1-8

Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II

Primer cuatrimestre de 2012

Segundo parcial - 7 de Julio de 2012

1	2	3	4
B	B	B	B

CALIF.
A

Apellido: [redacted] Nombre: [redacted]

No. de documento: [redacted] L.U.: [redacted] Carrera: Física

Turno de práctica: ☐ Mañana ☒ Tarde ☐ Noche

---

1. La curva C es la intersección entre el cilindro y el plano dados a continuación:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}.$$

C está orientada de modo que en el punto (1,0,0) el vector tangente es $(0,0,1)$. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar con $\frac{\partial f}{\partial z} = z$, calcular:

$$\int_C f(x,y,z)dx + xydy + xzdz.$$

2. Encontrar una solución de:

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

3. Encontrar las soluciones de:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

y calcular su límite cuando $x \to +\infty$.

4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 5x - 4y \end{cases}$$

a) Encontrar todas las soluciones

b) Esbozar el diagrama de fases

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

[redacted]

1) $\int_C f(x,y,z)\,dx + xy\,dy + xz\,dz =$

$= \int_C \underbrace{(f(x\,y\,z);\ xy;\ xz)}_{F}\,dS$

$\text{rot } F = \left(x - x;\ -(z - z);\ y - \frac{df}{dy}\right) = \left(0;\ 0;\ y - \frac{df}{dy}\right)$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 \leq 1 \wedge x + y = 1\}$

$\Rightarrow$ Como D es una superficie suave y $\partial D = C$, una curva suave $\Rightarrow$ por teorema de Stokes

$\int_C (f(x,y,z), xy, xz)\,dS = \iint_D \left(0, 0, y - \frac{df}{dy}\right) dS$ orientaciones compatibles.

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, 1 - r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$

$r^2 = x^2 + z^2 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq r \leq 1$

$T_r = (\cos\theta, -\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$

$T_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta)$

$T_r \times T_\theta = (-r\cos^2\theta - r\,\text{sen}^2\theta, -(r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta), r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)$

$= (-r, -r, \overset{0}{\cancel{2r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}}) \Rightarrow$ Está bien orientada

$$\int_0\int_0^{2\pi} \left(0, 0, y \cdot \frac{df}{dy}\right) \cdot r\left(-1, -1, \overset{0}{\cancel{2\cos\theta\sin\theta}}\right) d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} 0 \, d\theta\, dr = \boxed{0 = \int_C f(x,y,z)\,dx + xy\,dy + xz\,dz}$$

B

[redacted]

2

2) $xy' + y = y^2$

$$x = \frac{y^2 - y}{y'} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{y'}{y^2 - y} = \cancel{\frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}}$$

$$\cancel{\frac{A(y-1) + B(y)}{y^2 - y}}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}\right)dy$$

$$A(y-1) + By = 1 \quad \forall y \overset{y=0}{\Rightarrow} -A = 1 \Rightarrow \underline{A = -1}$$

$$\overset{y=1}{\Rightarrow} \underline{B = 1}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + \ln|y-1| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = \pm(y-1)y^{-1}e^{c} \Rightarrow \pm e^{c} = k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{y}k = \left(1 - \frac{1}{y}\right)k \Rightarrow \frac{x}{k} - 1 = -\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \cancel{y(x)} \; \underline{y = \frac{1}{1 - \frac{x}{k}}} \Rightarrow y(1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = 2$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{k} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{k} \Rightarrow \underline{k = 2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \qquad \boxed{y(x) = \frac{1}{1 - x/2}}$$

[redacted]

3) $y'' + 4y' + 4y = e^{-3x}$ $\Rightarrow$ Resuelvo el homogéneo

$y'' + 4y' + 4y = 0$ $\Rightarrow$ Propongo $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}$ $\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ $\Rightarrow$ Reemplazo

$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0 = e^{\lambda x}(\lambda^2 + 4\lambda + 4)$

$\Rightarrow$ Como $e^{\lambda x} \neq 0 \ \forall \lambda x \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2$ $\Rightarrow$ raíz doble

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-2x}$ es solución del homogéneo asociado

$\Rightarrow$ Propongo $y_2 = x e^{-2x}$ por tener raíz doble

$y_2' = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$ $\quad y_2'' = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$

$\Rightarrow \cancel{-4e^{-2x}} + 4xe^{-2x} + \cancel{4e^{-2x}} - 8xe^{-2x} + 4xe^{-2x} = 0$ $\Rightarrow$ Verifica

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ son todas las soluciones del homogéneo asociado

$\Rightarrow$ Para la particular, propongo $y_p = c e^{-3x}$

$\Rightarrow y_p' = -3c e^{-3x}$ $\quad y_p'' = +9c e^{-3x}$

$\Rightarrow 9c\cancel{e^{-3x}} - 12c\cancel{e^{-3x}} + 4c\cancel{e^{-3x}} = \cancel{e^{-3x}}\ 1$

$\Rightarrow 1c = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 1}} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + e^{-3x}$

= solución del sistema

$\Rightarrow y(0) = 0 = C_1 + \cancel{C_2 \cdot 0} + 1 \Rightarrow C_1 = -1$

$y'(0) = -1 = \left(-e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + e^{-3x}\right)'\Big|_0 =$

$= \left(2e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} - 3e^{-3x}\right)\Big|_0 = -1 =$

$= 2 + C_2 - 3 = -1 \Leftrightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow$ La solució és $\boxed{y(x) = -e^{-2x} + e^{-3x}}$ B

$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-2x} + e^{-3x}\right) = \boxed{0 = \lim_{x\to\infty} y(x)}$

B

4

4) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 5x - 4y \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}' = A\,\underline{X}$$

$\Rightarrow$ Busco desacoplar la matriz para resolver más fácil, para eso busco autovectores

$\Rightarrow A\underline{x} = \lambda\underline{x} \Leftrightarrow (A - I\lambda)\underline{x} = 0 \Rightarrow$ Pido q' se anule el determinante de este sistema.

