Tecnología Computacional y Estructura de Datos

Unidad 1

Introducción a la Lógica

La lógica es una ciencia cuyo objeto es el estudio de las leyes, modalidades y formas del conocimiento científico. Se trata de una ciencia de carácter formal que carece de contenido ya que hace foco en el estudio de los principios de la demostración e inferencia válida. Es decir, propone estudiar los métodos y los principios adecuados para identificar al razonamiento correcto frente al que no lo es.

La etimología de la palabra permite conocer que el término ‘lógica’ se origina en el vocablo griego “logos” que significa “razón” o “estudio”.

La lógica formal:

Se acostumbra a definir la lógica formal como aquella ciencia que estudia los razonamientos desde el punto del análisis formal, es decir, desde el punto de vista de su validez o no validez. Con esto queremos decir que no se presta atención al contenido empírico de los razonamientos, sino que solo se analiza la estructura del mismo.

Se adjudica al filósofo griego Aristóteles como al creador de la lógica a partir de designar el chequeo de los argumentos como indicadores de la verdad dentro de la ciencia, y al presentar al silogismo como argumento válido. Sus trabajos principales sobre la materia, que tradicionalmente se agrupan bajo el nombre *Órganon* («herramienta»), constituyen la primera investigación sistemática acerca de los principios del razonamiento válido o correcto.

Un silogismo válido para la lógica formal puede ser:

1. El señor Spock es un vulcano;
2. los vulcano son personajes de ficción;
3. por lo tanto, el señor Spock es un personaje de ficción.

Al lógico no le interesa realmente conocer quién es el señor spock ni los vulcanos, solamente le interesa que las premisas y la conclusión sean válidas

El Silogismo es un razonamiento donde se deduce una conclusión partiendo de 2 juicios. Este está conformado por 2 premisas (puntos 1 y 2) y la conclusión (punto 3) y a su vez por 3 términos. Las tres premisas son: Premisa mayor (la más universal), Premisa menor (menos universal) y la conclusión. Los tres términos que mencionamos son el término mayor y el término menor (Sujeto y

Predicado de la conclusión: S es P), finalmente el término medio (letra M) que aparece en ambos juicios

La lógica de Aristóteles se basa enteramente en tres principios o axiomas:

- **Principio de identidad**, que afirma que un término es igual a sí mismo. A = A
- **Principio de no contradicción**: significa que un predicado no se puede afirmar y negar simultáneamente y bajo los mismos aspectos de un sujeto.
- **Principio del tercero excluido**: no existe un termino medio entre dos afirmaciones contradictorias.

Identificando la premisas y los términos en el silogismo del señor Spock determinamos que

Enunciado	Premisas	Términos
El señor Spock$_S$ es un vulcano$_M$	menor	S es M
Los vulcano$_M$ son personajes de ficción$_P$	mayor	M es P
El señor Spock$_S$ es un personaje de ficción$_P$	conclusión	S es P

Las distintas partes de la Lógica dependen del tipo de análisis que hacen sobre las premisas, de forma que tenemos:

LÓGICA PROPOSICIONAL O DE ENUNCIADOS: Toma las oraciones enunciativas (proposiciones) como un bloque, sin descomponerlas en sujeto y predicado, teniendo como elementos más simples las proposiciones atómicas, y ocupándose de las relaciones que se pueden establecer entre ellas.

LÓGICA DE PREDICADOS: A veces no es suficiente tomar las proposiciones como un bloque y hay que descomponerlas en sujeto y predicado. Esto hace esta parte de la lógica, que trata los predicados desde el punto de vista intencional, es decir, como atribución de una propiedad a un sujeto.

LÓGICA DE CLASES: Adopta el punto de vista de la extensión (conjunto de individuos a los que el predicado se aplica), interpretando los enunciados como operaciones con clases de conjuntos.

LÓGICA DE RELACIONES: Estudia aquellos predicados que no se atribuyen a un individuo absolutamente sino en comparación con otro.

Lógica proposicional

También se la denomina Lógica de orden Cero. Es un sistema formal cuyos elementos más simples representan proposiciones, y cuyas constantes lógicas, llamadas conectivas, representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

En términos simples, se denomina proposición a un enunciado, que son aquellas oraciones que afirman o niegan algo y que, por tanto, pueden ser verdaderas o falsas. Hay dos tipos de proposiciones:

Proposiciones simples o atómicas: son aquellas que no pueden descomponerse en nuevas expresiones que a su vez sean proposiciones.

Proposiciones complejas o moleculares: Son las que está compuestas por dos o mas proposiciones simples. Una oración enunciativa como «*el equipo de los andes se fue al descenso y el equipo de temperley está jugando en primera*» es una proposición compleja que puede subdividirse en dos proposiciones simples identificando la partícula que obra de nexo lógico entre ambas, en este caso el nexo es la partícula "y".

Los elementos del cálculo proposicional son los siguientes:

Símbolos:

- **Variables proposicionales o letras enunciativas:** Para simbolizar las proposiciones atómicas se recurre a las letras minúsculas del alfabeto a partir de la m o de la p (m, n, o, p, q, r, s, etc.). Cada letra simboliza una proposición atómica cualquiera. Cuando se hace un uso metalingüístico (por ejemplo, al expresar las reglas lógicas) se usan las primeras letras del abecedario en mayúsculas: A, B, C, etc. Por ejemplo se puede utilizar p para simbolizar "está lloviendo" y q para simbolizar "hay nubes".
- **Constantes lógicas, operadores lógicos o conectores:** Son símbolos que denotan relaciones y operaciones lógicas. Sirven para establecer conexiones entre los enunciados, por lo que se denominan conectores o conectivas. En las lenguas naturales esta función conectiva es desempeñada por las conjunciones. Puesto que el tipo de relación que cada partícula conectiva establece es fijo, los símbolos correspondientes son denominados constantes lógicas. Las constantes lógicas más usuales en la Lógica proposicional son las siguientes:
  - **El negador (¬):** Es la única constante que se aplica a un solo enunciado cambiándole su valor veritativo, y equivale a la negación del lenguaje natural. Así, si A es verdadera, ¬A es falsa, y viceversa. Se lee: no / no es el caso que. Alternativamente se puede utilizar el símbolo tilde (~). Por ejemplo: ¬p equivale a "no está lloviendo".
  - **El conjuntor (Λ):** Corresponde a la conjunción «y» del lenguaje natural y lo que hace es dar lugar a una proposición molecular que es verdadera solamente cuando son verdaderas las proposiciones atómicas que la componen. Por ejemplo: p Λ q se interpreta como "está lloviendo y hay nubes"
  - **El disyuntor (V):** Corresponde a la conjunción «o» del lenguaje natural y lo que hace es dar lugar a una proposición molecular que es verdadera cuando una de las proposiciones atómicas que la componen o ambas son verdaderas. Por ejemplo: p V q se interpreta como "está lloviendo o hay nubes"

