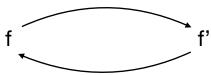
# Recursión avanzada TADs con comportamiento automático

Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

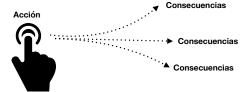
Algoritmos y Estructuras de Datos II

## Hoy: más herramientas para especificar TADs

Recursion mutua



Comportamiento automático



Extender el tipo  $N{
m AT}$  con la operación  $\it esPar?$  que indica si un número es o no es par.

```
esPar? : nat \longrightarrow bool \{\ \} esPar?(0) \equiv ?? esPar?(suc(n)) \equiv ??
```

Extender el tipo  $N{
m AT}$  con la operación  $\it esPar?$  que indica si un número es o no es par.

```
esPar? : nat \longrightarrow bool \{\ \} esPar?(0) \equiv true esPar?(suc(n)) \equiv \neg esPar?(n)
```

Extender el tipo NAT con la operación *esPar?* que indica si un número es o no es par.

```
esPar? : nat \longrightarrow bool \{\ \} esPar?(0) \equiv true esPar?(suc(n)) \equiv \neg esPar?(n)
```

Podemos ahora definir esImpar? de la siguiente manera:

```
\begin{array}{lll} & esImpar? : nat & \longrightarrow bool & \{ \ \} \\ & esImpar?(0) & \equiv & false \\ & esImpar?(suc(n)) & \equiv & esPar?(n) \end{array}
```

¡Son recursivas estas definiciones?

Extender el tipo NAT con la operación  $\emph{esPar?}$  que indica si un número es o no es par.

```
esPar? : nat \longrightarrow bool \{\ \} esPar?(0) \equiv true esPar?(suc(n)) \equiv esImpar?(n)
```

Podemos ahora definir esImpar? de la siguiente manera:

```
esImpar? : nat \longrightarrow bool \{\ \} esImpar?(0) \equiv false esImpar?(suc(n)) \equiv esPar?(n)
```

- ¿Son recursivas estas definiciones?
- ¿Está bien si modificamos "esPar?" de esta forma?

#### Recursión indirecta

- Esto se conoce como recursión indirecta (o cíclica, o mutua).
- ► Tal vez no aporta nada a la resolución "esPar?" y "esImpar?"
- Pero vamos a ver algunos casos en los que sí tiene sentido...

### **Ejercicios**

Extender el tipo  $\operatorname{SECUENCIA}(\alpha)$  con subsecuencias(s,k) que devuelve un conjunto con todas las subsecuencias de k elementos de una secuencia s. (La subsecuencia no necesariamente mantiene elementos contiguos pero sí mantiene orden relativo)

```
Por ejemplo, subsecuencias([1,2,3,4], 2) devuelve el conjunto \{[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[3,4]\}.
```

```
\mathsf{subsecuencias} \; : \; \mathsf{secu}(\alpha) \times \mathsf{nat} \; \longrightarrow \; \mathsf{conj}(\mathsf{secu}(\alpha)) \qquad \qquad \{ \; ?? \; \}
```

### **Ejercicios**

```
subsecuencias : secu(\alpha) \times nat \longrightarrow conj(secu(\alpha))
                                                                                               { }
subsecuencias(s, k) \equiv if k > long(s) then
                           else
                                if k = 0? then
                                    Ag(<>, \emptyset)
                                else
                                     agregarAd(prim(s), subsecuencias(fin(s), pred(k))) \cup
                                     subsecuencias(fin(s), k)
                                fi
                           fi
agregarAd : \alpha \times conj(secu(\alpha)) \longrightarrow conj(secu(\alpha))
                                                                                               { }
agregarAd(a, c) \equiv if vacio?(c) then
                        else
                            Ag(a • dameUno(c), agregarAd(a, sinUno(c)))
                       fi
```

