1	2	3	4
B	B	B.	

Calificación
A

APELLIDO

NO. DE L

E-MAIL

ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3
SEGUNDO PARCIAL (25/11/17)

1. Consideremos la ecuación diferencial

$$\text{(R)}\quad y' + A(x)\,y + B(x)\,y^2 = C(x).$$

   a) Sea y_1 una solución de (R). Probar que existen funciones $P(x)$ y $Q(x)$ tales que si z es solución de

$$\text{(L)}\quad z' + P(x)\,z = Q(x)$$

   entonces $y_2 = y_1 + \frac{1}{z}$ es solución de (R).

   b) Sabiendo que $y_1 = 2$ es solución de

$$y' + y - y^2 = -2,$$

   hallar una solución y_2 tal que $y_2(0) = 3$.

2. Hallar una solución (implícita) a la ecuación diferencial

$$(3x - 5y)\,dx - (x + 9y)\,dy = 0$$

que satisfaga $y(0) = 1$, sabiendo que existe una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(x, y) = \varphi(x + y)$ es un factor integrante de la ecuación.

3. Consideremos la ecuación diferencial

$$x\,y'' - (x + 1)\,y' + y = x^2\,e^x \qquad (x > 0).$$

Sabiendo que $y(x) = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada, hallar todas las soluciones de la ecuación.

4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^2 y, \\ y' = xy + x. \end{cases}$$

   a) Esbozar el diagrama de fases del sistema en un entorno de $(0, 0)$.

   b) Hallar todos los puntos de equilibrio del sistema y analizar la estabilidad de cada uno de ellos.

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

1/7

[redacted]

Análisis II 2do parcial

EJERCICIO 2:

Hallar una solución (implícita) a la ecuación diferencial $(3x-5y)dx-(x+9y)dy=0$ que satisfaga $y(0)=1$, sabiendo que existe una función $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\mu(x,y)=\varphi(x+y)$ es un factor integrante de la ecuación

Tengo $(3x-5y)dx-(x+9y)dy=0$

$(3x-5y)dx+(-9y-x)dy=0$

- Verifico que no es exacta

$(3x-5y)_y=-5$

$(-9y-x)_x=-1$ $\quad -5\neq-1 \Rightarrow$ NO ES EXACTA ✓

- Quiero hallar una función tal que cumpla

$$\underset{①}{\left[\varphi(x+y)(3x-5y)\right]_y} = \underset{②}{\left[\varphi(x+y)(-9y-x)\right]_x}$$

① $\left[\varphi(x+y)(3x-5y)\right]_y = \varphi'(x+y)(x+y)_y(3x-5y)+\varphi(x+y)(3x-5y)_y$

$= \varphi'(x+y)(3x-5y)+\varphi(x+y)(-5)$

② $\left[\varphi(x+y)(-9y-x)\right]_x = \varphi'(x+y)(x+y)_x(-9y-x)+\varphi(x+y)(-9y-x)_x$

$= \varphi'(x+y)(-9y-x)+\varphi(x+y)(-1)$

Entonces quiero que

$$\varphi'(x+y)(3x-5y)+\varphi(x+5)(-5)=\varphi'(x+y)(-9y-x)-\varphi(x+y)$$

$$\varphi'(x+y)(3x-5y)-\varphi'(x+y)(-9y-x)=-\varphi(x+y)-\varphi(x+\cancel{y})(-5)$$

$$\varphi'(x+y)\big(3x-5y-(-9y-x)\big)=-\varphi(x+y)+5\varphi(x+y)$$

$$\varphi'(x+y)\big(3x-5y+9y+x\big)=4\varphi(x+y)$$

$$\varphi'(x+y)\big(4x+4y\big)=4\varphi(x+y)$$

$$\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi(x+y)}=\frac{4}{4x+4y}$$

$$\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi(x+y)}=\frac{1}{x+y}$$

para no marearme llamo $x+y=\tau$ BIEN!

