Tema 1

1	2	3	4
B	B	B	M+

Calificación
A

¡Buen parcial!

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]

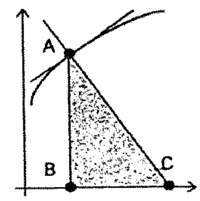
NO. DE LIBRETA: [redacted]

TURNO: MAÑ. (A-K) / MAÑ. (L-Z) / TARDE / NOCHE

ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3
SEGUNDO PARCIAL (26/11/16)

---

1. Hallar una función $y : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ con derivada positiva, que pase por $(1, 2)$, tal que para todo punto (x_0, y_0) del gráfico de y, el triángulo ABC formado por los puntos:



   - $A = (x_0, y_0)$,
   - $B = (x_0, 0)$ y
   - $C =$ intersección de la recta normal en (x_0, y_0) con el eje x,

   tenga área igual a $2x_0$.

---

2. Hallar una solución (implícita) de la ecuación

$$(*) \quad y(5xy^2 + 4)\, dx + x(xy^2 - 1) dy = 0$$

que satisfaga $y(1) = 2$, sabiendo que $(*)$ admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^a y^b$.

---

3. Hallar la solución $y(x)$ de la ecuación

$$y'' - y = 2e^{-x}$$

que pase por el origen de coordenadas con tangente horizontal.

---

4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + kx_2, \\ x_2' = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

   a) Hallar todos los valores $k \in \mathbb{R} - \{4\}$ tales que $\lim\limits_{t \to +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$ para toda solución del sistema.

   b) Hallar todos los valores $k \in \mathbb{R} - \{4\}$ tales que el diagrama de fases del sistema sea un espiral.

Observación: No es necesario calcular las soluciones de forma explícita.

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

[redacted]

1) $y: (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$

$y' > 0$

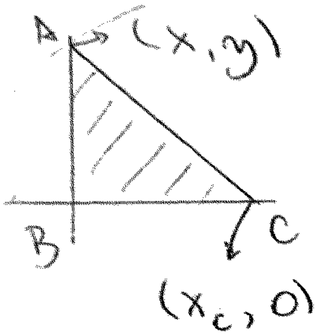
$y(1) = 2$

$\forall (x_0, y_0)$, Área $ABC = 2x_0$

$A = (x_0, y_0)$

$B = (x_0, 0)$

$C =$ intersección recta normal en (x_0, y_0) con eje x



$$\text{Área} = \frac{b.h}{2}$$

$h = y$

$b = x_c - x$

$\overline{AC}$ = recta que tiene pendiente $-\frac{1}{y'}$ y pasa por (x

$$\Rightarrow \overline{AC} = \frac{1}{y'}(x - x_c)$$

evalúo en (x, y) para hall

$$y = \frac{1}{y'}(x - x_c) \Rightarrow x_c = y.y' + x$$

$$b = y.y' + x - x = y.y'$$

$$\Rightarrow \frac{b.h}{2} = \frac{y.y'\ y}{2} = 2x \Leftrightarrow y^2 \cdot y' = 4x$$

$$\int y^2 = \frac{y^3}{3} + K$$

$$\int 4x = 2x^2 \Rightarrow \frac{y^3}{3} + k = 2x^2$$

$$y = \sqrt[3]{6x^2 + K_2}$$

$y = \sqrt[3]{6x^2 + k}$

$y(1) = \sqrt[3]{6 + k} = 2 \Leftrightarrow k = 2$

$\boxed{y = \sqrt[3]{6x^2 + 2}}$

[redacted]

2) $y(5xy^2+4)\,dx + x(xy^2-1)\,dy = 0$

$y(1) = 2$

factor integrante $\mu(x,y) = x^a y^b$

$$(y^3 x 5 + 4y)\,dx + (x^2 y^2 - x)\,dy = 0$$

$$\mu(y^3 x 5 + 4y)\,dx + \mu(x^2 y^2 - x)\,dy = 0$$

- $M = 5y^{b+3}x^{a+1} + 4y^{b+1}x^{a+}$
- $N = x^{a+2}y^{b+2} - x^{a+1}y^{b}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = (b+3)\,5\,y^{b+2}x^{a+1} + 4(b+1)y^b x^a \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = (a+2)x^{a+1}y^{b+2} - (a+1)x^a y^b \end{cases}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \iff \begin{cases} 5(b+3) = a+2 \\ 4(b+1) = -a-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 5b + 15 = a + 2$

