Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3 - 1° cuatrimestre 2013
SEGUNDO PARCIAL - 6 DE JULIO

Nombre: [redacted] L. U.: [redacted] Turno: Tarde

Carrera: Cs de la Computación.

mc Si

1	2	3	4	Calificación
—	B	B | B	B | B	A

(1) Sea $F(x,y,z) = (e^{\sin y}, \frac{1}{(x^2+z^2+1)^3} + y, z+1)$. Calcular

$$\int_S F \cdot dS,$$

donde $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$ está orientada con la normal que tiene coordenada z mayor o igual a 0.

(2) Se sabe que la ecuación de primer orden

$$(5xy^2 - 2y)dx + (3x^2y - x)dy = 0,$$

admite un factor integrante de la forma $x^a y^b$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Determine a y b y resuelva la ecuación.

(3) Considere la ecuación homogénea de segundo orden

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0.$$

Se sabe que $y_1(x) = x$ es solución.

(a) Encuentre la solución general de la ecuación para $x > 0$

(b) Encuentre la solución general de la ecuación no homogénea

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = x, \text{ para } x > 0.$$

(4) Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$, donde

HACER

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}, \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema tenga una solución de la forma $\mathbf{X}_1(t) = e^{-t}\mathbf{u}$ y otra de la forma $\mathbf{X}_2(t) = e^{3t}\mathbf{v}$, con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vectores a determinar.

(b) Encontrar la solución general y realizar el diagrama de fases correspondiente.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

④ a) Para obtener las soluciones del enunciado, necesito que A tenga 2 autovalores: $\lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 3$ ✓

$\chi_A(t) = \det(t\,Id - A) = \det\begin{pmatrix} t-k & -2 \\ -2 & t-k \end{pmatrix} = \boxed{t^2 - 2tk + (k^2-4)}$

Al mismo tiempo, como $-1 \wedge 3$ son autovalores de A, $\chi_A(t) = (t+1)(t-3) = \boxed{t^2 - 2t - 3}$

Igualando coeficiente a coeficiente:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -2k = -2 \iff k = 1 \\ k^2 - 4 = -3 \iff k = \pm 1 \end{cases}$$

Luego, para que X_1 y X_2 sean solución del sistema, k debe ser 1.

Rta: $\boxed{k = 1}$

b) Con el resultado anterior, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene autovalores $\lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 3$. Voy a buscar los autovectores u, v asociados a λ_1, λ_2 respectivamente.

- $\lambda_1 = -1 \Rightarrow u: Nu(A + Id) = Nu\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ✓
- $\lambda_2 = 3 \Rightarrow v: Nu(A - 3Id) = Nu\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego, obtengo $X_1(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \wedge X_2(t) = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

Por lo tanto, la solución general es de la forma

$$\boxed{X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}}$$ ✓

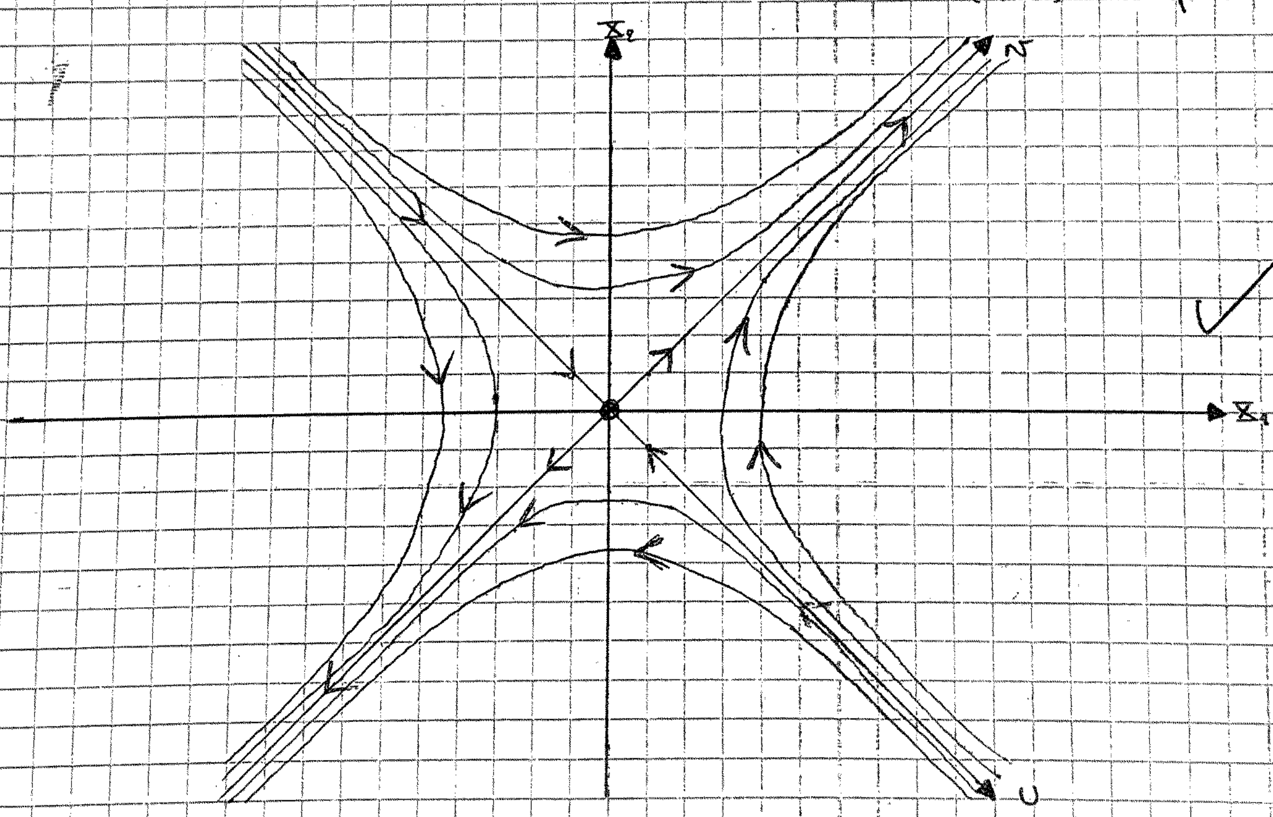
A continuación voy a estudiar el comportamiento de ~~los~~ las soluciones para esbozar el diagrama de fases.

