TEMA 2

NOMBRE Y NRO. LIBRETA: [redacted] [redacted]

CARRERA: Lic. Cs. Matemáticas

TURNO: 11-14 (A-K) / 11-14 (L-Z) / 16-19 / 19-22

1	2	3	4	Calif.

Análisis II / Análisis Matemático II / Matemática 3

Segundo Parcial - 30 de noviembre de 2013

---

1. Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 9$, sin tapa, orientada con la normal exterior. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{-2z}{x^2+y^2+z^2+1} + \operatorname{sen}(y), e^z, \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \right).$$

Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. Encontrar todas las funciones derivables $y = y(x)$ tales que todas las rectas tangentes al gráfico corten al eje y en el doble del opuesto a la ordenada del punto de tangencia.

3. Calcular todas las soluciones de la siguiente ecuación diferencial de orden dos,

$$xy'' - (x+1)y' + y = 3x^2 \quad \text{con } x > 0$$

sabiendo que $y = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

4. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -4x_1(t) + ax_2(t) \\ x_2'(t) &= ax_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$

permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$.

Para $a = 2$, esbozar el diagrama de fases.

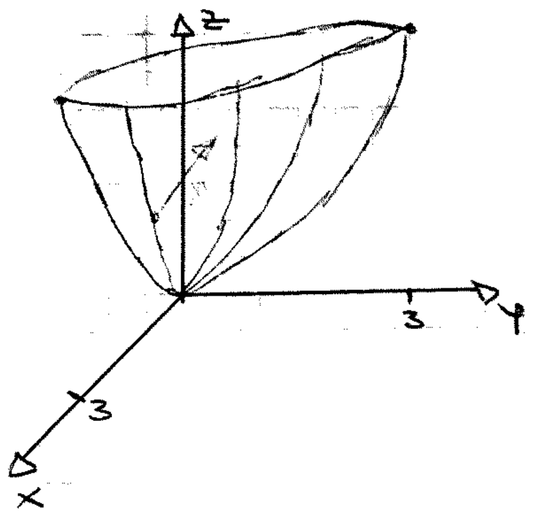
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

① Sea S la superficie de ecuación $z=x^2+y^2$ con $z\leq 9$, sin tapa, orientada con la normal exterior. Consideremos el campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-2z}{x^2+y^2+z^2+1} + \operatorname{sen}(y),\ e^z,\ \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \right)$$

Calcular $\int_S F \cdot dS$.

Esbozo la superficie, que es un paraboloide.



Su parametrización es

$T: [0, 2\pi] \times [0,3] \to \mathbb{R}^3$

$T(\theta, r) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$.

Esta parametrización es de clase C^2.

Su normal n es

$T_r \times T_\theta = (-2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r) = n_T(r,\theta)$

$T_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r)$.

$T_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$.

El enunciado dice que la superficie está orientada con la normal exterior. Si evalúo n en $(\frac{3}{2}, 0)$ queda:

• $n(\frac{3}{2}, 0) = (-9/2, 0, \frac{3}{2})$, y esta normal es interior.

Como el Teorema de Gauss pide como hipótesis una región elemental simétrica Q, cuya superficie parametrizada por una parametrización regular de clase C^2 esté orientada con la normal exterior, y un campo C^1 sobre Q, falta "cerrar" la región con la tapa superior del paraboloide, →

parametrizada por: Llamo a la tapa R.

$C: [0,3]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$C(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 9).$

$C_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0).$ $\quad C_r \times C_\theta = (0,0,r) = n_c(r,\theta)$

$C_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$

La normal, evaluada en $(1,0)$ queda:

$n_c(1,0) = (0,0,1)$, es exterior.

