CURSO DE INGRESO 2025

UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
LA MATANZA

INGENIERÍA

AUTORIDADES DE LA UNLaM

Rector /
Prof. Dr. Daniel Eduardo Martínez
Vicerrector /
Dr. Fernando Luján Acosta
Vicerrector Ejecutivo /
Mag. Gustavo Duek

Decano del Departamento de Ciencias Económicas /
Dr. Alejandro Martínez
Decana del Departamento de Humanidades y Ciencias Sociales /
Esp. Cecilia Laclau
Decano del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas /
Ing. Gabriel Blanco
Decano del Departamento de Arquitectura y Urbanismo /
Arq. Enrique Amoroso
Decano del Departamento de Derecho y Ciencia Política /
Dr. Luis Busnelli
Decana del Departamento de Ciencias de La Salud
Dra. Fabiana Lartigue
Decana Organizadora del Departamento de Odontología
Odont. Mabel Manzelli
Decano de la Escuela de Posgrado /
Dr. Rubén Marx
Decana de la Escuela de Formación Continua /
Dra. María Victoria Santorsola
Decana de la Escuela de Artes y Medios de Comunicación/
Mag. Lorena Turriaga

Vicedecana del Departamento de Ciencias Económicas /
Mag. Romina Kabobel
Vicedecano del Departamento de Humanidades y Ciencias Sociales /
Mag. Carlos Roba
Vicedecano del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas /
Ing. Jorge Eterovic
Vicedecano del Departamento de Derecho y Ciencia Política /
Dr. Luis Deuteris
Vicedecano del Departamento de Ciencias de La Salud /
Dr. Mario Elmo

Vicedecano Escuela de Artes y de Medios de Comunicación /
Lic. Ariel Dell'Aquila

Secretario General /
Lic. Sebastián Garber
Secretaria Académica /
Mag. Ana Bidiña
Secretario de Ciencia y Tecnología
Lic. Juan Pablo Piñeiro
Secretario de Extensión Universitaria /
Lic. Roberto Ayub
Secretario Administrativo /
Cdor. Leonardo Minoli
Secretario Legal y Técnico /
Dr. Sergio Olivar
Secretario de Informática y Comunicaciones /
Ing. Osvaldo Spósitto

Prosecretaria General /
Lic. Ana Turdo
Prosecretario de Planeamiento y control de Gestión /
Dr. Federico Faggionatto
Prosecretaria Académica /
Lic. Yanina Martínez
Prosecretario de Ciencia y Tecnología /
Cdor. Adrian Sancci
Prosecretario Extensión Universitaria /
Lic. Nicolás Martínez
Prosecretario Administrativo /
Cdor. Mariano Guerra
Prosecretario Legal Y Técnico /
Dr. Salvador Julio Postiglioni
Secretaria Técnica /
Dra. María Mercedes González
Prosecretario de Informática y Comunicaciones
Ing. Claudio D´Amico
Prosecretario de Rectorado
Mag. Darío Pereyra
Prosecretario de Relaciones Internacionales /
Dr. Federico Scremin

Departamento de Ingeniería e
Investigaciones Tecnológicas

MANUAL PARA EL CURSO DE INGRESO 2025

Universidad Nacional de La Matanza

Bidiña, Ana
Manual para el curso de ingreso 2025 : Ingeniería / Ana Bidiña ; Yanina Martínez. - 1a ed. - San Justo : Universidad Nacional de La Matanza, 2024.
352 p. ; 28 x 20 cm.

ISBN 978-987-8931-91-3

1. Ingeniería. 2. Matemática. 3. Geometría. I. Martínez, Yanina. II. Título.
CDD 620.007

Florencio Varela 1903 (B1754JEC) | San Justo | Pcia. Buenos Aires
Tel.: (54-11) 4480-8900
e-mail: editorial@unlam.edu.ar
www.unlam.edu.ar

ISBN 978-987-8931-91-3

Hecho el depósito que marca la ley 11.723

Estimado aspirante:

Deseo, por este medio, expresarte la más calurosa bienvenida y felicitarte por tu decisión de iniciar o reanudar tus estudios universitarios en la Universidad Nacional de La Matanza. Esta institución se ha definido como una “Universidad para la comunidad”; con el propósito, desde su comienzo, de ser instrumento y factor de cambio, servir a las necesidades de la comunidad y contribuir a la formación de la cultura.

Por este motivo quiero acompañar tus primeros pasos en esta Casa, con el propósito de alentar y favorecer tu permanencia en ella. En ese contexto, te propongo que leas atentamente el contenido del Manual del Curso de Ingreso, en donde se detalla la oferta académica y toda la información acerca del curso, incluidas las asignaturas, fechas de clases y exámenes.

En la Universidad encontrarás exigencia, porque nuestro compromiso indeclinable es la búsqueda constante de la excelencia en el cometido de nuestras funciones centrales: docencia, investigación y extensión. Este compromiso comienza con el Curso de Ingreso, porque somos conscientes de nuestro rol protagónico en la formación de ciudadanos -técnicos, profesionales y científicos- para una Argentina que continúe desarrollando potencialidades y valores propios.

También hallarás espacios adecuados para el desarrollo de la vida universitaria. Pero lo más importante que encontrarás es un cuerpo docente de excelencia, comprometido y un alumnado dedicado al estudio e identificado con la institución.

Con estas convicciones, te invito a adoptar desde tu primer día en esta Casa, la ACTITUD UNIVERSITARIA que necesitarás en cada uno de los actos de esta provechosa etapa de tu vida que estás comenzando.

Prof. Dr. Daniel Eduardo Martínez
RECTOR

ÍNDICE

GUÍA DEL CURSO DE INGRESO

El Curso de Ingreso a la Universidad Nacional de La Matanza es una instancia académica que tiene como objetivo a profundizar la articulación entre el nivel de enseñanza secundario y el universitario. Situado al inicio de la experiencia universitaria presenta un nuevo escenario que requiere del acompañamiento institucional.

En este sentido, se espera por parte de los estudiantes un rol activo en la apropiación de la información que regula y ordena administrativamente el Curso de Ingreso. A tales efectos, se informan los **espacios y sitios web definidos para acompañar** el trayecto formativo del Curso de Ingreso.

INGRESANTES

ingresantes.unlam.edu.ar

Es el sitio web en el cual realizó la preinscripción al Curso de Ingreso. En este sitio puede consultar el estado de su inscripción, las fechas, horarios y aulas de cursada y de examen, consultar sus notas, inscribirse a recuperatorios y notificarse de otras comunicaciones.

Una de las responsabilidades preliminares por parte de los estudiantes es obtener la información necesaria para el inicio de la cursada en el **Sitio de Ingresantes**. En las 48 horas previas al inicio de la cursada o del examen, deberá consultar los días, horarios y espacios, a los efectos de iniciar su cursada o examen de modo puntual y sin demoras.

¿Cómo ingresar al sitio? Puede acceder al sitio **ingresantes.unlam.edu.ar** utilizando su DNI como usuario y la contraseña que generó el día de la preinscripción.

¿No recuerda la contraseña? Puede recuperarla seleccionando la opción ¿Olvidó su contraseña? en el sitio de Ingresantes, le llegará un correo al mail que registró durante la preinscripción.

¿No tiene acceso al mail? Si no puede ingresar al mail que registró para inscribirse, puede enviar un correo al cau@unlam.edu.ar para solicitar el cambio.

¿No ve las materias asignadas? Debe enviar un correo a alumnos@unlam.edu.ar detallando su DNI, nombre y apellido.

MIEL INGRESO

mielingreso.unlam.edu.ar

Es la plataforma de gestión de educación a distancia desarrollada por la UNLaM. Miel Ingreso brinda un espacio de comunicación entre los estudiantes y los docentes, y acceso al contenido del Curso de Ingreso. Aquí encontrará 4 carpetas: 3 corresponden a las materias del Curso de Ingreso y la cuarta, Administración Curso de Ingreso, tiene información importante sobre la cursada.

En las carpetas de las materias encontrarás el material de estudio, guías para abordar el material por clase y vídeos con las explicaciones de los temas centrales. Mientras que, en la carpeta **Administración Curso de Ingreso,** encontrará la información que regula y ordena administrativamente el Curso de Ingreso:

- **Cursada**: cronograma, fechas, modalidad, normativa y requisitos.
- **Exámenes**: modalidad, duración, publicación de notas y requisitos.
- **Requisitos de aprobación**: cómo se calcula el puntaje.
- **Revisión de examen**: requisitos y plazos.
- **Recuperatorios**: instancias, fechas, modalidad, publicación de notas y requisitos.
- **Mapa de la UNLaM**: encuentre su aula.

¿Cómo ingresar al sitio? Puede acceder al sitio mielingreso.unlam.edu.ar utilizando su DNI como usuario y contraseña.

¿Cambió la contraseña y no la recuerda? Puede recuperarla seleccionando la opción Olvidé mi contraseña en Miel Ingreso y le llegará un correo al mail que registró durante la preinscripción en el sitio de Ingresantes.

¿No tiene acceso al mail? Si no puede ingresar al mail que registró para inscribirse, puede enviar un mail a miel@unlam.edu.ar para solicitar el cambio.

¿No ve las materias en MIeL Ingreso? Debe enviar un correo a alumnos@unlam.edu.ar detallando su DNI, nombre y apellido.

DIRECCIÓN DE ALUMNOS

Es el espacio en el que realizó la inscripción al Curso de Ingreso y retiro el presente manual. La Dirección de Alumnos es un espacio de consulta y orientación sobre la cursada, los exámenes, el régimen de aprobación y las instancias de recuperatorios.

El horario de atención es de lunes a viernes de 08:00 a 21:30 h y los sábados de 80:00 a 14:00 h. Los canales de consulta son el correo alumnos@unlam.edu.ar y el teléfono 4480-8900 (interno: 8866).

Equipo de coordinación:
Sandra Rocaro - Silvia Gómez
Pablo Medina

Seminario de Comprensión y Producción de Textos

1.INTRODUCCIÓN

LECTURA Y ESCRITURA ACADÉMICAS

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Se interioricen de la propuesta pedagógica de la asignatura.
- ✓ Conozcan el material de estudio, el programa y la metodología de trabajo.
- ✓ Reflexionen sobre lo que significa leer y escribir en la universidad.
- ✓ Se comprometan en el cumplimiento del contrato pedagógico.

FICHA DE CLASE 1

1.1 ¿CÓMO LEER ESTE MANUAL?

Esta sección del manual de ingreso a la UNLaM correspondiente a la materia Seminario de Comprensión y Producción de Textos está organizada en dos partes. La primera corresponde a los módulos teórico-prácticos, diseñados para la apropiación de conocimientos respecto de la lectura y escritura de géneros académicos.

Al finalizar los módulos **4** y **9** vas a encontrar que te remitimos a la plataforma MIeL, ahí vas a encontrar el **ANEXO** con los módulos **5** y **10** que presentan actividades de integración para la primera y segunda parte del manual. En el mismo anexo, se encuentran los módulos **11 y 12** con modelos de examen.

También vas a encontrar en MIeL textos académicos relacionados con la carrera que elegiste. Estos materiales serán abordados de acuerdo con el requerimiento de tu profesora o profesor para que los trabajes de manera presencial o virtual. Los vas a reconocer porque aparecerá el siguiente ícono:

1.1.1 Recomendaciones

Te aconsejamos leer todo el manual antes de comenzar el curso para que vayas conociendo de antemano los temas a trabajar. Es fundamental que leas y conozcas este manual en detalle ya que es único e irremplazable. Si necesitás algún tipo de apoyo, solicitalo a las profesoras y los profesores de Seminario que están capacitados y al tanto de todo lo que se exige para aprobar la materia.

Los exámenes corregidos de esta materia son confidenciales y **no se venden en ningún lugar**. No somos responsables de los materiales que circulan y se venden fuera de nuestra universidad porque no han sido publicados por Seminario. Consultá siempre con tus profesoras y profesores, son las personas que más saben de esta materia.

> **Te recomendamos que no tomes clases particulares ya que hay cuestiones que solamente se tratan en las clases presenciales y virtuales que dan las y los profes de Seminario. En general las clases particulares no están actualizadas y terminan perjudicándote cuando rendís el examen.**

1.2 ¿QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LAS FICHAS DE CLASE?

Además del manual, contás con los contenidos disponibles en la plataforma MIeL (Materias Interactivas en Línea para Ingresantes). Allí vas a encontrar las FICHAS DE CLASE.

Cada FICHA DE CLASE coincide con uno de los MÓDULOS del manual. En estas fichas vas a encontrar videos explicativos de cada tema y actividades que se suman a las del manual. Es importante que tengas en cuenta que cada clase (presencial o virtual) aborda una temática específica, por eso es fundamental que evites las ausencias, llegadas tarde o salidas anticipadas del aula.

Este ícono que aparece en el manual te indica que en MIeL vas a encontrar la FICHA DE CLASE que corresponde al tema que estás estudiando.

Para acceder a esta plataforma ingresá a https://mielingreso.unlam.edu.ar/principal/home/ y colocá tu número de DNI como usuario y contraseña (tené en cuenta que es la plataforma MIeL de color **azul** que dice “Acceso a MIeL para Ingresantes”, la verde es para estudiantes de grado).

También podés acceder a MIeL usando este código QR:

1.3 PROGRAMA

1.3.1 Fundamentación

El proceso de aprendizaje de esta materia se afirma en la vinculación sistemática de lectura y producción escrita.

El trabajo de lectura, comprensión y producción de textos se desarrolla en relación con los diferentes temas que se abordan en el manual.

Las actividades tienen como objetivo propiciar que los y las estudiantes adquieran y desarrollen las habilidades para la lectura y escritura requeridas en la universidad.

1.3.2 Objetivos

General

- Promover la adquisición de estrategias de lectura y escritura de los géneros académicos que optimicen el aprendizaje de las y los alumnas/os universitarias/os.

Específicos

- Promover la práctica de la lectura crítica y de la escritura académica partiendo de una reflexión sobre los textos.
- Facilitar la adquisición de estrategias de lectura y de escritura, basadas en el conocimiento de la situación de comunicación que se genera a partir de la interacción con los textos.
- Propiciar la interacción entre el lector y los textos.

1.4 CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La evaluación será diseñada de modo tal que permita poner en correlación habilidades de comprensión y producción de textos de género académico.

Todo lo que se vea en las clases, tanto la teoría como la práctica que se lleve a cabo será tema de examen.

El examen tendrá una duración de 90 minutos (este tiempo puede variar según criterio de las autoridades) y constará de dos partes fundamentales:

- Lectura silenciosa de textos académicos.
- Resolución de consignas teórico/prácticas con modalidades diversas de respuesta de parcial: ejercicios de completamiento, de opción múltiple, de justificación de la/s respuesta/s elegida/s, de construcción de respuesta, etc.

En los módulos 11 y 12 vas a encontrar modelos de examen que trabajarás con tu profe y en las fichas de clase correspondientes hay más modelos.

1.5 CONTENIDOS

Grilla de clases/módulos

Clase/ módulo	Contenido del módulo/clase
1	Introducción. Mapa conceptual de la asignatura. Lineamientos del trabajo áulico. La lectura y la escritura en la universidad.
2	Texto, contexto y paratexto. Rasgos inherentes al texto: coherencia y cohesión. Referencia, elipsis, reiteración, repetición y colocación. El uso de conectores.
3	Otros rasgos textuales. Diferencia entre texto, enunciado y discurso. La adecuación. La corrección textual. Conciencia retórica. Ethos académico. Comunidad discursiva. Comunidad académica. Comunidad científica.
4	Géneros discursivos y secuencias textuales. Géneros académicos. Particularidades de los géneros académicos. Los dos polos: Explicación y argumentación. Recursos explicativos y argumentativos.
5	Primera Actividad integradora (módulos 1 a 4). En MIeL.
6	Lectura. Tipos de lectura. Lectura académica. Leer para aprender. Leer para escribir en la universidad. Proceso de lectura. Pasos básicos: lectura global, lectura por párrafos, anotaciones marginales y/o subrayado de ideas centrales, integración en un texto resuntivo.
7	Escritura. Funciones de la escritura. Escribir para aprender. Escribir para producir conocimiento. Proceso de escritura (planificación, puesta en texto, revisión, reescritura).
8	Polifonía enunciativa. Enunciación marcada y no marcada.
9	Géneros académicos producidos por estudiantes. El apunte y el resumen como géneros didácticos académicos. El parcial. Tipos y características. La reformulación de textos académicos.
10	Segunda actividad integradora. (módulos 6 a 9). En MIeL
11	Repaso. Modelo de examen. En MIeL
12	Simulacro de examen. En MIeL

NOTA: Cuando encuentres este ícono quiere decir que el tema que estás trabajando se vincula directamente con otro contenido del manual.

1.6 MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA

NOTA: Aclaramos que se ha respetado la ortografía, sintaxis, marcaciones, etc. de los textos de otros autores que aparecen en el manual tanto para actividades como para lecturas recomendadas. En caso de modificaciones, estas aparecen señaladas.

> **Cada vez que aparezca el ítem ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA vas a tener textos sobre los que trabajar. Las actividades las vas a encontrar dentro de un cuadro como el que está a continuación.**

1.7 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

A. Escribir un texto breve (aproximadamente 20 líneas) a partir de las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué elegiste la UNLaM para cursar tus estudios universitarios?
2. ¿Qué carrera elegiste? ¿Por qué?
3. ¿Qué expectativas tenés sobre el Curso de Ingreso? ¿Qué pensás que puede aportarte el Curso de Ingreso? ¿Y esta materia?

B. Leer el texto que está a continuación completo y marcar las palabras que no conozcan. Tratar de encontrar su significado por cotexto[1] y si no lo logran, buscar en el diccionario de la RAE (https://dle.rae.es/). Luego, resolver las consignas que se encuentran al final del texto. (Para trabajar en grupo)

No hay juegos sin reglas

Un paso de Bambi para la lectoescritura crítica

por Mariano Magnifico

Si está leyendo estas palabras, significa que ha entrado en contacto con un mundo antes desconocido. No está ni en su escuela, ni en su casa, ni en su club, ni en su computadora siquiera. Está

[1] Conjunto de elementos lingüísticos que incluyen, preceden o siguen a una palabra u oración y que pueden determinar su significado o su correcta interpretación

en la universidad. Ha ingresado en una *alta* casa de estudios que, como cualquier institución, tiene y transmite su propia cultura. No será sencillo ni adentrarse ni empaparse en ella, puesto que conocer una cultura conlleva su ejercicio. Seamos esquemáticos diciendo que la cultura académica, como toda otra, tiene sus saberes, sus prácticas, su ética y, lo que nos importa en este texto, su lenguaje específico. Mejor dicho, un modo de *uso* del lenguaje que *vale* para su funcionamiento interno.

Pensemos en afirmaciones tales como “Comer harinas es tremendo para el cuerpo” o “Donald Trump hizo maravillas con los mexicanos de la frontera”. Son expresiones que, aun desconociendo el contexto, podrían funcionar a la perfección en cualquier conversación de café, en un audio de WhatsApp, incluso en un video viral de TikTok. Sin embargo, jamás podrían ingresar en el lenguaje académico. Un estudiante podría recibir un mensaje diciendo que faltan argumentos válidos, o que palabras como “tremendo” o “maravilla” son vagas, impertinentes o polisémicas. ¿Qué ocurrió con esos mexicanos? ¿Fueron incorporados a la sociedad norteamericana o asesinados en frente de sus familias? ¿Por qué tanto problema con el lenguaje? ¿Es una cuestión de forma o de contenido? ¿Acaso en la universidad no se respeta la opinión personal?

El filósofo Mijaíl Bajtín, junto con otros de su círculo[2], hizo notable que el uso del lenguaje y sus enunciados a la hora de escribir una novela era drásticamente diferente al que se usa en una conversación entre un profesor y un estudiante, un empleador y su empleado o entre dos amantes. Notó que la oralidad tiene particularidades que no aparecen en la escritura y viceversa. Desentrañar qué estaba sucediendo fue uno de sus *problemas* de investigación, pronto resuelto en su noción de *género discursivo.*

El aporte de Bajtín en su época fue pionero para años de investigaciones al respecto. Definió al género discursivo como “enunciados (orales y escritos) concretos y singulares que pertenecen a los participantes de una u otra esfera de la praxis humana” (Bajtín; 1979). Las teorizaciones de Bajtín, como en ocasiones ocurre en ese movimiento que va desde el saber teórico hacia el saber colectivo, hoy son parte de un conocimiento anclado en nuestra contemporaneidad. Sin embargo, me interesa destacar, a nuestros fines, su noción de “praxis humana”. *Praxis* (expresión latina de donde provienen otras como “práctica”, “práctico” y “practicar”) nos indica que los discursos surgen en el *acto* de algo. Solo si los humanos nos ponemos en acción en el gran teatro de la vida, organizaremos “esferas” y moldearemos enunciados y discursos específicos para cada instancia. Esas “esferas de la praxis” son bien diferenciadas, por lo que en un recreo, en una jugada de Playstation, en un grupo de Whatsapp o en un examen final no produciremos los mismos enunciados.

Ahora bien, ¿en qué punto ingresa el lenguaje y la vida universitaria en estas teorizaciones? *No hay juego sin reglas.* La escritura y la oralidad en el marco académico también tienen reglas que definen sus “temas”, su “estilo” y su “estructura”, tres componentes clave para todo género según Bajtín. Una vez conocidas las normas, es momento de *ponerse el disfraz* y decir lo que se quiere decir con un uso lingüístico que no sería posible ni en una charla con el terapeuta ni en un audio de WhatsApp. El que desconozca las reglas o las quebrante, pierde.

El primer paso de conocer las reglas implica sufrir el duelo de descubrir que todo aquello que alguna vez se nos dijo que era válido no es tan así. Nos damos cuenta de que expresiones como “etcétera” y “entre otros” solamente llenan un espacio vacío. Nos tiran en demolición los adverbios de modo, como “realmente”, “lentamente”, “rápidamente”; y nos previenen de la mala fama de los

[2] Durante las décadas de 1920 y 1930, Bajtín gestionó un espacio intelectual para el debate y la reflexión crítica acerca de distintos problemas en el ámbito de las humanidades y el arte. Personalidades como Pavel Medvedev y Valentin Voloshinov fueron miembros activos de este grupo que se conoció como el “círculo de Bajtín”.

gerundios. Nos ponen un espejo ante nuestros ojos para ver de cara a la mala ortografía que arrastramos. Nos damos cuenta de que lo que antes era un diez ahora eso mismo nos arroja un cuatro. Sí, el primer paso es duro.

No hay que rendirse. Algunas reglas válidas son simples y hasta con pretensiones más formales. Por ejemplo, esa que dice que los extranjerismos se escriben en *itálicas* o *bastardillas*, como también los títulos de los libros. No así los títulos de artículos o textos breves, que van entre comillas. Le indicarán el tipo de letra, interlineado, espaciado, cantidad de páginas, márgenes; y usted solamente deberá cumplirlo. *Papers*, monografías, tesis doctorales y posdoctorales, todos cumplen con esta regla. Esto es fruto de una convención, un acuerdo estandarizado por parte de la comunidad académica a nivel mundial; y que rige tanto en la Universidad de Málaga como en la Universidad Complutense, tanto en la Universidad de la Matanza como en Harvard.

El lenguaje académico también tiene su vocabulario. Son las cartas del juego que aprenderán a utilizar estratégicamente con el correr de la práctica. La terminología comprende expresiones de disciplinas como la retórica, sean "argumentar", "sostener", "refutar", "introducción" y "conclusión"; pero tiene una base positivista fuerte fundada en los métodos de análisis de las ciencias naturales y que nos dan otras como "hipótesis", "problema", "consecuencia" o verbos como "confirmar", "evidenciar" y "validar". No es casual que la retórica y las ciencias naturales operen como base de un lenguaje que busca, en definitiva, cierta verdad epistémica; un lenguaje al cual le interesaría saber cómo impactan los carbohidratos de las harinas en la sangre o las sanciones de Donald Trump en las políticas migratorias más que como una opinión del sentido común.

Pareciera que leer el manual sería suficiente, y esto no es realmente así. El lenguaje académico no solo consiste en decir "insecto" en lugar de "bicho". Tomemos la frase "Muchos pibes jóvenes votaron en las últimas elecciones". La expresión "pibes jóvenes" es una redundancia, puesto que en la semántica de "pibe" también está su juventud. Podríamos aplicar una primera reducción si optamos por "jóvenes", menos localista que la primera. Ahora bien, si nos preguntamos qué significa la juventud, un octogenario podría responder que se siente más joven que nunca, por lo que es importante restringir nuestro rango etario. Podríamos decir "Muchos jóvenes entre 17 y 22 años votaron en las últimas elecciones". Podríamos esforzarnos en sectorizar nuestra información, hacer una encuesta, sacar algunos cálculos y decir "El 72% de los jóvenes entre 17 y 22 años de la provincia de Buenos Aires votó en las últimas elecciones". El ojo del autor podría preferir otras inflexiones para pulir este enunciado, como reemplazar "votaron" por "participaron", especificar a qué año corresponde el adjetivo "última" y el carácter "presidencial" de la elección.

Y si en esta búsqueda de la infalibilidad seguimos, escribir un texto académico nos exige haber leído otro *a priori*. La universidad es el reino de los autores que podemos ver reunidos en un cóctel final cuando en cada bibliografía. Preposiciones atributivas como "para" o "según" o frases como "de acuerdo con " o "X sostiene o afirma que" aparecerán dispersas por todo el texto en busca de autoridad. Referencias, citas y alusiones a otros textos aparecerán en detrimento del "yo" de "en mi opinión" y "para mí". En contraposición a este yo individual, aparecerá una ficción discursiva como la primera persona *inclusiva* en verbos como "consideramos que", "concluimos en que", cuando el acto de escribir es siempre más solitario que comunitario.

¿Por qué tanta preocupación por la lengua? Porque en esa búsqueda de verdades epistémicas lo que intentamos hacer desde la universidad es dar un paso más en el camino del conocimiento. Queremos hacer un aporte significativo, una *lectura* en su sentido amplio, capaz de "acercar lugares lejanos" (Daniel Link; 2012). No se trata solo de un lenguaje que reproduzca lo (ya) dicho, sino que tenga algo (todavía) por decir. Para eso, es necesario ejercitar un tipo de lectura y una mirada. Me refiero a la actitud crítica.

Si bien la palabra tiene mala reputación fuera del ámbito académico, la producción crítica, que puede estar tanto en una obra de arte como en una monografía, se basa en la capacidad de un investigador de poner en diálogo un conjunto de elementos para descubrir *en* ellos y en otros resultantes de esa relación un saber por ser dicho, mencionado, denunciado o defendido. La crítica se despliega en un compendio de operaciones de lectoescritura, como es recopilar, analizar, comparar, contrastar, seleccionar, citar. La actitud crítica, propia de todo universitario, les permitirá *decir*, "discriminar" (que significa "separar" o "distinguir") un discurso es contundente, vago o engañoso; machista o progresista, izquierdista o derechista.

El trabajo del lector es un trabajo de pirquinero. Quien lee indaga en el otro tres instancias fundamentales: busca qué se pregunta un autor, cuál es su pensamiento y por qué piensa lo que piensa. A la primera la llamaremos "pregunta de investigación", a la segunda "hipótesis" y a la tercera "argumentos que la sostienen". Una vez hecha esta pesquisa, podremos ponernos en diálogo con ese texto y formular un pensamiento a través de nuestros enunciados. Estarán de acuerdo o en desacuerdo, atacarán las hipótesis de los otros y formularán las propias. Y en todo ese procedimiento y una vez adquiridas las reglas de escritura, estará puesta en funcionamiento la máquina del pensamiento.

Es duro, pero tendrán que estar dispuestos a dar los pasos de Bambi hasta remontar en un galope. Que ni el coloso de columnas altas, ni las palabras difíciles, ni las dinámicas institucionales "meter" (aprobar) o "bochar" (desaprobar) los desalienten. La escritura académica ha llegado para darnos más satisfacciones que demonios. Una tesis sobre los efectos de los carbohidratos en la sangre podría salvar al mundo. Un artículo sobre las políticas derechistas en América en los últimos años podría llevarlos a una beca, un viaje, un descubrimiento o, más que todo eso, intervenir en los debates contemporáneos sobre el vasto conocimiento humano. Nadie vino a la universidad a repetir lo que otros dijeron, pero sí a decir algo valioso que nazca de un lector inquieto. Y ahí estará el lenguaje, para hacerlo siempre posible.

BIBLIOGRAFÍA

Bajtín, Mijaíl (1979/1998). "El problema de los géneros discursivos" en *Estética de la creación verbal*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Carlino, P. (2005); *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Editorial.

Manzo, L., Venegas; Ramos, L. (2020). *Guía de Escritura Académica*. Santiago de Chile: Universidad Miguel de Cervantes, Dirección de Postgrado e Investigación.

Foucault, Michel (1978/2018). "¿Qué es la crítica?" en *¿Qué es la crítica? / La cultura de sí*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Link, Daniel (2012). "Elementos para la escritura de una monografía" en *Citadme diciendo que me han citado mal*. Buenos Aires: EDEFyL

C. Realizá una segunda lectura párrafo por párrafo y luego respondé las siguientes consignas.

- Comentar con el grupo por qué creen que este texto está en este módulo del manual.
- ¿A quién va dirigido este texto? Hacer un breve listado de palabras o frases que justifiquen tu respuesta.
- ¿Por qué creen que el autor del texto recurre a lo que expresan por otros autores?

Bibliografía

ADAM, J. M. (1992). *Les textes: types et prototypes. Récit, description, argumentation, explication et dialogue*. París: Nathan.

ADAM, J. M., LORDA, C. U. (1999). *Lingüística de los textos narrativos.* Barcelona: Ariel Lingüística.

ALVARADO, M. (2006). *Paratexto*. Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

ARNOUX, E. (1996). *La lectura y la escritura en la universidad.* Bs. As.: EUDEBA

BIDIÑA, A. (Coordinadora). *Cuadernillo Taller de Integración*. Primer cuatrimestre 2022. UNLaM.

BITONTE, M. E., CAMUFFO, M y DUMM, Z. (2014). *En torno a la interrogación. Propuesta para una didáctica de la pregunta crítica.* Buenos Aires: UNM Editora

CALSAMIGLIA BLANCAFORT, H., TUSÓN VALLS, A. (1999)*. Las cosas del decir. Manual de análisis del discurso*. Barcelona: Editorial Ariel.

CASSANY, D (1987). *Describir el escribir. Cómo se aprende a escribir*. Barcelona: Paidós.

CENTRO VIRTUAL CERVANTES. ENSEÑANZA. Disponible en: https://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/diccionario/

GARCÍA, J., VIGUERAS, M. (2007). *Enseñar y aprender a estudiar*. Murcia, España: Servicio de Atención a la Diversidad.

KLEIN, I. (2007). *El taller del escritor universitario*. Bs. As: Prometeo

KNORR, P. (2012). *Estrategias para el abordaje de textos.* Los Polvorines, Argentina: UniRío.

MAHLER, P. (1998). *Cuando el lenguaje habla del lenguaje. Los usos reflexivos del lenguaje. Metalenguaje y discurso referido*. Bs. As: Cántaro.

MAINGUENEAU, D. (1999). *Términos claves del análisis del discurso.* Bs.As: Ediciones Nueva Visión.

MARÍN, M. y HALL, B. (2005). *Prácticas de lectura con textos de estudio*. Bs. As: EUDEBA

MORENO FERNÁNDEZ, F. (2005). *Principios de sociolingüística y sociología del lenguaje.* 2ª edición. Barcelona: Editorial Ariel.

NOGUEIRA, S. (2010). *Estrategias de lectura y escritura académicas.* Bs. As: Biblos.

HAYET, M. (Coordinadora). (s.f.e). *Programa Nexos. Propuestas para pensar la articulación Secundaria–Universidad desde el desarrollo curricular.* (pp. 89 a 112)

PEREIRA, M. (2005). *La comunicación escrita en el inicio de los estudios superiores*. Bs. As: UNGS

PUIATTI DE GOMEZ, H. (2005). *El artículo de investigación científica* en Cubo de Severino, L. *Los textos de la ciencia. Principales clases del discurso científico*. Córdoba: Comunicarte editorial

SILVA, C. (2001). *Sociolingüística y Pragmática del Español.* Washington, D.C.: Georgetown: University Press.

SILVESTRI, A (1998). *En otras palabras. Las habilidades de reformulación en la producción del texto escrito.* Bs. As.: Ed. Cántaro.

2. EL TEXTO

Primera parte

Colaboraron en este módulo: Isabel Arroyo
Raquel García
Lilian Iwachow

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Conozcan e identifiquen las propiedades constitutivas de un texto.
- ✓ Reflexionen sobre qué características debe tener un texto para ser considerado como tal.
- ✓ Utilicen las propiedades textuales de manera correcta en sus producciones escritas.
- ✓ Entiendan la importancia del contexto para comprender integralmente un texto.
- ✓ Identifiquen los paratextos y reflexionen sobre su relevancia en la comprensión textual.

FICHA DE CLASE 2

2.1 TEXTO, CONTEXTO Y PARATEXTO

El **texto** es una unidad semántico-discursiva, es decir, un artefacto verbal con unidad de sentido que circula en los intercambios sociales y que se realiza a través de unidades del lenguaje. Tiene una extensión variable y está dotado de una serie de propiedades que le son inherentes. La composición de un texto es un proceso que consiste en el entramado efectivo y complejo de factores puntuales que pueden y deben ser reglamentados.

Cuando escribimos y revisamos un texto, no solo es necesario respetar los códigos normativos relativos a la puntuación y a la ortografía sino también aquellos referidos a la construcción textual. Para que un texto funcione como tal debe cumplir con reglas de diversa índole. Dos propiedades básicas, constitutivas de todo texto, son la coherencia y la cohesión. Coherencia y cohesión no son las únicas propiedades del texto.

Ver MÓDULO 3

La coherencia implica que se perciba el texto como un todo; la cohesión, por su parte, supone que las oraciones están conectadas entre ellas por elementos concretos.

2.1.1 Coherencia

La coherencia es la propiedad esencial de todo tipo de texto que hace que pueda ser percibido como una unidad comunicativa. Para que un texto sea coherente, debe tener un tema central común a todas sus partes. A esto se le llama **coherencia global**. Si el texto es suficientemente extenso, se pueden distinguir varios subtemas a lo largo de su estructura. Estas secuencias alcanzan un sentido en relación con el tema central. Es así como cada secuencia está dotada de una **coherencia local**.

La noción de coherencia relaciona el texto con el **contexto de situación** en el que es producido, recibido e interpretado. Esa situación de comunicación es la circunstancia en que nos orientamos para poder interpretar el contenido de un texto de forma adecuada. El contexto situacional es, entonces, el entorno de un texto que sirve para comprender su significado, e implica necesariamente atender a estos elementos:

EMISOR	¿QUIÉN?
RECEPTOR	¿A QUIÉN?
MENSAJE	¿QUÉ?
ESPACIO	¿DÓNDE?
TIEMPO	¿CUÁNDO?
RELACIÓN ENTRE EMISOR Y RECEPTOR	¿SE TRATAN COMO IGUALES? ¿ES SIMÉTRICA O ASIMÉTRICA?

Veamos el fragmento de texto que sigue para entender el contexto de situación:

"Si consultamos las gramáticas más usuales veremos que el análisis de una lengua consta básicamente de tres partes: fonética y ortografía, morfología y sintaxis y léxico. Pero los estudios de lingüística textual han modificado notablemente este planteamiento. Según estos, cuando hablamos o escribimos y también cuando escuchamos y leemos construimos textos y para hacerlo tenemos que dominar muchas habilidades: discriminar las informaciones relevantes de las irrelevantes, estructurarlas en un orden cronológico y comprensible, escoger las palabras adecuadas, conectar las frases entre sí, construir un párrafo, etc. Las reglas fonéticas y ortográficas, morfosintácticas y léxicas que permiten formar oraciones aceptables, solo son una parte del conjunto de conocimientos que domina el usuario de la lengua. La otra parte es la formada por las reglas que permiten elaborar textos, las reglas de adecuación coherencia y cohesión."

Cassany, D. (1987). *Describir el escribir*. Ediciones Paidós. Barcelona

En el fragmento presentado el **emisor** es el docente e investigador Daniel Cassany, un especialista en lectura y escritura. Su libro va dirigido a docentes que enseñan a escribir a estudiantes interesados en aprender **(receptores**) La relación entre el emisor y los receptores es asimétrica. Un estudioso, especialista en el tema, expone sus saberes a personas que tienen un conocimiento inferior. El **mensaje** trata sobre la escritura y su aprendizaje. Fue publicado a finales de la década de 1980, momento en que se revisaron algunas cuestiones relacionadas con esos temas, gracias al surgimiento de gran cantidad de investigaciones socio y psicolingüísticas (**tiempo**). El texto circula a través de una editorial que difunde textos de interés académico (**espacio**).

Como podemos notar, el **contexto de situación** es siempre la condición de posibilidad para el encuadre del texto dentro de una situación comunicativa determinada y para la asignación de un sentido específico.

Ahora bien, para comprender un texto e interpretarlo de manera integral, no alcanza con encuadrarlo en una situación comunicativa. Debemos además tener en cuenta que un conjunto de hechos y situaciones de diversa índole lo enmarcan y posibilitan su existencia. Nos referimos al **contexto histórico, social, político y cultural**. Para interpretar cabalmente un texto, muchas veces es necesario conocer circunstancias existentes en la época o el tiempo en que ese texto fue producido, características de una sociedad que influyen en las personas que la integran, la incidencia de las ideas políticas, de las políticas públicas, de los gobiernos o sectores de poder sobre un hecho determinado

en una sociedad o los valores, costumbres, creencias de un grupo social que repercuten sobre un determinado hecho.
Es necesario referimos además a ciertos elementos tanto verbales como no verbales que, aunque no forman parte del texto lo acompañan y orientan su lectura y su comprensión. Se trata de los **paratextos,** tales como el título, las referencias al autor o a la publicación, los subtítulos, las notas al pie y al final del artículo, las imágenes; en los libros: la tapa, contratapa, solapas, índice, etc.
Al leer, es muy importante comenzar por los paratextos. ¿Para qué sirve observarlos? Para entender de dónde procede el texto, quién lo escribió y con qué propósito, cuándo, etc. Eso nos permite a los lectores realizar una serie de hipótesis y entender mejor lo que leemos. Esas hipótesis pueden ser confirmadas o no durante la lectura.
Los **paratextos** hacen referencia al nombre de su autor, al título de la obra, al formato o soporte donde se publicó, al lugar y a la fecha, adelantan información incluso sobre el género, y nos posibilitan adentrarnos en la lectura crítica. Vale decir que estos elementos, a los que muchas veces se deja de lado, son insumos imprescindibles para una lectura contextualizada. Nos aportan información valiosísima para entender el contexto de situación y nos orientan paran interpretar el contexto histórico, social, político y cultural.
Volviendo al ejemplo anterior, notamos que de la lectura de los **paratextos** que nos indican tiempo, espacio y nombre del autor se pueden inferir informaciones que nos acercan al contexto histórico. Por supuesto que, para poder contextualizar esos aspectos, debemos tener conocimientos previos acerca de quién es Cassany y qué investigaciones socio y psicolingüísticas venían llevándose a cabo en materia de lectura y escritura en esa época. Si carecemos de esos saberes, se acota la posibilidad de comprender integralmente el texto.

“ Al finalizar el módulo se amplía el tema y se proponen actividades específicas para ejercitar con paratextos. ”

2.1.2 Cohesión

Para que un texto sea cohesivo es necesario que el emisor haya vinculado entre sí las oraciones. Por eso, se dice que es una relación interoracional que permite que las oraciones se organicen y conformen untexto. Los procedimientos más generalizados para asegurar la cohesión son la referencia, la elipsis, los conectores, la reiteración léxica y la repetición total o parcial de construcciones.

Referencia: es un tipo de relación en la que uno de los ítems que entran en ella siempre necesita de la presencia explícita de otro para poder ser interpretado. Son fundamentalmente pronombres personales, demostrativos y posesivos. Ejemplo**: *La cohesión de un texto dependerá de la distribución y el orden de los elementos que componen una oración, <u>estos</u> pueden ser palabras que funcionan como conectores o signos de puntuación.***

Elipsis: es una sustitución por cero. Es la omisión de una palabra o frase explicitada en otra parte del texto. Ejemplo: ***La coherencia es una propiedad textual; la cohesión, otra.***

Reiteración: implica la repetición de un ítem lexical. Hay tres tipos de reiteraciones:

- **Repetición**: Es la reiteración de la misma palabra en el desarrollo del texto con la intención de enfatizar.
  Ejemplo: *El* **contexto** *de situación puede inferirse de los paratextos; el* **contexto** *histórico muchas veces se desprende del propio texto***.**

- **Sinonimia**: Es la relación en la que dos ítems lexicales que pertenecen a un campo semántico común porque tienen características semejantes.
- Ejemplo: *La coherencia es una **propiedad inherente** al texto; la cohesión también es un **rasgo constitutivo.***
- **Palabra general**: Es la clase de palabra que incluye por su significado a otras palabras. Ejemplo:
  *La referencia, la sinonimia, la elipsis, en definitiva, todas las **sustituciones…***

Colocación: consiste en la co-ocurrencia de varios elementos léxicos que se relacionan semánticamente de algún modo al manifestarse en un mismo marco de conocimiento. También se lo denomina campo semántico. Ejemplo: ***El Lector Modelo es el que puede interpretar el texto de manera análoga a la del autor que lo generó. Se escoge implícitamente al elegir el idioma en que se codifica un texto, así como su estilo, su registro y su grado de especialización.***

2.1.3 Conectores

Los conectores son palabras o frases que establecen relaciones entre distintos elementos del texto (palabras, oraciones e incluso párrafos) y que no se limitan a vincularlos solamente, también agregan significado.

LISTADO DE CONECTORES

RELACIÓN	CONECTIVO
Adición	Y, también, además, más, aún, adicional a lo anterior, otro aspecto, asimismo, por añadidura. Ej. "***La coherencia es la propiedad textual por la cual los enunciados que forman un texto se refieren a la misma realidad. Además de resultar coherentes, los enunciados de un texto deben estar conectados o cohesionados entre sí.***"
Contraste	Pero, sin embargo, por el contrario, no obstante, aunque, a pesar de, inversamente, en cambio. Ej. "***La extensión de un texto puede variar desde unas pocas palabras hasta múltiples párrafos, pero para que un texto sea efectivo en su función debe cumplir con dos características: coherencia y cohesión.***"
Causa/ efecto	Porque, por consiguiente, así pues, por tanto, por lo tanto, por esta razón, puesto que, ya que, en consecuencia, de ahí que, así, por este motivo, pues, por eso, de modo que, según. Ej. "***En cada párrafo, es posible comprender el tema central, porque las ideas son claras y concretas.***"
Temporalidad	Después, luego, más tarde, antes, seguidamente, a continuación, entre tanto, posteriormente, ahora, ya, enseguida, inmediatamente, cuando, en el momento, tiempo después, finalmente. Ej. "***Primero hay que leer los paratextos, posteriormente se sigue con la lectura del texto.***"
Comparación	Así como, tal como, tanto como, del mismo modo, de la misma manera, asimismo, igualmente. Ej. "***La coherencia global es un recurso lingüístico formal igualmente que la coherencia local.***"
Énfasis	Sobre todo, ciertamente, es más, lo que es peor, repetimos, como si fuera poco, lo que es más importante, especialmente. Ej. ***"En la lectura de un texto es necesario prestar atención a una serie de elementos, sobre todo a los paratextos que lo acompañan."***

Reformulación, Ilustración o ampliación	Por ejemplo, en otras palabras, es decir, tal como, verbigracia, como es el caso de, de esta manera, así, así como. Ej. ***“Existen variados elementos de cohesión, uno de los casos es la referencia.”***
Orden	Primero, segundo, siguiente, luego, después, a continuación, finalmente, antes, desde entonces, en primer lugar, por último, al final, al principio, inicialmente, enseguida. Ej. “***En primer lugar, las palabras que aparecen en el texto mantienen un vínculo de sentido por oposición o complementariedad, en segundo lugar, hacen referencia al mismo campo de la realidad.”***
Cambio de perspectiva	Por otra parte, de otra manera, en otro sentido, por el contrario, en contraste con. Ej. “***El contexto de situación pertenece al campo de la semántica, por otra parte, el contexto histórico se relaciona con la pragmática.”***
Condición	Si, con tal que, supongamos, puesto que, siempre que, ya que. Ej. “***Si puedes responder la pregunta ‘de qué se trató el texto que leí’, hay coherencia en él.”***
Resumen o conclusión	Para terminar, resumiendo, por último, finalmente, en conclusión, en suma, en síntesis, como conclusión, en resumen**.** Ej. ***“En síntesis, hemos visto las principales propiedades de los textos.”***

2.2 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

1. Construir un párrafo coherente con las oraciones que se detallan a continuación. Utilizar los procedimientos de cohesión que considere pertinentes y escribirlo.

La lectura es un proceso de comunicación entre el texto y el lector.
Un texto no dice todo de sí mismo, deja muchas cosas sin explicitar.
Exige al lector asumir un papel activo.
Todo estudiante universitario debe asumir el desafío.
El acto de estudiar requiere de quien a eso se dedica que asuma el papel de sujeto de ese acto.
Estudiar es un trabajo realmente difícil.
Exige de quien lo hace una postura crítica, sistemática.
Una disciplina intelectual que se adquiere practicándola.
Estudiar implica comprender el texto.
Valerse de una metodología.
Una primera visión global a la que es necesario volver.
Delimitar los núcleos centrales del texto.
Descubrir el conjunto temático.
Buscar en cada párrafo el nexo entre su contenido y el objeto de estudio en que se encuentra trabajando.
Relacionar el contenido del párrafo con los precedentes y con los que lo siguen.
El acto de estudiar es una actitud frente al mundo.
Estudiar es pensar la práctica.
Exige humildad y actitud crítica.

(Oraciones adaptadas del texto de Paulo Freire “Consideraciones en torno al acto de estudiar”)

2. Reconocer y ordenar los conectores lógicos que aparecen señalados en el siguiente texto perteneciente al libro “El queso y los gusanos”, de Carlo Ginzburg. Los mismos están ubicados en forma incorrecta.

La escasez de testimonios sobre los comportamientos y actitudes de las clases subalternas del pasado es fundamentalmente el primer obstáculo, INCLUSO, no el único, con que tropiezan las investigaciones históricas.

AUNQUE, es una regla con excepciones. Este libro narra la historia de un molinero friulano -Domenico Scandella, conocido por Menocchio- muerto en la hoguera por orden del Santo Oficio tras una vida transcurrida en el más completo anonimato. Los expedientes de los dos procesos en que se vio encartado a quince años de distancia nos facilitan una elocuente panorámica de sus ideas y sentimientos, de sus fantasías y aspiraciones. Otros documentos nos aportan información sobre sus actividades económicas y la vida de sus hijos. PERO disponemos de páginas autógrafas y de una lista parcial de sus lecturas (sabía, en efecto, leer y escribir). Cierto que nos gustaría saber otras muchas cosas sobre Menocchio, NO OBSTANTE, con los datos disponibles ya podemos reconstruir un fragmento de lo que se ha dado en llamar “cultura de las clases subalternas” o “cultura popular”.

3. A continuación, se presenta un texto en el cual se desarrollan los conceptos teóricos principales relacionados con la construcción y el contenido de los párrafos. El mismo pertenece al Capítulo 6 del libro “La cocina de la escritura” de Daniel Cassany.

a. Reconocer los párrafos que componen el texto y ordenarlos del primero al último.

b. Luego, relacionar los subtítulos que se detallan a continuación con cada uno de los párrafos encontrados:

Definición – Función externa – Estructura interna – Tipología – Extensión – Recomendación

“En los textos breves de dos páginas o menos, el párrafo es trascendental, porque no hay otra unidad jerárquica (capítulo, apartado, punto) que clasifique la información y, de este modo, pasa a ser el único responsable de la estructura global del texto. Se encarga de marcar los diversos puntos de que consta un tema, de distinguir las opiniones a favor y en contra, o de señalar un cambio de perspectiva en el discurso. De esta manera, el párrafo llega a asumir funciones específicas dentro del texto: se puede hablar de párrafos de introducción, de conclusión final, de recapitulación, de ejemplos o de resumen.

Además, el contenido también determina la organización del párrafo. Los teóricos [...] distinguen diversas estructuras según el tipo de datos expuestos. Así, una argumentación requiere necesariamente tesis, argumentos y tal vez también ejemplos; una narración ordena cronológicamente las frases; una pregunta retórica precede a la respuesta razonada; un contraste de datos (a favor/en contra, ventajas/inconvenientes, positivo/negativo) se articula con marcadores del tipo por *una parte/por otra parte, pero, en cambio*… Y un párrafo de lista de casos posibles, como por ejemplo éste, contiene una introducción general y la enumeración correlativa de unidades.

En general, el aspecto visual parece imponerse a las necesidades internas de extensión. Lo que importa ante todo es que página y párrafos ofrezcan una buena imagen e inviten a la lectura, [...] Por lo tanto, la recomendación más sensata es que cada página tenga entre tres y ocho párrafos, y que cada uno contenga entre tres y cuatro frases, aceptando siempre todas las excepciones justificadas que haga falta. [...]

Para comenzar, definiremos al párrafo como un conjunto de frases relacionadas que desarrollan un único tema. Es una unidad intermedia, superior a la oración e inferior al apartado o al texto, con valor gráfico y significativo. Tiene identidad gráfica porque se distingue visualmente en la página [...] empieza con mayúscula, a la izquierda, en una línea nueva, y termina con punto y aparte. Tiene una unidad significativa porque trata exclusivamente un tema, subtema o algún aspecto particular en relación con el resto del texto.

Ya en el interior del párrafo, se suelen distinguir varios constituyentes: la entrada inicial, la conclusión, el desarrollo, los marcadores textuales, etc. El elemento más importante es la primera frase, que ocupa la posición más relevante: es lo primero que se lee y, por lo tanto, debe introducir el tema o la idea central [...].

Con respecto a la extensión que debe tener el párrafo, no hay directrices absolutas. Varía notablemente según el tipo de texto, el tamaño del soporte (papel, línea, letra) o la época histórica. Una noticia suele tener párrafos más cortos que un informe técnico y todavía más que un tratado de filosofía. [...] Además, un mismo párrafo escrito con varios tamaños de letra o interlineados cambia notablemente de volumen y puede resultar largo o corto."

2.3 LOS PARATEXTOS

Cada vez que leemos un texto, sea del género que sea, podemos encontrar en él determinados elementos que funcionan como instructivos (nos indican cómo debe leerse el texto) o como guías de lectura, ya que nos permiten anticipar determinadas cuestiones del texto, por ejemplo: el carácter de la información y la modalidad que asumirá en este. Estos elementos son los **paratextos** y tienen gran importancia en el momento de comprender lo que se lee, puesto que funcionan como puertas de entrada a los contenidos, es decir, que nos permiten construir hipótesis de lecturas para los textos. Estas hipótesis, a medida que avanza la lectura, deberán ser revisadas para confirmar o refutar lo pensado en un principio a partir del análisis de los elementos paratextuales.

La etimología de la palabra paratexto remite a lo que rodea o acompaña al texto (para = junto, al lado de). En términos generales, se podría definir a los paratextos como todos aquellos elementos que rodean o acompañan a los textos y se manifiestan mediante títulos, subtítulos, ilustraciones, prefacios, índices, etc.

Los distintos formatos (libros, diarios, revistas, entre otros) que toma el texto escrito utilizan distintos y variados paratextos (índices, volantas, títulos, contratapas, primera plana, datos de autor/es, de edición, etc.) que se interrelacionan con los modos de lectura que se deben desplegar para cada uno de ellos.

También, los paratextos con sus diferentes rasgos como tipos de letras y ubicaciones estimulan al lector o estudiante a ingresar hacia la lectura de un texto. Por ejemplo, con un solo vistazo a la tapa de un libro que incluye títulos e ilustraciones, el lector o estudiante decide adentrarse o no en la lectura.

2.3.1 Clasificación de los paratextos

Paratextos verbales

Título: es el paratexto más visible de todos y el más importante. En líneas generales, el título sintetiza de manera muy ajustada el contenido del texto. Dicho de otro modo, el título hace referencia al tema que trata el texto.

Subtítulos: separan el contenido en diferentes sub-núcleos de información menores que, sin embargo, están relacionados con la temática general que aborda el texto.

Nombre del autor: nombre y apellido de quien escribió.

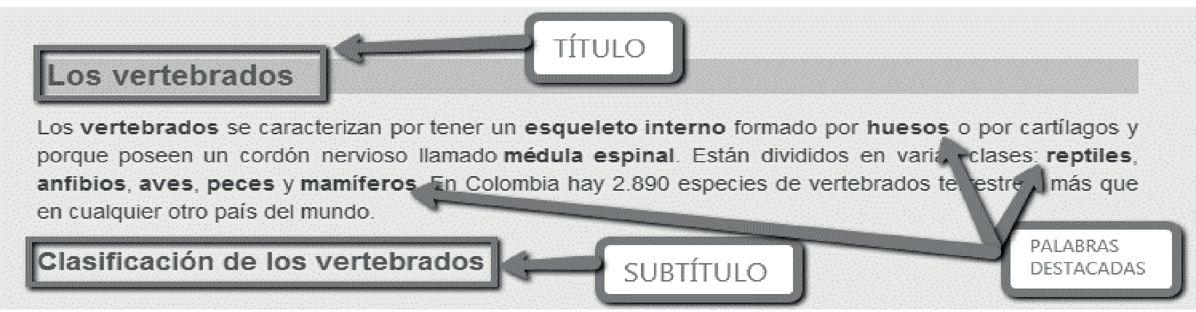
Fuente de publicación: brinda los datos principales sobre la naturaleza de la publicación del texto. Informa como se llama el medio donde originalmente se publicó el texto, si es un diario o una revista, el origen de la publicación, la fecha, si está disponible en internet, entre otros datos que se deberá pensar si son importantes para la posterior consigna de escritura que se solicite.

Información del autor: es lo más parecido a una biografía. Es una breve semblanza sobre el autor del texto. Este paratexto ofrece información sobre el autor del texto fuente, su nacionalidad, formación, trabajos, intereses, textos escritos, etc. Estos datos permiten inferir cuál puede ser el tema o tópico sobre el que trata el texto que se va a leer.

Notas: aportan información adicional sobre algún elemento del texto o sobre otro paratexto. Los elementos dentro del texto que derivan a una nota al pie se reconocen por estar acompañados por un número llamado superíndice (1) que indica que ese elemento tiene una nota que se debe revisar antes de continuar con la lectura del texto y de los otros paratextos.

Glosario: es lo más parecido a un diccionario. Es un listado de términos técnicos y sobre los cuales se ofrece una explicación. También pueden tratarse de vocablos que tienen más de una acepción o significado, y por ello es necesario explicar cuál es la definición o sentido con el que se está empleando en el texto.

Información sobre el medio o la fuente de publicación: en este paratexto se brinda información sobre la naturaleza de la publicación en la que fue incluido el texto que se está leyendo. Este paratexto sirve para determinar el ámbito de producción y/o circulación del texto.

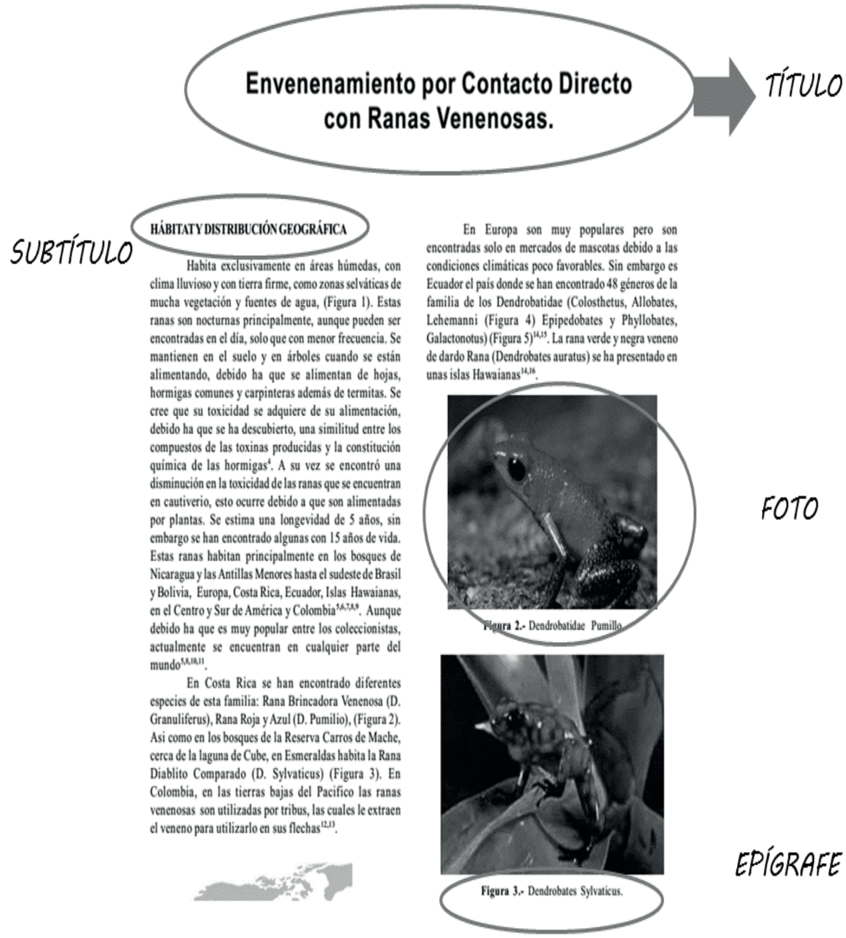


Bibliografía: consiste en la lista de los autores y las obras utilizadas en el texto, deben ir en orden alfabético. Hay variaciones en la forma de consignar a un autor, que dependen de si la obra que aparece es un libro, un artículo de una revista, un artículo de un libro compilado por otro autor, etc.

Existen otros paratextos gráficos como el resumen, la dedicatoria, el epígrafe, el prólogo o prefacio, el epílogo, el índice y el anexo o apéndice que tienen mayor presencia en los libros. Y otros como la bajada, copete, volanta, cintillo, que pertenecen al género noticia del discurso periodístico.

Paratextos icónicos

Los paratextos icónicos están conformados por las imágenes visuales que acompañan el texto, ya sea para completarlo, o bien para orientar su lectura. La gráfica textual, el gráfico, la foto, la infografía son algunos ejemplos.



Envenenamiento por Contacto Directo con Ranas Venenosas.

HÁBITAT Y DISTRIBUCIÓN GEOGRÁFICA

Habita exclusivamente en áreas húmedas, con clima lluvioso y con tierra firme, como zonas selváticas de mucha vegetación y fuentes de agua, (Figura 1). Estas ranas son nocturnas principalmente, aunque pueden ser encontradas en el día, solo que con menor frecuencia. Se mantienen en el suelo y en árboles cuando se están alimentando, debido ha que se alimentan de hojas, hormigas comunes y carpinteras además de termitas. Se cree que su toxicidad se adquiere de su alimentación, debido ha que se ha descubierto, una similitud entre los compuestos de las toxinas producidas y la constitución química de las hormigas[4]. A su vez se encontró una disminución en la toxicidad de las ranas que se encuentran en cautiverio, esto ocurre debido a que son alimentadas por plantas. Se estima una longevidad de 5 años, sin embargo se han encontrado algunas con 15 años de vida. Estas ranas habitan principalmente en los bosques de Nicaragua y las Antillas Menores hasta el sudeste de Brasil y Bolivia, Europa, Costa Rica, Ecuador, Islas Hawaianas, en el Centro y Sur de América y Colombia[5,6,7,8,9]. Aunque debido ha que es muy popular entre los coleccionistas, actualmente se encuentran en cualquier parte del mundo[5,8,10,11].

En Costa Rica se han encontrado diferentes especies de esta familia: Rana Brincadora Venenosa (D. Granuliferus), Rana Roja y Azul (D. Pumilio), (Figura 2). Asi como en los bosques de la Reserva Carros de Mache, cerca de la laguna de Cube, en Esmeraldas habita la Rana Diablito Comparado (D. Sylvaticus) (Figura 3). En Colombia, en las tierras bajas del Pacifico las ranas venenosas son utilizadas por tribus, las cuales le extraen el veneno para utilizarlo en sus flechas[12,13].

En Europa son muy populares pero son encontradas solo en mercados de mascotas debido a las condiciones climáticas poco favorables. Sin embargo es Ecuador el país donde se han encontrado 48 géneros de la familia de los Dendrobatidae (Colosthetus, Allobates, Lehemanni (Figura 4) Epipedobates y Phyllobates, Galactonotus) (Figura 5)[14,15]. La rana verde y negra veneno de dardo Rana (Dendrobates auratus) se ha presentado en unas islas Hawaianas[14,16].

Figura 2.- Dendrobatidae Pumillo

Figura 3.- Dendrobates Sylvaticus.

2.4 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

1. Observar el manual del *Curso de ingreso* editado por la UNLaM. Luego responder:
   - **a.** ¿Cuáles son los **paratextos** del *Curso de ingreso 2024*?
   - **b.** ¿Y los del *Seminario de Comprensión y Producción de Textos*?
   - **c.** En el **paratexto** Bibliografía, diferentes datos se disponen alfabéticamente a partir de la "entrada" de cada autor: ¿De qué tipo de informaciones se trata?
2. Observar los **paratextos** que rodean al **texto** "La velocidad del cambio" y resolver antes de leer:
   - **a.** ¿En dónde se publicó?
   - **b.** ¿A qué tipo de lectores se dirige?
   - **c.** ¿Qué contenidos del artículo podrían anticiparse a partir de la ilustración?

SALUD REVISTA | CANAL SALUD | CIENCIA Y SALUD JOSÉ ANTONIO LOZANO TERUEL

Ciencia y Salud

Por José Antonio Lozano Teruel

Ingrese su búsqueda

Ciencia | Universo | Pasado y Ciencia | MM.AA. y Vida Saludable | Alimentación | Ciencias Básicas | Tecnologías | Biociencias | Medicina | Genética Molecular y Biotecnología

» CIENCIA Y SALUD » CIENCIAS BÁSICAS » FÍSICA » LA VELOCIDAD DEL CAMBIO

CIENCIAS BÁSICAS — Física

La velocidad del cambio

22-04-2006 | Mauricio-José Schwarz

Durante la mayor parte de la historia humana no era de esperar que el mañana trajera algo nuevo a la vida cotidiana

Quizá uno de los momentos más trascendentes del pensamiento humano se encuentra en algún momento de la segunda parte del siglo VI antes de Cristo (a. C.), en Éfeso, durante la época de surgimiento de la filosofía griega. Fue entonces cuando Heráclito, un pensador de cuya vida sabemos poco, observó de manera sistemática por primera vez que el cambio es una constante del universo.

Heráclito no dijo que todo se transforma, como suele creerse, sino que el cambio es constante y que es esencial para algunas cosas. El agua del río cambia constantemente, decía Heráclito, pero el río es el mismo. De hecho, si el agua no cambiara continuamente, no habría río, sino un estanque o un lago.

La observación del cambio, el darse cuenta de cuán omnipresente es, resulta una hazaña del pensamiento precisamente porque en la sociedad de Heráclito, el cambio no era algo visible, ni siquiera esperable. Se hablaba de un pasado en el que algunas cosas eran ligeramente distintas, pero la idea misma de un futuro que alterara radicalmente el orden conocido por los griegos, no estaba presente. Los cambios que podían ocurrir eran pocos y se conocían bien: una sequía, una hambruna, un año de abundancia, una guerra de la que se podía salir derrotado o triunfador, alguna desgracia o logro personal, pero era de esperarse que los hijos, los nietos y los descendientes todos vivieran esencialmente de la misma manera que sus ancestros, cultivarían igual, harían la guerra con las mismas armas, cabalgarían, sufrirían las mismas enfermedades, tendrían esclavos o serían esclavos, y la marcha del mundo seguiría siendo relativamente predecible.