- $c_2 = 0 \Rightarrow X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ → $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ permanece en la recta generada por el $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u$.
  - $\Rightarrow X(t)$ es invariante en u.
  - → $X(t) \xrightarrow{t \to -\infty}$ " $c_1 \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$ "
  - → $X(t) \xrightarrow{t \to +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Se acerca al $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a medida que pasa el tiempo.

- $c_1 = 0 \Rightarrow X(t) = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$ → $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ permanece en la recta generada por el $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v$
  - $\Rightarrow X(t)$ es invariante en v.
  - → $X(t) \xrightarrow{t \to -\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - → $X(t) \xrightarrow{t \to +\infty}$ " $c_2 \begin{pmatrix} +\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$ "

  Se aleja del $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a medida que pasa el tiempo.



[Las flechas negras indican la dirección de crecimiento
El (0,0) es solución, y ninguna trayectoria lo alcanza]

[redacted]

⑫ $$(5xy^2-2y)\,dx+(3x^2y-x)\,dy=0$$

Como la ecuación admite un factor integrante $x^a y^b$ con $a,b\in\mathbb{N}$, quiere decir que puedo encontrar a,b tales que

(*) $$x^a y^b(5xy^2-2y)\,dx+x^a y^b(3x^2y-x)\,dy=0$$

es una ecuación exacta.

Sean $M=x^a y^b(5xy^2-2y)=5x^{a+1}y^{b+2}-2x^a y^{b+1}$ $\wedge$

$N=x^a y^b(3x^2y-x)=3x^{a+2}y^{b+1}-x^{a+1}y^b$

La ecuación (*) es exacta $\Leftrightarrow M_y=N_x$.

$M_y=5(b+2)x^{a+1}y^{b+1}-2(b+1)x^a y^b=x^a y^b(5bxy+10xy-2b-2)$

$N_x=3(a+2)x^{a+1}y^{b+1}-(a+1)x^a y^b=x^a y^b(3axy+6xy-a-1)$.

$M_y=N_x \Leftrightarrow x^a y^b(5bxy+10xy-2b-2)=x^a y^b(3axy+6xy-a-1)$.

Igualando coeficiente a coeficiente,

$$\begin{cases} 5b+10=3a+6 \Leftrightarrow 5b+10=6b+9 \Leftrightarrow \underline{1=b} \\ -2b-2=-a-1 \Leftrightarrow 2b+2=a+1 \Leftrightarrow 2b+1=a \Leftrightarrow a=3. \end{cases}$$ ✓

Reemplazo en $M_y \wedge N_x$:

$M_y=x^3y(5xy+10xy-2-2)=15x^4y^2-4x^3y$

$N_x=x^3y(9xy+6xy-3-1)=15x^4y^2-4x^3y$.

