oii 1/4

Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II

Segundo Parcial - 7 de Julio de 2018

1	2	3	4
B/B	R	B	B/B

CALIF.
A

TEMA A

Apellido, nombre: [redacted] Turno de práctica: Lu - Mier 8 - 11 hs.

Libreta: [redacted] E-mail: [redacted] Carrera: Lic. Mate

✓

Justificar todas las respuestas y escribir con prolijidad. Duración 4 horas.

1. Considerar la ecuación $y'' + y' + y = t^2 + 1$.
   (a) Hallar todas las soluciones reales de la ecuación homogénea asociada.
   (b) Dar la solución de la ecuación con datos iniciales: $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

2. Hallar $n > 0$ tal que $\mu(x, y) = \dfrac{1}{(xy)^n}$ sea un factor integrante de la ecuación ✓

$$(*) \qquad \left(\frac{xy}{\cos^2(x + y^2)} + xy^2\right) dx + \left(\frac{2xy^2}{\cos^2(x + y^2)} + x^2y\right) dy = 0.$$

   A partir de μ resolver la ecuación $(*)$ y encontrar implícitamente la solución tal que $y(\pi/4) = 0$.

3. Hallar la solución general de la ecuación:

$$y''(x) - \frac{3}{x}y'(x) + \frac{4}{x^2}y(x) = x^3,$$

$C(x) \cdot x^2$ sabiendo que $y_1(x) = x^2$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

4. Considerar, para $\alpha > 0$, el sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 - 4x_2 \\ x_2' &= -\alpha^2 x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

   (a) Encontrar todos los valores de α para los cuales el origen es el único punto de equilibrio del sistema y además sea asintóticamente estable.
   (b) Realizar el diagrama de fases del sistema con $\alpha = 2$. ¿Cómo es el comportamiento asintótico en el origen?

1) $y'' + y' + y = t^2 + 1$

$y_G = y_P + y_h$

Busco y homogenea.

$y'' + y' + y = 0$ [redacted]

Propongo $y = e^{\lambda t}$ [redacted] [redacted]

$y' = \lambda . e^{\lambda t}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ me queda $e^{\lambda t} (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

↳ Pol. caract. soc raices $\left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \lambda_1 \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \lambda_2 \end{array} \right.$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1.1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$y_h = C_1 . e^{\lambda_1 t} + C_2 . e^{\lambda_2 t}$

$= C_1 . e^{\lambda_1 t} + \overline{C_1} . e^{\overline{\lambda_1} t} = C_1 . e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} t} + \overline{C_1} . e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} t}$

ACLARAR $C_1 \in \mathbb{C}$

ESTAS SON LAS SOL. REALES ✓, PERO NO SE LO PODRÍA EXPRESAR USANDO FUNCIONES REALES

b) Busco y P. tomo $t = x$ porque me gusta más.

Propongo una sol de la forma $Ax^2 + Bx + C = y_P$

$y'_P = 2Ax + B$

$y''_P = 2A$

$\Rightarrow y''_P + y'_P + y_P = x^2 + 1$

$\underbrace{Ax^2} + \underbrace{Bx} + C + \underbrace{2Ax} + B + 2A = x^2 + 1$

$x^2 . A + x(B + 2A) + C + B + 2A = x^2 + 1$

$\Rightarrow \cancel{x^2} . A = \cancel{x^2} \quad \wedge \quad x \cdot (B + 2A) = 0 . x \quad \wedge \quad C + B + 2A = 1$

$A = 1 \qquad B + 2.1 = 0 \qquad C \cancel{-2} + \cancel{2.1} = 1$

$B = -2 \qquad C = 1$

$y_P = Ax^2 + Bx + C = x^2 - 2x + 1 = t^2 - 2t + 1$

$\Rightarrow y_G = y_P + y_h = t^2 - 2t + 1 + C_1 . e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} t} + \overline{C_1} . e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} t}$

[redacted]