El hombre, por ejemplo, tuvo una velocidad máxima de unos 25 kilómetros por hora desde que apareció como especie hasta algún momento entre el 4500 y el 2500 a. C., cuando en las estepas eurasiáticas el caballo pasó de ser fuente de alimento a medio de transporte. Por supuesto, la gran mayoría de los seres humanos siguieron andando a pie, pues el invento no se generalizó en Europa, Asia y el Norte de África hasta el 1000 a. C. La velocidad máxima posible saltó a más de 70 km/h y se mantuvo así hasta principios del siglo XIX, cuando aparecieron locomotoras capaces de viajar a 90 km/h, mientras que para fines de siglo habían roto la barrera de los 150. Sin rieles, la velocidad máxima en tierra pasó de

JOSÉ ANTONIO LOZANO TERUEL

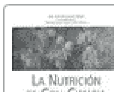
Catedrático de Bioquímica y Biología Molecular. Facultad de Medicina. Universidad de Murcia.

RESUMEN CURRICULAR

Textos publicados en el diario LA VERDAD desde junio de 1994 hasta la actualidad, recogidos, en parte, en los libros. Hipervínculos de descarga (pdf) de los libros (Ctrl+click):

- 1993. Ciencia sin barba
- 1995. Ciencia de hoy
- 1997. Sencillamente Ciencia
- 1999. Preguntas con respuesta
- 2000. La Ciencia que viene
- 2000. La Biomedicina entre los dos milenios
- 2002. Ciencia con esperanza
- 2004. Ciencia del siglo XXI
- 2006. Ciencia o precipicio
- 2009. Clima, crisis, Dios...y Ciencia
- 2011. Ciencia contra la crisis
- 2012. Nutrición es con-Ciencia
- 2013. Ciencia y política, ¿son incompatibles?
- 2015. Cien relatos científicos que debemos conocer

» ENTREVISTA EN LA VERDAD (21/01/2006)



RECURSOS DEL LIBRO 'LA NUTRICIÓN ES CON-CIENCIA'

Artículos divulgativos, notas y material complementario.

DESCARGA EL LIBRO EN PDF

4. A continuación, transcribimos el texto completo. Observar los paratextos destacados en negrita. Los mismos han sido adaptados para la reproducción del artículo en este manual.
    1. ¿Qué informaciones anticipan el título y los subtítulos en relación con el contenido del texto?
    2. ¿Y las notas al pie?

La velocidad del cambio[3]

Por Mauricio-José Schwarz[4]

Durante la mayor parte de la historia humana no era de esperar que el mañana trajera algo nuevo a la vida cotidiana

Quizá uno de los momentos más trascendentes del pensamiento humano se encuentra en algún momento de la segunda parte del siglo VI antes de Cristo (a. C.), en Éfeso, durante la época de surgimiento de la filosofía griega. Fue entonces cuando Heráclito, un pensador de cuya vida sabemos poco, observó de manera sistemática por primera vez que el cambio es una constante del universo.

Heráclito no dijo que todo se transforma, como suele creerse, sino que el cambio es constante y que es esencial para algunas cosas. El agua del río cambia constantemente, decía Heráclito, pero el río es el mismo. De hecho, si el agua no cambiara continuamente, no habría río, sino un estanque o un lago.

La observación del cambio, el darse cuenta de cuán omnipresente es, resulta una hazaña del pensamiento precisamente porque en la sociedad de Heráclito, el cambio no era algo visible, ni siquiera esperable. Se hablaba de un pasado en el que algunas cosas eran ligeramente distintas, pero la idea misma de un futuro que alterara radicalmente el orden conocido por los griegos no estaba presente. Los cambios que podían ocurrir eran pocos y se conocían bien: una sequía, una hambruna, un año de abundancia, una guerra de la que se podía salir derrotado o triunfador, alguna desgracia o logro personal, pero era de esperarse que los hijos, los nietos y los descendientes todos vivieran esencialmente de la misma manera que sus ancestros, cultivarían igual, harían la guerra con las mismas armas, cabalgarían, sufrirían las mismas enfermedades, tendrían esclavos o serían esclavos, y la marcha del mundo seguiría siendo relativamente predecible.

El hombre, por ejemplo, tuvo una velocidad máxima de unos 25 kilómetros por hora desde que apareció como especie hasta algún momento entre el 4500 y el 2500 a. C., cuando en las estepas eurasiáticas el caballo pasó de ser fuente de alimento a medio de transporte. Por supuesto, la gran mayoría de los seres humanos siguieron andando a pie, pues el invento no se generalizó en Europa, Asia y el Norte de África hasta el 1000 a. C. La velocidad máxima posible saltó a más de 70 km/h y se mantuvo así hasta principios del siglo XIX, cuando aparecieron locomotoras capaces de viajar a 90 km/h, mientras que para fines de siglo habían roto la barrera de los 150. Sin rieles, la velocidad máxima en tierra pasó de 63 km/h a fines del siglo XIX a 150, en 1904, a 200 en 1907, a más de 300 para 1929, a más de 500 en 1937, a 1.000 en 1970 y está hoy en 1.200 km/h, velocidad superior a la del sonido, conseguida en 1997.

Por supuesto, a estos autos superrápidos es necesario diseñarlos de modo que no despeguen, porque sus velocidades son las de un avión ‘caza’. Porque el cambio nos llevó al transporte aéreo a velocidades que también crecieron vertiginosamente, desde los modestos 10 km/h del primer vuelo de los

---

[3] Publicado el 22 de abril de 2006 en Ciencia y Salud. Recuperado de https://www.um.es/lafem/DivulgacionCientifica/CienciaySalud/Portalyblog/cienciaysalud.laverdad.es/9_6_45.html
[4] Periodista mexicano especializado en divulgación científica. Novelista y fotógrafo.

hermanos Wright, en 1903, a los imponentes 39.500 km/h que alcanzaban los cohetes que impulsaron a las cápsulas ‘Apolo’ a la Luna a fines de los años 60 y principios de los 70.

Esta rapidez cada vez mayor para alcanzar velocidades asombrosamente más altas es un buen ejemplo de lo que ha sido la curva de aceleración del cambio.

Fenómeno social

El cambio, y su percepción como fenómeno social, es uno de los más notables productos de los avances científicos y tecnológicos, de la acumulación del conocimiento y de la divulgación de un método que nos permite conocer la realidad con mucha más precisión y fiabilidad que los anteriores.

El método científico tuvo su origen en la búsqueda de la verdad de los filósofos griegos, pero cristalizó con la explosión del conocimiento de las ciencias físicas en el siglo XVII y XVIII. Este inicio del cambio fue resultado de numerosos hechos entretejidos. A fines del siglo XVI, Roger Bacon hizo el primer experimento controlado de la historia. René Descartes propuso un método del conocimiento. La Real Sociedad de Londres para la Mejora del Conocimiento Natural determinó en 1650 que la evidencia experimental era la mejor forma de juzgar la verdad de una proposición. Robert Boyle estableció en 1665 que la repetibilidad de los experimentos era condición esencial para aceptar sus resultados y, a fines de ese siglo, Isaac Newton establece que las hipótesis deben poder predecir los acontecimientos a los que se refieren.

Por supuesto, el método científico ha evolucionado y se ha refinado, pero ha sido ese método en su esencia el impulsor de todos los cambios a partir del siglo XVIII y de su acelerada aparición, y no sólo en lo científico. La ilustración y el enciclopedismo francés nacieron con la convicción de que el progreso, es decir, el cambio en sentido positivo, acumulativo y de perfeccionamiento, era posible. El conocimiento era la herramienta para luchar contra la superstición, las creencias irracionales y las tiranías, y así, el avance del conocimiento se convirtió en el motor de nuevas formas de organización política y social. Los filósofos de la ilustración demostraron que el solo hecho de saber que el cambio es posible puede hacernos buscarlo, provocarlo e intentar dirigirlo (generalmente esto último con bastante poca fortuna).

La velocidad del cambio en nuestros días es asunto de preocupación no sólo filosófica, sino social. El cambio, junto con sus promesas, trae incertidumbre y dudas. La incapacidad de ‘estar al día’ representa para muchas personas una inquietud permanente. Como animales, quizá no estamos preparados para un cambio a la velocidad que nos hemos impuesto. Pero no parece haber opción, y descontando a quienes prefieren sumirse en alguna superstición cómoda, quizá una secta, la única opción que nos queda es seguir en la cresta de la ola, tratando de mantenernos a flote y de sacar el mejor partido posible de un mundo que mañana, eso es seguro, será totalmente distinto al de hoy. No somos sólo las víctimas del cambio, después de todo. Lo hicimos nosotros.

3.EL TEXTO
Segunda parte

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Conozcan el concepto de adecuación textual como propiedad del texto.
- ✓ Reconozcan los elementos que aportan a la adecuación textual.
- ✓ Detecten y señalen en los textos problemas de adecuación textual.
- ✓ Desarrollen conciencia retórica como requisito para escribir textos adecuados a la situación comunicativa.
- ✓ Adquieran herramientas para construir un ethos académico.

FICHA DE CLASE 3

3.1 TEXTO, ENUNCIADO Y DISCURSO

Cuando escuchamos la palabra "discurso" seguramente pensamos en alguna autoridad que frente a un grupo de escuchas emite un mensaje. Y si decimos texto, lo primero que recordamos es lo último que leímos, por ejemplo, un texto de historia para rendir un examen, las consignas para completar un formulario, los subtítulos de una película, etc. Lo primero que vamos a decir es que tanto texto como discurso remiten no solo a la oralidad sino también a la escritura.

La intuición nos los presenta por separado, sin embargo, es fácil confundirlos ya que en algunos casos podemos usar ambos términos como sinónimos. Pero, si profundizamos en el análisis del discurso veremos que, aunque discurso y texto están relacionados, no son lo mismo.

Un enunciado es la unidad mínima de comunicación que transmite un mensaje inteligible en un contexto físico o verbal determinado. Por ejemplo, si nos hacen una pregunta y respondemos "sí", esta breve respuesta constituye un enunciado porque tiene capacidad comunicativa propia.

El texto es un conjunto de elementos lingüísticos organizados según reglas de construcción como se vio en el MÓDULO 2

Es difícil separar los conceptos de texto, enunciado y discurso ya que están íntimamente vinculados. Podríamos simplificar la idea diciendo que discurso es un texto en contexto o situación comunicativa.

Usamos el término "discurso" para delimitar un uso específico de la lengua, por ejemplo: discurso político, discurso religioso, discurso legal, discurso académico, etc. De aquí podríamos decir que el discurso está compuesto por textos que convergen en un interés común y, los textos que componen estos discursos poseen características que le son propias en cuanto a su estructura y temática.

Este tema se profundiza en el MÓDULO 4

Podés ampliar estos conceptos en la siguiente página: https://prezi.com/a2cjj_x67uew/enunciado-texto-y-discurso/

O a través del siguiente código QR:

3.2 ADECUACIÓN

La adecuación es la propiedad textual por la que el **texto** se adapta al contexto discursivo, vale decir, que el texto se ajusta a los interlocutores, a sus **finalidades comunicativas**, al canal de producción y recepción, etc. Estos parámetros determinan los **registros**.
Por tanto, un texto es adecuado si la elección lingüística efectuada es apropiada a la situación comunicativa.
La adecuación es la propiedad por la que el texto se amolda a la situación de comunicación.
La cohesión, como ya señalamos en el Módulo 2, es una propiedad que refiere a las relaciones de significado que se dan dentro del texto y permite definirlo como un todo unificado, es decir, coherente. Sin embargo, la textura necesita ser definida además por la adecuación del texto al contexto en que tiene lugar, esto es, por el registro lingüístico.
El texto es, por un lado, coherente con respecto al contexto, por lo tanto, consistente en registro, y, por otro lado, coherente en sí mismo y, por lo tanto, cohesivo.
Los elementos de la realidad contextual que conforman la adecuación del texto a la situación se pueden agrupar en cuatro ítems:

- El tema de que se trata.
- El canal de producción, transmisión y recepción del texto.
- La relación interpersonal entre los interlocutores.
- El propósito o intención del emisor del texto.

Así, puede decirse que la variación lingüística supone una elección por parte del hablante con dos fines fundamentales, por un lado, para adecuarse a la situación, y, por otro lado, en función de la intención comunicativa.
Sea cual sea su nivel de competencia, el hablante pone en juego su dominio de la lengua para elegir, dentro de sus posibilidades, aquellos elementos que le son útiles para cada ocasión comunicativa. La adecuación a la situación comunicativa forma parte de la competencia sociolingüística de un hablante.
Estos son algunos de los registros más utilizados en los géneros que frecuentamos en la universidad:
Subjetivo/ objetivo: el registro se define como subjetivo cuando en el enunciado se encuentran marcas de la subjetividad del enunciador. En otras palabras, decimos que el texto tiene un registro subjetivo cuando contiene palabras, frases, modalidades del lenguaje que expresan las opiniones o valoraciones del autor. Por el contrario, el registro es objetivo cuando esas huellas están borradas, eliminadas del texto, y el lector no puede reconstruir cuál es la perspectiva del autor. Esta es una característica, por ejemplo, del discurso científico.
Masivo/ especializado: el registro masivo se caracteriza por la simpleza de las construcciones, la claridad de los conceptos y el uso de un vocabulario accesible para la mayoría de las personas. Este

registro es típico del discurso periodístico, aunque presenta matices según el tipo de publicación de que se trate. En cambio, el registro especializado se distingue por la complejidad de las construcciones y el uso de vocabulario específico de la disciplina que trate el texto. El discurso académico selecciona esta variedad.

Informal/ formal: se diferencian por el grado de familiaridad entre el enunciador y el enunciatario. A menor familiaridad, mayor formalidad.

En la universidad, en la comunicación escrita entre docentes y alumnos, prevalece el registro **especializado** y **formal.** En la comunicación oral, las cosas pueden ser distintas.

3.3 CORRECCIÓN

La corrección es un parámetro clave en la comunicación, tanto oral como escrita. Por corrección se entiende la ausencia de errores en el uso de cualquiera de las destrezas lingüísticas.

El origen del concepto de corrección se remonta a la época de las lenguas clásicas —el griego y el latín—, cuyas obras literarias eran consideradas como modelos de los que aprender.

El concepto de corrección está ligado esencialmente a la gramática. De hecho, la primera acepción de gramática que brinda la *Real Academia Española* es: “Arte de hablar y escribir correctamente una lengua, y libro en que se enseña.”

Ahora bien, el concepto de corrección no se limita a la gramática; existen otros tipos: *corrección* léxica, *fonética, ortográfica, sociocultural, estilística, etc*. La corrección incluye tanto los aspectos más superficiales de la lengua como los más profundos. El concepto adquiere una dimensión diferente en la oralidad, dado que esta tiene una variación y unas características diferentes de la lengua escrita. Para abordar estas cuestiones no alcanza con emplear criterios de corrección; también entra en juego la adecuación.

Dado que, generalmente, se dispone de más tiempo para procesar la lengua escrita que la lengua oral, se espera un grado superior de corrección en la primera. Los hablantes improvisan su discurso y los oyentes solo lo oyen una vez en tiempo real. En cambio, los lectores pueden releer un texto tantas veces como lo necesiten hasta comprenderlo perfectamente. Por su parte, los escritores, pueden ir modificando un texto hasta que el resultado les resulte satisfactorio.

La lengua es mucho más que un simple repertorio de signos y estructuras. Para comunicarse con éxito no basta con formular frases gramaticalmente correctas. Es preciso que los enunciados también sean adecuados al contexto situacional en que se emplean, teniendo en cuenta las circunstancias de la comunicación: a quién nos dirigimos, qué tema estamos tratando, dónde nos hallamos, etc. Así, se trata de trabajar tanto las formas lingüísticas como el significado del mensaje, atendiendo a la situación concreta en que tiene lugar la comunicación.

Como ya habrás notado, si bien es sumamente importante la corrección, en esta materia no vamos a trabajar con ortografía, puntuación o gramática. Por esta razón, te sugerimos algunas páginas web o usuarios de Instagram que pueden ayudarte a resolver tus dudas:

Acá vas a encontrar recomendaciones de ortografía presentadas con un poco de humor, a este instagramer ya lo conocés porque leíste su texto en el MÓDULO 1

https://instagram.com/marianomagnifico?igshid=YzAwZjE1ZTI0Zg==

Podés acceder también a través de este código QR

Y, en esta página web vas a hallar, en forma de viñetas, diferentes temas de ortografía, puntuación y muchas cosas más: https://www.elprofesordonpardino.com/, para que veas un ejemplo:

Y te agregamos el código QR

Pero, si sos más formal en la página de la Academia Argentina de Letras también podés encontrar: consultas idiomáticas, recomendaciones y observaciones sobre la lengua, consultar el *Diccionario de la lengua española*; el *Diccionario panhispánico de dudas (DPD)*; la última *Gramática* y la última *Ortografía*: https://www.aal.edu.ar/?q=node/202 o en el código QR:

3.4 CONCIENCIA RETÓRICA

Se denomina conciencia retórica al reconocimiento de los tipos y géneros que se "producen circulan y consumen en cada comunidad discursiva ya que es a partir de ellos que ésta se identifica a sí misma y a sus integrantes" (Bitonte et al – 2014).

El reconocimiento de este tipo de géneros está orientado tanto al aprendizaje como a la formación de un *ethos* académico.

Al leer el manual, pensar en las actividades, responder las consignas de cada módulo se va construyendo la conciencia retórica.

Algunos elementos para tener en cuenta en la construcción de una conciencia retórica:

- El auditorio
- El propósito
- La organización
- El vocabulario (registro)
- Las estrategias

3.5 ETHOS ACADÉMICO

La noción de *ethos* proviene de la antigua Grecia. Aristóteles, en el siglo IV a.C., propuso que el *ethos* es la imagen que el orador muestra a través de su forma de hablar, sus gestos, etc. Más acá en el tiempo, en el siglo XX, D. Maingueneau agrega que todo texto oral o escrito supone un ethos, un garante que asume la responsabilidad de lo expresado.

El *ethos discursivo* o *ethos en la enunciación* forma parte de la construcción de la identidad. Por medio de él, el hablante entrega información a los otros sobre su propia identidad.

El *ethos académico* se entiende como la imagen que el autor construye discursivamente para presentarse a sí mismo como un escritor académico. Este escritor académico se reconoce porque posee las habilidades necesarias para organizar y producir su texto ofreciendo las garantías necesarias para que el lector lo valide como tal.

Para entender cómo se construye este tipo de escritor, tu profesora o profesor te indicarán qué texto leer para observar cómo están trabajadas estas habilidades.

En esa parte del manual, luego de todos los módulos, hay textos académicos correspondientes a las distintas carreras de la universidad.

TEXTOS PARA TRABAJAR

3.6 COMUNIDAD DISCURSIVA

Una comunidad discursiva está conformada por un grupo de hablantes que comparten no solamente una lengua sino también un conjunto de normas y valores sociales y lingüísticos. La comunicación entre los miembros de la comunidad se lleva a cabo en el marco de eventos comunicativos que dan forma y desarrollan la vida social del grupo. Son comunidades discursivas las profesionales, pero también las que se forman con los grupos familiares, de amigos, compañeros de estudio, entre otras. En todos los casos, los sujetos comparten además de la lengua común rasgos e intereses que deben conocer para participar, de forma eficaz y adecuada, en las actividades lingüísticas de la comunidad.

3.7 COMUNIDAD ACADÉMICA

Las comunidades académicas se caracterizan por ser una forma de trabajo pedagógico en la que colaboran las y los estudiantes como centro y los profesores como acompañantes. El objetivo de este tipo de comunidad es favorecer en las y los estudiantes el proceso de apropiación y producción de un nuevo modo de interacción lingüística.

La identidad de esta comunidad está basada en la producción de saberes controlados y evaluados por instancias institucionales y en un repertorio particular de géneros específicos complejos (monografías, tesis, ponencias, artículos de investigación, conferencias, informes, etc.).

Al referirnos a lo académico nos centramos en las prácticas discursivas pedagógicas y los géneros que producen docentes y estudiantes en el marco del proceso de enseñanza aprendizaje. Estos géneros (clase magistral, lección, manual, informes, monografías, etc.) aunque especializados, lo son en un grado menor, pues además de la dimensión cognitiva (que comparten con los científicos), poseen una dimensión pedagógica o didáctica.

Cada comunidad académica despliega una estrategia organizativa que tiene como función cumplir determinados objetivos de aprendizaje. Cada disciplina tiene sus propias características y su propio estilo intelectual, lo que resulta en distintas prácticas académicas. No son iguales las prácticas de una comunidad académica conformada por estudiantes y profesores de Psicología que una que esté centrada en la Antropología.

Ahora bien, podemos establecer una diferenciación entre lo académico y lo específicamente científico.

Cuando hablamos de la comunidad científica nos referimos al conocimiento producido por investigadores y especialistas que se expone en géneros discursivos tales como artículos de investigación, conferencias, ponencias, tesis doctorales. Estos géneros están dirigidos a pares, es decir a otros investigadores o especialistas y por tanto, presentan un alto grado de especialización.

En la actualidad y debido al avance de las tecnologías de la información y la comunicación, estas comunidades han trascendido la presencialidad para conformar comunidades académicas y/o científicas virtuales. En este tipo de comunidades el impacto se dio sobre todo al borrarse los límites de tiempo y espacio.

3.8 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

Para trabajar los conceptos de esta unidad, tu profesora o profesor te va a indicar un texto del apartado

TEXTOS PARA TRABAJAR

A partir del texto seleccionado, resolver las siguientes consignas:

1. Observar los paratextos y a partir de estos inferir el tema y la intención del texto.
2. A partir de la lectura del fragmento seleccionado, responder las siguientes preguntas: ¿quién es el emisor? ¿para quién escribe? ¿qué registro predomina?
3. Establecer a qué comunidad discursiva corresponde el texto leído, ¿es científica o académica? Hacer un listado de 10 palabras que corroboren lo dicho.

4. GÉNEROS DISCURSIVOS y SECUENCIAS TEXTUALES

Colaboraron en este módulo: Daiana Martínez
Carolina Robles Bernunzio

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Reconozcan el género académico al que pertenece un texto a partir de sus rasgos externos e internos.
- ✓ Identifiquen las diferentes secuencias textuales a partir de sus características.
- ✓ Distingan en un texto la secuencia textual dominante y las dominadas.
- ✓ Reconozcan las características específicas de los textos explicativos y argumentativos.
- ✓ Adquieran las herramientas necesarias para leer y escribir textos explicativos y argumentativos.
- ✓ Distingan en los textos explicativos las dimensiones cognoscitiva y didáctica.
- ✓ Identifiquen en los textos argumentativos las dimensiones cognoscitiva y emocional.

FICHA DE CLASE 4

4.1 GÉNEROS DISCURSIVOS

Los géneros textuales o géneros discursivos son un conjunto de categorías en las que es posible clasificar los distintos enunciados del lenguaje o, dicho de otro modo, las cosas que se pueden decir.

Las personas, al momento de hablar, seleccionan lo que van a decir de acuerdo con el género que consideran apropiado y también según los destinatarios a quienes se vayan a dirigir.

Ahora bien, ¿cómo se hace para determinar con precisión cada una de estas categorías? Se reconocen a partir de una serie de regularidades o rasgos externos e internos, que varían de texto a texto.

Los **rasgos externos**: son externos porque se vinculan con aquellos elementos que acompañan o rodean al texto.

Ver paratextos en MÓDULO 2

Se relacionan con tres características:

1. Naturaleza del emisor: formación de quién habla o escribe.
2. Fuente de publicación: características del medio en el que se publicó el texto.

3. Destinatario: a quién está dirigido el texto. Si bien este dato no se puede inferir a partir de la lectura de los paratextos, los dos rasgos anteriores, que sí se encuentran en los datos paratextuales, permiten determinar a quién está dirigido el texto que se está leyendo. Por ejemplo, el discurso académico es formulado por un académico, para la comunidad académica (profesores y estudiantes) y para que circule dentro de ese ámbito.

Los **rasgos internos**: son internos porque se relacionan con la lectura y contenido del propio texto, se pueden vincular con tres características:

1) El tema: asunto, cuestión central y de mayor importancia que el texto desarrolla.

2) El estilo verbal: registro utilizado y tipo de enunciación.

3) Secuencia o estructura: determina la intención o finalidad del discurso

En síntesis, los géneros textuales pueden comprenderse como formas del lenguaje que presentan importantes similitudes en lo temático (de qué trata), lo estilístico (qué recursos usa) y lo compositivo (cómo se organiza la información).

4.1.1 Géneros académicos

Dentro del ámbito académico, entre los géneros destinados a la comunicación entre expertos (los docentes) y no expertos (los alumnos), se encuentran el manual universitario, el tratado, el diccionario enciclopédico, el diccionario especializado (de Ciencias Sociales, de Filosofía, de Lingüística, etc.). Estos son los más comunes y formales y pueden ser complementados por otros como los cuadernillos y las fichas de cátedra (habitualmente preparados por los docentes responsables de los cursos), que suelen ser adaptaciones de capítulos de libros especializados o de artículos académicos. Como género oral, la clase expositiva es típica de este tipo de comunicación.

En cuanto a la escritura, resulta habitual que a las y los estudiantes se les solicite la producción de reseñas, monografías o ensayos, géneros típicos de la comunicación alumno-docente, con la finalidad tanto de evaluar como de familiarizarlos con el método científico y la elaboración de nuevos saberes.

4.2 SECUENCIAS TEXTUALES

Tal como se expuso anteriormente, los géneros pueden reconocerse a partir de:

1) los rasgos externos vinculados a las condiciones de producción y circulación;

2) los rasgos temático-estilísticos; y

3) los rasgos estructurales y/o compositivos.

Desde esta última perspectiva, estrictamente lingüística o textual, J.M. Adam (1992) postula que puede caracterizarse un género a partir de las secuencias o unidades que lo componen, y define a las mismas como las unidades menores que conforman un texto.

Según esta teoría, los textos de los distintos géneros están compuestos por varios tipos de secuencias o segmentos. Ello ocurre porque los textos no son homogéneos, es decir, no están compuestos por solo una única secuencia, sino por un conjunto de ellas. Sin embargo, siempre una predomina sobre las otras, la denominada secuencia englobante o dominante, que es la que determina la intención discursiva. Por ejemplo, el artículo de opinión puede incluir descripción, narración y explicación, pero se define por la preeminencia de la argumentación que engloba, incluye, subordina a las demás secuencias con el fin de persuadir o convencer al lector. Es decir que se describe, narra y explica con un solo propósito. Otro ejemplo es el de la novela en la que pueden aparecer la instrucción, el diálogo, la descripción, la explicación, pero siempre con la intención de narrar una historia en toda su complejidad.

Las secuencias tipo son seis: instructiva, dialogal, descriptiva, narrativa, explicativa y argumentativa. A continuación, se abordarán brevemente.

4.2.1 Secuencia descriptiva

Por medio de la descripción, el hablante da cuenta de un estado de cosas o de un proceso que ocurre regularmente. Tres componentes están en la base de la descripción: nombrar, localizar-situar y calificar. Un ejemplo de este modelo, muy frecuente en los textos escolares y manuales, son las definiciones en las que se expone el contenido de un término que se supone desconocido, con la ayuda de otros conocidos.

Ejemplo:

El león africano pertenece a los felinos, es de un tamaño muy grande, de aproximadamente 1.75 metros, midiéndolo desde la cruz hasta el suelo, su largo promedio es de dos metros, midiéndolo desde la cabeza hasta la cola.
Un animal adulto llega a pesar entre 180 y 200 Kg, y los machos cuentan con una gran melena que abarca todo el cuello, la cabeza (exceptuando la cara) y parte del lomo.
Su color es pardo tendiente a dorado y es uno de los felinos más grandes que existen, siendo superados en tamaño por algunos tipos de tigre, como el tigre de bengala.
Fuente:
https://www.ejemplode.com/41-literatura/3138-ejemplo_de_textos_descriptivos.html#ixzz7pHcM62IL

4.2.2 Secuencia narrativa

La secuencia narrativa presenta un acontecimiento a partir de una serie de acciones desarrolladas en el tiempo. Tres son las partes fundamentales:

- **Iniciación**: define el mundo del relato: tiempo, lugar, agentes. Es la parte descriptiva de una narración.
- **Complicación:** presenta los acontecimientos relevantes en relación con la situación inicial.
- **Resolución**: puede ser 'feliz' o 'desdichada'. Si es desdichada, puede acarrear otra complicación seguida por una nueva resolución.

Los marcadores textuales o tipos de palabras que permiten el reconocimiento son, por una parte, los verbos en pretérito imperfecto (llevaba, terminaban, etc.), pretérito perfecto simple (salió, votó, experimentó, etc.) y pretérito pluscuamperfecto (había llegado, habíamos conseguido, etc.); y por otra, los conectores temporales (previamente, en primer lugar, posteriormente, etc.).

Ejemplo:

Albert Einstein, el famoso físico, nació el 14 de marzo de 1879 en Ulm, Alemania, donde pasó su primer año de su vida. En 1880 se mudó con sus padres a Múnich, donde vivió catorce años. En 1888 comenzó a asistir a la escuela Luitpold, donde demostró tener grandes habilidades para las ciencias naturales. Jacob Einstein, su tío, fue una figura muy importante en su juventud, porque juntos realizaron muchos experimentos en el taller-laboratorio que estaba en la casa de Albert.

Fuente: https://www.ejemplos.co/parrafos-narrativos/#ixzz7pHbi5w4k

Existen también narraciones en tiempo presente como sucede en los relatos históricos. En este caso son particularmente importante los conectores temporales para señalar la sucesión de las acciones.

Ejemplo (adaptado para este manual):

Hacia finales del s. XVIII, los criollos comienzan a mostrar su descontento con las autoridades españolas. La expulsión de las tropas británicas de Buenos Aires da a las gentes del Río de la Plata mayor seguridad en su capacidad para dirigir su destino. El 25 de mayo de 1810, solo dos años después de que Napoleón invada España, Buenos Aires declara su independencia.

En la década de 1820, se suman varios movimientos independentistas por toda Sudamérica. Bajo las órdenes del general José de San Martín, entre otros, el 9 de julio de 1816, las Provincias Unidas del Río de la Plata (precursoras de la República Argentina) declaran su independencia en Tucumán.

Fuente: https://www.lonelyplanet.es/america-del-sur/argentina/historia

4.2.3 Secuencia dialogal

Según J. M. Adam, el diálogo, como forma textual, no es más que la manifestación más espectacular y evidente de un mecanismo enunciativo complejo. Funciona como una unidad de composición textual oral o escrita que se caracteriza por la interacción discursiva y se organiza según el esquema básico de la secuencia pregunta-respuesta.

El principio que sustenta todo diálogo es el de cooperación y sucede en un cierto contexto determinante que se describe en términos del marco, los participantes y la finalidad. Se estructura regularmente en forma naturalizada y espontánea, con momentos de apertura y cierre que son de carácter fático, y con el momento central de desarrollo del diálogo como transaccional, allí se intercambia o negocia la información.

Para diferenciar cada uno de los turnos se dispone gráficamente en forma de discurso directo; con la mención o no de los participantes, dos puntos o guion. Son ejemplos de secuencias dialogales la conversación telefónica, la interacción cotidiana oral, el debate, la entrevista, el examen oral, el diálogo dentro de una novela, el libreto, el guion de cine, etc.

Ejemplo:

− ¿Qué piensa sobre el calentamiento global?
− Creo que es algo que todas las personas deben tener en cuenta. Hay que hacer todo lo posible para detenerlo, tanto a nivel individual como a nivel social.
Fuente: https://www.ejemplos.co/parrafos-de-dialogo/#ixzz7pHibMpLO

4.2.4 Secuencia instruccional

La secuencia instruccional constituye un discurso orientado hacia la ejecución de una o varias acciones, es decir, un texto que da una instrucción con el objeto de ejecutar una tarea o de realizar un procedimiento según una serie de pasos previamente establecidos y que no se pueden saltar u omitir.

Ejemplo:

Las Naciones Unidas esperan que todo el personal de operaciones de paz respete las normas de conducta más elevadas y se comporte en todo momento de manera profesional y disciplinada.

Nuestro personal debe:
- *Respetar las leyes, costumbres y prácticas locales.*

- *Tratar a los habitantes del país anfitrión con respeto, cortesía y consideración.*
- *Actuar con imparcialidad, integridad y tacto.*

Fuente: https://www.ejemplos.co/10-ejemplos-de-textos-instructivos/#ixzz7pHjadT6w

4.2.5 Secuencia explicativa

La secuencia explicativa brinda conocimiento y tiene como propósito que el lector comprenda situaciones, fenómenos o cuestiones de distinta índole. Su punto de partida, explícita o implícitamente, es una pregunta cuya respuesta dilucidará el desarrollo del texto.

Este tipo de texto es muy frecuente en el ámbito científico, en el universitario y también en el escolar, dado que las explicaciones son operaciones conceptuales que surgen como respuestas a distinto tipo de interrogantes. En el ámbito académico, la explicación aparece en el género manual, en las clases de los docentes y en el género respuesta de parcial.

El elemento organizador de la explicación es la exposición de un determinado tema, acompañada de una visión “objetiva” vinculada casi siempre a una concepción científica.

Desde una perspectiva discursiva se puede afirmar que la estrategia explicativa le permite al locutor tomar distancia y rechazar los puntos de vista subjetivos, de manera que puede presentarse como un observador imparcial de los hechos.

Ejemplo:

La fotosíntesis es un proceso químico a través del cual la materia inorgánica se transforma en materia orgánica, a partir de la energía de la luz. En este proceso se generan moléculas de glucosa a partir del dióxido de carbono y el agua, por un lado, y se libera oxígeno como subproducto, por el otro.

Fuente: https://www.ejemplos.co/texto-explicativo/#ixzz7pHcik0QK

4.2.6 Secuencia argumentativa

Los textos argumentativos son aquellos que buscan convencer o persuadir a un destinatario a partir del desarrollo razonado de las opiniones que, en relación con un determinado campo o problema sustenta el enunciador, quien manifiesta y confronta su opinión con la de otros. Esa confrontación de ideas se da por la condición dialógica del discurso argumentativo y suele ponerse en evidencia en el uso de concesiones y otras estrategias de refutación.

En la actualidad, la argumentación está presente en los distintos ámbitos sociales: en los medios de comunicación, en las notas de opinión y editoriales, entre otros géneros; en los espacios políticos, en los discursos electorales y ensayos, por ejemplo; en el campo religioso, se advierte en los sermones, encíclicas, declaraciones de autoridades; en la educación, en la fundamentación de un cambio curricular, los discursos conmemorativos y las conferencias, etc.

En todos los casos, el desarrollo discursivo tiene en cuenta al destinatario, no solo para la selección de los argumentos y el tipo de pruebas (testimonios, leyes, ejemplos históricos) sino también para la elección del peso relativo de lo racional y de lo emocional, el vocabulario, la extensión y la entonación (si fuera oral).

Los textos argumentativos, a pesar del aparente rigor conceptual que pueden adoptar, trabajan con un material afectado por valoraciones sociales que inciden en la actividad interpretativa del receptor. Por otra parte, se basan en premisas verosímiles, es decir, simplemente admisibles o susceptibles de ser admitidas por los interlocutores, de allí que no tengan la prueba de una demostración matemática o lógica y que las conclusiones a las que arriban puedan ser refutadas.

Finalmente, es importante señalar en la argumentación la presencia de un enunciador que construye una imagen de sí como sujeto objetivo o apasionado, enérgico o tímido, bueno o malo, humilde o soberbio, escolarizado o no, etc., y además emite juicios apreciativos sobre los acontecimientos o actores implicados y asigna o no credibilidad a las opiniones de los otros. Estas construcciones tienen sus efectos de sentido e influyen sobre el enunciatario.

Ejemplo:

Sabemos que la intolerancia es negarse a apreciar, respetar y aceptar cualquier creencia, opinión de otras personas. Un ejemplo significativo son los palestinos israelíes y judíos debido a los grandes problemas de identidad, libertad, seguridad, entre otros conflictos. La intolerancia entre ellos pasa a ser violenta. Es un problema social, debido a que promueve una diferencia, que, en muchos casos, puede inclusive quebrantar los derechos legales de las demás personas.

Fuente: https://www.clasificacionde.org/ejemplos-de-textos-argumentativos-cortos/

4.3 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

Leer atentamente los siguientes fragmentos sin olvidar los paratextos. Luego, resolver las consignas indicadas al pie de cada uno de ellos.

a.

“En lo que respecta al tratamiento cognitivo de textos, numerosas investigaciones modelizan los procesos de comprensión y producción con referencia a esquemas textuales prototípicos definidos como “representaciones progresivamente elaboradas por los sujetos a lo largo de su desarrollo acerca de las propiedades superestructurales de los textos canónicos que su cultura reconoce y a los que, con frecuencia, su lengua da una denominación” (Brassart, 1990). La matriz de estas representaciones esquemáticas prototípicas parece tener consecuencias sobre el almacenamiento de las informaciones tratadas en el curso de la comprensión y sobre la búsqueda de bloques de información a través de estrategias de anticipación. Las dificultades de comprensión de textos orales y escritos que experimentan los sujetos novatos o no expertos parecen tener su explicación, al menos en parte, en la falta de manejo de esquemas textuales prototípicos. S. Erlich, por ejemplo, explica las diferencias entre lectores lentos y rápidos no sólo a partir de las capacidades desiguales de desciframiento y/o el dominio desigual del tema abordado en el texto leído sino, igualmente, a partir de esquemas textuales prototípicos, de una representación organizada y jerarquizada del contenido semántico del texto. Numerosos trabajos sobre la producción escrita confirman el papel de los esquemas disponibles en la memoria a largo plazo sobre las actividades de planificación y de revisión. C. Bereiter y M. Scardamaglia muestran que novatos y no-expertos “no disponen (todavía) de estos esquemas y no han automatizado un cierto número de saberes de ‘bajo nivel’ (gráficos, ortográficos, sintácticos...). Deben, entonces, dedicar una parte importante de su atención a regular estos micro-problemas lingüísticos a medida que se les presenta la puesta en texto, en detrimento de la composición en su conjunto, ya que la capacidad de tratamiento de cualquier tema es limitada y que no es posible garantizar ninguna compensación a través de los esquemas textuales prototípicos poco o nada disponibles en ellos. De allí el aspecto de texto-collage o de texto-montón de sus producciones”.

El texto fue modificado para esta actividad.

Adam, J-M. (1992). Los textos: tipos y prototipos. Relato, descripción, argumentación, explicación, diálogo. París, Nathan.

1. ¿Cuál es la finalidad del fragmento **a.**? Marcar con una "X" la/las opción/es correcta/s
a) Opinar y dar cuenta de un punto de vista determinado.
b) Informar y brindar conocimientos de rigor científico.
c) Dar cuenta de un intercambio de información entre dos o más interlocutores.
d) Describir un estado de cosas o un proceso que ocurre con regularidad.
e) Relatar una sucesión de hechos que ocurren en un tiempo y lugar.

2. Teniendo en cuenta lo respondido en el punto anterior, ¿cuál es la secuencia englobante o predominante del fragmento **a**.?
a) Argumentativa.
b) Explicativa.
c) Dialogal.
d) Descriptiva.
e) Narrativa.

3. Algunas características del fragmento **a.** son… (Señalar las opciones correctas)
a) No se utiliza la 1° persona gramatical ni hay expresiones que transmitan la opinión del autor, es decir, se borran las huellas de la enunciación.
b) Existe subjetividad.
c) Se produce un efecto de objetividad.
d) Se utiliza la 1° persona gramatical y/o hay expresiones que transmiten la opinión del autor, ***es decir, no se borran las huellas de la enunciación***.
e) Se utilizan términos sencillos.
f) Se utiliza lenguaje especializado.
g) Se utilizan citas que avalan las consideraciones del autor.
h) Se utilizan nominalizaciones.

b.

"Estas posiciones suponen que toda experiencia humana es una experiencia mediada, que lo que hoy aparece como "realidad" aparece a través de los medios, que las imágenes de los medios nos dan cuenta de lo que ocurre, que ellos tienen incluso la posibilidad de incorporar a nuestro entorno sucesos que de otro modo nunca estarían en el ámbito de nuestra experiencia cotidiana y los dotan de una existencia concreta.
Creemos que se deben evitar estos puntos de vista por ser lugares comunes y superficiales, ya que los medios son un fenómeno complejo que merece ser tratado como tal. Convendría más bien considerar que ellos forman parte de esa realidad, que cuando hoy se habla de la "realidad" no es posible hacer abstracción de los medios y considerarlos como algo ajeno a ella.
En primer lugar, es conveniente evitar quedar presos de una reflexión puramente endomediática. Sólo si se asume que la cuestión mediática es una dimensión estratégica de la cultura se podrá lograr una reflexión más adecuada.
Para ello es necesario pensar el lugar que los medios ocupan en la cultura cotidiana de las mayorías, en tanto transformadores de las sensibilidades, de los modos de percibir e interpretar la vida social y constructores de discursos ideológicos y de nuevas identidades."

Etchegaray, Ricardo Miguel. "Opinión pública, democracia y medios de comunicación"
RIHUMSO vol. 1, n° 1, año 1, del 15 de mayo de 2012, pp. 11-36 ISSN 2250-8139

1. ¿Cuál es la finalidad del fragmento **b.**?
a) Opinar y demostrar un punto de vista determinado.
b) Informar y brindar conocimientos de rigor científico.
c) Dar cuenta de un intercambio de información entre dos o más interlocutores.
d) Describir un estado de cosas o un proceso que ocurre con regularidad.
e) Relatar una sucesión de hechos que ocurren en un tiempo y lugar.

2. Teniendo en cuenta lo respondido en el punto anterior, ¿cuál es la secuencia englobante o predominante del fragmento **b.**?
a) Argumentativa.
b) Explicativa.
c) Dialogal.
d) Descriptiva.
e) Narrativa.

3. Algunas características del texto **b.** son… (Señalar las opciones correctas)
a) No se utiliza la 1° persona gramatical ni hay expresiones que transmitan la opinión del autor, es decir, se borran las huellas de la enunciación.
b) Existe subjetividad.
c) Se produce un efecto de objetividad.
d) Se utiliza la 1° y la 2° persona gramatical y/o hay expresiones que transmiten la opinión del autor, es decir, no se borran las huellas de la enunciación.
e) Se utilizan citas de estilo indirecto.
f) Se utilizan citas textuales o directas.
g) Se hallan presentes los comentarios del enunciador.
h) Se utilizan términos sencillos.
i) Se utiliza lenguaje especializado.

4.4 LA EXPOSICIÓN: EXPLICAR/ARGUMENTAR

En los géneros académicos, las secuencias textuales englobantes o dominantes son la explicación y la argumentación, ambas se caracterizan por organizar y estructurar el discurso de un modo particular y se utilizan para dar cuenta de saberes en una exposición. En este tipo de discurso, el resto de las secuencias funcionan como subordinadas.

Es muy común que en un mismo texto aparezca un cambio en el punto de vista y lo que era explicación se convierta en argumentación. Esto es así porque la explicación y la argumentación son dos polos de un continuum, ya que ambas se caracterizan por la exposición razonada de un tema, de la respuesta a un interrogante o de los fundamentos de una opinión.

Si hablamos de un continuum en la exposición es porque, además, para la mayor parte de los problemas que se presenten en una sociedad hay más de una respuesta, y a esas diferentes respuestas hay que justificarlas con razones.

Se argumenta para persuadir de que la explicación que se propone, que la respuesta que se da es la más verosímil.

En el cuadro que sigue se presentan las características de los dos polos de la exposición:

Polo explicativo	Polo argumentativo
Se presenta con un saber construido en otro lado, legitimado ya socialmente o como un saber teórico.	Se presenta como la construcción de nuevos conceptos a partir del propio desarrollo discursivo.
Tiende a borrar las huellas del sujeto y a instaurar una distancia que genere el efecto de objetividad.	El sujeto se manifiesta y confronta su opinión con la de los otros.
Las fronteras entre discurso propio (citante) y el ajeno (citado) son precisas.	El discurso propio aparece contaminado por distintas voces que no pueden precisarse fácilmente.
Se propone informar y hacer saber a otros.	Se propone persuadir.
A la dimensión cognitiva se le añade la didáctica.	A la dimensión cognitiva se le agrega la emocional.

4.4.1 LA EXPLICACIÓN

Estructura general de la explicación

La estructura de una secuencia explicativa completa tiene cuatro partes:

- Presentación del tema
- Pregunta o problema
- Respuesta o solución
- Cierre o conclusión

Claro que no en todos los géneros explicativos aparecen diferenciadas estas cuatro partes. Sí suelen presentar estructura completa los géneros más complejos y formales. En otros géneros académicos como el parcial, por ejemplo, lo que aparece es una pregunta del docente a la que sigue la respuesta construida del estudiante.

4.4.2 LA ARGUMENTACIÓN

La argumentación puede definirse como el conjunto de estrategias discursivas que se despliegan en un discurso con el objetivo de conseguir la adhesión del destinatario al punto de vista que se presenta. El argumentador para lograr su finalidad se valdrá de diversos recursos. Puede razonar equilibrada y objetivamente o intentar seducir y emocionar a su interlocutor de un modo apasionado

Hay que recordar que en un discurso argumentativo la finalidad es convencer o persuadir. Lo central es que el discurso sea aceptado, no es la veracidad lo que se persigue.

Estructura de la argumentación

- **Punto de partida:** hecho particular que da origen al texto. Parte de una tesis adversa, es decir con aquella que se quiere negar o refutar, aquella con la que no se coincide A partir de esa disidencia se presenta la tesis propia.
- **Hipótesis**: opinión, tesis o punto de vista del argumentador. Aquello sobre lo que se quiere persuadir o convencer al receptor.
- **Argumentos**: razones para justificar la hipótesis. Es lo que se llama **demostración.** Son las pruebas para justificar la hipótesis. En esta parte, el argumentador despliega una serie de estrategias argumentativas.
- **Cierre:** conclusión en la que el autor retoma las líneas básicas expuestas en sus argumentos y expresa la finalidad de su razonamiento.

Algunos tipos de argumentos

Empíricos

Los argumentos empíricos son hechos concretos que evidencian que las afirmaciones que se hacen tienen sustento. Pueden estar constituidos por datos estadísticos o por un elemento o caso concreto que demuestre lo que se afirma.

De autoridad

Son conceptos, datos u opiniones proferidas por alguna persona experta o institución reconocida como autoridad en el tema tratado. Lo que esa institución o persona sostiene sirve como prueba.

De sentido común

Son los que se basan en una opinión o una creencia que está difundida y se asume como una verdad que comparte un grupo social.

Es importante entender que el texto argumentativo adquiere verdadero significado al enmarcarse en un hecho comunicativo. En la argumentación se ponen en juego técnicas que provienen de la retórica antigua. Volvamos sobre algunas de ellas:

4.4.3 Estrategias discursivas: explicativas y argumentativas

Enunciado general: proposición que expresa una ley o principio que explica un fenómeno, una teoría o una situación determinada, redactada en presente genérico. En su formulación es frecuente el uso de sustantivos abstractos y nominalizaciones. Ejemplos:

"El punto de ebullición del agua se observa a los 100 grados".

Reformulación: enunciado que amplía y aclara la información de otro enunciado anterior. Generalmente es introducido por un marcador textual como "es decir", "o sea", "en otras palabras". Ejemplos:

"El punto de ebullición del agua se observa a los 100 grados, o sea que ese punto se reitera, no es variable ni depende del contexto".

Definición: proposición que expresa por equivalencia el significado de una palabra o concepto,y puede ser también funcional, descriptiva o de denominación. Ejemplo:

"La palabra 'ebullir' viene del latín ebullire y significa hervir, soltar burbujas del interior al exterior por la acción del calor".

Ejemplo: enunciado que presenta el caso particular que explica, ilustra o aclara una ley o concepto. Ejemplo:

"No todos los elementos hierven a la misma temperatura. Por ejemplo, el agua lo hace a los 100 grados, mientras que la plata a los 2262."

Descripción: estrategia que distingue a un sujeto, objeto o situación a través de sus rasgos característicos. Ejemplo:

"El agua es incolora, inodora e insípida".

Comparación: procedimiento que establece una relación entre un objeto, situación o hecho conocido y otro que se intenta conocer. Ejemplos:

"El agua en estado sólido flota como un bote en el agua en estado líquido".

Analogía: Razonamiento basado en la existencia de atributos semejantes en seres o cosas diferentes. Su estructura suele ser: A es a B como 1 es a 2. Ejemplo:

“Hay en el mundo animal una individualidad que se produce fuera de toda combinación de órganos. Ahora bien, es idéntica a las de las sociedades que hemos llamado segmentarias.” (Emile Durkheim, La división del trabajo social.)

Narración, historia, **caso**: estrategia que vincula hechos relacionados en el tiempo, a veces causalmente. Ejemplo:

“Uno los descubrimientos más notables de Henry Cavendish es el que se relaciona con la composición del agua, en 1766. El científico tomó partículas del mineral zinc que luego mezcló con ácido clórico. Tras ello, comenzó a burbujear la solución generándose un gas al que llamó ‘aire inflamable’ que hoy conocemos como hidrógeno. La tarea de Cavendish no terminó allí. Años después quiso saber cómo el hidrógeno reaccionaba con otros elementos, como el aire. Y voilà, para su sorpresa la reacción química generó agua. Así, el científico inglés descubrió que el agua estaba compuesta de dos partes de hidrógeno y una parte de oxígeno, la reconocida fórmula H2O.”

Ilustración: es un recurso gráfico (foto, dibujo, esquema, gráfico, cuadro o infografía) que se usa para visualizar rápidamente procesos, relaciones y objetos que se han explicado verbalmente. Ejemplo:

Henry Cavendish, el extraño científico al que la timidez le impidió compartir gran parte de sus geniales hallazgos.

Cita: es un recurso que consiste en incluir las palabras de otro en el propio discurso de manera directa o indirecta para explicar o garantizar una proposición. Ejemplo:

“Dijo el científico escocés James Clerk Maxwell: ‘La conocida Ley de Ohm fue descubierta en realidad hace 100 años por Cavendish, y estos escritos que hoy publico lo demuestran.”

Metáfora: es una proposición que expresa una idea o concepto a través de otra idea que la sustituye gracias a una relación de semejanza. Ejemplo:

“Los descubrimientos de Cavendish no son ningún moco de pavo”.

Explicación causal: es un enunciado que expresa una relación causa-efecto o causa-consecuencia, que puede enunciarse de dos maneras, según se focalice en la causa o en elefecto. Se centra en la causa, si, por ejemplo: se dice “Perdió el tren (hecho) *porque* se quedó dormido” (causa). Se focaliza en el efecto cuando se dice, por ejemplo: “Se quedó dormido, *en consecuencia,* perdió el tren”. Otro modo de expresar la causalidad, sin utilizar los conectores específicos consiste en usar ciertos verbos llamados “de influencia”. Algunos de ellos son *producir, afectar, causar, engendrar, motivar, determinar, influir en, suscitar, ocasionar, ser la causa de, tener como resultado, etc.* Ejemplo:

“Como consecuencia del hallazgo de los trabajos de Cavendish, se supo que la ley de la resistencia eléctrica formulada por Ohm había sido descubierta 100 años antes”.

Concesión: consiste en una aceptación parcial del pensamiento del otro, aunque el enunciador no esté del todo de acuerdo. Ejemplo:

“Para la mayoría de la gente, y probablemente también para muchos lectores de este capítulo, la noción de racismo no se asocia inicialmente a la de discurso.(...) Ahora bien, aunque el discurso puede parecer sólo 'palabras' el texto y la charla juegan un papel vital en la reproducción del racismo contemporáneo.”[5]

---

[5] van Dijk, T. (2001). “Discurso y Racismo”, en *Persona y Sociedad*, Universidad Alberto Hurtado, ILADES. Recuperado de http//www.discursos.org/Art/Discurso%20y%20racismo.pdf

Desmentida: se trata de no sostener la falsedad de un dicho o hecho, es decir, la negación de una supuesta verdad. Ejemplo:

“Podría argumentarse que el desarrollo político y económico de las naciones y del mundo determina el curso de la historia y que el papel de la prensa, así como de los medios electrónicos, apenas refleja estas tendencias de una manera más o menos objetiva y ecuánime, sin el afán y la capacidad de influenciarlas de una u otra manera. ¡Pero he aquí el error!” Schenkel, P., en Chasqui, “Democracia y prensa: mito y realidad”. Otro ejemplo: “...aunque el discurso puede parecer sólo 'palabras', el texto y la charla juegan un papel vital en la reproducción del racismo contemporáneo.” van Dijk, T. (2001).

Anécdota: consiste en narrar un hecho o historia personal con el propósito de probar la hipótesis. Ejemplo:

“Albert Einstein tuvo tres nacionalidades, y en sus últimos días, un periodista le preguntó cómo había influido este hecho en su fama. El físico respondió una verdad como un templo:

- ‘Si mis teorías hubieran resultado falsas, los estadounidenses dirían que yo era un físico suizo; los suizos, que era un científico alemán; y los alemanes que era un astrónomo judío.

Importante:

- **En el caso de las metáforas hay que saber que no toda metáfora puede constituir un argumento que pruebe la hipótesis.**
- **Otras estrategias que no trabajaremos aquí son el sarcasmo y la pregunta retórica. No son incluidas porque presentan el mismo problema que la metáfora, llevan a confundir cualquier metáfora, cualquier sarcasmo y cualquier pregunta retórica con un argumento cuando no siempre funcionan de este modo.**
- **Una afirmación será un argumento solo si prueba la hipótesis.**

4.5 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

Leer el siguiente fragmento y responder las consignas que se encuentran al final.

“5. La explicación y la argumentación: dos polos de un continuum[6]

Los géneros discursivos se reconocen no sólo por su relación con determinadas prácticas sociales, su carácter oral o escrito, su formato o su "paratexto", sino también por el predominio que en cada uno de ellos tiene una u otra secuencia.

Por ejemplo, en géneros como la entrada de enciclopedia o en los manuales escolares, predominan las secuencias descriptivas y explicativas. En cambio, en la nota de opinión periodística o en el ensayo, las secuencias argumentativas son predominantes. Las demás secuencias que aparecen en estos géneros dependen o están dominadas por las anteriores: puede incluirse una narración en el desarrollo de la explicación de un hecho o una descripción en una argumentación.

Muchos de los géneros discursivos que circulan en el medio educativo se integran en el primer tipo, el expositivo-explicativo: clases, exposiciones orales, manuales de diferentes ciencias, informes de experiencia, etc. En cambio, en el ámbito periodístico, jurídico y político hay presencia masiva de textos argumentativos: discursos ante el parlamento, intervenciones en debates, discursos conmemorativos,

[6] Arnoux, E.; Di Stefano, M.; Pereira, C. (2002). La lectura y la escritura en la Universidad. Cap. V. Buenos Aires: Eudeba. Recuperado de https://media.utp.edu.co/referencias-bibliograficas/uploads/referencias/libro/90-la-lectura-y-la-escritura-en-la-universidadpdf-WlGvW-libro.pdf

notas editoriales, acusación o defensa en un juicio, ensayos. Es así como suelen **explicarse** las propiedades de la luz o la intensidad de un sismo, mientras que las diferentes tesis sobre la legalización del aborto o sobre los rumbos que ha de tomar una política económica son generalmente objeto de discursos **argumentativos.**

Pese a sus diferencias, tanto los géneros expositivos como los argumentativos se caracterizan por desarrollar una exposición razonada de un tema o de la solución a un problema, o bien por fundamentar una opinión. Este despliegue discursivo del razonamiento constituye el entramado común a ambos tipos. Por eso, más allá de su pertenencia genérica, los discursos razonados considerados individualmente pueden tender al polo expositivo-explicativo o hacia el argumentativo.

5.2.1 Lo expositivo-explicativo

Los discursos que pueden incluirse en el extremo del polo expositivo-explicativo se presentan como la **exposición de un saber construido en otro lado, legitimado ya socialmente.** (…) o bien (…) como saber —teórico o cuasi teórico— referido al ámbito de los hechos o acontecimientos que asume la forma de un juicio constatativo del observador (…).

Aunque algunos de estos textos puedan estar escritos en primera persona del singular, todos tienden a **borrar las huellas del sujeto enunciador** (las marcas valorativas, afectivas o apreciativas) e instaurar una distancia que genere el **efecto de objetividad.** (…) El enunciador toma distancia de su enunciado a la vez que autoriza su discurso mediante el empleo de lenguaje técnico, remisión a las fuentes y uso de citas textuales que avalan sus consideraciones y son índices de su rigor científico.

Otros textos emplean la primera persona del plural para generar efectos similares. Se trata de un uso del "nosotros" que ubica al enunciador como miembro de una comunidad científica que lo respalda.

En síntesis, se trata de discursos que se proponen informar y en los que la dimensión cognitiva es central.

5.2.2 Lo argumentativo

Por su parte, los textos predominantemente argumentativos tienden a la construcción de nuevos conceptos a partir del propio desarrollo discursivo. En ellos el sujeto se manifiesta y confronta su opinión con la de otros. Esta dimensión dialógica del discurso argumentativo se pone en evidencia en el uso de concesiones, ironías y otras estrategias de refutación.

En los discursos argumentativos el enunciador toma postura ante hechos o temas y se propone persuadir a su destinatario. Por ello, este tipo de discursos exhiben con más claridad la subjetividad del enunciador y el carácter valorativo del lenguaje.

(…) La inclusión de otras voces diferentes de la del enunciador varía, como vemos, según el tipo de secuencia en la que se presente. En la secuencia expositivo-explicativa predomina el discurso directo entrecomillado que mantiene intactas las palabras del otro. El discurso argumentativo usa las palabras del otro apropiándose de ellas para sus fines argumentativos o refutativos. Predomina en este tipo de secuencias el discurso indirecto, la contaminación de voces y el discurso indirecto libre.

(…) Los discursos que (…) se ubican en el polo argumentativo son discursos cuya finalidad es persuadir y en los que a la dimensión cognitiva se agrega la emocional."

A partir del fragmento anterior, realizar las siguientes actividades

1. ¿A cuál de los dos polos se acerca el texto leído? Justificar la respuesta.
2. De acuerdo con la respuesta anterior, analizar la figura del enunciador.
3. Elaborar (con tus propias palabras) las definiciones de polo explicativo y de polo argumentativo.

***Vas a encontrar en el ANEXO que se encuentra en el siguiente módulo:**

5.PRIMERA ACTIVIDAD INTEGRADORA

6. LECTURA

Colaboraron en este módulo: Patricia Bukaczewski
Isabel Castillo
Yamila Vázquez

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Identifiquen la lectura como un proceso de inferencias.
- ✓ Reconozcan los diferentes tipos de lectura.
- ✓ Lean textos académicos respetando los pasos del proceso.
- ✓ Obtengan herramientas que promuevan la comprensión lectora.

FICHA DE CLASE 6

6.1 LA LECTURA

Todos y todas leemos de diferente manera según las circunstancias en que lo hacemos. Desde ese punto de vista, no hay “correcciones o incorrecciones” ni mucho menos “recetas”.
Pero nuestro objetivo es que al término del curso llegues con las habilidades necesarias para leer textos académicos de manera tal que a partir de esa lectura puedas construir un conocimiento significativo y que permanezca.
Las circunstancias en este caso están bien delimitadas por la comunidad discursiva académica a la que pretendemos que ingreses.
Ver MÓDULO 4

Teniendo en cuenta esto, dedicaremos gran parte de las clases a leer comprensivamente, y a acercar conocimientos y procedimientos para practicar una lectura interpretativa y crítica.
Entendemos por lectura comprensiva no solo lo que Cassany (2006) llama “leer las líneas” o lectura lineal (lo que el texto “dice”), sino también “leer entre líneas”, es decir, una lectura que reponga lo que un texto no explicita, pero está implícito en él, lo que no “dice” pero está sugerido y puede inferirse (implícitos, presuposiciones).
En este sentido, el contexto cumple un rol fundamental en la construcción de significados, dado que en él se imprime la producción, la circulación y la recepción del texto.
Por otra parte, la representación que los lectores tengan de ese contexto desempeña un papel importantísimo al momento de interpretar un texto. Dichos lectores pueden construir diferentes sentidos de acuerdo con la imagen mental que se hayan representado de ese contexto (van Dijk, 2012).
La lectura crítica es, según el mismo Cassany, una lectura “tras las líneas”, vale decir, contextualizada, que además de preguntarse qué dice el texto, se pregunta quién lo dice, a quién se lo dice, cuándo y

dónde, qué factores permitieron o habilitaron que ese texto se produjera, y con qué intencionalidad fue producido.
Los conocimientos sobre el género discursivo también forman parte de los instrumentos que facilitan la lectura comprensiva y crítica. Sabemos que no se lee de la misma manera una novela, un chat, un manual o un artículo científico, tampoco fueron escritos para el mismo público, ni en el mismo estilo, ni persiguen la misma intencionalidad. Por lo tanto, es relevante poder diferenciar y reconocer los rasgos que caracterizan a cada género como una estrategia de lectura.
No hay que perder de vista que la lectura es un proceso de sucesivas inferencias, y que para lograr eficacia al leer textos académicos es necesario respetar los diferentes momentos de ese proceso. Estos son:

1. **Prelectura o lectura de los paratextos**: en este primer momento, el lector observa y procesa los datos aportados por los paratextos (título, subtítulo, datos biográficos o editoriales, índice,gráficos, ilustraciones, etc.). A partir de esta información realiza un trabajo de predicción acerca de lo que trata el texto, su vinculación con la materia que pidió su lectura y acerca de su variedad genérica. Se trata de una predicción inicial o hipótesis lectora.

2. **Lectura global**: en esta segunda instancia, el lector procede a hacer una lectura global, es decir, desde el comienzo hasta el final. En el transcurso, realiza un trabajo de inferencia, que abarca deducciones, conjeturas y suposiciones basadas en los datos explícitos e implícitos, porque un texto está plagado de elementos no manifiestos en la superficie textual que deben actualizarse en ese proceso.

3. **Lectura analítica o por párrafos**: en este momento, el lector lee y relee los párrafos hasta entenderlos, confronta sus predicciones con lo leído y confirma o corrige sus anticipaciones. Realiza el subrayado de ideas principales y lo acompaña con notas marginales. Se trata de un automonitoreo de la comprensión que produce un encadenamiento de predicciones, inferencias e interpretaciones.

4. **Poslectura**: en esta última etapa, el lector podrá reconstruir el contenido del texto aplicando distintas estrategias tales como resumen, esquema de contenido, etc. Es un momento de integración y síntesis.

Además de lo mencionado es muy importante ir construyendo a lo largo de este curso de ingreso algunos hábitos de lectura que permitirán superar las dificultades de comprensión de los textos. Mencionamos aquí abajo algunos de ellos.

1. La lectura de paratextos. Es necesario tomar en cuenta la utilidad que brindan los paratextos, en tanto son una primera aproximación al texto y a su contextualización.
2. La indagación en los datos contextuales, no solo para enunciarlos, sino para establecer relaciones con lo dicho en el texto.
3. El ritmo adecuado de la lectura. Leer a una velocidad que permita profundizar en los fragmentos que presentan mayor dificultad, para poder comprender la idea central que un texto presenta.
4. La utilización de técnicas del subrayado y de las anotaciones marginales.
5. La atención a las palabras desconocidas, los nombres propios, las siglas, las fechas, etc.
6. La atención a los conectores, para reparar en las diferencias de significado que conllevan.
7. La reposición de lo no dicho, lo no explicitado en un texto.

