Resuelto

Muy buen parcial

9,50

538/14

NOMBRE Y NRO. LIBRETA: [redacted]

CARRERA: COMPUTACIÓN

PROFESOR DE LA PRACTICA: [redacted]

| 1 | 2 | 3 | 4 | Calif. |
|---|---|---|---|---|
| B\|B | B\|B | B | B\|B | A |

**Análisis II / Análisis Matemático II / Matemática 3**

**Segundo Parcial - 29 de Noviembre de 2014**

1. Sea $\left(y^2 + \frac{x}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{3}xy + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0.$
   (a) Hallar $n, m \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z}$ tales que $f(x,y) = \frac{x^n}{y^m}$ sea un factor integrante para la ecuacion diferencial.
   (b) Resolver la ecuación.

2. Dada la ecuación diferencial $y''(t) + 2(\alpha+1)y'(t) + \alpha^2 y(t) = 0$:
   (a) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que todas las soluciones de la ecuación sean periódicas.
   (b) Hallar un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $te^{-t/2}$ sea solución de la ecuación dada, y para tal valor de $\alpha$ hallar una solución tal que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

[redacted]

3. Hallar la solución general de la ecuación $xy''(x) - y'(x) + \frac{y(x)}{x} = -x$.
   *(Sugerencia: Verificar que $y_1(x) = x\ln(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada.)*

[redacted]

4. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1' = -1x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

y esbozar el diagrama de fases correspondiente.

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE SUS RESPUESTAS.

Recuerde que:

$$(\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{x\ln(x)} \quad \text{y} \quad (-\ln(x))^{-1})' = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$$

ORI 1/

[redacted]

1) $\underbrace{\left(y^2 + \frac{x}{y}\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{3}xy + \frac{x^2}{y^2}\right)}_{N} dy = 0$

a) $M_y = 2y - 1xy^{-2} = 2y - \frac{x}{y^2}$

$N_x = \frac{1}{3}y + \frac{2x}{y^2}$

$\neq$ no es exacta

así que multiplico por $\frac{x^n}{y^m}$ a la ecuación para transformarla en una EDO exacta

$$\left(x^n y^{2-m} + \frac{x^{n+1}}{y^{m+1}}\right)dx + \left(\frac{1}{3}x^{n+1}y^{1-m} + \frac{x^{2+n}}{y^{2+m}}\right)dy$$

$$\underbrace{\left(x^n y^{2-m} + x^{n+1}y^{-m-1}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{3}x^{n+1}y^{1-m} + x^{2+n}y^{-2-m}\right)}_{N}dy$$

$M_y = (2-m)x^n y^{1-m} + (-m-1)x^{n+1}y^{-m-2}$

$N_x = \frac{(n+1)}{3}x^n y^{1-m} + (2+n)x^{n+1}y^{-m-2}$

$\begin{cases} (2-m) = \frac{(n+1)}{3} & (1) \\ (-m-1) = (2+n) & (2) \end{cases}$ de (1) $6 - 3m = n+1$, $5 - 3m = n$ $\Rightarrow$ en (2) $(-m-1) = 2+5$

$2m = 8$

$\boxed{n = -7} \leftarrow \boxed{m = 4}$ ✓

compruebo

$M_y = -2x^{-7}y^{-3} + (-5)x^{-6}y^{-6}$

$N_x = -2x^{-7}y^{-3} + (-5)x^{-6}y^{-6}$

luego la EDO es exacta

2/5

b) $\underbrace{(x^{-7}y^{-2}+x^{-6}y^{-5})}_{M}dx+\underbrace{(\frac{1}{3}x^{-6}y^{-3}+x^{-5}y^{-6})}_{N}dy$

Busco $F$ tq $F_x=M$ y $F_y=N$

$F_x=x^{-7}y^{-2}+x^{-6}y^{-5}$

$F=\frac{x^{-6}}{-6}y^{-2}+\frac{x^{-5}}{-5}y^{-5}+f(y)$

$(-2).-\frac{x^{-6}}{6}y^{-3}-5\frac{x^{-5}}{-5}y^{-6}+f'(y)=\frac{1}{3}x^{-6}y^{-3}+x^{-5}y^{-6}$

