

Algoritmos y Estructuras de Datos II

Primer parcial – Viernes 16 de Septiembre de 2016

Aclaraciones

- El parcial es a libro abierto.
- Cada ejercicio debe entregarse en hojas separadas.
- Incluir en cada hoja el **número de orden asignado, número de hoja, número total de hojas, apellido, nombre y número de Libreta Universitaria**.
- Al entregar el parcial, completar el resto de las columnas en la planilla.
- Cada ejercicio se calificará con **Promocionado, Aprobado, Regular, o Insuficiente**.
- El parcial completo está aprobado si el primer ejercicio tiene al menos **A**, y entre los ejercicios 2 y 3 hay al menos una **A**. Para más detalles, ver “Información sobre la cursada” en el sitio Web.

Ej. 1. Especificación

En la red social “Roberto Carlos”, cada usuario quiere tener un millón de amigos. Pueden registrarse nuevos usuarios a la red social en todo momento. Cuando lo deseen, dos usuarios pueden volverse amigos; la amistad es siempre recíproca, pero no es reflexiva. Las personas de esta red son muy serias al momento de declararse amigos: no hay arrepentimientos.

Con el objetivo de que una persona agrande su círculo de amistades, la red le sugiere a cada persona un usuario **no amigo** que posea la mayor cantidad de amigos en común con él.

También a la red social le interesa que los amigos se comuniquen. Por lo tanto, la red crea automáticamente para cada persona un grupo con sus amigos y con los amigos de éstos, para que esas personas compartan sus anécdotas. Si otro usuario se hace amigo de él, instantáneamente empieza a formar parte del grupo (y de los grupos de sus amigos).

Para que los usuarios tímidos utilicen más el sistema, la red social posee un conjunto de usuarios automatizados denominados “e-ameos” definidos de antemano. Cada vez que un usuario quiere hablar con alguien pero no quiere socializar, puede hacerse amigo de uno o más de los e-ameos de la red social. Sin embargo, la red social **no agregará** al grupo del usuario los amigos de los e-ameos y tampoco los ofrecerá como sugerencia de amistad a los usuarios ya que son públicamente conocidos.

Además, los diseñadores de la red notaron que, estadísticamente, cuando dos personas tienen 10 e-ameos en común, la probabilidad de que éstos se hagan amigos es del 99.9%. Por lo tanto, la red les simplifica la vida *amigándolos* automáticamente al darse esta situación.

Modelar con un TAD la red social Roberto Carlos. Además, con fines estadísticos, interesa saber:

- a) qué grupos existen y con qué integrantes;
- b) el usuario más “figureti”, es decir, el usuario no e-ameo que está en más grupos de amigos distintos de la red (en caso de existir empate, devolver alguno de manera determinista);
- c) cuántos usuarios “Forever Alone” hay, es decir, usuarios que estén en grupo solamente con e-ameos.

Ej. 2. Inducción estructural

Dado el siguiente TAD con sus operaciones:

TAD ÁRBOL BIN-TERN(α)									
géneros		$\text{abt}(\alpha)$							
generadores									
nil	:		\longrightarrow	$\text{abt}(\alpha)$	nil?	:	$\text{abt}(\alpha)$	\longrightarrow	bool
bin	:	$\text{abt}(\alpha) \times \text{abt}(\alpha) \times \alpha$	\longrightarrow	$\text{abt}(\alpha)$	tern?	:	$\text{abt}(\alpha)$	\longrightarrow	bool
tern	:	$\text{abt}(\alpha) \times \text{abt}(\alpha) \times \text{abt}(\alpha) \times \alpha$	\longrightarrow	$\text{abt}(\alpha)$	raiz	:	$\text{abt}(\alpha) \ a$	\longrightarrow	α
					hijo_1	:	$\text{abt}(\alpha) \ a$	\longrightarrow	$\text{abt}(\alpha)$
					hijo_2	:	$\text{abt}(\alpha) \ a$	\longrightarrow	$\text{abt}(\alpha)$
					hijo_3	:	$\text{abt}(\alpha) \ a$	\longrightarrow	$\text{abt}(\alpha)$
otras operaciones									
h	:	$\text{abt}(\alpha)$	\longrightarrow	nat					
tam	:	$\text{abt}(\alpha)$	\longrightarrow	nat					
completo	:	$\text{abt}(\alpha)$	\longrightarrow	bool					
Fin TAD									
axiomas									
h_0)	$h(\text{nil})$	\equiv	0	t_0)	$\text{tam}(\text{nil})$	\equiv	0		
h_1)	$h(\text{bin}(i, d, e))$	\equiv	$1 + \max(h(i), h(d))$	t_1)	$\text{tam}(\text{bin}(i, d, e))$	\equiv	$1 + \text{tam}(i) + \text{tam}(d)$		
h_2)	$h(\text{tern}(a, b, c, e))$	\equiv	$1 + \max_3(h(a), h(b), h(c))$	t_2)	$\text{tam}(\text{tern}(a, b, c, e))$	\equiv	$1 + \text{tam}(a) + \text{tam}(b) + \text{tam}(c)$		
c)	$\text{completo}(a)$	\equiv	$\text{nil?}(a) \vee_{\text{L}} h(\text{hijo}_1(a)) = h(\text{hijo}_2(a)) \wedge \text{completo}(\text{hijo}_1(a)) \wedge$ $\text{completo}(\text{hijo}_2(a)) \wedge (\text{tern?}(a) \Rightarrow_{\text{L}} (h(\text{hijo}_2(a)) = h(\text{hijo}_3(a)) \wedge$ $\text{completo}(\text{hijo}_3(a))))$						

