1	2	3	4

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: CARRERA:

NO. DE LIBRETA: EMAIL:

ANÁLISIS II-ANÁLISIS MATEMÁTICO II-MATEMÁTICA 3-ANÁLISIS II(LCD)
SEGUNDO PARCIAL (06/07/2022)

Ejercicio 1. (2 puntos) Hallar todas las soluciones de

$$y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = \cos(x)$$

tales que $|y(x)| \leq C$ para $x \geq 0$.

Resolución. Para comenzar, resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 0. \tag{1}$$

Dado que el polinomio característico de (1) es $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$ tenemos que las soluciones de (1) son de la forma $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$ para $c_1.c_2 \in \mathbb{R}$. Procedemos a encontrar una solución para particular de

$$y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = \cos(x). \tag{2}$$

Proponemos una solución de la forma $y_P = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{4x}$. Por el método de variación de las constantes, sabemos que

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

donde $Q = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{4x} \\ -e^{-x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}$. Dado que

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} 4e^{4x} & -e^{4x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} = \frac{1}{5e^{3x}} \begin{pmatrix} 4e^{4x} & -e^{4x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix},$$

se sigue que

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{5e^{3x}} \begin{pmatrix} 4e^{4x} & -e^{4x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}e^{x}\cos(x) \\ \frac{1}{5}e^{4x}\cos(x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Para calcular c_1, c_2, resolvemos las siguientes primitivas por el método de integración por partes. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx &= e^x \sin(x) - \left(-e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)dx\right) \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)dx + c, \end{aligned}$$

de donde

$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + c. \tag{4}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\int e^{-4x}\cos(x)dx &= e^{-4x}\sin(x) - \int (-4)e^{-4x}\sin(x)dx\\ &= e^{-4x}\sin(x) + 4\left(-e^{-4x}\cos(x) - \int (-4)e^{-4x}(-\cos(x))\right)\\ &= e^{-4x}\sin(x) - 4e^{-4x}\cos(x) - 16\int e^{-4x}\cos(x)dx + c,\end{aligned}$$

de donde

$$\int e^{-4x}\cos(x) = \frac{1}{17}e^{-4x}(\sin(x) - 4\cos(x)) + c. \tag{5}$$

De (3), (4) y (5) concluimos que podemos tomar $c_1(x) = \frac{1}{10}e^{x}(\sin(x)+\cos(x))$, $c_2(x) = \frac{1}{85}e^{-4x}(\sin(x)-4\cos(x))$, y resulta que

$$y_P = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{4x} = \frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x)) + \frac{1}{85}(\sin(x) - 4\cos(x))$$

es una solución particular de (2).

Dado que todas las soluciones de (2) son suma de una solución del homogéneo (1) y una solución particular fija de (2), concluimos que

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} + \frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x)) + \frac{1}{85}(\sin(x) - 4\cos(x)),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Resta determinar las soluciones y de (2) que cumplen que existe $C > 0$ tal que $|y(x)| \leq C$ para $x \geq 0$. Dado que toda tal solución tiene la forma de (6) para algún $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, si $c_2 \neq 0$ el término c_2e^{4x} tiende a $\pm\infty$ cuando $x \to +\infty$, mientras que $\lim_{x\to+\infty} c_1e^{-x} = 0$, y $\frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x)) + \frac{1}{85}(\sin(x) - 4\cos(x))$ es una función acotada. En consecuencia, si $c_2 \neq 0$ tenemos que $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\infty$. Concluimos que $c_2 = 0$, y por lo tanto

$$y = c_1e^{-x} + \frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x)) + \frac{1}{85}(\sin(x) - 4\cos(x)). \tag{7}$$

Usando de nuevo que $\lim_{x\to+\infty} c_1e^{-x} = 0$ y que $\frac{1}{10}(\sin(x) + \cos(x)) + \frac{1}{85}(\sin(x) - 4\cos(x))$ es una función acotada cumplimos que todas las soluciones de (2) para las cuales existe $C > 0$ tal que $|y(x)| \leq C$ para todo $x \geq 0$ son de la forma (7). □

Ejercicio 2. (3 puntos) Dado $\mu \neq 0$ consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \mu(x^2 - 1)y \end{cases}.$$

Para cada valor de $\mu \neq 0$ hallar los puntos de equilibrio del sistema, analizar su estabilidad y esbozar el diagrama de fases cerca de cada uno.