### TAD RoseTree( $\alpha$ )

Fin TAD

```
TAD ROSETREE(\alpha)
      géneros rosetree(\alpha)
      observadores básicos
          raíz : rosetree(\alpha) \longrightarrow \alpha
          hijos : rosetree(\alpha) \longrightarrow secu(rosetree(\alpha))
      generadores
          rose : \alpha \times \text{secu}(\text{rosetree}(\alpha)) \longrightarrow \text{rosetree}(\alpha)
      axiomas \forall s: secu(rosetree(\alpha)) \forall a: \alpha
          raiz(rose(a, s)) \equiv a
          hijos(rose(a, s)) \equiv s
```

### TAD RoseTree( $\alpha$ )

```
TAD ROSETREE(\alpha)
      géneros rosetree(\alpha)
      observadores básicos
          raíz : rosetree(\alpha) \longrightarrow \alpha
          hijos : rosetree(\alpha) \longrightarrow secu(rosetree(\alpha))
      generadores
          rose : \alpha \times \text{secu}(\text{rosetree}(\alpha)) \longrightarrow \text{rosetree}(\alpha)
      axiomas \forall s: secu(rosetree(\alpha)) \forall a: \alpha
          raíz(rose(a, s)) \equiv a
          hijos(rose(a, s)) \equiv s
```

#### Fin TAD

**Ejercicio:** Especificar la operación *incrementar*(r,n) que toma un *rosetree*(nat) r y un nat n y devuelve un árbol igual a r pero con todos los valores incrementados en n.

### TAD RoseTree( $\alpha$ ) - Ejercicios (1)

Especificar la operación incrementar(r,n) que toma un rosetree(nat) r y un nat n y devuelve un árbol igual a r pero con todos los valores incrementados en n.

```
\label{eq:incrementar} \begin{tabular}{ll} incrementar : rosetree(nat) \times nat & \longrightarrow rosetree(nat) & \{ \ \} \\ incrementar(r,\,n) & \equiv rose(raíz(r)+n,\,incrTodos(hijos(r),\,n)) & \\ incrTodos : secu(rosetree(nat)) \times nat & \longrightarrow secu(rosetree(nat)) & \{ \ \} \\ incrTodos(sr,\,n) & \equiv if \ vacía?(sr) \ then & <> \\ else & & incrementar(prim(sr),n) \bullet incrTodos(fin(sr),n) \\ fi & \\ \end{tabular}
```

¡Son recursivas estas funciones?

# TAD RoseTree( $\alpha$ ) - Ejercicios (2)

Especificar la operación sumaDeNiveles(r) que toma un rosetree(nat) y devuelve una secu(nat) con las sumas de los valores en los nodos de cada nivel del rosetree (¡dibujito!).

```
\mathsf{sumaDeNiveles} \; : \; \mathsf{rosetree}(\mathsf{nat}) \; \longrightarrow \; \mathsf{secu}(\mathsf{nat}) \tag{$\{$} \}
```

# TAD RoseTree( $\alpha$ ) - Ejercicios (2)

Especificar la operación sumaDeNiveles(r) que toma un rosetree(nat) y devuelve una secu(nat) con las sumas de los valores en los nodos de cada nivel del rosetree (¡dibujito!).

```
{ }
sumaDeNiveles : rosetree(nat) → secu(nat)
sumaDeNiveles(r) \equiv raiz(r) \bullet sumarSecus(sumasNivelesTodos(hijos(r)))
sumasNivelesTodos : secu(rose(nat)) \longrightarrow secu(secu(nat))
                                                                                     { }
sumasNivelesTodos(sr) \equiv if vacía?(sr) then
                            else
                                sumaDeNiveles(prim(sr)) • sumasNivelesTodos(fin(sr))
                            fi
sumarSecus : secu(secu(nat)) \longrightarrow secu(nat)
                                                                                     { }
sumarSecus(ss) \equiv if vacía?(ss) then
                     else
                         prim(ss) + sumarSecus(fin(ss))
                     fi
```

Observación: La suma de secuencias suma posición a posición (¡queda de tarea!).

### Ejercicio: La fábrica de empanadas

#### Enunciado

Se quiere especificar el comportamiento de una fábrica de empanadas que está totalmente automatizada. A medida que se encuentran listas, las empanadas van saliendo de una máquina una a una y son depositadas en una caja para empanadas. En la caja caben 12 empanadas y cuando ésta se llena, es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía.