- **El implicador o condicional (→):** Corresponde a la expresión «si... entonces» del lenguaje natural y lo que hace es afirmar que si el primero de los enunciados (antecedente) es verdadero, el segundo (consecuente) necesariamente también lo es (es decir, lo que no puede darse es el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso). La fórmula a que da lugar será verdadera siempre que no ocurra que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Por ejemplo p → q se entiende como "si está lloviendo entonces hay nubes"
- **El coimplicador o bicondicional (↔):** Corresponde a la expresión «si, y sólo si... entonces» del lenguaje natural y lo que hace es afirmar que si el primero de los enunciados es verdadero, el segundo también lo es, y que si el primero de los enunciados es falso, el segundo también lo es. La fórmula a que da lugar sólo será verdadera siempre que las proposiciones que la componen tengan el mismo valor de verdad (ambas verdaderas, ambas falsas).
- **Símbolos auxiliares:** Paréntesis, corchetes, llaves, etc., para determinar el alcance de los conectores. Si no hay paréntesis, hay una jerarquía de operadores que establece el orden de análisis
  - 1º Negación (¬),
  - 2º Conjunción (Λ),
  - 3º Disyunción (V),
  - 4º Implicación (→)
  - y 5º el Bicondicional (↔)

  Por Ejemplo: p → r V q es lo mismo que p → (r V q).

Reglas de Formación:

Establecen cómo deben combinarse correctamente los símbolos de este lenguaje formal. A toda expresión formada correctamente según estas reglas se le llama fórmula. Las reglas de formación del cálculo proposicional son las siguientes:

- Una letra enunciativa es una fórmula bien formada. Ejemplo: p, q, r, s, t, etc.
- Si ‘A’ es una fórmula, ‘¬A’ también lo es. Ejemplo: ¬p, ¬q, ¬r, etc.
- Si ‘A’ y ‘B’ son fórmulas, entonces ‘A V B’, ‘A Λ B’, ‘A → B’ y ‘A ↔B’ también lo son. Ejemplo: p Λ q, ¬p V ¬q, ¬p→ (r Λ s), (¬p → q) ↔ (p V q), etc.
- No hay más fórmulas bien formadas si no son según las reglas anteriores.

Reglas de Transformación:

Llamadas también reglas de inferencia porque son las que determinan la forma en que podemos pasar correctamente de unas fórmulas bien formadas a otras equivalentes, para así poder construir razonamientos válidos. Son, por lo tanto, necesarias para poder realizar deducciones lógicas. Por el momento dejaremos estas reglas que ya trataremos en la parte dedicada a la lógica simbólica.

Lógica de Predicados

Un predicado es una expresión lingüística que se puede conectar con una o varias otras expresiones para formar una oración. Por ejemplo, en la oración «*Marte es un planeta*» hemos visto que es una proposición, pero para la lógica de predicados la expresión «*es un planeta*» es un **predicado** que se conecta con la expresión «*Marte*» para formar una oración. Y en la oración «*Júpiter es más grande que Marte*», la expresión «*es más grande que*» es un predicado que se conecta con dos expresiones, «*Júpiter*» y «*Marte*», para formar una oración.

Como se mencionaba previamente, con la lógica proposicional no alcanza para demostrar la validez de un argumento lógico. Por lo tanto se necesita un lenguaje que permita una formalización de las expresiones, este lenguaje formal se compone con los siguientes símbolos:.

- **Expresiones Variables**: x, y, z. x_1 , x_2 , x_3 , . . .

Se utilizan en general las últimas letras minúsculas del alfabeto. Si es necesario con subindices. En general la x es la de mayor preferencia para simbolizar una variable.

- **Expresiones Constantes**: a, b, c, d. a_1 , a_2 , a_3 , . . .

Se utilizan en general las primeras letras minúsculas del alfabeto. Si es necesario con subindices.

- **Símbolos de predicado:** P^1, Q^1, R^1, . . . P^2, Q^2, . . . S^k, K^k, . . .

en general, letras mayúsculas del alfabeto latino con un superíndice, llamado la aridad del símbolo. El número de símbolos de predicado de cada aridad puede variar desde ninguno a infinitos.

- **Conectivos lógicos**: ¬, ∨ , ∧ , → , ↔ .
- **Cuantificadores**: ∀, ∃.

∀ se llama cuantificador universal, ∃ se llama cuantificador existencial.

- **Paréntesis**: (,).
- **Identidad**: ≈ (optativo).

Formalización

Utilizando las conectivas de la lógica proposicional, tenemos un amplio vocabulario lógico para representar oraciones en un lenguaje formal. Observe los siguientes ejemplos:

Oración	**Formalización**
Sócrates es sabio y prudente. *Se compone de 2 de proposiciones atómicas:*	$Ss \land Ps$
Si Sócrates es sabio, entonces también es prudente.	$Ss \rightarrow Ps$
Nadie es sabio y además prudente.	$\neg\exists x\ (Sx \land Px)$
Todos los sabios son prudentes.	$\forall x\ (Sx \rightarrow Px)$

Tomemos entonces como ejemplo nuestro primer silogismo:

El señor Spock es un vulcano;

Los vulcano son personajes de ficción;

Por lo tanto, el señor Spock es un personaje de ficción.

y procedamos a la formalización:

Vs

$\forall x\ (Vx \rightarrow Fx)$

$\therefore Fs$

Lógica de clases

La lógica de clases analiza la proposición lógica considerando la pertenencia o no pertenencia de un elemento o individuo a una determinada clase, se ocupa de los conceptos que designan un grupo de objetos con las mismas propiedades o características, bajo la formalización de la **teoría de conjuntos** o Diagramas de Venn. Actualmente la lógica llamada tradicional, silogística, se interpreta como lógica de clases.