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}=\frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow \int\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}\,d\tau=\int\frac{1}{\tau}\,d\tau$$

$$\ln|\varphi(\tau)|=\ln|\tau|+C$$

$$\varphi(\tau)=K\tau. \quad \Rightarrow \quad \varphi(x+y)=K(x+y)$$

$\Rightarrow$ Me sirve $\varphi(x+y)=(x+y)$ ✓

verifico que se vuelva exacta

$$\big[(x+y)(3x-5y)\big]_y=(3x-5y)+(x+y)(-5)=3x-5x-5y-5y=-2x-10y$$

$$\big[(x+y)(-9y-x)\big]_x=(-9y-x)+(x+y)(-1)=-9y-y-x-x=-2x-10y$$

Las derivadas quedaron iguales, entonces sí es exacta

Entonces busco una función $f(x;y)$ / $f_x=(x+y)(3x-5y)$ ✓

$f_y=(x+y)(-9y-x)$

$f(x;y) = \int (x+y)(3x-5y)\,dx = \int 3x^2 - 5xy + 3xy - 5y^2\,dx$

$= \int 3x^2 - 2xy - 5y^2\,dx = x^3 - x^2 y - 5y^2 x + h(y)$

Ahora derivo para que coincida con la otra parte

$(x^3 - x^2 y - 5y^2 x + h(y))_y = 0 - x^2 - 10yx + h'(y) = -x^2 - 10yx + h'(y)$

Por otro lado $f_y = (x+y)(-9y-x) = -9xy - x^2 - 9y^2 - xy$

$= -x^2 - 10xy - 9y^2$

Lo que significa que $h'(y) = -9y^2 \Rightarrow h(y) = -3y^3$

$\Rightarrow f(x,y) = x^3 - x^2 y - 5y^2 x - 3y^3$

Entonces todas las soluciones del problema son

$x^3 - x^2 y - 5y^2 x - 3y^3 = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$. Pero como me dicen que $y(0)=1$, esto me determina el "c"

$c = 0^3 - 0^2 1 - 5 1^2 0 - 3 1^3 = 0 - 0 - 0 - 3 = -3 = c$

$\Rightarrow$ RTA: $\boxed{x^3 - x^2 y - 5y^2 x - 3y^3 = -3}$

EJERCICIO 3

Consideremos la ecuación diferencial $xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^x$ $x>0$. Sabiendo que $y(x) = e^x$ es solución de la ecuación homogenea asociada, hallar todas las soluciones de la ecuación

Como $x>0$ puedo dividir por x tranquilamente y mantengo las mismas soluciones

$$y''-\left(1+\frac{1}{x}\right)y'+\frac{y}{x}=xe^x$$

Analizo la homogenea $y''-\left(1+\frac{1}{x}\right)y'+\frac{y}{x}=0$

Si se que e^x es solución, propongo que la otra solución LI es $h(x)e^x$ para alguna función $h(x)$. Voy a reemplazar en la función y veo que tiene que cumplir $h(x)$.

$y=h(x)e^x$

$y'=h'(x)e^x+h(x)e^x=e^x(h'(x)+h(x))$

$y''=h''(x)e^x+h'(x)e^x+h'(x)e^x+h(x)e^x=h''e^x+2h'(x)e^x+h(x)e^x$

$=e^x(h''+2h'(x)+h(x))$.

En la ecuación, $e^x(h''+2h'+h)-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^x(h'+h)+\frac{he^x}{x}=0$

$\underbrace{e^x}_{>0}\left(h''+2h'+h-\left(1+\frac{1}{x}\right)(h'+h)+\frac{h}{x}\right)=0$

$h''+2h'+h-\left(h'+h+\frac{h'}{x}+\frac{h}{x}\right)+\frac{h}{x}=0$

$h''+2h'\cancel{+h}-h'\cancel{-h}-\frac{h'}{x}\cancel{-\frac{h}{x}}\cancel{+\frac{h}{x}}=0$

$h''+h'-\frac{h'}{x}=0$

$h''=\frac{h'}{x}-h'$

$h''=h'\left(\frac{1}{x}-1\right)$

$\frac{h''}{h'}=\frac{1}{x}-1$

$\int\frac{h''}{h'}dx=\int\frac{1}{x}-1\;dx$

$\ln|h'|=\ln x-x$

$h'=e^{\ln x-x}$

$h'=\frac{e^{\ln x}}{e^x}$

$h'=\frac{x}{e^x}$

$$\int h'\,dx = \int \frac{x}{e^x}\,dx$$

$$h = \int x e^{-x}\,dx \qquad \text{si } u = x \quad u' = 1$$

$$h = x.(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,dx \qquad v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$$

$$h = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$h = -e^{-x}(x+1)$$ (no utilizo constantes porque solo estoy buscando 1)

$$\Rightarrow y = h.e^x = -e^{-x}(x+1)\,e^x = -(x+1)$$

Entonces las soluciones del homogeneo son LAS COMB. LINEALES DE $y_1 = e^x$

$y_2 = -(x+1)$

Para resolver la no homogenea planteo una solución particular de la forma: $y_p = \alpha(x)\,e^x + \beta(x)\,[-(x+1)]$

con α y β funciones a determinar.

