Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II
Curso de Verano de 2015
Segundo Parcial (12/03/2015)

1	2	3	4
B	B	B⁻	B

CALIF.
A

Apellido: Nombre:

No. de documento: L.U.: Carrera: QUÍMICA

1. Encontrar TODAS las soluciones de la ecuación

$$y' + 2xy = 2x^3$$

2. Considerar la ecuación

$$(5x^2y + 6x^3y^2 + 4xy^2)dx + (2x^3 + 3x^4y + 3x^2y)dy = 0.$$

Probar que la ecuación no es exacta. Resolverla observando que al multiplicarla por $x^m y^n$ para ciertos valores de m y n, se vuelve exacta.

✓ 3. Considerar la ecuación $y'' + \alpha y' + y = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Encontrar todos los valores de α que hacen que todas las soluciones de la ecuación tengan infinitas raíces. ¿Existe algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que haga que todas las soluciones de la ecuación sean funciones acotadas?

   b) Elegir uno de los valores de α del punto anterior y resolver el problema

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

✓ 4. Considerar el sistema

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} X(t) \\ \\ X(0) = P \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Determinar todos los valores de $P \in \mathbb{R}^2$ tales la solución está contenida completamente en el primer cuadrante.

Sugerencia: Encontrar todas las soluciones del sistema y esbozar el diagrama de fases.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

1) $y' + 2xy = 2x^3$

Es del tipo $y' + P(x)y = q(x)$

Uso factor integrante μ

$\mu(y' + Py) = \mu q$ $\quad\quad \mu y' + \mu P y = (\mu y)' = \mu' y + \cancel{\mu y'}$

$\mu y' + \mu P y = \mu q \quad \Rightarrow \quad \cancel{\mu y'} + \mu P y = (\mu y)' = \mu' y + \cancel{\mu y'}$

$\mu' \cancel{y} = \mu P \cancel{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mu'}{\mu} = \int P(x)dx$

$\ln(|\mu|) = \int P(x)dx \Rightarrow \mu = e^{\int P(x)dx}$

$P = 2x \quad\quad q = 2x^3$

$\mu = e^{2\int x dx} = e^{x^2}$

Pero $(\mu y)' = \mu q \Rightarrow \int (\mu y)' = \int \mu q$

$\mu y = \int \mu q \Rightarrow$

$y e^{x^2} = 2\int x^3 e^{x^2} dx$

llamo $y = x^2$

$dy = 2x$

$2\left(\frac{1}{2}\int 2x \cdot x^2 e^{x^2} dx\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \int y e^y dy$

$u = y \quad u' = 1$

$v = e^y \quad v' = e^y$

$2\left(\frac{1}{2}\left(ye^y - \int e^y dy\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y\right)$

volviendo a $y = x^2$

$2\left(\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1)\right)$

derivando: $xe^{x^2} + x^2e^{x^2} - xe^{x^2} = x^3e^{x^2}$

$y(x) \cdot e^{x^2} = 2\left(\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)\right) \Rightarrow y(x) = x^2 - 1 \rightarrow$ esta es la solución particular ✓

Para la solución homogénea

$y' + 2xy = 0 \Rightarrow y' = -2xy$

$$\int \frac{y'}{y} = -\int 2x \Rightarrow \ln(|y|) = -x^2 + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln y} = e^{-x^2+k} = ce^{-x^2} \Rightarrow y(x) = ce^{-x^2}$$

Finalmente: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

$$y(x) = ce^{-x^2} + x^2 - 1$$

Pruebo con $c=0 \Rightarrow y = x^2 - 1$

$y' = 2x$

$2x + 2x(x^2-1) = 2x^3 \Rightarrow 2x + 2x^3 - 2x = 2x^3 \quad 2x^3 = 2x^3$

Pruebo con $c=1$ (más arriesgado):