Por **clase** se entiende un conjunto de individuos que tienen una propiedad común. Nótese que la propiedad define a la clase, no al individuo, lo que lo diferencia esencialmente de la lógica de predicados. En este caso, por tanto, el valor de verdad viene dado por la pertenencia o no pertenencia a una clase. Por ello, la tabla de valores de verdad se explicita como tablas de pertenencia. Todos los conjuntos son clases, pero no todas las clases son conjuntos. Un conjunto es una clase que al menos contiene una clase, pero no a sí mismo.

La clase tiene sentido aun cuando no existan individuos. Así, la clase hombre, como concepto de hombre, existe como propiedad o concepto aunque no existan los hombres. De la misma forma que existe el concepto de "Droide", aun cuando R2D2 y C3PO no tenga existencia física (son personajes de Stars Wars).

Componentes de la lógica de clases

- **Universo**: es la clase que contiene a todas las clases, formada por todos los elementos del universo que estemos considerando. Se la denomina **U**.
- **Clase vacía**: clase que no tiene ningún elemento. Se lo denomina con el símbolo Ø.
- **Individuos o elementos**: cada entidad unitaria e indivisible perteneciente al universo. Se las identifica con una letra *x* singular y un sub-índice: x_1, x_2, x_3... x_n
- **Clase**: <u>conjunto</u> de individuos que tienen una propiedad en común. Puede significarse de varias maneras:

  Por enumeración o extensión: *A*= (x_5, x_6, x_7 … x_n)

  Por definición o comprensión: *A* = (Todos las personas que vieron la película “El Hobbit”)
- **Pertenencia:** relación entre un elemento y una clase. Se puede decir que el elemento tiene pertenencia a una clase : $x \in A$ o no pertenencia a la misma: $x \notin A$
- **Generalizador**: hace referencia a la totalidad de elementos. Se simboliza $\forall x$ (para todo *x*).
- **Particularizador**: Hace referencia a la existencia de al menos un elemento. Se simboliza $\exists x$ (existe un *x*)
- **Conectivas**: (Λ, V, →, ↔) Definidas de igual forma que en la lógica proposicional (y, o, implica, doble implicación), relativas a la pertenencia o no pertenencia de un individuo a una clase.
- **Negación**: se define como una operación entre las clases, la clase complementaria.
- **Cardinalidad**: Es la cantidad de elementos que contiene un conjunto, u operación entre clases. Frecuentemente se la simboliza con el signo #.

Operaciones entre clases

- **Clase complementaria:** se define como complemento de una clase A a todos los elementos del universo que no pertenecen a la clase A. Como ya dijimos, equivale a la negación.

  Siendo *A* = $\forall x \ (x \in A)$

  el complementario $\overline{A}$ = $\forall x \ (x \notin A)$
- **Clase unión o unión de clases**: la clase unión de dos clases A y B es la clase formada por los elementos que pertenecen a una o a otra clase.

  Siendo *A* = $\forall x \ (x \in A)$ y siendo *B* = $\forall x \ (x \in B)$

la Unión $A \cup B = \forall x (x \in A \vee x \in B)$

- **Intersección de clases o clase intersección**: clase intersección de dos clases A y B es la clase formada por los elementos que pertenecen a una y a la otra clase.

  la Intersección $A \cap B = \forall x (x \in A \wedge x \in B)$

- **Diferencia**: clase diferencia es la clase formada por los elementos de A que no pertenecen a B. Equivale a la intersección de la clase A con el complemento de la clase B.

  la Diferencia $A - B = \forall x (x \in A \wedge x \notin B) = A \cap \bar{B}$

Relaciones entre las clases

- **Identidad o equivalencia**: puede suceder que todos los miembros de una clase lo sean también de otra, y viceversa.

  Siendo *A* = $\forall x$ *(* $x \in A$ *)* y siendo *B* = $\forall x$ *(* $x \in B$ *)*

  la Diferencia $A = B = \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

- **Inclusión**: cuando todos los miembros de una clase pertenecen a otra. Se dice que la clase A es un subconjunto de la clase B, siendo la clase B un supraconjunto de A.

  la Inclusión $A \subset B = \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

- **Disyunción**: cuando ningún elemento de B pertenece a A, ni ningún elemento de A pertenece a B.

  la Disyunción $A | B = \forall x (x \in A \rightarrow x \notin B) \wedge (x \in B \rightarrow x \notin A)$

Diagramas de Venn

John Venn, matemático y filósofo, introdujo el sistema de representación en julio de 1880 con la publicación de su trabajo titulado «De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos» y sobre todo en su libro "Lógica Simbólica", publicado en 1881.

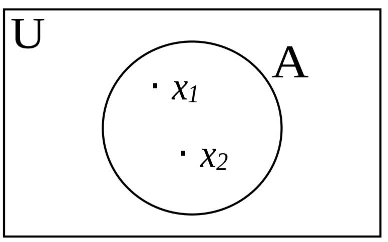
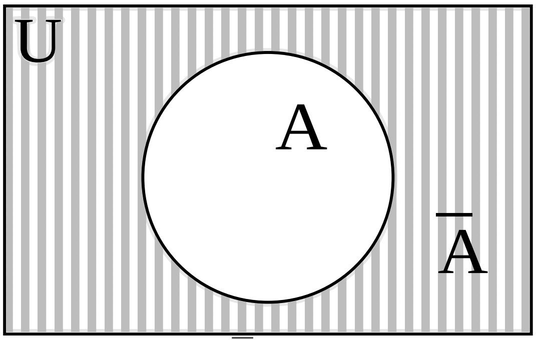


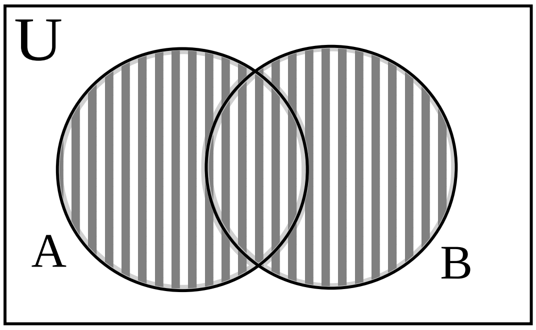
Diagrama de Venn

Un diagrama de Venn consiste en un rectángulo que representa la clase Universal. Por lo tanto, nada se puede representar fuera de ese rectángulo. Dentro del rectángulo se representan las clases en forma de círculo. Un elemento dentro del universo será representado por un punto.