### Ejercicio: La fábrica de empanadas

#### Enunciado

Se quiere especificar el comportamiento de una fábrica de empanadas que está totalmente automatizada. A medida que se encuentran listas, las empanadas van saliendo de una máquina una a una y son depositadas en una caja para empanadas. En la caja caben 12 empanadas y cuando ésta se llena, es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía.

#### Requerimientos

Se quiere saber:

- Cuántas cajas de empanadas se despacharon en total.
- Cuántas empanadas hay en la caja que está actualmente abierta.

#### Resolución

Tenemos que definir:

#### Resolución

#### Tenemos que definir:

- 1. Los observadores y la igualdad observacional.
- 2. Los generadores.
- 3. Las otras operaciones (si hay).
- 4. Axiomatizar todo.

1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las empanadas? ¿Identificamos los gustos?

- 1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las empanadas? ¿Identificamos los gustos?
- 2. ¿Y para las cajas?

- 1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las empanadas? ¿Identificamos los gustos?
- 2. ¿Y para las cajas?
- 3. Alcanza con saber cuántas cajas salieron y cuántas empanadas hay en la caja actual...

- 1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las empanadas? ¿Identificamos los gustos?
- 2. ¿Y para las cajas?
- 3. Alcanza con saber cuántas cajas salieron y cuántas empanadas hay en la caja actual...

Entonces los observadores elegidos son:

```
cajasDespachadas : fabrica \longrightarrow nat empanadasEnCaja : fabrica \longrightarrow nat
```

- 1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las empanadas? ¿Identificamos los gustos?
- 2. ¿Y para las cajas?
- 3. Alcanza con saber cuántas cajas salieron y cuántas empanadas hay en la caja actual...

Entonces los observadores elegidos son:

```
cajasDespachadas : fabrica \longrightarrow nat empanadasEnCaja : fabrica \longrightarrow nat
```

¿Qué generadores necesitamos?

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica \longrightarrow fabrica despacharCaja : fabrica \longrightarrow fabrica
```

¿Ven algún problema?

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) < 12 \} despacharCaja : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) = 12\}
```

#### ¿Con eso cierra?

 El enunciado dice que cuando la caja actual se llena "es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía".

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) < 12 \} despacharCaja : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) = 12\}
```

- El enunciado dice que cuando la caja actual se llena "es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía".
  - Estamos permitiendo que esto no ocurra...

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) < 12 \} despacharCaja : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) = 12\}
```

- El enunciado dice que cuando la caja actual se llena "es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía".
  - Estamos permitiendo que esto no ocurra...
  - Y estamos especificando que el despacho de la caja es una acción a realizar (si no, ¡no pueden caer más empanadas!).

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) < 12 \} despacharCaja : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) = 12\}
```

- El enunciado dice que cuando la caja actual se llena "es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía".
  - Estamos permitiendo que esto no ocurra...
  - Y estamos especificando que el despacho de la caja es una acción a realizar (si no, ¡no pueden caer más empanadas!).
- No estaríamos modelando el comportamiento automático en el TAD.

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) < 12 \} despacharCaja : fabrica f \longrightarrow fabrica \{ empanadasEnCaja(f) = 12\}
```

- El enunciado dice que cuando la caja actual se llena "es automáticamente despachada y reemplazada por una caja vacía".
  - Estamos permitiendo que esto no ocurra...
  - Y estamos especificando que el despacho de la caja es una acción a realizar (si no, ¡no pueden caer más empanadas!).
- No estaríamos modelando el comportamiento automático en el TAD.
- ▶ ¡No es necesario el generador despacharCaja!