2/4

$$\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y_G = t^2 - 2t + 1 + C_1 \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} t} + C_2\, e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} t}$$

$$C_2 = \overline{C_1}$$

$y(0) = -2$

$$y(0) = \cancel{0^2 - 2\cdot 0} + 1 + C_1 + C_2 = -2$$

$$C_1 = -2 - C_2 - 1$$

$$C_1 = -3 - C_2$$

$y'(0) = 0$

$$y'_G = 2t - 2 + 0 + C_1 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot e^{\dots t} + C_2 \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot e^{\dots t}$$

$$y'(0) = -2 + C_1 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$-2 + (-3 - C_2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 0$$

$$-2 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i + \cancel{\frac{C_2}{2}} - \frac{C_2 \sqrt{3}}{2} i - \cancel{\frac{C_2}{2}} - \frac{C_2 \sqrt{3}}{2} i = 0$$

$$-\frac{\cancel{2}\, C_2 \sqrt{3} i}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$-C_2 \sqrt{3} i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} i$$

$$C_2 = \frac{-1}{2\sqrt{3} i} \cdot \frac{\sqrt{3} i}{\sqrt{3} i} - \frac{3}{2} \cancel{\frac{\sqrt{3} i}{\sqrt{3} i}}$$

$$C_2 = \frac{\cancel{-}\sqrt{3} i}{\cancel{-}2 \cdot 3} - \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} i - \frac{3}{2}$$

$$C_1 = -3 - \frac{\sqrt{3}}{6} i + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i \quad = C_1 = \overline{C_2}$$

$$y_G = t^2 - 2t + 1 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} t} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \cdot e^{-\frac{1-\sqrt{3}i}{2} t}$$

ESTARIA BUENO EXPRESARLO EN TERMINOS DE FUNCIONES REALES

[redacted]

2) $\mu(x,y) = x^{-n}\cdot y^{-n}$

Para ser exacta $\frac{d^2f}{dxy} = \frac{d^2f}{dyx}$

$$\frac{d}{dy}\left(\underset{①}{x^{-n+1}\cdot y^{-n+1}\cdot \frac{\cancel{xy}}{\cos^2(x+y^2)}} + x^{-n+1}\cdot y^{-n+2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\underset{②}{\frac{2x^{-n+1}\cdot y^{-n+2}}{\cos^2(x+y^2)}} + x^{-n+2}\cdot y^{-n+1}\right)$$

① $$\frac{x^{-n+1}\cdot(-n+1)\cdot y^{-n}\cos^2(x+y^2) + x^{-n+1}\cdot y^{-n+2}\cdot 2\cdot\cos(x+y^2)\cdot \operatorname{sen}(x+y^2)\cdot 2y}{\cos^3(x+y^2)} + x^{-n+1}\cdot(-n+2)\cdot y^{-n+1}$$

$$= \frac{x^{-n+1}\cdot(-n+1)\cdot y^{-n}\cdot\cos(x+y^2) + 4\cdot x^{-n+1}\cdot y^{-n+3}\cdot\operatorname{sen}(x+y^2) + x^{-n+1}\cdot(-n+2)\cdot y^{-n+1}\cdot\cos^3(x+y^2)}{\cos^3(x+y^2)}$$

② $$\frac{2\cdot(-n+1)\cdot x^{-n}\cdot y^{-n+2}\cdot\cos^2(x+y^2) + 2x^{-n+1}\cdot y^{-n+2}\cdot 2\cdot\cos(x+y^2)\operatorname{sen}(x+y^2)\cdot 1}{\cos^3(x+y^2)} + (-n+2)\cdot x^{-n+1}\cdot y^{-n+1}$$

$$= \frac{2\cdot(-n+1)\cdot x^{-n}\cdot y^{-n+2}\cdot\cos(x+y^2) + 4\cdot x^{-n+1}\cdot y^{-n+2}\cdot\operatorname{sen}(x+y^2) + (-n+2)\cdot x^{-n+1}\cdot y^{-n+1}\cdot\cos^3(x+y^2)}{\cos^3(x+y^2)}$$

$$F = \int \mu(x)\cdot\left(\frac{xy}{\cos^2(x+y^2)} + x\cdot y^2\right)dx$$

$$= \int \frac{x^{-n+1}\cdot y^{-n+1}}{\cos^2(x+y^2)}\,dx + \int x^{-n+1}\cdot y^{-n+2}\,dx$$

consigue $P\,dx + \underline{Q}\,dy = 0$

una vez que hallo F, derivo respecto a y. igualo a Q y comparo.