$$y_p = \alpha e^x - \beta(x+1)$$

$$y'_p = \alpha' e^x + \alpha e^x - (\beta'(x+1) + \beta) = e^x(\alpha' + \alpha) - \beta - \beta'(x+1)$$

$$y''_p = \alpha'' e^x + \alpha' e^x + \alpha' e^x + \alpha e^x - (\beta''(x+1) + \beta' + \beta')$$

$$y''_p = e^x(\alpha'' + 2\alpha' + \alpha) - 2\beta' - \beta''(x+1)$$

Ahora lo pongo en la ecuación no homogenea y busco las funciones α y β veamos que con $\alpha = \frac{x^2}{2}$ y $\beta = 0$ alcanza ¿CÓMO LO SUPISTE?

3,5/6

Sea $x_p = \frac{x^2}{2}e^x$ cumple la no homogenea?

$$x_p' = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$$

$$x_p'' = e^x + xe^x + xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$$

Entonces

$$xy'' - (x+2)y' + y = xe^x + x^2e^x + \cancel{x^2e^x} + \cancel{\frac{x^3}{2}}e^x$$
$$-\cancel{x^2e^x} - \cancel{\frac{x^3}{2}}e^x - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x$$
$$+ \frac{x^2}{2}e^x \quad = x^2e^x$$ lo que queríamos

Entonces todas las respuestas son

$$\boxed{X = \underbrace{c_1e^x + c_2(-x-1)}_{\text{homogeneo}} + \underbrace{\frac{x^2}{2}e^x}_{\text{particular}}}$$

EJERCICIO 4: Consideremos el sistema $\begin{cases} x' = y - x^2 y \\ y' = xy + x \end{cases}$

a) Esbozar el diagrama de fases del sistema en ~~equilibrio~~ un entorno del $(0,0)$.

b) Hallar todos los puntos de equilibrio del sistema y analizar la estabilidad de cada uno de ellos.

Como es un sistema no ~~lineal~~ lineal, voy a buscar todos los puntos del equilibrio.

$F(x,y) = (y - x^2 y \, ; \, xy + x)$

Resuelvo $\begin{cases} ① \; y = x^2 y \\ ② \; xy + x = 0 \end{cases}$

① $y - x^2 y = 0$ si $y=0$ en ② $x=0$ $P_1=(0,0)$

$y(1-x^2) = 0$ si $y \neq 0$ i) $x=1$ $y=-1$ $P_2=(1,-1)$

$y(1-x)(1+x) = 0$ ii) $x=-1$ $y=-1$ $P_3=(-1,-1)$

Entonces los puntos de equilibrios del sistema son: $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(-1,-1)$. Para analizar estabilidad, hallo el diferencial de $F(x,y)$, evaluo en esos puntos y estudio el problema pero linealizado.

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy & 1-x^2 \\ y+1 & x \end{pmatrix}$$

① $P=(-1,-1)$ $\quad DF(-1,-1)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bueno el diferencial quedó hermoso, los autovalores están a la vista y son ambos negativos $\Rightarrow$ ES ESTABLE.

② $P=(1,-1)$ $\quad DF(1,-1)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Acá también quedó bien pero con los autovalores positivos $\Rightarrow$ ES INESTABLE.

③ $P=(0,0)$

$DF(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Acá hay que hacer cuentita.

$$\chi_A = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2-1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ los autovalores son $\lambda_1=-1$ $\quad \lambda_2=1$, entonces ~~EA~~ ES INESTABLE.