Resolución. Primero hallamos los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \mu(x^2 - 1)y \end{cases}. \tag{8}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x - \mu(x^2 - 1)y = 0 \end{cases}.$$

De la primera ecuación se sigue que $y = 0$. Reemplazando en la segunda ecuación queda que $-x = 0$, y por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio. Para analizar la estabilidad y los diagramas de fases de (8) consideramos el diferencial del campo vectorial suave $F(x, y) = (y, -x - \mu(x^2 - 1))$. Resulta que

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x\mu y & -\mu(x^2 - 1) \end{pmatrix},$$

y en consecuencia

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Dado que el polinomio característico de $DF(0, 0)$ es

$$p_\mu(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - \mu) + 1 = \lambda^2 - \mu\lambda + 1,$$

resultan que los autovalores de (9) son

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}. \tag{10}$$

Notemos que si $|\mu| < 2$ y $\mu \neq 0$ entonces (10) nos dice que los autovalores de (9) son números complejos con parte real no nula. Por otro lado, si $|\mu| \geq 2$, si ocurriera que $\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4} = 0$, deberíamos tener la identidad $\mu = \pm\sqrt{\mu^2 - 4}$, que es equivalente a que $\mu = \mu^2 - 4$, que es absurda. En consecuencia, para todo $\mu \neq 0$ se tiene que $DF(0, 0)$ posee autolvalores con parte real nula. Entonces podemos aplicar el teorema de linealización para concluir que el sistema (8) se comporta de manera similar en un entorno adecuado del punto de equilibrio $(0, 0)$ al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = DF(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{11}$$

De (10) tenemos los siguientes casos.

- $|\mu| < 2$ y $\mu \neq 0$. En este caso $\mu^2 - 4 < 0$, y por lo tanto los autovalores de $DF(0, 0)$ son números complejos con parte real $\frac{\mu}{2}$. En consecuencia, si $\mu > 0$ los autovalores tienen parte real positiva, y en consecuencia el punto de equilibrio es inestable, mientras que si $\mu < 0$ los autovalores tienen parte real negativa, y en consecuencia el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Las soluciones en este caso tienen la forma

$$X(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))v_1 + e^{\alpha t}(-c_1 \mathrm{sen}(\beta t) + c_2 \cos(\beta t))v_2 = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2.$$

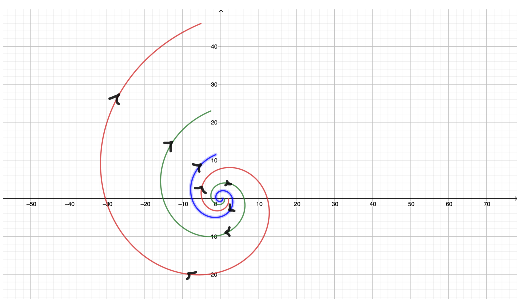


Figura 1: Diagrama de fases aproximado para $0 < \mu < 2$. Se consideraron v_1, v_2 como los ejes coordenados.

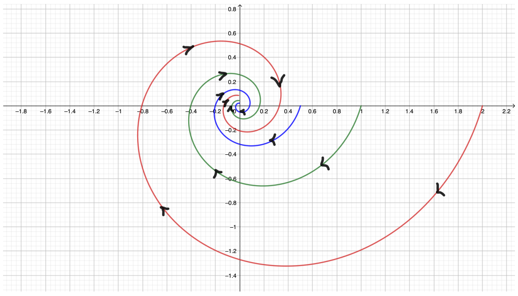


Figura 2: Diagrama de fases aproximado para $-2 < \mu < 0$. Se consideraron v_1, v_2 como los ejes coordenados.