6.1.1 Recomendación muy importante

Una dificultad que presentan las y los estudiantes cuando comienzan a leer textos académicos para estudiar y aprender es el temor que les produce o genera contradecirlos. Esto los lleva muchas veces a acordar con los textos, a dar por cierto o verdadero lo que postulan, incurriendo en contradicciones, pues suscriben diversos textos que plantean ideas, algunas de ellas, absolutamente opuestas.

En general lo que las y los estudiantes manifiestan al terminar la lectura de un texto académico es coincidir con lo que este sostiene.

Sin embargo, aunque los textos que se presentan en la universidad tienen un valor académico, eso no significa que sean siempre acertados en sus puntos de vista, muchas de las ideas que sostienen han sido superadas en el tiempo. Algunos conceptos que oportunamente fueron aceptados como ciertos y legitimados social y científicamente han sido reemplazados por otros.

Por lo tanto, las y los estudiantes deben perder el temor que estos textos les provocan y deben hacer una lectura respetuosa, pero rebelde.

Las y los estudiantes no deben someterse ante lo que un texto propone, deben pensar que su autor, por todos los medios, desde un comienzo, tratará de convencer de su postura.

Es muy importante comenzar a leer estos textos por los paratextos. Esos elementos permitirán orientar la lectura y la comprensión y brindarán información que permitirá contextualizar el texto leído para alcanzar una lectura crítica y contextualizada, que es el tipo de lectura que se espera que realice un estudiante universitario.

A través de este posteo de Instagram podés conocer cuál es la técnica de Bill Gates para recordar todo lo que lee, no muy alejado de lo que te proponemos en esta materia:
https://www.instagram.com/p/CbS96uKsNrm/?igshid=Yzg5MTU1MDY=

También podés acceder con este código QR

6.2 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

A. Leer el texto de Ramírez Leyva siguiendo los pasos indicados en **6.1** y luego responder:

1. ¿Qué datos aportan los paratextos?
2. ¿Qué permiten contextualizar esos datos?
3. ¿Qué tema trata este artículo?
4. ¿Qué es para Freire la lectura y cómo define ese autor el acto de leer?

La lectura según Paulo Freire - Por Elsa Ramírez Leyva[7]

Entre los ensayos que Paulo Freire escribió entre 1968 y 1981, sobresale en particular la importancia del acto de leer, porque el autor expuso ahí un análisis crítico del asunto, según el cual dicho acto no

[7] Acerca de esta publicación: el artículo "La lectura, según Paulo Freire" de la investigadora Elsa M. Ramírez Leyva, corresponde a un extracto del ensayo académico publicado anteriormente bajo el título: "¿Qué es leer? ¿Qué es la lectura?" Publicado en el volumen 23 número 47 de la Revista de Investigación Bibliotecológica de la UNAM, Enero/abril 2009

se agota en la decodificación pura de la palabra escrita o del lenguaje, pues hay un más acá y un más allá: un continuo que se anticipa y se prolonga en la inteligencia del mundo.

En pocas palabras, la propuesta freireana sobre la lectura consiste en caracterizar este como un acto que implica una sucesión de tres tiempos: en el primero, el individuo efectúa una lectura previa de las cosas de su mundo —universo poblado de diferentes seres y signos: sonidos, colores, olores, sensaciones, gestos, formas y matices, donde habitan y anteceden creencias, gustos, recelos, miedos y valores inscritos en las palabras grávidas que nos anteceden y pueblan el mundo donde se inserta todo sujeto.

En el segundo momento, lleva a cabo la lectura de las palabras escritas, previo aprendizaje y, en el tercero, la lectura se prolonga en relectura y reescritura del mundo. Tal concepción se opone frontalmente a la mecanización y la memorización manifiestas cuando la lectura consiste meramente en describir un contenido y no alcanza a constituirse en vía de conocimiento. En opinión de Freire, desde luego, se comete un error al concebir de esta última forma el acto de leer. Para él, la lectura no es memorización: "la comprensión del texto —afirma— es alcanzada por su lectura crítica, es decir, implica la percepción de relaciones entre el texto y el contexto". De igual manera, se opone a la idea (o ideal) de que la lectura de muchos textos, como parte de la carga de estudios, beneficie el aprendizaje, pues ello no por necesidad implica el acto de leer como proceso de concientización basado, idealmente, en la percepción crítica, la interpretación, la relectura y la reescritura de lo leído. Por eso, para Freire es requisito indispensable el aprendizaje previo de la lectura crítica del mundo: sólo ello permite realizar la lectura crítica del texto y la relectura-reescritura de la realidad, que implican también una renuncia a la inocencia.

Así, entonces, la alfabetización, concebida como acto cognoscitivo, creador y político, es un esfuerzo por leer el mundo y la palabra, por consecuencia un texto no es posible sin contexto. Leer es reescribir este último, y Freire opone tal idea a la concepción nutricionista del acto de leer —que equivaldría a comer— y del conocimiento, según la cual los sujetos son como vasijas vacías que el libro o el profesor mediante simples transferencias llenan con su saber, hasta atiborrar aquéllas con las palabras. La alfabetización, al constituir un proceso concientizador de la relación sujeto-objeto, torna al sujeto capaz de percibir, en términos críticos, la unidad dialéctica entre él y el objeto. No hay concientización fuera de la praxis, de la unidad teoría-práctica, de la reflexión-acción; sin embargo, tal proceso encuentra sus límites en la realidad histórica de la relación entre el hecho parcial y la totalidad. Puesto que la crítica nunca es absoluta, no es posible exigir una lectura crítica absoluta, aclaración pertinente porque para Freire ésta es la verdadera lectura, esto es el acto de leer.

B. Actividades sobre las primeras etapas del proceso de la lectura para trabajar en pequeños grupos. Realizar borradores y anotaciones marginales.

Trabajar con los textos que se encuentran a continuación.

1. Leer los elementos paratextuales y a partir de su análisis, responder: ¿Cuál es el tema que se desarrollará en el mismo? ¿A qué género y discurso pertenece? ¿Quién/es son los autores? ¿Qué autoridad tienen para tratar este tema?
2. Realizar una lectura general.
3. Realizar una lectura analítica, subrayar conceptos que se consideren importantes y anotar subtemas al lado de cada párrafo.
4. Releer lo subrayado y las anotaciones para comprobar la comprensión de texto.

Texto a.

La escritura académica en la educación superior: investigaciones, prácticas y comprensiones[8]

La escritura "es una práctica académica y social de la cual los sujetos se apropian de manera diversa atendiendo a las circunstancias de producción, comunicación y circulación en el cual se producen" (Ortiz, 2015, p. 5); es decir, que la escritura desde una perspectiva académica debe tener en cuenta el contexto, las condiciones sociales del discurso y al emisor y receptor en sus condiciones particulares. Por tanto, la escritura académica se ve como una práctica social llevada a cabo por miembros de una comunidad discursiva específica, y su forma misma, su contenido, y sus funciones están ligados a la naturaleza de los propósitos, las relaciones de poder, y las identidades de los participantes de esa comunidad (Hernández, 2009, p. 21).

Por su parte, Cassany (2000) define la escritura como una manifestación de la actividad lingüística humana que implica los rasgos de intencionalidad y de contextualidad de la actividad verbal. Asimismo, constituye un hecho social que se hace manifiesto en un tiempo y en un espacio determinados y que es compartido por una comunidad específica.

La escritura académica, como práctica social, implica una serie de procesos que "conectan los pensamientos, las percepciones, las experiencias y los proyectos de la gente con colectividades más amplias de acción y creencias organizadas" (Bazerman, 2008, p.355). **Los profesores usuarios de la escritura académica se encuentran enfrentados a exponer sus conocimientos, sus puntos de vista socioculturales en cada una de sus elaboraciones discursivas, y por tal razón deben asumir la escritura como un medio de comunicación entre las personas, que trasciende el tiempo y el espacio. Desde esta perspectiva, la escritura debe incorporar el sujeto escritural como un ser social, político, cultural que trasciende su ser en las palabras.**

Al respecto, Hernández (2015), plantea que: "Así, en todo discurso es posible identificar posiciones frente a los eventos, frente a la organización social, a las instituciones y frente a los sujetos como miembros de grupos sociales" (p.84).

Tomando en cuenta las conexiones que se dan en la escritura, ser escritor académico supone entender la lógica de la herencia cultural, de las disciplinas científicas que involucran diferentes relaciones textuales: "la puesta en acción de conocimientos sobre las relaciones entre los textos; entre ellos y sus autores; entre los autores mismos; entre los autores, los textos y su contexto" (Lerner, 2003, p. 25).

C. Actividades para comprobar la comprensión. (Mantener los grupos para intercambiar y establecer consensos)

1. Luego de leer el texto justificar, según sus rasgos internos y externos, por qué es académico. Fundamentar la respuesta con alguna cita textual considerando el estilo.
2. Identificar las siguientes estrategias discursivas: una definición y una ejemplificación y explicar la función que cumplen en este discurso.
3. Reformular el fragmento destacado en negrita.
4. Explicar cuál es la finalidad que persigue el/la autor/a.
5. ¿Este enunciador intenta desarrollar algún conocimiento en la comunidad discursiva a la que pertenece? ¿Cuál?

[8] Bitonte, E. Lo Coco, Mauro (2013) Recorridos y actividades para la práctica de la lectura y la escritura en la educación superior. Universidad Nacional de Moreno.

7. ESCRITURA

Colaboraron en este módulo: Sandra Braile
Mariano Jehin

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Reflexionen sobre la importancia de la escritura en tanto mediadora del aprendizaje.
- ✓ Reconozcan la escritura como parte importante del proceso de comunicación no solo como medio sino como necesidad social.
- ✓ Valoricen la escritura como una herramienta indispensable para el aprendizaje y la construcción de conocimientos en las diversas disciplinas insertas en el contexto universitario.
- ✓ Entiendan que en el ámbito académico la escritura no solo facilita el aprendizaje, también promueve la participación y la implicación de las y los estudiantes con su propio desarrollo.
- ✓ Conozcan los pasos del proceso de escritura y la importancia de seguirlos.
- ✓ Produzcan textos escritos respetando los distintos momentos del proceso de escritura.

FICHA DE CLASE 7

7.1 LA ESCRITURA

Ya hemos visto que las y los estudiantes necesitan desarrollar habilidades específicas para encarar sus prácticas lectoras universitarias.
Respecto de la escritura, existe una idea, un imaginario que sobrevuela, de que al llegar a la instancia de los estudios superiores todos sabemos escribir. Esto es cierto solo en parte. La veracidad de esta respuesta dependerá de lo que se entienda por escritura.
No es sencillo definir el acto de escribir, al hacerlo hay que tener en cuenta algunos rasgos inherentes al mismo y al propio tiempo atender a diferentes variables de índole cognitivo, histórico y social.
En relación con la escritura, Cassany (1999) señala que en todo acto de escritura intervienen la gramática, la función o el tipo de texto que se escribe, el proceso de composición, y la información o el contenido. Cualquiera de los rumbos sumariados deberá incluir de alguna forma al resto si lo que se pretende es ser útil a las y los estudiantes.
En su libro *Construir la escritura* (1999), Cassany expone que escribir es construir, es decir, la composición de un texto es un proceso que consiste en el entramado efectivo y complejo de factores puntuales que pueden y deben ser reglamentados.
Para este autor, la escritura es un elemento epistemológico de aprendizaje y de apropiación del conocimiento y un instrumento de progreso académico de las y los estudiantes que debe desarrollarse en todas las materias del currículo escolar y de manera integral, entre los que están ocupados en este proceso.
La relación entre lenguaje y pensamiento viene desarrollándose desde la antigüedad clásica. Psicólogos cognitivos, sociólogos y lingüistas han señalado que la experiencia y el conocimiento se

socio construyen y socio comunican a través del lenguaje en distintos espacios de interacción social (Vygotsky, 1934), el aula es uno de ellos.
Por lo tanto, el lenguaje ocupa un lugar central en el aprendizaje de las diversas disciplinas en la escuela y en la Universidad, espacios en los que aprender significa, entre otras operaciones, aprender a escribir sobre las diversas disciplinas con el lenguaje y las configuraciones específicas de esos ámbitos del saber.
Estudiantes, docentes y científicos deben manejar el mismo lenguaje y conocer las herramientas que hacen un discurso que se vuelve en muchos casos escritura tanto para aprenderla (estudiantes) como para producirla (científicos) y comunicarla (científicos y docentes).
La escritura posee muchas potencialidades: permite organizar, estructurar, jerarquizar y disciplinar el conocimiento, facilita la organización del pensamiento y de esta forma potencia la eficacia en la adquisición de los saberes.
Claro está que para alcanzar un buen resultado en la escritura se requiere de la práctica constante y de que quien escriba haga consciente las diversas operaciones mentales implicadas en el acto de escribir.
Esto solo puede llevarse a cabo si la escritura es una práctica institucionalizada, promovida, guiada, sostenida y enseñada en las instituciones educativas de todos los niveles, por esta razón la producción de textos debe ser una tarea constante y sistemática.

7.2 EL PROCESO DE LA ESCRITURA

Veamos este caso. Alguien quiere escribir. Se sienta a la mesa con un papel en blanco. Tiene varias opciones, duda. Piensa que:

- Podría contemplar lo que lo rodea y esperar a que caiga alguna idea, esperar a que las musas lo inspiren.
- Podría dejar de lado a las musas y apresurarse a transcribir en el papel las ideas frescas, espontáneas que le van apareciendo.
- Podría desconfiar de esas ideas fáciles y ponerse a trabajar el texto, escribir varios borradores, corregir, volver a escribir, laboriosamente, ejercitando la constancia.

¿Cuál de estas maneras de enfrentar la escritura será la más adecuada? ¿Cómo escriben los escritores expertos? ¿Cómo se aprende a escribir?
Vamos a tratar de respondernos esas preguntas.

Toda escritura es un acto de comunicación y en ese sentido, no basta con que el escritor exprese su subjetividad en un escrito, sino que debe tener en cuenta que para que sus lectores puedan interpretar su mensaje va a tener que llevar a cabo un trabajo muchas veces arduo.
Tener esto en claro ayuda a derribar el mito de que producir textos escritos es una labor espontánea, que los textos surgen de la inspiración divina o de la labor de las musas. Contrariamente a esto, debemos decir que el acto de escritura es una tarea intelectual de mucha complejidad.
Aunque escribir no es nada sencillo, está comprobado que, si dividimos en etapas la tarea, si la pensamos como un desarrollo gradual, como una progresión, esa complicación puede atenuarse.
La escritura es un proceso que consigna diferentes momentos.

7.2.1 Planificación

Antes de que se comience con la escritura de un texto, el escritor debe interrogarse acerca de varios aspectos íntimamente relacionados, concatenados.

- ¿Cuál es la finalidad de su texto?
- ¿A quién está dirigido?
- ¿Cuál es el género discursivo más adecuado para cumplir con la finalidad?
- ¿Qué registro lingüístico se corresponde con ese género discursivo?

Ese es el momento de consultar bibliografía, de acopiar información, de ordenar las ideas, de jerarquizarlas. Todo lo planificado se bosqueja. Se escribe un borrador o un cuadro esquemático o un mapa conceptual.

7.2.2 Puesta en texto

El segundo momento es el de la puesta en texto. Se escriben las ideas, se redactan las oraciones, se arman los párrafos. Los y las estudiantes, en esa etapa, deben prestar una atención especial a lo que quieren expresar, a la formulación de las ideas, sin entrar todavía en detalle con la normativa, pueden dejar esa verificación para un poco después.
Además de desarrollar las ideas se debe tener en cuenta:

- Mantener la coherencia y la cohesión a lo largo del texto.
- Organizar el texto, no saltar de un tema a otro.
- Utilizar los conectores adecuados para relacionar las distintas partes del texto.
- Evitar repetir palabras innecesariamente.
- Procurar que la puntuación favorezca la comprensión de las ideas del texto.
- Elegir las palabras conforme al tema, al ámbito, al lector y a las intenciones y objetivos del autor.

7.2.3 Revisión

Si bien a medida que se escribe se va controlando el producto de la escritura, existe un momento específico para realizar esta tarea, el de la revisión. El escritor o la escritora releen lo producido y corrigen de considerarlo necesario. Es central este momento de reflexión. Es una etapa muy importante del proceso, es introspectiva, de toma de conciencia, porque es cuando quien escribe considera su producción y puede hacer una evaluación sobre lo que ha escrito, y en virtud de ello, tomará decisiones acerca de qué modificaciones hacerle o no a su texto.
En esta etapa se puede:

- Ajustar la información.
- Cambiar el orden de los párrafos.
- Suprimir o cambiar palabras o frases.
- Modificar la puntuación.
- Mejorar la sintaxis.
- Corregir la concordancia, la correlación verbal y la ortografía.

En la universidad la forma por excelencia que tienen las y los estudiantes de conectarse con los contenidos de una asignatura es a través de la lectura bibliográfica. También a través de la palabra del docente que expone y explica conceptos.

El contenido de esas lecturas, de esa escucha atenta, es registrada por los estudiantes. Los **apuntes** son esenciales, aunque no siempre se puede anotar allí todo lo necesario.

La información de las diversas lecturas que las y los estudiantes van haciendo puede registrarse por ejemplo en distintos tipos de fichas como la de **resumen**.
Estos registros son insumos muy útiles a la hora de preparar un examen **parcial** o final o para hacer algún otro tipo de trabajo académico.

Trabajaremos estas cuestiones en el MÓDULO 9

7.3 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

A. Leer los paratextos y el texto que sigue. Hacer una primera lectura global y luego una por párrafos. Hacer notas marginales y/o subrayado

Planificar la escritura de un texto de alrededor de 15 líneas que dé cuenta de las ideas centrales que aborda el artículo leído.

1. Revisar lo escritura y corregir lo que sea pertinente para que esa primera versión resulte coherente, cohesiva, adecuada y correcta.
2. Reescribir la versión final.

La escritura en la universidad: Objeto de estudio, método y discursos. Por Alejandro Córdova y Juana Marinkovich. (fragmento de un artículo académico publicado en la Revista Signos en 2014)

La escritura en el contexto de la educación superior concita el interés y la preocupación de directivos, especialistas, profesores y estudiantes. Tan es así que se ha ido poco a poco comprendiendo que la escritura no es solo un instrumento de comunicación y transmisión del conocimiento, sino que es un proceso que permite la transformación de ese conocimiento. La transformación conceptual que realizan los sujetos cuando escriben sobre un tema determinado permite potenciar el valor epistémico de la escritura. En esta transformación se ponen en juego diversos recursos para reorganizar, especificar o resignificar la información (Silvestri, 2004).

Olson (1995), por su parte, expresa que el lenguaje escrito se caracteriza por realizarse con mayor consistencia y duración, lo que determina su conversión en un objeto susceptible de análisis y manipulación. Lo que se observa es que la escritura no solo 'objetiva el pensamiento', sino que el texto escrito se convierte en 'objeto para el pensamiento'. De acuerdo a Rosales y Vásquez (1999), esta doble objetivación origina la relación entre pensamiento y escritura, permitiendo la reorganización y reconstrucción de ambos. De este modo, los procesos de escritura son una herramienta de elaboración cognitiva en tanto objetivan los procesos de pensamiento vinculados con la producción escrita.

Ahora bien, en esta relación entre escritura y pensamiento, el papel del lenguaje escrito se encuentra particularmente en el conocimiento y el pensamiento conceptual. El conocimiento es un tipo de pensamiento y la escritura, en este caso, siempre es pensamiento que se realiza en algún lenguaje, ya que el pensamiento conceptual es imposible sin un lenguaje verbal o de su transcripción.

Aún más, tal relación se hace más fuerte en la escritura académica al servicio del conocimiento especializado de las distintas disciplinas que conforman el currículum universitario en lo que a objeto de estudio, método y discursos se refiere.

Considerando, entonces, la función epistémica de la escritura (Wells, 1990) y la posibilidad de transformación del conocimiento que supone su práctica (Bereiter & Scardamalia, 1987), escribir implica una máxima acción cognitiva, pero también social. Esta asociación entre lo cognitivo y social, en el contexto de la universidad, adquiere una relevancia particular que se materializa en los géneros discursivos. En efecto, si consideramos que los géneros discursivos se corresponden con los enunciados quese producen a partir de una actividad social determinada (Bajtín, 1985), la actividad universitaria –en tanto práctica social– conforma el discurso académico.

En este sentido, coincidimos con diversos autores al señalar que aprender los géneros discursivos empleados en el ámbito académico no es adquirir una técnica sino incorporarse a una práctica social, lo cual implica atender simultáneamente la escritura y las maneras particulares en que las disciplinas organizan su pensamiento a través de esos géneros (Bazerman, 1988; Foster & Russell, 2002; Carlino, 2005). Las asignaturas, de acuerdo con ello, son tanto un espacio discursivo y retórico como conceptual (Carlino, 2005).

Dilucidar el nexo entre objeto de estudio, método y discursos, plasmados en los géneros discursivos, significa adentrarse en las disciplinas que tienen su asiento en la universidad. Este desafío, que hasta el momento no se ha enfrentado suficientemente, constituye un aporte del trabajo que se presenta, puesto que se intenta justamente abrir un espacio y arrojar luces sobre la problemática en cuestión. En otras palabras, se trata de acercarse a las epistemologías de las disciplinas, lo que se ha dado en llamar 'epistemologías regionales', construidas desde las necesidades propias de cada ciencia determinada y a partir de un profundo conocimiento de esta (Flórez, 1995).

B.

1. Elegir dos términos del listado y reescribir con términos propios una definición para cada expresión. Una vez finalizada, buscar en internet (o en el manual del Curso de Ingreso) los conceptos escogidos y transcribirlos junto con la cita bibliográfica correspondiente y la referencia de donde ha sido tomado. Finalmente, reescribir ambos en un solo texto académico que los cohesione.

MERCADO, COMMODITIES, PROGRAMACIÓN, GENOMA HUMANO, ANOMIA, LENGUAJE BINARIO, MEDIO AMBIENTE, LOGÍSTICA, HABILIDAD TÉCNICA, CÉLULA EUCARIOTA, RELACIONES DE PODER, ORGANIZACIÓN NO GUBERNAMENTAL, ALIMENTOS, PREVENCIÓN, REHABILITACIÓN, DISCAPACIDAD, MOVIMIENTO CORPORAL, AGENDA SETTING, DESARROLLO SOCIAL, SITUACIÓN DE VULNERABILIDAD, ESTÉTICA, VIVIENDA.

2. Describir a qué se dedica un/a profesional de la carrera que decidiste estudiar. Luego, de ser necesario, A) citar la fuente bibliográfica que ha consultado y B) agregar un ejemplo de su accionar. (Recordar la cohesión).
3. Redactar un listado de los conceptos que aprendidos hasta el momento en la cursada de "Seminario de comprensión y producción de textos". Luego, explicar tres de estos. Por último, intercambiar lo redactado con un/a compañero/a y reescribir juntos/as todos los conceptos que puedan.
4. Escribir un texto coherente y cohesivo en grupo (máximo 4 integrantes) que no supere las 25 líneas y en el que se incluyan los conceptos más relevantes de la cátedra. Incluir la/s referencia/s bibliográfica/s empleadas para dicho escrito. Luego, intercambiar el escrito con otro grupo para que revise y corrija los errores que pueda encontrar. El texto debe volver al grupo que lo redactó para reescribirlo teniendo en cuenta las correcciones que se realizaron.
5. Leer la siguiente definición y reescribirla con términos propios: "Una comunidad discursiva es un grupo humano que comparte unas prácticas comunicativas particulares, usando unos textos particulares, para conseguir unas finalidades específicas, entre autores y lectores que asumen roles predeterminados" (p. 12). Cassany, D. (2008). Metodología para trabajar con géneros discursivos. *Jornadas sobre lenguajes de especialidad y terminología; Leioa, Biscaia, 1 febrero de 2008*.
6. Hacer un listado de comunidades discursivas y tratar de definirlas.

7. Leer el siguiente fragmento y responder: ¿Qué consejo ofrece Oscar Morales a la docencia universitaria? Acompañar con recomendaciones propias y justificar por qué serían útiles para mejorar tu escritura.

“En una sociedad determinada por la utilización de las nuevas tecnologías, la docencia universitaria no puede permanecer indiferente, en consecuencia, es fundamental la incorporación de los medios electrónicos para fortalecer el desarrollo de las competencias de las y los estudiantes como escritores. Con esto, los estaríamos formando para la vida.” (Morales, 2005).

8. ENUNUCIACIÓN Y POLIFONÍA

Colaboraron en este módulo: Emilce Basiglio
Viviana Toledo

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Distingan entre textos marcados y no marcados.
- ✓ Reconozcan en los textos las marcas de subjetividad.
- ✓ Identifiquen la polifonía textual y reconozcan las diversas voces que lo componen.

FICHA DE CLASE 8

8.1 ENUNCIACIÓN

En el MÓDULO 4 hemos visto que un tema importante a la hora de considerar el género es el estilo verbal, rasgo directamente vinculado al tipo de enunciación. Llamamos "enunciación" al acto de decir o producir un enunciado. El "enunciado" es el producto de la enunciación, en otras palabras, lo dicho. En algunos géneros pueden quedar las marcas de ese acto, en otros no**.**

Ejemplos:

"El presidente de la Asociación del Fútbol Argentino (AFA), Claudio "Chiqui" Tapia, descontó ***hoy*** *la continuidad de Lionel Scaloni como director técnico de la Selección Argentina y adelantó que el acuerdo será firmado cuando regrese* ***al país****. Scaloni partió* ***este lunes*** *a Mallorca, donde habitualmente reside, por cuestiones familiares."*

Esta forma de marcar la enunciación, sobre todo a partir del uso de **deícticos**, es propia de los géneros periodísticos en los que enunciador y enunciatario muchas veces viven en el mismo lugar y conocen bien el "aquí" y el "ahora". Los deícticos son palabras que señalan a las personas implicadas en el discurso (yo, tú, vos, nosotros, ustedes) y las circunstancias temporales (hoy, ahora, ayer, etc.) y espaciales (aquí, en este lugar, allí) del acto de enunciación. Las personas implicadas, enunciador y destinatario, se advierten por los pronombres personales de primera y segunda persona singular y plural (yo, me, tú, nos, nosotros, etc.), por las formas verbales que los contienen (pienso, dijiste, señalamos, etc.) y los pronombres posesivos (En mi casa mando yo, en la tuya hacé lo que quieras).
Estas marcas, que están relacionadas con la persona, el momento y el lugar de la enunciación, son más propias de los textos orales; pero en los textos escritos pueden ser interpretadas en relación con los paratextos. Su uso es menos frecuente en los géneros académicos y científicos porque estos se quieren mostrar alejados de la subjetividad, como representantes de los saberes científicos de carácter universal.
Los géneros académicos, al tratar temas desde un punto de vista más general, presentan muy pocas

marcas de enunciación porque el discurso de la ciencia no se restringe a condiciones espaciotemporales, busca construir conocimientos universales, de algún modo perdurables hasta que surja algún nuevo conocimiento.
Existen, sin embargo, algunas excepciones. Algunos manuales hacen uso de los deícticos de persona para crear entre *enunciador* y *enunciatario* un vínculo más familiar y ameno. Este uso tiene que ver con la imagen que el enunciador quiere construirse y con su deseo de aproximarse al enunciatario (el *enunciatario* no es exactamente el lector. Un manual puede tener muchos lectores, entre ellos, los padres de los estudiantes, pero no está escrito para ellos, los *enunciatarios* son los estudiantes. La categoría de *lector* es más amplia que la de *enunciatario.*

8.1.1 Otras marcas de enunciación: enunciados marcados

Además de los deícticos, los **subjetivemas y modalizadores** dejan marcas en el enunciado. Estas permiten interpretar el punto de vista del enunciador y ayudan a distinguir unos géneros de otros.

Son **subjetivemas** los sustantivos *(casucha, bruja, morbo*), adjetivos (*incapaz, comprometedores*), adverbios (*bien, decisivamente*) y verbos (*ninguneó, sermoneó)* que transmiten una valoración por parte del enunciador acerca de un objeto, persona u acción.

*"Estoy **convencido** de que la resolución carece de los fundamentos exigidos a toda decisión judicial y por lo tanto está **viciada**, afecta **legítimos** derechos de las provincias argentinas y **quiebra** la igualdad sobre la cual se asienta el federalismo en nuestra Constitución Nacional", expresó el mandatario desde su cuenta de Twitter.*

Los **modalizadores** son adverbios (quizás, indudablemente), verbos (en tiempo condicional: podría, debería) o locuciones verbales (como, por ejemplo: es necesario, es evidente, no es sorprendente que…) que manifiestan la actitud del sujeto/ hablante/ enunciador frente a la enunciación y/o frente al contenido del enunciado.

Ejemplos*:*

- *Ampliar la Corte Suprema **sería** un buen punto de partida para ir solucionando el problema de la justicia.*
- ***Es evidente** que la Corte Suprema de Justicia tiene un tono amarillo, señaló el funcionario.*
- ***No es sorprendente**, por lo tanto, que la corte haya fallado en favor de Rodríguez Larreta.*

Estas marcas de subjetividad son propias de los géneros que desarrollan una opinión o argumentación.

Para profundizar en este tema te recomendamos que veas estos videos, a través del enlace https://www.youtube.com/watch?v=kFI8-Q_PvH8 o escaneando el código QR

Ejemplos de enunciado no marcado:

Las expresiones de los ejemplos que se presentan a continuación no señalan al enunciador ni el momento de enunciación, son más generales e impersonales, es por eso que decimos que los textos no están marcados por la enunciación.

"Una ley física o ley natural es un enunciado que describe una relación específica e inmutable entre entidades físicas, que fue establecida sobre la base de evidencia empírica y hechos concretos, aplicable a un grupo definido de fenómenos y condiciones."

"El paso de calor de un cuerpo frío a otro caliente no se produce de forma espontánea; así lo especifica el segundo principio de termodinámica (rama de la física que estudia la interacción entre el calor y otras manifestaciones de la energía), y, además, no es posible el paso de calor de un cuerpo frío a uno caliente sin el consumo de trabajo. Por eso, las refrigeradoras utilizan energía eléctrica para crear calor y a su vez cederlo para tener bien frescos los productos a través de transformaciones termodinámicas."

En el cuadro siguiente pueden observarse rasgos que caracterizan a la enunciación no marcada que se utiliza en los géneros científicos académicos.

CARACTERÍSTICA	EXPLICACIÓN Y EJEMPLOS[9]
AUSENCIA DE MARCAS ENUNCIATIVAS	No aparecen ni "aquí", "allí", "ahí", "ahora" que hacen a los enunciados dependientes de la situación enunciativa. Es decir, no aparecen deícticos. No hay marcas de tiempo ni de lugar porque se busca la producción de enunciados generales. No se dice: "**Hoy**, en el francés **podés encontrarte** con consonantes y vocales en los mismos contextos". Se dice: "*En lengua francesa no es raro encontrar vocales y consonantes en los mismos contextos".*
DESPERSONALIZACIÓN	Se borran las marcas de persona. No se usan los pronombres ni los verbos en primera persona. Se usa la tercera y las formas impersonales. No se dice: "*Cuando **hablo** de elementos fónicos **me refiero** a los que son resultado de la elección del hablante"* Se dice: *"**Se habla** de función de elementos fónicos solo en la medida en que son resultado de una elección del hablante."*
OBJETIVIDAD	Uso de la 3° persona. Supresión de subjetivemas y modalizadores: No se dice: *"**Es evidente** que en una lengua **tan rica** como el **bello** idioma francés **vas a encontrarte** vocales y consonantes en un mismo contexto*". Se dice: "*En lengua francesa no **es** raro encontrar vocales y consonantes en los mismos contextos"*
NOMINALIZACIÓN	Se convierten los verbos en sustantivos. No se dice: "*Cuando la lengua se **desplaza** hacia adelante se **desplazan** hacia adelante los labios*." Se dice: "*El **desplazamiento** de la lengua hacia adelante se combina con el **desplazamiento** hacia adelante de los labios".*
LENGUAJE ESPECIALIZADO ESPECÍFICO O TÉCNICO	Se usan los términos específicos si es que existen: No se dice:" No todas las lenguas tienen la misma **manera de pronunciar**". Se dice: "El **comportamiento fonológico** no es idéntico en todas las lenguas"

[9] Todos los ejemplos tomados de Martinet, A (1978), *Elementos de Lingüística General*. Editorial Gredos. Madrid

8.2 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

1. Señalar cuáles de los fragmentos[10] que están a continuación corresponden a enunciados marcados o no marcados y explicar por qué se los puede incluir en una u otra de esas categorías.

a.

Estas marcas, que están relacionadas con la persona, el momento y el lugar de la enunciación, son más propias de los textos orales; pero en los textos escritos pueden ser interpretadas en relación con los paratextos. Su uso es menos frecuente en los géneros académicos y científicos porque estos se quieren mostrar alejados de la subjetividad, como representantes de los saberes científicos de carácter universal. Los géneros académicos, al tratar temas desde un punto de vista más general, presentan muy pocas marcas de enunciación porque el discurso de la ciencia no se restringe a condiciones espaciotemporales, busca construir conocimientos universales, de algún modo perdurables hasta que surja algún nuevo conocimiento.

---

b.

En 2015 estuvimos en París cuando se firmó el "Primer acuerdo universal de la historia de las negociaciones climáticas", como lo llamó el entonces presidente François Hollande. Se trata de un documento destinado a establecer medidas para detener el calentamiento global y que corona un proceso iniciado en la Cumbre de Río en 1992. El acuerdo de París fija como objetivo principal que el aumento de la temperatura media del planeta se estabilice "muy por debajo" de los 2°C con respecto a los niveles preindustriales y, en lo posible, no supere el 1,5°C.

El mundo esperaba ese acuerdo para transitar hacia un objetivo imprescindible y en apariencia inalcanzable: habitar un planeta que solo empleara energías renovables. En aquel momento, debido a los ataques terroristas ocurridos semanas antes, el gobierno francés declaró el estado de emergencia e impidió las usuales marchas de protesta que acompañan cada Cumbre del Clima. Esa prohibición inspiró una sutil movilización estática: diez mil pares de zapatos –incluidos los del papa Francisco– fueron depositados en la Plaza de la República en nombre del derecho a la libertad de expresión.

Siete años han transcurrido desde 2015 y las circunstancias se han agravado. El pasado 23 de octubre, en el Museo Barberini de Potsdam, en Berlín, jóvenes activistas contra el cambio climático arrojaron puré de papas sobre un cuadro de Claude Monet. Una semana antes, en la National Gallery de Londres, otros militantes ecologistas lanzaron salsa de tomate sobre Los girasoles de Van Gogh. En Roma, manifestantes italianas cubrieron con sopa otro cuadro del pintor holandés. Luego, se pegaron a la pared de la galería mediante un adhesivo.

¿Qué diferencia hay entre estas expresiones de disconformidad social con las políticas ambientales y las decisiones tomadas en las cumbres climáticas? Por un lado, ambas revelan una misma impotencia, aunque se contrapongan. Por otro, se contraponen porque las primeras expresan auténtica desesperación mientras las segundas expresan hipocresía. La desesperación y la hipocresía han aumentado. Las emisiones también.

[10] En los fragmentos seleccionados para esta actividad, no se ha indicado la fuente para que los paratextos no influyan en la identificación de lo que se solicita.

Los agresores juveniles de las obras de arte aspiran a desenmascarar un poder al cual le importa más preservar la belleza artística en los museos que el cuidado ambiental. Por eso –sostienen–, a la destrucción del mundo en el que quieren vivir responden con agresión a lo que ese poder valora.

¿Habrá mejores métodos para alertar y revertir el calentamiento global que arrojar salsas contra algunas de las obras más célebres de la pintura? Las acciones de protesta no resultaron eficaces a la hora de sacudir la escalofriante apatía de los principales participantes de la reciente Cumbre del Clima celebrada en Sharm el-Sheikh. (…) Muchos arribaron al aeropuerto local en unos 800 jets privados, un hecho tan inaceptable como arrojar salsa a las obras de arte.

(…) Según las cifras de Global Carbon Project, los últimos siete años fueron los más calurosos jamás registrados. Esta cruda evaluación se publicó el día de la inauguración de la cumbre climática Cop27, en Egipto. En esa ocasión, Antonio Guterres, secretario general de la ONU, advirtió: “Nuestro planeta está en camino de alcanzar puntos de inflexión que harán que el caos climático sea irreversible”.

c.

Los cambios en el sistema climático global han ocurrido durante toda la historia del planeta a partir de los primeros miles de millones de años de formación, dichas modificaciones se han presentado por causas naturales que incluyen: cambios en la órbita terrestre, alteraciones en la excentricidad del planeta, actividad volcánica intensa e impactos de meteoritos (Rivera, 1999).

Desde hace 10,000 años el planeta ha experimentado una relativa estabilidad climática; sin embargo, en la actualidad y desde una perspectiva más cercana a la experiencia humana, es decir dentro de un periodo factible de evaluar por el ser humano, se ha observado un incremento de la temperatura media anual global (…).

El asunto más relevante es que se ha incluido al hombre como la principal causa de este cambio climático. Se ha llegado a un amplio consenso científico, mediante modelos matemáticos con un 90% de confiabilidad, de que las actividades humanas alteran de manera directa o indirecta la composición de la atmósfera, que agregada a la variabilidad climática natural, han provocado que el clima global se vea alterado significativamente en este siglo, como resultado del aumento de la concentración de Gases de Efecto Invernadero (GEI), tales como el bióxido de carbono (CO2), el metano (CH4), los óxidos de nitrógeno (N2O) y los clorofluorocarbonos (CFCs) (IPCC, 2001; Monterroso et al., 2007).

Estos cambios en la concentración de los GEI son los que están relacionados con cambios regionales y globales en la temperatura, precipitación y otras variables climáticas, lo cual conlleva a cambios globales en la humedad del suelo, derretimiento de glaciares, incrementos en el nivel del mar y la ocurrencia más frecuente y severa de eventos extremos como huracanes, frentes fríos, inundaciones y sequías (Houghton et al., 1996).

(…) Lo que aquí nos interesa precisar es: ¿Se pueden prevenir los desastres? ¿Cómo hacerlo? A diferencia de las tendencias del cambio climático, hoy en día encontramos aún poco trabajo de los centros de investigación y universidades sobre eventos extremos y los desastres que se pueden derivar de ellos. Los principales eventos extremos asociados al cambio climático global son:

- Huracanes más fuertes provocando inundaciones en zonas cercanas a las costas. • Sequías y ondas de calor más prolongados favoreciendo los incendios forestales y la desertificación. En 1970 se consideraba el 15% de las tierras emergidas del planeta como muy secas, para el año 2002 se han clasificado en esta categoría al 30% de la superficie terrestre.
- Tornados más intensos.
- Frentes fríos provocando lluvias constantes en las partes altas de las cuencas e inundaciones en las partes bajas.
- Heladas y tormentas de nieve más frecuentes.

(…) Frente al cambio climático global tenemos dos grandes retos: Revertir las tendencias negativas mediante la mitigación y reducir la vulnerabilidad ante los eventos extremos por medio de la adaptación y prevención ante contingencias ambientales.

2. Atendiendo al tema y al registro, determinar el ámbito de circulación. Relacionar esta respuesta con lo señalado en el punto anterior.

3. Ampliar el texto **a.** con la inclusión de las siguientes estrategias discursivas: ejemplo, reformulación. Decidir en qué parte del fragmento es más conveniente su inserción y utilizar los conectores apropiados.

4. En el texto **b**.:

b1. Escribir un texto explicativo que dé cuenta del contexto de producción del texto leído.

b2. Reconocer la secuencia dominante, justificar el porqué de su afirmación.

b3. Identificar las siguientes estrategias discursivas y explicar para qué las ha utilizado el enunciador: narración, ejemplo, relación causal, cita directa e indirecta.

b4. ¿En qué párrafos se llevan a cabo las siguientes acciones?

- Brindar información.
- Manifestar un punto de vista personal.
- Mostrar contraste entre dos ideas o situaciones.
- Incluir datos estadísticos.
- Presentar una relación de causa consecuencia.
- Narrar un acontecimiento.

5. En el texto **c.**:

c1. Reconocer cuál es la secuencia dominante e identificar las subordinadas.

c2. Determinar el problema y la respuesta o hipótesis que brinda.

c3. En el segundo párrafo se emplean algunos conectores, reconocerlos y señalar para qué se han utilizado.

6. Realizar un cuadro comparativo en el que se relacionen los textos b y c. En él se pondrán en relación los siguientes parámetros: texto más/menos marcado – secuencia dominante - género y ámbito de circulación – contexto – tema – problema o quaestio – hipótesis – inclusión de otras voces.

7. A partir de los conceptos que se brindan en los dos últimos textos, escribir la definición de *calentamiento global.*

8. Teniendo en cuenta el tema, el contexto y el problema que se analiza en los fragmentos b. y c., escribir un texto argumentativo en el que se manifieste la opinión personal. El mismo debe seguir la siguiente estructura:

- Párrafo 1: presentación del tema y del problema a tratar.
- Párrafo 2: planteo del punto de vista personal o hipótesis.
- Párrafo 3: presentación de dos o más argumentos que demuestren la opinión que se ha manifestado en el párrafo anterior.
- Párrafo 4: conclusión

8.3 POLIFONÍA ENUNCIATIVA

El término polifonía se refiere a la inclusión de voces ajenas a las de un enunciador en el interior de su discurso. Estas voces pueden aparecer de manera diferente. Pueden ser atribuidas a otros enunciadores concretos, o bien ser voces generales, colectivas, no otorgadas a un enunciador en particular. En estos casos, el enunciador no asume la responsabilidad de lo expresado en su discurso.

8.3.1 Discurso referido

Se produce cuando en un discurso autorial se incluye un enunciado ajeno. Para introducir esas voces de otros se utilizan **verbos de decir** (explicar, exponer, plantear, criticar, expresar, concluir, etc.). Estos aportan una evaluación no solo del contenido de los enunciados referidos sino también de la actitud del enunciador que se cita. De este modo, los verbos de decir señalan la manera en que se debe interpretar la voz ajena.

8.3.2 Discurso directo

El enunciador incluye la voz ajena de un modo directo. Hay una separación entre la voz del autor y la de la persona referenciada. Se trata de una cita textual.

- “Abrigate porque está haciendo mucho frío”, dijo la madre.

8.3.3 Discurso indirecto

El enunciador trae la voz ajena de un modo indirecto, es decir, mediante una paráfrasis o reformulación. Se trata de una cita indirecta.

- La madre le dijo que se abrigara porque estaba haciendo mucho frío.

La elección de una u otra forma de referir las palabras ajenas puede tener diversos efectos de sentido en un texto. Por ejemplo, la preocupación por diferenciar claramente ambas voces y referir los enunciados siempre en discurso directo puede deberse, entre otras razones, o al deseo de reforzar el efecto de veracidad o al de no comprometerse con lo enunciado.

Las citas indirectas se introducen con verbos que indican “comunicar, decir”. Aquí mostramos una

lista de algunos de ellos:

Verbos que introducen declaraciones que llevan preposición “de”	Verbos que introducen declaraciones NO que llevan preposición “de”
Se dio cuenta de… Habló de…	Dijo que… Pensó que… Aseguró que… Explicó que…

Ejemplos:

- **Según** Freud, el inconsciente es…
- **Para** el psicoanalista, el inconsciente es…
- Freud **asegura que** el inconsciente es…
- **Como sostiene** Freud, el inconsciente es…

8.3.4 Uso de comillas

Las comillas son fronteras que señalan la presencia de otras voces en el propio discurso. De este modo, un enunciador toma distancia del discurso ajeno.

Las comillas se pueden usar con distintos fines, a saber:

- **Para marcar un concepto que se introduce.**

El término "polifonía" quiere decir muchas voces.

- **Para marcar distancia crítica con una voz con la que no se acuerda.**

Algunos dicen que a esta universidad vienen todos "nenes de mamá".

- **Para marcar distancia con una voz que se considera vulgar, impropia, que está en otra lengua,o que es usada de modo irónico.**

Esto es un "quilombo".

"Show" es una palabra inglesa.

Últimamente está ocupado en sus "negocios".

- **Para introducir el título de un texto.**

En "Discurso y racismo" van Dijk sostiene que el racismo no es innato.

- **Para introducir un discurso referido directo (cita textual).**

Perelman y Olbrechts- Tyteca sostienen "El auditorio es el conjunto de aquellos a quienes el orador quiere influir con su argumentación".

8.4 MODOS DE REALIZAR LA REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

La cita o referencia bibliográfica no es una formalidad. Referir las palabras de otro en un escrito académico sin atribuírselas es una falta de ética, un acto intelectualmente deshonesto que se denomina plagio.

Algunas veces ocurren omisiones o errores en las referencias bibliográficas que, aunque no sean mal intencionadas tienen consecuencias negativas para los estudiantes y los investigadores porque no pueden identificar algunos elementos muy importantes para comprender un texto en toda su magnitud y hacer una lectura contextualizada y crítica. Si se ignora quién escribió un texto o dónde y cuándo se publicó, se invisibilizan sus condiciones de producción.

Por tal motivo, aprender a citar los textos a los que recurrimos y nos referimos es un aprendizaje importante de la vida universitaria.

Entre las normas para referenciar más populares en los ámbitos académicos están las Normas APA (https://normas-apa.org/referencias/componentes/).

Son normas que se actualizan y modifican frecuentemente, por eso es conveniente consultarlas cada vez que necesites citar bibliografía en los trabajos que te soliciten a lo largo de tu vida académica.

Por el momento, en esta cursada del ingreso universitario te vas a manejar con una forma básica de referencia bibliográfica que consiste en brindar la siguiente información, en el siguiente orden:

Información del autor/a. Información de fecha. Información del título. Información de fuente de publicación.

- Piñeiro, C. (2020). *Catedrales*. Editorial Alfaguara.

Esa referencia es uno de los paratextos del ámbito académico, el que hacés, por ejemplo, antes de introducir el cuerpo de un informe de lectura.

Otras veces, en un trabajo académico (monografía, tesina, artículo) tenés que incluir la bibliografía consultada. Eso se hace al final del texto. Es un listado ordenado alfabéticamente.

- Borges, J. (1974). *Historia universal de la infamia*. Ediciones Emecé.
- Piñeiro, C. (2020). *Catedrales*. Editorial Alfaguara.
- Solá, J. (2020). *Invisible*. Grupo editorial Penguin Random House.

En el caso de la referencia bibliográfica de artículos de medios periodísticos o académicos el formato es:

Información del autor/a. Información de fecha. Información del título del artículo. *Información de fuente.*

- Vega Montiel, A. (2014). El tratamiento de la violencia contra las mujeres en los medios de comunicación. *Comunicación y Medios,* Instituto de Comunicación e Imagen de la Universidad de Chile, N°30

NOTAS:

1. Si el texto es manuscrito (como en el examen de Seminario) cuando se indica cursiva, debe usarse subrayado. Por ejemplo:

- Vega Montiel, A. (2014). El tratamiento de la violencia contra las mujeres en los medios de comunicación. <u>Comunicación y Medios</u>, Instituto de Comunicación e Imagen de la Universidad de Chile, N°30.

2. Si el texto fue obtenido de una página web el formato es:

Apellido, A. A. (Fecha). Título de la página. Lugar de publicación: Nombre de la página web. Dirección de donde se extrajo el documento (URL). Fecha obtención del artículo

- van Dijk, T. (2001). Discurso y Racismo. Persona y Sociedad, Universidad Alberto Hurtado, ILADES. Recuperado de http://www.discursos.org/Art/Discurso%20y%20racismo.pdf. Enero de 2019.

En las citas (directas, indirectas o alusiones) que se encuentran en el interior de un texto el modo de citar es distinto, se coloca entre paréntesis el apellido del autor, el año de edición y el N.º de página). Por ejemplo:

Directa

Respecto de la temática abordada, con una opinión contraria, Walter Benjamin ha sostenido que “La obra de arte ha sido siempre susceptible de reproducción.” (Benjamin, 1936: p. 17).

Indirecta

Sin embargo, como señala Walter Benjamín, por diferentes medios la obra de arte siempre se ha podido reproducir (Benjamin, 1936: p. 17).

Si bien, como hemos indicado antes, en los trabajos académicos se requiere el uso de las Normas APA actualizadas, lo cierto es que muchas veces las distintas instituciones y/o publicaciones académicas suelen solicitar otros modos de citación particulares.

Por ejemplo, verás que en muchos de los textos que se presentan como ejemplos o como fuentes para ejercitar en los distintos módulos del manual, las referencias no siempre siguen las recomendaciones de las Normas APA.

Incluso en este mismo manual presentamos la bibliografía consultada siguiendo las indicaciones de nuestra universidad, que no se ajustan a las normas vigentes de la APA.

En ese sentido y con el fin de que te ejercites en la confección de referencias bibliográficas te solicitamos la siguiente actividad.

8.5 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

1. Escoger del manual tres referencias bibliográficas que no se correspondan con las que sugieren las Normas APA.

2. Reescribirlas de acuerdo con lo que esas normas indican.

9. GÉNEROS ACADÉMICOS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES

Colaboró en este módulo: Susana Narvaja

Objetivos de esta clase:

Que las/os estudiantes

- ✓ Adviertan que el apunte, el resumen y el parcial son géneros académicos.
- ✓ Adquieran herramientas para producir estos géneros.
- ✓ Tomen apuntes a partir de las exposiciones del docente y de la lectura de textos teóricos.
- ✓ Escriban resúmenes a partir de los apuntes producidos.
- ✓ Construyan respuestas a consignas y preguntas de parciales propuestas por los docentes.

FICHA DE CLASE 9

9.1 EL APUNTE

El apunte de clase es un texto construido a partir de distintos soportes discursivos: un escrito, la palabra oral, el pizarrón, las diapositivas de un PowerPoint, los videos y posteo utilizados o indicados por el docente. Su objetivo es duplicar el contenido de la fuente y fijarlo por escrito para conservarlo con fines de estudio.

El escritor del apunte recoge las ideas consideradas relevantes e intenta unificarlas bajo determinados rótulos o títulos en busca de criterios de orden temático. En cuanto al desarrollo verbal, el apunte se caracteriza por la economía de recursos (austeridad léxica, síntesis, abreviaturas, fragmentación, enunciados inconclusos). Presenta una escritura icónico-indicial, lo que resulta observable en su despliegue a la vez verbal (toma de notas), visual (imágenes, expresiones icónico-verbales) y espacial (señales, llamadas, enlaces). En el aspecto gráfico, es un texto enriquecido por marcas gráficas (ilustraciones, esquemas, distribución gráfica de la información; índices de relevancia como recuadros, subrayados, mayúsculas, cambios tipográficos, color, signos de exclamación y otro tipo de resaltados; señales como flechas, asteriscos y llamadas de atención; marcadores de orden como números, viñetas, guiones, etc.).

En el caso de apuntes de clase, requiere una escucha muy especial: el profesor no dicta, sí repite y complementa su desarrollo oral con anotaciones en el pizarrón (mención de fuentes, diagramas, etc.), eso indica que está enfatizando que algo es importante y debe ser recogido también en el apunte. A diferencia de otros géneros académicos, destinados a comunicar un saber para otro, el apunte es un género simple, destinado a uno mismo y eventualmente para un compañero. Los enunciados del apunte están determinados por la situación y el tema de la clase donde se generan. Estas condiciones de producción hacen que frecuentemente resulten ilegibles y por lo tanto se vuelve necesario aprender a tomar apuntes ya que constituyen un insumo de estudio indispensable en la vida universitaria. Como actividad, la toma de apuntes requiere de operaciones que el alumno deberá ir haciendo durante el desarrollo de la clase. La/el estudiante debe escuchar, comprender, analizar lo que escucha, pensar en su realidad y seleccionar aquella información que luego, mediante un sistema de expansión, le permita recuperar la clase. Según lo expuesto, un apunte no puede tomar nota de todo. Algunas y algunos estudiantes siguiendo el manual escriben notas al pie (en el manual o en su cuaderno), que amplían o explican lo que dice el manual. Otros hacen pequeños cuadros que ordenan por orden de importancia los temas desarrollados y agregan los ejemplos. Otros simplemente hacen listados de temas y expanden los conceptos que no entienden. Algunos usan colores para las definiciones y colocan signos de pregunta en los casos en que no entienden algo y necesitan hacer consultas. Si un apunte está bien tomado, cualquier alumno o alumna podría ceder su apunte y se podría -a partir de ese texto- hacer un resumen de la clase. No olvidemos al hacer un apunte, poner la fecha, el tema principal y el nombre del profesor que dio la clase. Te aconsejamos para ampliar este contenido consultar en YouTube clases al respecto, por ejemplo, en:

https://www.youtube.com/watch?v=8sKQF7Cs0BA o escaneá este código QR

9.2 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

1. Leer El *método Cornell* y tomar apuntes de la lectura.
2. Responder: ¿Qué es el método Cornell? ¿Cuáles son las ventajas de aplicarlo?
3. ¿Cuál es la relevancia que se le otorga a la estructura del apunte en este método?

El método Cornell[11]

¿Sabías que los alumnos que toman apuntes y hacen resúmenes mejoran hasta en un 34% su desempeño académico? Y es que estudiar es una habilidad que se aprende y se desarrolla con las técnicas adecuadas y con práctica.

Desde esta perspectiva, el método Cornell es uno de los sistemas de estudio más revolucionarios, conocidos y efectivos a la hora de tomar apuntes y de aprenderlos. Por esta razón, en este artículo, te contamos en qué consiste y cómo puedes aplicarlo para ser más eficaz y obtener mejores resultados.

En los años 50, el Doctor en Psicología y profesor de la Universidad de Cornell Walter Pauk, tras realizar un exhaustivo estudio sobre cómo tomaban apuntes los alumnos de su centro, y según varias técnicas pedagógicas, desarrolló en el libro *How to study in college* el método Cornell: un nuevo procedimiento eficaz, rápido y sencillo para tomar apuntes.

Este sistema de estudio se caracteriza por dividir una misma hoja de apuntes en cuatro apartados. Para ello, lo primero que hay que hacer es trazar dos líneas horizontales, una en la parte superior y otra en la inferior, de manera que queden dos márgenes horizontales en ambos extremos de la hoja y una parte central. En esta zona centro de la hoja, se dibuja una línea vertical que divide la franja en dos espacios, quedando un cuarto del espacio a la izquierda y tres cuartos a la derecha.

No basta con dividir la hoja en cuatro partes, sino que es importante saber qué hay que escribir en cada espacio. A continuación, te explicamos qué debe contener cada apartado:

[11] Obtenido el 20/11/22 en: https://www.becas-santander.com/es/blog/metodo-cornell.htm

- Margen horizontal superior: se reserva para anotar el título, el tema de la clase, la asignatura, la fecha y la paginación –clave para mantener el orden.
- Espacio principal: la columna más ancha del espacio central, que queda a la derecha, sirve para tomar nota de la información que se considere más relevante de la clase como, por ejemplo, fórmulas, esquemas, frases importantes, desarrollo de conceptos, ejemplos, etc.
- Margen izquierdo: esta división es para formular preguntas clave que puedan responder a todo el tema, ordenar las ideas y anotar los conceptos clave y aquellas dudas pendientes por resolver.
- Margen horizontal inferior: por último, en la parte inferior, la hoja se completa con un resumen con el fin de tener una visión general de los puntos más relevantes del tema.

No obstante, el método Cornell es mucho más que un sistema para tomar apuntes y también te permite estudiarlos de una manera productiva. Y es que la misma estructura del folio ofrece la posibilidad de dejar solo visible el margen izquierdo, esto es, la columna de dudas y datos clave, para repasar toda la información y aprenderla.

De esta manera, a la hora de estudiar, puedes tapar las notas de la parte derecha e intentar responder las preguntas clave de la columna izquierda. Asimismo, si das con más cuestiones importantes, puedes ir anotándolas a medida que vas avanzando.

Ventajas del método Cornell

El método Cornell es una de las técnicas de estudio que más repercusión ha tenido en el mundo académico por las ventajas que ofrece. Algunas de ellas son:

1. Se retiene mejor la información

Pese a que cada vez lo hacemos menos, hay estudios que demuestran que escribir a mano ayuda a retener mejor la información. Esto es debido a que el documento digital es uniforme y más monótono, por lo que el cerebro pierde la atención. Por el contrario, escribir a mano implica trazos irregulares, esquinas dobladas y espacios heterogéneos. Además, utilizar papel y bolígrafo nos hace ir más lento y, por tanto, disponemos de más tiempo para retener la información.

2. Implica una escucha activa

Para llevar a cabo esta estructura en los apuntes, no solo se necesita concentración, sino también una escucha activa durante todo el proceso, ya que este mismo nos obliga a estar pendientes de qué entendemos, qué no y cuál es la información clave.

3. Estructura y ordena el contenido

Es un método ordenado que permite estructurar el contenido, lo que proporciona un marco para poder entenderlo, recordarlo y aprenderlo. Además, el trabajo de síntesis requiere de comprensión y de mucha claridad de ideas.

Como puedes observar, una de las grandes ventajas que presenta este método es que condensa, ordena y sintetiza las ideas. No importa el campo de estudio, la dificultad o la situación concreta porque el método Cornell se puede aplicar a cualquier tipo de estudio.

Con este enlace, podés acceder a un posteo de Instagram que explica cómo hacerlo: https://www.instagram.com/reel/ClBQ1ZNpl_d/?igshid=Yzg5MTU1MDY=

O a través de este código QR

9.3 EL RESUMEN

El resumen es una herramienta primordial para mejorar la comprensión lectora y la producción de textos escritos más complejos. Ejemplos de resumen son las reseñas de libros, filmes, discos, los apuntes tomados de una clase o un texto, etc.
En relación con la lectura, el resumen es la mejor prueba de la comprensión de los contenidos integrales del texto. Desde el punto de vista de la escritura, es una reformulación que reduce un texto a una unidad menor.
El texto resuntivo es una herramienta de estudio muy valiosa a la hora de preparar trabajos escritos u orales como exámenes parciales o finales, y otros más complejos como monografías, informes y otros géneros que implican la confrontación de diversas fuentes de lectura.
Ahora bien, es necesario aclarar que el resumen no es una simple reducción, más breve pero semejante al texto original, sino que tiene una finalidad argumentativa específica.
Las operaciones resuntivas o macrorreglas son cuatro: selección, omisión, generalización e integración.

- Selección de los tramos más relevantes del texto fuente. La relevancia está indicada por el tema, la finalidad, el género discursivo, etc.
- Omisión de la información no esencial o irrelevante.
- Generalización de los conceptos específicos en unidades más amplias integradoras.
- Integración de las distintas informaciones en un concepto englobante.

Además del resumen convencional, hay otras formas de resumir como por ejemplo el cuadro sinóptico y el mapa conceptual.

9.3.1 Herramientas para realizar resúmenes

Pensemos en una situación, por ejemplo, un árbitro de fútbol y un jugador discuten tras la sanción de una falta. Cuando observamos esa discusión, tendemos a establecer algunas relaciones conceptuales según nuestras creencias y nuestros conocimientos para entender la situación. Nos fijaremos en primer lugar cuál es el problema que originó la discusión, luego en otros aspectos como las razones que esgrimen el árbitro y el deportista, qué obligaciones tiene cada uno de ellos por la función que cumple, qué lenguaje usó cada uno de ellos, etc.
Si además queremos comentarle a alguien lo que hemos observado, vamos a necesitar seleccionar de entre toda esa información la que sea necesaria y pertinente para conceptualizar aquello de lo que fuimos testigos. Y por último debemos tener en cuenta a quién es que se lo vamos a contar, saber si esa persona ya sabe algo del asunto, o no y para qué es que se lo contamos.
El mismo proceder llevamos adelante cuando leemos un texto, y también cuando se trata de resumir ese texto que leímos.

Para tener en cuenta al leer el texto que vamos a resumir:

1) **Información paratextual**

El primer paso para construir un resumen es comprender cabalmente el texto a resumir. Debemos identificar en primer lugar el tipo de texto o género de que se trata, conjeturar su sentido global, establecer una hipótesis de lectura: cuál es la finalidad que persigue, qué tema aborda, de qué manera lo aborda. Para ello se debe recurrir, antes de leer el texto, a los paratextos. Por ejemplo, el título y los subtítulos nos permiten establecer hipótesis acerca del tema y subtemas que tratará.

2) **Información lexical**

Es necesario reconocer el sentido de las palabras. Cuando no es fácilmente deducible por el contexto se puede recurrir al diccionario. Reconocer los significados de los vocablos nos evitará transcribir en el resumen frases porque presentan palabras que nos suenan importantes, pero cuyo significado desconocemos.

3) **Voces referidas**

Dado que la presencia de POLIFONÍA (voces de otros) en un texto de autor es muy usual en los textos académicos, es muy importante considerar qué función cumplen esas voces referidas. Si se las refiere para reforzar la posición del autor, si como argumentos para justificar posiciones propias del autor, si para refutarlas. Depende del caso que se trate será la pertinencia de incluirlas o no en el resumen

En definitiva, hay que tener en claro que un resumen no es un simple recorte de palabras en un texto. Tampoco es tan solo la transcripción de supuestas ideas principales subrayadas. El subrayado es una técnica para seleccionar datos y no una selección de palabras a transcribir.
Si no se pueden relevar las relaciones conceptuales, no se va a tener en claro el sentido de muchas frases y si no se tiene en cuenta el juego de voces que se refieren en un texto, va a resultar muy difícil determinar cuáles son esas ideas principales.
Pero si consideramos el sentido global, la comprensión de todas las frases y el entramado de las voces referidas, el resumen va a ser bueno, aun cuando se transcriban algunas frases textuales.
Hay que suponer que en la mayor parte de los casos es necesario transformar palabras y frases utilizando algunas que no se encuentran en el texto fuente.
También es necesario considerar para qué se produce el resumen. No es lo mismo producirlo para luego repasar su contenido, que hacer un resumen en una evaluación, por ejemplo, en un parcial en el que el docente quiere comprobar si se leyó y qué se comprendió, o resumir varios textos para comparar, por ejemplo, en un trabajo práctico, posiciones de diversos autores sobre un tema.

> **En definitiva, un resumen es un texto autónomo, un texto cuyo autor es la o el estudiante que resumió. Es una reformulación del texto fuente**

9.4 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

1. Leer el texto Ana Ramspott Heitzmann, aplicar las macrorreglas y construir un resumen de no más de 15 líneas**.**

El resumen como instrumento de aprendizaje

Por Ana Ramspott Heitzmann (publicado en TEXTOS de Didáctica de la Lengua y de la Literatura. Nº 8. Págs. 7-16, abril de 1996)

Las ocasiones en las que nos vemos abocados a resumir en nuestra actividad comunicativa son muy numerosas y ello ocurre simplemente porque la memoria no puede re- tener absolutamente todos los datos que recibe y opera de forma espontánea seleccionando y olvidando informaciones. Evidentemente la operación de selección de la información no depende únicamente de nuestra capacidad de recordar, sino también de la manera en que cada individuo interpreta la información, de las finalidades que se pretenden y de las características del destinatario o, más precisamente, de la imagen que de él nos construimos.

Pueden elaborarse resúmenes sujetos a finalidades sociales bien diversas como atraer a posibles lectores (piénsese en las contraportadas de los libros), como simplificar la interpretación de textos muy largos o de difícil lectura o facilitar la búsqueda de información, como puede ser el caso de los resúmenes que encabezan los artículos de esta revista. La lista de ejemplos podría ampliarse, pero puede afirmarse con toda seguridad que siempre encontraríamos un factor común en relación con las condiciones de realización de todos ellos: el contenido del resumen lo determinan las características del que lo realiza, sus intenciones y el tipo de interlocutor al que va dirigido.

