SEGUNDO PARCIAL

Ejercicio 1. Consideremos la ecuación diferencial

$$\left(y^2 - 3x\right)\, dx + \left(6y^3 - 2xy\right)\, dy = 0.$$

Probar que admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = f\left(x+y^2\right)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y hallar una solución (implícita).

$$(P,Q) = \left(y^2 - 3x,\ 6y^3 - 2xy\right)$$

SEA $\mu = f(x+y^2)$, CON $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

TOMO $\tilde{F} = \mu F$; $\tilde{F} = (\tilde{P}, \tilde{Q})$. ASÍ, QUIERO QUE

$$0 = \tilde{Q}_x - \tilde{P}_y = (\mu_x Q + \mu Q_x) - (\mu_y P + \mu P_y)$$

$$= f'(x+y^2)(6y^3 - 2xy) + f(x+y^2)(-2y)$$

$$-\left(2y\, f'(x+y^2)(y^2-3x) + f(x+y^2)(2y)\right)$$

$$= f(x+y^2)(-4y) + f'(x+y^2)(4y^3 + 4xy)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x+y^2)/f(x+y^2) = \frac{1}{x+y^2}$$

$\rightsquigarrow$ TOMAMOS $f(z) = z$; ASÍ

$$\left((y^2-3x)(x+y^2),\ (6y^3 - 2xy)(x+y^2)\right)$$

$$= \left(y^4 - 2xy^2 - x^2,\ 6y^5 + 4xy^3 - 2x^2y\right)$$

$$\overset{?}{=} \nabla g$$

$\rightarrow$ Tomo $g(x,y) = xy^4 - x^2y^2 - x^3 + y^6$

RTA: $xy^4 - x^2y^2 - x^3 + y^6 = C,\ C \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2. Consideremos la ecuación diferencial

$$x'' - k\,x' + (k-1)\,x = 0$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Para cada $k \in \mathbb{R}$, hallar todas las soluciones reales.

(b) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales existen soluciones $x(t)$ que verifican

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

y describir dichas soluciones.

RAÍCES: $\dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4k + 4}}{2} = \dfrac{k \pm |k-2|}{2} =$

$= \dfrac{k \pm (k-2)}{2} = \begin{cases} k-1 \\ 1 \end{cases}$

ASÍ, LAS SOL REALES SON:

- $x(t) = \alpha e^{(k-1)t} + \beta e^{t}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, SI $k \neq 2$
- $x(t) = \alpha e^{t} + \beta t e^{t}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, SI $k = 2$.

AFIRMO:

- $x(t) = \alpha e^{\overset{k\neq 2}{(k-1)t}} + \beta e^{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ sii $(\beta = 0,\ k<1)$ ó $(\alpha = \beta = 0)$

DEM: SUPONGAMOS $k>2$. ASÍ,

$$|x(t)| = \left| e^{(k-1)t}\left(\alpha + \beta e^{(2-k)t}\right)\right|$$

$$\geq \underbrace{e^{(k-1)t}\left(|\alpha| - \underbrace{|\beta| e^{(2-k)t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}\right)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,\ \text{si } \alpha\neq 0}$$

ASÍ, $\alpha = 0$; LUEGO $|x(t)| = |\beta| e^{t}$

y $\therefore$ $\beta = 0$

CASO $1 \leq k < 2$: ANÁLOGO...

- $x(t) = \alpha e^{t} + \beta t e^{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

SII $\alpha = \beta = 0$

Ejercicio 3. La ecuación diferencial

$$xy'' - y' - (1+x)y = 0, \quad x > 0.$$

contiene una solución de la forma $y_1(x) = e^{mx}$, con $m \in \mathbb{R}$.

(a) Hallar m.

(b) Hallar la solución general de la ecuación.

ie: $y'' - 1/x\, y' - (1 + 1/x) y = 0$

$y_1(x) = e^{mx}$ ¿QUIÉN ES m?

