Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática III - Segundo Parcial

Segundo cuatrimestre de 2019 (30/11/2019)

1	2	3	4	Nota
B	B	B	B-	A

Ejercicio 1 Mostrar que la ecuación $xdy - ydx = 0$, $x > 0$ admite como factor integrante la función

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

para cualquier f derivable y resuelva la ecuación.

Ejercicio 2 Encontrar una base de soluciones de la ecuación

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

en el intervalo $I = (0, +\infty)$, sabiendo que $y_1(x) = x^3$ es solución

Ejercicio 3 Hallar la solución general del sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot X(t), \qquad X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Determinar todos los valores de $X_0 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tales que la solución esté contenida completamente en el primer cuadrante.
Sugerencia: Encontrar todas las soluciones del sistema y esbozar el diagrama de fases.

Ejercicio 4 Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales no-lineal

$$\begin{cases} x' = x^2 + 5x - 2xy - 10y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

(a) Determinar los punto de equilibro del sistema.

(b) Decidir la estabilidad en cada punto.

(c) Hacer un diagrama de fase en cada uno

Justificar todas las respuestas.

2) $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$

$y_1(x) = x^3$ es solución

planteo la siguiente sol. de la forma: $y_2(x) = C(x)x^3$

$y_2'(x) = C'x^3 + 3Cx^2$

$y_2''(x) = C''x^3 + 6C'x^2 + 6Cx$

reemplazo en la ec. dif:

$0 = C\underbrace{(6x - 12x + 6x)}_{=0} + C'(-4x^2 + 6x^2) + C''x^3$

$\Rightarrow C'(4x^2 - 6x^2) = C''x^3 \longrightarrow \frac{C''}{C'} = \frac{-2x^2}{x^3} = \frac{-2}{x}$

integrando queda

$\ln|C'| = -2\ln|x| = \ln|x^{-2}| + k$

$\Longrightarrow C' = kx^{-2} \quad \int C'dx = \int kx^{-2}$

$C = \frac{k(-1)}{x} + d \Longrightarrow C(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow y_2(x) = \frac{1}{x}x^3 = x^2$

TOMO $k = -1$, $d = 0$

COMO es UNA ec. dif. Lineal de 2do grado la dim de la Base de Sol. es de 2, entonces la Sol gral queda

$$\boxed{y(x) = \underset{\downarrow\, y_1}{Ax^3} + \underset{\downarrow\, y_2}{Bx^2} \quad , \text{con } A, B \in \mathbb{R}}$$

4) $\begin{cases} x' = x^2+5x-2xy-10y \\ y' = x+y \end{cases}$

a) Los puntos de eq. del sistema van a hacer tales que

$F(x,y) = (x^2+5x-2xy-10y,\ x+y) = (0,0)$

$\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow y=-x \\ x^2+5x-2xy-10y=0 \Rightarrow x^2+5x-2x(-x)-10(-x) = 3x^2+10x+5x=0 \end{cases}$

$3x^2+15x=0 = 3x^2+15x = x(3x+15)=0$

$\Longleftrightarrow x=-5,\ x=0$

$\therefore$ Los ptos criticos son $(0,0), (-5,5)$

b) Calculo $DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+5-2y & -2x-10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda-1)+10 = 0$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 15$

$\dfrac{6 \pm \sqrt{36-4.15}}{2} = 3 \pm \dfrac{\sqrt{24}}{2} i$

$\lambda_2 = 3 + \dfrac{\sqrt{24}}{2} i \quad \lambda_1 = 3 - \dfrac{\sqrt{24}}{2} i$

$\lambda_1 Id - \underset{DF(0,0)}{A} = \begin{pmatrix} -2+\dfrac{\sqrt{24}}{2} i & 10 \\ -1 & 2+\dfrac{\sqrt{24}}{2} i \end{pmatrix}$

$N_2 = \left(2+\dfrac{\sqrt{24}}{2} i,\ 1\right)$

La Sol

$Re\{e^{\lambda_2} N_2\} + Im\{e^{\lambda t} N_2\}$

$Re\{$

$Y_1 = e^{\alpha} r \cos(\theta - \beta t) \quad \beta<0$

$Y_2 = e^{\alpha} r\, sen(\theta - \beta t)$

$DF(-5,5) = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda+15)(\lambda-1) = P(\lambda)$

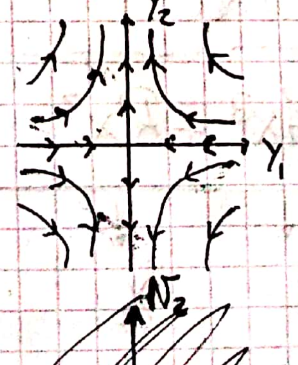
$\lambda_1 = -15 \quad \lambda_2 = 1$ $\boxed{\text{inestable}}$

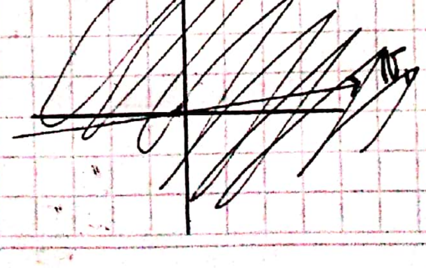
$\lambda_1 Id - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -16 \end{pmatrix}$

$N_1 = (16,-1)$

$\lambda_2 Id - \underset{DF(-5,5)}{A} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$N_2 = (0,1)$