En el ámbito académico, sin embargo, suele darse una curiosa paradoja. El resumen es una actividad muy habitual en las aulas, especialmente en la variante de escrito a escrito, pero resulta un tanto artificial en la medida en que las condiciones de producción son diferentes a los casos que hemos comentado anteriormente. Es decir, se resume sin una intención precisa y sin necesidad de pensar en las características del destinatario, puesto que no existe uno en concreto.

Lo que se pide al alumno no es que recuerde el texto de partida en función de sus intereses particulares, de sus propósitos y de la imagen que tenga de la persona a la que dirige el resumen, sino que se someta a unas consignas estrictas que suelen reducirse a condensar dicho texto siendo fiel al contenido de este y evitando al máximo la reproducción literal. La finalidad de esta actividad, no la del productor del resumen, sino la del profesor, es la de evaluar la comprensión lectora y la producción escrita de sus alumnos.

Concebida de esta manera, la realización de un resumen se complica notablemente, dado que se añaden otras dificultades a las que de por si entraña esta actividad en una situación de comunicación real. No deja de ser, sin embargo, una actividad que puede ser muy útil siempre que se tenga presente que la sola mención de las consignas no convierte a los alumnos en resumidores expertos y que la labor del profesor no puede limitarse a evaluar la competencia lingüística de sus alumnos, sino la de acompañarlos en el proceso de comprensión y de reformulación de un texto.

En definitiva, se trata de concebir el resumen no tanto como una finalidad en sí, sino como un instrumento de aprendizaje tanto para el alumno como para el profesor. Para el alumno, porque permite la realización de numerosas actividades que conducen a mejorar su competencia lingüística y, *por lo tanto*, su capacidad para aprender. Para el profesor, porque puede controlar más precisamente el tipo de dificultades que presenta la realización del resumen y, en consecuencia, afinar más en su corrección. Los que tenemos que llevar esta tarea a cabo conocemos hacia qué punto algunos resúmenes pueden dejarnos sumidos en el desconcierto de no saber por dónde empezar y cómo solemos resolver con frecuencia esta incertidumbre con advertencias que resultan, las más de las veces, ineficaces.

9.5 EL PARCIAL

El parcial es un género fundamentalmente expositivo – explicativo o argumentativo, aunque admite otras secuencias textuales. Está basado en la lectura y confrontación de textos provenientes de una bibliografía dada con anterioridad.

Hay parciales escritos u orales, presenciales o domiciliarios, individuales o grupales.

El parcial es un diálogo asimétrico entre un docente y un estudiante. El primero pregunta y el segundo está obligado a responder. Dicha interacción exige mucho control, dada la inmediatez de la información que se trasmite. Al igual que el examen final oral, son habituales los pedidos de rectificación, reformulación de conceptos, aclaración de puntos oscuros, especificación de contenidos temáticos, justificación, etc. Por lo expuesto, es preciso conocer con antelación los contenidos y criterios de evaluación y hacer una lectura de estudio planificada y cuidadosa de los materiales.

9.5.1 Estructura del parcial

La estructura del género parcial está formada por una secuencia de preguntas o consignas y de respuestas que se regulan por enunciados de tipo instruccional (ver secuencias textuales).

El objetivo que persigue la pregunta o consigna se manifiesta a través de verbos que se denominan propositivos y que apuntan a algunas operaciones cognitivas determinadas (definir, explicar, ejemplificar, describir, identificar, enumerar, clasificar, comparar, confrontar, justificar, distinguir, especificar, reformular, etc.).

La finalidad de la pregunta o consigna es orientar a las/los estudiantes a poner en texto sus conocimientos. Deben dominar las estrategias para desarrollar esas operaciones que se le proponen. Es importantísimo que observen qué acciones se le solicitan. Si, por ejemplo, en lugar de justificar, resume o en vez de definir, ejemplifica, no va a demostrar que posee un dominio de los contenidos estudiados.

La estructura básica de la respuesta de parcial sigue el modelo de los textos académicos expositivos: Introducción (presentación del tema, contextualización), Desarrollo (expositivo explicativo, argumentativo) y Conclusión (conceptualización final o cierre argumentativo. Implica la integración de los puntos principales volcados previamente).

El parcial enfrenta al estudiante al desafío de desplegar los siguientes procesos (meta)cognitivos:

- Reflexionar sobre lo leído y lo escrito (lectura y escritura críticas).
- Dar claridad a lo escrito para lo que se valdrá, entre otros recursos, de paratextos.
- Identificar, parafrasear, distinguir, comparar, definir, aclarar conceptos, etc.
- Resumir, ejemplificar, ilustrar, describir.
- Generalizar, categorizar, clasificar, jerarquizar, realizar seriaciones.
- Relacionar y contrastar.
- Problematizar o simplificar.
- Establecer relaciones de causalidad y consecuencia.
- Agregar información adicional adecuada y conveniente.
- Comentar sin que su subjetividad invada la respuesta de modo inadecuado.
- Activar estrategias inferenciales y conocimientos colaterales.
- No solo informar sino explicar y justificar debidamente.
- Hacer reformulaciones con fines explicativos y argumentativos.
- Contextualizar en el marco de una situación histórica, política, social, etc.

9.5.2 Algunas operaciones o estrategias discursivas para responder consignas de examen

RECURSO	EJEMPLO
DEFINIR: Consiste en brindar el significado de una palabra o expresión. Se vinculan dos términos mediante verbos que indican denominación (se denomina, se llama, se define, recibe el nombre de, etc.). También puede usarse el verbo ser. Las definiciones deben estar compuestas por cuatro componentes. 1.Nombre del término a definir.	El signo lingüístico es una entidad mental compuesta por dos planos, ambos de carácter psíquico: el significado y el significante. El significado es una idea clara y distinta, una porción de pensamiento. El significante, por su parte, es la huella psíquica del sonido lingüístico. 1.Signo lingüístico
2.Verbo de denominación.	2.Verbo ser
3. El término por definir debe estar incluido en una clase más amplia.	3.Entidad mental
4.Rasgos de contenido que especifican las característica o propiedades.	4.Rasgos del signo y de sus dos planos
EJEMPLIFICAR: Permite ilustrar un concepto abstracto o general. Cuando se ejemplifica un concepto se presentan uno o más casos particulares de lo que se afirma en el concepto de manera más general. Comúnmente se insertan los casos mediante conectores textuales (por ejemplo, a saber, es el caso de, como, así). Algunas veces no presentan ninguna frase introductoria, en esos casos los ejemplos se mencionan un poco antes o a continuación del concepto. También los dos puntos pueden introducir ejemplos.	Un caso de género discursivo académico es el parcial presencial. Algunos géneros discursivos académicos son producidos por las y los estudiantes, el apunte, el resumen y el parcial son algunos de ellos.
CARACTERIZAR: Consiste en señalar y explicar las características de un objeto, hecho o relación. Una respuesta de examen que solicite una caracterización debe incluir previamente su definición o una breve presentación del tema.	Los géneros discursivos son enunciados relativamente estables que se reiteran en las diferentes esferas del quehacer humano. Pueden ser reconocidos por sus rasgos, tanto externos como internos. Los primeros se relacionan con el contexto de producción y circulación; los segundos son el tema, el estilo y la estructura.

COMPARAR: Consiste en establecer relaciones entre dos conceptos, objetos, hechos, individuos o relaciones en términos de semejanzas y diferencias. Antes de desarrollar las relaciones es necesario definir los términos a comparar.	El concepto de «competencia lingüística» se refiere al conocimiento de determinadas reglas, mientras que la competencia comunicativa incluye además la habilidad o la destreza para utilizar ese conocimiento. La competencia comunicativa no es solamente una extensión de la competencia lingüística, a la que se le han añadido las reglas relacionadas con el uso. No se trata únicamente de una adición cuantitativa, es también y, sobre todo, una ampliación cualitativa.
JUSTIFICAR: Es una operación discursiva a través de la cual se fundamenta una aseveración mediante una serie ordenada de razones o fundamentos. Cuando se justifica lo enunciado por un autor, la justificación debe incluir el nombre del autor de la afirmación, la fuente en la que figura esa afirmación, la afirmación y los argumentos o razones que la sostienen. Los argumentos se deben presentar de forma ordenada mediante marcadores textuales (en primer lugar, en segundo lugar, por un lado, por otra parte, tercero, por último, etc.).	Según lo planteado en el manual del ingreso, el texto leído es un artículo de investigación académico. En primer lugar, por su ámbito de producción y circulación: se produce en la Universidad y circula en una revista universitaria. En segundo término, por sus rasgos internos: el tema que corresponde a una disciplina científica, y el estilo especializado: se usan términos específicos y se desarrollan conceptos teóricos. Además, la estructura del artículo en cuestión es argumentativa dado que se presenta un punto de vista y se lo sostiene con argumentos.
ENUMERAR: consiste en mencionar los elementos de un conjunto.	El proceso de escritura es recursivo y contiene varios momentos: planificación, puesta en texto, revisión y reescritura.
CLASIFICAR: Consiste en dividir un determinado universo en diferentes clases o categorías más generales. Una clase es un conjunto de entidades que poseen una o varias propiedades en común.	Los géneros discursivos académicos pedagógicos se clasifican en dos grandes grupos. Por una parte, los que son producidos por los docentes para sus estudiantes. A saber: clase magistral, exposición oral, manual, etc. Por otra parte, los producidos por las y los estudiantes para sus docentes: resúmenes, informes, respuestas de parcial, monografías, etc.
REFORMULAR: consiste en decir de otra manera lo dicho anteriormente.	La secuencia dominante del género parcial es la dialogal. Es decir que su estructura está conformada por preguntas y respuestas.

9.6 ACTIVIDADES DE LECTURA Y ESCRITURA

Leer los textos que siguen y realizar las consignas que se encuentran al final de cada uno.

El parcial presencial escrito. Una experiencia de alfabetización académica.[12]

Por Betiana Olivero y otros.

Ingresar a la universidad es, entre otras cuestiones, ingresar a una comunidad discursiva propia de un dominio disciplinar y profesional específico; en esta comunidad los discursos se leen, se producen y circulan entre los miembros que la conforman (Maingueneau, 1980).

Las prácticas de lectura y escritura académica que los estudiantes deben desarrollar implican nuevos aprendizajes y procesos reflexivos de interpretación y producción de textos, para los que el acompañamiento docente, de modo intencional y sistemático, es fundamental. En pos de la alfabetización académica de los estudiantes, desde la enseñanza se debe atender a dos objetivos intrínsecamente relacionados, primero, enseñar a leer y escribir géneros propios del campo del saber del que participan o participarán y, segundo, enseñar las prácticas de lectura, estudio y escritura adecuadas para aprender en ese campo del saber y apropiarse significativamente del conocimiento (Carlino, 2013).

Estas prácticas académicas y sus usos sociales dependen del contexto en el que se produzcan (Carlino, 2013), por lo cual son múltiples y variadas. La lectura y elaboración de textos por parte de los estudiantes dependerá del dominio disciplinar, de la tarea, del género textual a producir, del propósito de la producción escrita, de la audiencia, entre otras variables.

Una de las problemáticas poco abordadas en el contexto universitario y que tiene un alto impacto en los estudiantes que inician una carrera universitaria es el parcial presencial escrito. El mismo se constituye en un género de escritura particular que requiere ser enseñado por los docentes y ser apropiado por los estudiantes cuando ingresan a la universidad. Según Grigüelo (2010) se constituye en una de las prácticas más implementadas en el ámbito universitario para evaluar y calificar los conocimientos adquiridos por los alumnos.

El género parcial presencial se corresponde con el sistema de actividad vinculado a la enseñanza y el aprendizaje en el contexto universitario (Camps y Castelló, 2013). En estos sistemas el sentido y el significado de lo que se escribe se relacionan con la elaboración, construcción y reflexión sobre el conocimiento o con dar cuenta de lo aprendido. Los procesos de elaboración escrita son, en términos generales, de carácter individual e implícito y los productos son de uso exclusivo del alumno o bien están sometidos a valoraciones de parte del docente a partir de criterios más o menos explícitos. En términos generales la audiencia queda limitada al profesor o, en algunas ocasiones, al resto de los estudiantes que pueden participar en la evaluación de esos productos (Navarro, 2014).

Grigüelo (2010) expone que todo parcial universitario propone un modelo de destinatario (el estudiante), del cual no solo se espera que conozca los contenidos de aquello sobre lo que se va a evaluar, sino que también sea capaz de distinguir las operaciones cognitivas y discursivas que se le proponen. Entendiendo que la aprobación de este tipo de exámenes no solo depende de lo que el estudiante comprenda del contenido a evaluar, del tiempo dedicado al estudio o de las competencias cognitivas propias, se asume que “pocas veces dentro de las instituciones educativas se encara una reflexión sobre las exigencias de este género, pese a que tiene una presencia destacada ya que a través del examen escrito se comunican los estudiantes con los profesores para ser evaluados” (Narvaja de Arnoux,Di Stéfano, Pereira, 2012, p.169). Es decir, la aprobación de un parcial no solo depende del

[12] Fragmento de una ponencia presentada en la Universidad Nacional de Quilmes en septiembre de 2016

tiempo dedicado al estudio, sino también del análisis y reflexión sobre una serie de factores que intervienen en la situación.

Al mismo tiempo, se impone la necesidad de revisar lo que los docentes universitarios proponen, demandan, esperan, corrigen, aceptan y desestiman en las situaciones de evaluación parcial. Acciones que enseñan a los estudiantes qué y cómo se ha de rendir un parcial en la universidad.

1. La autora cita palabras de Navarro, Grigüelo y Camps y Castelló. A partir de ellas elaborar una definición del concepto "Parcial presencial escrito". La definición debe presentar los cuatro componentes.
2. El texto de Olivero deja ver una crítica a los docentes disciplinares. ¿En qué consiste esa crítica? Transcribir algún fragmento que justifique tu respuesta.

Actividad sobre toma de apuntes y resumen

A. Actividad domiciliaria.

1. Ver el video sobre "Discurso, enunciado, texto", QR: https://www.youtube.com/watch?v=UqipullpaWc
2. Realizar la toma de apuntes sobre la explicación que se desarrolla en el video.

B. Actividad áulica

1. A partir de la toma de apuntes realizada, escribir un resumen (un texto explicativo - expositivo) sobre el tema "Discurso, enunciado, texto" que responda a las siguientes preguntas de examen:
   - ¿Cómo define el autor "sistema"? Reformular la definición y dar ejemplos de sistemas.
   - ¿Cuáles son las características o rasgos que permiten diferenciar uno de otro?
2. Puesta en común: leer en voz alta de algunos de los resúmenes producidos, comparar los resultados contrastando los apuntes tomados por las y los estudiantes.

***Vas a encontrar en el ANEXO que se encuentra en los siguientes módulos:**

10. SEGUNDA ACTIVIDAD INTEGRADORA

11. MODELO DE EXAMEN

12. SIMULACRO DE EXAMEN

OTROS MODELOS

Mg. Roxana Scorzo
Coordinadora

Matemática

COLABORADORA:
Esp. Gabriela Ocampo

PROGRAMA

FUNDAMENTACIÓN

La matemática a lo largo de la historia del pensamiento ha cumplido un rol esencial. Desde los tiempos de Pitágoras, la matemática en su forma más pura, ha constituido una forma de pensamiento fundamental en nuestra cultura occidental.

Consideramos que un alumno aspirante a ingresar en una carrera de Ingeniería, Tecnicaturas o Arquitectura debe poseer determinados conocimientos previos elementales para poder abordar materias básicas comunes a todas las Ingenierías como ser: álgebra, análisis matemático, física, representaciones gráficas y química, como también las materias matemáticas que figuran en las Tecnicaturas y en Arquitectura.

La resolución de problemas atraviesa todas estas materias de manera permanente. Como también el dominio del lenguaje simbólico y gráfico propios de la matemática. Las figuras planas elementales sus características y el cálculo de perímetros y áreas son conocimientos básicos que también están presentes en las materias antes mencionadas. El estudio de los cuerpos geométricos, las construcciones utilizando útiles de geometría y las distintas transformaciones geométricas son algunas de las herramientas imprescindibles para encarar la Matemática Superior.

Las funciones son el eje central en la formación de conceptos que un futuro ingeniero debe dominar. Las funciones admiten una enorme cantidad de transformaciones de distinta naturaleza que nos permiten integrar temas geométricos, matemáticos y de la vida cotidiana en forma permanente. Por eso su abordaje es fundamental en esta etapa de ingreso a carreras de ingeniería.

La evolución de la tecnología, ha aumentado la exigencia de los perfiles de egresados de diferentes carreras, especialmente esto impacta en forma directa en las carreras de ingeniería. La formación de un pensamiento lógico-matemático juega un papel importante en el desarrollo de nuevas tecnologías, donde los futuros ingenieros serán protagonistas de dicho proceso.

OBJETIVOS

- Desarrollar un pensamiento hipotético-deductivo, propio de la disciplina.
- Adquirir hábitos de orden y síntesis.
- Desarrollar habilidades que le permitan dar respuesta a situaciones problemáticas concretas.
- Incorporar el lenguaje específico de la Ciencia Matemática que le permita expresarse, en forma oral y escrita, con rigurosidad científica.

- Adquirir destreza en la realización de generalizaciones e hipótesis simples en base a la observación, experimentación e intuición.
- Desarrollar habilidades vinculadas al aprendizaje autónomo.
- Promover el uso de herramientas tecnológicas vinculadas con la asignatura.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La evaluación escrita consistirá en un conjunto de cuestiones que integran los contenidos mínimos señalados. En su corrección se tiene en cuenta el dominio y manejo de los distintos temas, la interpretación de las consignas, la forma de organizar la información, la capacidad de manejarse con las situaciones que se expresan en forma coloquial y emplear los contenidos teóricos estudiados para traducirlas en gráficos y símbolos y resolver la situación pedida. Se evaluará el orden y prolijidad en sus construcciones, el uso correcto de los útiles de geometría, y todos sus desarrollos y justificaciones.

En el examen escrito, el aspirante encontrará una tabla en la que se indica el puntaje parcial de cada ítem de la evaluación, también una leyenda aclaratoria donde se explicitan las ideas antes descriptas. Por otra parte, y para mantener un ÚNICO CRITERIO de corrección de los exámenes, cada profesor recibe el día del examen, cuales son los criterios para llevar adelante el proceso de corrección, en qué casos se considera Bien, Regular o Mal el ejercicio. Estos criterios se respetan también, en el proceso de revisión de exámenes que realizan en conjunto las coordinadoras de ambas materias.

A lo largo del curso de ingreso, realizaremos actividades de evaluación voluntarias comunes a todas las comisiones, propuestas desde la coordinación de la asignatura. Evaluaremos en ellas el desarrollo de ciertas habilidades vinculadas con el autoaprendizaje. No influyen en la nota del examen, pero consideramos que son muy importantes para promover la autorregulación de los aprendizajes.

CONTENIDOS

Módulo 1

Conjuntos numéricos

Conjuntos numéricos: Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales. Generalidades de cada uno de ellos. Propiedades de los números reales. Operaciones. Desigualdades. Radicales: operaciones y racionalización de denominadores. Notación científica. Números complejos: propiedades, representación y operaciones en forma binómica. Algunos de estos temas en formato digital.

Módulo 2

Expresiones algebraicas enteras y racionales

Polinomios: definición. Igualdad de polinomios. Operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división. Factoreo de polinomios: factor común, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, factoreo usando teorema de Gauss. Expresiones algebraicas racionales: definición y operaciones básicas.

Módulo 3

Ecuaciones enteras y fraccionarias

Ecuaciones de primer grado. Ecuaciones con valor absoluto. Ecuaciones cuadráticas. Ecuaciones fraccionarias. Propiedades. Problemas.

Módulo 4

Inecuaciones

Concepto. Propiedades de las desigualdades. Inecuaciones con valor absoluto.

Módulo 5

Funciones-función lineal-sistemas de ecuaciones-función cuadrática

Sistema de representación cartesiano. Relaciones. Funciones. Dominio e imagen. Función lineal. Características principales. Funciones definidas por tramos. Sistemas de ecuaciones: definición. Métodos de resolución analíticos y gráficos. Función cuadrática: elementos característicos. Algunos de estos temas en formato digital.

Módulo 6

Funciones logarítmicas y exponenciales

Logaritmos: definición, propiedades y ecuaciones logarítmicas. Función logarítmica: principales características. Desplazamientos.
Ecuaciones exponenciales. Funciones exponenciales: principales características. Desplazamientos

CONTENIDOS

Grilla de clases (primera instancia)

CONTENIDO	NÚMERO DE CLASES															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
MÓDULO 1	X	X														
MÓDULO 2			X	X	X											
MÓDULO 3						X										
MÓDULO 4							X									
MÓDULO 5								X	X	X	X					
MÓDULO 6												X	X	X	X	
INTEGRACIÓN																X

BIBLIOGRAFÍA

Altman, S., Comparatore, C.y Kurzrok, L. (2001). Matemática. Polimodal. Funciones 2. (1ra.ed.) Buenos Aires: Longseller.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A. y Rodriguez, M. (2010). Matemática para el Aprestamiento Universitario. Universidad Nacional de General Sarmiento.

D'Agostini, V.;Demti, G. y Pérez, M.(2019). La aplicación de la geometría en un problema de la vida cotidiana de los ingresantes a las carreras de ingeniería. III Jornadas de experiencias innovadoras en educación en la fceia. Recuperado de https://docplayer.es/69047445-La-aplicacion-de-la-geometria-en-un-problema-de-la-vida-cotidiana-de-los-ingresantes-a-las-carreras-de-ingenieria.html

De Guzman, M., Colera, J.y Salvador A. (1987). Matemáticas Bachillerato 2. Madrid: Grupo Editor Anaya.

Dudeney, H. (1992). El acertijo del Mandarín y otras diversiones matemáticas. Madrid: Zugarto Ediciones.

Gardner, M. (2010). Matemática para divertirse. New York: Publicaciones Dover.

Gardner M. (2011). Los acertijos de Sam Loyd. New York: Publicaciones Dover.SAT Math workbook, Kaplan Publishing.

Larson, R. (2011). Precálculo. (8va.ed.). México: Cengage Learning.

Paenza, A. (2006). Matemática ¿Estás ahí? Episodio 2. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina S. A. Universidad Nacional de Quilmes Editorial.

Puig Adam, P. (1980). Curso de Geometría Métrica. (15 ed.). Madrid: Gómez Puig ediciones. Smith, S, Randall, C. y Dossey, J., (1997) Algebra y Trigonometría. (1ra ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.

Speed, B., Evans, K. y Gordon K. (1998). Higher Mathematics for GCSE . (2da ed.).London: Collins Educational.

Staff of Kaplan Test Prep and Admissions (2011), SAT®. Math Workbook.(4tha ed.). New York: Kaplan Publishing

Stewart J., Lothar R. y Saleem W. (2007). Precálculo, Matemática para el cálculo. (5ta ed.). México: Thomsom.

Swokowski E. y Cole J. (2013). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. (13a ed.). CENGAGE. Learning

Vance, E. (1990) Introducción a la Matemática Moderna. (1ra ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.

MÓDULO 1
CONJUNTOS NUMÉRICOS

Recordemos los diferentes tipos de números que conforman el conjunto de los números reales:

Los **números naturales (N)** son los que usamos para contar:

1, 2, 3, 4, 5.......

Los **números enteros (Z)** son los naturales junto con los opuestos de los naturales y el cero:

.... -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.........

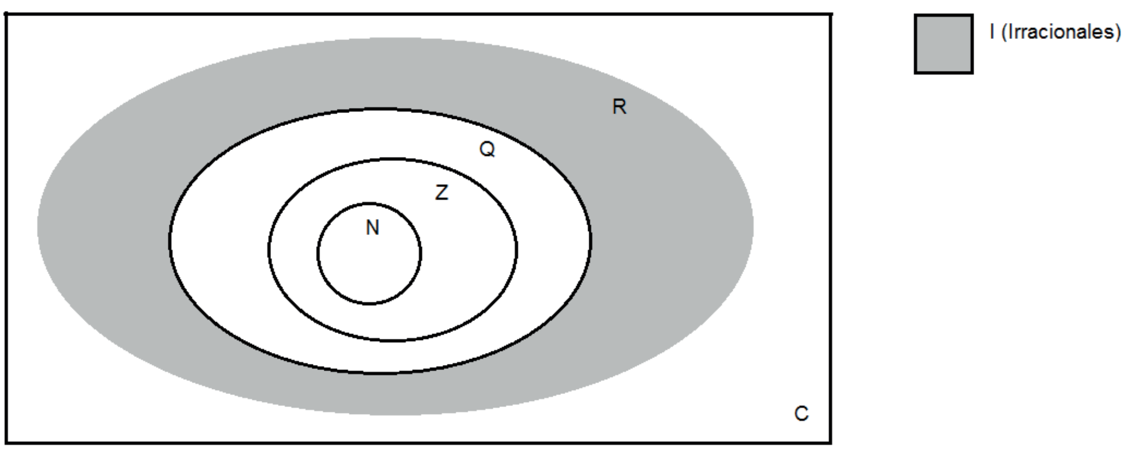
El conjunto de los **números racionales (Q)** está formado por los números que pueden expresarse como un cociente de números enteros , o sea de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$.

$$\frac{2}{3}, \frac{15}{10}, \frac{125}{478}, \frac{1234}{1200657}, \frac{28}{14}, \frac{3}{1}; 0.2\, ; 3.\overset{\frown}{1};\ 0.12121212\ .....;1,5$$

Hay números que no pueden expresarse como un cociente de enteros, a estos los llamamos **números irracionales (I):**

$$\sqrt{3},\quad \sqrt[3]{2},\quad \pi,\quad e,\quad \tfrac{1}{e},........$$

Los números irracionales presentan una *expresión decimal infinita que no es periódica*.



Al conjunto de los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los **Números Reales (R).** En símbolos:

$$\mathrm{N} \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \Re \qquad I \subseteq \Re \qquad Q \bigcup I = \Re$$

$$\frac{2}{3} \in Q,\ \sqrt{2} \in I,\ -5 \in Z\ , 3.1 \notin Z,\ \sqrt{5} \notin Q$$

El hecho de que cada número real se pueda expresar en forma única, permite tener una forma de asociar cada número real con un único punto de la **recta numérica**. Elegimos un punto sobre una recta orientada, punto que llamaremos origen y lo asociamos con el cero. Hacia la derecha de dicho punto y con intervalos equidistantes se ubican los enteros positivos, y hacia la izquierda los enteros negativos. Entre los enteros se ubicarán los números restantes.

Los números reales están **ordenados**. Decimos que ***a* es menor que *b*** ($a < b$) si $b\text{-}a > 0$. Geométricamente esto significa que ***a*** está a la izquierda de ***b*** en la recta real.

Ejercicio 1

Completa el siguiente cuadro, especificando todos los conjuntos de números a los cuales pertenece cada uno de los siguientes números. Recuerda que un número puede pertenecer a más de un conjunto.

	N	Z	**Q**	$\notin Q$	**I**	$\Re$
½						
- ½						
$\sqrt{-4}$						
$-\sqrt[3]{8}$						
0,3333333...						
2,3245245...						
10/2						
8/5						
$\pi - 1$						
7.46474849505152...						
5						
$\sqrt{2} - 2$						

Ejercicio 2

Responde con verdadero o falso y justifica tu respuesta:

a) Todo número decimal se puede expresar como un número fraccionario................... ☐
b) Todo número entero es racional.. ☐
c) La intersección del conjunto de los racionales con el de los irracionales es el conjunto vacío.. ☐
d) Todo número racional puede expresarse como decimal... ☐

Ejercicio 3

Responde con verdadero o falso y justifica tu respuesta:

a) $\pi < 3{,}1415592655$................ ☐

b) -6 < -10.......................... ☐

c) $\frac{10}{11} < \frac{12}{13}$.................................... ☐

d) $8 \leq 8$...................................... ☐

<u>Propiedades de las operaciones con números reales</u>

Adición	**Multiplicación**
1.- La adición es **conmutativa** $a + b = b + a$	La multiplicación es **conmutativa** $a \cdot b = b \cdot a$
2.- La adición es **asociativa** $(a + b) + c = a + (b + c)$	La multiplicación es **asociativa** $(a \cdot b)\, c = a\, (b \cdot c)$
3.- El **neutro de la adición** es el **"0"** $a + 0 = 0 + a = a$	El **neutro de la multiplicación** es el **"1"** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
4.- El **inverso aditivo** u **opuesto** es **"-a"** $a + (-a) = 0$	El **inverso multiplicativo** o **recíproco** es **1/a** si $a \neq 0$ $a \cdot (1/a) = 1$

5.- La multiplicación es **distributiva** respecto de la suma

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Definición de sustracción:

$a - b = a + (-b)$ Restar dos números significa sumar el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Definición de división:

$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ siendo $b \neq 0$ Dividir dos números significa multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor.

Analizar si las propiedades anteriores se cumplen o no para la sustracción y división de números reales

Ejercicio 4

Indica cuál/es propiedades básicas de las operaciones con números reales intervienen en cada uno de los enunciados:

$a)\quad (a+b)+4=(b+a)+4$

$b)\quad 4.a.(-b)=4.[a.(-b)]$

$c)\quad a(b+0)+c\left(\frac{1}{c}\right)-\left[\sqrt{2}+(-\sqrt{2})\right]=a.b+1 \qquad si \quad c\neq 0$

$d)\quad g.h.(x+3)=(x+3).h.g$

$e)\quad h.1-q=h-q$

Ejercicio 5

Apliquemos algunas de las propiedades:

a) Utiliza la propiedad conmutativa de la adición para escribir una expresión equivalente a 2*y* + 3*x* =...

b) Utiliza la propiedad asociativa de la multiplicación para escribir una expresión equivalente a: (41*x*)(-3y) =..

c) Utiliza las propiedades asociativa y conmutativa de la adición para escribir una expresión equivalente a (8*x* + 9) + 6y =..........................

d) Utiliza las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para escribir una expresión equivalente a (2*x*.3*y*)(4*z*) =....................

Ejercicio 6

Explicado en video https://youtu.be/bM9JxStIVo0

Encuentra:

a) El producto de cualquier número distinto de cero y el recíproco de su opuesto.

b) El número que, al multiplicarlo por el recíproco de $-\frac{1}{8}$ da como resultado 2.

c) Si el recíproco del número real (*a* – 4) es 1/5, determina el opuesto de (a + 1).

d) El recíproco de -5, aumentado en 8.

e) El doble del opuesto de -6 más la cuarta parte de 3.

Números Racionales:

Operaciones y Propiedades

$$1)\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

$$2)\ \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

$$3)\ \frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$$

$$4)\ \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a.d\pm b.c}{b.d}$$

$$5)\ \frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}\quad si\ c\neq 0$$

$$6)\ si\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad entonces\quad a.d=b.c$$

***Recuerda que** para sumar números racionales con denominadores distintos debes usar un denominador común, que conviene que sea el mínimo común múltiplo entre ellos y se calcula como el *producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.*

Aplícalo para sumar $\frac{4}{36}+\frac{7}{120}=$ ________

36	2	120	2
18	2	60	2
9	3	30	2
3	3	15	3
1		5	5
		1	

$36=2^2.3^2$ $\quad$ $120=2^3.3.5$ $\quad$ El denominador común es: $2^3.3^2.5$ =360 (MCM)

$$\frac{4}{36}+\frac{7}{120}=\frac{40+21}{360}=\frac{61}{360}$$

***Recuerda que la división por cero "0" es imposible*.**

La definición de división nos dice que si $\frac{a}{b}=c$ entonces *a = b.c* , de modo que si *b* = 0 tendremos $\frac{a}{0}=c$ y por definición sería *a* = 0.*c* , y no hay valor posible para *c* tal que al multiplicarlo por cero nos permita obtener un resultado *a* distinto de cero.

Por otra parte, si además de ser cero el valor de *b* también lo es el valor de *a* tendríamos $\frac{0}{0} = c$ por definición tendríamos que 0 = 0.*c* , en este caso el valor de *c* puede ser cualquiera, decimos que el resultado es indeterminado.

****Recuerda que cero es el único número real que no tiene recíproco.***

****Recuerda que*** si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Ejercicio 7

Sustituye el símbolo $\square$ por $=$ ó $\neq$ para que la expresión resulte verdadera para todos los números reales *a, b, c, d*, siempre que las expresiones estén definidas (todo denominador es distinto a cero):

a) $\frac{a.b + a.c}{a} \square b + a.c$ b) $\frac{a.b + a.c}{a} \square b + c$ c) $\frac{b+c}{a} \square \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

d) $(a : b) : c \square a : (b : c)$ e) $(a - b) - c \square a - (b - c)$ f) $\frac{a-b}{b-a} \square -1$

Ejercicio 8

Resuelve aplicando propiedades

$\left[\frac{p}{q} + \frac{p}{q} : (-\frac{h}{h})\right]^6 =$ Sabiendo que $q \neq 0 \quad y\ h \neq 0$

Ejercicio 9

Explica qué ocurre con el valor de la fracción $\frac{1}{x}$ a medida que:

a) *x* toma valores cada vez mayores
b) *x* toma valores negativos que se alejan cada vez más de cero
c) *x* se aproxima cada vez más a cero.
d) ¿Obtienes la misma conclusión si te acercas a cero por los valores positivos que por los negativos? Justifica

DESIGUALDADES

Recordemos, como dijimos más arriba, que a < b si a - b < 0

- Si *a* y *b* son dos números reales, sólo una de las expresiones siguientes es verdadera:

  a = b ó a > b ó a < b

- Si a < b y b < c entonces a < c (propiedad transitiva de la desigualdad)

- Si sumamos a ambos miembros de una desigualdad un mismo número, el sentido de la desigualdad se mantiene: si a < b entonces a + c < b + c

- Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número, la desigualdad se mantiene si el número es positivo, y cambia si el número es negativo
  Si a < b entonces a .c < b .c si c > 0
  a .c > b .c si c < 0

Ejercicio 10

Describe qué sucede con el valor de $\dfrac{x+3}{4-x}$**.** *(Para ayudarte puedes confeccionar una tabla de valores)*

a) cuando $x > 4$, y x se aproxima cada vez más a 4...

....

b) cuando $x < 4$, y x se aproxima cada vez más a 4...

....

Ejercicio 11

Responde con verdadero o falso y justifica tu respuesta:
(Recuerda que para demostrar que una expresión es falsa basta encontrar un contraejemplo)

a) Si $a < b \quad \Rightarrow \quad -a < -b$ .... ☐

b) Si $\dfrac{3}{a} < 1 \quad \Rightarrow \quad 3 < a$ .... ☐

c) Si $a < b \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{b} < 1$ .... ☐

d) Si $a < b \quad \Rightarrow \quad a - 4 < b - 4$ .... ☐

e) Si $a.b > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0 \quad \wedge \quad b > 0$ ...... ☐

f) $a.b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \quad \wedge \quad b < 0$ .... ☐

g) $a < 0 \ \wedge \ b > 0 \Rightarrow a.b < 0$ .... ☐

Ejercicio 12

Escribe las siguientes proposiciones como desigualdades:

a) *x* es positivo...

b) *y* es no negativo...

c) *la suma entre x e y* es un número negativo...

d) *a* es menor que -3...

e) *b* es mayor o igual que 100...

f) *el anterior de c* es menor o igual que 5..

g) *a* no es mayor que *b*...

h) *c* no es igual al producto de *a* por *b*...

i) *x* está comprendido entre –2 y 4..

j) *x* es a lo sumo 8..

k) *x* está comprendido entre -2 y 4 o es igual a 4..

l) *x* es mayor que –5 y menor que ½..

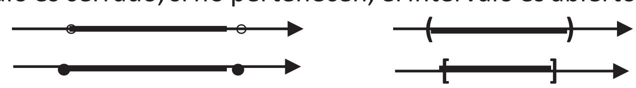
m) *x* es mayor que –5 o menor que ½ ....

INTERVALOS

Si a < b llamamos intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b* (*a* y *b* se llaman extremos). Si los extremos pertenecen al intervalo es cerrado, si no pertenecen, el intervalo es abierto.

$(a\ ;\ b) = \{ x / x\ \varepsilon\ R \wedge a < x < b \}$

$[a\ ;\ b] = \{ x / x\ \varepsilon\ R \wedge a \leq x \leq b \}$



Ejercicio 13

Expresa el intervalo en términos de desigualdades y grafícalo:

a) (-2,6)...

b) [3,4)..

c) [-3,2]..

d) [5, ∞)..

Ejercicio 14

Expresa la desigualdad con notación de intervalo y grafícalo:

$a)\ x \leq 1$..

$b)\ -2 < x \leq 4$..

$c)\ x > 5$...

$d)\ 1 \leq x \leq 7$..

VALOR ABSOLUTO

Si x es un número real entonces el valor absoluto de x es : $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

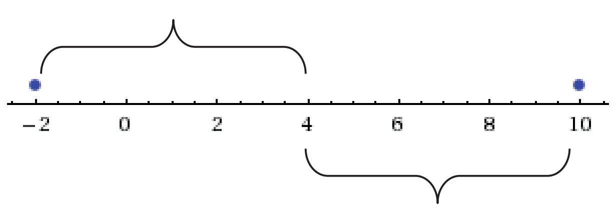
Geométricamente está relacionado con el concepto de distancia.

El valor absoluto de un número representa la distancia de ese número al cero.
En el caso que calculemos la distancia entre dos números (siendo ninguno de ellos el cero), por ejemplo, entre el número 3 y el número 12 la distancia es evidentemente 9 (corroborar geométricamente). Resulta de calcular $|12-3| = |9| = 9$, o lo que es lo mismo $|3-12| = |-9| = 9$ (aplicando la definición de valor absoluto). Luego la distancia entre *a* y *b* se puede expresar como $|b-a| = |a-b|$.
Analizar el caso en que a=3 y b= -7 y comprobar geométricamente.

Si tenemos $|x-4|=6$ significa que la distancia entre un "x" cualquiera y 4 es exactamente 6.
Es decir, x= -2 y x = 10 son los valores numéricos que hacen verdadera a la expresión anterior.

Veamos esto representado en la recta numérica:

La distancia entre x=-2 y 4 es exactamente 6



La distancia entre x=10 y 4 es exactamente 6

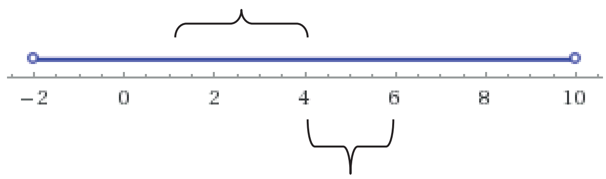
Importante:

Si tenemos |x+4|=|x-(-4)|=6 significa que la distancia entre un "x" cualquiera y -4 es exactamente 6

Si en cambio tenemos |x-4|< 6 significa que la distancia entre un "x" cualquiera y 4 es menor a 6.
Es decir, los valores que toma "x" ya no son x = -2 y x =10 sino los que hacen verdadera la expresión anterior, son los comprendidos entre -2 y 10 es decir -2<x<10

Veamos esto representado en la recta numérica:

Por ejemplo, si x=1 la distancia entre 1 y 4 vale 3 es decir resulta menor a 6



Si por ejemplo x = 6 la distancia entre 6 y 4 vale 2 es decir menor a 6

Propiedades del valor absoluto:

Definición y propiedades del valor absoluto https://youtu.be/MuMfI3Ol2Uo
Este video es un complemento sobre este tema muy importante del curso de ingreso.

1.– $|a| \geq 0$

2.– $|a| = |-a|$

3.– $|a.b| = |a|.|b|$

4.– $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad b \neq 0$

5.– $|a+b| \leq |a| + |b|$

6.– $|a-b| \geq |a| - |b|$

7.– $|x| < a \ \wedge \ a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$

8.– $|x| > a \ \wedge a > 0 \Leftrightarrow x > a \ \vee \ x < -a$

Ejercicio 15

Evalúa cada una de las expresiones:

$a)\ |100| =$ .... $b)\ |-3| =$ .... $c)\ ||-6|-|-2|| =$ ....

$d)\ |-2+|2|| =$ .... $e)\ 3+|-2| =$ .... $f)\ -1-|1-|-1|| =$ ....

$g)\ \dfrac{1}{|-1|} =$ .... $h)\ |3-\pi| =$ .... $i)\ |\sqrt{3}-2| =$ ....

Ejercicio 16

Escribe las siguientes proposiciones como desigualdades:

a) el módulo de *t* , menos 2 es menor que 50 ....

b) la distancia máxima de *x* a 3 es 5 ....

c) *x* está al menos a 2 unidades de 3 ....

Ejercicio 17

Escribe la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto:

a) $|x|$ si *x* es negativo ....

b) $|-x|$ si *x* es negativo ....

c) $|x-2|$ si $x < 2$ ....

d) $|x-2|$ si $x = 2$ ....

e) $|5-x|$ si $x > 5$ ....

f) $|5-x|$ si $x < 5$ ....

EXPONENTES Y RADICALES

Así como podemos reemplazar a la suma de *n* términos de *x* por *n.x*: $\underbrace{x+x+x+..}_{n\ \text{términos}} = n.x$

Podemos reemplazar el producto de *n* factores de *x* por x^n: $\underbrace{x.x.x.x....}_{n\ \ factores} = x^n$

n es el exponente, y *x* es la base, al resultado obtenido lo llamamos potencia.

Propiedades de la potenciación

$$a)\ x^m.x^n = x^{(m+n)}$$
$$b)\ \left(x^m\right)^n = x^{m.n}$$
$$c)\ (x.y)^n = x^n.y^n$$
$$d)\ \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$
$$e)\ \frac{x^m}{x^n} = x^{(m-n)}$$

RADICALES

Las raíces de los números reales se definen como $\boxed{\sqrt[n]{x} = r \quad \Leftrightarrow \quad r^n = x}$

Donde *n* es el índice de la raíz, y *x* es el radicando.

Si *n* es impar obtendremos un resultado único para cualquier valor de *x* perteneciente a los reales.
Si *n* es par y *x* positivo se considera como solución a la positiva, es decir:

La raíz enésima de x es el <u>número positivo</u> que elevado a la n da x

De modo que $\sqrt{4} = 2$

Si *n es par* y *x* es negativo el resultado NO ES UN NÚMERO REAL. Es decir $\sqrt{-4}$ no pertenece al conjunto de los números reales.

Para cualquier número real x y para cualquier entero positivo $n \wedge n \neq 1$ es: $\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{1/n}}$

De modo que $x^{1/n}$ es otra forma de designar la raíz enésima de *x*.

Definimos entonces: $x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$

Si *x* > 0, se puede tomar cualquier combinación de signos para los valores *m* y *n*.

Si *x*< 0 puede suceder que, para algunas combinaciones de signos de *m* y *n,* la expresión $x^{1/n}$ no pertenece al conjunto de los números reales.

En particular se cumple que:

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall \quad x \in \Re$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

Propiedades de los radicales

$$\sqrt[n]{a} \quad y \quad \sqrt[n]{b} \quad existen\ y\ son\ \ números\ \ reales,\ \ \mathrm{se}\ \ \mathrm{c}umple:$$

$$a)\ \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

$$b)\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad si \quad b \neq 0$$

$$c)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} \qquad si \quad a \geq 0$$

IMPORTANTE

Este módulo se completa con dos temas que deberán aprender en forma autónoma, con el material teórico-práctico que figura en la plataforma MIEL INGRESO https://mielingreso.unlam.edu.ar/principal/home/

Los temas de AUTOAPRENDIZAJE son:

- Notación científica
- Números complejos

Se aclara que son temas INCLUÍDOS en el examen de ingreso.

MÓDULO 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

POLINOMIOS

Un **polinomio de grado *n* en la variable *x*** es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...+ a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

Siendo: $a_0,\ a_1,\ a_2, ...a_n \in \Re \quad \wedge \quad a_n \neq 0$ se los denomina **coeficientes**

$n \in N_0$

x es la variable o indeterminada.

$a_n.x^n;\quad a_{n-1}x^{n-1};\quad a_{n-2}x^{n-2};\quad a_2x^2;\quad a_1x^1;\quad a_0x^0$ son los **términos del polinomio**

De acuerdo a la cantidad de términos el polinomio recibe diferentes denominaciones:

a) Polinomio de un solo término no nulo: **MONOMIO**. Ejemplo: $P(x) = 3x^4$

b) Polinomio de dos términos no nulos: **BINOMIO**. Ejemplo: $Q(x) = 2x^3 - 4$

c) Polinomio de tres términos no nulos: **TRINOMIO**. Ejemplo: $M(x) = 6x^5 + 2x - 4$

d) Polinomio de cuatro términos no nulos: **CUATRINOMIO**.

Ejemplo: $H(y) = 2y^3 + 3y^2 + y + 5$

a_n se denomina **coeficiente principal.** Así en los ejemplos anteriores:

en P(x) es 3, en Q(x) es 2, en M(x) es 6, en H(y) es 2.

a_0 se denomina **coeficiente del término independiente.** Así en los ejemplos anteriores:

en P(x) es 0, en Q(x) es -4, en M(x) es -4, en H(y) es 5

Polinomio nulo

Si todos los coeficientes valen cero tenemos entonces $P(x) = 0$ al cual denominamos: **Polinomio Nulo**

Polinomio normalizado

Si el coeficiente principal de un polinomio es 1 al polinomio se lo denomina Mónico o Normalizado. Ejemplos:

$$G(y) = y^3 + 4y^2 + \frac{2}{3}y + 5 \qquad\qquad Q(x) = x - 6$$

Grado del polinomio

El exponente ***n*** es el **grado del polinomio** con $a_n \neq 0$. **El polinomio nulo carece de grado.**

Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores: $P(x) = 3x^4$ es de grado 4, $H(y) = 2y^3 + 3y^2 + y + 5$ es de grado 3, $G(x) = x - 6$ es de grado 1.

Polinomios ordenados

Cuando los exponentes de las variables están ordenados de manera creciente o decreciente se dice que el polinomio está ordenado. Ejemplos:

$M(x) = 6x^5 + 2x - 4$ Está ordenado en forma decreciente en cambio $H(y) = 3 + 2y + 3y^2 + y^4$

Está ordenado en forma creciente.

Polinomios completos

Un polinomio es completo, si tiene un término por cada exponente desde 0 hasta su grado.

$T(y) = 3 + 2y^3 + 3y^2 - 5y$ es un polinomio completo.

Ejemplo: $M(x) = 6x^5 + 2x - 4$ es un polinomio incompleto, si queremos expresarlo de manera completa escribimos: $M(x) = 6x^5 + 2x - 4 + 0.x^4 + 0.x^3 + 0.x^2$. Agregamos los exponentes que faltan con coeficientes 0.

Especialización (o valor numérico) de un polinomio

Muchas veces es necesario asignarle a la variable un valor numérico, así pues:

Si $M(x) = 6x^5 + 2x - 4$ y necesitamos conocer $M(2)$ debemos sustituir a la variable x por el número 2 obteniendo $M(2) = 6.2^5 + 2.2 - 4 = 192$. Se dice que 192 es la especialización del polinomio *M* para x=2

Términos semejantes

Decimos que dos términos **son *semejantes*** cuando tienen igual parte literal:

En el polinomio $P(x) = 2x - 3x^2 + 3x^4 + 7x^3 + 2x^4$ los términos $3x^4$ y $2x^4$ son semejantes porque tienen la variable elevada al mismo exponente.

A los términos donde la variable está elevada a la potencia 1 se lo suele llamar TÉRMINO LINEAL.

Si la variable está elevada al cuadrado, a la 2, se lo denomina TÉRMINO CUADRÁTICO.

<u>Recuerda,</u> el exponente de la variable de cada término debe ser un entero no negativo

Exponente Negativo

Exponente Fraccionario

$$x^{-3} + 2x^2 - 7x + 5x^{1/2} + 6$$ No es un polinomio

Igualdad entre polinomios

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y todos los coeficientes de términos semejantes son iguales.

Ejemplo: Dados

$$P(x) = 3x^5 - 4 + \frac{1}{2}x - 2x^3 \quad Q(x) = 0,5x + 3x^5 + 5x^2 - 4 + 7x^3 \quad T(x) = 0,5x + 3x^5 - 2x^3 + 0x^2 - 4$$

Los polinomios *P* y *Q* son ambos de quinto grado, cumplen que los coeficientes de x^5, de x y los términos independientes son iguales, pero el coeficiente de x^3 vale -2 en *P* y 7 en *Q*, no son iguales. Y el coeficiente de x^2 vale 0 en *P* (no hay un término en x^2) y 5 en *Q*, no son iguales. Por estas dos últimas características, los polinomios P y Q no son iguales:

$$P(x) \neq Q(x)$$

Basta con que dos polinomios tengan un coeficiente de términos semejantes distinto, para que los polinomios sean distintos.

Por otro lado, los polinomios *P* y *T* cumplen que ambos son de quinto grado, el coeficiente en x^5 vale 3 en los dos, el coeficiente en x^4 vale 0 en los dos, el coeficiente en x^3 vale -2 en los dos, el coeficiente en x^2 vale 0 en los dos (que esté escrito el 0 o no, no hay diferencia), el coeficiente en x vale lo mismo en los dos polinomios, $0,5 = \frac{1}{2}$ expresado de distinta forma pero es el mismo número en los dos y el término independiente vale -4 en los dos polinomios, es decir *P* y *T* tienen todos los coeficientes de términos semejantes iguales, entonces son polinomios iguales:

$$P(x) = T(x)$$

Otro ejemplo:

Encuentra el valor de **a, b, c, d**, para que los polinomios *M* y *N* resulten iguales, siendo:

$$M(x)=\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{3}x^2+x+3 \qquad M(x)=(a-1)x^3+(b+2)x^2+cx+c+d$$

Como dijimos anteriormente todos los coeficientes de términos semejantes deben ser iguales, entonces

$$\begin{cases} \frac{2}{5}=a-1 & \text{para que los coeficientes de } x^3 \text{ sean iguales} \\ \frac{1}{3}=b+2 & \text{para que los de } x^2 \text{ sean iguales} \\ 1=c & \text{para que los en } x \text{ sean iguales} \\ 3=c+d & \text{para que los terminos independientes sean iguales} \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones resulta:

$$a=\frac{7}{5},\ \ b=-\ \frac{5}{3},\ \ c=1\ ,\ d=2$$

Ejercicio 1

Determina cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. Si la expresión es un polinomio indica cuál es su grado y cuál es su coeficiente principal y el término independiente.

	Si es polinomio	**No** es polinomio	**Grado**	**Coeficiente principal**	**Término independiente**
$a)\ 3x^5-x^{1/2}$					
$b)\ \sqrt{2}-3x^3+x$					
$c)\ 2-x+2x^2-3x^4$					
$d)\ 4^{-1}+4x-7x^5+6$					
$e)\ 3x^2-\frac{1}{2}x+5-x^{-1}+x^{-2}$					

Ejercicio 2

i) Inventar un polinomio que cumpla:

- **a)** Sea un trinomio, de grado 5, cuyo coeficiente cuadrático sea -8.
- **b)** Un monomio de grado 1.
- **c)** Un binomio cualquiera.
- **d)** Un cuatrinomio completo y ordenado en forma decreciente.

ii) Encontrar, si existen, los valores de *a, b, c* y *d*, las que haya en cada caso, de manera que resulten T(x) = U(x) siendo:

- **a)** T(x) = $(3-a)x^3 + bx^2 - (c-d)x + 3d$ y U(x) = $-12 + 5x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$
- **b)** T(x) = $\left(a^2-5\right)x^3 + 24x^2 + \left(2b+3\right)x + 6$ y U(x) = $\left(a+8\right) - 7x - x^3 + \left(b^2-1\right)x^2$

  El ítem **b)** está explicado en el siguiente video https://acortar.link/ZvieTN

Ejercicio 3

Dados: $P(x) = 3x^2 - x + 2x^3 - 1$ y $Q(x) = \frac{1}{2}x - x^4 - x^3 + 2$

Calcular: P(-2) P(-1/2) Q(0) Q(-1)

- **a)** Indicar el grado de P(x) y Q(x)
- **b)** Indica cuál es el término cúbico de cada uno.
- **c)** Indicar cuál es el coeficiente del término cuadrático de P(x) y cuál el del término lineal de Q(x)

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Adición y Sustracción

La suma o resta de dos o más polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los coeficientes de los términos semejantes. Ejemplos:

1) $(x^4 + 3x^3 + 2x - 5) + (-3x^4 + 5x^3) = -2x^4 + 8x^3 + 2x - 5$

2) $(x^5 + 2x^3 - x - 5) - (-3x^4 + 6x^3 - \frac{1}{2}x - 1) = x^5 + 2x^3 - x - 5 + 3x^4 - 6x^3 + \frac{1}{2}x + 1 =$

$= x^5 + 3x^4 - 4x^3 - \frac{1}{2}x - 4$

Multiplicación

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de los polinomios por cada término del otro. (Aplicamos propiedad distributiva y agrupamos términos semejantes)

Recuerda que al multiplicar potencias de igual base se obtiene otra potencia de la misma base en la que el exponente es la **suma** de los exponentes dados.

Ejemplos:

$$1)\ (x^4+3x^3+2x-5)\cdot(-3x^4+5x^3)=-3x^8+5x^7-9x^7+15x^6-6x^5+10x^4+15x^4-25x^3=$$
$$=-3x^8-4x^7+15x^6-6x^5+25x^4-25x^3$$

2) $(x+4).(5x+2)=5x^2+2x+20x+8=5x^2+22x+8$

Ejercicio 4

Efectúa las operaciones indicadas y expresa el resultado ordenado de forma decreciente

$a)\ (x^3-5x^2+6x^5)-(2x+3x^2-5)=$

$b)\ (x^3-5x^2+6x^5)+(2x+3x^2-5)=$

$c)\ (x-6).(x^2+4)$

$d)\ (x^3-5x^2+6x^5)\cdot(2x+3x^2-5)=$

$e)\ 2x^3(x-5)+x^3-(6+x^4)=$

$f)\ \frac{1}{2}x-\left(2x+\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{1}{4}x-1\right)-x^2=$

Productos Notables

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	Diferencia de cuadrados
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	Cuadrado de un binomio
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	Cubo de un binomio

Ejemplos:

1) $(x+4)^2=x^2+2.x.4+4^2=x^2+8x+16$

2) $(3x-2)^2=(3x)^2+2.3x.(-2)+(-2)^2=9x^2-12x+4$

3) $(x+5)^3=x^3+3.x^2.5+3.x.5^2+5^3=x^3+15x^2+75x+125$

4) (3x-7).(3x+7)= $9x^2-49$

Ejercicio 5

Demuestra que son ciertas cada una de las igualdades indicadas en el recuadro de arriba (productos notables).

Ejercicio 6

Resuelve los siguientes cálculos:

a. $\left(2y-\frac{3}{2}\right)^2-(y-4).\left(y+\frac{1}{2}\right)-2y^2=$

b. $\frac{2}{3}.(z-6).\left(2z+\frac{1}{3}\right)=$

c. $4y^4-\left(\frac{1}{2}y^2-6\right)^3-y^6-1=$

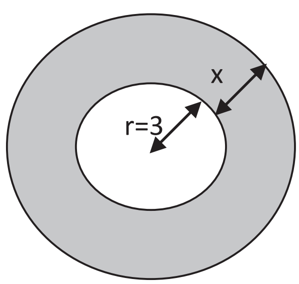
d. $x^2-(3x-5).(3x+5)+4=$

Ejercicio 7

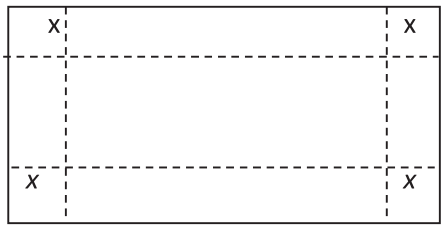
a. Expresa como polinomio el perímetro y el área de un triángulo equilátero cuyos lados y altura tienen respectivamente las siguientes expresiones $3x^3+\frac{1}{2}x-1$; x-4

b. Expresa como polinomio el perímetro y el área de un rectángulo cuya base y altura tienen respectivamente las siguientes expresiones $3x^2+\frac{1}{4}x-1$; 2x-4

c. Determina el área sombreada expresándola como un polinomio.



d. Se va a construir una caja abierta con una pieza rectangular de cartón de 50 cm. por 70 cm. Recortando cuadrados idénticos de longitud *"x"* de cada una de las esquinas de la hoja de cartón, doblando luego los lados por las líneas punteadas.



Expresa como un polinomio

a) el volumen de la caja.

b) el área de la superficie de la caja.

División de Polinomios

Primero veremos cómo se dividen monomios:

Ejemplos: a) $30x^4 : 15x = 2x^3$ b) $-x^5 : x = -x^4$ c) $3x : 3x = 1$

Es decir, se dividen los coeficientes entre si y se aplica la propiedad de la potenciación: cociente de potencias de igual base.

Hay un método para dividir polinomios que es similar al algoritmo de la división entera:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{8} & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 9 = 2.4 + 1$$

En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} R & C \end{array} \qquad D = d.C + R \quad \rightarrow \quad \frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

D: dividendo, d: divisor, C: cociente, R: resto

Recuerda que dividir dos polinomios llamados Dividendo *D*(x) y divisor *d*(x) significa encontrar otros dos polinomios, llamados Cociente *C*(x) y Resto *R*(x), que cumplan:

a) *D*(x) = *d*(x) .*C*(x) + *R*(x)

b) El grado del resto es menor al grado del divisor, o es el polinomio nulo (que no tiene grado).

Con estas condiciones, el cociente y el resto siempre existen y son únicos.

Ejemplo:

Divide $3x^4 + 5x^2 - x^3 + 7$ por $x^2 - 3x + 2$

1º Ordenamos el dividendo y el divisor en potencias decrecientes de *x*. Completamos el dividendo en caso que falten términos (el divisor no hace falta completarlo), y dividimos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 3x^4 & -x^3 & +5x^2 & +0x+7 & x^2-3x+2 \\
- & 3x^4 & -9x^3 & +6x^2 & & \overline{3x^2+8x+23} \\
\hline
 & & 8x^3 & -x^2 & +0x & \\
 & - & 8x^3 & -24x^2 & +16x & \\
\hline
 & & & 23x^2 & -16x+7 & \\
 & & - & 23x^2 & -69x+46 & \\
\hline
 & & & & 53x-39 &
\end{array}
$$

Se divide hasta que el grado del polinomio resto es menor que el grado del polinomio divisor

De modo que:

$$3x^4+5x^2-x^3+7=\left(x^2-3x+2\right)\left(3x^2+8x+23\right)+53x-39$$

y

$$\frac{3x^4+5x^2-x^3+7}{x^2-3x+2}=3x^2+8x+23+\frac{53x-39}{x^2-3x+2}$$

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ polinomios, con $Q_{(x)}\neq 0$, entonces existen y son únicos los polinomio $C_{(x)}$ y otro $R_{(x)}$, tales que

$P_{(x)}=C_{(x)}.Q_{(x)}+R_{(x)}$ y Gr (*R*) <Gr (Q) ó *R*=0

Cuando el resto es cero decimos que el polinomio dividendo es **divisible** por el polinomio divisor.

Si el polinomio divisor es de la forma ($x-c$) entonces $P_{(x)}=C_{(x)}.(x-c)+R_{(x)}$

Si $x=c\rightarrow P_{(c)}=R$

Esto nos permite determinar si un polinomio es o no divisible por otro de la forma *x*- *c*. Bastará hallar el valor numérico o especialización del polinomio en *x* = *c* y ver si el resto es o no cero.

TEOREMA DEL RESTO

Cuando un polinomio $P_{(x)}$ se divide por otro de la forma *x* – *c*, el resto es el valor numérico del polinomio en *x* = *c*.
En símbolos*:* *R*= *P*(c)

Ejemplo:

Determina el resto para $P_{(x)} = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$ si se lo divide por $x - 2$

$R = P_{(2)} = 2.2^4 - 3.2^2 + 5.2 - 6 = 24$ Este es el valor del resto de la división.

Si dividimos en la forma tradicional podemos verificar:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^4 & +0x^3 & -3x^2 & +5x-6 & x-2 \\ \cline{6-6}
- & 2x^4 & -4x^3 & & & 2x^3+4x^2+5x+15 \\ \cline{2-3}
 & & 4x^3 & -3x^2 & & \\
 & - & 4x^3 & -8x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 5x^2 & +5x & \\
 & & - & 5x^2 & -10x & \\ \cline{4-5}
 & & & & 15x-6 & \\
 & & & - & 15x-30 & \\ \cline{5-5}
 & & & & 24 &
\end{array}
$$

Cuando se divide un polinomio de grado *n* por otro de la forma *x – c* (de primer grado y mónico) se puede hacer también la división empleando la **Regla de Ruffini**:

Recuerda que: los coeficientes del polinomio dividendo deben estar ordenados en forma decreciente y debe estar completo.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & 5 & -6 \\
2 & & 4 & 8 & 10 & 30 \\ \hline
 & 2 & 4 & 5 & 15 & 24
\end{array}
$$

Raíz del divisor: 2

coeficientes del resultado resto

El cociente se obtiene con los coeficientes obtenidos y es de un grado menor que el dividendo es decir: C(x)= $2x^3 + 4x^2 + 5x + 15$

¿Les preguntamos, por qué el cociente es un grado menor que el dividendo en este tipo de divisiones?

Ejercicio 8

Resolver: $a) 4y^5 : 3y =$ $\quad b) \frac{1}{3}m : 2m =$ $\quad c) 5z^4 : (-5z^4) =$ $\quad d) \frac{1}{4}x^3 : x =$

Ejercicio 9

Resolver las siguientes divisiones cuando sea posible aplicar la regla de Ruffini.:

a) $\left(\frac{1}{2}y+3y^3-5\right):\left(y^2-2\right)$

b) $\left(x+3x^3-1+2x^5\right):\left(x^3-2x\right)$

c) $\left(y+2y^3-4\right):\left(y-2\right)$

d) $\left(-y+3y^2-y^4\right):\left(y^2-y\right)$

e) $\left(5x+4x^3-4x^2\right):\left(x+3\right)$

El ítem b) está explicado en el siguiente video https://acortar.link/gq0kx2

El ítem c) está explicado en el siguiente video https://acortar.link/zHl1so

RAÍZ O CERO DE UN POLINOMIO

Un número es una raíz o cero de un polinomio si el valor numérico o especialización del polinomio para ese valor de la variable es 0

Ejemplos:

Si $P(x)=4x+20$, una raíz de él es x = -5 ya que *P*(-5) = 4.(-5)+20 = -20+20 = 0

Si $Q(x)=x^2-25$ sus raíces son x = -5 y x = 5 ya que $Q(5)=5^2-25=25-25=0$ y $Q(-5)=(-5)^2-25=25-25=0$

El método más sencillo, para buscar raíces de polinomios, es igualar el polinomio a cero y resolver la ecuación para despejar x (cuando sea posible).

En el polinomio *Q(x)* anterior

$$Q(x)=x^2-25=0 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow |x|=\sqrt{25} \Rightarrow x=5 \quad o \quad x=-5$$

Otro método que usaremos para buscar raíces de polinomios es el Método de Gauss, que explicaremos en la próxima sección (Factorización de polinomios)

Las raíces de un polinomio son muy importantes en el proceso de factorización, ya que se cumple la siguiente propiedad:

a es raíz de un polinomio P(x) $\Leftrightarrow$ *x - a* es un divisor de P(x)

Entonces al ser 0 el resto de dividir P(x) por *x-a*, es posible factorear el polinomio de la forma

P(x) = (*x –a*) . C(x), siendo C(x) el cociente que resulta de dividir P(x) por (*x-a*)

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es expresarlo como un producto de polinomios primos. Hasta ahora multiplicamos polinomios, ahora vamos a realizar el procedimiento inverso, trataremos de escribir el polinomio como un producto de otros polinomios. Cada polinomio interviniente en este producto se llama **factor**.