- $\mu = \pm 2$. En este caso $\mu^2 - 4 = 0$, y por lo tanto el único autovalor de $DF(0,0)$ es $\lambda = \frac{\mu}{2} = \pm 1$. En consecuencia, si $\mu = 2$ queda 1 como único autovalor positivo y el $(0,0)$ resulta un punto de equilibrio inestable, mientras que si $\mu = -2$ queda -1 como único autovalor negativo y el $(0,0)$ resulta un punto de equilibrio asintóticamente estable. Dado que para estos valores de μ queda que

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pm 2 \end{pmatrix},$$

que no es un múltiplo de la identidad, concluimos que para $\mu = \pm 2$ $DF(0,0)$ no es diagonalizable. Las soluciones en este caso tienen la forma

$$X(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2 = y_1(t) v_1 + y_2(t) v_2.$$

Esto conduce a los siguientes diagramas de fases aproximados.

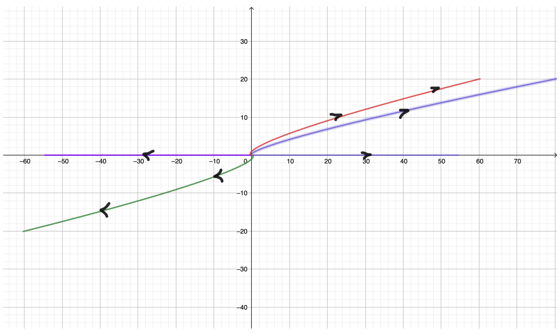


Figura 3: Diagrama de fases aproximado para $\mu = 2$.

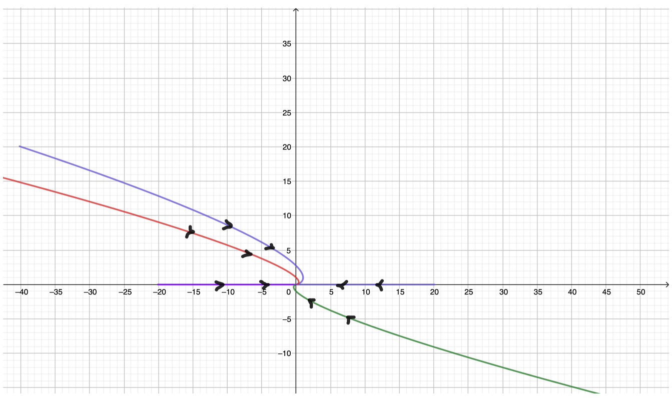


Figura 4: Diagrama de fases aproximado para $\mu = -2$.

- $|\mu| \geq 2$. En este caso, dado que $\mu^2 > \mu^2 - 4$, resulta que $|\mu| < \sqrt{\mu^2 - 4}$. Por lo tanto, si $\mu > 2$, $\mu - \sqrt{\mu^2 - 4} > 0$, y como $\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} > 0$ por ser suma de números reales positivos, se sigue que los autovalores (10) son números reales positivos distintos. Similarmente, si $\mu < -2$, $-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} < 0$ y como $\mu - \sqrt{\mu^2 - 4} < 0$ por ser resta de números reales negativos, se sigue que los autovalores (10) son números reales negativos distintos. En consecuencia, para $\mu > 2$ el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable y para $\mu < -2$ el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Las soluciones en este caso tienen la forma

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = y_1(t) v_1 + y_2(t) v_2,$$

con $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ o $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ según corresponda.