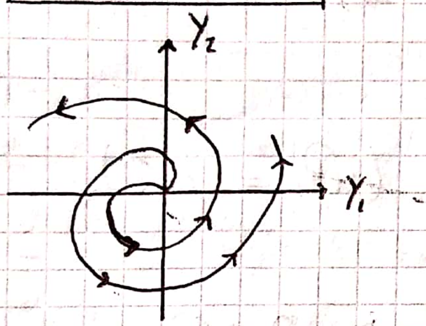




donde $\alpha = 3$ la parte Real

y $\beta = -\frac{\sqrt{24}}{2}$ la parte Imaginaria

$\boxed{\text{inestable}}$



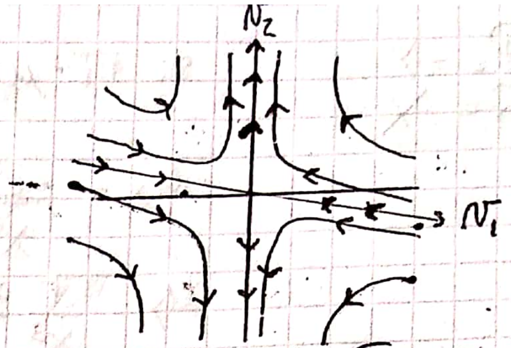


Diagrama de fases para el punto critico $(-5,5)$

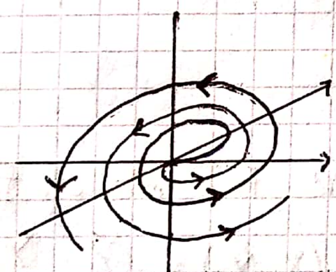


Diagrama de Fases para el punto critico $(0,0)$

1) $x\,dy - y\,dx = 0$, $x>0$ admite FI: $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$

$P = -y$ Si FI: $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$

$Q = x$

$$\mu_x = \frac{-2}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-1}{x^3}\left(2f + \frac{y}{x} f'\right)$$

$$\mu_y = \frac{1}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{x}} = \cancel{\frac{1}{x^4} f'} \ \frac{1}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(\mu P)_y = \frac{1}{x^3} f' \cdot (-y) + \frac{-1}{x^2} f$$

$$(\mu Q)_x = \frac{-1}{x^2}\left(2f + \frac{y}{x} f'\right) + \frac{1}{x^2} f \qquad (\mu P)_y = (\mu Q)_x$$

$$\frac{1}{x^3} f' \cdot (-y) - \frac{1}{x^2} f = -\frac{f}{x^2} - \frac{y}{x^3} f' \Rightarrow 0 = 0$$

$\therefore$ vale $\forall\, F\left(\frac{y}{x}\right)$ ~~derivable~~ derivable

resuelvo: como ya se que cualquier FI de la forma $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$ uso $f = \frac{y}{x} \Rightarrow \mu(x,y) = \frac{y}{x^3}$ va a funcior. $\therefore$ la sol van a ser la curvas de nivel de F, donde F es $/ \nabla F(\mu P, \mu Q)$

$$\mu Q = \frac{y}{x^3} \cdot x = \frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow F = \int \frac{y}{x^2}\, dy = \frac{y^2}{2x^2} + h(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{-y^2}{x^3} + h'(x) = \mu P$$

$$\mu P = \frac{-y^2}{x^3} = \frac{-y^2}{x^3} + h'(x) \qquad h'(x) = 0$$

Tomo $h(x) = 0$

$$F = \frac{y^2}{2x^2} \longrightarrow \text{Sol: } k = \frac{y^2}{2x^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = \tilde{k}\sqrt{2}\,x} \qquad \text{con } x>0,\ \tilde{k} \in \mathbb{R}$$

3)

$$X' = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} X \qquad X(0) = X_0$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 13)(\lambda + 7) + 64$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda - 91 + 64 = \lambda^2 - 6\lambda - 27$$

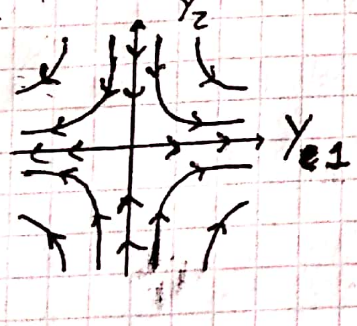
$$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 4.27}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{36 + 108}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{144}}{2} = 3 \pm 6$$

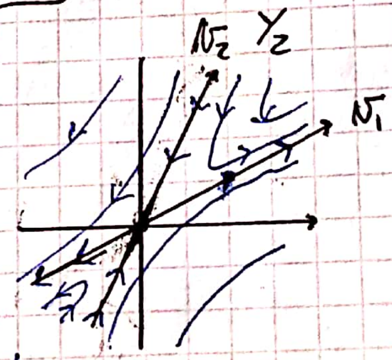
$$\lambda_1 = 9 \quad , \quad \lambda_2 = -3$$

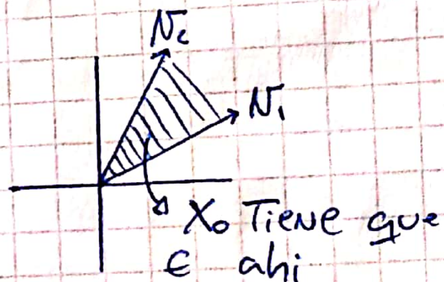
$$v_1 : \lambda_1 Id - A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 : \lambda_2 Id - A = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La Sol, queda $\quad \bar{X}(t) = \underbrace{Ae^{9t}}_{Y_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{Be^{-3t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A, B \in \mathbb{R}$







$Y = \frac{1}{2}X \qquad Y = 2X \qquad Y \geq \frac{1}{2}X \qquad Y \leq 2X$

RTa: si $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{pmatrix}$ entonces X_0 tiene que

ser / $\frac{1}{2}X_{01} \leq X_{02} \leq 2X_{01}$