Demuestre por inducción estructural la siguiente propiedad:

$$(\forall a : \text{abt}(\alpha)) \text{ completo}(a) \Rightarrow \text{tam}(a) \geq 2^{h(a)} - 1$$

En caso de utilizar lemas auxiliares, plantearlos claramente y demostrarlos. Además, se pide:

- Escribir el predicado unario. Luego escribir, completo, el **esquema de inducción** a utilizar.
En el esquema, marcar **claramente** CB(s), PI(s), HI(s), TI(s) y el alcance de cada cuantificador.
- Plantear el/los caso(s) base y resolverlo(s), justificando cada paso de la demostración.
- Plantear el/los paso(s) inductivo(s) y resolverlo(s), justificando cada paso de la demostración.

Ej. 3. Diseño

Considerar la siguiente especificación de un sistema que realiza el seguimiento de experimentos en un laboratorio. Los experimentos se enumeran por números naturales desde el 1 en adelante. De cada experimento sólo se recuerdan los reactivos químicos utilizados y el orden en el que fueron usados (el “protocolo”). Un mismo reactivo puede ser usado múltiples veces en el mismo protocolo. Los reactivos se identifican por su número de inventario que es un NAT, y cada uno tiene asociado un índice de peligrosidad representado por un NAT. Por cuestiones de seguridad, la peligrosidad combinada de todos los reactivos usados en un protocolo no puede superar el valor 100.

TADs REACTIVO, PELIGROSIDAD y ID son NAT

TAD PROTOCOLO es SECUENCIA(TUPLA(REACTIVO,PELIGROSIDAD))

TAD EXPERIMENTOS

observadores básicos

cantExperimentos : experimentos \rightarrow nat
verExperimento : experimentos $e \times \text{id } i \rightarrow$ protocolo $\{1 \leq i \leq \text{cantExperimentos}(e)\}$

generadores

abrirLaboratorio : \rightarrow experimentos
registrarExperimento : experimentos $e \times$ protocolo $p \rightarrow$ experimentos
 $\left\{ \neg \text{vacía?}(p) \wedge \sum_{i=1}^{\text{long}(p)} \Pi_2(p[i]) \leq 100 \wedge \right.$
 $\left. (\forall n : \text{id}) n \leq \text{cantExperimentos}(e) \Rightarrow_{\text{L}} \text{peligrosidadesConsistentes}(\text{verExperimento}(e, n) \ \& \ p) \right\}$

axiomas

cantExperimentos(abrirLaboratorio) $\equiv 0$
cantExperimentos(registrarExperimento(e, s)) $\equiv 1 + \text{cantExperimentos}(e)$
verExperimento($i, \text{registrarExperimento}(e, s)$) \equiv if $i = \text{cantExperimentos}(e)$ then s else verExperimento(i, e) fi

predicados

peligrosidadesConsistentes(p) $\equiv (\forall i, j : \text{nat}) (1 \leq i, j \leq \text{long}(p) \Rightarrow_{\text{L}} (\Pi_1(p[i]) = \Pi_1(p[j]) \Rightarrow_{\text{L}} \Pi_2(p[i]) = \Pi_2(p[j])))$

Fin TAD

Se decidió utilizar la siguiente estructura para representar el TAD, en la que se pretende abreviar partes de los protocolos repetidas para reducir el espacio utilizado para almacenarlas.

Experimentos se representa con estr

donde estr es tupla \langle cantUsos: dicc(reactivo,conj(id)),
porPeligrosidad: dicc(peligrosidad,conj(reactivo)),
protocolos: dicc(id, secu(nombre)),
subProtocolos: dicc(nombre, secu(reactivo)) \rangle

y nombre es STRING

En esta estructura, *cantUsos* almacena los números de experimento en los que se usó cada reactivo; *porPeligrosidad* clasifica a los reactivos según su peligrosidad (sólo hay entradas para peligrosidades usadas, i.e., no hay definiciones que sean el conjunto vacío). Además, *protocolos* describe abreviadamente el protocolo usado en cada experimento como una secuencia de nombres de subprotocolos (concatenando esos subprotocolos se obtiene el protocolo completo), y *subProtocolos* almacena los pedazos de secuencias de reactivos correspondientes a cada subprotocolo usado en algún protocolo existente. De esta manera, el mismo subprotocolo se puede reutilizar para describir múltiples protocolos.

Se pide:

- Escribir en castellano el invariante de representación.
- Escribir formalmente el invariante de representación.
- Escribir formalmente la función de abstracción.