Por el Teorema de Gauss tengo que

$$-\int_S F\cdot dS + \int_R F\cdot dS = \iiint_Q \text{div}\,F\,dxdydz.$$

O sea que $\displaystyle\int_S F\cdot dS = -\iiint_Q \text{div}\,F\,dxdydz + \int_R F\,dS.$

Ahora bien:

$$\text{div}\,F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{-2z(2x)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} + 0 + \frac{2x(2z)}{(x^2+y^2+z^2+1)} = 0$$

$$\text{div}\,F = 0 \Longrightarrow -\iiint_Q \text{div}\,F\,dxdydz = 0.$$

Falta calcular $\displaystyle\int_R F\cdot dS$

$$\int_R F\cdot dS = \iint_D \underset{F(E(x,y))}{F}\, n_e\,dS = \iint_D \frac{2x}{x^2+y^2+81+1}dxdy \underset{\text{Polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{2r\cos\theta\cdot r}{r^2+82}\,dr\,d\theta =$$

$R = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \; z=9, \; x^2+y^2\leq 3\}$ $\quad z=9 \Rightarrow z^2=81$, $\; x^2+y^2=r^2$

R parametrizada por $E: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 3\}$.

$E(x,y) = (x,y,9)$

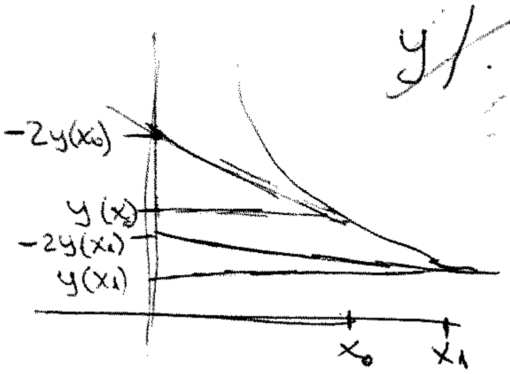
$E_x\times E_y = (0,0,1) = n_e$

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\cdot\underbrace{\int_0^3 \frac{2r^2}{r^2+82}dr}_{I_2} = \text{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot I_2 = 0 = \underline{\underline{\int_S F\cdot dS}}$$

2

30/11/13

② Encontrar todas las funciones derivables $y = y(x)$ / todas las rectas tangentes al gráfico corten al eje y en el doble del opuesto a la ordenada del punto de tangencia.



$y /$ ~~$. y'(x) \cdot x + (-2) y(x)$~~

$$y'(x) \cdot x - 2y(x) = 0.$$

$$b + y'(x) \cdot x = 2y(x),$$ b ordenada al origen de las rectas tangentes al gráfico.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln(y(x)) = 2\ln(x) + C.$$

$$y(x) = (e^{\ln(x)})^2 = x^2 + C$$

Tomemos por ejemplo $C = 0$.

La recta tangente a x^2 $\forall x$ es $2x$.

Tengo que $y'(x_0) \cdot x + b = -2y(x_0)$.

$$y'(0) \cdot x_0 + b = -2y(x_0).$$

$$y'(x_0) \cdot 0 + b = -2y(x_0).$$

$$b = -2y(x_0).$$

$y /$ $y'(x) \cdot x -$

~~$y'(x) \cdot x$~~ $+ b = -2y(x_0)$.

Por otro lado, la ordenada al origen de una recta tangente es

La recta tangente al gráfico de $f(x)$ es

$f'(x).x+b$

El doble del opuesto a la ordenada del punto de tangencia es

$-2 f(x)$.

Si esas rectas cortan al eje y, queda $x=0$.

o ~~sea~~ $f'(x_0).0+b=-2f(x_0)$.

$b=-2f(x_0)$.

La ordenada al origen de una recta tangente se puede deducir:

$$f'(x)=\frac{f'(x_0).0+b-f(x)}{x_0-0}$$

$x f'(x)=b-f(x) \Longleftrightarrow b=f(x)+xf'(x)$.

Queda que $f(x)+f'(x).x=-2f(x)$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-3$$

Integrando a ambos lados

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int -3\, dx$$

$$\ln(f(x))=-3x+C$$

$$f(x)=k e^{-3x}$$ Es derivable

$k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

$f'(x)=-3ke^{-3x}$

$\left.\begin{array}{l} f'(1)=-3ke^{-3} \\ f(1)=ke^{-3} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} b=\overbrace{ke^{-3}}^{f(1)}-\overbrace{1.3ke^{-3}}^{1.f'(1)}=-2ke^{-3} \\ -2f(1)=-2ke^{-3} \end{array}$ ✓

Verifica lo pedido en $x=1$, no para todo x

$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-3ke^{-3x} \\ f(x)=ke^{-3x} \end{array}\right] \begin{array}{l} b=f(x)-xf'(x)=ke^{-3x}(1-3x) \\ \qquad = \\ b=-2f(x)=-2ke^{-3x} \end{array}\Bigg] \Longrightarrow \begin{array}{l} -2=1-3x \\ \underline{x=1} \end{array}$

$y(x)=f(x)$.