$y = e^{-x^2} + x^2 - 1$

$y' = -2xe^{-x^2} + 2x \Rightarrow$

$$-2xe^{-x^2} + 2x + 2x(e^{-x^2} + x^2 - 1) = 2x^3$$

$$\cancel{-2xe^{-x^2}} + \cancel{2x} + \cancel{2xe^{-x^2}} + 2x^3 \cancel{-2x} = 2x^3$$

$$2x^3 = 2x^3$$

NOTA

2) $\underbrace{(5x^2y+6x^3y^2+4xy^2)}_{P}dx+\underbrace{(2x^3+3x^4y+3x^2y)}_{Q}dy=0$

$Q_x=6x^2+12yx^3+6xy$

$P_y=5x^2+12x^3y+8xy$

$Q_x\neq P_y \Rightarrow$ la ecuación no es exacta.
multiplico por un factor integrante de la forma $x^m y^n$

$x^m y^n(5x^2y+6x^3y^2+4xy^2)dx+x^m y^n(2x^3+3x^4y+3x^2y)\,dy=0$

$\underbrace{(5x^{m+2}y^{n+1}+6x^{m+3}y^{n+2}+4x^{m+1}y^{n+2})}_{P}dx+\underbrace{(2x^{m+3}y^n+3x^{m+4}y^{n+1}+3x^{m+2}y^{n+1})}_{Q}dy=0$

Derivo nuevamente:

$Q_x=2.(m+3)x^{m+2}.y^n+3(m+4)x^{m+3}y^{n+1}+3(m+2)x^{m+1}y^{n+1}$

$P_y=5(n+1)x^{m+2}y^n+6(n+2)x^{m+3}y^{n+1}+4(n+2)x^{m+1}y^{n+1}$

Para que sea exacta, debe ser que $Q_x=P_y$

$2mx^{m+2}y^n+6x^{m+2}y^n+3mx^{m+3}y^{n+1}+12x^{m+3}y^{n+1}+3mx^{m+1}y^{n+1}+6x^{m+1}y^{n+1}$

$=5nx^{m+2}y^{n+1}+10x^{m+2}y^{n+1}+6nx^{m+3}y^{n+1}+12x^{m+3}y^{n+1}+4nx^{m+1}y^{n+1}+8x^{m+1}y^{n+1}$

"por suerte", todos los exponentes para x e y coinciden término a término, solo queda igualar sus coeficientes:

$2(m+3)=5(n+1) \Rightarrow 2m+6=5n+5$

$3(m+4)=6(n+2) \Rightarrow 3m+\cancel{12}=6n+\cancel{12} \Rightarrow m=2n$

$4n+6=5n+5$

$-n=-1$

$\boxed{n=1}$ $\boxed{m=2}$

que también satisfacen la otra posible ecuación

$3(m+2) = 4(n+2)$ correspondiente ~~a~~ a la función $x^{m+1} \cdot y^{n}$

$12 = 12$ ✓

$\mu = x^2 y$ multiplico la ecuación por μ

$$x^2y(5x^2y+6x^3y^2+4xy^2)dx + x^2y(2x^3+3x^4y+3x^2y)dy = 0$$

$$\underbrace{(5x^4y^2+6x^5y^3+4x^3y^3)}_{P}dx + \underbrace{(2x^5y+3x^6y^2+3x^4y^2)}_{Q}dy = 0$$

$Q_x = 10x^4y + 18x^5y^2 + 12x^3y^2$ ¡$Q_x = P_y$!

$P_y = 10x^4y + 18x^5y^2 + 12x^3y^2$

Elijo integrar con respecto a y

$$f(x,y) = \int (2x^5y + 3x^6y^2 + 3x^4y^2)\,dy = x^5y^2 + x^6y^3 + x^4y^3 + h(x)$$

derivando con respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y^2 + 6x^5y^3 + 4x^3y^3 + h'(x)$$

esto tiene que ser IGUAL a P ... $\Rightarrow$

$$5x^4y^2 + 6x^5y^3 + 4x^3y^3 + h'(x) = 5x^4y^2 + 6x^5y^3 + 4x^3y^3$$

$\Rightarrow h'(x) = 0$

$h(x) = C$ $\Rightarrow f(x,y) = x^5y^2 + x^6y^3 + x^4y^3 + C$

solución: $x^5y^2 + x^6y^3 + x^4y^3 = C$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y^2 + 6x^5y^3 + 4x^3y^3 = P$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^5y + 3x^6y^2 + 3x^4y^2 = Q$$

3) $y'' + \alpha y' + y = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Se quieren los valores de α / las soluciones de la ecuación tengan infinitos ceros, esto ocurre si las soluciones del homogéneo son números complejos → ¿por qué?