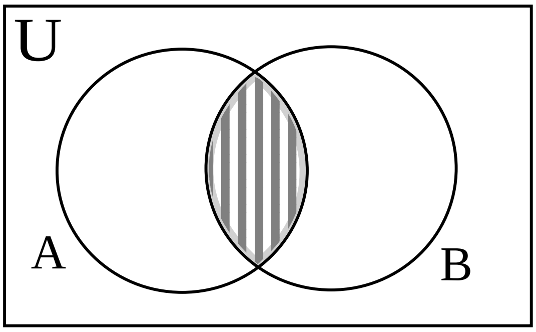
Representación de Operaciones y Relaciones



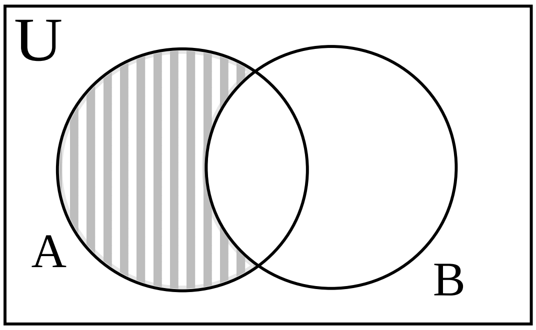
Complemento: $\overline{A}$



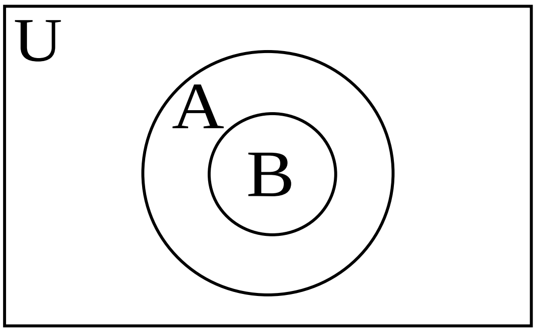
Unión: $A \cup B$



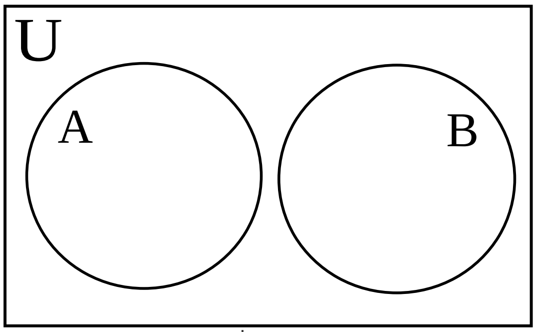
Intersección: $A \cap B$



Diferencia: A-B



Inclusión $A \supset B = B \subset A$



Disyunción: $A | B$

Leyes del cálculo de clases

Algunas de las reglas más importantes que resultan útiles para los algoritmos de cálculo de deducción de proposiciones son:

Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

Distribución: $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Involución: $A=\overline{\overline{A}}$

De Morgan: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Absorción: $A\cap(A\cup B)=A$;
$A\cup(A\cap B)=A$

Contraposición: $A\subset B=\overline{B}\subset\overline{A}$

Transitividad: $[(A\subset B)\wedge(B\subset C)]\rightarrow(A\subset C)$

Junto a estas leyes específicas se mantienen las mismas reglas del cálculo de enunciados, en las relaciones de unas proposiciones con otras.

Lógica de relaciones

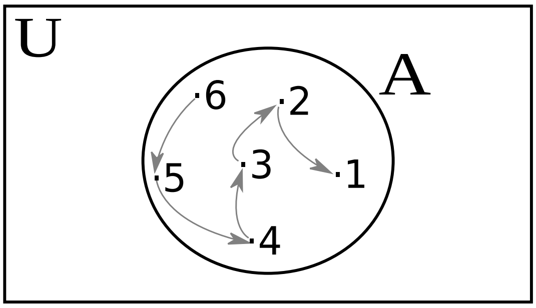
La lógica de relaciones analiza las conexiones lógicas entre elementos pertenecientes a conjuntos. La Relación se define, entonces, como un objeto matemático utilizado para describir conexiones entre los elementos de un conjunto. Analíticamente las relaciones se pueden agrupar en dos tipos: de equivalencia y de órden.

Las equivalencias son las que permiten clasificar los elementos de un conjunto. El objetivo del estudio de las equivalencias es ver el resultado de que toda equivalencia da lugar a una clasificación de los elementos del conjunto y viceversa, toda clasificación (o partición) de un conjunto procede de una relación de equivalencia.

Los órdenes son los que ordenan los elementos de un conjunto. El objetivo del estudio de los órdenes es conocer diferentes tipos de órdenes que existen y, en particular, entender la estructura de orden de los naturales, de los enteros, de los racionales y de los reales. Para ello enunciaremos las propiedades que distinguen cada uno de estos órdenes de todos los demás.

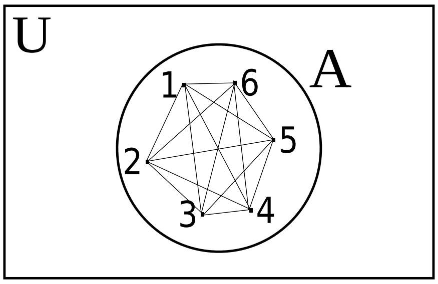
Por ejemplo, si tenemos el conjunto A = { 1; 2; 3; 4; 5; 6 } y definimos una relación R con el “sucesor de” cada elemento tendremos los siguientes pares: (2, 1); (3, 2); (4, 3); (5, 4); (6, 5). Podemos simbolizar esta relación de pertenencia como *R(x,y)* o también se puede simbolizar como *xRy* donde *R* simboliza la relación “sucesor de”, *x* es el sucesor e *y* es el antecesor.