Para lograr factorear un polinomio, existen algunos casos particulares, formas fáciles y rápidas de hacerlo pero que sólo se pueden aplicar en pocas oportunidades.

Factor común

Es el proceso contrario a la multiplicación entre un monomio por un polinomio

Ejemplo:

Vamos a factorizar: $3x^3 - 6x + 27x^2$

Vemos que 3x es un factor común a los tres términos, la expresión factorizada resultará ser:

$$3x^3 - 6x + 27x^2 = 3x\ (x^2 - 2 + 9x)$$

Si se aplica propiedad distributiva en el 2º miembro se obtiene el primer miembro.

- Puede suceder que los términos de una expresión no tengan un factor común, sin embargo, en determinados casos, se podrá factorizar *agrupando los términos* de manera apropiada.

Factor común por grupos

Ejemplo: Factorizar $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$

Agrupamos los primeros dos términos y los dos últimos resulta:

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = (x^3 - 2x^2) + (5x - 10)$$

Vemos que en cada grupo hay un factor común, de modo que se podrá expresar como:

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = x^2(x-2) + 5(x-2) =$$

En cada uno de estos dos términos tenemos nuevamente un factor común (*x* -2) y en el último paso sacamos nuevamente factor común *x - 2*.

$$x^2(x-2) + 5(x-2) = (x-2)(x^2+5)$$

Si realizas distributiva podrás ver que el producto de los dos factores obtenidos es el cuatrinomio original

- Si reconocemos un polinomio como una forma de un producto notable, tendremos nuevamente, la posibilidad de factorizar. Así tenemos:

Trinomio cuadrado perfecto

Esta forma de factoreo está vinculada con la regla del cuadrado de binomio, es decir:

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

Ahora el dado es el segundo miembro y deberás escribir el primero, en el que el polinomio está expresado en forma factoreada, recordemos que: $(x+4)^2 = (x+4).(x+4)$

Ejemplo: $4x^2 + 1 - 4x = (2x-1)^2$ Se buscan dos términos que sean cuadrados: $4x^2$ es el cuadrado de 2x, y, 1 es el cuadrado de 1. Esas dos bases son los términos del binomio. Sumando o restando, de acuerdo al término que no es un cuadrado, en este caso – 4x(restando). Y luego, se verifica que el doble del producto del primer término, por el segundo sea el otro término del trinomio, en este caso sería: 2.2x.(-1) = -4x.

Diferencia de cuadrados

Esta forma de factoreo está vinculada con otro producto notable: (x+5).(x-5)= $x^2 - 25$

Observa que el segundo miembro es una diferencia entre dos cuadrados, ahora se debe pasar de la expresión del 2º miembro a la del 1º. Así pues:

a) $x^4 - 9 = (x^2 - 3).(x^2 + 3)$

b) $9x^2 - 1 = (3x-1).(3x+1)$

Factorización empleando raíces del polinomio

La forma general de factorización implica trabajar con las raíces o ceros de un polinomio. Este procedimiento implica realizar 3 pasos:

1. Encontrar una raíz del polinomio. Esto puede hacerse despejando o aplicando el teorema de Gauss.
2. Dividir el polinomio por el binomio que se construye como x- raíz (usando la raíz encontrada en el paso 1)

3- Escribir el polinomio factoreado, expresándolo como el producto entre el cociente obtenido en el paso 2 multiplicado por x – la raíz encontrada en el paso 1

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Factorear el polinomio P(x)= $x^3 - 27$

Seguimos los tres pasos mencionados

1. Encontrar una raíz del polinomio.

Como el polinomio P(x) tiene la variable una sola vez, se puede obtener una raíz igualando a cero y despejando.

$$x^3 - 27 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 = 27 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} \quad \rightarrow \quad x = 3$$

2. Dividir el polinomio P por el binomio que se construye como x- raíz. P(x) : (x-3), reemplazando a P(x) queda: $(x^3 - 27):(x-3)$ Esta división puede hacerse por la Regla de Ruffini.

Al hablar de raíz de un polinomio, establecimos que cualquier polinomio es divisible por x – raíz, entonces la división tiene resto cero.

Hallamos el cociente aplicando la regla de Ruffini:

	1	0	0	-27
3		3	9	27
	1	3	9	0

Cociente: $x^2 + 3x + 9$

3- Escribir el polinomio factoreado

Resultó que $x^3 - 27$ al dividirlo por $x - 3$ tiene como resto R= 0 y cociente C(x) =$x^2 + 3x + 9$

Por la definición de la división sabemos que *D = C .d + R* entonces

$x^3 - 27 = (x^2 + 3x + 9).(x - 3)$ y así obtenemos la factorización

Ejemplo 2: Factorizar Q(x) = $x^3 - \frac{1}{8}$

1.Por despeje, una raíz es ½, es decir, el divisor resulta $x - \frac{1}{2}$.

2. Calculamos el cociente:

	1	0	0	-1/8
1/2		1/2	1/4	1/8
	1	½	¼	0

C(x) = $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

3. Entonces el factoreo es: $x^3 - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right).\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

Ejemplo 3: Factorear: S(x) = $x^5 + 32$

1. Encontrar una raíz del polinomio.

$$x^5 + 32 = 0 \quad \rightarrow \quad x^5 = -32 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[5]{-32} \quad \rightarrow \quad x = -2$$

2. El divisor resulta entonces x-(-2) = x + 2 . Aplicamos la regla de Ruffini

	1	0	0	0	0	32
- 2		- 2	4	- 8	16	- 32
	1	-2	4	- 8	16	0

Luego: C(x)= $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

3. Escribimos el factoreo que en este caso es $(\mathbf{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16})\ (\mathbf{x + 2})$

Ejemplo 4: Factorearemos P(x)= $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

Paso 1: Encontrar una raíz del polinomio. En este caso si igualamos el polinomio a cero, no podemos despejar x, usaremos un teorema sobre las raíces racionales de un polinomio, conocido como Teorema de Gauss, para hallar una raíz del polinomio.

Teorema de Gauss

Si un polinomio, con coeficientes enteros, tiene una raíz racional de la forma $\frac{k}{a}$ (fracción irreducible), entonces se cumple que ***k** (el numerador)* es un divisor del término independiente y ***a (el denominador)*** es un divisor del coeficiente principal.

Paso 1

Este teorema no dice cuáles son las raíces, si no que establece las condiciones para los números racionales que sean raíces.

Para emplearlo, buscamos las posibles raíces:

Divisores del término independiente (a_0 = 6): *k* = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6

Divisores del coeficiente principal (a_n=2): *a* = 1, -1, 2, -2

Las posibles raíces del polinomio son: $\frac{k}{a}$, las fracciones irreducibles que se obtienen al dividir los números de la primera lista, por los números de la segunda lista

Es decir: 1, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2, -2, 3, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, 6, -6

Estos son los "candidatos a ser raíces del polinomio", de acuerdo al teorema, si el polinomio tiene una raíz que es una fracción, es alguna/as de estas 12 posibilidades

El polinomio podría ser divisible por alguno de estos binomios: (x - 1),(x + 1), (x -2), (x + 2),

(x + 3), (x - 3), (x + 6), (x - 6), (x + 1/2),(x - 1/2),(x + 3/2) ó (x - 3/2). Es decir $\left(x - \frac{k}{a}\right)$.

Recurriendo al teorema del resto verificamos cuál de los posibles cocientes $\frac{k}{a}$ hace cero al polinomio dado.

En este caso, una de ellas es -2, ya que:

P(-2) = $2.(-2)^3 - 3.(-2)^2 - 11.(-2) + 6 = -16 - 12 + 22 + 6 = 0$.

Paso 2: Es decir -2 es una raíz y por lo tanto, uno de los divisores del polinomio dado es x+2, resolvemos la división entre el polinomio dado y el divisor hallado usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ -2 & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

Cociente: $2x^2 - 7x + 3$ Resto: 0

Paso 3: escribir el factoreo

Entonces el polinomio dado puede expresarse como el producto entre el cociente obtenido y el divisor (x+2), resultando:

P(x)= $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (2x^2 - 7x + 3).(x + 2)$ (1)

Es probable que el polinomio obtenido como cociente, se pueda seguir factoreando, podemos repetir el procedimiento o si es un polinomio de segundo grado encontrar las raíces con la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, como veremos más adelante.

Paso 1: Ahora buscamos divisores del término independiente (3): *k* = 1, -1, 2, -2, 3, -3

Divisores del coeficiente principal (2): *a* = 1, -1, 2, -2

Las posibles raíces ahora del polinomio $2x^2 - 7x + 3$ son: $\frac{k}{a}$: 1, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2, -2, 3, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$

Observemos que no se generan posibles raíces nuevas, se puede trabajar con la lista anterior tachando las que ya no son posibles.

Es decir: 1, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2, -2, 3, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, ~~6, -6~~

Probamos hasta encontrar una raíz

C(1) = 2 -7+3 $\neq 0$, C(-1) = 2+7+3 $\neq 0$, $C\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7.\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0$ entonces $\frac{1}{2}$ es raíz

Paso 2: sabemos que $x - \frac{1}{2}$ es un divisor, realizamos la división para obtener el nuevo cociente

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -6 & 0 \end{array}$$

Entonces el factoreo de $2x^2 - 7x + 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right).(2x - 6)$

Volviendo a (1) teníamos que P(x)= $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (2x^2 - 7x + 3).(x + 2)$

Paso 3: Ahora resulta P(x)= $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$= $\left(x - \frac{1}{2}\right).(2x-6)(x+2)$

Notemos que el segundo paréntesis tiene al 2 como factor común

P(x)= $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$= $\left(x - \frac{1}{2}\right).2(x-3)(x+2)$

Reordenando P(x) = 2.$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)(x+2)$ que es la factorización completa del polinomio

Esto nos permite observar que además de las raíces -2 y $\frac{1}{2}$ que habíamos encontrado el polinomio tiene también al 3 como raíz. Si en nuestro procedimiento hubiéramos encontrado, primero, por ejemplo, la raíz 3, los pasos intermedios hubieran sido diferentes pero el factoreo final es el mismo. Puedes intentarlo!!

Ejemplo 5: Factorear **S(x) =** $x^4 + x^2 - 3x^3 - 5x + 6$

Paso 1: encontrar una raíz, otra vez usaremos el Teorema de Gauss

divisores del término independiente (6): *k* = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6

Divisores del coeficiente principal (1): *a* = 1, -1

Si el coeficiente principal vale 1, las posibles raíces del polinomio son los divisores, positivos y negativos, del término independiente. Las posibles raíces son 1,-1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

En este caso una de ellas es 3 ya que: $3^4 + 3^2 - 3.3^3 - 5.3 + 6 = 0$

Paso 2: El divisor entonces es: x-3. Resolvemos el cociente $(x^4 + x^2 - 3x^3 - 5x + 6):(x-3)$ usando Regla de Ruffini:

	1	-3	1	-5	6
3		3	0	3	-6
	1	0	1	-2	0

Paso 3: El factoreo queda expresado entonces: $x^4 + x^2 - 3x^3 - 5x + 6 = (x-3).(x^3 + x - 2)$

En este caso el segundo factor puede volver a factorearse por el mismo método:

Paso 1: no se agregan posibles raíces, de las anteriores tachamos las que ya no lo son: Las posibles raíces que quedan son 1,-1, 2, -2,~~3, -3, 6, -6.~~

1 es raíz, C(1) = 1+1-2=0 .

Paso 2: Nos queda entonces que el divisor es x-1

	1	0	1	-2
1		1	1	2
	1	1	2	0

Paso 3: $x^3 + x - 2 = (x^2 + x + 2).(x - 1)$

El factoreo ahora es : $x^4 + x^2 - 3x^3 - 5x + 6 = (x - 3).(x^3 + x - 2) = (x - 3).(x^2 + x + 2).(x - 1)$

Podemos intentar seguir factoreando el polinomio x^2 + x +2 veremos que no tiene raíces reales y entonces es primo.

Nota importante: en todos los casos si se aplica propiedad distributiva en la expresión factoreada y se agrupan términos semejantes se obtiene el polinomio del cual partimos.

Es decir, les recordamos una vez más que se trata de una igualdad entre dos miembros donde lo que pretendemos es expresar al polinomio dado como producto de factores primos.

Ejercicio 10

i) Factorear los siguientes polinomios:

$A(x) = 12x^3 - 36x^2$	$B(y) = 49y^2 - \frac{1}{25}$	$C(y) = \frac{25}{4}y^2 + 16 - 20y$
$D(y) = 64y^2 - 1$	$E(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 12$	$F(y) = \frac{25}{9}y^2 + 4 - \frac{20}{3}y$
$G(x) = 36x^2 - 25$	$H(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$	$I(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 24$
$J(x) = x^3 + 64$	$K(x) = x^5 - 32$	$L(x) = 25x^3 + 50x^5 - 75x^4$
$M(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x$	$N(x) = x^3 - 7x - 6$	$\tilde{N}(y) = y^2 - 121$
$O(h) = 2h^4 - 8h^3 + 3h^2 - 12h$	$P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$	$Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24$
$R(y) = 16y^4 - 1$	$S(x) = x^2 + 5x - 14$	$T(h) = 15h^3 - \frac{20}{7}h^2$
$U(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x$	$V(a) = a^4 + 36 - 12a^2$	$W(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{128}x$
$X(z) = z^4 - 2z^3 + z^2$	$Y(x) = x^3 - 14x^2 + 65x - 100$	$Z(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

ii) Encontrar, si es posible, los valores de m, h y p para que resulte P(x) = Q (x)

$P(x) = (mx - p)^2$ $\quad\quad$ $Q(x) = h\,x^2 - 24x + 9$ $\quad$ con $\quad$ $p > 0$

m= ___ p = _____ h = ______

iii) Encontrar, si es posible, los valores de a y b para que resulte P(x) = Q (x)

$$P = (5x + 4)(5x - a) \qquad\qquad Q = bx^2 - 16$$

a = ____ b = ____

iv) Resolver $\left(-3x+4\right)^2 - 9(x-3).(x+1)$

Al resultado obtenido denominarlo H(x), teniendo en cuenta esto, determinar el valor de “a”, si existe, para que H(x) = (a – 2).x + (a + 47)

v) Resolver $\left(-3x+\frac{1}{3}\right)^3 - 9(x-1).(x+\frac{1}{3}) =$

Al resultado obtenido denominarlo Q(x), teniendo en cuenta esto, indicar si la siguiente desigualdad es V ó F $Q(-1) > \left(\sqrt{5}+1\right)^2$

Nota importante: todos los casos de factoreo están explicados por dos docentes diferentes en video. Te aconsejamos que entres en nuestro canal de YouTube, y en la lista de reproducción del Módulo 2 los encontrarás. También figuran todos los links en la ficha de clase donde se trata el tema en la plataforma Miel Ingreso.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una expresión racional es un **cociente** entre dos polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con la condición que $Q(x) \neq 0$

Ejemplo:

La expresión racional $\dfrac{x+2}{2x-3}$ no está definida para $x = \dfrac{3}{2}$ ya que es el valor de la variable que anula el denominador. Es decir, esta expresión tiene sentido para $\Re - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Una expresión racional representa un número real cuando se le asignan valores a las variables, así la expresión $\dfrac{x+2}{2x-3}$ representa al número (-3) cuando *x* = 1, al número (-2/3) cuando

x = 0, al (12/17) cuando *x* = 10, etc.

Es posible aplicar las reglas de factorización ya estudiadas y además simplificar la expresión siempre que al especializar a la misma en un valor real no resulte una expresión indeterminada.

Ejemplo:

Simplifica $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$. Esta expresión tiene sentido para $\Re - \{1,-1\}$

Factorizamos el numerador y simplificamos: $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x+3}{x+1}$

Observa que esta cancelación sólo es posible si *x* – 1 es distinto de cero, es decir, si $x \neq 1$.

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Adición y sustracción

El algoritmo es el mismo que usamos para sumar o restar fracciones recordemos entonces el procedimiento:

Se multiplica $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{8+3}{20} = \dfrac{11}{20}$

Se divide

- Sacamos el común denominador que es el MCM entre los denominadores, en este caso resultó ser 20.
- Luego debemos obtener las fracciones equivalentes a las dadas con denominador 20, para ello hacemos el proceso indicado arriba de dividir los denominadores y al resultado obtenido multiplicarlo por los numeradores. Obteniendo de esta manera fracciones equivalentes a las dadas de denominador 20.

Veamos un ejemplo sencillo con letras: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b^3}=\frac{a.b^2+c}{b^3}$

Ahora desarrollaremos otros ejemplos:

Con el mismo denominador:

1) $\frac{x+7}{5}+\frac{2x-3}{5}-\frac{2x+1}{5}=$ Como las fracciones ya tienen un denominador común, directamente se suman o restan los numeradores, según se indique.

$=\frac{x+7+2x-3-(2x+1)}{5}=$ Se realizan los cálculos en el numerador, sumando o restando los términos semejantes.

$=\frac{3x+4-2x-1}{5}=\boxed{\frac{x+3}{5}}$ Como la fracción obtenida es irreducible, es el resultado final.

2) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x-5}{x+1}-\frac{3x+5}{x+1}=\frac{x+2x-5-(3x+5)}{x+1}=\frac{3x-5-3x-5}{x+1}=\boxed{\frac{-10}{x+1}}$

Con denominadores diferentes:

En este caso hay que conseguir fracciones equivalentes a las dadas, que posean el mismo denominador.

1) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=$ Se busca el común denominador que es el MCM entre ellos.

Los denominadores deben ser factoreados y el MCM se obtiene multiplicando todos los factores, comunes o no, con el mayor exponente.
En este caso, *x+2* y *x-2* ya están factoreados, entonces el MCM es (x +2) (x-2), es decir:

$$\frac{\qquad\qquad}{(x+2).(x-2)}$$

Para completar el numerador, se divide el denominador común por cada denominador y el resultado se lo multiplica por el numerador correspondiente (Obteniendo así fracciones equivalentes a las dadas).

$\frac{(x-2).(x-2)-(x+2).(x+2)}{(x+2).(x-2)}$ Luego se realizan las multiplicaciones en el numerador

$$=\frac{x^2-4x+4-\left(x^2+4x+4\right)}{(x+2).(x-2)}=$$ se suman o restan los términos semejantes.

$$=\frac{x^2-4x+4-x^2-4x-4}{(x+2).(x-2)}=\frac{-8x}{(x+2).(x-2)}$$ Decidimos ahora si es posible simplificar factores. En este caso no es posible.

Por último, realizamos las operaciones pendientes en el denominador. $=\boxed{\dfrac{-8x}{x^2-4}}$

2) $\dfrac{4x}{x+1}+\dfrac{x+6}{x^2-1}=$

Comenzamos factoreando los denominadores. $=\dfrac{4x}{x+1}+\dfrac{x+6}{(x+1).(x-1)}=$

Buscamos el común denominador (MCM), lo dividimos por cada denominador y multiplicamos por el numerador correspondiente. $=\dfrac{4x.(x-1)+x+6}{(x+1).(x-1)}=$

Aplicamos propiedad distributiva para multiplicar en el numerador. $=\dfrac{4x^2-4x+x+6}{(x+1).(x-1)}=$

Y sumamos términos semejantes: $=\dfrac{4x^2-3x+6}{(x+1).(x-1)}=$

Ahora decidimos si es posible simplificar, para ello podemos probar si las raíces del denominador son raíces del numerador.

- si alguna es raíz, factoreamos el numerador (ya tenemos una raíz) y simplificamos.
- si ninguna es raíz, significa que no se puede simplificar, salvo quizá algún coeficiente.

En este caso $N(-1)=4.\left(-1\right)^2-3.\left(-1\right)+6\neq 0$ y $N(1)=4.1^2-3.1+6\neq 0$ ninguna de las raíces del denominador es raíz del numerador, entonces no es posible simplificar.

Para terminar, realizamos la multiplicación del denominador: $=\boxed{\dfrac{4x^2-3x+6}{x^2-1}}$

Multiplicación y división

Recordemos los algoritmos de multiplicaciones y división de fracciones:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{3}{2}$$

Primero simplificamos numeradores con denominadores.

Luego multiplicamos numeradores y denominadores entre sí.

En el caso de las expresiones racionales primero debemos tener en cuenta que sólo pueden simplificarse factores, por eso el proceso requiere como paso previo a la simplificación el factoreo de los numeradores y denominadores:

$$\frac{x-2}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x+2}).(\cancel{x-2})}\cdot\frac{\cancel{x+2}}{x}=\frac{1}{x}$$

El proceso de la división es similar, es posible transformarla en una multiplicación, invirtiendo la segunda fracción (el divisor).

$$\frac{\dfrac{x^2-9}{x^2+5x+4}}{\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-1}}=\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+6x+9}$$

Factoreamos todos los numeradores y denominadores: $=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x+1)}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}=$

Simplificamos factores iguales: $=\dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x+4)\cancel{(x+1)}}\cdot\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+3)^{\cancel{2}}}=$

Resulta: $=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x+4)(x+3)}=$

Realizamos las multiplicaciones: $=\boxed{\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+7x+12}}$

Ejercicio 11

Indicar para qué valores reales las siguientes expresiones racionales están definidas y simplificarlas

a) $\dfrac{4x^2+1-4x}{4x^2-1}=$ b) $\dfrac{x^2-x-6}{4x^3-12x^2}=$ c) $\dfrac{6x^2+4x}{3x^3+2x^2+3x+2}=$ d) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}=$

Ejercicio 12

Resolver las siguientes operaciones, indicando para qué valores está definida cada una.

$a)\ \frac{2x}{x^2-1}-\frac{x+3}{x-1}+\frac{1-2x}{x+1}=$ $\qquad b)\ \frac{2x-1}{x^2-1}:\frac{4x-2}{x-1}=$ $\qquad c)\ \frac{a-1}{6a}.\frac{2a^2+2a+2}{a^3-1}=$

d) $\frac{x-2}{x^2-3x-4}-\frac{x-2}{x^2+x}+\frac{3}{4x}=$ $\qquad$ e) $\frac{3y^4}{9y}.\frac{15y^2}{20y^3}=$ $\qquad$ f) $\frac{x^2+6x+8}{x^4-2x^3-8x^2}:\frac{x^2-16}{20x^3-80x^2}=$

g) $\frac{x^2+4x+4}{3x^2+6x+12}\cdot\frac{x^3-8}{x^2-4}=$ $\qquad$ h) $\frac{-7y+3}{y^2+16-8y}-1+\frac{y-2}{y-4}=$

$i)\ \frac{-9x+4}{x^2-4}:\frac{-18x+8}{4-x^2}=$ $\qquad j)\ \frac{x^2+2x}{3x^4+12x^2}.\frac{x^4-16}{x^2+4+4x}.\frac{6x}{x-2}=$

k) $\frac{3x-1}{x^2+2x-3}-\frac{x+4}{x^2-9}=$ $\qquad$ l) $\frac{2}{y+3}-\frac{y}{y-1}+\frac{y^2+2}{y^2+2y-3}=$

m) $\frac{\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}}{\frac{2x-10}{6x}}=$ $\qquad$ n) $\frac{\frac{8x^3}{x+1}}{\frac{4x}{(x+1)^3}}=$ $\qquad$ ñ) $\frac{3y-12}{y^2-7y+12}+\frac{y-2}{2y-6}=$

Estos videos les pueden resultar útiles para complementar las clases sobre este tema

- Simplificación de Expresiones algebraicas racionales https://youtu.be/TRZVXFlzX-k
- Ejemplo de resta de expresiones algebraicas racionales

https://youtu.be/AbXzQW3diCw

- Multiplicación de expresiones algebraicas racionales

  https://youtu.be/6tx67OM29Jw

- División de expresiones algebraicas racionales https://youtu.be/sOrinGqnOs8
- Otro ejemplo de división https://youtu.be/rak5p_HYlpY

Este módulo se completa con algunas operaciones con radicales. Figurarán en Miel

MÓDULO 3
ECUACIONES

DEFINICIÓN Y GENERALIDADES

Una ***ecuación*** es la igualdad entre dos expresiones algebraicas. Cada una de las dos expresiones se llama *miembro*.

$$3x^4 + 4x - x^3 = 7x^2 - \sqrt{2}$$

Una ecuación puede ser:

- **Verdadera para determinados valores de la variable** para la cual está definida:

  $$3x + 5 = 2x - 6$$

  Es verdadera sólo si *x* = -11, decimos que ésta es la *solución* de la ecuación.

- **Verdadera para todos los valores de la variable** para los que está definida: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. En este caso estamos en presencia de una **identidad**.

- **Falsa para todos los valores de la variable** para los que está definida: $3x + 1 = 5x + 3 - 2x$. En este caso estamos en presencia de una **contradicción**.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama ***conjunto solución.***

Una vez encontradas todas las soluciones de la ecuación decimos que la hemos *resuelto.*

Una manera de resolver una ecuación es transformarla en una **ecuación equivalente** más simple. Para ello podemos recurrir a cualquiera de las siguientes operaciones:

- Sumar o restar en ambos miembros de la ecuación una misma expresión algebraica,
- Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por una misma expresión algebraica, siempre y cuando esta expresión no sea cero.
- Agrupar los términos semejantes en un mismo miembro.
- Reemplazar un miembro, o ambos, por una identidad.

Ejemplo: Dividimos ambos miembros por $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}y+5=8 \qquad \frac{2}{3}y+5-5=8-5 \qquad \frac{2}{3}y=3 \qquad \frac{\frac{2}{3}y}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{\frac{2}{3}} \qquad y=\frac{9}{2}$$

Restamos 5 en ambos miembros. Resolvemos operaciones. Resolvemos cálculos

ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE

Son ecuaciones que se pueden expresar como $ax+b=0 \quad si \quad a\neq 0$.

Se trata de polinomios de primer grado, donde *a* y *b* son números reales, *x* es la variable.

Ejemplo 1

$$3x+28=42$$
$$3x=42-28$$
$$x=14:3$$
$$x=\frac{14}{3}$$

Primero restamos 28 en ambos miembros y luego dividimos por 3. Por una cuestión de practicidad no anotamos cada uno de los pasos descriptos. En este caso el conjunto solución es:

S= $\left\{\frac{14}{3}\right\}$

Ejemplo 2:

$$3.(x-4)-6=\frac{1}{2}x-5$$

Aplicamos propiedad distributiva

$$3x-12-6=\frac{1}{2}x-5$$

En ambos miembros sumamos 12 y 6 y restamos 1/2x

$$3x-\frac{1}{2}x=-5+18$$

Agrupamos las "x" realizando la operación indicada.

$$\frac{5}{2}x=13$$

En ambos miembros multiplicamos por 2/5

$$x=13.\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{26}{5}$$

S= $\left\{\frac{26}{5}\right\}$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Para resolver ecuaciones con valor absoluto es necesario recordar que: un número real y su opuesto tienen el mismo módulo o valor absoluto. Entonces,

Si $|\Delta| = a \quad (a > 0)$ entonces $\Delta = a \quad \vee \quad \Delta = -a$

Si $|\Delta| = 0$ entonces $\Delta = 0$

Ejemplo 3

$$|x+6| - 4 = 7$$
$$|x+6| = 7 + 4$$
$$|x+6| = 11 \Rightarrow x + 6 = 11 \vee x + 6 = -11$$

$$x + 6 = 11 \Rightarrow x = 11 - 6 \Rightarrow x = 5$$
$$x + 6 = -11 \Rightarrow x = -11 - 6 \Rightarrow x = -17$$

S={5, -17}

En todos los casos se puede hacer la verificación del resultado obtenido reemplazando en la ecuación original a la variable y resolviendo los cálculos correspondientes.

Ejemplo 4

$$-5.|3x-1| = -20$$
$$|3x-1| = -20 : (-5)$$
$$|3x-1| = 4 \quad \Rightarrow \quad 3x - 1 = 4 \quad \vee \quad 3x - 1 = -4$$

$$3x - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4+1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$
$$3x - 1 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4+1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

S= $\left\{ \frac{5}{3}; -1 \right\}$

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Existen muchas formas de resolver este tipo de ecuaciones, pero cualquiera sea la que se elija, **primero siempre, debe determinarse** cuáles son los valores que la incógnita no puede valer. Estos valores son los que anulan los denominadores. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5

$$\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x-2}=\frac{2x-4}{x^2-x-2}$$

Para poder determinar que valores anulan los denominadores conviene factorearlos:

$$\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x-2}=\frac{2x-4}{(x+1)(x-2)}$$

Es decir los valores que anulan los denominadores son -1 y 2. Concluimos que la ecuación está definida si $x \neq -1 \wedge x \neq 2$.

Ahora procedemos a resolverla, para ello es más cómodo igualar a cero, es decir, en ambos miembros restamos: $\frac{2x-4}{(x+1)(x-2)}$. Nos queda entonces:

$$\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x-2}-\frac{2x-4}{(x+1)(x-2)}=0$$

Vamos a resolver la suma algebraica del primer miembro como ya lo hemos visto en el capítulo anterior:

$$\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x-2}-\frac{2x-4}{(x+1)(x-2)}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3.(x-2)-5.(x+1)-(2x-4)}{(x+1).(x-2)}=0$$

Multiplicamos ambos miembros por (x+1).(x-2) ya que no es cero por la condición que establecimos. Además, resolvemos las multiplicaciones que aparecen en el numerador. Nos queda entonces:

$$3x-6-5x-5-2x+4=0$$

$$-4x-7=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=-\frac{7}{4}$$

Verificamos: $\frac{3}{-\frac{7}{4}+1}-\frac{5}{-\frac{7}{4}-2}=\frac{2(-\frac{7}{4})-4}{\left(-\frac{7}{4}\right)^2-\left(-\frac{7}{4}\right)-2} \qquad \to \qquad -\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$

El conjunto solución es: $S=\left\{-\frac{7}{4}\right\}$

Ejercicio 1

Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuáles son los valores que le dan sentido a la misma cuando corresponda.

a) $\dfrac{8x-1}{5}=\dfrac{2x+3}{3}$

b) $\dfrac{x}{4}-x=-3+4.(x-1)$

c) (x-5) .4=-10 (x+6) - 5x

d) $\dfrac{x+6}{-2}+5x=-3$

e) $|4x-1|-\dfrac{1}{2}=5$

f) $-6.\left|x+\dfrac{1}{3}\right|=-16$

g) $-6.|x+2|=12$

h) $\dfrac{x}{x^3-27}+\dfrac{x+2}{2x^2+6x+18}=\dfrac{2}{4x-12}$

i) $\dfrac{x}{x^3+8}+\dfrac{1}{3x+6}=\dfrac{2x-6}{6x^2-12x+24}$

j) $\dfrac{x+4}{x^3-x^2+3x-3}+\dfrac{2x+1}{2x^2+6}=\dfrac{1}{x-1}$ Explicado en https://youtu.be/WLdaI3Phqb4

k) $\dfrac{x+2}{9x^2-1}+\dfrac{2x+1}{9x^2+1-6x}=\dfrac{1}{3x+1}$

l) $\dfrac{-2x+1}{x^2+2x-15}+\dfrac{x+1}{2x+10}=\dfrac{2x-3}{4x-12}$

Ejercicio 2

a) Encuentra el error:

$$\begin{aligned}
&x=-1\\
&x+x^2=-1+x^2\\
&x(1+x)=(x-1)(x+1)\\
&x=x-1\\
&0=-1
\end{aligned}$$

b) Indicar cuál de las siguientes expresiones son ecuaciones y resolver aquellas que lo son:

b-1) $\frac{3}{x-2}+\frac{4x}{x-2}=0$ b-2) $\frac{3}{x-2}+\frac{4x}{x-2}=$ b-3) $\frac{3}{x-2}+\frac{4x}{x-2}=\frac{4x^2}{(x-2)^2}$

Ejercicio 3

Despeja “r” en:

$a)\quad C = 2\pi r$

$b)\quad I = C.r.t$

$c)\quad S = 2\pi r h$

$d)\quad A = C + C r t$

$e)\quad S = \frac{a}{1-r}$

$f)\quad S = \frac{a-rl}{1-r}$

Ejercicio 4 Problemas

a) ¿Qué edad tiene Fernando si el doble de la edad que tendrá dentro de 10 años supera a su edad actual en 35 años?

b) ¿Qué número hay que sumar al numerador y al denominador de $\frac{1}{2}$ para obtener una fracción equivalente a $\frac{5}{4}$?

c) El lunes Juan compró 5 discos para la computadora. Dos días después el precio de ellos se redujo en 50 centavos de dólares por disco. María compró 10 discos en la oferta y pagó US$9 más que Juan. ¿Cuál era el precio original de cada cd en dicha moneda?

d) La suma de tres números consecutivos es 66 ¿Cuáles son estos tres números?

e) Divide el número 18 en tres partes, sabiendo que la primera es igual al triple de la segunda y la tercera es igual a la cuarta parte de la diferencia de las dos primeras ¿Cuál es el valor de cada una de esas partes?

f) Compré una cierta cantidad de libros que conseguí de oferta a $500 c/u, me recargaron $120 al total de mi compra por usar tarjeta de crédito y gasté en total $3620 ¿Cuántos libros compré en total?

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

Son ecuaciones que se pueden expresar como $ax^2 + bx + c = 0 \quad si \quad a \neq 0$.

El primer miembro es un polinomio de segundo grado, donde *a*, *b* y *c* son números reales, *x* es la variable.

Para resolver ecuaciones cuadráticas se puede aplicar la "fórmula cuadrática".

Recordemos que *resolver* significa hallar las raíces o soluciones de la ecuación.

Por tratarse de una ecuación de 2º grado obtendremos siempre dos raíces.

Fórmula cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas raíces pueden ser: a) reales y distintas, b) reales e iguales, c) complejas conjugadas, dependiendo esto del valor que toma la expresión que está bajo el signo radical ($b^2 - 4ac$) y que se denomina **DISCRIMINANTE**.

Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales y distintas

Si $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son reales e iguales (se las denomina raíces dobles)

Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas y conjugadas

Ejemplo 1:

Resuelve $x^2 + 2x - 3 = 0$ *a* = 1 , *b* = 2 , *c* = -3

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -3 \qquad x_1 \neq x_2 \ \ raíces\, reales\ y\ diferentes$$

Ejemplo 2:

Resuelve: $9x^2 - 12x + 4 = 0 \qquad a = 9 \quad , \quad b = -12 \quad , \quad c = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.9.4}}{2.9} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18}$$

$$x_1 = \tfrac{2}{3} \quad , \quad x_2 = \tfrac{2}{3} \qquad x_1 = x_2 \ \ raíz\ doble$$

Ejemplo 3:

Resuelve: $x^2+5x+8=0$ $\quad a=1 \quad , \quad b=5 \quad , \quad c=8$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.1.8}}{2.1}=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{2}$$

$$x_1=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2} \qquad x_2=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2} \qquad raíces \quad complejas \quad conjugadas$$

Ejercicio 5

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$a)\quad 3x^2-5x-2=0$

$b)\quad (2x+1)^2=1$

$c)\quad x(x-1)-x(2x+1)=2(1+x)-5$

$d)\quad \dfrac{x-1}{x^2-9}-\dfrac{3x+5}{x+3}=\dfrac{x+3}{x-3}$

$e)\quad -x^2+3x=6+x$

$f)\quad 4x^2-5x=0$

$g)\quad x.(x-6)+5x=2x^2+1$

$h)\quad -x^2+5=0$

En el siguiente video se resuelven ejemplos similares a estos https://youtu.be/meOjMjyaoM

Propiedades de las raíces

Suma y Producto de raíces de ecuaciones cuadráticas

Sea la ecuación $\qquad ax^2+bx+c=0 \qquad$ (1)

Sus raíces están dadas por: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

+

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sumamos miembro a miembro: $x_1+x_2=2\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad$ (2)

Multiplicamos miembro a miembro:

$$x_1.x_2=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}\qquad(3)$$

Vemos que la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática se puede obtener como:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

Verifica estas propiedades con las raíces de la ecuación del **Ejemplo 1**

Por otro lado, podemos escribir una ecuación equivalente a la (1) si dividimos ambos miembros por *a*:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\qquad(4)$$

Si observamos (2), (3) y (4) vemos que el coeficiente del término lineal es el inverso aditivo (opuesto) de la suma de las raíces, y el término independiente es igual al producto de las raíces.

Ejemplo 1:

Encuentra la suma y el producto de las raíces de la ecuación: $2x^2-6x+5=0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{2}=3$$

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$$

Ejemplo 2:

Encuentra una ecuación cuadrática para la cual la suma de las raíces es $-\frac{4}{5}$ y el producto es $\frac{2}{3}$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{5}$$

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

$$x^2-(-\tfrac{4}{5})\,x+\tfrac{2}{3}=0\;\rightarrow\;x^2+\tfrac{4}{5}\,x+\tfrac{2}{3}=0\;\rightarrow\;\underline{15x^2+12x+10=0}$$

Estas propiedades nos permiten también **reconstruir la ecuación**:

Ejemplo 3:

Encuentra una ecuación cuadrática cuyas raíces son 3 y $-\frac{2}{5}$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = 3.\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

$$x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{6}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{5x^2 - 13x - 6 = 0}$$

Forma factoreada de la ecuación cuadrática

El objetivo es escribir una ecuación cuadrática si se conocen sus raíces. Para ello utilizamos el principio de la igualdad de un producto con "0" (cero), si *a* y *b* son dos números reales, el producto *a.b* es cero si *a* es cero ó *b* es cero.

Ejemplo:

Escribe una ecuación cuadrática cuyas raíces sean -3 y 4:

$$x = -3 \quad o \quad x = 4 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \quad o \quad x - 4 = 0$$

Multiplicando resulta: $(x+3)\cdot(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 12 = 0$

Hemos considerado *a* = 1 podemos obtener otras ecuaciones equivalentes a ésta multiplicando ambos miembros por un mismo número real distinto de cero, por ejemplo, si multiplicamos por -2 ambos miembros obtenemos:

$-2x^2 + 2x + 24 = 0$ Esta ecuación tiene las mismas soluciones que la anterior x= -3 y x= 4, es equivalente a ella.

Ejercicio 6

Reconstruye la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con *a* = 1, sabiendo que sus raíces son:

$a)\ x_1 = -6 \quad ; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$b)\ x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = -\frac{3}{5}$

$c)\ x_1 = 1 - \sqrt{3} \ ; \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}$

$d)\ x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 8$

En el siguiente video se resuelven ejemplos similares a estos
https://youtu.be/CN2PrXJ_Cwc

Ejercicio 7

Determina en cada caso el valor que debe tener *m* para que la ecuación:

$a)\ \ 2x^2 + \frac{1}{2}x + m = 0$ tenga una raíz doble.

$b)\ \ x^2 + x + m = 1$ tenga una raíz nula.

$c)\ \ x^2 - 8x + m = 0$ tenga una raíz igual al triple de la otra.

$d)\ \ -x^2 + 3x + m = 0$ tenga una raíz 4 unidades mayor a la otra.

Ejercicio 8

Determina el valor de **k** para que la ecuación:

$a)\quad 4x^2 + kx + 6 = 0 \qquad tenga\ \ una\ \ raíz\ \ igual\ \ a\ \ -2$

$b)\quad 3x^2 + kx - 2 = 0 \qquad tenga\ \ raíces\ \ cuya\ \ suma\ \ sea\ \ 6$

$c)\quad 2x^2 + (4-k)x - 17 = 0 \qquad tenga\ \ raíces\ \ iguales\ \ en\ \ valor\ \ absoluto\ pero\ \ de\ \ signo\ \ contrario$

$d)\quad (k+2)x^2 + 5x + 2k = 0 \qquad tenga\ \ raíces\ \ cuyo\ \ producto\ \ sea\ \ 2/3$

Ejercicio 9

Dada la ecuación $18x^2 - 12kx + (6k-2) = 0$, determinar el valor de ***k*** para que:

a) sus raíces sean iguales:
b) sus raíces sean opuestas:
c) sus raíces sean recíprocas:
d) una de sus raíces sea nula.

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/rwKi89CeDfo

Ejercicio 10 Problemas

a) La suma del cuadrado de un número entero y el cuadrado del doble del consecutivo es 232 ¿Cuál es el número?

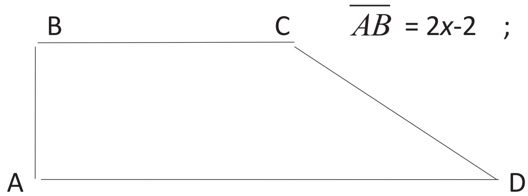
b) Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es 168 cm^2, sabiendo que la diferencia entre la base y la altura es 2 cm.

c) La base de un rectángulo es 3 cm. más larga que su altura. Si el área del rectángulo es 180 cm^2, halla la base y la altura

d) Un jardín rectangular tiene un perímetro de 76 metros y un área de 360 metros cuadrados. Halla las dimensiones del jardín

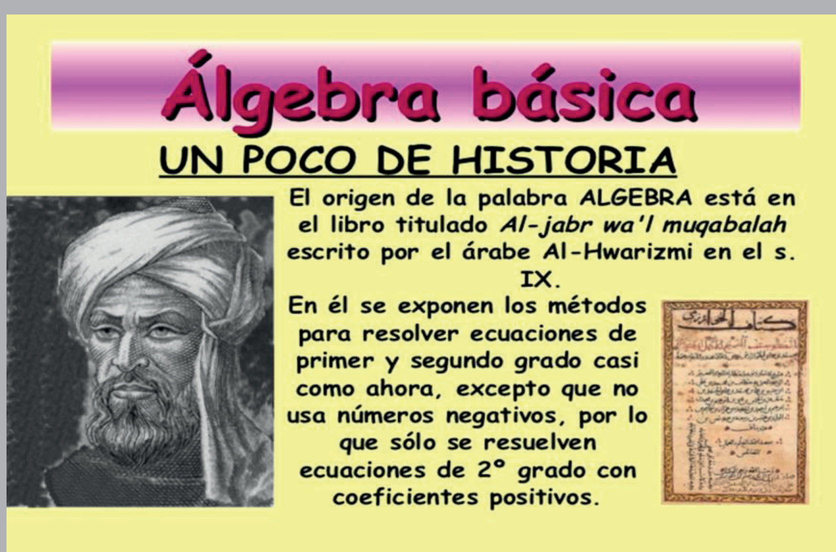
e) El producto de dos números es 1 más que tres veces su suma. Halla los números si su diferencia es 9.

f) El área del trapecio rectángulo ABCD es 34. Calcula el perímetro.



$\overline{AB} = 2x-2$; $\overline{CB} = 3x-2$; $\overline{AD} = 2x+4$

Nota histórica



Fuente: https://goo.gl/qUQHPZ

MÓDULO 4
INECUACIONES

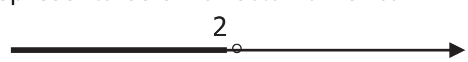
Hasta aquí nos dedicamos a resolver ecuaciones, sin embargo, muchas veces los problemas a resolver se presentan como desigualdades:

Ejemplo 1: $2x+3<7$

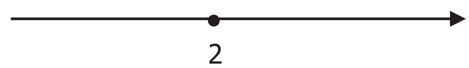
Resolver una desigualdad significa encontrar todos los valores de *x* para los cuales es verdadera la desigualdad.

A esta desigualdad se la denomina **Inecuación**.

Cuando resolvemos una inecuación el resultado obtenido se llama **conjunto solución** y puede expresarse como intervalo o unión de intervalos y representarse en la recta numérica.



$$2x+3<7 \rightarrow x<2 \;\; inecuación \; (desigualdad)$$
$$2x+3=7 \rightarrow x=2 \;\; ecuación \; (igualdad)$$



Una desigualdad puede ser:

- **condicional**, cuando es válida para determinados valores y falsa para otros.
- **absoluta**, cuando es válida para todos los números reales,
- **contradictoria**, cuando es falsa para todos los números reales.

> Para resolver una inecuación se procede de manera semejante a como hicimos para resolver una ecuación. El objetivo será dejar de un lado de la desigualdad a la incógnita, y para ello trabajamos con desigualdades equivalentes.

Recordemos algunas propiedades de las desigualdades:

- Si *a* y *b* son dos números reales, sólo una de las expresiones siguientes es verdadera:

  a = b ó a > b ó a < b
- Si a < b y b < c entonces a < c
- Si sumamos a ambos miembros de una desigualdad un mismo número, el sentido de la desigualdad se mantiene: si a < b entonces a + c < b + c
- Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número (distinto de cero) , la desigualdad se mantiene si el número es positivo, y cambia si el número es negativo

Si a < b entonces a .c < b .c si c > 0

a .c > b .c si c < 0

Mostraremos ejemplos de diferentes tipos de inecuaciones, para resolverlas se requiere aplicar propiedades de las desigualdades, operaciones y del valor absoluto.

¿Cómo procedemos para resolver la inecuación del Ejemplo 1?

$$2x+3<7$$

Restamos "3" en ambos miembros: $2x + 3 - 3 < 7 - 3$

Simplificamos $2x < 4$

Dividimos ambos miembros por "2" $\frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$

Simplificamos $x < 2$

El conjunto solución es : S = $(-\infty;2)$,

Gráficamente:

Ejemplo 2: $3x-4 \leq 7x+5$

Sumamos "4" en ambos miembros: $3x-4+4 \leq 7x+5+4$

Simplificamos $3x \leq 7x+9$

Restamos "7x" en ambos miembros: $3x-7x \leq 7x+9-7x$

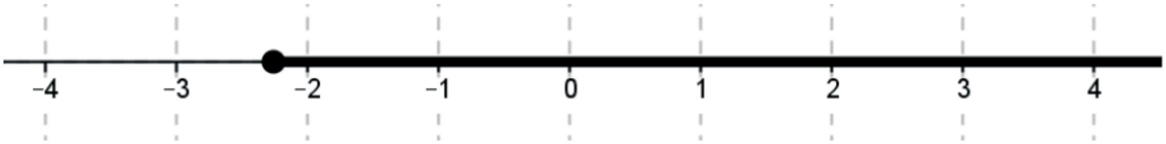
Simplificamos $-4x \leq 9$

Dividimos ambos miembros por "- 4" $\frac{-4x}{-4} \geq \frac{9}{-4}$ (cambia el sentido de la desigualdad)

Simplificamos $x \geq -\frac{9}{4}$

El conjunto solución es : S = $\left[-\frac{9}{4};\infty\right)$,

Gráficamente:



Ejemplo 3: $-4 < 2x+1 \leq 5$

Un número real *x* es solución de esta desigualdad si y sólo si es solución de la desigualdad - 4< 2*x* + 1 y de $2x+1 \leq 5$

Resolvemos la 1ª desigualdad

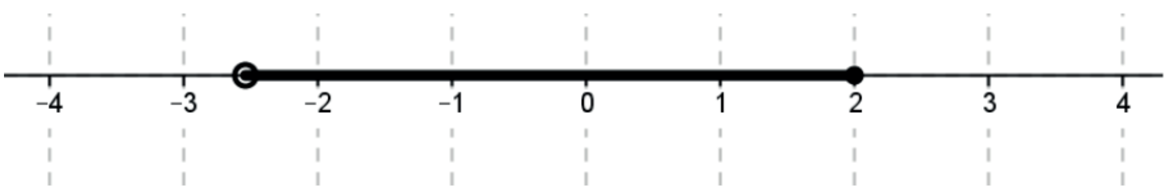
$$-4 < 2x+1 \quad \rightarrow \quad -4-1 < 2x+1-1 \quad \rightarrow \quad -5 < 2x$$
$$\rightarrow \frac{-5}{2} < \frac{2x}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{2} < x \quad \rightarrow \quad x > -\frac{5}{2}$$

Resolvemos la 2ª desigualdad

$$2x+1 \leq 5 \quad \rightarrow \quad 2x+1-1 \leq 5-1 \quad \rightarrow \quad 2x \leq 4$$
$$\rightarrow \quad \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad x \leq 2$$

Por lo tanto, las soluciones son todas aquellos valores de *x* que son mayores que $-\frac{5}{2}$ y menores o iguales que 2; la solución expresada en forma de intervalo es: S = $\left(-\frac{5}{2}; 2\right]$, y expresada como conjunto es S = $\left\{x \in \Re / -\frac{5}{2} < x \leq 2\right\}$

Gráficamente:



También se puede resolver trabajando simultáneamente ambas desigualdades, recuerda que la idea es aislar *x*:

$$-4 < 2x+1 \leq 5 \quad \rightarrow \quad -4-1 < 2x+1-1 \leq 5-1 \quad \rightarrow \quad -5 < 2x \leq 4$$
$$\rightarrow \quad \frac{-5}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{2} < x \leq 2$$

Ejemplo 4: $\frac{2}{x-3} > 0$

Un cociente es positivo cuando el numerador y el denominador tienen el mismo signo.

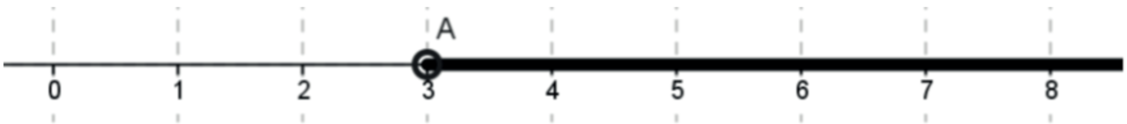
En este caso el numerador es siempre positivo, en tanto que el denominador es positivo para los valores de x mayores que 3.

$x-3>0 \quad \Rightarrow \quad x>3$

Este es entonces el conjunto solución para este ejemplo:

S = (3; ∞), ó S = $\{x \in \Re / x > 3\}$

Gráficamente:



Ejemplo 5: $\dfrac{x-3}{x+2} \geq 0$

Esta inecuación es un cociente entre dos expresiones algebraicas, para determinar el conjunto solución analizamos el signo del numerador, el del denominador y aplicamos la regla de los signos.

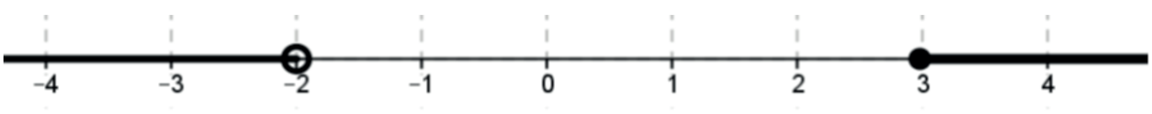
Podemos resumir esto haciendo una tabla de signos:

Nota que los intervalos analizados están limitados por aquellos números que son raíces del numerador o del denominador

	$(-\infty;-2)$	-2	(-2;3)	3	$(3;+\infty)$
x - 3	-	-	-	0	+
x + 2	-	0	+	+	+
$\dfrac{x-3}{x+2}$	+	no $\exists$	-	0	+

S = $(-\infty;-2) \cup [3;+\infty)$ o S = $\{x \in \Re / x < -2 \quad \vee \quad x \geq 3\}$

Gráficamente:



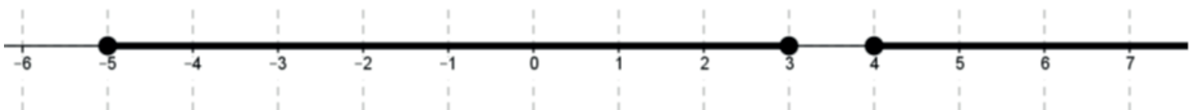
Ejemplo 6: $(x+5)\cdot(x-3)\cdot(4-x) \leq 0$

Esta inecuación está expresada como un producto entre tres factores, para resolverla analizamos el signo de cada uno de los factores que intervienen:

	$(-\infty;-5)$	-5	(-5;3)	3	(3;4)	4	$(4;+\infty)$
$x+5$	-	0	+	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+	+	+
$4-x$	+	+	+	+	+	0	-
$(x+5)\cdot(x-3)\cdot(4-x)$	+	0	-	0	+	0	-

S = $[-5;3]\cup[4;+\infty)$ o S = $\{x \in \Re / -5 \le x \le 3 \quad \vee \quad x \ge 4\}$

Gráficamente:



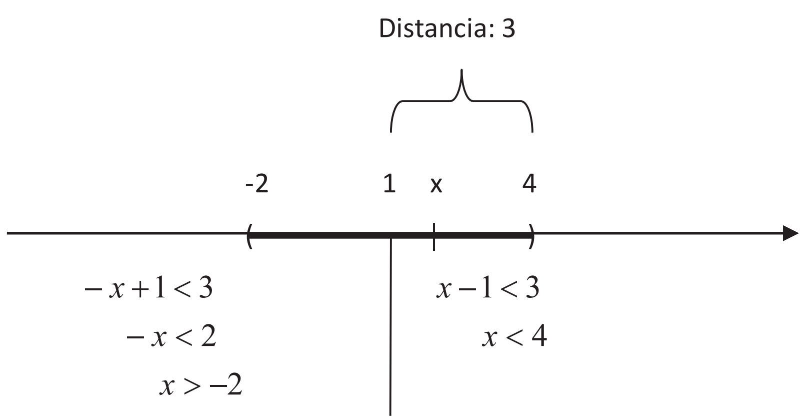
Ejemplo 7: $|x-1| < 3$

En esta inecuación aparece el valor absoluto. Aplicamos las propiedades del módulo explicitadas en la unidad 1:

$$|x-1| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x-1 < 3$$
$$-3+1 < x-1+1 < 3+1 \quad \rightarrow \quad -2 < x < 4$$

S = (-2;4) o S = $\{x \in \Re / -2 < x < 4\}$

Geométricamente: son todas las *x* cuya distancia al “1” es menor que “3”



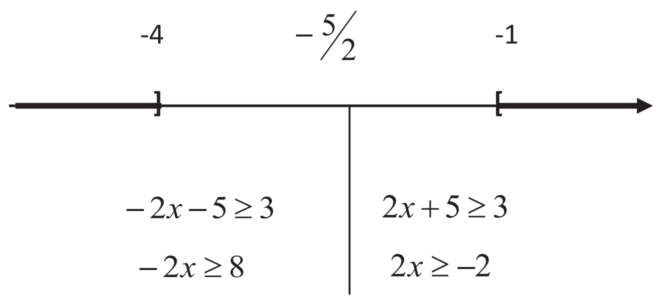
Ejemplo 8: $|2x+5| \ge 3$

Para resolverla nuevamente aplicamos propiedades del valor absoluto explicitadas en la Unidad 1

$$
\begin{array}{lllll}
|2x+5| \ge 3 & \Leftrightarrow & 2x+5 \ge 3 & \vee & -2x-5 \ge 3 \\
 & & 2x+5-5 \ge 3-5 & \vee & -2x-5+5 \ge 3+5 \\
 & & 2x \ge -2 & \vee & -2x \ge 8 \\
 & & x \ge -1 & \vee & x \le -4
\end{array}
$$

El conjunto solución es: $S = (-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$ *ó* $S = \{x \in \Re / \ x \le -4 \vee x \ge -1\}$

Geométricamente: son todas las x cuya distancia a $-5/2$ es mayor o igual que "3/2"



$$
\begin{array}{l|l}
-2x-5 \ge 3 & 2x+5 \ge 3 \\
-2x \ge 8 & 2x \ge -2 \\
x \le -4 & x \ge -1
\end{array}
$$

Ejemplo 9: $x^3 + 3x^2 - 13x < 15$

En este caso, a diferencia del ejemplo 6, en el que la inecuación se presenta como un producto de factores y en el segundo miembro existe un cero, acá no sucede. Entonces, en primer lugar, nos conviene expresarla así: $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 < 0$

Ahora factoreamos el polinomio del primer miembro y luego procedemos, como en el ejemplo 6, analizando el signo del producto que nos queda.

Factoreamos aplicando uno de los métodos explicados anteriormente (sugerimos que piensen cuál es y cómo se aplica)

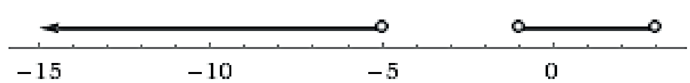
Resulta entonces:

(x-3).(x+5).(x+1)<0

Realizando un análisis similar al realizado en el ejemplo 6 se llega a la siguiente solución:

S = $(-\infty; -5) \cup (-1; 3)$ o S = $\{x \in \Re / x < -5 \quad \vee \quad -1 < x < 3\}$

Gráficamente:



Ejercicio 1

Resolver las siguientes inecuaciones, expresar el conjunto solución como intervalo o unión de intervalos y graficar

$a)\quad -2 \le x+3 \le 3$

$b)\quad -3 \ge x+1 \ge -5$

$c)\quad -1 \le 2-x \le 4$

$d)\quad x(x-3) > 0$

$e)\quad x(x+1) < 0$

$f)\quad |x| \ge 2$

$g)\quad |x| < -7$

$h)\quad |x| < 4$

$i)\quad |x-3| < 5$

$j)\quad |x+2| \ge 4$

$k)\quad |x| > -1$

$l)\quad |2x-6| + 8 < 20$

$m)\quad -3.|x+5| \ge -\frac{1}{6}$

$n)\ 5.|5-x|-4<26$

$\tilde{n})\ (x-1)^2+6>18$

$o)\ x^2-6<3$

$p)\ -4.(x-3)^2 \leq -25$

$q)\ \dfrac{(x+5).(x-1)}{-2}<0$

$r)\ -x^2+2x+3>0$

$s)\ 3(x-2)(x-3)(x+7)>0$

$t)\ x^3-3x^2-6x+8<0$

$u)\ \sqrt{(x-2)^2} \geq 3$

$v)\ \left|\dfrac{2x+3}{-3}\right|>\sqrt{2}$

Ejercicio 2

Expresa el enunciado en términos de una desigualdad usando valor absoluto:

a) El peso de una caja no puede variar más de 2 Kg. si su peso es de 30 Kg.

b) El radio de un rulemán no puede variar más de 0,01 cm. de 1 cm.

c) La diferencia de dos temperaturas T_1 y T_2 de una mezcla química tiene que estar entre 5º *C* y 10º *C*.

Ejercicio 3

Problemas

1) Usa la relación $C = \frac{5}{9}(F-32)$ para determinar:

a) El intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a $20 \leq C \leq 30$

b) El intervalo en la escala Celsius que corresponde a $50 \leq F \leq 90$

2) De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza *F* (en Kg.) requerida para estirar cierto resorte *x* cm., más allá de su longitud normal, está dada por *F* = 4,5 *x* . Si $10 \leq F \leq 18$, ¿Cuáles son los valores correspondientes de *x*?

3) Una fábrica produce 23000 arandelas diariamente. Si el diámetro *d,* medido en milímetros, de una arandela verifica que $|d-236| \geq 5{,}1$, la arandela es considerada defectuosa y es desechada. ¿Cuál debe ser el valor del diámetro para que la pieza no sea desechada?

4) Para analizar la probabilidad de que una moneda sea buena se lanza 100 veces y se anota el número ***x*** de caras obtenidas. La estadística enseña que la probabilidad de que moneda sea falsa se obtiene resolviendo $\left|\frac{x-50}{5}\right| \geq 1{,}645$ ¿Para qué valores de ***x*** la moneda es buena?

5) La cantidad *c* de tuercas producidas diariamente en una fábrica verifica: $|c-325000| < 10500$. i)¿Cuál es la cantidad mínima que produce la fábrica en una jornada de trabajo? ii)¿y la máxima?

6) Un disco de computadora debe mantenerse en un intervalo de temperaturas dado por $|x-24{,}4^{o}C| \leq 3{,}7^{o}C$, ¿Cuáles son las temperaturas mínima y máxima del intervalo?

7) El ingreso por vender x unidades de un producto es R=24.55 x. El costo de producir x unidades es C= 15.4x+150.000. Para obtener una utilidad, el ingreso debe ser mayor al costo ¿Para qué valores de x dará utilidades este producto?

8) El lado de un cuadrado se mide usando regla y se anota 24.2 cm pudiendo cometer un error en esa medición de 0.15 cm. Usando estas mediciones determinar el intervalo que contenga las posibles áreas del cuadrado.

9) Se pone en operación un aparato electrónico en un ambiente con humedad relativa *h* en el intervalo definido por $|h-50| \leq 30$ ¿Cuáles son las humedades relativas mínimas y máximas para la operación de este aparato?

10) El tiempo en horas necesario para efectuar un determinado trabajo cumple con la siguiente desigualdad $\left|\dfrac{t-15}{2}\right| \le 1$. Determinar el intervalo de tiempo que puede llevar dicho trabajo. Si se tardan 16hs 30minutos en realizar el trabajo ¿El tiempo se encuentra en dicho intervalo?

En los siguientes links acceden a diferentes videos explicados por distintos docentes del curso de ingreso, donde se explican ejercicios parecidos a los que proponemos en el manual.

Explicación de inecuación polinómica (tabla de signos)
https://youtu.be/Q_iPoLLy7Ao

Explicación de inecuación polinómica (recta numérica)
https://youtu.be/blcZHh85wOU

Inecuación con valor absoluto
https://youtu.be/09mUAeAtE6E

Problema de aplicación de inecuaciones
https://youtu.be/ODMTcKGVqYo

MÓDULO 5

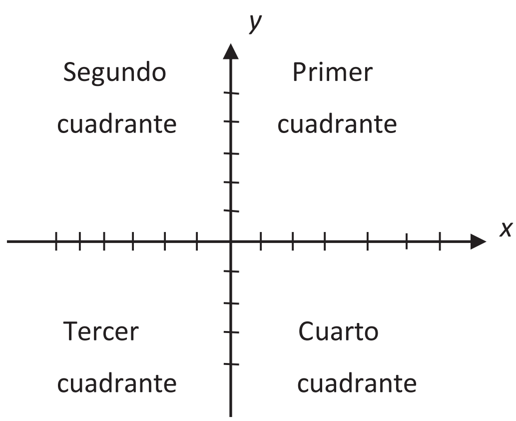
FUNCIONES – SISTEMAS DE ECUACIONES

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Vimos que cada punto en la recta numérica está asociado con un número real y viceversa. Ahora veremos que cada punto del plano está asociado con un par ordenado de números.

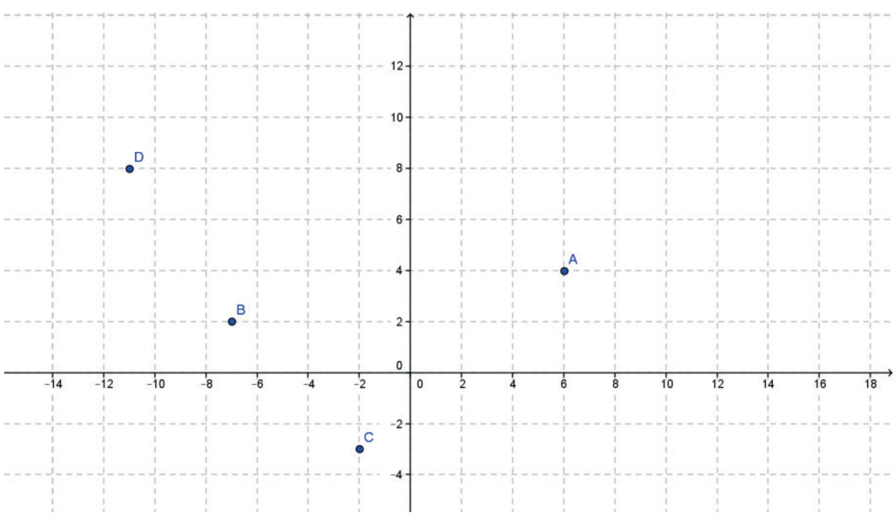
Un sistema de coordenadas cartesianas está constituido por dos rectas numéricas llamadas *ejes*, que se cortan perpendicularmente en un punto que llamamos *origen*.