$0 = m^2 e^{mx} - m/x\, e^{mx} - (1 + 1/x) e^{mx}$

$= e^{mx}(m^2 - m/x - 1 - 1/x) \therefore m = -1$

PROPONEMOS $y_2 = c y_1$, $c = c(x)$. ASÍ SI $d = c'$ TENEMOS

$d = e^{-\int p} / y_1^2 = e^{\int 1/x} \cdot e^{2x} = x e^{2x}$

$\rightsquigarrow \quad c = \int x e^{2x} dx = e^{2x}/4\,(2x-1)$

$\therefore y_2 = e^{x}/4\,(2x-1)$, Y LA SOL GRAL ES

$y(t) = \alpha e^{-x} + \beta e^{x}(2x-1)$,

CON $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4. Consideremos la ecuación

$$x'' - \cos(2x)\, x' = 6\,\mathrm{sen}(x).$$

(a) Transformar la ecuación en un sistema de orden 1.

(b) Hallar **todos** los puntos de equilibrio del sistema hallado en (a) y analizar su estabilidad.

(c) Esbozar el diagrama de fase alrededor del origen.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \cos(2x)\, y + 6 \,\mathrm{sen}\, x \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\,\mathrm{sen}(2x)\, y + 6\cos(x) & \cos(2x) \end{pmatrix}$$

PTOS DE EQ: $\{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$

$$DF(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6\cos(k\pi) & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, & k \text{ IMPAR} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, & k \text{ PAR} \end{cases}$$

- k IMPAR:

$$\chi = \lambda(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - \lambda + 6 \,;$$

RAÍCES $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-24}}{2}$ $\rightsquigarrow \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ $\Rightarrow$ INEST

- k PAR:

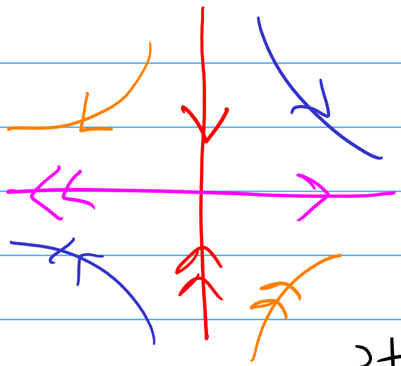
$$\chi = \lambda(\lambda-1) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6;$$

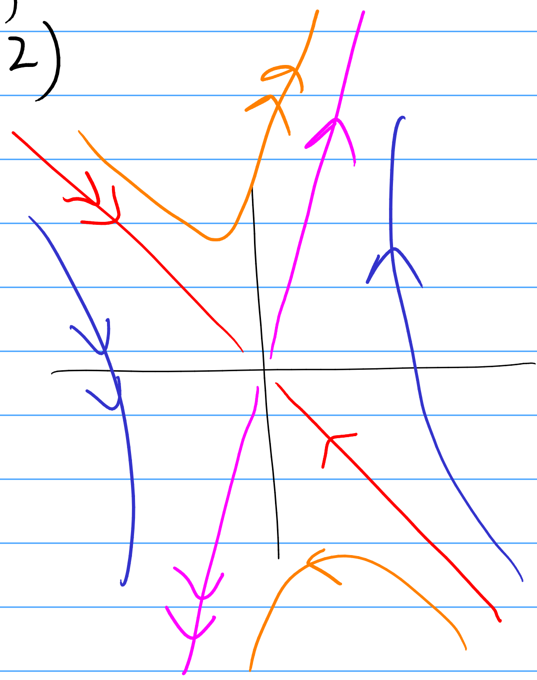
RAÍCES $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \underbrace{3}_{\text{POSITIVA} \Rightarrow \text{INESTABLE}}, -2$

DIAG. DE FASES EN $(0,0)$:

$\lambda = 3, \quad V = (1,3)$

$\lambda = -2, \quad V = (1,-2)$





$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$