Polinomio característico

$d^2 + \alpha d + 1 = 0$

$\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$, tiene que ser que $\alpha^2 - 4 < 0$

¿y para que sean acotadas?

$\alpha^2 < 4$

$|\alpha| < 2$ $\quad \alpha \in (-2, 2)$.

Voy a elegir $\alpha = 0$ para resolver

$y'' + y = x^2$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 2$

Busco las soluciones del homogéneo.

$d^2 + 1 = 0$

$\frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

La base de soluciones es $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$

Busco una base de soluciones reales

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$

Las siguientes combinaciones lineales de la base también son solución

$$y_1(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad , \quad y_2(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$y_1(x) = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x - \cos x + i \operatorname{sen} x}{2i} = \operatorname{sen} x$$

$$y_2(x) = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x + \cos x - i \operatorname{sen} x}{2} = \cos x$$

Base de soluciones reales: $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$

solución particular

método de variación de las constantes

$y_1(x) = \operatorname{sen} x \qquad y_2(x) = \cos x$

$y_1'(x) = \cos x \qquad y_2'(x) = -\operatorname{sen} x$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{sen} x\, C_1' + \cos x\, C_2' = 0 \quad \Rightarrow \cos x\, C_2' = -\operatorname{sen} x\, C_1'$

$\cos x\, C_1' - \operatorname{sen} x\, C_2' = x^2 \qquad C_2' = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} C_1'$

$$\cos x\, C_1' - \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} C_1'\right) = x^2$$

$$C_1' \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} C_1' = x^2$$

$$C_1' \left(\cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\right) = x^2$$

$$\cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\frac{C_1'}{\cos x} = x^2$$

$$C_1' = x^2 \cos x$$

$$C_1 = \int x^2 \cos x \, dx$$

$$u = x^2 \quad du = 2x$$

$$v = \operatorname{sen} x \quad v' = \cos x$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v = -\cos x \quad v' = \operatorname{sen} x$$

$$x^2 \operatorname{sen} x - 2 \cdot \left(-x\cos x + \int \cos x \, dx\right)$$

$$x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx$$

$$x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x = C_1$$

$C_2' = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}} \cdot x^2 \cancel{\cos x}$

$C_2' = -\operatorname{sen} x \cdot x^2$

$C_2 = \left(-x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\right)$

$C_2 = -\int x^2 \operatorname{sen} x$

$u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v = -\cos x \qquad v' = \operatorname{sen} x$

$C_2 = x^2\cos x - 2\int x\cos x\,dx$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = \operatorname{sen} x \qquad v' = \cos x$

$C_2 = x^2\cos x - 2\left(x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right)$

$x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x = C_2.$

Finalmente,

$y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$y_p(x) = (x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x + (x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x - \cos x)\cos x =$

$x^2\operatorname{sen}^2 x + 2x\,\cancel{\operatorname{sen} x\cos x} - 2\operatorname{sen}^2 x + x^2\cos^2 x - \cancel{2x\operatorname{sen} x\cos x} - 2\cos^2 x$

$x^2\underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1} + (-2)\underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{2}$

$y_p(x) = x^2 - 2$ / $\longrightarrow$ era mucho más fácil proponer $y_p = Ax^2 + Bx + C \rightarrow$ / $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 0$

$\Downarrow$

sale que $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$

$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + x^2 - 2$

$y_{(x)} = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x^2 - 2$

$y'_{(x)} = c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x + 2x$

$y(0) = 1$

$y(0) = c_2 - 2 = 1 \Rightarrow c_2 = 3$

$y'(0) = 2$

$y'(0) = c_1 = 2$

$y(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + x^2 - 2$

$y' = 2\cos x - 3 \operatorname{sen} x + 2x$

$y'' = -2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x + 2$

$y'' + y = x^2$

$-2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x + 2 + 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + x^2 - 2 = x^2$