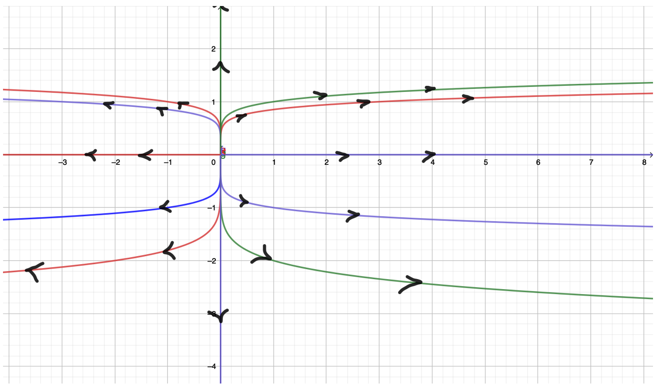


Figura 5: Diagrama de fases aproximado para $\mu > 2$.

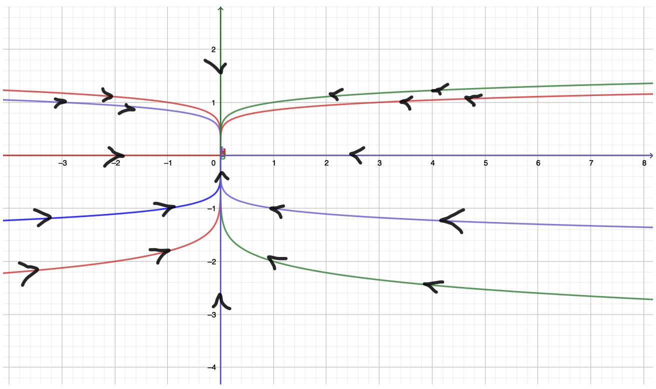


Figura 6: Diagrama de fases aproximado para $\mu < -2$.

□

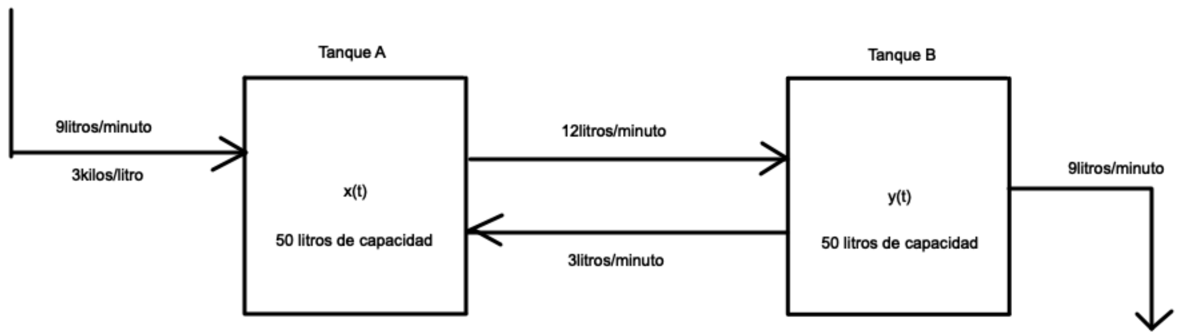
Ejercicio 3. (2 puntos) Dos tanques, cada uno con capacidad de 50 litros, se encuentran conectados entre si. En un momento, cuando los tanques están llenos de un líquido que contiene agua y sal, empieza a circular la sustancia del tanque A al tanque B a razón de 12 litros por minuto y del tanque B al A a razón de 3 litros por minuto. Al mismo tiempo, al tanque A le entra la misma sustancia a razón de 9 litros por minuto con una concentración de 3 kilogramos por cada litro, y del tanque B se desagota a razón de 9 litros por minuto. Los líquidos dentro de cada tanque se mantienen bien revueltos de modo que cada mezcla es homogénea. Si en el momento en el que comienza a circular el líquido, en el tanque A hay una concentración de sal de 2 kilogramos por litro, mientras que en el tanque B hay unca concentración de sal de 15 kilogramos por litro,

(a) Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales (no homogéneo) que modela la cantidad de sal en cada uno de los tanques.

(b) Dar las funciones que modelan la cantidad de sal que hay en cada tanque a cada instante.

(c) Después de mucho tiempo, ¿Cómo quedan las cantidades de sal en cada tanque?