Se asigna usualmente al eje horizontal la letra *"x"*, y se llama *eje de abscisas*, y al eje vertical se le asigna la letra *"y"* y se lo llama *eje de ordenadas*. Los ejes dividen al plano en cuatro *cuadrantes*.



Un punto en el plano cartesiano queda definido cuando se dan sus coordenadas *x* e *y*, en ese orden, primero se menciona la abscisa y luego la ordenada correspondiente.

A(6;4); B(-7;2); C(-2;-3); D(-11;8).



Ejercicio 1

Al gráfico anterior agrega los puntos de E (0;6) y F (6;0)

FUNCIONES

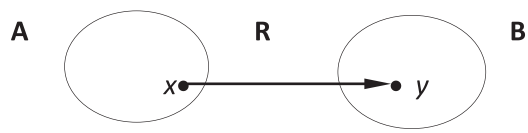
Comenzamos definiendo qué se entiende por *relaciones,* se dice que entre dos conjuntos A y B existe una relación cuando existe una correspondencia entre los elementos de A (conjunto de partida) y de B (conjunto de llegada).

> Una relación es un conjunto formado por pares ordenados (x ; y) relacionados entre sí por alguna condición o propiedad.
>
> $$R = \{(x; y) \;/\; x \in A \wedge y \in B \wedge x\,R\,y\}$$

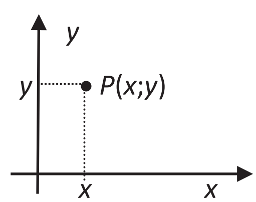
***x*:** primer componente del par ordenado

***y*:** segunda componente del par ordenado

Una relación se puede representar por un diagrama de flechas (diagrama de Venn):



También se puede representar en un sistema de ejes cartesianos ortogonales, en él cada par ordenado perteneciente a la relación será representado por un punto del plano



Gráfica de una relación es el conjunto de puntos del plano que satisfacen la relación.

Dominio de una relación son los elementos del conjunto de partida que tienen un elemento correspondiente en el conjunto de llegada; son las primeras componentes de los pares ordenados.

En un diagrama de Venn son los elementos del conjunto de partida relacionados con elementos del conjunto de llegada.

En un gráfico cartesiano son las abscisas de los puntos representados (x) que tienen una correspondiente y.

En una expresión matemática son las *x* que permiten calcular la *y*.

Imagen de una relación es el conjunto de elementos del conjunto de llegada asociados con elementos del conjunto de partida. Son las segundas componentes de los pares ordenados.

En un diagrama de flechas son los elementos del conjunto de llegada a los cuales les llega una flecha.

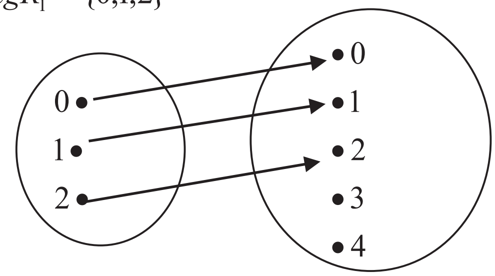
En un gráfico cartesiano son las ordenadas de los puntos representados.

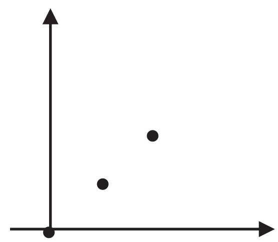
En una expresión matemática son los valores de y que se obtienen para las x del conjunto de partida

Ejemplo 1: $R_1 = \{(0;0),(1;1),(2;2)\}$

$DomR_1 = \{0,1,2\}$

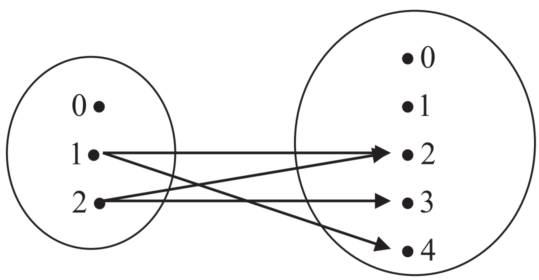
$\mathrm{Im}\, agR_1 = \{0,1,2\}$





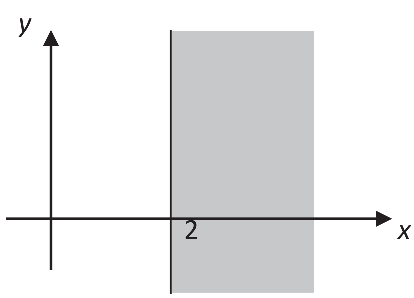
Ejemplo 2 $R_2 = \{(1;2),(1;4),(2;3),(2;2)\}$ $DomR_2 = \{1,2\}$

$\mathrm{Im}\, agR_2 = \{2,3,4\}$

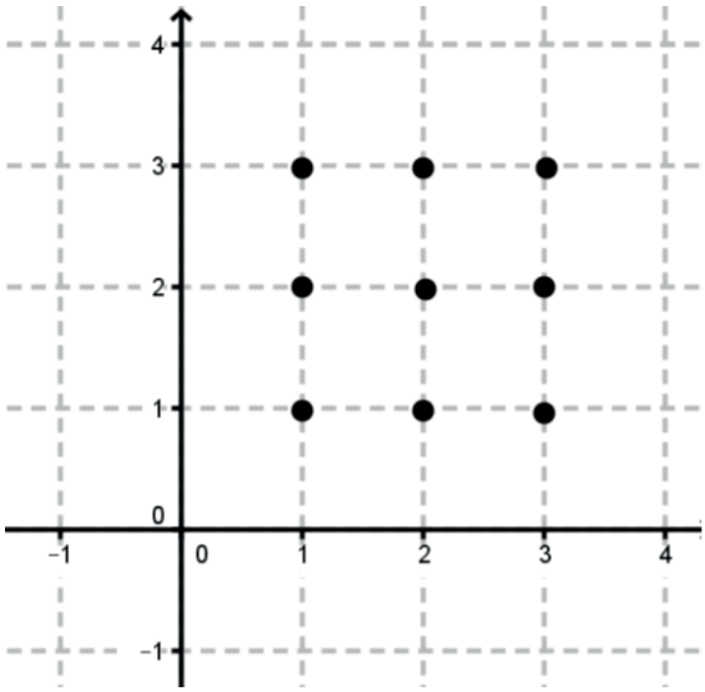


Ejemplo 3 $R_3 = \{(x;y) \in \Re^2 / x \geq 2\}$ $DomR_3 = [2;+\infty)$

$\mathrm{Im}\, agR_3 = \Re$



Ejemplo 4 $R_4 = \{(x;y) \in \mathrm{N}^2 / x \leq 3 \wedge y < 4\}$ $DomR_4 = \{1,2,3\}$
$\mathrm{Im}\,agR_4 = \{1,2,3\}$

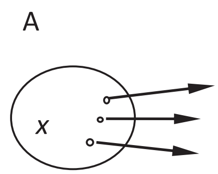


En la vida diaria el concepto de función se utiliza habitualmente para establecer una relación o dependencia de una cantidad respecto de otra. Por ejemplo: la demanda es una función del precio, el tiempo que tardaré en llegar a un cierto lugar será función de la distancia que tendré que recorrer, la nota que sacaré en el parcial será función de las horas de estudio, etc.

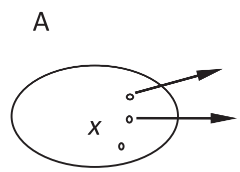
Supongamos que se les pide a 4 personas que escriban su nombre y su edad, y luego esas mismas personas deben escribir su nombre y la marca de los automóviles que poseen. La primera relación es sin duda una función por que a cada persona le corresponde una edad, y solo una, en cambio en el segundo caso, puede suceder que una persona tenga más de un vehículo, y en ese caso a un mismo nombre se le asocia más de un elemento.

En matemática el concepto de función tiene un sentido más restrictivo.

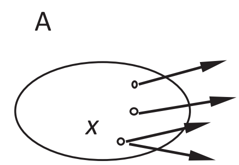
Una **relación funcional o función** es una regla que asigna a cada elemento *x* del conjunto de partida un único elemento *f*(*x*) en el conjunto de llegada.



es función



no es función

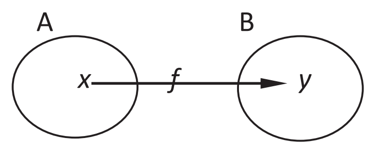


no es función

De modo que las relaciones funcionales son también un conjunto de pares ordenados, pero éstos deben cumplir dos condiciones:

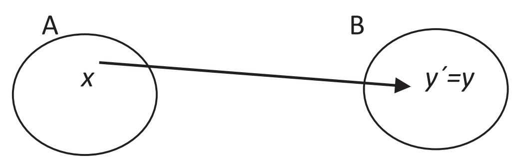
Existencia: todo elemento del conjunto de partida debe tener imagen

$$\forall \quad x \in A \quad \exists \quad y \in B \; / \; (x; y) \in f$$



Unicidad: a todo elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada.

$$Si \quad (x; y) \in f \wedge (x; y') \in f \quad \Rightarrow \quad y = y'$$



Para que una función quede perfectamente definida hay que indicar el *conjunto de partida*, con lo cual definimos el dominio, el *conjunto de llegada* y la *regla* que permite obtener para cada x una $y = f(x)$ llamada imagen de la función y que está contenida en el conjunto de llegada. Es decir, cuando hablamos de función estamos en presencia de una terna: Dominio- Conjunto de llegada (puede o no coincidir con la Imagen) y ley de correspondencia.

Resulta útil concebir a una función como una máquina. Si x está en el dominio de la función entonces x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función, así podemos concebir el dominio como todas las entradas posibles y la imagen como el conjunto de todas las salidas posibles.

Las funciones programadas de una calculadora son un buen ejemplo de una función como máquina. Se desea, por ejemplo, hallar la raíz cuadrada de un número, si el número es negativo la máquina marcará error porque los números negativos no están en el dominio de esta función, es decir, no es una entrada aceptable. Si el número es no negativo, aparecerá un resultado.

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

Entrada (dominio) Salida (imagen)

Cuando definimos una función y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de *x* para los cuales existe *y*. Este es el llamado *dominio natural*.

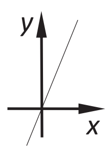
En general se dirá $f : A \to B \,/\, y = f(x)$, *x* va tomando distintos valores del dominio, la regla (*f*) permite obtener los valores correspondientes de *y*. Dado que el valor de la variable *y* en *y* = *f* (*x*) siempre depende de la elección de *x*, decimos que *y* es la **variable dependiente**. La elección de *x* es independiente de *y*, por consiguiente *x* es la **variable independiente**.

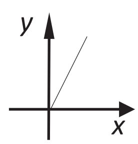
Gráfica de una función

Muchas veces se utiliza una función para describir problemas de la ciencia, la ingeniería, el comercio. Para interpretar y utilizar datos obtenidos de tal función, es útil presentar los datos en forma gráfica.

> Si *f* es una función con dominio A, entonces **la gráfica de *f* es** el conjunto de pares ordenados $\{(x; f(x)) / x \in A\}$ pertenecientes al plano cuya *y* = *f*(*x*).

Decir por ejemplo: *y* = 2 *x* no alcanza para tener definida la función, no es lo mismo definir la función como de $\Re \to \Re$, que definirla como de $\Re_0^+ \to \Re$





Vemos que la regla es la misma pero no es la misma función.

Dos funciones son iguales si y solo si tienen el mismo dominio y para cada elemento del dominio la misma imagen, obtenida a través de la ley de formación:

$$D_f = D_g \quad \wedge \forall x \in D \to f(x) = g(x)$$

Las funciones se pueden expresar en diferentes **registros de representación**. Explicaremos esto mediante un ejemplo:

Supongamos tener en el conjunto de partida los números naturales, y observamos que estos números se relacionan con los del conjunto de llegada de la siguiente manera:

$1 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 8$

$3 \rightarrow 27$ $\qquad$ f es la regla "elevar el número al cubo"

$4 \rightarrow 64$

$5 \rightarrow 125$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Si escribimos $f(3)$ estamos pidiendo aplicar la regla "f" al número 3, al hacerlo obtenemos $3^3 = 27$, de modo que $f(3) = 27$.

En este ejemplo la función se presenta mediante una tabla es decir el registro de representación se denomina **numérico.** Si la misma función la expresamos así:

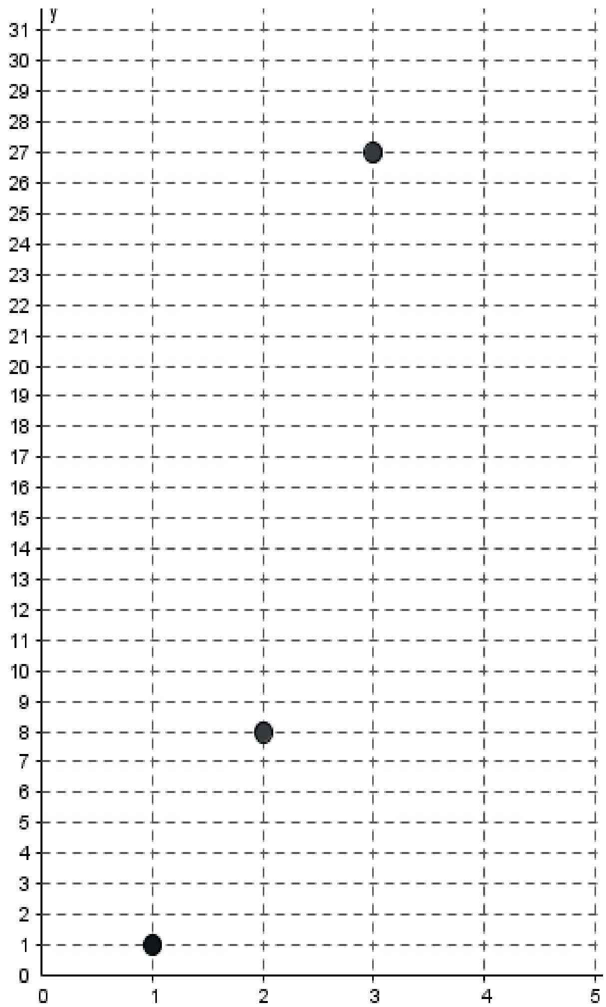
$$f : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N} \,/\, f(x) = x^3$$

Estamos utilizando un lenguaje de símbolos es decir el registro de representación es **analítico** también denominado **algebraico o simbólico.**

Si en cambio decimos: La función que le asigna a cada número natural su cubo. En este caso la función se expresa en registro **verbal o coloquial.**

Finalmente, si mostramos esta representación la función se expresa en registro **gráfico**

$$f : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$$



En síntesis:

Hay cuatro maneras de representar una función:

- *verbalmente*, mediante una descripción en palabras, en el lenguaje coloquial
- *numéricamente*, mediante una tabla de valores (función tabular)
- *visualmente*, mediante una gráfica
- *algebraicamente*, mediante una fórmula

Otro ejemplo:

1- Expresada algebraicamente

El área de un círculo depende del radio del mismo. La regla que relaciona a *r* con el área se expresa con la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo *r* existe un número *A* asociado, decimos que *A* es función de *r*. En este caso el dominio debe ser $\Re^+$ dado que “r” es un radio y no tiene sentido que sea 0 o un número negativo.

2- Expresada verbalmente

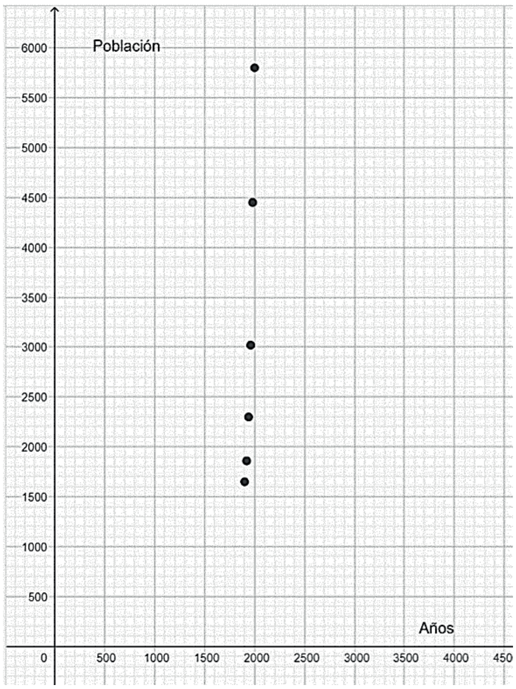
La función anterior expresada verbalmente es: El área de un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio siendo la constante de proporcionalidad el número π .

3- Expresada numérica y visualmente

La población del mundo se da en forma aproximada en la siguiente tabla:

Año	Población (en millones)
1900	1650
1920	1860
1940	2300
1960	3020
1980	4450
2000	5800

Y también expresada en forma gráfica:



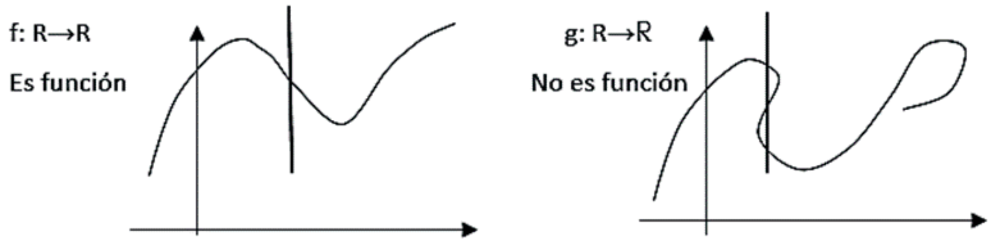
La gráfica nos permite absorber todos los datos a la vez. Es imposible una fórmula exacta que dé la población en cada instante, pero sí es posible hallar una expresión que permita una aproximación. Esta función, que es un ajuste razonablemente bueno, se llama **modelo matemático** para el crecimiento de la población.

Uno de los inconvenientes de la representación mediante trazado de puntos es que a veces no se puede conseguir una representación fiable, aun cuando se marque un gran número de puntos.

Recomendamos ver este video: Síntesis concepto de función: https://www.youtube.com/watch?v=rWtLUWdz1tw

Prueba de la recta vertical para determinar si una relación es función

> Una curva en el plano *x y* es la gráfica de una función si y sólo si una recta vertical que barre el dominio interseca la gráfica de la relación en un solo punto para cada valor de *x*.



Recomendamos ver este video: prueba de la recta vertical: https://www.youtube.com/watch?v=oPqVsKdGr8s

Ejercicio 2

Expresa la regla funcional en el registro solicitado:

Registro analítico:

a) Eleve al cubo la x y luego sume 2.

b) Divida a x por 6 y luego reste 3.

c) A x réstele 4 y a dicho resultado elévelo al cuadrado.

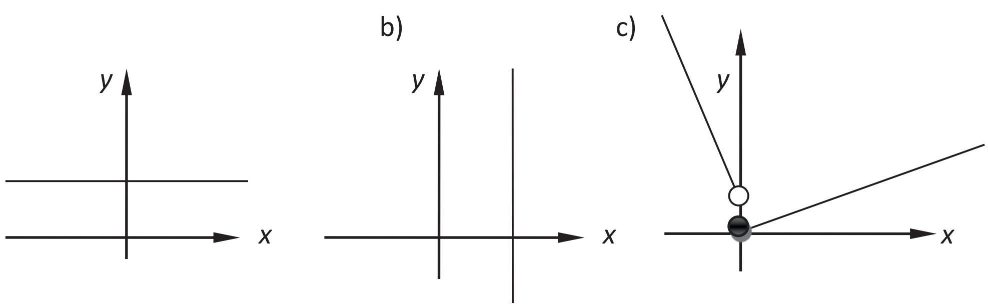
Registro verbal, numérico y gráfico:

d) $g:\Re \to \Re / g(x) = 3.x$

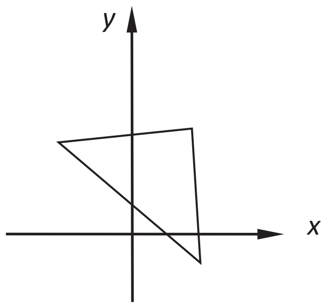
Ejercicio 3

Indica cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones de reales en reales:

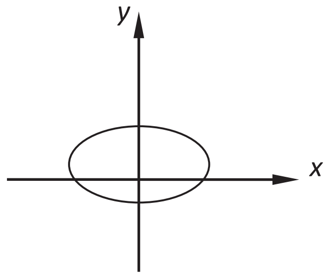
a) b) c)



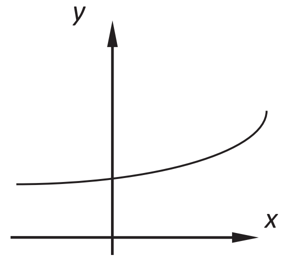
d)



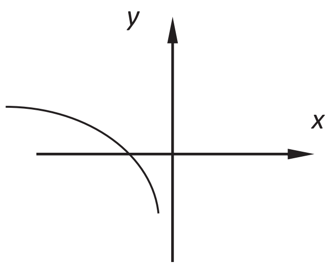
e)



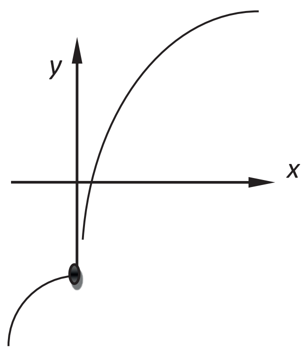
f)



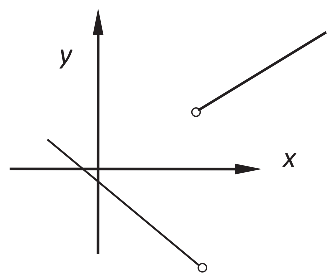
g)



h)



i)



Ejercicio 4

Si $f(x)=\sqrt{x}$ encuentra: a) $f(0)$ = b) $f(2)$ =

c) $f(4)$ = d) $f(a)$ = e) $f(x+h)$ =

Determinación del dominio natural para que una relación defina una función

Analíticamente se determina si una relación es función analizando el dominio, deberá existir un único valor de *y* para cada valor de *x*

Se considera Dominio natural al conjunto de todos los valores de la variable independiente que verifican la regla de asignación dada. De ahora en adelante cuando decimos dominio nos referimos al dominio natural.

Ejemplo 1: Hallar el dominio para que la siguiente fórmula determine una función: $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

Como no se puede calcular la raíz con índice par para números negativos, (en el conjunto de los números reales) se debe plantear que:

$x^2 - 9 \geq 0 \;\rightarrow\; x^2 \geq 9 \;\rightarrow\; |x| \geq 3 \;\rightarrow\; x \geq 3 \;\vee\; x \leq -3$.

El dominio de la función son todas las *x* que pertenecen a los intervalos $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$:

D = $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$

Ejemplo 2: Hallar el dominio para que la siguiente fórmula determine una función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-7}{x+2}}$

.

Tenemos nuevamente una raíz con índice par y un cociente. Para que la expresión tenga solución en el conjunto de los reales se debe plantear que: $x + 2 \neq 0 \wedge \dfrac{x-7}{x+2} \geq 0$.

Para analizar el signo de la ecuación $\dfrac{x-7}{x+2} \geq 0$ podemos valernos de una tabla de signos, dónde se analiza el signo de los dos factores que intervienen. La expresión (*x*-7) es igual a 0 en *x* = 7. Para todos los valores de *x* > 7 es *x*-7 > 0; *x* + 2 es igual a 0 para *x* = -2. Para valores de *x* > -2 es *x* + 2 > 0 y para valores menores es *x* + 2 < 0.

	$(-\infty;-2)$	(-2 ;7)	$(7;+\infty)$
$x-7$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$\dfrac{x-7}{x+2}$	+	-	+

De acuerdo al último renglón de la tabla el dominio de la función es : D = $(-\infty;-2) \cup [7;+\infty)$

Ejemplo 3: Determina el dominio: $y^2 = x + 2$

Despejando *y* resulta: $|y| = \sqrt{x+2}$

Vemos que para un mismo valor de *x* hay dos valores distintos de *y*. Si tomamos, por ejemplo

x = 7 resulta $|y| = \sqrt{7+2} \;\rightarrow\; y_1 = 3 \;,\; y_2 = -3$. De modo que no estamos en presencia de una función, no se cumple la unicidad de imagen.

Ejercicio 5

Hallar el dominio natural para que cada una de las siguientes fórmulas determinen una función:

$a)\quad y = 2x + 3$

$b)\quad y = x^2 + 3x - 1$

$c)\quad y = \dfrac{x+1}{x}$

$d)\quad y = \dfrac{3x+1}{2x-2}$

$e)\quad y = \dfrac{3x+2}{x^2-1}$

$f)\quad y = \sqrt{x^2 - 5}$

$g)\quad y = \sqrt{1-x}$

$h)\quad y = \sqrt{x^2 - 9}$

$i)\quad y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$j)\quad y = 2^{x+1}$

$k)\quad y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

$l) y = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$

$m)\quad y = \left(x^2 - x + 3\right)^{-1}$

$n)\quad y = \dfrac{x-2}{|x-2|}$

$o)\quad y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

FUNCIÓN LINEAL

Se llama función lineal a una función polinómica de grado menor o igual a 1.

> Una función lineal es una función $f : \Re \to \Re$
> dada por $f(x) = mx + b$ con $m, b \in \Re$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales, su gráfica representa a una recta de pendiente *m* y ordenada al origen *b*.

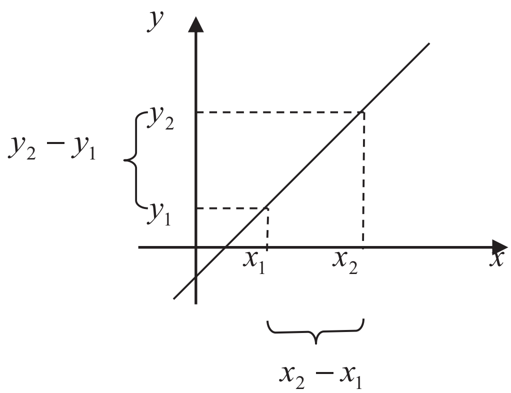
La ordenada al origen es la ordenada del punto en el que la gráfica de la función corta al eje *y*. Es el valor que toma *y* cuando la *x* vale 0

La pendiente indica cómo y cuánto varía la variable dependiente por unidad de variación de la independiente. En el caso de la función lineal la pendiente es el valor que indica la inclinación de la recta, es decir la pendiente está asociada con el ángulo que la recta forma con el eje de las abscisas.

La pendiente es el valor de la tangente trigonométrica del ángulo que dicha recta forma con el eje de abscisas, concepto que desarrollaremos en geometría: trigonometría.

Tomemos dos puntos cualesquier de la recta $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ con distinta abscisa, a medida que vamos de un punto al otro el cambio en x es (x_2-x_1), y el cambio en y es (y_2-y_1).

La pendiente es la **razón del cambio** en *y* dividido por el cambio en *x*.

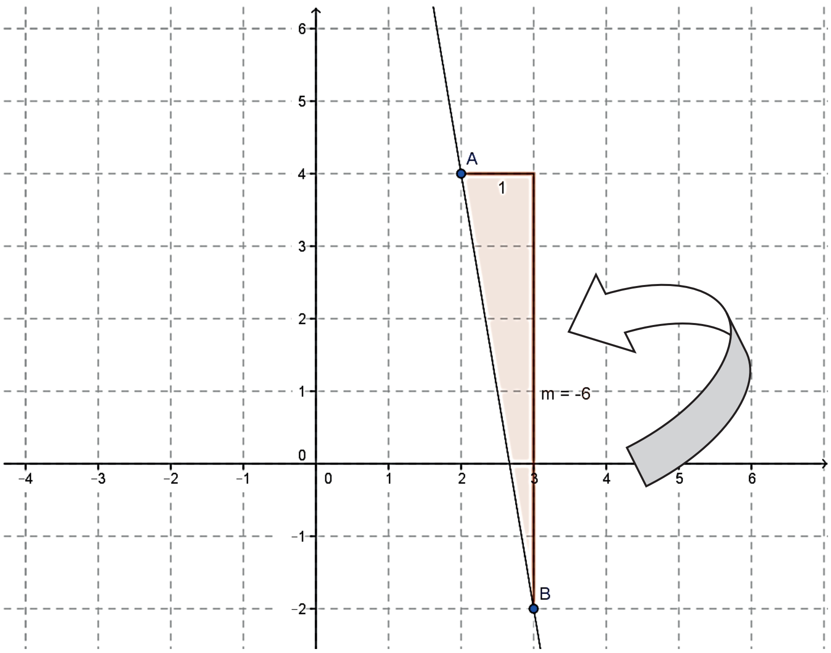


$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Si la recta asciende de izquierda a derecha entonces la pendiente es positiva, en este caso el ángulo que la misma forma con el eje de las abscisas es agudo. Si de izquierda a derecha la recta desciende entonces la pendiente es negativa, y en este caso el ángulo es obtuso.

Un caso particular es el de la recta con *m* = 0, se trata de una recta de la forma *y* = *b*, cuya gráfica es paralela al eje *x* (horizontal) y se la suele denominar función constante, en este caso el ángulo es nulo.

Ejemplo: Determina la pendiente de la recta que une los puntos: A(2;4) y B(3;-2), observa el gráfico para comprender mejor.



$m = \frac{-2-4}{3-2} = \frac{-6}{1} = -6$ Observa que el ángulo determinado entre el eje x y la recta tomado en sentido contrario a las agujas del reloj es obtuso.

Ejercicio 6:

Determina la pendiente de la recta que une los puntos y graficarlas.

a) A(3;2) y B(6;7)

b) C(-5;5) y D(-5;-2)

c) E (-3;7) y F(1;-1)

d) G(0;0) y H(7;3)

e) I(3;2) y J(-2;3)

f) K(-2;-3) y L(8;-3)

g) M(-5;5) y N(5;-2)

Ejercicio 7:

Completa la siguiente tabla:

Función	Pendiente	Ordenada al origen
$y = 3x + 2$		
$y = -4 + \frac{3}{2}x$		
$3 = x + 5y$		
$y =$.........	½	¾

Función	Pendiente	Ordenada al origen
$2 - 4x = y$		
$y = -3$.......	2,8	
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6$		
$y = 2x$....		-5

Si conocemos la pendiente *m* de la recta y las coordenadas de un punto $(x_1; y_1)$ de la misma, entonces la ecuación se puede expresar como:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

También si conocemos dos puntos pertenecientes a la recta de coordenadas: $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ podemos hallar la ecuación de la recta usando la siguiente expresión:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{siendo} \quad y_2 \neq y_1 \ \wedge \ x_2 \neq x_1$$

Ejemplo

a) Determina la ecuación de la recta si $m = \frac{2}{3}$ y $P(-1;4)$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - (-1)) \quad \rightarrow \quad y - 4 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}$$

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos: M=(-3;5) y Q=(4; 3)

$$\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-(-3)}{4-(-3)} \Rightarrow \frac{y-5}{-2}=\frac{x+3}{7} \Rightarrow \frac{y}{-2}=\frac{x}{7}+\frac{3}{7}-\frac{5}{2} \Rightarrow y=\left(\frac{x}{7}-\frac{29}{14}\right).(-2)$$

Aplicando propiedad distributiva resulta: $\boxed{y=-\frac{2}{7}x+\frac{29}{7}}$

Importante: recomendamos profundizar el tema de función lineal consultando los materiales que figuran en Miel Ingreso, especialmente diseñados para este curso: Función lineal

Link y código QR a material dinámico con Geogebra: https://www.geogebra.org/m/ge39pqBP

Ejercicio 8

Para cada uno de los siguientes casos determina la ecuación de la recta y graficar:

a) m = 2 A(3;-4)

b) m = - ¼ B(6; 2)

c) m=0 C(3;-2)

Ejercicio 9

Obtén la ecuación de la recta de ordenada al origen igual a 7 y ángulo de inclinación $\alpha = 45^{o}$

Ejercicio 10

¿Son colineales M(0;-3) , N(1; 4) , S(2; 11)? Justifica.

Ejercicio 11

Dada la recta $y=\frac{2}{3}x+1$, indica si:

a) Si P(3;3) pertenece a la recta...

b) Si Q(2;2) pertenece a la recta...

Ejercicio 12

Dada la recta $2x+3y=5$ indica:

a) Tres puntos que pertenecen a la recta..

b) Tres puntos que no pertenecen a la recta...

Ejercicio 13

Determina en cada caso la ecuación de la recta que une los puntos A y B y represéntalas en una hoja cuadriculada:

a) A(0;0) B(7;3)

b) A(3;2) B(-2;3)

c) A(-2;-3) B(8;-3)

y = ... *y* = ... *y* = ...

Ejercicio 14

Para cada uno de los siguientes casos determinar la ecuación de la recta y representarlas en hoja cuadriculada:

a) m = 2 ; A(3;-4)

b) m = - ¼ ; B(6; 2)

y = ... *y* = ...

Ejercicio 15

Grafica en hoja cuadriculada:

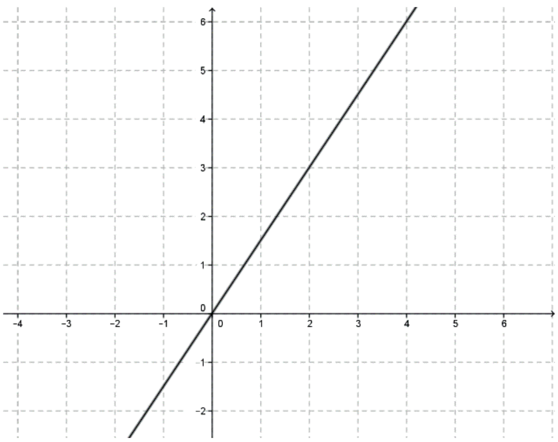
$a)\ \ y = 2x + 3$ $b)\ \ y = \frac{3}{2}x - 2$ $c)\ \ y = 5x$

$d)\ \ y = -\frac{1}{3}x$ $e)\ \ y + x = 0$ $f)\ \ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

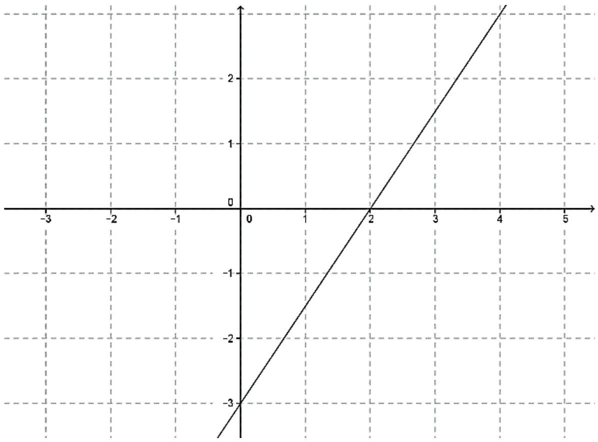
Ejercicio 16

Obtén la ecuación de las siguientes rectas:

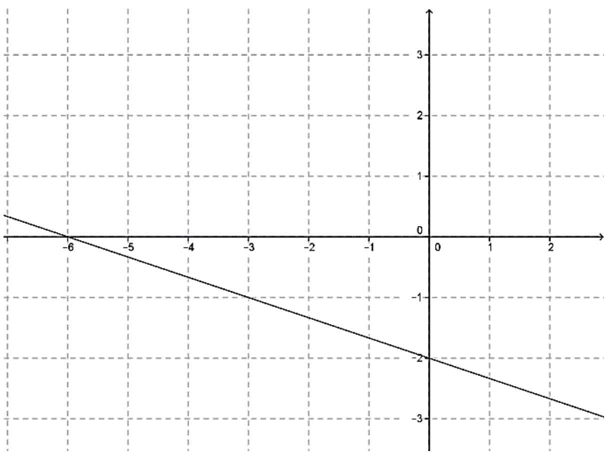
a)



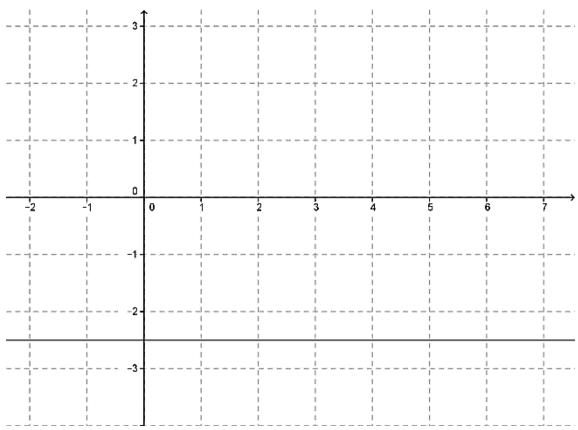
b)



c)



d)



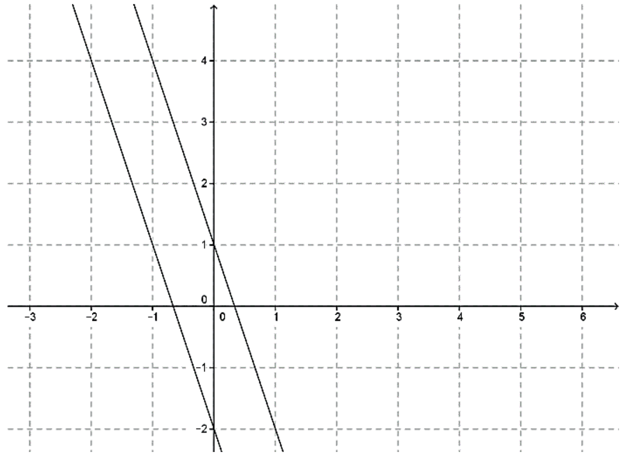
Ejercicio 17

Determina las intersecciones con los ejes de $y = -2x + 3$.Verifica gráficamente.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

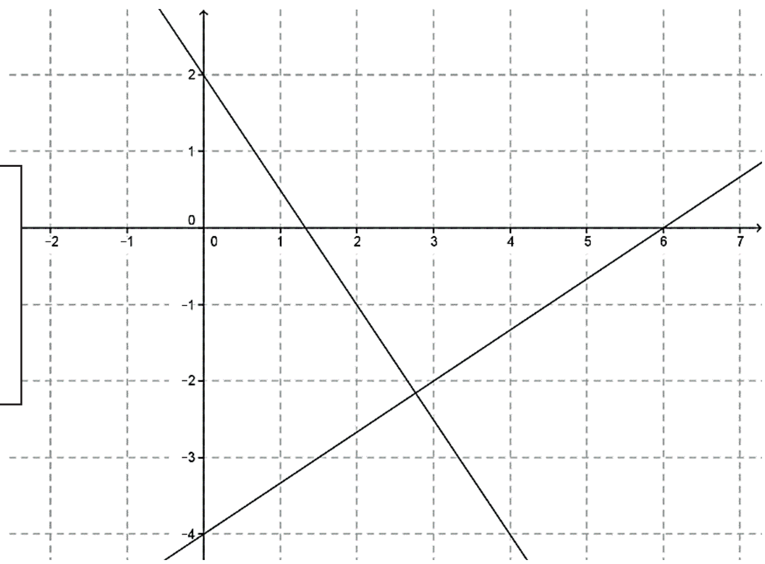
Dos o más rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x - 2 \end{cases}$$



Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocas y opuestas.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 2 \\ y = \dfrac{2}{3}x - 4 \end{cases}$$



Ejercicio 18

Dada la función $y = 2x - 3$ determina:

a) si el punto A(-1; 5) pertenece a la recta; justifica

b) ¿qué abscisa tiene el punto B de ordenada ½ , sabiendo que pertenece a la recta?

c) los puntos de intersección con los ejes;

d) la expresión de la recta paralela que pasa por el origen;

e) la expresión de la recta perpendicular que pasa por C(2; 2);

f) la expresión de la recta paralela que corta al eje de ordenadas en **1**;

g) la expresión de la recta paralela que corta al eje de abscisas en - 5/2

h) la intersección entre las dos últimas rectas;

i) representa todas las rectas en hoja cuadriculada.

Explicado en el siguiente video: https://acortar.link/0bjooz

Ejercicio 19

Obtén el valor del parámetro ***k*** de modo que $3\,k\,x + 5\,y - 2 = 0$ sea una recta que:

a) pase por el origen

b) pase por P(-1; 4)

c) sea paralela al eje **x**

d) sea paralela al eje **y**

Ejercicio 20

a) Escribe las ecuaciones explícitas de las rectas que contienen a los lados del romboide ABCD si A(2;-2), B(4;-1), C(6;-2), D(4;-5). Grafica en hoja cuadriculada

b) Determina el perímetro del romboide.

Ejercicio 21

Obtén el área del triángulo determinado por la recta *r* y los ejes coordenados, siendo *r* la recta que pasa por M(4;1) y es perpendicular a la recta *s*: $y = \frac{1}{2}x$

Ejercicio 22

Obtén *h* y *k* de manera tal que las rectas $3\,y - 5x - 3 = 0$; $2\,k\,x + y + h = 0$ sean:

a) perpendiculares

b) paralelas

c) coincidentes

.

Ejercicio 23

Determina $k \in \Re - \{0\}$ / $\frac{x}{k} + \frac{3}{5}y - 2k = 0$ tenga abscisa al origen igual a 3.

Ejercicio 24

Escribe la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ si P (½ ; -1) y Q(- ½ ;3). Grafica.

Recuerda: la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada por su punto medio.

Ejercicio 25

¿Qué particularidad tienen dos funciones lineales con la misma ordenada *b* al origen?

Ejercicio 26

Determina el número *a* de modo que la pendiente de la recta que pasa por los puntos

$P_1(-2;3\,a)$, $P_2(4;-a)$, tenga el valor $m = -5/12$

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/FCJbUevAL7g

Ejercicio 27

a) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (3;-4) y tiene pendiente -2.

b) Si la recta contiene a los puntos (*a* ; 8) y (5; *b*), encuentra *a* y *b*.

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/UuCEoFFfWXQ

Ejercicio 28

La recta r_1 es perpendicular a la recta r_2, y la recta r_2 es perpendicular a la recta r_3. Las rectas r_1 y r_3 no son coincidentes.

a) ¿Cuál es la relación entre las pendientes de las rectas r_1 y r_3?

b) ¿Cuántos puntos tienen en común las rectas r_1 y r_3?

c) Si la recta r_1 tiene una ecuación $y = m\,x + b$, escribe una ecuación para la recta r_3.

Ejercicio 29

Encuentra *a* de modo que las gráficas de $5y = ax + 5$ y $\frac{1}{4}y = \frac{1}{10}x - 1$ sean paralelas.

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/CoIL_czf_Lo

Ejercicio 30

Encuentra *k* de modo que las gráficas de $x + 7y = 70$ y $y + 3 = k\,x$ sean perpendiculares entre sí.

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/bnygbggB7oo

Ejercicio 31

Para cierta función lineal f es: $f(-1) = 3$ y $f(2) = 4$.

a) Encuentra una ecuación para f. ....

b) Encuentra $f(3)$ ....

c) Encuentra a tal que $f(a) = 100$. ....

Ejercicio 32

Plantea, resuelve e interpreta gráficamente los siguientes problemas, en cada uno de ellos pon de manifiesto las variables que intervienen. Suponiendo que la relación entre las variables es lineal, escribe la ecuación que las vincula.

a) El prospecto de un medicamento indica una dosis de 2,5 mg por kilogramo de peso del paciente.

b) Una empresa de servicios médicos ofrece un plan de \$1000 por grupo familiar, con un adicional de \$100 por cada estudio.

c) El valor de una máquina fotocopiadora nueva es de \$5200, después de dos años de uso su valor es de \$4225, encuentra su valor después de 5 años.

d) El agua se congela a 32° F (0° C) y hierve a 212° F (100° C), ¿Qué temperatura Celsius corresponde a una temperatura ambiente de 70° F?

Ejercicio 33

Para reparar un piso de madera un especialista cobra \$50 el metro cuadrado, más una suma fija por viático de \$20.

1.- Escribe la función lineal que relaciona el precio del arreglo en función de la superficie a reparar.

2.- Si se desea reparar 20 metros cuadrados, ¿cuál es el importe a pagar?

3.- ¿Cuántos metros cuadrados deberá reparar el colocador para ganar \$2300?

4.- Indica qué representan la ordenada al origen y la pendiente de la función representada.

Ejercicio 34

Una pequeña empresa compra una computadora en 4000 dólares. Después de 5 años el valor esperado de la computadora será 200 dólares. Para cuestiones de contabilidad, la empresa aplica la función denominada: depreciación lineal para evaluar el valor de la computadora en un tiempo dado. Esto significa que V es el valor de la computadora en dólares y t el tiempo en años.

a) Determinar la fórmula que vincula V con t.

b) Determinar el dominio en el contexto del problema.

c) Graficar

d) ¿Qué representa la pendiente?

e) Calcular el valor depreciado de la computadora dos años y medio luego de haber hecho la compra.

FUNCIONES DEFINIDAS POR TRAMOS

Muchas veces las funciones no se definen de la misma forma para todos los elementos de su dominio. Es decir, para ciertos valores de “x” su imagen se calcula usando una ley de formación y para otros valores una forma diferente a la anterior. Veamos un ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -3 + x & x \leq 4 \\ x + 1 & x > 4 \end{cases}$$

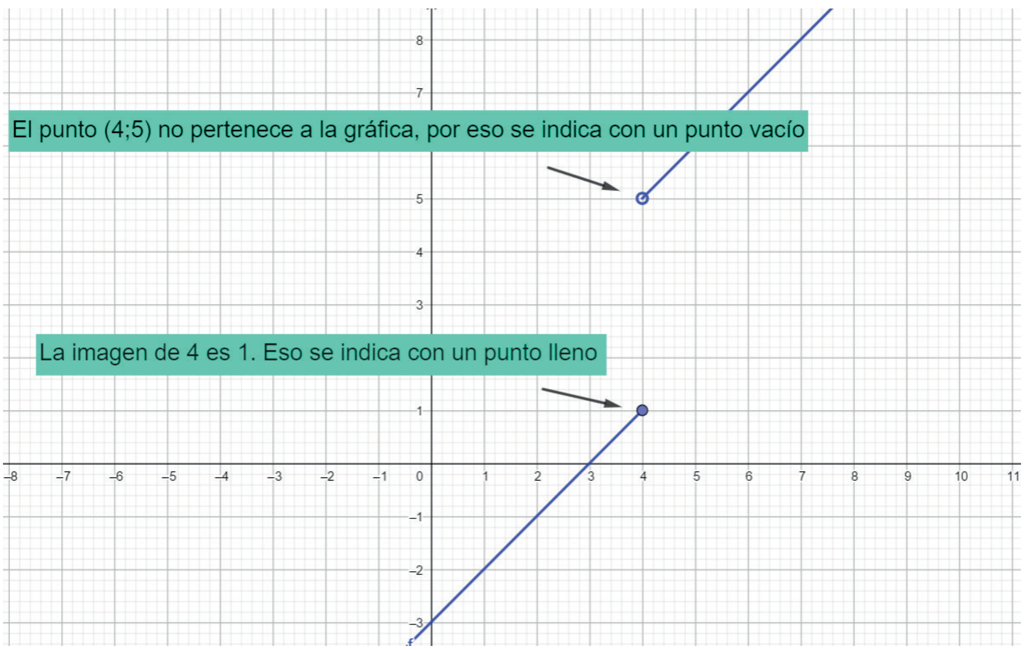
Es importante señalar que no se trata de dos funciones diferentes, sino de una **ÚNICA FUNCIÓN**, definida en este, caso por dos tramos diferentes. Si x es mayor o igual que 4 su imagen se calcula mediante -3+x y si x es mayor a 4 usamos x+1 para determinar su imagen.

Entonces si tenemos que determinar la imagen de 6 usamos la rama inferior es decir f(6)=6+1=7.

En cambio si queremos determinar la imagen de 2 usamos la rama superior es decir, f(2)=-3+2=-1

La imagen de 4 es: f(4)= -3+4= 1

Veamos la gráfica:



Ejercicio 35

1. Graficar las siguientes funciones definidas por tramos:

a) $g(x)=\begin{cases}2x-4 & x\geq 6\\ x-1 & x<6\end{cases}$ b) $h(x)=\begin{cases}4 & x\leq 3\\ -x+4 & x>3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x>1\\ 2x+2 & x\leq 1\end{cases}$ d) $p(x)=\begin{cases}3-x & x\leq -2\\ 6 & -2<x\leq 4\\ 2x+1 & x>4\end{cases}$

2. a)

Graficar la siguiente función y luego   b) Responder V ó F justificando la respuesta:

$f(x)=\begin{cases}x+2 & x>1\\ 3x-2 & x\leq 1\end{cases}$	b1) La imagen de 1 vale 3 b2) El punto P = (-2;0) $\in f(x)$

3. a) Determinar el valor de "a" para que la única raíz o cero de la función g(x) sea x=6, siendo:

$g(x)=\begin{cases}a.x+6 & x>3\\ \dfrac{x}{3}-4 & x\leq 3\end{cases}$ Explicado en el siguiente video https://youtu.be/zeQjeRVrlgE

b) Para el valor de "a" hallado, graficar g(x) e indicar cuál es el conjunto imagen de dicha función.

4. Un plan de teléfono celular cuesta $250 fijo por mes con 300 minutos gratis y cada minuto adicional que se excede a los libres cuestan $2. Escribe la función costo mensual de la tarifa a pagar con este plan. Graficarla y calcular el costo que se deberá abonar, si se excede en 150 minutos respecto a los libres.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas incógnitas constituyen un **sistema de ecuaciones.**

Si las incógnitas son dos, el conjunto de pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema constituyen la **solución del sistema**.

Resolver un sistema es encontrar el conjunto solución.

Nos referiremos en particular a la **resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

Existen cuatro métodos analíticos para resolverlos en este manual explicamos solo dos de ellos y el método gráfico. Los otros dos métodos (igualación y reducción a sumas y restas) deberán aprenderlos en forma autónoma con el material digital que tendrán en la plataforma Miel.

Método de sustitución

Los pasos a seguir son:

1. **Despeja** una de las incógnitas de una de las ecuaciones del sistema.
2. **Sustituye** la expresión hallada en la otra ecuación, con lo cual obtienes una ecuación de primer grado con una incógnita.
3. **Resuelve** la ecuación con una incógnita obtenida en el paso anterior.
4. **Reemplaza** el valor hallado en la expresión de la incógnita despejada en el primer paso para obtener el valor de la segunda incógnita.
5. **Verifica** si el par de valores encontrados es la solución del sistema.
6. **Escribe** la solución del sistema.

La resolución del sistema puede efectuarse despejando primero *x* ,y hallando luego *y*, o despejando primero *y* , y hallando luego *x*.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 7y = -6 \end{cases}$$

Apliquemos paso a paso el método:

1. **Despeja** una de las incógnitas de una de las ecuaciones del sistema.

Este ejemplo lo resolveremos despejando primero *x*.

$$x = \frac{1+3y}{2}$$

2. **Sustituye** la expresión hallada en la otra ecuación, con lo cual obtienes una ecuación de primer grado con una incógnita.

$$3\frac{1+3y}{2} - 7y = -6$$

3. **Resuelve** la ecuación con una incógnita obtenida en el paso anterior.

$$\frac{3+9y}{2} - 7y = -6 \quad \rightarrow \quad 3+9y-14y = -12 \quad \rightarrow \quad -5y = -15 \quad \rightarrow \boxed{y = 3}$$

4. **Reemplaza** el valor hallado en la expresión de la incógnita despejada en el primer paso para obtener el valor de la segunda incógnita.

$$x = \frac{1+3.3}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 5}$$

5. **Verifica** si el par de valores encontrados es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2.5 - 3.3 = 1 \\ 3.5 - 7.3 = -6 \end{cases} \qquad \text{se cumplen}$$

6. **Escribe** la solución del sistema:

$$\boxed{S = \{(5;3)\}}$$

Método de determinantes

Cuando hay que resolver sistemas de más de dos ecuaciones con más de dos variables los métodos anteriores se tornan largos y difíciles. Hay otros métodos que facilitan la tarea, uno de los más sencillos es el método de determinantes.

Vamos a comenzar dando una definición de determinante:

Sean *a, b, c* y *d* cuatro números reales cualesquiera, el símbolo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se llama determinante de 2x2 o determinante de segundo orden. Los números *a, b, c* y *d* son los elementos del determinante. El valor del determinante se obtiene como: *a.d - b.c*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

A partir de estas consideraciones podemos decir que los pasos a seguir para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son:

1. **Ordena** las ecuaciones de modo tal que los términos que contienen las variables queden en el primer miembro y el término que no la contiene en el segundo miembro. Verifica que los términos que contienen variables iguales queden encolumnados.

2. **Escribe y resuelve** el determinante formado por los coeficientes de las variables (Δ).

3. **Escribe y resuelve** el determinante asociado con una de las variables (Δ_x o Δ_y). Para ello se reemplaza en el determinante del 2º paso la columna de los coeficientes de la variable en cuestión por la columna de los términos independientes.

4. **Calcula** la incógnita dividiendo el valor del determinante hallado en el paso 3º.- por el valor del determinante hallado en el paso2º.-

5. **Repite** los pasos 3º.- y 4º.- para la otra variable.

6. **Verifica** el par de valores hallados.

7. **Escribe** la solución del sistema.

Sea el mismo sistema que resolvimos por los métodos anteriores:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 7y = -6 \end{cases}$$

Apliquemos paso a paso el método de determinantes:

1. **Ordena** las ecuaciones de modo tal que los términos que contienen las variables queden en el primer miembro y el término que no la contiene en el segundo miembro. Verifica que los términos que contienen variables iguales queden encolumnados.

En nuestro ejemplo todo esto se cumple.

2. **Escribe y resuelve** el determinante formado por los coeficientes de las variables.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 2.(-7) - 3.(-3) = -14 + 9 = -5$$

3. **Escribe y resuelve** el determinante asociado con una de las variables. Para ello reemplaza en el determinante del 2º paso la columna de los coeficientes de la variable en cuestión por la columna de los términos independientes.

Aplicaremos 1º para la variable *x*.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 1.(-7) - (-6)(-3) = -7 - 18 = -25$$

4. **Calcula** la incógnita dividiendo el valor del determinante hallado en el paso 3º.- por el valor del determinante hallado en el paso2º.-

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-25}{-5} \quad \to \quad \boxed{x = 5}$$

5. **Repite** los pasos 3º.- y 4º.- para la otra variable.

Aplicamos para la variable *y*.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 2.(-6) - 3.1 = -12 - 3 = -15$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-15}{-5} \quad \to \quad \boxed{y = 3}$$

6. **Verifica** el par de valores hallados.

$$\begin{cases} 2.5 - 3.3 = 1 \\ 3.5 - 7.3 = -6 \end{cases}$$

7. **Escribe** la solución del sistema.

$$\boxed{S = \{(5;3)\}}$$

Ejemplo de resolución de sistema por método de determinantes) https://youtu.be/VMZgehatp7E

Método gráfico

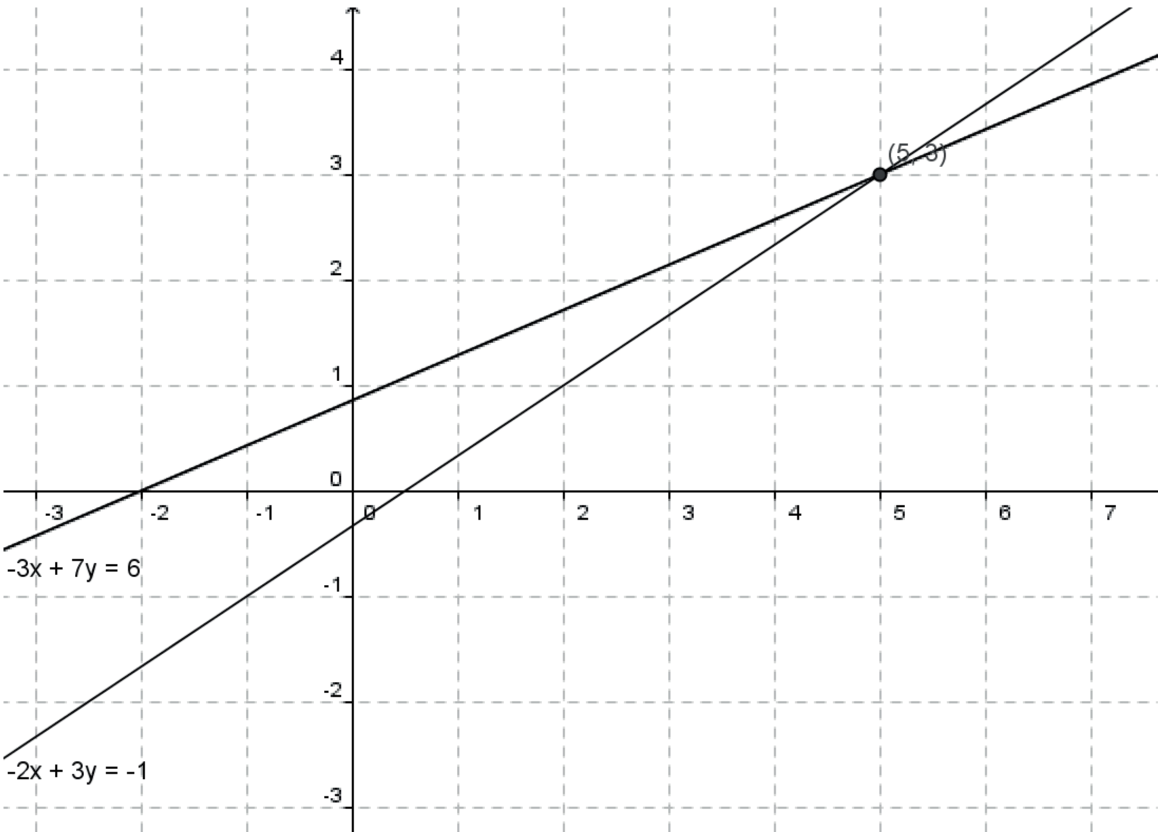
Vimos que:

“Resolver **un sistema es encontrar el conjunto solución” y** además que **“El conjunto de pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema constituyen la solución del sistema”.**

Esto significa que tratamos de encontrar todos los pares ordenados o puntos que las dos ecuaciones tienen en común. Gráficamente significa encontrar los puntos de intersección entre las funciones.

Sea el mismo sistema que resolvimos por los métodos algebraicos:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 7y = -6 \end{cases}$$



La solución del sistema está dada por las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas:

$$\boxed{S = \{(5;3)\}}$$

En este caso obtuvimos un único punto (par ordenado) como solución del sistema.

Trata de explicar

a) ¿Qué puedes decir con respecto a la solución cuando las rectas son coincidentes? Ayúdate con un gráfico……………………………………………………………………………………..

b) ¿Qué puedes decir con respecto a la solución cuando las rectas son paralelas? Ayúdate con un gráfico……………………………………………………………………………………..

Clasificación de sistemas de ecuaciones

Cuando las rectas se cortan en un punto la solución es única, y en ese caso decimos que se trata de un **sistema compatible determinado** (SCD).

Cuando las rectas son coincidentes las soluciones son infinitas, decimos que es un **sistema compatible indeterminado** (SCI).

Cuando las rectas son paralelas (no coincidentes) no hay solución, es un **sistema incompatible** (SI).

(Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales) https://youtu.be/WM5vWMZyXhY

Ejercicio 36

i) Resuelve utilizando el método de igualación (luego de estudiarlo en forma autónoma) y el método gráfico. Clasifica el sistema.

$$a)\begin{cases} 5x+3y=1 \\ x+4y=7 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x-8=-2y \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-1=2y \end{cases}$$

ii) Resuelve los ejercicios ya resueltos en el ítem anterior, pero utilizando el método de determinantes.

$a) \begin{cases} 5x+3y=1 \\ x+4y=7 \end{cases}$

$\Delta =$

$\Delta_x =$

$\Delta_y =$

$b) \begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x-8=-2y \end{cases}$

$\Delta =$

$\Delta_x =$

$\Delta_y =$

$c) \begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-1=2y \end{cases}$

$\Delta =$

$\Delta_x =$

$\Delta_y =$

¿Qué puedes decir respecto de los valores de los determinantes en cada caso? Escribe tus conclusiones.

Ejercicio 37

Determina el valor de **k** para que el sistema

$$\begin{cases} 2x+ky=13 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

a) Admita como solución S={(2; 3)}
b) Sea incompatible
c) Sea indeterminado.

Ejercicio 38

Analiza para los distintos valores del parámetro **k**:

$a) \begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-ky=-11 \end{cases}$

$b) \begin{cases} 4x+8y=12 \\ kx+2y=3 \end{cases}$

$c) \begin{cases} kx-3y=2 \\ 2x+(k-5)y=k \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+9y=-3 \\ 2x+k^2y=k \end{cases}$

Ejercicio 39

Completar el sistema de ecuaciones, si es posible, de manera que cumpla la condición pedida, en cada caso

$$\begin{cases} 4y = 6x - 8 \\ -2y = ------ \end{cases}$$

a) Sea un sistema compatible indeterminado

b) Su solución sea el origen de coordenadas.

c) Su solución sea $S = \{(2;1)\}$

d) Sea un sistema compatible determinado (con solución distinta a la del inciso c)

e) No tenga solución

Ejercicio 40

a) Escribe el sistema de ecuaciones en el plano que representa a dos rectas que se cortan en el punto P(1;2), si una de ellas tiene pendiente igual a 4 y la otra tiene pendiente igual a 3. Representa.

b) Escribe el sistema de ecuaciones en el plano que representa a dos rectas que se cortan en P(3;2), si una de ellas debe cortar al eje de ordenadas en $y = 8$ y la otra en $y = -2$. Grafica

c) Escribe el sistema de ecuaciones en el plano que representa a dos rectas que se cortan en P(2;5), si una de las rectas debe cortar al eje de abscisas en $x = 3$ y la otra en $x = 6$. Grafica.

Ejercicio 41

Resuelve los siguientes problemas:

a) Si la suma de dos números es 36 y el cociente es 1/2, encuentra los dos números

b) Hace 18 años Juan tenía tres veces más años que su hijo Pablo. Sabiendo que en la actualidad Juan tiene el doble de años que su hijo, se desea saber los años que tienen actualmente cada uno.

c) Se busca un número de dos cifras de modo que la cifra de las decenas más el triple de las unidades sume 10, pero la diferencia entre el doble de las cifras de las decenas y las unidades sea 6. Determina el número

d) La diferencia entre el lado mayor de un rectángulo y el doble del otro es 4 m. Si al lado mayor se le restan 2 m. y se le suma el otro, la suma sería 20 m. ¿Cuánto mide cada lado?

e) En una boutique hay 50 remeras distribuidas en dos estantes. Si se pasaran 5 remeras del estante de abajo al de arriba, la cantidad de remeras del estante de arriba sería el cuádruple de la del estante de abajo. ¿Cuántas remeras hay en cada estante?

f) En un pueblo de 6000 habitantes se casaron el 15% de las mujeres con el 10% de los hombres ¿cuántos matrimonios se formaron?

g) Si se aumenta en 6cm la base y la altura de un rectángulo el perímetro sería de 36cm. Si a la base en cambio se la disminuye en 2cm el rectángulo resulta ser un cuadrado. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo original?

h) Una compañía papelera vende dos tipos de cuadernos a precios mayorista, los rayados a $50 y a $70 los cuadriculados. Una librería hace un pedido de 500 cuadernos y envía un cheque por $ 28600, ¿cuántos cuadernos de cada tipo encargó el librero?

i) En un remate se vende un lote de dos tipos distintos de computadoras. Por la venta de 58 computadoras se obtienen $41 8000. Si uno de los tipos se vendió a $6000 y el otro a $8500, ¿cuántas computadoras de cada tipo se vendieron?

j) Un comerciante compra una remesa de 24 radio relojes y gasta $70000, en este importe está incluido el cargo por envío, que es de $7000. Compra radio relojes de AM que cuestan $2500 cada uno, y de AM/FM que cuestan $3000 cada uno. ¿Cuántos compró de cada tipo?

k) Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo que se encuentra en el primer cuadrante, su base coincide con el eje "x" y sus otros dos lados están limitados por las rectas $y= 2x-4$; $y=-4x+20$. Luego calcular el área de dicho triángulo.