③ Calcular todas las soluciones de la siguiente ecuación diferencial de orden 2,

$$xy'' - (x+1)y' + y = 3x^2 \quad \text{con } x > 0$$

sabiendo que $y_1 = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

Si $y_1 = e^x \longrightarrow y_1' = y_1'' = e^x$

Vemos que
$$x \cdot e^x - (x+1)e^x + e^x = 0.$$

Propongo $y_2 = u(x) \cdot y_1(x)$ como la otra solución.

$$y_2' = u'(x)\, y_1(x) + u(x)\, y_1'(x)$$
$$y_2'' = u''(x)\, y_1(x) + 2u'(x)\, y_1'(x) + u(x)\, y_1''(x).$$

$$\begin{aligned}
x\, y_2'' &= x\left[u''(x) y_1(x) + 2u'(x) y_1'(x) + u(x) y_1''(x)\right]. \\
-(x+1)\, y_2' &= -(x+1)\left[u'(x) y_1(x) + u(x) y_1'(x)\right] \\
+\ y &= u(x)\, y_1(x) \\
\hline
0 &= u(x) \cdot \underbrace{\left[y_1(x) - (x+1) y_1'(x) + x y_1''(x)\right]}_{=0} \\
&\quad + u'(x)\left[-(x+1) y_1(x) + 2x y_1'(x)\right] \\
&\quad + u''(x)\left(x y_1(x)\right).
\end{aligned}$$

• Por ser solución de la homogénea

$$-u''(x)\, x y_1(x) = u'(x)\left[-(x+1) y_1(x) + 2x y_1'(x)\right].$$

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{-x y_1(x) - y_1(x) + 2x y_1'(x)}{x y_1(x)} \qquad \forall x > 0$$

$$= -1 - \frac{1}{x} + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}$$

Así, tomo $z(x) = u'(x)$

$$z'(x) = u''(x).$$

y queda $-\dfrac{z'(x)}{z(x)} = -1 - \dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{2y_1'(x)}{y_1(x)} = 1 - \dfrac{1}{x}\right.$

Integrando a ambos lados:

$$-\int \frac{z'(x)}{z(x)}dx = \int 1-\frac{1}{x}dx$$

$$-\ln(z(x)) = x - \ln(x).$$

$$z(x) = e^{-x+\ln(x)} = e^{-x}.e^{\ln(x)} = xe^{-x}$$

Tenía que $z = u'(x)$

Por lo que $u'(x) = x.e^{-x}$

$$u(x) = -(x+1)e^{-x}$$

Nos queda. $y_2(x) = u(x)\,y_1(x) = -(x+1)e^{-x}.e^{x} = -(x+1).$

Esto verifica ser solución del homogéneo.

Tengo mi base de soluciones del homogéneo

$\{y_1, y_2\}$ $\quad y_1 = e^x$

$$y_2 = -(x+1).$$

Ahora calculo el wronskiano:

$W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} e^x & -(x+1) \\ e^x & -1\end{pmatrix} = xe^x \neq 0$ ya que $x>0$.
$\therefore$ A tiene inversa.

y ahora por el método de variación de las constantes tenemos que.

$$\frac{1}{xe^x}\begin{pmatrix} -1 & (x+1) \\ -e^x & e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/e^x & (x+1)/e^x \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(x+1)/e^x \\ 3x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2'\end{pmatrix}$$

- $C_1' = \dfrac{3x(x+1)}{e^x} \Rightarrow \int C_1' = C_1 = \int \dfrac{3x(x+1)dx}{e^x} = -(3x^2+9x+9)e^{-x}$

- $C_2' = 3x \Rightarrow \int C_2' = C_2 = \int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2$

Así nos queda la solución particular

$$y_p(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = -(3x^2+9x+9) + \frac{3}{2}x^2(-(x+1))$$
$$= -\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x - 9.$$

Y finalmente, la solución general queda

$$y(t) = -\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x - 9 + ae^x + b(-(x+1)),\ a,b\in\mathbb{R}$$

4

30/11/13

Verifico:

$y'(t) = -\frac{9}{2}x^2 - 9x - 9 + ae^x - b$

$y''(t) = -9x - 9 + ae^x$

y reemplazo en la original.