$4b + 5 = -a \Rightarrow a = -4b - 5$

$\Rightarrow 5b + 15 = -4b - 5 + 2$

$9b = -18 \iff \boxed{\begin{array}{l} b = -2 \\ a = 3 \end{array}}$

$$\mu(x,y) = x^3 y^{-2}$$

- $M = 5yx^4 + 4y^{-1}x^3$

Integro con respecto a la variable x

$$\int (5yx^4 + 4y^{-1}x^3)\,dx =$$

$$5y\,\frac{x^5}{5} + 4y^{-1}\,\frac{x^4}{4} + c(y) = yx^5 + y^{-1}x^4 + c(y)$$

- $N = x^5 - x^4 y^{-2}$

Integro con respecto a la variable y.

$$\int (x^5 - x^4 y^{-2})\,dy = yx^5 + x^4 y^{-1} + c(x)$$

Resta ver que la solución cumpla la condición inicial.

$$F(x, y(x)) / \; yx^5 + x^4y^{-1} = c, \; c \in \mathbb{R}$$

Pido $y(1) = 2$

$$\Rightarrow \quad 2 + \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\therefore \quad yx^5 + x^4 y^{-1} = \frac{5}{2}}$$

[redacted]

3) $y(x)$ tq $y'' - y = 2e^{-x}$

$y(x)$ pasa por $(0,0)$ con tg horizontal

ie $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Busco solucions del sistema homogéneo asociado

$y'' - y = 0 \iff \frac{y}{y''} = 0 \iff y = e^{x}$

Base de solucions del $H = \{ e^{x}; e^{-x} \} = \{ y_1, y_2 \}$

Ahora busco sol del NH.

$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$

tq $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$
$c_1' y_1' + c_2' y_2' = 2e^{-x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 2e^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2e^{-2x}}{2} = e^{-2x}$$

$$c_1 = \int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & 2e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = -1 \Rightarrow c_2 = -x$$

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{-2}\, e^{x} - \frac{e^{-x}}{}\, x =$$

$$o\ y_p = \frac{e^{-x}}{-2} - x e^{-x} = e^{-x}\left(-\frac{1}{2} - x\right)$$

La solución general será de la forma

$$y = \alpha e^{x} + \beta e^{-x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{2} - x\right)$$

Busca α, β tq se cumplan las condiciones iniciales.

$$y' = \alpha e^{x} - \beta e^{-x} - e^{-x}\left(-\frac{1}{2} - x\right) - e^{-x}$$

$$y(0) = \alpha + \beta + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} - \beta$$

$$y'(0) = \alpha - \beta + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} - \beta - \beta + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{2} - x\right)}$$

$+e^{-}$

[redacted]

4) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + kx_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

a) Hallar $k \in \mathbb{R}$ tq $\lim\limits_{t \to +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0,0)$

Como las soluciones del sistema son de la forma $e^{\lambda t} v$, donde λ es autovalor y v es autovector, entonces para que cumpla el límite pido que la parte real de λ sea neg (dado que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda t} = 0$ si $\lambda <$

$X'(t) = A \; X(t)$

$A = \begin{pmatrix} -2 & k \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & k \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - k$$
$$= \lambda^2 + 4 + 4\lambda - k$$
$$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 - k$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4-k)}}{2} = \lambda_1, \lambda_2$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4k}}{2} = -2 \pm \sqrt{k} = \lambda_1, \lambda_2$$

Los autovalores pueden ser complejos o reales.

∘ Veamos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$-2 \pm \sqrt{k} \in \mathbb{R}$ ie $\sqrt{k} \geq 0$

$\underline{k \geq 0}$

y $-2 + \sqrt{k} < 0$

$\sqrt{k} < 2$

$\underline{k < 4}$

$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} (x_1, x_2) = (0,0)$ si $k \in [0, 4)$

cuando $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

∘ Veamos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = a + bi \\ \lambda_2 = a - bi \end{array}\right\}$ p.do $Re(\lambda) < 0$, ie $a < 0$

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \iff k < 0$

$\lambda = -2 \pm \sqrt{k}$, $Re(-2 \pm \sqrt{k}) = -2 < 0$

$\Rightarrow$ Entonces para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lim_{t \to +\infty} (x_1, x_2) = (0,0)$

para $k < 0$

$$\boxed{\therefore \lim_{t \to +\infty} (x_1, x_2) = (0,0) \text{ para } k \in (-\infty, 4])}$$

b) Para que el diagrama de fases sea una espiral los autovalores corresp a la base de solución deben ser complejos y tener parte real distinta de cero. Para ello k debe ser negativo.