$\cancel{\frac{1}{3}x^{-6}y^{-3}}+\cancel{x^{-5}y^{-6}}+f'(y)=\cancel{\frac{1}{3}x^{-6}y^{-3}}+\cancel{x^{-5}y^{-6}}$

$f'(y)=0$

$f(y)=C$

luego $F(xy)=-\frac{x^{-6}}{6}y^{-2}-\frac{x^{-5}}{5}y^{-5}+C$

$\boxed{\text{Rta: } F(xy)=C \iff C=-\frac{x^{-6}}{6}y^{-2}-\frac{x^{-5}}{5}y^{-5}}$ ✓

1,5

[redacted]

2) $y''(T) + 2(\alpha+1)y'(T) + \alpha^2 y(T) = 0$

a) $\lambda^2 + (2\alpha+2)\lambda + \alpha^2 = 0$

para que las soluciones de la ecuacion sean periodic tienen que ser sin y cos y para que eso pase tengo que conseguir autovalores imaginarios puros

$$\frac{-(2\alpha+2) \pm \sqrt{\cancel{4\alpha^2}+8\alpha+4-\cancel{4.1\alpha^2}}}{2.1} = \frac{(-2\alpha-2) \pm \sqrt{8\alpha+4}}{2}$$

en primer lugar $8\alpha+4<0$

$8\alpha<-4$

$\alpha<-\frac{1}{2}$

y $-2\alpha-2=0$

$\alpha=-1 \Rightarrow$ solo con $\alpha=-1$ se cumple

b) como la solucion tiene que ser $Te^{-T/2}$ entonces tengo que conseguir autovalor doble, en este caso el autovalo doble tiene que ser $-\frac{1}{2}$

$$= \frac{(-2\alpha-2) \pm \sqrt{8\alpha+4}}{2} = 0$$

$8\alpha+4=0 \Leftrightarrow 8\alpha=-4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-\frac{1}{2}}$

verifico

$\frac{-1\pm0}{2}$ $\nearrow -\frac{1}{2}$ $\searrow -\frac{1}{2}$

3/5

Con autovalores dobles la base de soluciones es
$\{e^{\lambda T}, Te^{\lambda T}\}$
entonces la sol es $\boxed{y(T) = c_1 e^{-\frac{1}{2}T} + c_2 T e^{-\frac{1}{2}T}}$ y me falta cumplir la condicion de $y(0)=1$ y $y'(0)=0$
y para eso tengo que usar que

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{cases}$$

en este caso

$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 e^0 + c_2 . 0 e^0 \\ y'(0) = 0 = c_1 (-\frac{1}{2}) e^0 + c_2 (e^0 + 0 . e^0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \\ 0 = -\frac{1}{2} c_1 + c_2 \end{cases}$$

como $c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$
luego la solucion final es

$$\boxed{y(T) = e^{-\frac{1}{2}T} + \frac{1}{2} T e^{-\frac{1}{2}T}}$$

✓

2\E

[redacted]

3) $x y''(x) - y'(x) + \frac{y(x)}{x} = -x$

$$y''(x) - \frac{y'(x)}{x} + \frac{y(x)}{x^2} = -1$$

verifico que $x\ln(x)$ es sol del homogeneo

$y(x) = x\ln(x)$

$y'(x) = \ln x + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1 + \ln x$

$y''(x) = 1/x$

reemplazo en $y''(x) - \underbrace{\frac{y'(x)}{x}}_{p(x)} + \underbrace{\frac{y(x)}{x^2}}_{q(x)} = 0$

$$1/x - \frac{1+\ln x}{x} + \frac{\cancel{x}\ln x}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1-1-\ln x+\ln x}{x} = \frac{0}{x} = 0$$

$y_1 = x\ln(x)$ es sol del homogeneo, ahora busco la otra solucion

$y_2 = v \cdot y_1$ donde $v = \int \frac{W}{y_1^2}\,dx$

$$W = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int -1/x\, dx} = e^{\int 1/x\, dx} = e^{\ln x} = x$$

luego $v = \int \frac{x}{(x\ln x)^2}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\ln x^2}\,dx = \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