$x\left(-9x-9+ae^x\right) - (x+1)\left(-\frac{9}{2}x^2 - 9x - 9 + ae^x - b\right)$

$+\left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x - 9 + ae^x - bx - b\right)$

$= \cancel{-9x^2} \cancel{-9x} \cancel{+axe^x} + \frac{9}{2}x^3 \cancel{+9x^2} \cancel{+9x} \cancel{-axe^x} \cancel{+bx}$

$\cancel{+\frac{9}{2}x^2} \cancel{+9x} \cancel{+9} \cancel{-ae^x} \cancel{+b} - \frac{3}{2}x^3 \cancel{-\frac{9}{2}x^2} \cancel{-9x} \cancel{-9} \cancel{+ae^x} \cancel{-bx} \cancel{-b}.$

$= \frac{6}{2}x^3 = 3x^3$ No se verifica. Debe haber algún error de cuentas.

$y_p'(t) = -\frac{9}{2}x^2 - 9x - 9.$

$y_p''(t) = -9x - 9.$

$x(-9x-9) - (x+1)\left(-\frac{9}{2}x^2 - 9x - 9\right) + \left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x - 9\right).$

$= \cancel{-9x^2} \cancel{-9x} + \frac{9}{2}x^3 \cancel{+9x^2} \cancel{+9x} \cancel{+\frac{9}{2}x^2} \cancel{+9x} \cancel{+9} - \frac{3}{2}x^3 \cancel{-\frac{9}{2}x^2} \cancel{-9x} \cancel{-9}.$

$= \frac{6}{2}x^3 = 3x^3$ No se verifica $\rightarrow$ está mal $y_p(t)$.

④ Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ / todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) + ax_2(t) \\ x_2'(t) = ax_1(t) - 4x_2(t). \end{cases}$

permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$.

Para $a=2$, esbozar el diagrama de fases

Planteo:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & a \\ a & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{siendo } \overline{X}'(t) = A\overline{X}(t).$$

Así, $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & a \\ a & -4-\lambda \end{pmatrix}$ y $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 8\lambda + 16 - a^2$

Busco las raíces de este polinomio, que son

$$\frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(16-a^2)}}{2} = -4 \pm a. \begin{cases} -4+a = \lambda_1 \\ -4-a = \lambda_2 \end{cases}$$

$\underline{\lambda_1 = -4+a.}$

$A - \lambda_1 I =$
$A - (-4+a)I = \begin{pmatrix} -4-(-4+a) & a \\ a & -4-(-4+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-a\alpha + a\beta = 0 \Rightarrow a\alpha = a\beta \begin{cases} a = 0 \\ \alpha = \beta \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

$a\alpha - a\beta = 0.$

$\underline{\lambda_2 = -4-a}$

$A - \lambda_2 I$
$A - (-4-a)I = \begin{pmatrix} -4-(-4-a) & a \\ a & -4-(-4-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a(\alpha+\beta) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ \alpha = -\beta \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

(*) Ver $a \neq 0$ en página siguiente

Luego, $\underline{X}(t) = c_1 e^{(-4+a)t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{(-4-a)t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{(-4+a)t} + c_2 e^{(-4-a)t} \\ c_1 e^{(-4+a)t} - c_2 e^{(-4-a)t} \end{pmatrix}.$$

Si $a=0$, ~~como~~ $\underline{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Si $a<-4$, $-4+a<0$

$-4-a>0$

$\lim_{t\to+\infty} c_1 e^{(-4+a)t} - c_2 e^{(-4-a)t}$

$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{(-4+a)t} \\ c_1 e^{(-4+a)t} \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{(-4+a)t} + 0 = 0$.