Resolución. Para guiarnos, consideremos la siguiente ilustración del problema



Llamemos $x(t)$ e $y(t)$ a la cantidad de sal en el tiempo t en los tanques A y B, respectivamente. Por enunciado, tenemos que $x(0) = 2\frac{kg}{L} \cdot 50L = 100kg$ e $y(0) = 15\frac{kg}{L} \cdot 50L = 750kg$. Notemos que en el tanque A y en el tanque B el volumen es constantemente[1] 50. Entonces nos queda el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= -12\frac{x(t)}{50} + 3\frac{y(t)}{50} + 3 \cdot 9 \\ y'(t) &= 12\frac{x(t)}{50} - 12\frac{y(t)}{50} \end{cases}, \begin{cases} x(0) = 100 \\ y(0) = 750 \end{cases},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{25} & \frac{3}{50} \\ \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 750 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Para resolver el sistema (12) primero resolvemos el sistema homogéneo asociado

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{25} & \frac{3}{50} \\ \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{6}{25} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{6}{25} & \lambda + \frac{6}{25} \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{6}{25}\right)^2 - \frac{9}{625} = \left(\lambda + \frac{3}{25}\right)\left(\lambda + \frac{9}{25}\right),$$

tenemos que los autovalores asociados a (14) son $\lambda_1 = -\frac{3}{25}, \lambda_2 = -\frac{9}{25}$. Calculamos sus autovectores asociados. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{25} + \frac{6}{25} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{6}{25} & -\frac{3}{25} + \frac{6}{25} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix} v = 0,$$

por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado a λ_1. Similarmente,

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{25} + \frac{6}{25} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{6}{25} & -\frac{9}{25} + \frac{6}{25} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -\frac{3}{25} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{6}{25} & -\frac{3}{25} \end{pmatrix} v = 0,$$

por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado a λ_2. Concluimos que la solución general del sistema (14) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{3}{25}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{9}{25}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

[1] En el tanque A entran 9 litros por minuto desde una fuente no especificada, y 3 litros por minuto desde el tanque B. Por otro lado, del tanque A se pierden 12 litros por minuto. En consecuencia el balance es 0. Ocurre lo mismo con el tanque B.

Para resolver (12), buscamos una solución particular de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1(t)e^{-\frac{3}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2(t)e^{-\frac{9}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

con $c_1(t), c_2(t)$ satisfaciendo la relación

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $Q = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{25}t} & e^{-\frac{9}{25}t} \\ 2e^{-\frac{3}{25}t} & -2e^{-\frac{9}{25}t} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(Q)}\begin{pmatrix} -2e^{-\frac{9}{25}t} & -e^{-\frac{9}{25}t} \\ -2e^{-\frac{3}{25}t} & e^{-\frac{3}{25}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{e^{\frac{12}{25}t}}{4}\begin{pmatrix} -2e^{-\frac{9}{25}t} & -e^{-\frac{9}{25}t} \\ -2e^{-\frac{3}{25}t} & e^{-\frac{3}{25}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2}e^{\frac{3}{25}t} \\ \frac{27}{2}e^{\frac{9}{25}t} \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que

$$c_1(t) = \frac{27}{2}\frac{25}{3}e^{\frac{9}{25}t} = \frac{225}{2}e^{\frac{3}{25}t}, c_2(t) = \frac{27}{2}\frac{25}{9}e^{\frac{9}{25}t} = \frac{75}{2}e^{\frac{9}{25}t},$$

y

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{225}{2}e^{\frac{3}{25}t}e^{-\frac{3}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{75}{2}e^{\frac{9}{25}t}e^{-\frac{9}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{225}{2} \\ 225 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{75}{2} \\ -75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}$$

es solución particular de (12). Por lo tanto la solución general de (12) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1e^{-\frac{3}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{-\frac{9}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Con los datos $x(0) = 100, y(0) = 750$ podemos calcular c_1, c_2. Evaluando en $t = 0$, tenemos que