Ejercicio 42

Resuelve analíticamente, interpreta gráficamente y justifica cada una de tus respuestas.

Un jarrón de la dinastía Ming, comprado hoy en $3000 aumenta su valor linealmente con el tiempo, de modo tal que después de 15 años su precio será de $3450. Por otro lado, un Buda de Jade, que también aumenta su valor linealmente, comprado hoy en $4000 valdrá $4400 dentro de 20 años.

a.- Escribe una ecuación que relacione el precio *p* del jarrón a lo largo del tiempo *t*.

b.- Escribe una ecuación que relacione el precio *p* del Buda a lo largo del tiempo *t*.

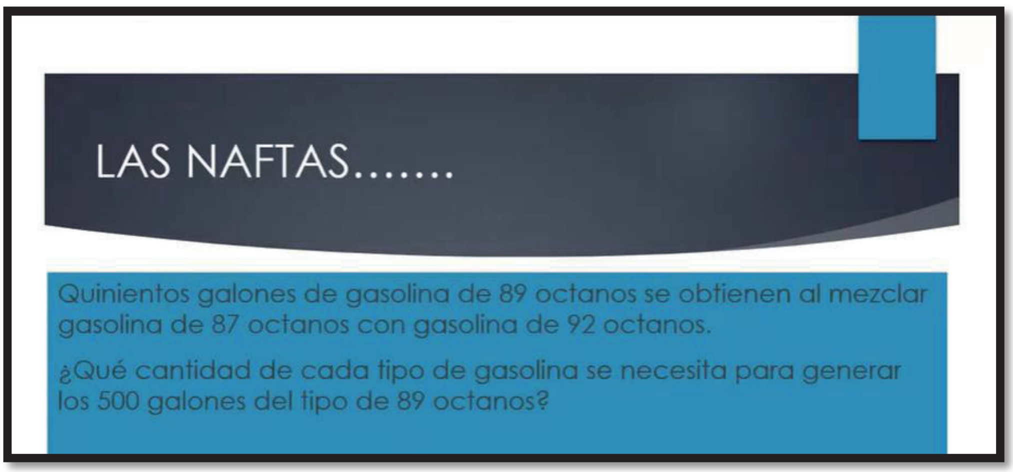
c.- ¿Cuál de las dos piezas aumenta su valor más rápidamente? Justifica tu respuesta.

d.- ¿En qué momento el precio de ambas piezas será el mismo?

e.- Cuál de las dos piezas le convendrá comprar dentro de 8 años si pretendes gastar lo menos posible? ¿Cuánto gastarás?

Importante: recomendamos profundizar el tema de función lineal consultando los materiales que figuran en Miel Ingreso especialmente diseñados para este curso: Sistemas de Ecuaciones

Video tutorial, problema de aplicación con sistemas de ecuaciones : https://youtu.be/lTMSRQEcl_A



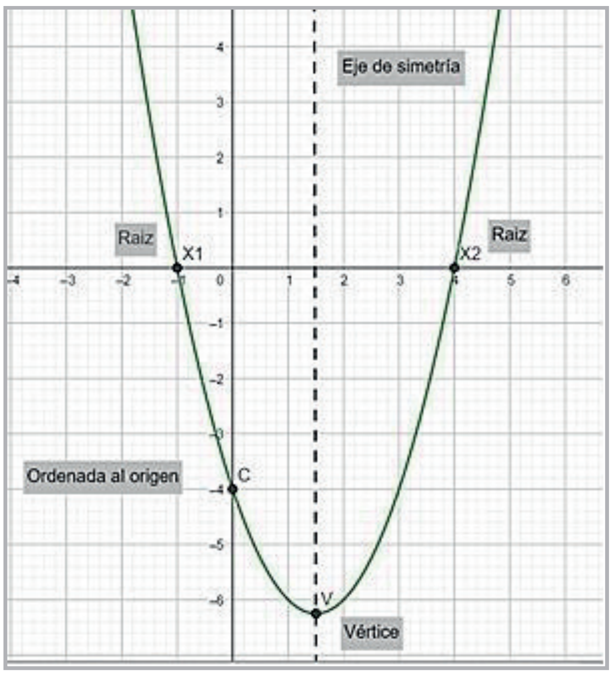
FUNCIÓN CUADRÁTICA

Se llama función cuadrática a la función polinómica de segundo grado.

Función cuadrática es una función $f:\Re \to \Re$

dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a, b, c \in \Re$, $a \neq 0$

La gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de **parábola**.



Elementos característicos de una parábola:

a) Intersecciones con los ejes, raíces o ceros, ordenada al origen.
b) Vértice.
c) Eje de simetría.
d) Concavidad.
e) Conjunto imagen.
f) Gráfica.

Ejemplo 1

Dada $f(x) = x^2 + 2x - 3$, determinaremos sus elementos característicos y su gráfica.

a) Intersecciones con los ejes. Raíces o ceros. Ordenada al origen:

La intersección con el eje de ordenadas se obtiene igualando a cero la variable independiente (*x*):

Si *x* = 0 entonces *y* = -3 a este valor de "y" se lo llama ordenada al origen.

Siempre es el valor de "c".

La/s intersección/es con el eje de abscisas se obtiene igualando a cero la función:

Si *y* = 0 entonces $x^2 + 2x - 3 = 0$

Ya hemos visto cómo resolver ecuaciones de segundo grado, sabemos que obtenemos 2 soluciones (tantas como sea el grado de la ecuación), y sabemos también que esas soluciones pueden ser raíces reales y distintos, o raíces reales y coincidentes o raíces complejas conjugadas.

En este ejemplo las raíces son: $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$. Es decir las intersecciones con el eje x son los puntos: (1;0) (-3;0).

En el caso de que las raíces sean iguales, es decir que se trata de una raíz doble, dicho valor coincide con la "x" del vértice, y en caso de ser raíces complejas la gráfica no tiene intersección con el eje de abscisas, es decir en este caso la función NO TIENE RAICES.

b) Vértice

El vértice es el punto en el cual la parábola toma su mínimo (o máximo) valor esto está relacionado con la concavidad. El vértice está ubicado sobre el eje de simetría, de modo que su coordenada en *x* se puede obtener como la semisuma de las intersecciones con el eje de abscisas o raíces:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$$

También puede hallarse usando la siguiente fórmula:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.1} = -1$$

La ordenada correspondiente a este valor se obtiene reemplazándolo en la función, es decir hallando la imagen de la *Xv*

$$y_V = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$$

De modo que las coordenadas del vértice son: V=(-1; -4)

c) Eje de simetría:

Por tratarse de una recta paralela al eje de ordenadas, y dado que contiene al vértice, la ecuación del eje de simetría es: $x = x_v$. En este caso: $x = -1$

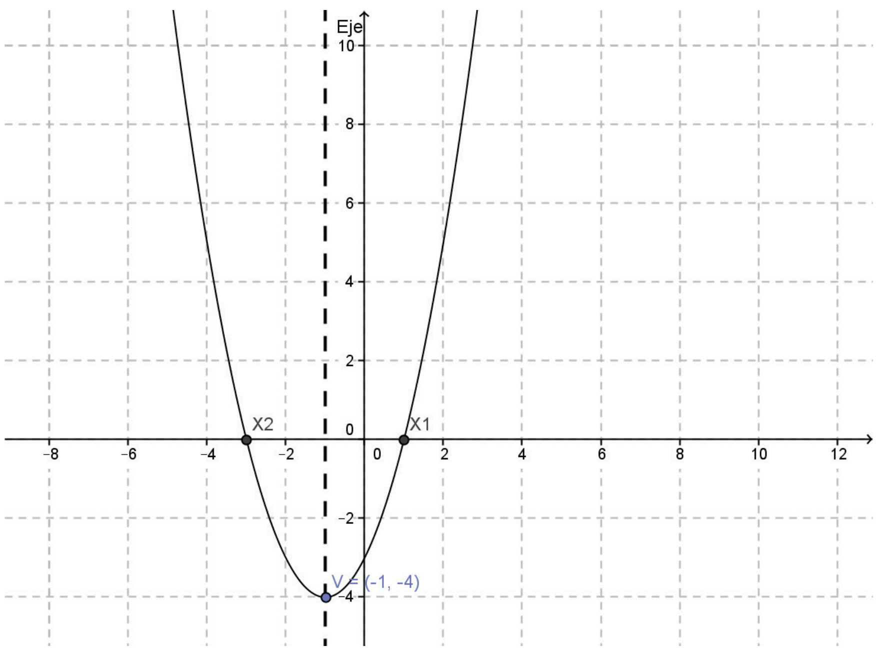
d) Concavidad:

El signo de "a" indica la concavidad en este caso a=1, es decir a > 0, por lo tanto, la concavidad de la curva es positiva o hacia arriba.

e) Conjunto imagen:

El conjunto imagen en una parábola está vinculado con la y_V y la concavidad que presenta la curva. Observando la gráfica que figura en el ítem siguiente decimos en este caso que el conjunto imagen es: $I = [-4;+\infty)$

f) Gráfica de la parábola



Síntesis de lo explicado hasta acá en los siguientes videos
https://youtu.be/CCiwYGqhOpc
https://youtu.be/MavcyONafPw

Ejercicio 43

Obtén los elementos característicos y representa cada uno de los siguientes grupos de parábolas en un mismo sistema de ejes y efectúa observaciones:

a) El siguiente grupo de funciones representa parábolas de la forma $y = ax^2$

$$a)\quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x^2 \\ y = -2x^2 \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica la variación del valor de *a*?

b) El siguiente grupo de funciones representa parábolas de la forma $y = ax^2 + c$

$$b)\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica la variación del valor de *c*?

c) El siguiente grupo de funciones representa parábolas de la forma $y = ax^2 + bx$

$$c)\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + 2x \\ y = x^2 - 3x \end{cases}$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica la variación del valor de *b*?

d) El siguiente grupo de funciones representa parábolas de la forma $y = a(x-h)^2$

$$d)\begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-1)^2 \\ y = (x+2)^2 \\ y = 3(x+2)^2 \end{cases}$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica la variación del valor de *h*?

e) Para el siguiente grupo de parábolas haz observaciones con respecto a las raíces de cada uno y el gráfico correspondiente.

e) $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = x^2 + x - 2 \\ y = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$

f) El siguiente grupo de funciones representa parábolas de la forma $y = a(x-h)^2 + k$

$$f)\ \begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-1)^2 + 2 \\ y = (x+2)^2 - 3 \end{cases}$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica la variación simultánea de los valores de *h* y *k*?

¿Tienen los valores de *h* y *k*, alguna relación con las coordenadas del vértice?

Esta última forma de expresar la parábola se denomina ***forma canónica***:

$$\boxed{y = a(x-h)^2 + k}$$

Para pasar de la forma canónica a la polinómica simplemente tenemos que desarrollar el binomio y agrupar.

Ejemplo 2

$$y = (x-1)^2 + 3 \quad \to \quad y = x^2 - 2x + 1 + 3 \quad \to \quad y = x^2 - 2x + 4$$

Para pasar de la forma polinómica a la canónica tenemos que completar cuadrados:

Ejemplo 3

$$y = x^2 + 2x - 3 \quad \rightarrow \quad y = \left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 - 3$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

Se divide por 2 y se eleva al cuadrado

Sumamos y restamos un mismo número de manera que los dos primeros términos y el que agregamos sean el desarrollo del cuadrado de un binomio

$$\rightarrow y = (x+1)^2 - 1 - 3 \rightarrow y = (x+1)^2 - 4$$

Una tercera forma de expresión para la función cuadrática es la *forma factorizada*:

$$\boxed{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Siendo x_1 **y** x_2 las raíces de la función.

En el ejemplo 3, la forma factoreada es:

y = (x-1).(x+3)

Si aplican propiedad distributiva obtienen la expresión polinómica.

Recomendamos ver las transformaciones de las funciones ejemplificadas con parábolas https://youtu.be/K8y5Y06XZA4

Ejercicio 44

Determinar los elementos característicos (raíces, intersecciones con los ejes, vértice, eje de simetría, concavidad, conjunto imagen) de las siguientes parábolas y graficarlas.

$a)\quad y=x^2-3x+4$ $\qquad b)\quad y=-x^2+6x-9$

$c)\quad y=2x^2+x+1$ $\qquad d)\quad y=(2x-5).(-x+4)$

$e)\quad y=(-x+4).5x+6$ $\qquad f)\quad y=\frac{1}{2}(x-1)^2-8$

Ejercicio 45

Considerando la función real $f:\Re\to\Re/f(x)=x^2-7x+10$

a) ¿Para qué valores de ***x*** alcanza su mínimo?

b) ¿Existe algún valor real de ***x*** para el cual la función toma el valor -2?

c) Verifica gráficamente

Ejercicio 46

Considerando la función $g:\Re\to\Re\ /\ g(x)=3x^2-9x+k$ determina el valor de **k** para que la gráfica sea tangente al eje *x*. Luego grafica

Ejercicio 47

Dadas la parábola $y=3x^2-kx-1$ y la recta $y=kx-2$ determina el/los valores de *k* para que:

a) La recta sea tangente a la parábola.

b) La recta no corte a la parábola.

c) Interpreta gráficamente

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/yJNJFINeJ1c

Ejercicio 48

Dada la parábola $y=x^2-kx+4$

a) Determina los valores reales de *k* para que el vértice de la parábola pertenezca al eje *x*.

b) Determina el valor real de *k* para que la parábola pase por el punto $P(3;-5)$

c) Representa en un mismo gráfico las tres parábolas halladas y calcula las coordenadas del punto de intersección entre cada una de las curvas y la recta $y=4$

Ejercicio 49

Dada la parábola $y=-2x^2+3x+\frac{h}{2}$ determinar el valor de h para que dicha curva pase por el punto $(-1;4)$.

Para el valor de h hallado determinar vértice, eje de simetría, raíces, conjunto Imagen y graficar dicha función cuadrática.

Ejercicio 50

a) *Interpreta gráficamente y resuelve analíticamente.* Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio, con una velocidad inicial de 30 m/seg. Su distancia $s(t)$ en metros sobre el suelo después de t segundos está dada por la ecuación: $s(t) = 60 + 30t - 16t^2$.

1.- Determina la altura del edificio.

2.- ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar al piso?

3.- ¿Cuándo alcanza su máxima altura el objeto?

4.- Determina la altura máxima respecto del piso, que alcanza el objeto

b) *Interpreta gráficamente y resuelve analíticamente*: La entrada a un edificio tiene la forma de un arco parabólico y mide ***3 m*** de alto en su centro y ***2 m*** de ancho en su base. Si hay que introducir en el edificio un recipiente rectangular con líquido sin tapa de ***2,5 m*** de alto, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener el recipiente? (El ancho tomado como la medida que enfrenta a la entrada del edificio)

c) Una compañía de televisión por cable , de acuerdo a un estudio de mercado sabe que el ingreso mensual de la empresa , cuando la tarifa es de x pesos mensuales viene dada por la función : $R(x) = 500(300 - x) \cdot x \qquad (0 < x < 300)$

Hallar cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo.

d) Al hacer un estudio de mercado de relojes con televisión incorporada, una compañía japonesa obtuvo las siguientes funciones de oferta y demanda de dicho producto en función del precio.

demanda $\qquad y = -1/5\ x^2 + 7.000.000$

oferta $\qquad y = 2/25\ x^2$

Siendo " *x* " el precio de un tele-reloj e " *y* " la cantidad de tele-relojes que se demandan ese año.

¿Qué precio deberán vender los tele- relojes, para que la demanda iguale la oferta?

e) En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció.

Supongamos que el número de venados v (t) a los t años está dado por :

$$v(t) = -t^2 + 21t + 100 \qquad t > 0$$

a) Calcular los valores de t para los cuales v (t) = 154 .

b) ¿ Se extingue la población ? Si es así ¿cuándo ocurre?

f) Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde lo alto de una pared, con una velocidad inicial de 4 m/seg. Su distancia $s(t)$ en metros sobre el suelo después de t segundos está dada por la ecuación: $s(t) = 12 + 4t - t^2$.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar al piso?

b) Determina la altura máxima respecto del piso, que alcanza el objeto y en qué instante la alcanza

Recomendamos ver para profundizar los temas los siguientes videos:

- Problema de aplicación con función cuadrática tomado en algún examen https://youtu.be/685sAu0Iw8U
- Problema con parámetros similar a algunos del manual https://youtu.be/xcT9cQoBFN0
- Las funciones como modelos matemáticos https://youtu.be/UnYlD6t302c

MÓDULO 6
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

EL LOGARITMO

Definición

En el siguiente cálculo, $2^3 = 8$ la operación es una potenciación, el 2 es la **base**, el 3 es el **exponente** y el 8 es la **potencia**.

Si conocemos el exponente y la potencia, pero no la base:

$\square^3 = 8$, para averiguarlo resolvemos $\square = \sqrt[3]{8}$ y entonces $\square = 2$.

La operación ahora es una **radicación**, el 3 es el **índice**, el 8 el **radicando** y el 2 la **raíz**.

Si en ese mismo cálculo conocemos la base y la potencia, pero no el exponente:

$2^{\square} = 8$, para averiguarlo debemos pensar cuál es el exponente al que debe elevarse el 2 para obtener 8, resolvemos: $\square = \log_2 8$ = 3.

Esta nueva operación se llama **logaritmación**, el 2 es la **base**, el 8 es el **argumento** y el 3 es el **logaritmo**.

Es una de las operaciones inversas de la potenciación y permite calcular el exponente al que debe elevarse la base para obtener el argumento.

Ejemplos:

$\log_3 9 = 2 \quad ya \;\; que \quad 3^2 = 9$,

$\log_2 32 = 5 \quad ya \;\; que \quad 2^5 = 32$

$\log_6 1 = 0 \quad ya \;\; que \quad 6^0 = 1$

$\log_4 2 = \dfrac{1}{2} \quad ya \;\; que \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\log_5 \dfrac{1}{5} = -1 \quad ya \;\; que \quad 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

$\log_7 \dfrac{1}{49} = -2 \quad ya \;\; que \quad 7^{-2} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 = \dfrac{1}{49}$

$\log_{10} 0{,}001 = -3 \quad ya \;\; que \quad 10^{-3} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^3 = \dfrac{1}{1000} = 0.001$

Si intentamos resolver:

$\log_3(-9) = \ldots..$, debemos buscar el exponente al que hay que elevar al 3 para obtener -9 ,

$3^{\square} = -9$, este número no existe, cualquier potencia de 3 es un número positivo.

Lo mismo si intentamos resolver $\log_{(-5)} 125 =$ …. , es decir, nos preguntamos, cuál es el exponente del -5 para obtener como resultado el 125. No hay ninguno.

Otros casos problemáticos involucran el 0 y el 1.

$\log_1 9 =$ …. no existe, ya que toda potencia de 1 es 1 y, más aún, si pretendemos resolver $\log_1 1 = \ldots..$ no sabríamos que resultado otorgarle, no es único.

Por otro lado, algo similar sucede si intentamos resolver $\log_0 8 =$ y preguntarnos 0 elevado a qué número es 8.

O también, $\log_3 0 = \ldots$ y tratar de encontrar un número que cumpla que el 3 elevado a ese exponente de como resultado 0.

Para evitar estos problemas y para que la logaritmación sea una operación que exista siempre y el resultado sea único, al definirla se exige que tanto **el argumento como la base del logaritmo sean números positivos** y además **la base debe ser distinta de 1.**

Entonces, estamos en condiciones de dar la **Definición de logaritmo:**

Siendo b y x números reales tales que son positivos y $b \neq 1$, llamamos logaritmo en base b de x, al exponente real y , tal que b elevado a la y da por resultado x. En símbolos:

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

$$y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x \quad \text{siendo} \quad b > 0 \quad b \neq 1 \quad x > 0$$

$$\begin{array}{ll} \exp onente & \arg umento \\ \uparrow & \uparrow \\ b^y = x \rightarrow potencia & \log_b x = y \rightarrow \log aritmo \\ \downarrow & \downarrow \\ base & base \end{array}$$

Cada vez que resuelvas un logaritmo piensa que estas averiguando un exponente, el mejor sinónimo de la palabra logaritmo es exponente.

Ejercicio 1

Resolver aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 8$ = ……. ya que ………..

b) $\log_3 81$= …… ya que ………..

c) $\log_5 \frac{1}{25}$ =……. ya que ………..

d) $\log_{\sqrt{2}} 4$ = …… ya que ………..

e) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2$ = ….. ya que ………..

f) $\log_8 2$ =…… ya que ………..

g) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ =….. ya que ………..

h) $\log_{\frac{9}{4}} \frac{2}{3}$ =…. ya que ………..

i) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ =…. ya que ………..

j) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}}$ =… ya que ………..

Propiedades

1- El logaritmo de 1 en cualquier base es 0

$$\boxed{\log_b 1 = 0 \quad ya \ \ que \quad b^0 = 1}$$

2- El logaritmo de la base del logaritmo es 1, cualquiera sea ésta.

$$\boxed{\log_b b = 1 \quad ya \ \ que \quad b^1 = b}$$

3- Logaritmo en el exponente.

Considera el siguiente cálculo: $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$ al resolverlo se obtiene 8, precisamente el argumento del logaritmo.

En este otro:

p= Número que al hacer 3 elevado a él da 25

$$\downarrow$$

$$3^{\log_3 25} = 3^p = 25$$

Obviamente el resultado es 25, ya que debo elevar el 3, al exponente que cumple la condición que si hacemos 3 elevado a él permite obtener 25.

Ten en cuenta que para que esto se cumpla, la base de la potencia y la del logaritmo deben ser iguales.

En símbolos: $$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Si en una potenciación, el exponente es un logaritmo cuya base coincide con la base de la potencia, la potencia es igual al argumento del logaritmo que se encuentra en el exponente.

4- La logaritmación no es distributiva con respecto a ninguna de las operaciones fundamentales.

Veamos algunos contraejemplos.

Con suma

$$\log_2(2+4+8+2) \neq \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 2$$
$$\log_2 16 \quad \neq \quad 1+2+3+1$$
$$4 \quad \neq \quad 7$$

Con multiplicación

$$\log_3(3.9) \neq \log_3 3 . \log_3 9$$
$$\log_3 27 \neq 1.2$$
$$3 \neq 2$$

Entonces para resolver se debe primero resolver la operación del argumento y luego calcular el logaritmo.

5- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\boxed{\log_b(p.\,q) = \log_b p + \log_b q}$$

Recuerda aquella propiedad del producto de potencia de igual base en la que sumabas los exponentes, los logaritmos son los exponentes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \log_3(3.9) &= \log_3 3 + \log_3 9 \\ \log_3 27 &= 1+2 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

6- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador menos el logaritmo del divisor.

$$\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \log_5\left(\frac{125}{5}\right) &= \log_5 125 - \log_5 5 \\ \log_5 25 &= 3 - 1 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

La próxima es la propiedad principal de los logaritmos que nos permite resolver ecuaciones exponenciales, ecuaciones en las que la incógnita se encuentra en el exponente.

7- El logaritmo de una potenciación es igual al producto del exponente de esa potenciación por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_b\left(a^c\right) = c.\log_b a$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \log_2\left(4^3\right) &= 3.\log_2 4 \\ \log_2 64 &= 3.2 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

8- El logaritmo de una raíz enésima es igual al cociente entre el logaritmo del radicando de la raíz y el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$

Hecho que se deriva de la propiedad anterior al expresar la radicación como una potencia

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \log_b \left(a^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \log_b a = \frac{\log_b a}{n}$$

Ejemplo: $\log_3 \sqrt[5]{9} = \frac{1}{5} \log_3 9 = \frac{2}{5}$

9- Propiedad de **cambio de base** de los logaritmos:

En algunos casos nos vamos a encontrar que, para resolver un logaritmo, que está dado en una base en particular, resulta conveniente expresarlo en otra base, para ello aplicaremos la siguiente propiedad:

$$\log_b a = \frac{\log_p a}{\log_p b}$$

Calculamos el logaritmo en base b, usando otra base, en este caso p y dividiendo el logaritmo del argumento en la nueva base elegida por el logaritmo de la base original en la base nueva.

Ejemplo: Si queremos calcular mentalmente $\log_8 16 =$ quizá se dificulta un poco, debemos encontrar el exponente al que se debe elevar al 8 para obtener el número 16, evidentemente el resultado es un número comprendido entre 1 y 2 ya que

$$\begin{gathered} 8 < 16 < 64 \\ 8^1 < 8^{\boxed{1,\ldots}} < 8^2 \end{gathered}$$

El exponente buscado está entre 1 y 2.

Al observar que ambos números (base y exponente) son potencias de un mismo número, de 2, en este caso, conviene aplicar esta propiedad de cambio de base para resolverlo y usar logaritmos en base 2.

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3} = 1,\widehat{3}$$

Ejercicio 2

Hallar y verificar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9 =$ b) $\log_7 7 =$ c) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) =$ d) $\log_8 1 =$

e) $\log_5 125 =$ f) $\log_2 \sqrt{2} =$ g) $\log_{0,5} 4 =$ h) $\log_{\sqrt{2}} 0,25 =$

Ejercicio 3

Resolver aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log_2(8.32)$

b) $\log_3\left(\sqrt[3]{81}\right)^5 =$

c) $\log_7 7^{48} =$

d) $\log_5 (5\sqrt{5})^5 =$

e) $\log_4 (4^3 . \sqrt[3]{4}) =$

Ejercicio 4

Descomponer los siguientes logaritmos, en expresiones donde aparezcan logaritmos de argumentos más sencillos.

Te mostramos un ejemplo:

a) $Log_c(4a^2b) = \log_c 4 + \log_c a^2 + \log_c b = \log_c 4 + 2\log_c a + \log_c b$

b) $\log_3 2(b+c)^2 =$

c) $Log_a 10.x^2 =$

d) $Log_c(10.x)^2 =$

e) $Log_c(3b)^5(a-b) =$

f) $Log_c \dfrac{18}{a+b} =$

g) $Log_c \dfrac{1}{a} =$

h) $Log_a\left(c.\sqrt{\dfrac{x}{g}}\right) =$

i) $Log_c \sqrt[7]{7.x^2k^4} =$

j) $Log \dfrac{a^3\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y^3}} =$

Ejercicio 5

Sabiendo que log m = -2, calculen log $\left[\dfrac{m.\sqrt{m}}{\sqrt[3]{m^2}}\right]$

Ejercicio 6

Calcular $h=\log_b \dfrac{x.y^3}{z}$, sabiendo que $\log_b x=1$, $\log_b y=2$ y $\log_b z=3$

Explicado en el siguiente video junto con el ejercicio 8 https://youtu.be/l9LkwnLJYqg

Logaritmos importantes –

Uso de calculadora científica

De todas las bases de logaritmos posibles, existen dos que se destacan por su importancia, estas son base 10 y base e.

Los logaritmos de base 10 se llaman **logaritmos decimales o de Briggs**, en honor al matemático que primero trabajó con ellos, y al simbolizarlos suele no escribirse en ellos la base, se sobreentiende que es 10 así: $\log 1000=\log_{10} 1000=3$

Estos logaritmos pueden calcularse usando calculadora científica, para ello se emplea la tecla $\boxed{\log}$:

Así, si quieres calcular log 3456 =.......

Oprimes las teclas $\boxed{\log}$ 3456 $\boxed{=}$ y resulta aproximadamente 3,53857.

Advierte que como el número tiene 4 cifras, la parte entera la puedes calcular sin necesidad de la calculadora y siempre es igual a ………………………………………………………………….

Esta es una de las ventajas que presentan los logaritmos decimales.

Los otros logaritmos, de base **e**, son muy empleados en matemática. El número **e** es un número irracional cuya primeras cifras decimales son 2,7182818. Al número **e** se lo suele denominar número de Euler.

El número e es el número al que se acerca el resultado del cálculo $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ al considerar valores de *n* cada vez más grandes.

Se trata de un número irracional, la letra "e" se la asignó Euler a este número quien obtuvo 26 dígitos del mismo. Mostramos a continuación 100 dígitos decimales de este número, obtenidos mediante un software matemático:

e≈2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427

El número e tiene numerosas aplicaciones en varias ramas de la ciencia, biología, economía, etc.

Estos logaritmos se llaman **logaritmos naturales o neperianos** en honor al matemático Napier y suelen simbolizarse con la abreviatura **ln x** , es decir cada vez que leas **ln** piensa en: $\boxed{\log_e x}$

La calculadora científica posee una tecla que permite calcularlos $\boxed{\ln}$

Así si quieres calcular ln 324 =…….

Oprimes las teclas $\boxed{\ln}$ 324 $\boxed{=}$ y resulta aproximadamente 5,78074.

Para calcular logaritmos expresados en otra base distinta de e y de 10, debes recurrir a la propiedad de **CAMBIO DE BASE**:

Así para calcular $\log_3 15 = \dfrac{\log\ 15}{\log\ 3} = 2,46497$ al usar logaritmos decimales (base 10).

Es indistinto si se usa logaritmos naturales (base e): $\log_3 15 = \dfrac{\ln\ 15}{\ln\ 3} = 2,46497$

Prueba ahora calculando:

a) $\log_5 145 =$……

b) $\log_6 54 =$…….

c) $\log_{\frac{1}{4}} 64 =$……..

Algunas calculadoras permiten calcular directamente el logaritmo de un número en cualquier base, introduciendo primero el valor de la base y luego el del argumento. Revisa si la tuya es una de esas.

Ejercicio 7

Expresar cada una de las formas dadas como un solo logaritmo:

Haremos uno de ejemplo:

$$\log_c p + \frac{1}{2}\log_c b - 3.\log_c a = \log_c p + \log_c \sqrt{b} - \log_c a^3 = \log_c \frac{p.\sqrt{b}}{a^3}$$

a) log 7 – log 4 =

b) $\log_3 10$ - $\log_3 5$ =

c) $\log_2 (2x)$ – $\log_2 (x + 1)$ =

d) 2 log x - $\frac{1}{2}$ log (x – 2) =

e) 9 log 7 + 5 log 23 =

f) 3 (log x + log y – log z) =

g) 2 + 10 log 1,05 =

h) $\frac{1}{2}$ (log 215 + 8 log 6 – 3 log 121) =

Ejercicio 8

$A=\sqrt[5]{\frac{m^3.a}{u^2}}$, log *m* =0,5 log *a* =-1,5 log *u* = 2,5 ¿Cuánto vale A?

Ejercicio 9

Reducir a un único logaritmo:

a) $\log_3 x + 5\log_{\frac{1}{3}} x =$

b) $\log_{\frac{1}{2}} a - \log_{\sqrt{2}} a^5 =$

c) $\log_{\sqrt{k}} 3 - 2\log_k 5 - \log_{k^2} 3 =$

d) $\log_4 x + \log_{\frac{1}{4}} x - 3\log_4 x =$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales son aquellas ecuaciones en las que la incógnita se encuentra en el exponente.

En su resolución es común aplicar logaritmos.

Analizamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

$$9^{x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

Dada una ecuación exponencial observemos si es posible escribir todas las exponenciales en función de la misma base, si es posible lo hacemos: en este caso 9 y 1/3 son potencias de 3.

$\left(3^2\right)^{x-1}=\left(3^{-1}\right)^{2x}$ Aplicamos propiedades de la potenciación $3^{2.(x-1)}=3^{-2x}$

$3^{2x-2}=3^{-2x}$ Ahora como las potencias son iguales y la base es la misma, los exponentes deben ser iguales, entonces:

2 x-2 = - 2x $\Rightarrow\ 2x+2x=2\ \Rightarrow\ 4x=2\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}$

La solución es $x = \frac{1}{2}$ Verifiquemos $9^{\frac{1}{2}-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.\frac{1}{2}}$; $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Por supuesto que también podríamos haber elegido 9 o 1/3 para trabajar. Resuelve la ecuación utilizando una de estas dos bases.

Ejemplo 2:

$$2^{3x-5} = 24$$

En este caso no podemos expresar al 2 y al 24 como potencia de un mismo número, entonces recurrimos a los logaritmos.

Aplicamos la definición de logaritmo sabiendo que *3x-5* es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 24, entonces:

$3x - 5 = \log_2 24$ Y la ecuación resultante es una ecuación lineal

$3x - 5 = \frac{\log 24}{\log 2}$ = 4,5849 $\Rightarrow$ 3 *x*= 4,5849 + 5 $\Rightarrow$ $x = \frac{9,5849}{3}$ =3,1949

Ejemplo 3:

$$4\ .\ 2,3^x = 1,5^{x+1}$$

En este caso no encontramos una base común y tenemos exponenciales en ambos miembros. Una forma de proceder es aplicar logaritmos en la misma base en ambos miembros. Esta base a elegir puede ser cualquiera, si los cálculos los vamos a realizar con la calculadora científica conviene usar base 10 o base e.

$\log\left(4\ .\ 2,3^x\right) = \log 1,5^{x+1}$ Aplicamos las propiedades del logaritmo

$$\log\ 4\ + \log\ 2,3^x = \ (x+1)\ \log 1,5$$

$\log\ 4\ + x.\log\ 2,3 = (x+1)\ .\ 0,176$ Resultó ahora una ecuación lineal.

$$\log\ 4\ + x.\ 0,3617 = (x+1)\ .\ 0,176 \qquad \Rightarrow\ 0,602\ + x.\ 0,3617 = \ 0,176.\ x\ +\ 0,176$$

$$\Rightarrow \quad 0,3617x - 0,176.\,x = 0,176 - 0,602 \qquad \Rightarrow \quad 0,1857\,x = -\,0,426$$

$$\Rightarrow \quad x = -\,\frac{0,426}{0,1857} = -\,2,294$$

Ejemplo 4:

$$2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^{x} = \frac{7}{3}$$

Esta ecuación, a diferencia de las anteriores, tiene sumas y no hay ninguna propiedad de la potencia que nos permita agruparlas, y si aplicamos logaritmos a ambos miembros no existe ninguna propiedad para el logaritmo de una suma, entonces procedemos de otra manera:

Aplicando las propiedades de la potencia aislamos 2^x que es la exponencial que se repite.

$$2^{x}.2^{2} + 2^{x}.2 + 2^{x} = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad 2^{x}.4 + 2^{x}.2 + 2^{x} = \frac{7}{3}$$ Sacamos factor común 2^x

$$2^{x}.(4+2+1) = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad 7.\ 2^{x} = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad 2^{x} = \frac{7}{3} : 7 \quad \Rightarrow \quad 2^{x} = \frac{1}{3}$$ Aplicamos la definición de logaritmo $$x = \log_2 \frac{1}{3} = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 2} = -1,5849$$

Ejemplo 5:

$$\left(9^{x+1}\right) - 3^{x} = 6534$$

Esta ecuación también tiene una resta y es posible expresar al 9 como potencia del 3.

$$\left(3^{2}\right)^{x+1} - 3^{x} = 6534 \quad \Rightarrow \quad 3^{2.(x+1)} - 3^{x} = 6534 \quad \Rightarrow \quad 3^{2.x+2} - 3^{x} = 6534$$ Aplicando propiedades de potencia, ahora aislamos 3^x

$$3^{2x}.3^{2} - 3^{x} = 6534 \quad \Rightarrow \quad \left(3^{x}\right)^{2}.9 - 3^{x} = 6534$$ La ecuación resultante se parece a una ecuación cuadrática, pero en 3^x, ya que 3^x figura al cuadrado en un término, a la primera en otro y a la cero (no figura) en el tercero.

Para clarificar la resolución recurrimos a una incógnita auxiliar, la llamamos *"t"*, es decir, $t = 3^x$

Reemplazando en la ecuación resulta: $t^2.9 - t = 6534 \quad \Rightarrow \quad 9t^2 - t - 6534 = 0$

Resolvemos: $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4.\ 9.\ 6534}}{18} = \dfrac{1 \pm \sqrt{235225}}{18} = \dfrac{1 \pm 485}{18}$

$t_1 = \dfrac{486}{18} = 27 \quad \text{y} \quad t_2 = -\dfrac{484}{18} = -26,\widehat{8}$

Averiguados los valores de t, debemos buscar los valores de nuestra incógnita, que es la x, recordando que $t = 3^x$.

$t_1 = 27 \quad \Rightarrow \quad 3^x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = \log_3 27 = 3$

$t_2 = -26,\widehat{8} \quad \Rightarrow \quad 3^x = -26,\widehat{8}$ Pero no existe una potencia de 3 que dé un número negativo, el logaritmo no está definido para números negativos, entonces, de este valor de t no obtenemos un valor de x .

Ejercicio 10

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $3^{5x+2} = 243$

b) $16^{5-x} = 4$

c) $8^{x-2} - 0,125 = 0$

d) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

e) $(8^x)^2 : 9^{2x} = \frac{1}{64}$

f) $20^x = 2^{2x+1}.5^{2x}$

g) $3^{x^2+3x} - \dfrac{1}{9} = 0$

h) $(4^x)^2 - 3.4^x + 2 = 0$

i) $(2^x)^2 - 2^{x+1} + 1 = 0$

j) $\dfrac{3^{x^2}}{9} = 3^{2+3x}$

k) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^{-x}} - 10.3^{x-1} = 0$

l) $\dfrac{3^{x-1}}{9^{x+2}} = \dfrac{9^{x-1}}{3^{x+1}}$

Algunas de estas ecuaciones se explican en el siguiente vídeo https://youtu.be/HR9Wm7tcxjk

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita está afectada por la operación de logaritmación, puede figurar tanto en el argumento como en la base del logaritmo.

Normalmente en su resolución deben aplicarse la definición del logaritmo y sus propiedades.

Debido a las condiciones necesarias para la definición del logaritmo, previo a resolver una ecuación vamos a calcular el Dominio o conjunto de definición de ella.

Ejemplo 1:

$$\log_2(x-1) = -1$$

La incógnita figura en el argumento del logaritmo entonces se debe cumplir que: *x - 1 > 0* entonces *x > 1*. La ecuación tiene como Dominio de definición al intervalo $D = (\ 1\ ;\ +\infty)$. La solución a obtener debe pertenecer a este conjunto.

Para resolverla aplicamos la definición de logaritmo

$$2^{-1} = x-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = x-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}+1 = x \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = x$$

$\frac{3}{2}$ Pertenece al intervalo Dominio, entonces es la solución de la ecuación.

Ejemplo 2:

$$\log_3(x+4) + \log_3(x-4) = 2$$

Para buscar el dominio ahora debemos resolver dos inecuaciones y buscar la intersección de los conjuntos solución de ellas *x + 4 > 0* entonces *x > - 4* y por otro lado *x - 4 > 0* entonces *x > 4* . Los números que cumplen a la vez ambas desigualdades son los *x > 4* entonces el Dominio de definición al intervalo $D = (\ 4\ ;\ +\infty)$.

Para resolver la ecuación recurrimos a las propiedades del logaritmo

$\log_3\left[(x+4)(x-4)\right] = 2$ Debido a que la suma de dos logaritmos de igual base es el logaritmo del producto de los argumentos en esa misma base.

$\log_3\left(x^2-16\right)=2$ Para eliminar el logaritmo en la ecuación, usamos su definición

$$3^2=x^2-16 \Rightarrow \quad 9=x^2-16 \quad \Rightarrow \quad 9+16=x^2 \quad \Rightarrow \quad 25=x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25}=|x|$$

Entonces $x = 5$ ó $x = -5$ pero de acuerdo al Dominio, la incógnita debe ser mayor que 4, entonces la solución de la ecuación es solo *x = 5*

Ejemplo 3:

$$\log_3(2x+1)=\log_3(x+2)$$

Calculamos el Dominio $\begin{array}{ccc} 2x+1>0 & \text{y} & x+2>0 \\ x>-\frac{1}{2} & \text{y} & x>-2 \end{array}$ los números que cumplen a la vez que son mayores que -2 y mayores que $-\frac{1}{2}$ son los mayores que $-\frac{1}{2}$, entonces el Dominio de definición es el intervalo $D=\left(-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right)$.

Para resolver la ecuación pensemos que ahora tiene logaritmo en ambos miembros, pero al ser de igual base, la ecuación expresa que los exponentes de las dos potencias son iguales y tienen la misma base, entonces el resultado, la potencia, debe ser igual, por eso podemos igualar los argumentos.

$2x+1 = x+2$ Resultando entonces una ecuación lineal $2x-x=2-1$ entonces x = 1 que al pertenecer al Dominio, es la solución de la ecuación.

Ejemplo 4:

$$\log_6(2x+7)-\log_6(x-1)=\log_6(x-7)$$

Calculamos el Dominio $\begin{array}{ccccc} 2x+7>0 & \text{y} & x-1>0 & \text{y} & x-7>0 \\ x>-\frac{7}{2} & \text{y} & x>1 & \text{y} & x>7 \end{array}$ los números que cumplen a la vez que son mayores que 1, mayores que 7 y mayores que $-\frac{7}{2}$ son los mayores que 7, entonces el Dominio de definición al intervalo $D=(7\ ;\ +\infty)$.

Para resolver la ecuación, aplicamos las propiedades del logaritmo:

$$\log_6 \left(\frac{2\,x+7}{x\text{-}1} \right) = \log_6 (\,x - 7\,)$$

$\frac{2\,x+7}{x\text{-}1} = x - 7$ 2 x +7 = (x - 7). (x – 1)

$$\Rightarrow \quad 2x+7 = x^2 - 8x + 7 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 8x + 7 - 2x - 7 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 10x$$

0 = x (x-10) entonces x = 0 ó x = 10 como el conjunto de definición está formado por números reales mayores que 7 , la solución de la ecuación es solo x = 10 .

Ejemplo 5:

$$\log_3 x - \log_9 x = 1$$

Para comenzar buscamos el dominio de definición, es x > 0 , entonces $D = \Re^{+}$

Esta ecuación difiere de las analizadas anteriormente ya que los logaritmos que presenta tienen distintas bases, para resolverla debemos cambiar la base y expresarlos todos en una base común.

Como 9 es potencia del 3 podemos usar base 3 o base 9. Si las bases no son potencias una de otra emplearíamos algunas de las que figuran en la calculadora científica.

Usaremos base 3:

$\log_3 x - \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = 1$ El logaritmo del denominador es inmediato, lo resolvemos:

$$\log_3 x - \frac{\log_3 x}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 x = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log_3 x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \log_3 x = 1 : \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \log_3 x = 2$$

Aplicando la definición, resulta:

$x = 3^2 = 9$ Como *x = 9* pertenece al Dominio es solución de la ecuación.

Ejercicio 11

Resolver las siguientes ecuaciones dando previamente el conjunto definición:

a) $\log_{12}(4x+2) = 0$

b) $\log(\log x) = 1$

c) $\log_2(8x) + \log_2(4x^2) = 8$

d) $\log_5(x+12) - \log_5(x+2) = 1$

e) $10.\log_5 x + 5 - 5.\log_5 x = 0$

f) $\log_2(x-3) - \log_2(2x+1) = -\log_2 4$

g) $\log_2 x - \log_8 x = 1$

h) $\log_{\sqrt[4]{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x+1) = \log_3(x+1) + 2$

i) $\log 54 - \log 2 = 2\log x - \log\sqrt{x}$

j) $\log_5^2 x - 2\log_5 x - 8 = 0$

k) $\log(x-3) + \log x = \log 4$

l) $\log(x-8) + \log(x-2) = \log(8-x)$

m) $\log(x+6) - \frac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$

n) $\log_2(2x+2) - \log_2(-x+2) = 2$

Algunas de estas ecuaciones se explican en el siguiente video https://youtu.be/uKehIh7dfP8

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Grafica en un mismo sistema de ejes las siguientes funciones:

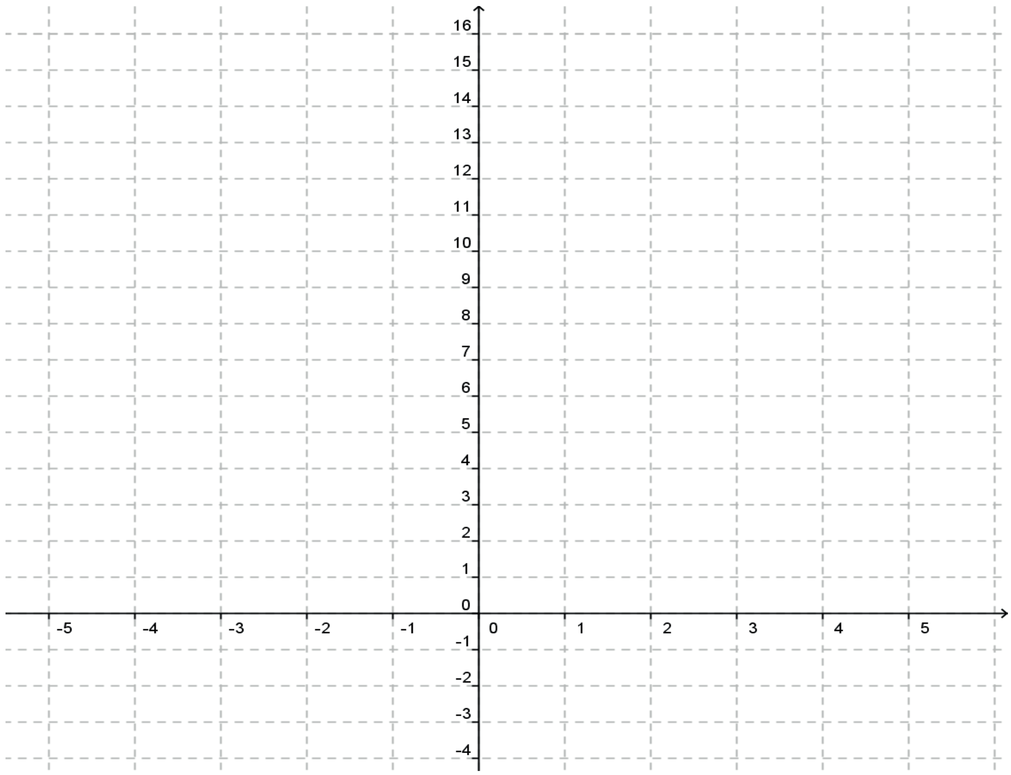
a) $y = 4^x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y = 2^x$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = 4^x$
……	

x	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
……..	

x	$y = 2^x$
…….	

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
……..	



Observando los gráficos obtenidos, completar:

-¿Cuál es el Dominio de estas funciones? ………………………………….

-Todas las curvas están incluidas en el semiplano ……………………… respecto del eje x.

- El conjunto Imagen de todas ellas es: …………

-Todas las curvas cortan al eje y en el punto de coordenadas (…….. ; ……..)

-Si a $>$ 1 entonces el valor de y= a^x …………………….. al aumentar el valor de x.

-Si 0 $<$ a $<$ 1 entonces el valor de y = a^x ……………………….. al aumentar el valor de x.

-Las gráficas de y = 2^x e y = ……………… son simétricas entre sí respecto del eje y.

-Las gráficas de y=4^x e y=………son simétricas …………… ……………………………………………………………………….

Se llama función exponencial a una función en la que la variable se encuentra en el exponente.

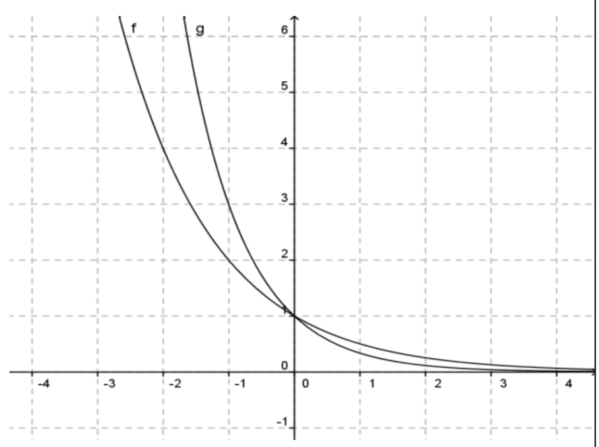
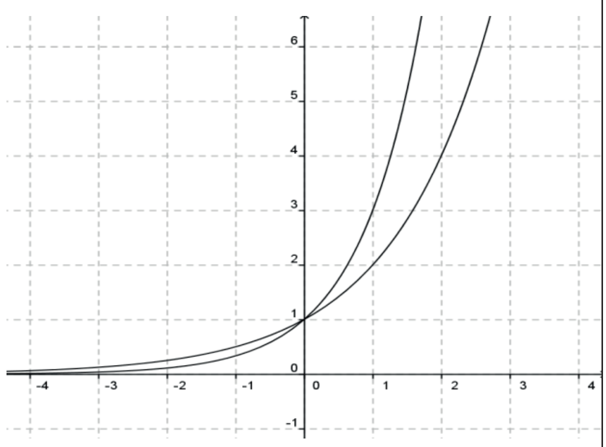
Función exponencial es una función $f:\Re\rightarrow\Re$

dada por $f(x)=a^x$ siendo $a>0 \quad y \quad a\neq 1$

Dominio : $\Re$ Imagen : $\Re^+=(0\ ;+\infty)$

La intersección con el eje y, es el punto de coordenadas (0 ; 1), entonces la ordenada al origen es y=1

Los gráficos realizados difieren teniendo en cuenta si la base de la función exponencial es un número mayor o menor que 1 (siendo siempre positivo)

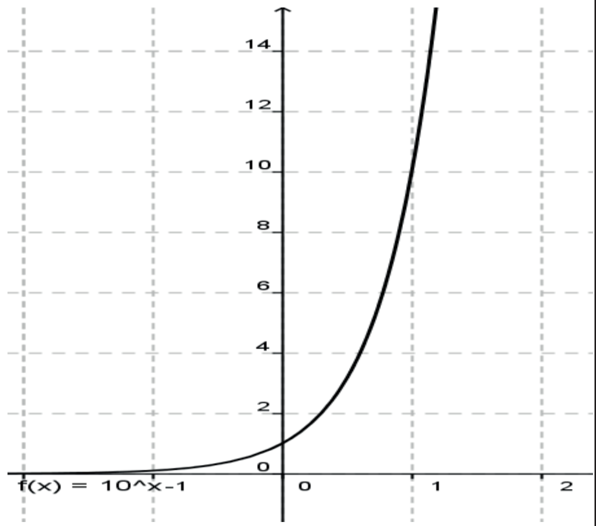
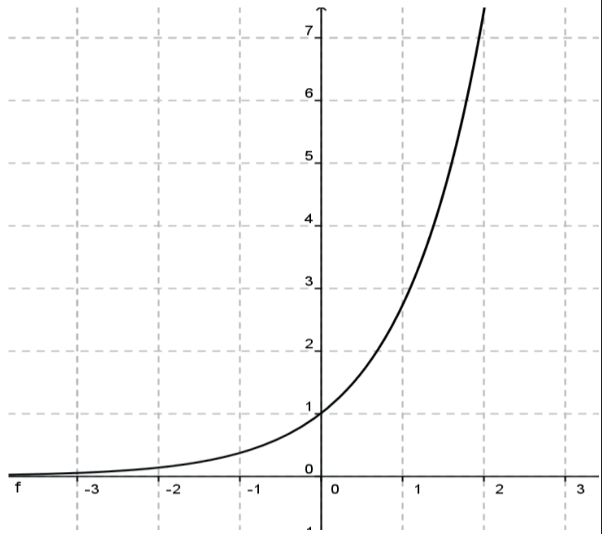
$0 < a < 1$	$a > 1$
	
La función es decreciente	La función es creciente

En el caso en que $0 < a < 1$ la función se acerca a 0 al considerar valores de x cada vez más grandes, decimos que la función tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$ y en el caso de $a > 1$ la función se acerca a 0 al considerar valores de x cada vez más chicos, decimos que la función tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$, en ambos casos vemos que las curvas se acercan al eje x, se aproximan a la recta de ecuación y = 0. Se dice que la recta y = 0 (eje x) es una ***asíntota horizontal*** de la función.

Te recomendamos que veas este documento dinámico que te ayudará a comprender mejor las gráficas antes explicadas https://www.geogebra.org/graphing/gxqaxpur

Ya que hemos hablado en especial de los logaritmos decimales y naturales, te presentamos los gráficos de las funciones $y = 10^x$ e $y = e^x$.

Al poseer bases mayores que 1, presentan las características explicadas para ese caso:

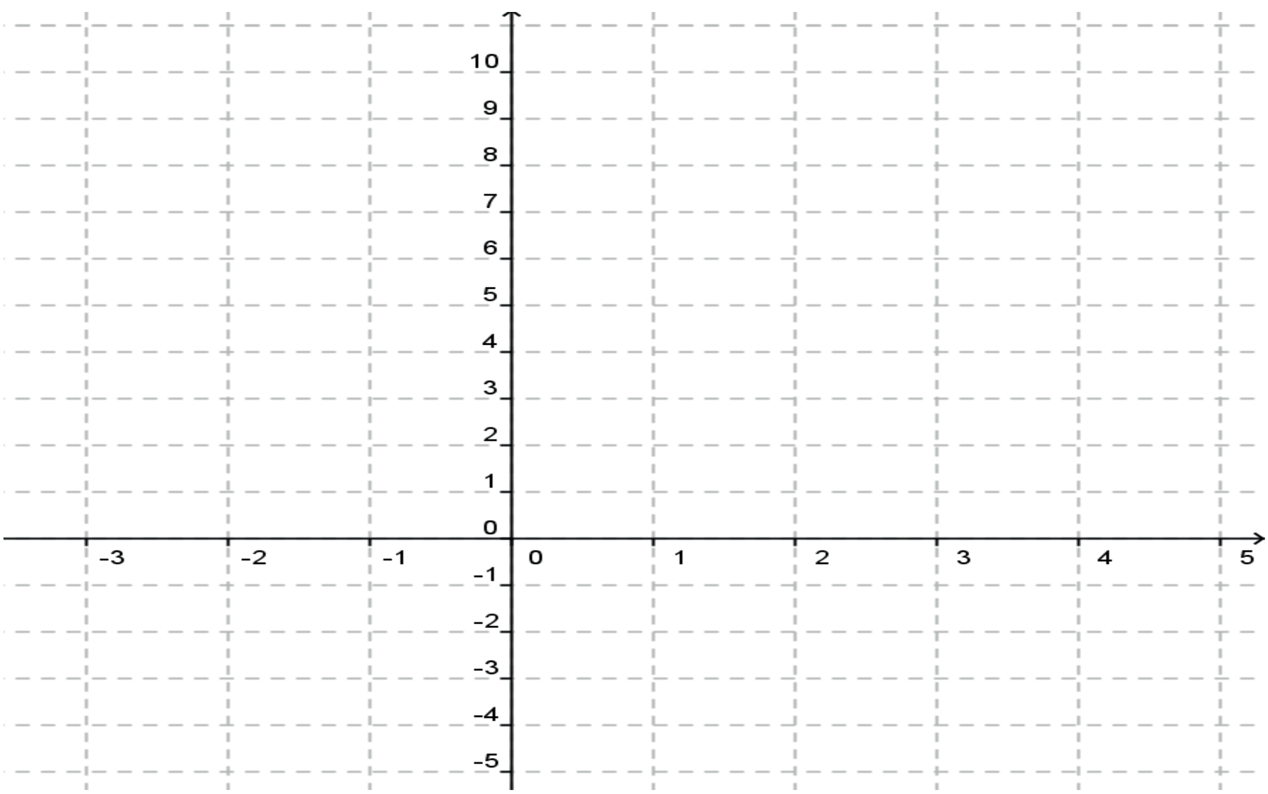
$y=10^x$	$y=e^x$
	

La función $y=e^x$ presenta propiedades especiales, que irás estudiando al avanzar en tus estudios y por ello es considerada la función exponencial por excelencia.

Desplazamientos

Representa en el sistema de ejes cartesianos dado, las siguientes funciones y completa la tabla.

$f(x)=2^x$ $\qquad g(x)=2^x+2$ $\qquad h(x)=2^x-3$



FUNCIÓN	$g(x) = 2^x + 2$	$h(x) = 2^x - 3$
Dominio		
Imagen		
Asíntota		
Ceros o Raíces		
Ordenada al origen		
¿Es creciente o decreciente?		
Conjunto de Positividad		
Conjunto de Negatividad		

Explica con tus palabras qué modificación sufrió, en cada caso, el gráfico de la función básica $f(x) = 2^x$

En general, cuando a la fórmula de una función básica se le suma un número ***k*** , su gráfica se desplaza en sentido vertical ***k*** unidades.

Desplazamiento vertical

Sea *y = f(x)*

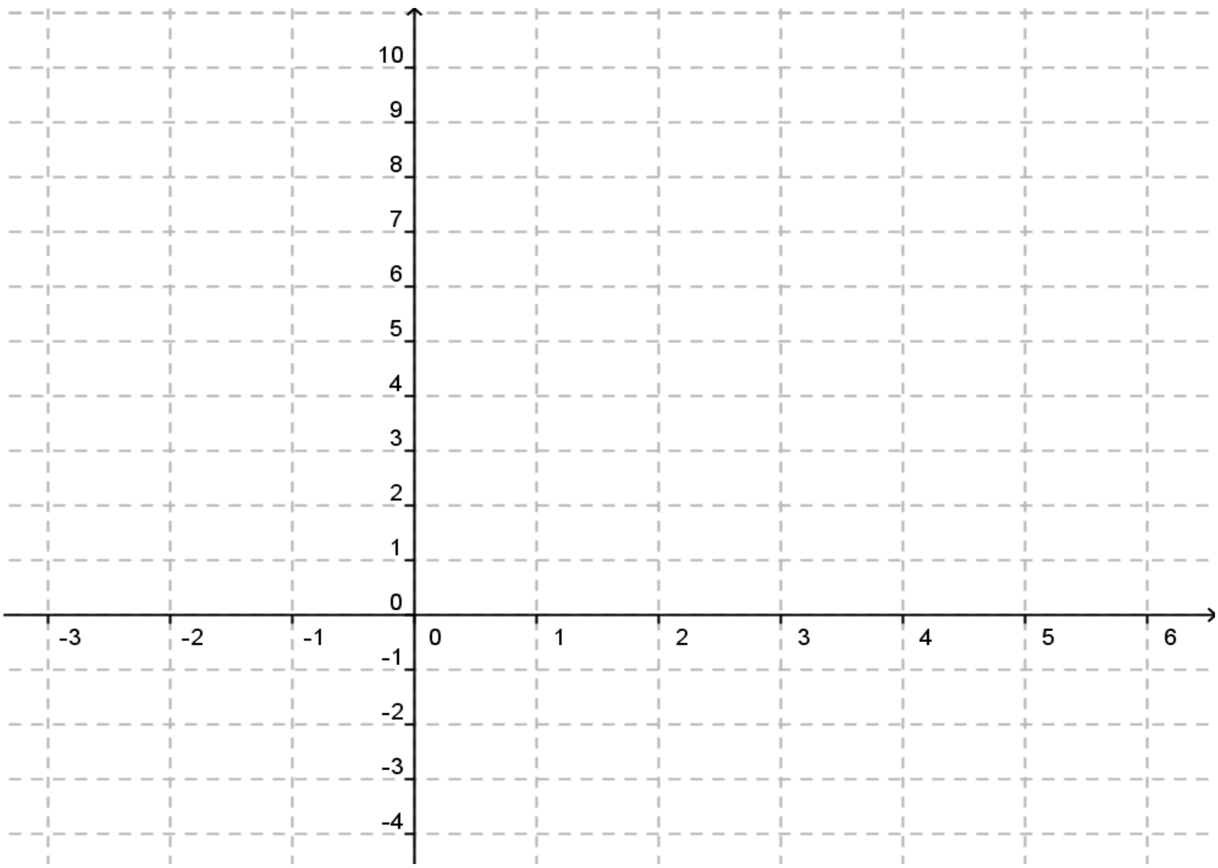
y = f (x) + k es el desplazamiento vertical de $y = f(x)$,

k unidades hacia arriba si *k* > 0 y *k* unidades hacia abajo si *k* < 0

Recuerda lo analizado para la función cuadrática.

Realiza lo mismo para las funciones:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 2^{x+1} \qquad h(x) = 2^{x-3}$$



Completa la siguiente tabla:

FUNCIÓN	$g(x)=2^{x+1}$	$h(x)=2^{x-3}$
Dominio		
Imagen		
Asíntota		
Ceros o Raíces		
Ordenada al origen		
¿Es creciente o decreciente?		
Conjunto de Positividad		
Conjunto de Negatividad		

Explica con tus palabras qué modificación sufrió, en cada caso, el gráfico de la función básica $f(x)=2^{x}$

En general, cuando a la variable independiente de una función básica se le resta un número *h* , su gráfica se desplaza en sentido horizontal *h* unidades.

Desplazamiento horizontal

Sea *y = f(x)*

$y = f(x-h)$ Es el desplazamiento horizontal de $y = f(x)$,

h unidades hacia la derecha si *h* >0 y *h* unidades hacia la izquierda si *h*<0

Recuerda lo analizado para la función cuadrática!

Veamos un ejemplo:

Graficaremos y analizaremos la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 2$

Para representarla consideraremos que la función básica $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ sufrió dos modificaciones, una debido al +1 y otra al -2.

Como el +1 afecta a la variable independiente de la función representa un desplazamiento en horizontal, *h=-1* (Recuerda que *h* es el número que resta a x y x+1 es igual a x-(-1)), se desplaza una unidad hacia la izquierda.

En cambio el -2 resta a la función exponencial, corresponde al valor de *k, k = -2,* el gráfico se desplaza 2 unidades hacia abajo.

Este desplazamiento modifica la Imagen de la función y su asíntota horizontal que también se traslada 2 unidades hacia abajo. La asíntota horizontal es la recta y = -2

Para realizar el gráfico conviene calcular primero algunas características.