Todo esto se puede graficar mediante el diagrama de Venn



Componentes de la lógica de relaciones

Producto Cartesiano: Si relacionamos todos los elementos del conjunto A sin ninguna restricción, para cada elemento le corresponderá otro elemento en una relación que se puede denominar "todos contra todos". Entonces existirán tantos pares ordenados como el cuadrado de la cantidad de elementos:



(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6);

(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6);

(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6);

(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6);

(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6);

(6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6);

Se dice entonces que una Relación R en un conjunto A es un subconjunto no vacío del producto cartesiano de A × A.

Dominio: Se denomina dominio de la relación al subconjunto del conjunto A formado por los elementos que tienen una Relación hacia otro elemento.

Se simboliza como: $D(R) = x \in A \wedge \exists y, xRy$

y se interpreta como: el Dominio de la Relación ***R*** es todo ***x*** que pertenece al conjunto ***A,*** y que existe algún ***y*** tal que el ***x*** se relaciona con ese ***y***.

Co-Dominio o contradominio: El contradominio de una relación R en el conjunto A es el sub-conjunto de elementos de A con los que algún elemento está relacionado.

Se simboliza como: $D'(R) = x \in A \wedge \exists y, yRx$.

y se interpreta como: el Co-Dominio de la Relación ***R*** es todo ***x*** que pertenece al conjunto ***A,*** y que existe algún ***y*** tal que el ***y*** se relaciona con ese ***x***.

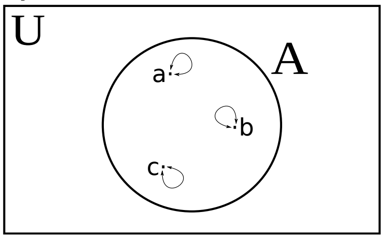
Relaciones

Relación Inversa: La relación inversa de una relación R es la relación formada por las parejas de R invirtiendo el orden de los elementos en cada pareja. Se denota por R^{-1} . Es decir,

$$R^{-1} = (a\,,b) \in A \times A \wedge bRa$$

De la definición se desprende inmediatamente que $D(R^{-1}) = D'(R)$ y $D'(R^{-1}) = D(R)$.

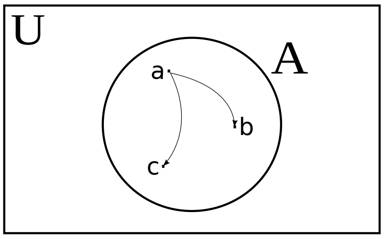
Relación Reflexiva: Una relación definida en un conjunto se llama reflexiva si cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.



R reflexiva ⇔ ∀x ∈ A, xRx,

Un ejemplo de relación reflexiva puede ser la relación de elementos múltiplos ya que cada número es múltiplo de sí mismo (al multiplicar por la unidad).

Relación Irreflexiva: Una relación es irreflexiva si ningún elemento se relaciona consigo mismo.



R irreflexiva ⇔ ∀x ∈ A, ¬(xRx) .

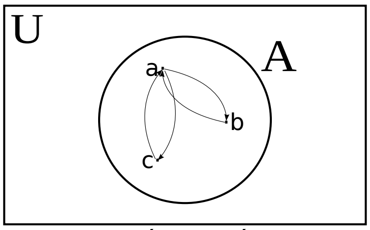
Un ejemplo de relación irreflexiva puede ser “distinto de” ya que ningún número es distinto de si mismo.

Simetría: Una relación es **simétrica** si para cada pareja de la relación, la pareja en orden inverso también forma parte de la relación. Es **asimétrica** si para toda pareja en la relación se cumple que su inversa no está en la relación. Por ultimo, una relación **antisimétrica** es aquella en que las únicas parejas cuyas inversas también son parte de la relación son las parejas de elementos iguales.

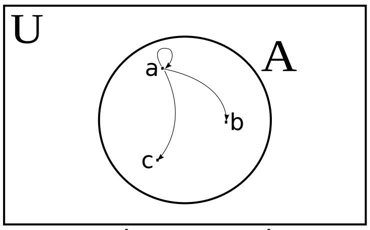
R simétrica ⇔ ∀x, y(xRy → yRx),

R asimétrica ⇔ ∀x, y(xRy → y¬Rx),

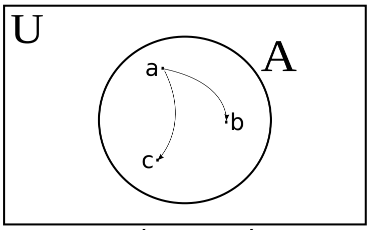
R antisimétrica ⇔ ∀x, y((xRy ∧ yRx) → x = y).



Relación Simétrica



Relación Antisimétrica



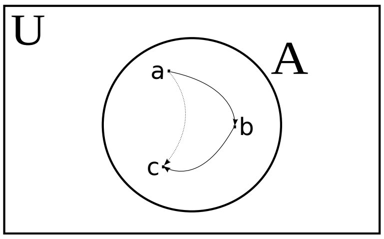
Relación Asimétrica

Ejemplos: de relación simétrica: la relación “hermano/a de”: “Bart es hermano de Lisa” luego “Lisa es hermana de Bart”.

De relación asímétrica: la relación “padre de”: “Homero es padre de Bart” la inversa “Bart es padre de Homero” es falsa.

De relación antisimétrica: la relación “divisor de”, cada número tiene como divisor a sí mismo.

Relación Transitiva: es aquella donde siempre que un elemento se relaciona con un segundo elemento, y éste con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.



R transitiva ⇔ ∀*x, y, z((xRy* ∧ *yRz)* → *xRz)*.

Como ejemplo la relación “ser descendiente de” en la cual los hijos son descendientes de los padres, y a su vez los padres lo son de los abuelos, por transitividad también los hijos son descendientes de los abuelos.

Relaciones de Equivalencia:

Se define como equivalencia a una relación cuando es reflexiva, simétrica y transitiva. Si el elemento a está relacionado con b, lo denotamos a ∼ b. La equivalencia, es la herramienta matemática para hacer clasificaciones.

Al ser una relación simétrica se cumple que la relación inversa es ella misma.

Al ser una relación transitiva se cumple que la clase se subdivide en subclases integradas sólo por los elementos relacionados entre sí, a estas subclases se las denomina clasificación o partición. Cada elemento de la clase es representativo de una partición ya que puede estar en sólo una de ellas.