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 150 \\ 2c_1 - 2c_2 + 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 750 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -50 \\ c_1 - c_2 = 300 \end{cases}.$$

Sumando ambas ecuaciones vemos que $c_1 = 125$, y por lo tanto $c_2 = -175$. En consecuencia, las cantidades de sal en el tiempo t en los tanques A y B vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 125e^{-\frac{3}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 175e^{-\frac{9}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125e^{-\frac{3}{25}t} - 175e^{-\frac{9}{25}t} + 150 \\ 250e^{-\frac{3}{25}t} + 350e^{-\frac{9}{25}t} + 150 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Dado que $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{3}{25}t} = \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{9}{25}t} = 0$, de (15) se sigue que cuando el tiempo transcurrido t es muy grande, la cantidad de sal en cada tanque se estabiliza en 150 kilogramos. □

Ejercicio 4. (3 puntos) Sea x la solución de

$$\begin{cases} x' = t^3x^2, \\ x(0) = \alpha. \end{cases} \quad (16)$$

Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que el intervalo maximal de sea distitno de $\mathbb{R}$.

Resolución. Notemos que la ecuación diferencial $x' = t^3x^2$ es a variables separadas. Siempre que $x \neq 0$ podemos despejar y obtener $\frac{x'}{x^2} = t^3$. Por lo tanto,

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)^2}dt = -\frac{1}{x(t)},$$

mientras que

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c, c \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia,

$$-\frac{1}{x(t)} = \frac{t^4}{4} + c,$$

que nos conduce a

$$x(t) = -\frac{1}{\frac{t^4}{4} + c}. \tag{17}$$

Tenemos que

$$x'(t) = \frac{1}{(\frac{t^4}{4} + c)^2}t^3 = \left(-\frac{1}{\frac{t^4}{4} + c}\right)^2 t^3 = x(t)t^2.$$

Por otro lado, si $\alpha \neq 0$, poniendo $t = 0$ en (17) y pidiendo que $x(0) = \alpha$, resulta que $x(0) = \alpha = -\frac{1}{c}$, es decir

$$c = -\frac{1}{\alpha}. \tag{18}$$

Combinando (17) y (18) obtenemos

$$x(t) = -\frac{1}{\frac{t^4}{4} - \frac{1}{\alpha}}.$$

que cumple (16) si $\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, $x \equiv 0$ es solución de (16). Puesto que $F(t, x) = t^3x^2$ es una función continua en t y Lipschitz en x (es un polinomio), el teorema de existencia y unicidad garantiza que

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\frac{t^4}{4} - \frac{1}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \tag{19}$$

es la única solución a (16).

Para finalizar, estudiemos el intervalo maximal para $x(t)$. Si $\alpha = 0$, $x \equiv 0$ tiene intervalo maximal $\mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$, de (19) tenemos que $x(t) = -\frac{1}{\frac{t^4}{4} - \frac{1}{\alpha}}$ tiene intervalo maximal $\mathbb{R}$ si el denominador nunca se anula, esto es, si la ecuación $\frac{t^4}{4} = \frac{1}{\alpha}$ no tiene solución, que ocurre si y sólo si $\alpha < 0$, pues en tal caso $0 \leq t^4 = -\frac{4}{\alpha} < 0$, que es claramente absurdo. En consecuencia, la solución x no tiene intervalo maximal $\mathbb{R}$ si y sólo si $\alpha > 0$. En este caso, $t^4 = \frac{4}{\alpha}$ ocurre para $t = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}}$, en consecuencia $x(t)$ tiene intervalo maximal $(-\sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}}, \sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}})$. Resumiendo,

$$x(t) \begin{cases} \text{tiene intervalo maximal } (-\sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}}, \sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}}) \text{ si } \alpha > 0 \\ \text{tiene intervalo maximal } \mathbb{R} \text{ en otro caso} \end{cases}.$$

□

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y escriba con claridad.