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 5 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-4-\lambda) - 5 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = -2 \pm 3 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \overset{\text{elijo}}{\Rightarrow} (1 \;\; 1)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -5x = y \overset{\text{elijo}}{\Rightarrow} (-5 \;\; 1)$$

$5a + b = 0 \Rightarrow b = -5a \quad \langle (1, -5) \rangle$

$\Rightarrow$ Todas las soluciones del sistema serán ~~combinación lineal~~

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5x}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

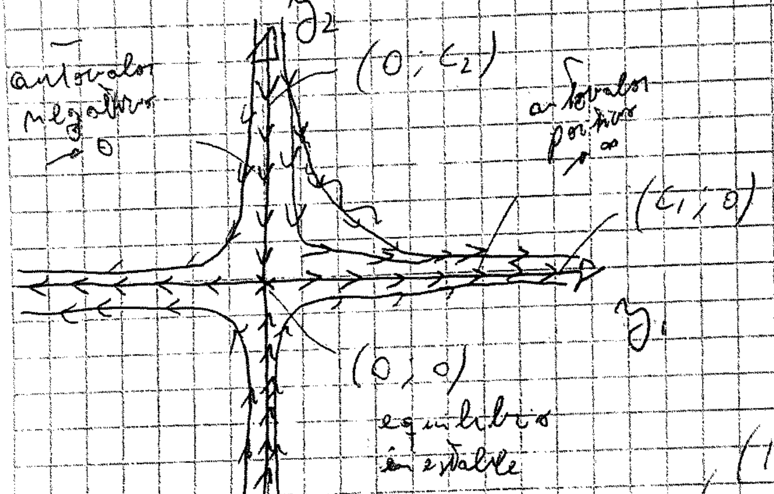
⇒ Para el diagrama cambio a la base de autovalores $B = \{(1,1);(-5,1)\}$

⇒ $\bar{X}_B = c_1 e^{x} + c_2 e^{-5x}$

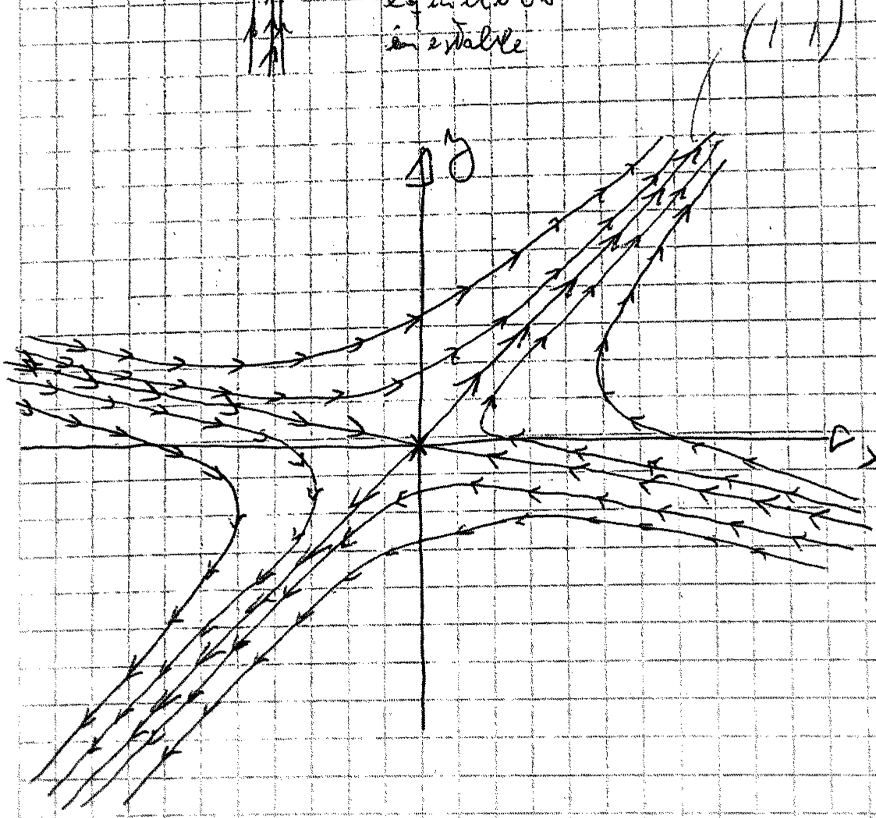
$y_1 = c_1 e^{x} \Rightarrow \frac{y_1}{c_1} = e^{x}$

$y_2 = c_2 e^{-5x} = c_2 (e^{x})^{-5}$

⇒ $y_2 = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{-5} = \frac{c_2 c_1^5}{y_1^5} = y_2$ ⇒ Las soluciones son hipérbolas para $c_1, y_1 \neq 0$, c_2, y_2



Tengo q' ⇒ volver a x, y



B