$\Rightarrow$ ¡¡Son iguales!! Por lo tanto, existe $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ /

$F_x=M \wedge F_y=N$

$M=x^3y(5xy^2-2y)=5x^4y^3-2x^3y^2$

$N=x^3y(3x^2y-x)=3x^5y^2-x^4y$

$F_x=M=5x^4y^3-2x^3y^2 \Rightarrow F=x^5y^3-\frac{1}{2}x^4y^2+c(y)$

$\Rightarrow F_y=3x^5y^2-x^4y+c'(y)\overset{?}{=}N$

Si tomo $c'(y)=0$, $F_y=3x^5y^2-x^4y=N \Rightarrow c(y)=k\in\mathbb{R}$. Como necesito un valor, tomo $k=0$.

Luego, la EDO queda reducida a: ✓

(CeR)

Rta: $\boxed{x^5 y^3 - \frac{1}{2} x^4 y^2 = c}$

③ b) La solución general para la ecuación no homogénea viene dada por $y = y_H + y_P$, con y_H la solución de la ecuación homogénea e y_P una solución particular. y_H es la obtenida en el inciso (a). Falta nada más obtener la solución particular.

x^2 parece un buen candidato a y_P.

$\Rightarrow y_P = x^2, \quad y_P' = 2x, \quad y_P'' = 2.$

$\Rightarrow y_P'' - \frac{x+2}{x} y_P' + \frac{x+2}{x^2} y_P = 2 - \frac{x+2}{\cancel{x}} 2\cancel{x} + \frac{x+2}{\cancel{x^2}} \cancel{x^2} = -x \neq x.$

$y_P = x^2$ no es solución particular, pero sólo difiere en signo. Voy a intentar con $y_P = -x^2$

$\Rightarrow y_P'' - \frac{x+2}{x} y_P' + \frac{x+2}{x^2} y_P = -2 - \frac{x+2}{x}(-2x) + \frac{x+2}{x^2}(-x^2) =$

$= -2 + 2\frac{x+2}{\cancel{x}} \cancel{x} - \frac{x+2}{\cancel{x^2}} \cancel{x^2} = x$

Luego, $y_P = -x^2$ es una solución particular $\forall x > 0$.

Rta: $\boxed{y = y_H - x^2}$ ✓

a) Tengo como solución $y_1 = x$. Propongo $y_2 = y_1 \cdot g(x) = x \cdot g(x)$.

$y_2' = g + xg', \quad y_2'' = g' + g' + xg'' = 2g' + xg''$ → Reemplazo:

$\cancel{2g' + xg'' - \frac{x+2}{x} g - g'(x+2) + \frac{x+2}{x^2} gx = 2g' + xg'' - \frac{x+2}{x} g - g'x +}$

$\cancel{2g' - \frac{x+2}{x} g = xg'' - g'x = 0}$ ~~→ a variables separadas~~

$\cancel{xg'' - g'x = 0 \Leftrightarrow xg'' = g'x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{g''}{g'} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dg'}{g'} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow}$

$\cancel{\ln g' = \ln x \Leftrightarrow g' = x + c \Leftrightarrow g = \frac{c}{2} x^2.}$

$$2g' + xg'' - \frac{x+2}{x}g - \frac{x+2}{\cancel{x}}g'\cancel{x} + \frac{x+2}{x^{\cancel{2}}}\cancel{x}g =$$

$$= \cancel{2g'} + xg'' - \cancel{\frac{x+2}{x}g} - g'x - \cancel{2g'} + \cancel{\frac{x+2}{x}g} = xg'' - g'x = 0$$

$$\Rightarrow xg'' - g'x = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g'' - g' = 0 \Leftrightarrow g'' = g' \overset{\text{VAR SEP}}{\Leftrightarrow} g' = e^x + c.$$

Como necesito alguna, tomo $c = 0 \Rightarrow g = e^x + c$.

Luego $y_2 = xe^x + cx$ ¿Funcionará?

$y_2' = e^x + xe^x + c$, $y_2'' = 2e^x + xe^x$.

$$\Rightarrow 2e^x + xe^x + \cancel{\frac{x+2}{x}e^x} - \frac{x+2}{\cancel{x}}\cancel{x}e^x - \cancel{c\frac{x+2}{x}} + \frac{x+2}{x^{\cancel{2}}}\cancel{x}e^x + \cancel{\frac{x+2}{x^2}cx} =$$

$$= \cancel{2e^x} + \cancel{xe^x} - \cancel{xe^x} - \cancel{2e^x} = 0 \checkmark$$

RTA $\boxed{y = \alpha x + \beta(xe^x + cx)}$ $(c \in \mathbb{R})$

$$= c_1 x + c_2 x e^x$$