Citemos un ejemplo: En el conjunto de polígonos del plano definimos la relación “tener el mismo número de lados”. Se trata de una relación de equivalencia que crea en el conjunto de polígonos la partición en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. . .

Relaciones de Orden

Una relación R definida en un conjunto A es un orden si todo elemento de A está en el dominio o en el contradominio y es asimétrica y transitiva. Recordemos que por definición los elementos de un conjunto no están ordenados, el proceso de ordenamiento supone una definición de una relación de orden apropiada.

Para indicar el orden se debe señalar qué elementos preceden a cuales utilizando la relación *a* precede a *b*, entonces (*a, b)* ∈ *R*. Como la pareja inversa *(b, a)* no debe pertenecer a la relación, se exige que la relación de orden sea asimétrica. Además debe ser transitiva para que si un primer elemento preceda a un segundo elemento, este debe preceder obligatoriamente a un tercer elemento relacionado.

El par (A, R) se llama conjunto ordenado. El símbolo a < b se usa para denotar *(a, b)* ∈ *R*. y se lee cómo “a precede a b”, “b sucede a a”, “a es menor que b” o “b es mayor que a”.

Por ejemplo en el conjunto de los polígonos del plano decimos que un polígono es menor que otro si tienen el mismo número de lados y su área es menor. Se trata de un orden. Obsérvese que no se define ninguna relación entre, por ejemplo, un triángulo y un cuadrado.

La relación inversa de una relación de orden es también una relación de orden y se denomina orden invertido.

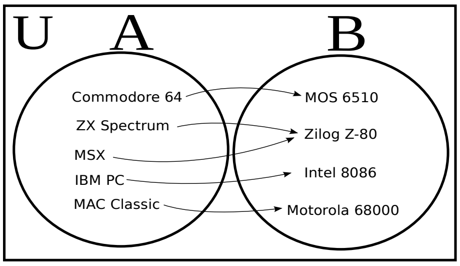
Lógica Funcional

Se define como función a una relación entre los elementos de dos conjuntos, uno conocido como conjunto de partida y el otro como conjunto de llegada. El concepto es parecido al de relación, donde se relacionan elementos de un conjunto entre sí. Sin embargo hay una diferencia esencial. En una función se exige que cada elemento del conjunto inicial esté relacionado sólo con uno del conjunto final. La consecuencia inmediata es que la inversa de una función (es decir los elementos del conjunto final asociados con los que les corresponden del inicial) en general, no es otra función.

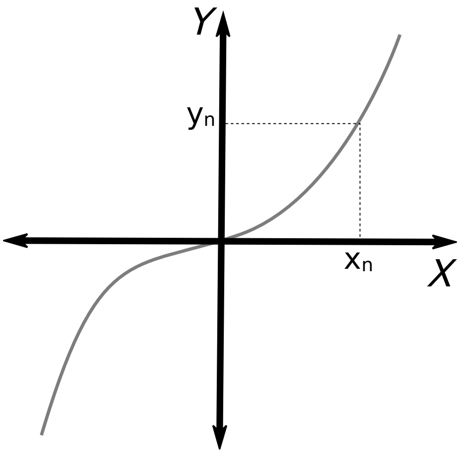
Observemos como un ejemplo el siguiente predicado:

“la computadora Commodore 64 utiliza el microprocesador MOS 6510”.

Aquí tenemos dos elementos: “la Commodore 64” que pertenece al conjunto de las computadoras, y el “MOS 6510” que pertenece al conjunto de los microprocesadores. Podemos simbolizar esta relación de pertenencia como *R(x,y)* o también se puede simbolizar como *xRy* donde *R* simboliza la relación “utiliza”, *x* pertenece al conjunto “computadoras” e *y* pertenece al conjunto de “microprocesadores”. A esta relación R la satisfacen muchos pares de elementos, asi tenemos por ejemplo: (“ZX Spectrum”, “Zilog Z80”) ; (“MSX”, “Zilog Z80”); (“IBM PC XT”, “intel 8086”); (“Apple MAC Classic”, “motorola 68000”). Cada par de elementos que satisfacen una relación se denominará *par ordenado.*



Otra forma de representar funciones en modo gráfico, además del diagrama de Venn, es mediante un plano cartesiano con dos ejes que representan el conjunto de partida (las X) y el conjunto de llegada (las Y). Esto es muy útil si los conjuntos tienen una alta cardinalidad, por ejemplo cuando queremos representar funciones entre conjuntos de números reales.



Por definición entonces una función f del conjunto A al conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano A × B en el que no hay dos parejas que tengan el mismo primer elemento. El conjunto A se llama inicial, y el conjunto B, final y se denotan con el símbolo *f : A → B.*

El Dominio de una función f : A → B, es el subconjunto de A formado por elementos relacionados con algún elemento de B. entonces:

$$D(f)=x\in A \wedge \exists\, y\in B, (x,y)\in f \quad .$$

El contradominio o codominio de una función f : A → B, es el subconjunto de B formado por elementos con los que se relaciona algún elemento de A. A este conjunto también se lo llama conjunto imagen. entonces:

$$D'(f)=y\in B \wedge \exists\, x\in A, (x,y)\in f \quad .$$

Composición de funciones: si una función g toma como dominio al conjunto imagen de una función f, entonces hablamos de una composición de f con g. Se lo simboliza como

$g \circ f = g(\ f(x)\ )$

Funciones notables

Función Constante: Si el Dominio coincide con el conjunto inicial y su codominio está formado por un único elemento.

$D(f)= A \ \wedge\ D'(f) = \{y\}$

Función Inyectiva: si su dominio es todo el conjunto inicial y las imágenes de elementos diferentes son diferentes, o sea que todo elemento del conjunto de partida tiene una imagen y esta es distinta a la de cualquier otro elemento del origen. Lo expresamos como

$x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$ para elementos *x, y* del conjunto de partida .

Función Suprayectiva: si el codominio coincide con el conjunto de llegada, o sea que todo el conjunto imagen está relacionado con un elemento del conjunto origen.

$D'(f) = B$

Función Biyectiva: si es inyectiva y suprayectiva.