$= (-\ln(x))^{-1} + c$

entonces $y_2 = (-\ln(x))^{-1} \cdot x\ln x = \boxed{-x}$ ✓

4/5

luego la sol del homogeneo es

$$\boxed{y(x) = c_1 x\ln x - c_2 x}$$

ahora busco las sols de $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = -1$

la sol del no homogeneo es de la forma $y = y_H + y_P$ por lo que tengo que buscar $y_P$ y lo voy a hacer usando variacion de constantes

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} c_1'x\ln x - c_2'x = 0 \\ c_1'(1+\ln x) + c_2'(-1) = -1 \end{cases}$$

$$I - (x)II \to c_1'(x\ln x) - c_1'(x + x\ln x) = x$$

$$c_1'(x\cancel{\ln x} - x - x\cancel{\ln x}) = x$$

$$c_1' = -1 \Rightarrow c_1 = -x + c$$

$$\left(\frac{1}{x\ln x} + \frac{1}{x}\right) I - II \to c_2'\left(\frac{-x}{x\ln x} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) + c_2'(1) = 1$$

$$c_2'\left(\frac{-1}{\ln x} \cancel{-1} + \cancel{1}\right) = 1$$

$$c_2'\left(-\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$

$$c_2' = -\ln x \to c_2 = -x\ln x + x$$

A

$$\ln x = x\ln x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} = x\ln x - x$$

luego la solucion final es

$$\boxed{y(x) = (-x)x\cancel{\ln x} + (x\cancel{\ln x} - x)x + c_1 x\ln x - c_2 x}$$

[redacted]

4) $\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 2x_2 \end{cases} \leadsto x' = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-2-\lambda) + 5$
$= 2\lambda + \lambda^2 + 5$

$P(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.5}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ ✓

$\underline{\lambda_1 = -1 + 2i}$

$(A - (-1+2i))\,\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ \cancel{5} & \cancel{-3-2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

descarto la ultima por ser LD

$(1-2i)y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1(1-2i) = y_2$

luego $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$ ✓

como tengo autovalores complejos $\xi_2$ es el conjugado

$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$

entonces $X_1 = c_1 e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$ y $X_2 = c_2 e^{(-1-2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$

S/S

En $\mathbb{C}$ $X_1$ y $X_2$ son base, luego puedo hacer una combinacion lineal compleja para formar una base de soluciones en $\mathbb{R}$ que va a tener la forma de

$X(T) = C_1 X_R + C_2 X_I$

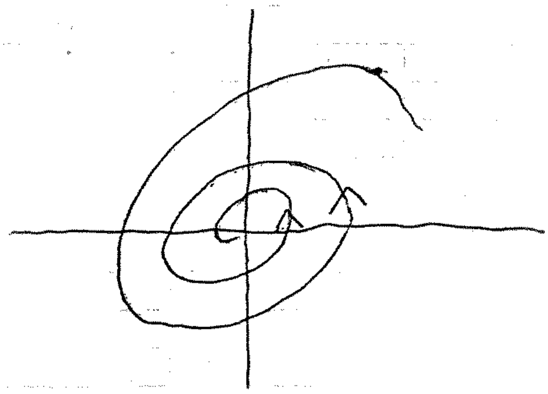
$e^{(-1+2i)T} = e^{-T}(\cos(2T) + i\,\text{sen}(2T))$

$X_R = e^{-T}\begin{bmatrix} \cos(2T) \\ -2\,\text{sen}(2T)+\cos(2T) \end{bmatrix}$ $X_I = e^{-T}\begin{bmatrix} \text{sen}(2T) \\ 2\cos(2T)+\text{sen}(2T) \end{bmatrix}$

$(\cos(2T)+i\,\text{sen}(2T))(1+2i) = \cos(2T) + 2i\cos(2T) + i\,\text{sen}(2T) + 2i^2\,\text{sen}(2T)$

luego $X(T) = C_1 e^{-T}\begin{bmatrix} \cos(2T) \\ -2\,\text{sen}(2T)+\cos(2T) \end{bmatrix} + C_2 e^{-T}\begin{bmatrix} \text{sen}(2T) \\ 2\cos(2T)+\text{sen}(2t) \end{bmatrix}$ ✓

para el diagrama de fases como tengo autovalores complejos con la parte real menor a cero tiene la sig forma



✓

me falta ver la orientacion

$X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\uparrow$