#### Generadores

#### Los generadores son entonces:

```
crearFabrica : \longrightarrow fabrica caeEmpanada : fabrica \longrightarrow fabrica
```

#### Axiomaticemos los observadores:

```
cajasDespachadas : fabrica \longrightarrow nat \{\} cajasDespachadas(crearFabrica) \equiv ?? cajasDespachadas(caeEmpanada(f)) \equiv ?? empanadasEnCaja : fabrica \longrightarrow nat \{\} empanadasEnCaja(crearFabrica) \equiv ?? empanadasEnCaja(caeEmpanada(f)) \equiv ??
```

## Comportamiento automático (axiomas)

```
cajasDespachadas : fabrica \longrightarrow nat
                                                                                 { }
cajasDespachadas(crearFabrica) \equiv 0
cajasDespachadas(caeEmpanada(f)) \equiv if empanadasEnCaja(f) == 11 then
                                            cajasDespachadas(f) + 1
                                        else
                                            cajasDespachadas(f)
                                        fi
empanadasEnCaja : fabrica \longrightarrow nat
                                                                                 { }
empanadasEnCaja(crearFabrica) = 0
empanadasEnCaja(caeEmpanada(f)) \equiv if empanadasEnCaja(f) == 11 then
                                        else
                                            empanadasEnCaja(f) + 1
                                        fi
```

1. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de los *observadores*?

1. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de los *observadores*?

Ninguno: Para distinguir lo que diferenciaba a las fábricas no importó si el comportamiento era automático o no.

1. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de los *observadores*?

Ninguno: Para distinguir lo que diferenciaba a las fábricas no importó si el comportamiento era automático o no.

2. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de *generadores*?

1. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de los *observadores*?

Ninguno: Para distinguir lo que diferenciaba a las fábricas no importó si el comportamiento era automático o no.

2. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de *generadores*?

Un poco: Tuvimos que quitar el generador que despachaba la caja (ya que eso era parte del comportamiento automático).

### Reflexiones

1. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de los *observadores*?

Ninguno: Para distinguir lo que diferenciaba a las fábricas no importó si el comportamiento era automático o no.

2. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de *generadores*?

Un poco: Tuvimos que quitar el generador que despachaba la caja (ya que eso era parte del comportamiento automático).

3. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en los axiomas?

### Reflexiones

1. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de los *observadores*?

Ninguno: Para distinguir lo que diferenciaba a las fábricas no importó si el comportamiento era automático o no.

2. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en la elección de *generadores*?

Un poco: Tuvimos que quitar el generador que despachaba la caja (ya que eso era parte del comportamiento automático).

3. ¿Qué impacto tuvo el comportamiento automático en los axiomas?

Mucho: El comportamiento queda plenamente descripto en los axiomas.

#### Resumen

Cuando comportamiento observable del TAD es consecuencia directa o automática de otra acción u otro estado, en general:

- No debemos especificar una acción "manual" para este comportamiento.
- No debemos permitir que existan instancias del TAD en las que el comportamiento debería haberse aplicado y no sucedió.
- No debemos restringir acciones que requieran que suceda el comportamiento, ya que éste debería ser automático (por ejemplo, la precondición de caeEmpanada).

# Ejercicio: El ascensor inútil

#### Enunciado

Se quiere especificar el comportamiento de un ascensor que lleva personas entre dos pisos. La capacidad máxima del ascensor es de 3 personas. El ascensor se pone en funcionamiento cuando ingresan 3 personas, sin necesidad de apretar ningún botón. Cuando el ascensor se pone en movimiento, se desplaza del piso en el que está hacia el otro. En cuanto llega al piso de destino, las personas que están en el interior del ascensor lo desocupan inmediatamente. En cualquier momento pueden llegar personas a cualquiera de los dos pisos. En el caso que el ascensor no esté, las personas forman una fila y esperan a que el ascensor las venga a buscar.

# Ejercicio: El ascensor inútil

#### Enunciado

Se quiere especificar el comportamiento de un ascensor que lleva personas entre dos pisos. La capacidad máxima del ascensor es de 3 personas. El ascensor se pone en funcionamiento cuando ingresan 3 personas, sin necesidad de apretar ningún botón. Cuando el ascensor se pone en movimiento, se desplaza del piso en el que está hacia el otro. En cuanto llega al piso de destino, las personas que están en el interior del ascensor lo desocupan inmediatamente. En cualquier momento pueden llegar personas a cualquiera de los dos pisos. En el caso que el ascensor no esté, las personas forman una fila y esperan a que el ascensor las venga a buscar.

