `https://www.youtube.com/watch?v=EzeYI7p9MjU`
- Juez online para el último ejercicio de la práctica de D&C `http://acm.timus.ru/problem.aspx?num=1401`

Fin