Si $a>-4$, $-4+a$ → $a>4 \Rightarrow -4+a>0$; $a=4 \Rightarrow -4+a=0$; $a<4 \Rightarrow -4+a<0$

$-4-a<0$.

$\lim_{t\to+\infty} c_1 e^{(-4+a)t} + c_2 e^{(-4-a)t}$ $\quad a \in (-4,4]$.

$\lim_{t\to+\infty} c_1 e^{(-4+a)t} - c_2 e^{(-4-a)t}$

Así, los a buscados son $a \in \mathbb{R} \,/\, \cancel{a \in (-\infty}$ $a \leq 4$.

Ahora esbozaré en la página siguiente el diagrama de fases para $a=2$

Entonces tengo 2 casos:

- $a=0$, con lo que tendría una raíz doble, -4.
- $a\neq 0$, con lo que tendría 2 raíces distintas.

$\underline{a=0}$

$\underline{\lambda_1=\lambda_2=-4}$

$$A+4I=\begin{pmatrix} -4+4 & 0 \\ 0 & -4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $X'(t)=A\,X(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es una solución acotada cuando $t\to+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} 0=x_1'(t)=-4x_1(t)=0 \iff x_1(t)=0 \\ 0=x_2'(t)=-4x_2(t)=0 \iff x_2(t)=0 \end{array}\right]$$

$\underline{a\neq 0}$

(*)

Esbozo del diagrama de fases para $a=2$.

$\lambda_1=-2$ y $\lambda_2=-6$.

Tenemos el caso de autovalores reales $0>\lambda_1>\lambda_2$.

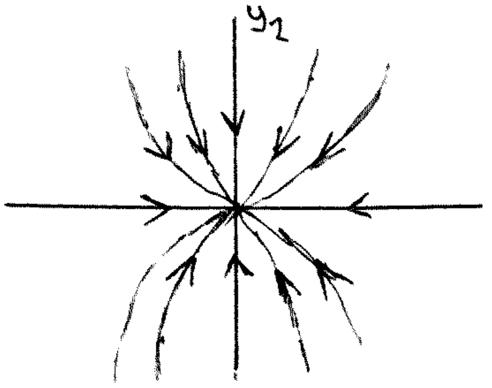
$X(t)=c_1e^{-2t}v_1+c_2e^{-6t}v_2$.

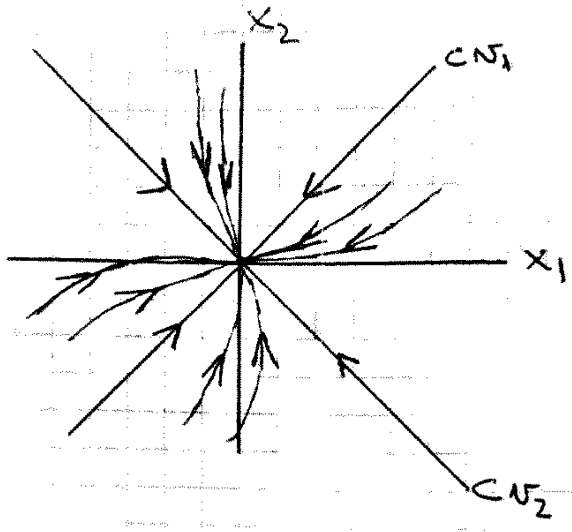
Llamo $y_1=c_1e^{-2t} \iff \frac{y_1}{c_1}=e^{-2t} \iff \frac{c_1}{y_1}=(e^t)^2 \iff e^t=\tilde{K}\cdot\frac{1}{y_1^{1/2}}$

$y_2=c_2e^{-6t} \iff y_2=c_2\cdot\frac{y_1^3}{c_1^3}=K\,y_1^3$

$\lim_{t\to+\infty} y_1=0$ $\qquad$ $\lim_{t\to-\infty} y_1=+\infty$

$\lim_{t\to+\infty} y_2=0$ $\qquad$ $\lim_{t\to-\infty} y_2=+\infty$





$Q = (v_1, v_2)$.