$y'(0) = 2\cos(0) - 3 \operatorname{sen}(0) + 2(0) = 2$

$y(0) = 2 \operatorname{sen}(0) + 3\cos(0) + 0^2 - 2 = 1.$

$y(0) = 1$
$y'(0) = 2$

Si $|\alpha| > 2$, todas las soluciones serán del tipo $c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$ con α_1, α_2 soluciones del polinomio característico.
Si $|\alpha| = 2$, las soluciones serán del tipo $c_1 e^{\alpha_0 x} + c_2 x e^{\alpha_0 x}$ con α_0 raíz doble. En ambos casos, al tener exponenciales, no son acotadas $\longrightarrow$

En el caso $\alpha \in (-2, 2)$, se vio que
la base de soluciones reales es $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$,
funciones acotadas $\forall x \in \mathbb{R}$ (entre -1 y 1).

NOTA

4) $X'(t) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} X(t)$

Busco autovalores y autovectores

$(A - \lambda I) =$

$$\begin{pmatrix} 13-\lambda & -8 \\ 8 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = (-7-\lambda)(13-\lambda) + 64$

$-91 + 7\lambda - 13\lambda + \lambda^2 + 64 =$

$\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-27)}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Autovectores

Para $\lambda_1 = 9$

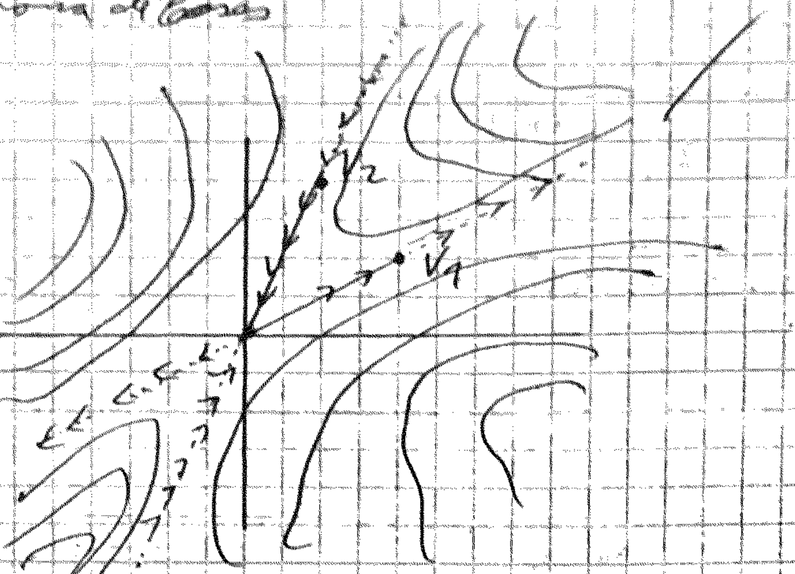
$$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = C_1 e^{9t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diagrama de fases



$$y_1 = c_1 e^{9t} \Rightarrow e^t = \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\frac{1}{9}}$$

$$y_2 = c_2 e^{-3t} \Rightarrow y_2 = \left[c_2\left(\frac{y_1}{c_1}\right)\right]^{-\frac{3}{9}} = K(y_1(t))^{-1/3}$$

como $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, las curvas son hipérbolas

El único punto crítico es el $(0,0)$ $\Rightarrow$ inestable (fuente)

$X(0) = P \in \mathbb{R}^2$ P tiene que estar entre los vectores $(1,2)$ y $(2,1)$, como $t=0$ X nunca va a ser negativa.

Hay que decir dónde tiene que estar y del punto (x, y)

La recta que genera el vector $(1,2)$ es $y(x) = 2x$ y la recta que genera el $(2,1)$ es $y(x) = \frac{1}{2}x$. Por lo tanto,

$P \in D$ con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ 2x \leq y \leq \frac{1}{2}x\}$.