### Requerimientos

### Se quiere saber:

- En qué piso está el ascensor.
- La cantidad de personas esperando en cada piso.

### TAD Ascensor - Resolución

Igual que antes, tenemos que definir:

- 1. Los observadores y la igualdad observacional.
- 2. Los generadores.
- 3. Las otras operaciones (si hay).
- 4. Axiomatizar todo.

# TAD Ascensor - ¿Qué queremos modelar?

- 1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las personas? ¿Nos interesa identificarlas?
- 2. ¿Hace falta modelar la fila de personas?
- 3. ¿Nos interesa diferenciar a las personas que están esperando dentro y fuera del ascensor?

# TAD Ascensor - ¿Qué queremos modelar?

- 1. ¿Qué nos están pidiendo sobre las personas? ¿Nos interesa identificarlas?
- 2. ¿Hace falta modelar la fila de personas?
- 3. ¿Nos interesa diferenciar a las personas que están esperando dentro y fuera del ascensor?

### Entonces los observadores elegidos son:

```
personasEn : ascensor \times piso \longrightarrow nat piso? : ascensor \longrightarrow piso
```

Supongamos que el tipo piso tiene dos valores posibles A y B y la operación:

```
otroPiso : piso \longrightarrow piso otroPiso(A) \equiv B otroPiso(B) \equiv A
```

## TAD Ascensor - Generadores

Pensemos el conjunto de generadores del TAD Ascensor...

### TAD Ascensor - Generadores

Pensemos el conjunto de generadores del TAD Ascensor...

### TAD Ascensor - Generadores

Pensemos el conjunto de generadores del TAD Ascensor...

#### Axiomaticemos los observadores:

```
personasEn : ascensor \times piso \longrightarrow nat \{\} personasEn(crearAscensor, p)) \equiv ?? personasEn(llegaPersona(a,p'), p) \equiv ?? piso? : ascensor \longrightarrow piso \{\} piso?(crearAscensor) \equiv ?? piso?(llegaPersona(a,p)) \equiv ??
```

# TAD Ascensor - Axiomas (1)

```
{ }
personasEn : ascensor \times piso \longrightarrow nat
personasEn(crearAscensor, p)) \equiv 0
personasEn(llegaPersona(a,p'), p) \equiv if p' = piso?(a) \land personasEn(a,p') = 2 then
                                            if p = p' then
                                            else
                                                if peronasEn(a,p) < 3 then
                                                    peronasEn(a,p)
                                                else
                                                    peronasEn(a,p) - 3
                                                fi
                                        else
                                            if p = p' then
                                                personasEn(a, p) + 1
                                            else
                                                personasEn(a, p)
                                            fi
                                        fi
```

# TAD Ascensor - Axiomas (2)

Observación: en piso? y personasEn, tenemos recursión directa e indirecta.

# Resumen (jotra vez!)

Cuando alguna parte del comportamiento del TAD debe ser automática:

- No debemos especificar una acción "manual" para este comportamiento (a menos que también sea el caso).
- No debemos permitir que existan instancias del TAD en las que el comportamiento debería haberse aplicado y no lo hizo.
- No debemos restringir acciones que requieran que suceda el comportamiento, ya que éste es automático (por ejemplo, la precondición de caeEmpanada).

# Ejercicio (de tarea): El ascensor 2.0

#### Enunciado

Muchas veces la gente se cansa de esperar el ascensor, dado que mientras haya menos de 3 personas en el piso donde está el ascensor, éste no va a moverse. Esto implica que en el otro piso pueden acumularse muchísimas personas esperando. Para esto se decidió incorporar un botón en cada piso para llamar al ascensor. Si el botón es presionado en el piso donde el ascensor se encuentra, nada sucede. Por el contrario, si se presiona en el piso donde el ascensor no está, el ascensor se mueve hacia el piso destino llevando con él a todas las personas que su capacidad le permita y que hayan estado esperando en el piso de origen. Obviamente, si el botón es presionado es que hay al menos una persona en el piso donde se lo presionó.