Función Identidad: Si una función tiene el mismo conjunto de partida y de llegada y la imagen de cada elemento es él mismo. La función identidad se simboliza como id_A y se define como:

$D(id_A) = A \wedge \forall x \in A,\ f(x) = x$

Función Inversa: es aquella que toma como dominio al codominio de una función y su codominio es igual al dominio de la otra función. Dicho de otra forma : si tenemos una funcion $f(x) = y$ y una función tal que $g(y) = x$, entonces g es la función inversa de f. Es importante notar que la composición de las funciones debe ser una función identidad.

$g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B$

A la función inversa se la simboliza como $f^{-1}(x)$. Sólo las funciones biyectivas pueden tener función inversa.

Lógica simbólica

Muchos de los conceptos básicos de la lógica simbólica ya los hemos visto en los módulos anteriores. Ahora vamos a concentrarnos en la función principal de la lógica simbólica que es establecer un lenguaje de signos que permita escribir proposiciones de lógica matemática (especialmente de la aritmética) sin ambigüedades.

Como primera medida llamemos la atención sobre la diferencia entre un lenguaje natural y uno formal. El lenguaje natural es el que se establece entre seres humanos a partir de la necesidad de comunicación y siguiendo una línea evolutiva que depende de cuestiones principalmente socioculturales, lo que hace que este lenguaje sea muy flexible pero por contrapartida poco exacto. En cambio un lenguaje formal tiene un objetivo específico correctamente enunciado, del cual no se aparta y cuando surge alguna controversia acerca del significado de algún símbolo se debe indicar específicamente como salvar esa ambigüedad.

Habíamos indicado que el núcleo principal del lenguaje es la oración y en el caso de un lenguaje formal esta se denomina **proposición**, y que esta proposición tiene solamente dos posibles estados: es **verdadera** o es **falsa**.

Mediante proposiciones podemos establecer un método de generar conocimiento: a partir de una serie de conocimientos (**premisas**) podemos obtener un nuevo conocimiento de tipo más general (**conclusión**), a este método se lo denomina **razonamiento** (deducción, inferencia, argumento). Si un razonamiento está realizado conforme a reglas lógicas se puede decir que un razonamiento es formalmente válido si la premisas son verdaderas y la conclusión también lo es. En otras palabras, el razonamiento tiene **validez**.

Entonces este lenguaje formal debe tener reglas **sintácticas** bien definidas. Con esto queremos decir que las oraciones se construyen de una manera única. Las expresiones admitidas por el lenguaje se denominan fórmulas. Además, cada expresión debe tener un significado claro, entonces está dotado de una **semántica** clara.

Algunos ejemplos de formalización de oraciones:

Estudio todas las unidades temáticas	e
No estudio todas las unidades temáticas	$\neg e$
Apruebo la asignatura	a
Estudio todas las unidades temáticas y apruebo la asignatura	$e \land a$
Si estudio todas las unidades temáticas entonces apruebo la asignatura	$e \rightarrow a$

El lenguaje formal

El lenguaje consta de tres categorías:

a) Un conjunto de símbolos válidos, equivalentes a palabras. El conjunto de símbolos es el alfabeto del lenguaje. Ya los hemos definido en los módulos anteriores

b) Un conjunto de reglas de combinación entre símbolos que permiten la enunciación de fórmulas, lo que sería la gramática del lenguaje.

c) Un conjunto de reglas de transformación de formula que permiten pasar de unas expresiones a otras.

El conjunto de símbolos válidos ya lo hemos definido en los módulos anteriores, entonces solo nos limitaremos a repasarlos:

$\neg$ negación

$\wedge$ conjunción

$\vee$ disyunción

$\underline{\vee}$ disyunción exclusiva

$\rightarrow$ condicional

$\leftrightarrow$ bicondicional

p, q, r, s,... proposiciones

( ) paréntesis

La disyunción simple y la exclusiva

La operación de disyunción tiene dos posibles formas. En la primera, la vista hasta ahora, la conjunción resulta en un valor verdadero cuando al menos una de las proposiciones que la componen es verdadera. Observemos el siguiente ejemplo: supongamos que la vereda está mojada, entonces afirmamos "*llovió o alguien estuvo baldeando*". ¿En qué casos es verdadera esta afirmación?

- Cuando efectivamente ha llovido,
- cuando efectivamente han baldeado la vereda
- y por último si ha llovido antes o después de baldear la vereda también es verdadera.

Sólo si no ha llovido y tampoco han baldeado resulta falsa la afirmación.

Pero veamos otro caso, están reunidos 3 amigos dos de ellos simpatizantes de equipos rivales de la liga paranaense de fútbol y surge una apuesta entre dos de ellos en la cual se especifica claramente, "*si en la próxima fecha un equipo triunfa y el otro no, el simpatizante del equipo de fútbol que pierda paga una comida para todos*". El tercer amigo entonces hace la siguiente afirmación: "*entonces... voy a comer gratis si* ***gana Sportivo Urquiza o gana Peñarol***", para resolver la parte de la disyunción... ¿que posibilidad tiene de comer gratis? Según lo que hemos visto en el párrafo anterior pareciera que en 3 de 4 posibilidades, pero en realidad lo hace sólo en 2 de 4 casos:

- Si el ganador es Sportivo Urquiza y no gana Peñarol.

- Si el ganador es Peñarol y no gana Deportivo Urquiza.

¿En qué casos la disyunción es falsa y pierde la oportunidad de comer gratis?

– Si ambos equipos no ganan su partido (pierden o empatan).

– Si ambos equipos ganan su partido.

Expresado como tabla de verdad:

Gana Sportivo Urquiza	Gana Peñarol	Come gratis
F	F	NO (F)
F	V	SI (V)
V	F	SI (V)
V	V	NO (F)

Este tipo de disyunción se denomina disyunción excluyente o exclusiva y es válida solo cuando una de las premisas es verdadera y la otra debe ser obligatoriamente falsa.

Métodos de razonamiento

Un ejemplo de razonamiento (silogismo):

Todos los intelectuales usan anteojos.

Harry Potter usa anteojos.

Por lo tanto, Harry Potter es un intelectual.