Pero igual no me sale

$$\int \frac{x^{-n+1}\cdot y^{-n+1}}{\cos^2(x+y^2)}$$

Intenté hacerlo de formas diferentes pero en algo me estoy confundiendo así que lo dejo acá.

3/4

3) $y''(x) - \frac{3}{x} y'(x) + \frac{4}{x^2} y(x) = x^3$

EN LAPIZ $y_1(x) = x^2$ es sol. (DEL HOMOGENEO)

Planteo $y(x) = y_1(x) \cdot \varphi(x) = x^2 \varphi(x)$ ok

$y'(x) = 2x \cdot \varphi(x) + x^2 \cdot \varphi'(x)$

$y''(x) = 2 \cdot \varphi(x) + 2x \cdot \varphi'(x) + 2x \cdot \varphi'(x) + x^2 \cdot \varphi''(x)$

Reemplazo en mi ecuación original

$2\varphi(x) + 4x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x) - \frac{3}{\cancel{x}} \cdot 2\cancel{x}\varphi(x) - \frac{3}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}}\varphi'(x) + \frac{4}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2} \varphi(x) = x^3$

$\varphi''(x) \cdot x^2 + \varphi'(x) \cdot (4x - 3x) + \cancel{\varphi(x) \cdot (\underbrace{2-6+4}_{0})} = x^3$

me queda $\varphi''(x) \cdot x^2 + \varphi'(x) \cdot x = x^3$

Propongo usar método de reducción de orden.

llamo $v(x) = \varphi'(x)$

Entonces me queda: $v'(x) \cdot x^2 + v(x) \cdot x = x^3$

divido cada término por x^2 y me queda

$v'(x) + v(x) \cdot x^{-1} = x^1$

FACTOR INTEGRANTE

Busco $\mu(x) \neq 0$ / $\underbrace{\mu(x) \cdot v'(x) + \mu(x) \cdot v(x) \cdot x^{-1}}_{(\mu(x) \cdot v(x))'} = \mu(x) \cdot x^1$

Por definición de derivadas se que $(\mu(x) \cdot v(x))' = \mu'(x) \cdot v(x) + \mu(x) \cdot v$

$\Rightarrow \cancel{\mu(x) \, v'(x)} + \mu(x) \, v(x) \cdot x^{-1} = \mu'(x) \cdot v(x) + \cancel{\mu(x) \, v'(x)}$

$\mu'(x) \cdot v\cancel{(x)} = \mu(x) \cdot v\cancel{(x)} \cdot x^{-1}$

$\mu'(x) = \mu(x) \cdot x^{-1}$

$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x) \cdot \frac{1}{x}$

$\int \frac{d\mu}{\mu(x)} = \int \frac{1}{x} \, dx$

$\ln|\mu(x)| = \ln|x|$

$\mu(x) = x$

[redacted]

yo había dicho que $(u(x) \cdot v(x))' = u(x) \cdot X$

$\Rightarrow$ como $u(x) = x$

$$(x \cdot v(x))' = x \cdot x$$

$$\int (x \cdot v(x))' \, dx = \int x^2 \, dx$$

$$x \cdot v(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

$$v(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$$

y como $v(x) = \varphi'(x)$

$$\int v(x) = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \cdot \ln|x| + k = \varphi(x).$$

Por ende, como $y(x) = y_1(x) \cdot \varphi(x)$

$$y(x) = \underbrace{x^2}_{y_1(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^3}{9} + c \cdot \ln|x| + k \right)}_{\varphi(x)}$$