Dibujemos el diagrama de fase en $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

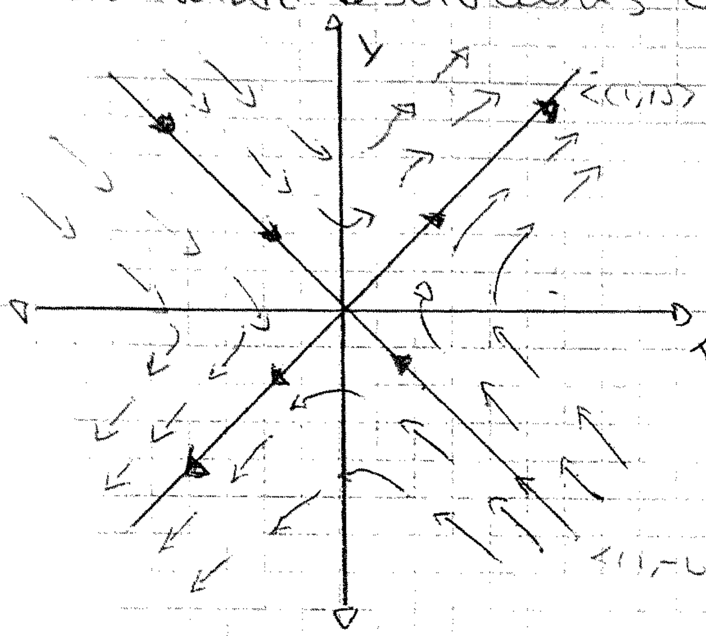
Hallamos $E_{-1} = Nu\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,-1)$

$E_1 = Nu\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,1)$

$\Rightarrow$ La solución general de este sistema, por lo que vimos en clase es:

$$X = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}$$

Y para esbozar el diagrama de fases, ubicamos (autovectores que son trayectorias y completamos la continuidad de soluciones con hipérbolas



En la recta $\langle(1,1)\rangle$ las flechas van hacia afuera porque corresponde a la solución e^t y con $t \to \infty$ $e^t \to \infty$. En el otro caso e^{-t} y $t \to \infty$ $e^{-t} \to 0$

EJERCICIO 1: Consideremos la ecuación diferencial

(R) $y' + A(x)y + B(x)y^2 = C(x)$

a) Sea y_1 una solución de (R). Probar que existen funciones $P(x)$ y $Q(x)$ tales que si z es solución de (Z) $z' + P(x)z = Q(x)$, entonces $y_2 = y_1 + \frac{1}{z}$ es solución de (R)

Bueno planteo lo que quiero y veamos si encuentro posibles P y Q

$y_2 = y_1 + \frac{1}{z}$ $\qquad y_2^2 = y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}$

$y_2' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$

Lo introduzco en (R)

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + A\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + B\left(y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = C$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + Ay_1 + \frac{A}{z} + By_1^2 + \frac{2By_1}{z} + \frac{B}{z^2} = C$$

$$\underbrace{y' + Ay_1 + By_1^2}_{=C \text{ porque } y_1 \text{ es solución}} - \frac{z'}{z^2} + \frac{A}{z} + \frac{2By_1}{z} + \frac{B}{z^2} = C$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{A}{z} + \frac{2By_1}{z} + \frac{B}{z^2} = 0$$

Multiplico por z^2

$$-z' + zA + z2By_1 + B = 0$$

$$z' - zA - 2zBy_1 - B = 0$$

$z' + (-A - 2By_1)z = B$ $\Rightarrow$ Si llamamos

$P(x) = -A - 2By_1$ y $Q(x) = B(x)$ logramos lo

que queremos

b) sabiendo que $y_1 = 2$ es solución de $y' + y - y^2 = -2$,

hallar una solución y_2 tal que $y_2(0) = 3$.

Bueno usando el ejercicio anterior veo que

$A(x) = 1$ $B(x) = -1$ $C(x) = -2$ $y_1 = 2$

$\Rightarrow P(x) = -1 - 2(-1)(2)$ $\boxed{Q(x) = -1}$

$\boxed{P(x) = -1 + 2.2 = 3}$

Resuelvo entonces

$z' + 3z = -1$

Homogenea $z' + 3z = 0$

$z' = -3z$

$\int \frac{z'}{z} dx = \int -3 \, dx$

$\ln|z| = -3x + c$

$z = e^{-3x+c}$

$z = Ke^{-3x}$

Particular a ojo. $z = -\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)' + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

$0 \quad -1 \quad = -1$

$-1 = -1$ ✓

$\Rightarrow \quad z = Ke^{-3x} - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2 + \frac{1}{Ke^{-3x} - \frac{1}{3}}$ ✓

si $y_2(0) = 2 + \frac{1}{K - \frac{1}{3}} = 3$

$\frac{1}{K - \frac{1}{3}} = 1$

$1 = K - \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} = K \quad \Rightarrow \quad y_2 = \boxed{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3}}}$ ✓