A este tipo de razonamiento lógico se lo denomina Razonamiento Deductivo. Quizás se puede discutir la veracidad de las premisas, queda claro que la primer proposición es falsa ya que es muy lógico encontrar gente que no utiliza anteojos y es un intelectual, sin embargo el método de razonamiento es correcto según la lógica, si ambas premisas hubieran sido verdaderas sin ninguna duda, entonces la conclusión sería verdadera. A las premisas de un razonamiento se las denomina Hipótesis. Si existen premisas que no puede demostrarse su veracidad y se establece que son verdaderas, se las denomina Axiomas.

El Razonamiento Deductivo parte de premisas universales y arriba a una conclusión particular.

Otra forma de razonamiento es el Razonamiento Inductivo, originalmente se consideraba que la inducción era un razonamiento en el cual partimos de premisas particulares y arribamos a una conclusión que es una generalización, por ejemplo:

Ana es humana y tiene 2 ojos

José es humano y tiene 2 ojos

María es humana y tiene 2 ojos

Alberto es humano y tiene 2 ojos

Amelia es humana entonces Amelia tiene 2 ojos.

En la actualidad la definición de Inducción va más allá de una simple progresión de lo particular a lo general, por ejemplo los métodos probabilísticos y estadísticos que tienen cierto rigor de verdad pero no tienen una implicación directa con la conclusión.

En el caso de las premisas, hablamos de verdad o falsedad como una cuestión empírica (que se debe demostrar por la experiencia). En cambio en el caso de la conclusión se habla de Validez en cuanto a que el razonamiento se ajusta a las reglas de la lógica.

Tautologías, contradicciones y contingencias

Cuando se evalúan las premisas de un razonamiento pueden surgir premisas cuyo valor siempre sea verdadero, por ejemplo: "Boca Juniors o River Plate, no va a ganar el campeonato X este año", no importa quién sale campeón, como el campeón del torneo X es uno sólo, siempre uno de los dos equipos al menos va a ser perdedor a la fuerza. Esta premisa que siempre es verdadera se denomina **tautología**.

En cambio, puede existir una premisa que siempre sea falsa, por ejemplo: "Este año el campeonato X va a ser ganado por river y también por boca", a este tipo de premisa que siempre es falsa se la denomina **contradicción**.

Por último, cuando una expresión compleja depende de los valores de verdad de las premisas simples y del resultado de las operaciones, pudiendo ser verdadera o falsa, se dice que es una **contingencia**.

Tablas de verdad

Hemos mencionado que las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas. En una proposición simple el hecho de determinar su veracidad pasa por una corroboración empírica, pero en una proposición compleja depende además de la corroboración de las proposiciones simples, del papel que juegan los operadores en la expresión.

Si una proposición compuesta está formada por la negación de una proposición simple, simbólicamente ¬p, entonces:

veracidad de p	Veracidad de ¬p
verdadero	falso
falso	verdadero

Una proposición compuesta formada por dos proposiciones simples (las simbolizaremos p y q) y una operación de disyunción (Λ) tiene el siguiente valor de veracidad:

Veracidad de *p*	Veracidad de *q*	Veracidad de *p* **Λ** *q*
falso	falso	falso
falso	verdadero	falso
verdadero	falso	falso
verdadero	verdadero	verdadero

Lo cual se interpreta como: una expresión del tipo p Λ q es verdadera sólo cuando ambas proposiciones simples p y q son verdaderas.

Una proposición compuesta formada por dos proposiciones simples y una operación de conjunción (V) tiene el siguiente valor de veracidad:

Veracidad de *p*	Veracidad de *q*	Veracidad de *p* V *q*
falso	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
verdadero	falso	verdadero
verdadero	verdadero	verdadero

Lo cual se interpreta como: una expresión del tipo p V q es verdadera cuando alguna de las proposiciones simples p y q es verdadera.

Una proposición compuesta formada por dos proposiciones simples y una operación de conjunción exclusiva ($\underline{V}$) tiene el siguiente valor de veracidad:

Veracidad de *p*	Veracidad de *q*	Veracidad de *p* $\underline{V}$ *q*
falso	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
verdadero	falso	verdadero
verdadero	verdadero	falso

Lo cual se interpreta como: una expresión del tipo p $\underline{V}$ q es verdadera cuando una de las proposiciones simples (p o q) es verdadera y la otra falsa.

Una proposición compuesta formada por dos proposiciones simples y una implicación (→) tiene el siguiente valor de veracidad:

Veracidad de *p*	**Veracidad de *q***	**Veracidad de *p* → *q***
falso	falso	verdadero
falso	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
verdadero	verdadero	verdadero

Lo cual se interpreta como: una expresión del tipo p → q es verdadera cuando el antecedente y el consecuente p y q son verdaderos o si el antecedente es falso.

Una proposición compuesta formada por dos proposiciones simples y una operación de doble implicación (↔) tiene el siguiente valor de veracidad:

Veracidad de *p*	**Veracidad de *q***	**Veracidad de *p* ↔ *q***
falso	falso	verdadero
falso	verdadero	falso
verdadero	falso	falso
verdadero	verdadero	verdadero

Lo cual se interpreta como: una expresión del tipo p ↔ q es verdadera cuando ambas proposiciones simples p y q tienen la misma veracidad.

Tablas de verdad en Tautologías y Contradicciones

Veamos el caso de tener una expresión como la siguiente: p Λ q → p.

p	***q***	***p* Λ *q***	***p (idem)***	***(p* Λ *q)* → *p***
falso	falso	falso	falso	verdadero
falso	verdadero	falso	falso	verdadero
verdadero	falso	falso	verdadero	verdadero
verdadero	verdadero	verdadero	verdadero	verdadero

Nos hallamos en presencia de una tautología. Siempre es verdad.

Por otra parte, evaluemos una expresión más compleja: (p Λ q) ↔ (¬p V ¬q)

p	*q*	*p Λ q*	*¬p*	*¬q*	*¬p V ¬q*	*(p Λ q) ↔ (¬p V ¬q)*
F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	F

Como vemos, es siempre falsa, nos hallamos pues, frente a una contradicción.

Bibliografía

Introducción a la Lógica y al Análisis Formal, *Sacristán, Manuel*. Ediciones Ariel S.A. Barcelona 1964.

Introducción a la Lógica (para Informáticos), Luis M. Pardo , 22 de mayo de 2006. disponible en: http://personales.unican.es/pardol/Docencia/Logica/LogicaI.pdf