Bienísimo

4/4

4) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 4x_2 \\ x_2' = -\alpha^2 x_1 - 2x_2 \end{cases}$ $\qquad \underline{\alpha > 0}$

A) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -\alpha^2 & -2 \end{pmatrix}$

Busco pol característico

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -\alpha^2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda).(-2-\lambda) - (-4).(-\alpha^2) =$$

$$= 4 + 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4\alpha^2$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 4\alpha^2$$

$a = 1 \quad b = 4 \quad c = 4 - 4\alpha^2$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(4-4\alpha^2)}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{\cancel{16} - \cancel{16} + 16\alpha^2}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16\alpha^2}}{2} \Big\langle \lambda$$

debería ser

$|4\alpha|$ (con módulo)

[illegible]

[illegible]

$$\lambda_1 = \frac{-4 + 4\alpha}{2} < 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \frac{-4 - 4\alpha}{2} < 0$$

$-4 + 4\alpha < 0 \qquad -4 - 4\alpha < 0$

$4\alpha < 4 \qquad -4\alpha < 4$

$\alpha < 1 \qquad \alpha > -1$

quiero que

$\lambda_{1,2} < 0$

para que se cumpla

lo que me pide

el enunciado.

-1 1

$\alpha \in (-1; 1)$ //

(EL ENUNCIADO NOS DECIA QUE $\alpha > 0$ ASI QUE $\alpha > -1$ "YA SUCEDE SOLO"

QUEDARIA $\alpha < 1$

B)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Busco pol. caract.

$$\chi_A = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda).(-2-\lambda) - (-4).(-4) =$$

$$= 4 + 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 16$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda - 12$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-12)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

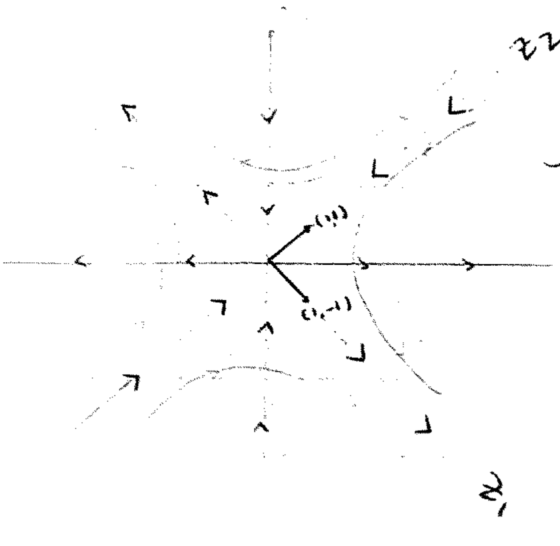
Autovalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -6$.

Busco autovectores.

$\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{array}\right)$ $\quad -4x - 4y = 0$, $\; -4x = 4y$, $\; -x = y$ $\qquad S_2 = \langle (1; -1) \rangle$

$\lambda_2 = -6$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$ $\quad 4x - 4y = 0$, $\; 4x = 4y$, $\; x = y$ $\qquad S_{-6} = \langle (1; 1) \rangle$

sol: $$\underbrace{c_1 . e^{2t}}_{z_1} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{c_2 . e^{-6t}}_{z_2} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



NO - ESTABLE

Si $c_1 = 0$, $z_2 = c_2 . e^{-6t}$
$z_2' = c_2 . e^{-6t} . (-6) < 0$

$c_2 = 0$, $z_1 = c_1 . e^{2t}$
$z_1' = c_1 . e^{2t} . 2 > 0$

$z_1 = c_1 . e^{2t}$, $z_2 = c_2 . e^{-6t}$

$$z_2 = \frac{c_2}{c_1} . c_1 . e^{-6t}$$

$$z_2 = \frac{c_2}{c_1^{-3}} . \underbrace{c_1^{-3} . (e^{2t})^{-3}}_{(z_1)^{-3}}$$

$$\boxed{z_2 = k . (z_1)^{-3}}$$