Dominio: por ser una función exponencial el Dominio es D $= \Re = (-\infty; +\infty)$

Ordenada al origen: f(0) $= \left(\frac{1}{3}\right)^{0+1} - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$

La curva corta al eje y en el valor $-1,\widehat{6}$

Raíz: para calcularla buscamos el valor de x cuya imagen es 0 , f(x) = 0

$$0=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-2 \quad\Rightarrow\quad 2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

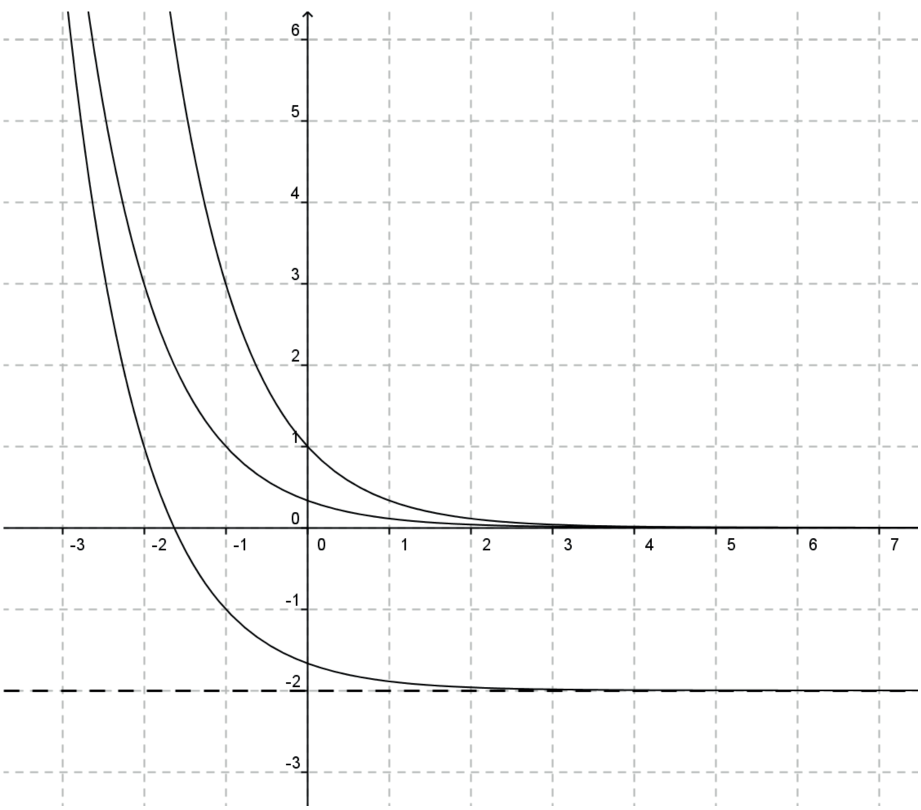
Aplicando la definición de logaritmo resulta :

$$x+1=\log_{\frac{1}{3}} 2 \qquad\Rightarrow\qquad x=\log_{\frac{1}{3}} 2 \ - \ 1=\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}-1\cong -0,63-1=-1,63$$

La curva corta al eje x en el valor x = -1,63

La función es **decreciente** ya que la base del logaritmo es $\frac{1}{3}$, menor que 1.

En el gráfico siguiente se muestran, la función original $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, la función desplazada una unidad hacia la izquierda $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ y la función pedida $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-2$



Podemos completar el análisis de la función, diciendo que:

Los intervalos de negatividad y positividad son: $C^{-}=(-1,63;+\infty)$ y $C^{+}=(-\infty;-1,63)$

El conjunto Imagen es : $I=(-2;+\infty)$

Intenta ahora con las siguientes funciones

Recomendamos ver el siguiente video donde se explican las transformaciones de una función trascendente (irracional) para profundizar el tema: https://youtu.be/0svluyGxO6w

Ejercicio 12

Para cada una de las siguientes funciones indica los desplazamientos, realiza su gráfico cartesiano e indica Dominio, Imagen, raíz, ordenada al origen, crecimiento, conjuntos de positividad y negatividad. Ecuaciones de las Asíntota,

a) $y=2^{x+2}+3$

b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-6$

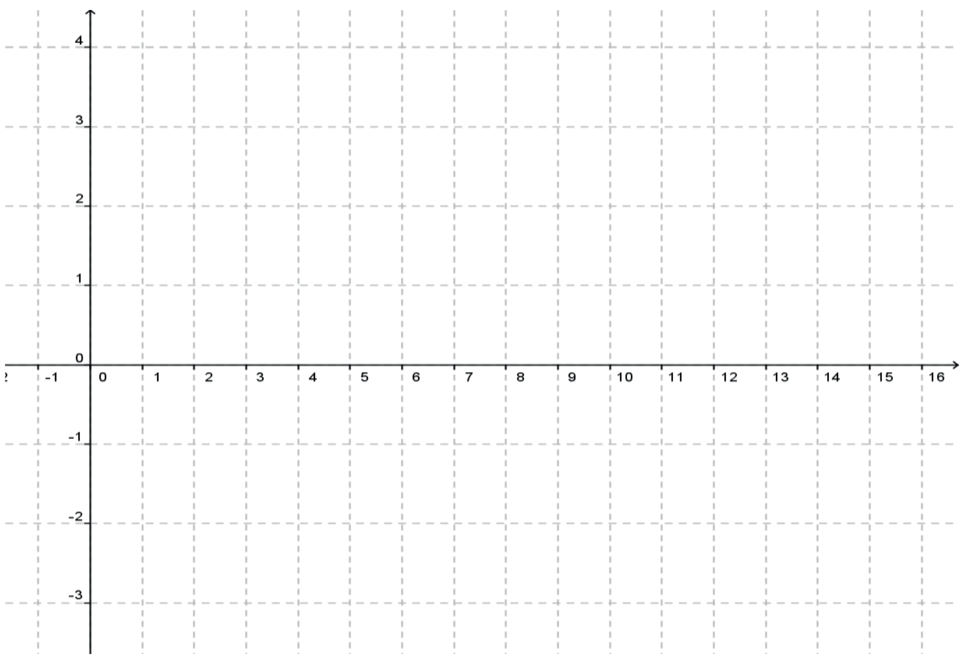
c) $y=3^{(x+2)}-7$

d) $y=4^{\ (x+1)}-5$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Representar en un mismo sistema de ejes cartesianos (se sugiere hacer tabla de valores para cada una)

$y = \log_2 x$ $\quad$ $y = \log_3 x$ $\quad$ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\quad$ $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



Observando las gráficas del punto anterior, completar:

-Todas las curvas pasan por el punto (…… , ……)

-Las gráficas de $y = \log_2 x$ e $y =$ …………….. son simétricas entre sí respecto de ………..

-Las gráficas de $y = \log_3 x$ e $y=$………….. son simétricas entre sí respecto de ……….

-Si $a > 1$ entonces el valor de $y = \log_a x$ …………………………………… al aumentar el valor de x.

-Si $a > 1$ $y > 0$ $\forall$ x …………………

$y < 0$ $\forall$ x ………………..

-Si $0 < a < 1$ entonces el valor de $y = \log_a x$ ……………………………… al aumentar el valor de x.

-Si $0 < a < 1$ $y > 0$ $\forall$ x ………………… $\wedge$ $y < 0$ $\forall$ x ………………..

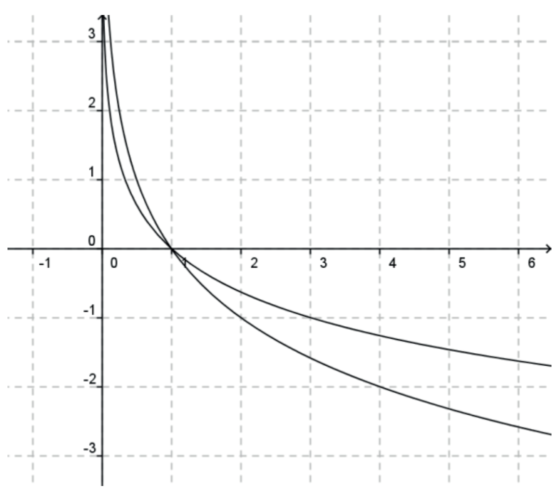
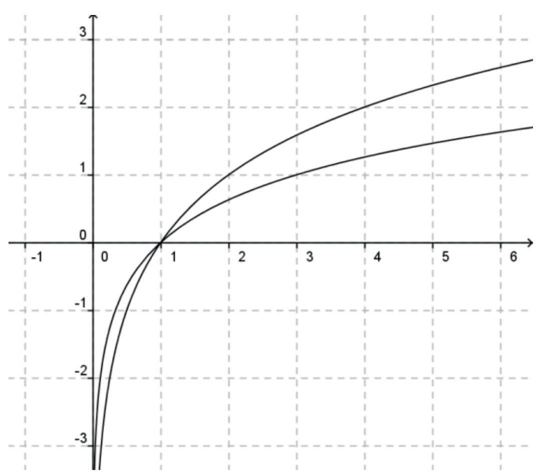
Función logarítmica es una función $f : \Re^+ \to \Re$

dada por $f(x) = \log_a x$ siendo $a > 0$ y $a \neq 1$

Dominio : $\Re^+ = (0\ ; +\infty)$ Imagen : $\Re$

La intersección con el eje x es el punto (1 ; 0), por consiguiente, la raíz o cero de la función es x = 1 , teniendo en cuenta la propiedad de los logaritmos que indica que logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

Los gráficos difieren de acuerdo a si la base de la función logarítmica es un número mayor o menor que 1 (siendo siempre positivo)

$0 < a < 1$	$a > 1$
	
La función es decreciente	La función es creciente

En el caso en que de $a > 1$ los valores de la función se hacen cada vez más chicos (más grandes en valor absoluto pero negativos) al considerar valores de x cada vez más cercanos al 0, decimos que la función tiende a $-\infty$ cuando x tiende a 0 y en el caso de $0 < a < 1$ los valores de la función se hacen cada vez más grandes al considerar valores de x cada vez más cercanos a 0, decimos que la función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a 0, en ambos casos vemos que las curvas se acercan al eje y, se acercan a la recta de ecuación x = 0 . Se dice entonces, que la recta x = 0 (eje y) es una ***asíntota vertical*** de la función.

Te recomendamos el siguiente documento dinámico para complementar las explicaciones sobre Funciones logarítmicas: gráficas de acuerdo a sus bases https://ggbm.at/FbDrZPMp

Desplazamientos

Las modificaciones estudiadas, en cuanto a los desplazamientos, para las funciones exponenciales se cumplen también en las funciones logarítmicas:

Desplazamientos horizontales y verticales sea $y = \log_a(x)$

$y = \log_a(x) + k$ Es el desplazamiento en vertical de $y = \log_a(x)$

k unidades hacia arriba si *k* > 0 y *k* unidades hacia abajo si *k* < 0

$y = \log_a(x - h)$ Es el desplazamiento en horizontal de $y = \log_a(x)$

h unidades hacia la derecha si *h* >0 y *h* unidades hacia la izquierda si *h* < 0

Ejemplo:

Dada la función $y = \log_2(x+3) - 4$ para representarla se puede considerar que la función básica $y = \log_2(x)$ sufrió dos modificaciones, una debido al +3 y otra al -4.

Como el +3 afecta a la variable independiente de la función, representa un desplazamiento en horizontal, *h=-3* (Recuerda que *h* es el número que resta a x y x+3 = x-(-3)), se desplaza 3 unidades hacia la izquierda.

Este desplazamiento modifica al Dominio de la función y a su asíntota vertical que también se traslada 3 unidades hacia la izquierda.

En cambio, el -4 resta a la función logaritmo, corresponde al valor de k, el gráfico se desplaza 4 unidades hacia abajo.

Para realizar el gráfico conviene calcular primero algunas características.

Dominio:

Para que el logaritmo esté definido su argumento debe ser positivo $x + 3 > 0 \;\Rightarrow\; x > -3$

Esto nos indica que : $D = (-3, +\infty)$ y su asíntota vertical es x = -3

Ordenada al origen: f(0) = $y=\log_2(0+3)-4=-4+\log_2 3=-4+\dfrac{\log 3}{\log 2}\cong -4+1,58=-2,42$

La curva corta al eje y en el valor -2,42

Raíz: para calcularla buscamos el valor de x cuya imagen es 0 , f(x) = 0

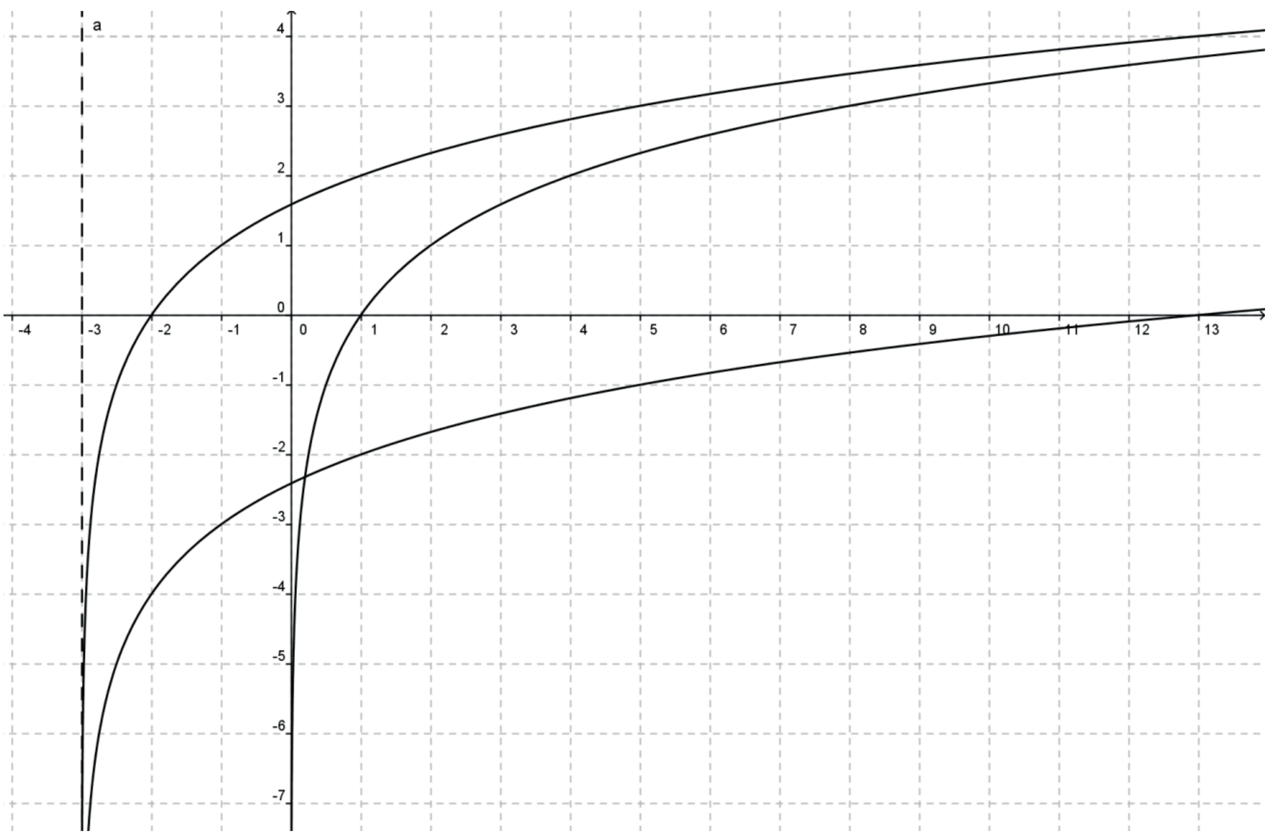
$0=\log_2(x+3)-4 \quad\Rightarrow\quad 4=\log_2(x+3)$ Aplicando la definición de logaritmo resulta:

$2^4=x+3 \quad\Rightarrow\ 16-3=x \quad\Rightarrow\ 13=x$

La curva corta al eje x en el valor x = 13

La función es **creciente** ya que la base del logaritmo es 2, mayor que 1.

En el gráfico siguiente se muestran, la función original $y=\log_2(x)$, la función desplazada 3 unidades hacia la izquierda $y=\log_2(x+3)$ y la función pedida $y=\log_2(x+3)-4$



Podemos completar el análisis de la función, diciendo que

Los intervalos de negatividad y positividad son: $C^-=(-3;13)$ y $C^+=(13;+\infty)$

El conjunto Imagen es : $I = \Re = (-\infty; +\infty)$

Ejercicio 13

Para cada una de las siguientes funciones realiza su gráfico cartesiano e indica Dominio, Imagen, ecuación de la Asíntota, raíz, ordenada al origen, crecimiento, conjuntos de positividad y negatividad.

a) $y = \log_3(x+4)+2$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

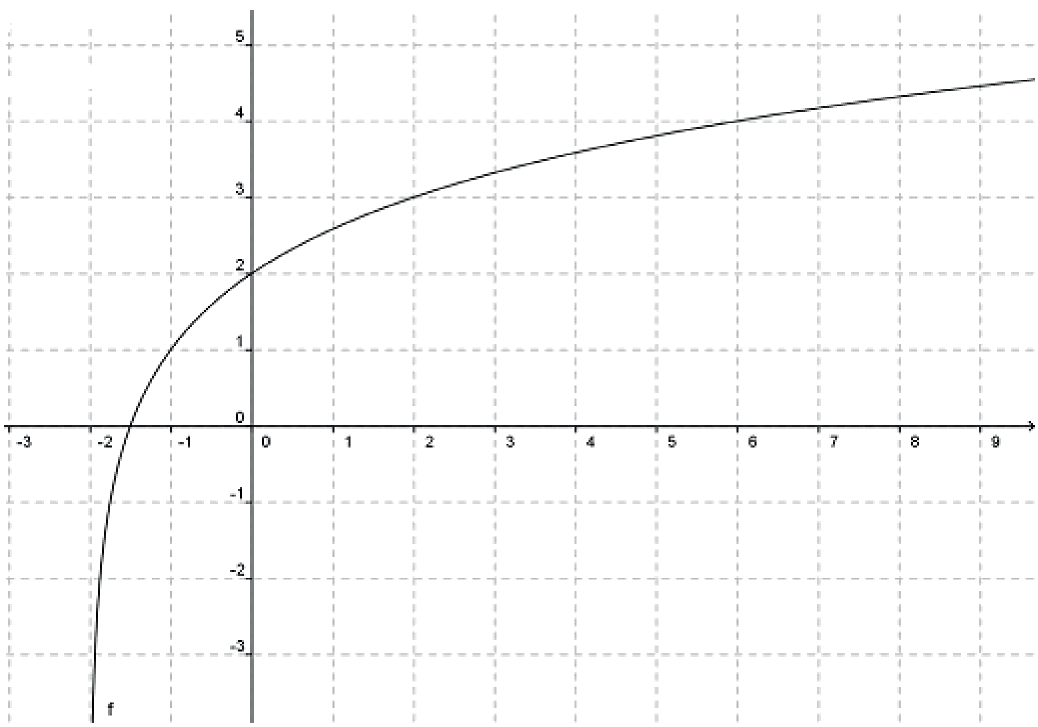
c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$

d) $y = \log_2(x-3)-4$

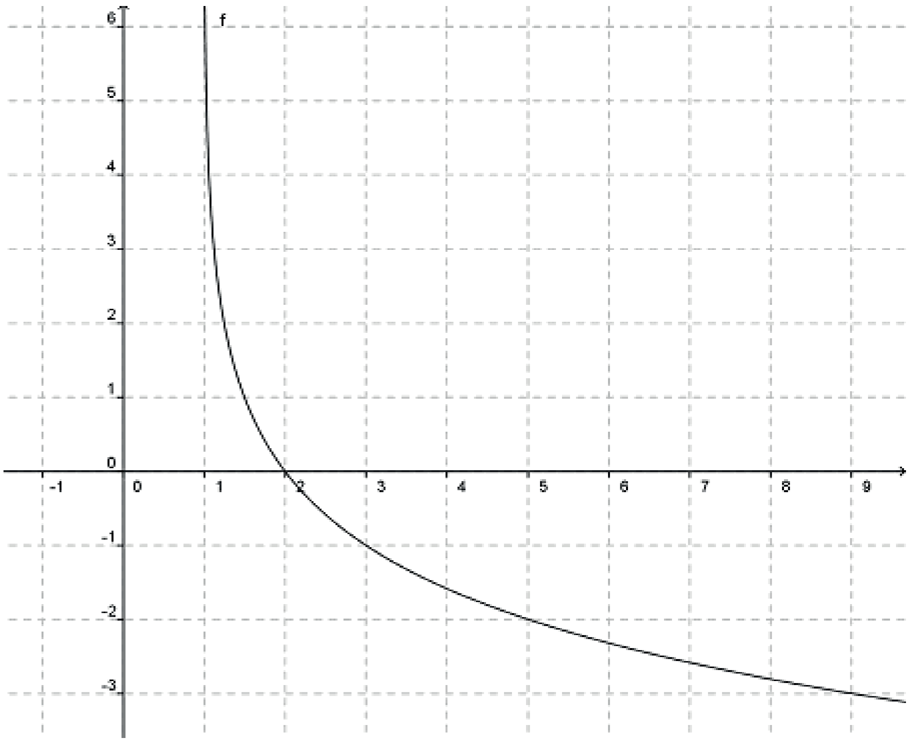
Ejercicio 14

Los siguientes gráficos corresponden a funciones logarítmicas, de la forma $y = a\ \log_2(x-h)+k$. Calcula el valor de *a* ,*h* y *k* en cada caso

I)



II)



Ejercicio 15

Encuentra la función exponencial $f(x) = Ca^x$ si la gráfica de la misma pasa por los puntos (1;6) y por (3;24). Represéntala

Recomendamos ver los siguientes videos sobre funciones logarítmicas, síntesis de esta última parte del manual https://youtu.be/zhIpsBdrDBQ

PROBLEMAS CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejercicio 16

Para una población de células el número **N** de células en el tiempo **t** está dado por $\mathbf{N = N_0 (2^{\frac{t}{k}})}$ en donde $\mathbf{N_0}$ es el número de células en t=0 y **k** es una constante positiva.

¿Qué ocurre cuando t = k?

¿Qué tiempo t se requiere para que una población crezca hasta un valor igual a N_1?

Ejercicio 17

El número **Q** de miligramos de una sustancia radiactiva que restan después de **t** años, está dado por $\mathbf{Q = 100\ e^{-0,035\ t}}$.

¿Cuántos mg hay en el momento inicial?

¿Después de cuántos años habrá 20 mg? Dar la respuesta al año más cercano.

Ejercicio 18

De acuerdo con Richter, la magnitud **M** de un terremoto que ocurre a 100 km de distancia de cierto sismómetro está dada por **M = log (A) + 3**, en donde **A** es la amplitud de la traza registrada (en mm) del temblor.

Obtener la magnitud de un terremoto que registra una amplitud de traza de 1 mm.

Si un sismo en particular tiene una amplitud de A_1 y una magnitud de M_1, determinar la magnitud de un sismo con amplitud 100 A_1. Expresar la respuesta en términos de M_1.

Ejercicio 19

En una cena se sirve un tazón de sopa caliente. Empieza a enfriarse con la ley de enfriamiento de Newton de forma que su temperatura en el tiempo t está dada por

$T(t) = 65 + 145e^{-0,05t}$, donde t se mide en minutos y T en grados Fahrenheit.

1.- ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

2.- ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?

3.- ¿Después de cuánto tiempo llegará la temperatura a los 100ºF?

Ejercicio 20

La población proyectada **P** de una ciudad está dada por **P = 125000 (1,12)** $^{\frac{t}{20}}$, en donde **t** es el número de años después de 1990. ¿Cuál es la magnitud de la población proyectada para el 2010?

Explicado en el siguiente video https://youtu.be/9akfrHXlPNM

Ejercicio 21

La fórmula de Ehremberg ln P = ln 2,4 +1,84 A es una fórmula empírica que relaciona la altura A en metros con el peso P (en kg) para niños entre 5 y 13 años . se pide:

a) Calcular el peso aproximado de un niño de 1,2 m de altura

b) Calcular la altura aproximada de un niño que pesa 40 kg

Ejercicio 22

El tiempo(en horas) requerido para cargar una batería descargada por completo hasta una carga C se expresa como: $t = -k.\ln\left(1-\frac{C}{C_0}\right)$, donde k es una constante positiva que depende de la batería y C_0 representa la carga máxima. Para cierta batería k=0.25. Si está totalmente sin carga ¿Cuánto tiempo tomará cargar hasta 90% de su carga máxima?

INFORMACIÓN FINAL

En el siguiente video te mostramos la clasificación de las funciones de acuerdo a la operación que afecta a la variable independiente. En este capítulo vimos funciones exponenciales y logarítmicas que pertenecen al grupo de las trascendentes, pero a lo largo de todo el manual hemos visto otro tipo de funciones como las lineales y cuadráticas. No son las únicas funciones que existen y es importante que tengas un panorama amplio del tema. Por eso te invitamos a que mires este video para profundizar el tema FUNCIONES.

https://youtu.be/Yyk8DRN_uas

Y PARA FINALIZAR RECOMENDAMOS COMO DESAFÍO QUE REALICEN EL JUEGO DE ESCAPE DONDE REPASARÁN TODOS LOS TEMAS DEL INGRESO DE UNA FORMA DIFERENTE. ¡SUERTE!

https://view.genial.ly/60e9c188e1524f0d6110f3fb/interactive-content-gisele-de-pietri-u

Esp. Gabriela Ocampo

Coordinadora

Geometría

Colaboradora:

Mg. Roxana Scorzo

PROGRAMA

FUNDAMENTACIÓN

La matemática a lo largo de la historia del pensamiento ha cumplido un rol esencial. Desde los tiempos de Pitágoras, la matemática en su forma más pura, ha constituido una forma de pensamiento fundamental en nuestra cultura occidental.

Un alumno aspirante a ingresar en una carrera de Ingeniería, Tecnicaturas o Arquitectura debe poseer determinados conocimientos previos elementales para poder abordar materias básicas comunes a todas las Ingenierías como ser: álgebra, análisis matemático, física, representaciones gráficas y química, como también las materias matemáticas que figuran en las Tecnicaturas y en Arquitectura.

La resolución de problemas atraviesa todas estas materias de manera permanente. Como también el dominio del lenguaje simbólico y gráfico propios de la matemática. Las figuras planas elementales sus características y el cálculo de perímetros y áreas son conocimientos básicos que también están presentes en las materias antes mencionadas. El estudio de los cuerpos geométricos, las construcciones utilizando útiles de geometría y las distintas transformaciones geométricas son algunas de las herramientas imprescindibles para encarar la Matemática Superior.

Las funciones son el eje central en la formación de conceptos que un futuro ingeniero debe dominar. Las funciones admiten una enorme cantidad de transformaciones de distinta naturaleza que nos permiten integrar temas geométricos, matemáticos y de la vida cotidiana en forma permanente. Por eso su abordaje es fundamental en esta etapa de ingreso a carreras de ingeniería.

La evolución de la tecnología, ha aumentado la exigencia de los perfiles de egresados de diferentes carreras, especialmente esto impacta en forma directa en las carreras de ingeniería. La formación de un pensamiento lógico-matemático juega un papel importante en el desarrollo de nuevas tecnologías, donde los futuros ingenieros serán protagonistas de dicho proceso.

OBJETIVOS

- Lograr habilidades relacionadas con la percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos.

- Construir figuras y cuerpos geométricos haciendo uso de instrumentos de geometría.

- Modelizar situaciones problemáticas basándose en figuras y cuerpos geométricos
- Reconocer y aplicar diferentes movimientos y transformaciones geométricas.
- Aplicar conceptos de trigonometría en la resolución de problemas.
- Desarrollar habilidades vinculadas al aprendizaje autónomo.
- Promover el uso de herramientas tecnológicas vinculadas con la asignatura.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La evaluación escrita consistirá en un conjunto de cuestiones que integran los contenidos mínimos señalados. En su corrección se tiene en cuenta el dominio y manejo de los distintos temas, la interpretación de las consignas, la forma de organizar la información, la capacidad de manejarse con las situaciones que se expresan en forma coloquial y emplear los contenidos teóricos estudiados para traducirlas en gráficos y símbolos y resolver la situación pedida. Se evaluará el orden y prolijidad en sus construcciones, el uso correcto de los útiles de geometría, y todos sus desarrollos y justificaciones.

En el examen escrito, el aspirante encontrará una tabla en la que se indica el puntaje parcial de cada ítem de la evaluación, también una leyenda aclaratoria donde se explicitan las ideas antes descriptas. Por otra parte, y para mantener un ÚNICO CRITERIO de corrección de los exámenes, cada profesor recibe el día del examen, cuales son los criterios para llevar adelante el proceso de corrección, en qué casos se considera Bien, Regular o Mal el ejercicio. Estos criterios se respetan también, en el proceso de revisión de exámenes que realizan en conjunto las coordinadoras de ambas materias.

A lo largo del curso de ingreso, realizaremos actividades de evaluación voluntarias comunes a todas las comisiones, propuestas desde la coordinación de la asignatura. Evaluaremos en ellas el desarrollo de ciertas habilidades vinculadas con el autoaprendizaje. No influyen en la nota del examen, pero consideramos que son muy importantes para promover la autorregulación de los aprendizajes.

CONTENIDOS

Módulo 1

Resolución de problemas

Módulo 2

Elementos de Geometría Plana

Elementos básicos: punto, recta (posiciones relativas de dos rectas), semirrectas, segmentos, ángulos. Polígonos, elementos.
Triángulos, elementos, clasificación y propiedades. Teorema de Pitágoras
Cuadriláteros: Elementos y clasificación.
Círculo y circunferencia: Elementos y propiedades.
Cálculo de perímetros y áreas.
Problemas de aplicación.

Módulo 3

Movimientos y Semejanza

Movimientos: simetría axial, simetría central, traslación y rotación. Figuras congruentes. Figuras semejantes. Construcciones geométricas básicas. Reconocimiento de simetrías en figuras. Escalas.

Módulo 4

Trigonometría

Razones trigonométricas. Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Búsqueda de valores de las funciones trigonométricas directas e inversas con calculadora científica.
Resolución de triángulos rectángulos
Ángulos orientados. Sistema circular de medición.
Segmentos representativos y signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes.
Teorema del seno y del coseno. Triángulos oblicuángulos.
Gráficos cartesianos de las funciones trigonométricas.

Módulo 5

Elementos de geometría del espacio

Superficies poliédricas. Elementos
Prisma. Pirámide. Cilindro. Cono. Esfera. Elementos y propiedades.
Cálculo de volúmenes y áreas.
Problemas de aplicación.

Apéndice final

Homotecias- Criterios de semejanza de triángulos

CRONOGRAMA

Grilla de clases (primera instancia)

Contenido	Número de clase											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Módulo 1	X						X					
Módulo 2	X	X	X									
Módulo 3				X	X							
Módulo 4						X	X	X				
Módulo 5									X	X		
Integra-ción											X	X

BIBLIOGRAFÍA

Altman, S., Comparatore, C.y Kurzrok, L. (2001). Matemática. Polimodal. Funciones 2. (1ra.ed.) Buenos Aires: Longseller.

Carnelli, G.; Falsetti, M.; Formica, A. y Rodriguez, M. (2010). Matemática para el Aprestamiento Universitario. Universidad Nacional de General Sarmiento.

D'Agostini, V.;Demti, G. y Pérez, M.(2019). La aplicación de la geometría en un problema de la vida cotidiana de los ingresantes a las carreras de ingeniería. III Jornadas de experiencias innovadoras en educación en la fceia. Recuperado de https://docplayer.es/69047445-La-aplicacion-de-la-geometria-en-un-problema-de-la-vida-cotidiana-de-los-ingresantes-a-las-carreras-de-ingenieria.html

De Guzman, M., Colera, J.y Salvador A. (1987). Matemáticas Bachillerato 2. Madrid: Grupo Editor Anaya.

Dudeney, H. (1992). El acertijo del Mandarín y otras diversiones matemáticas. Madrid: Zugarto Ediciones.

Gardner, M. (2010). Matemática para divertirse. New York: Publicaciones Dover.

Gardner M. (2011). Los acertijos de Sam Loyd. New York: Publicaciones Dover.SAT Math workbook, Kaplan Publishing.

Larson, R. (2011). Precálculo. (8va.ed.). México: Cengage Learning.

Paenza, A. (2006). Matemática ¿Estás ahí? Episodio 2. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina S. A. Universidad Nacional de Quilmes Editorial.

Puig Adam, P. (1980). Curso de Geometría Métrica. (15 ed.). Madrid: Gómez Puig ediciones. Smith, S, Randall, C. y Dossey, J., (1997) Algebra y Trigonometría. (1ra ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.

Speed, B., Evans, K. y Gordon K. (1998). Higher Mathematics for GCSE . (2da ed.).London: Collins Educational.

Staff of Kaplan Test Prep and Admissions (2011), SAT®. Math Workbook.(4tha ed.). New York: Kaplan Publishing

Stewart J., Lothar R. y Saleem W. (2007). Precálculo, Matemática para el cálculo. (5ta ed.). México: Thomsom.

Swokowski E. y Cole J. (2013). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. (13a ed.). CENGAGE. Learning

Vance, E. (1990) Introducción a la Matemática Moderna. (1ra ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.

MÓDULO 1

PROBLEMAS

PROBLEMA 1: ELIJE TU PAGA

Supongamos que tienes un nuevo empleo, y el jefe te ofrece elegir entre:

a) $4.000 por tu primer año de trabajo, y un aumento de $800 por cada año subsiguiente.

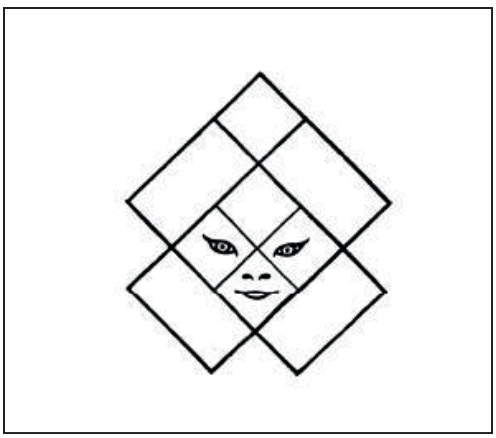
b) $2.000 por los primeros seis meses y un aumento de $200 cada seis meses subsiguientes.

¿Cuál oferta aceptarías y por qué?

PROBLEMA 2: EL JOVEN HINDÚ

¿Cuántos cuadrados distintos puedes contar en el dibujo del joven hindú con turbante?

Observa atentamente. ¡Los problemas no son tan fáciles como podría parecer!

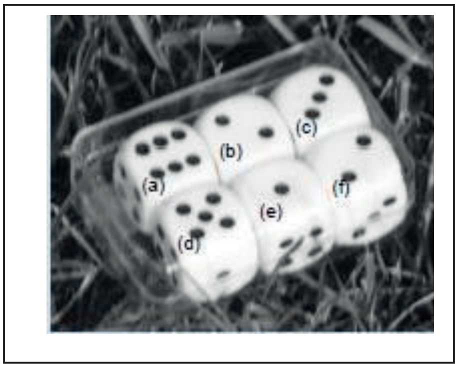


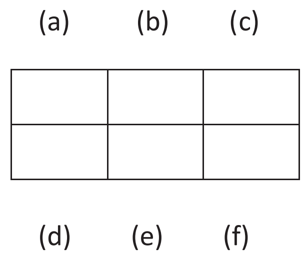
PROBLEMA 3: LA CARA DE LOS DADOS

En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados:

La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.

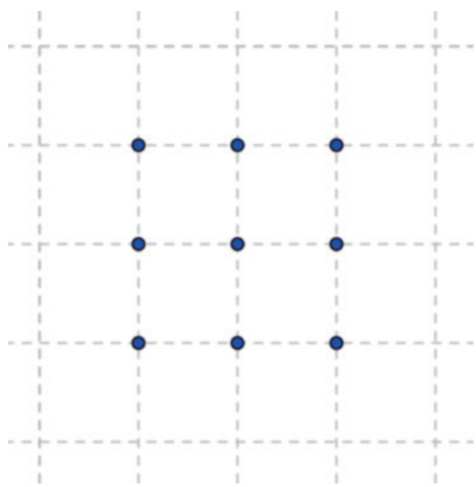
Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos que tiene la cara inferior del dado correspondiente que aparece en la foto.





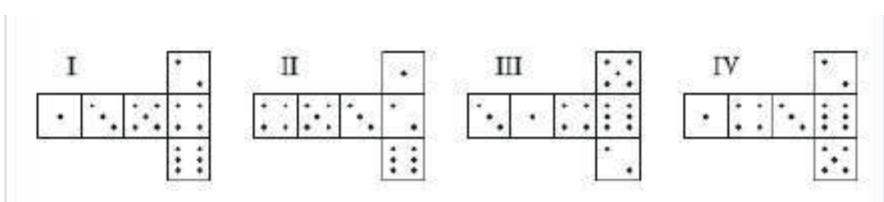
PROBLEMA 4: CUATRO SEGMENTOS

Une con cuatro segmentos de rectas consecutivos los nueve puntos, ubicados como se muestra en la figura siguiente, de manera de no pasar dos veces por el mismo punto.



PROBLEMA 5: DADOS

En el dibujo siguiente puedes ver cuatro recortes que se pueden utilizar para hacer cubos, con puntos en las caras. ¿Cuál de las siguientes figuras se puede doblar para formar un cubo que cumpla la regla de que la suma de caras opuestas sea 7?



PROBLEMA 6: LOS COLORES DE LOS SOMBREROS

Se tienen cinco sombreros, tres de los cuales son blancos y los otros dos negros. Hay en una pieza tres personas (digamos los señores A, B, C), a quienes se les entregó al entrar uno de los cinco sombreros. Los tres señores están sentados de manera tal que el señor A puede ver los sombreros de B y C (no el propio, claro está), pero B solo puede ver el sombrero de C (y no el suyo ni el de A). Por su parte C no puede ver ningún sombrero.

Cuando le preguntaron en orden: primero A, luego B y luego C, qué sombrero tenía cada uno, éstas fueron las respuestas: el señor A dijo que no podía determinar qué color se sombrero tenía. Luego le tocó al señor B, quien también dijo que no podía decir que color de sombrero tenía. Por último, el señor C dijo: “Entonces yo se que color de sombrero tengo” ¿Qué color dijo? ¿Cómo pudo justificarlo?

PROBLEMA 7: EL REY Y LOS CASTILLOS (PRIMERA PARTE)

Érase una vez en tiempos antiguos, un poderoso rey que tenía ideas excéntricas en materia de arquitectura militar. Sostenía que había gran fuerza y economía en las formas simétricas y siempre citaba el ejemplo de las abejas, que construyen sus panales en celdas hexagonales, para demostrar que la naturaleza lo respaldaba. Decidió construir diez nuevos castillos en su país, todos conectados por murallas fortificadas, que debían formar cinco líneas con cuatro castillos en cada línea.

Grafica alguna posibilidad de cómo pudo el arquitecto real realizar el plano.

PROBLEMA 8: BOLSAS CON MONEDAS

Se tienen diez bolsas numeradas (del 1 al 10) que contienen 10 monedas cada una. Las monedas son todas iguales en apariencia y, salvo una excepción, todas tienen el mismo peso: 10 gramos. Lo único que se sabe es que una de las bolsas contiene monedas que pesan todas un gramo más que el resto. Es decir, las monedas de esta única bolsa pesan 11 gramos en lugar de 10. Se tiene, además, una balanza que mide el peso exacto, pero sólo podrá usarse una sola vez. El problema consiste en saber qué hacer, con una sola pesada, para determinar en qué bolsa están las monedas que pesan diferente. ¡Se trata de pensar con creatividad!

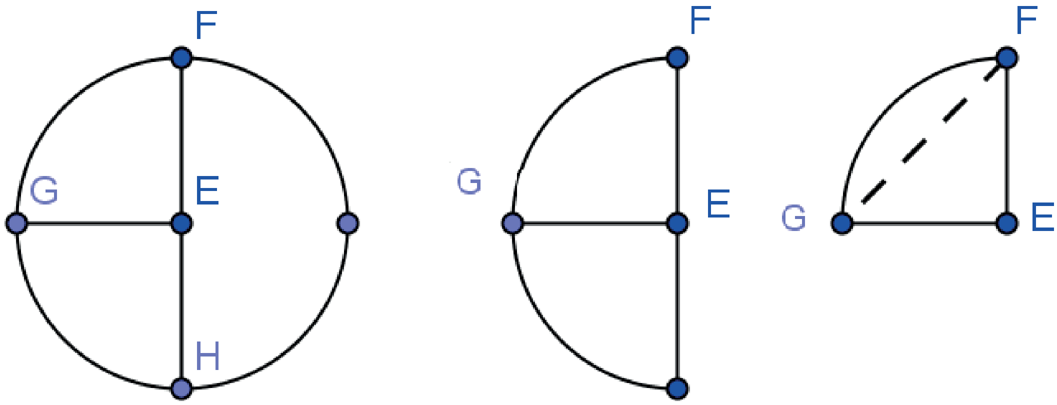
PROBLEMA 9: SUDOKU FÁCIL

3			8		4			2
		6				1		
2				5				9
5				6				4
		8	5		9	7		
9				2				6
6				9				5
		9				3		
1			6		7			8

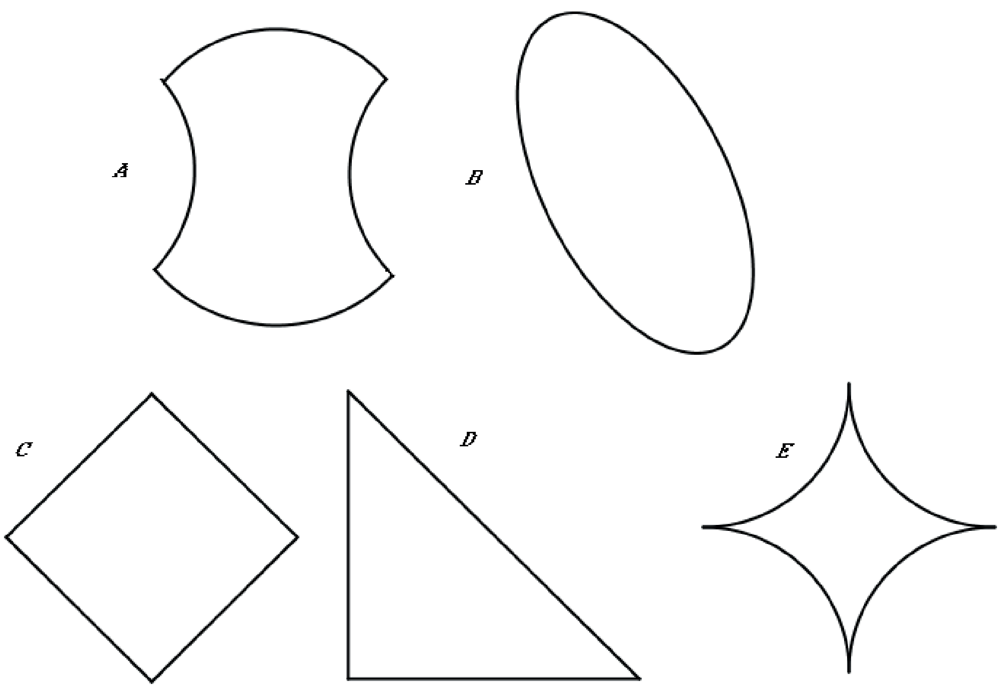
Con un poco de razonamiento lógico encontrarás la solución. El objetivo es completar todos los cuadrados de 3x3 con los números del 1 al 9. Éstos deberán aparecer una sola vez en cada fila y cada columna.

PROBLEMA 10: PROBLEMA DE PLEGADO

En la siguiente figura, un trozo circular de papel, es plegado a lo largo del diámetro FH, luego es plegado por el radio GE. Si el papel así plegado se corta por la línea de punto FG y se despliega.



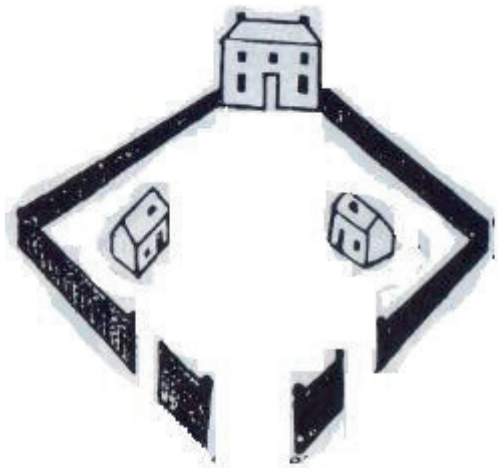
Indica cuál de las cinco figuras presentadas debajo, es la forma del papel resultante.



PROBLEMA 11: LOS VECINOS BELICOSOS

Se dice que tres vecinos que compartían un pequeño parque, como se ve en la ilustración, tuvieron una riña. El dueño de la casa grande, quejándose de que los pollos de su vecino lo molestaban, construyó un camino con cerca que iba desde su puerta a la salida que está en la parte inferior de la

ilustración. Después el hombre de la derecha construyó un camino hasta la salida de la izquierda y el hombre de la izquierda construyó un camino hasta la salida de la derecha.
Ninguno de estos caminos se cruzaba. ¿Puede dibujarlos correctamente?



PROBLEMA 12: EL REY Y LOS CASTILLOS (SEGUNDA PARTE)

El arquitecto real presentó su plano preliminar pero el monarca señaló que era posible atacar cada castillo desde el exterior, y ordenó modificar el plano para que la mayor cantidad posible de castillos quedaran a salvo de un ataque exterior, y solo se pudiera llegar a ellos cruzando las murallas fortificadas. El arquitecto replicó que le parecía imposible disponerlos de tal modo que aún un solo castillo –el edificio que el rey se proponía usar como residencia – se pudiera proteger de ese modo, pero su Majestad se apresuró a explicarle cómo hacerlo. ¿Cómo se pueden construir los diez castillos y fortificaciones para satisfacer del mejor modo los requerimientos del rey? Recuerde que deben formar cinco líneas rectas con cuatro castillos en cada línea.

PROBLEMA 13: COMITES

El comité A lo integran 7 personas, el comité B está formado por 8 personas. Si 3 personas sirven a la vez en los dos comités, ¿Cuántas personas trabajan sólo en un comité?

PROBLEMA 14: EL POLICIA MATEMÁTICO

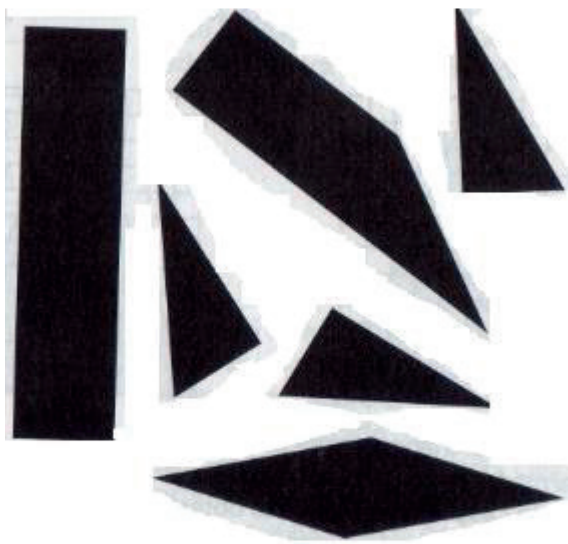
¨Que tenga usted una buena mañana, oficial¨, dijo el señor Maguire. ¨Puede usted decirme que hora es ?¨
¨Puedo hacer eso exactamente¨, replicó el agente Clancy, que era conocido como el policía matemático. ¨Sume un cuarto del tiempo que hay entre la medianoche y ahora a la mitad del tiempo que hay entre ahora y la medianoche, y sabrá usted la hora correcta¨.
¿Puede usted calcular la hora exacta en que ocurrió esta intrigante conversación?

PROBLEMA 15: JUGANDO CON FOSFOROS

Con seis fósforos construir cuatro triángulos equiláteros, cuyos lados sean los fósforos.

PROBLEMA 16: ACERTIJO DE LA LETRA DE IMPRENTA MAYÚSCULA

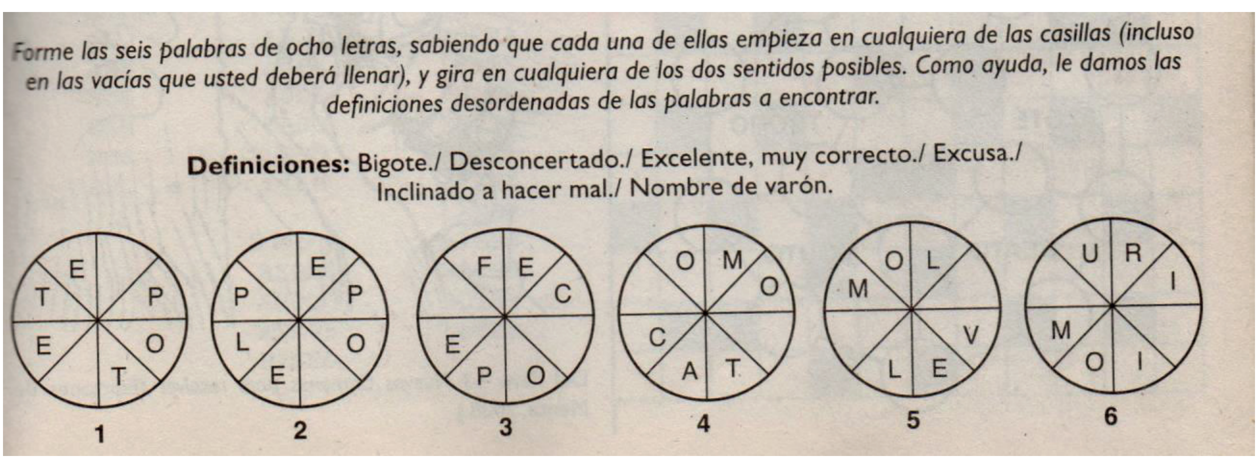
Corte estas piezas, o reacomódelas mentalmente. Algunas de ellas deberán ser rotadas, invertidas o trasladadas. Todas juntas forman una letra mayúscula del alfabeto. ¡Buena Suerte!



PROBLEMA 17: LIGA DE BASQUET

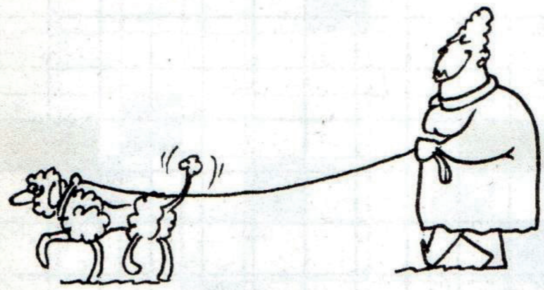
Durante una temporada de la liga de básquet, cada equipo juega con cada uno de los otros equipos 10 veces. Si 10 equipos integran la liga ¿Cuántos partidos se juegan en total en la temporada?

PROBLEMA 18: PIZZAGRAMAS



PROBLEMA 19: LAS VUELTAS DEL PERRITO Y SU DUEÑA

En la mañana salgo a dar vueltas alrededor del lago. Hoy, en cuanto salí, me crucé con una señora que iba con una perrita. Llevaban un ritmo parejo, como también me gusta hacerlo a mí, pero ellas trotaban más rápido. Volví a cruzarme con ellas una segunda vez, una tercera vez, y justo cuando nos cruzábamos por cuarta vez terminé de completar una vuelta al circuito. Si la vuelta me llevó 30 minutos, *¿cuánto les habrá llevado a ellas?*



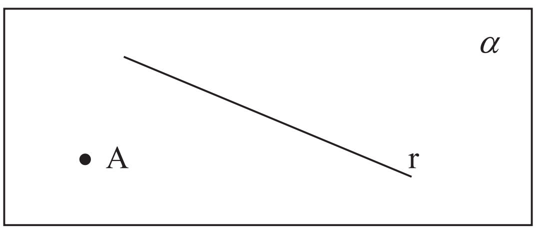
MÓDULO 2
ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA

ELEMENTOS PRIMITIVOS

Punto-Recta-Plano

Estos tres entes geométricos no se definen, se reconocen como **elementos primitivos**. En las ciencias formales es muy común comenzar a trabajar a partir de elementos con los cuales se trabaja pero que no admiten definición. En geometría plana los tres elementos primitivos son el **punto, la recta y el plano**.

Notación: Si seguiríamos la notación de conjuntos de puntos deberíamos usar otras denominaciones diferentes a las que daremos a continuación. Sin embargo, adaptamos las mismas a la forma de trabajo propias de las carreras de Ingeniería.



A: Punto
r: Recta
α : Plano

Axiomas

Son propiedades que se aceptan como verdaderas sin demostración, sirven de punto de partida para demostrar las demás propiedades.

Teoremas

Son propiedades que deben demostrarse. Un teorema tiene tres partes:

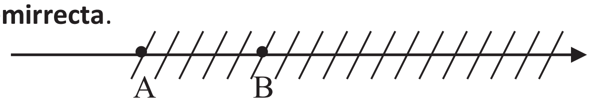
- **Hipótesis**: son los datos con los que contamos para demostrar la propiedad.
- **Tesis**: es la propiedad que se quiere demostrar.
- **Demostración**: procedimiento basado en definiciones o propiedades ya reconocidas que permiten comprobar, demostrar la tesis planteada.

Todas las figuras que definiremos a continuación son **CONJUNTOS DE PUNTOS.**

Semirrecta

Considerando un punto perteneciente a una recta, éste divide a la recta en dos partes cada una de esas partes se denomina **semirrecta**.

Notación:

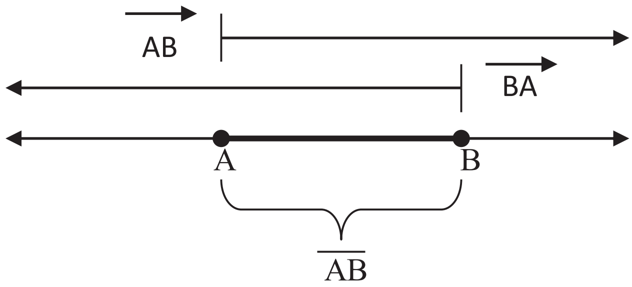


$\overrightarrow{AB}$ Se lee semirrecta de origen A que contiene a B.

Segmento

Consideramos dos puntos pertenecientes a una recta y realizamos la siguiente operación:

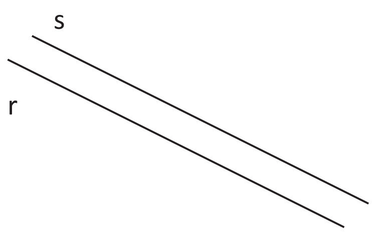
$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$$



POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS

Rectas paralelas

Dos rectas de un plano son paralelas cuando no tienen ningún punto en común o cuando son coincidentes.

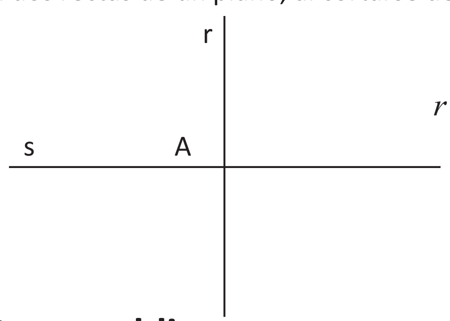


$r \,//\, s$ $\qquad$ $r \,//\, r$

$r \cap s = \{\ \}$ $\qquad$ $r \cap r = r$

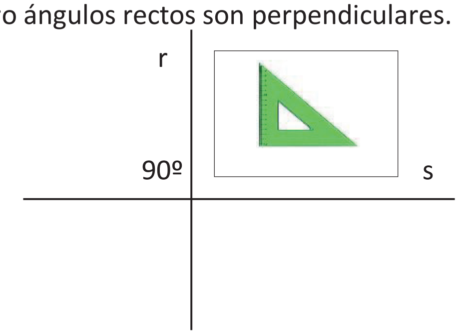
Rectas perpendiculares

Si dos rectas de un plano, al cortarse determinan cuatro ángulos rectos son perpendiculares.



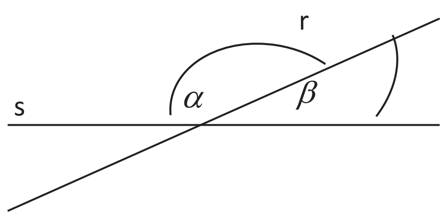
$r \perp s$

$r \cap s = \{A\}$



Rectas oblicuas

Si dos rectas de un plano, al cortarse determinan dos ángulos adyacentes distintos son oblicuas.



$r \angle s$

$\alpha \neq \beta$

LUGAR GEOMÉTRICO

Es un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas.

Mediatriz de un segmento

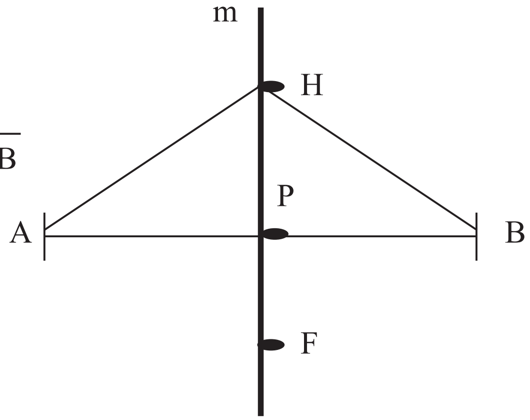
Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento.

P: punto medio de $\overline{AB}$

m es la mediatriz de $\overline{AB}$

$\overline{HB} = \overline{HA}$

$\overline{FB} = \overline{FA}$

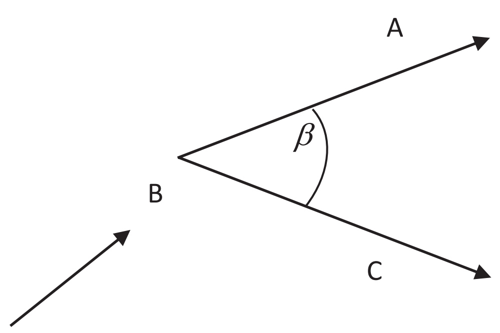


Cualquier punto que pertenece a la mediatriz se encuentra a igual distancia de los extremos del segmento. La mediatriz es una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$
https://youtu.be/8RuMtdQ1OB0 construcción mediatriz de un segmento

Ejercicio 1

Construir con regla y compás la mediatriz de un segmento de 8,5cm.

ÁNGULOS



Notación:

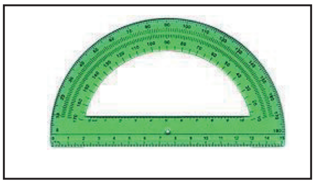
$A\hat{B}C$ o bien $\hat{\beta}$

Vértice del ángulo **Lados del ángulo**: $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$

Grados sexagesimales

Cuando se mide un ángulo en grados sexagesimales, se establece que un giro completo se corresponde con una medida de 360º. En consecuencia, medio giro (ángulo llano) mide 180º y un cuarto de giro (ángulo recto) 90º. Si la amplitud es de 0º decimos que el ángulo es nulo. Si la amplitud del ángulo varía entre 0º y 180º decimos que es convexo, en cambio, si varía de 180º a 360º es cóncavo. Además si la amplitud está comprendida entre 0º y 90º se trata de un ángulo agudo y si está comprendida entre 90º y 180º se trata de un ángulo obtuso. En este sistema de medida se define el minuto sexagesimal que equivale a 1/60 de grado y el segundo sexagesimal que equivale a 1/60 de minuto o 1/3600 de grado.

Sintetizando:
1º = 60'= 3600''   1'= 60''



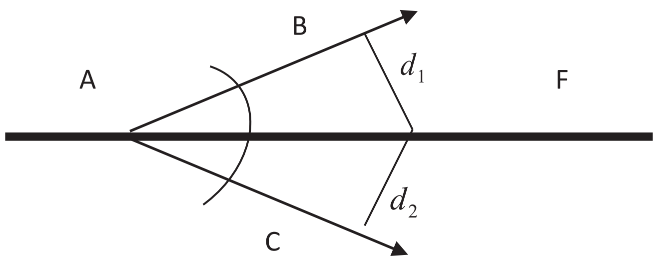
Cuando medimos un ángulo con un transportador, el mismo cuenta con una escala graduada en grados y minutos sexagesimales.

Ejercicio 2

Dibujar con transportador ángulos de 35º, 140º, 210º.

Bisectriz de un ángulo

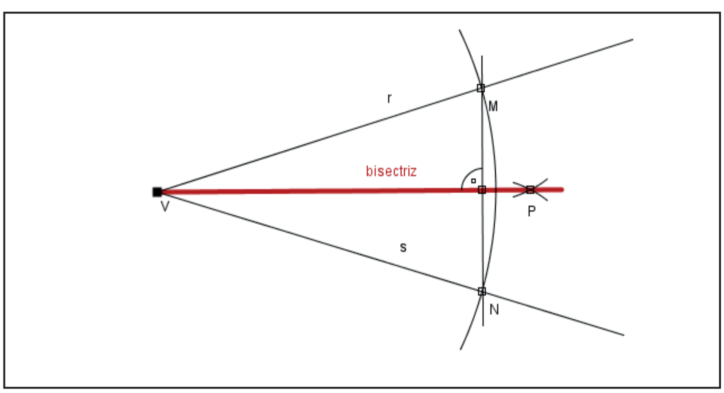
Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.



$d_1 = d_2$

Ejercicio 3

a) Dibujar un ángulo de 63º y trazarle la bisectriz, con regla y compás.
b) Dibujar un ángulo obtuso y trazarle la bisectriz.
c) Explica y justifica la siguiente construcción geométrica:

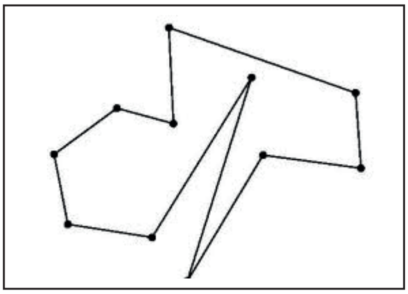


https://youtu.be/FwVVJkwDmK0 construcción bisectriz de un ángulo

POLÍGONOS

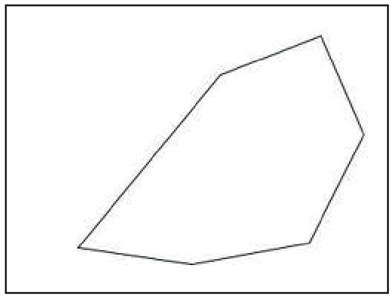
Definición: Es la región del plano limitada por tres o más segmentos.

Figura 1



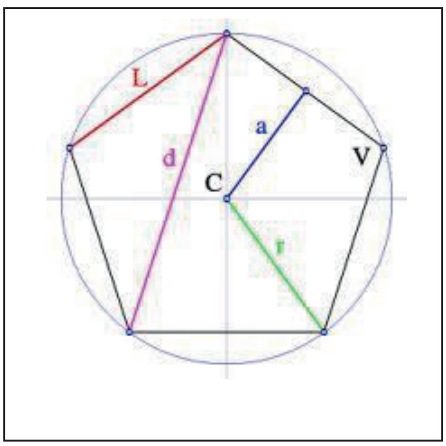
Polígono Cóncavo

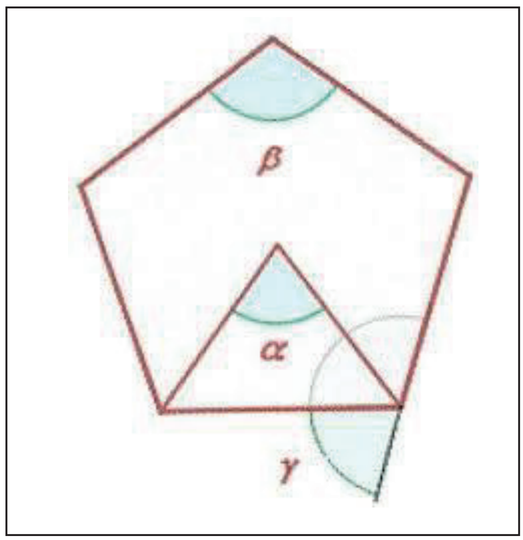
Figura 2



Polígono Convexo

Elementos de un polígono:





V: Vértice	L: Lado	$\hat{\beta}$: ángulo interior
d: diagonales	C: centro	α : ángulo central
a: apotema	r: radio	γ : ángulo exterior (adyacente al interior)

Un polígono es convexo cuando todos sus ángulos interiores lo son. En cambio, cuando al menos uno de sus ángulos interiores es cóncavo se lo denomina polígono cóncavo (Ver figuras 1 y 2). Nos interesa estudiar sólo los polígonos convexos.

Si el polígono tiene todos sus lados y ángulos interiores congruentes se lo denomina **polígono regular.**

Clasificación de los polígonos según el número de lados

Al número de lados lo designamos con “n”

n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono	Eneágono

n=10	n=11	n=12	n=15	n=20
Decágono	Undecágono	Dodecágono	Pentadecágono	Icoságono

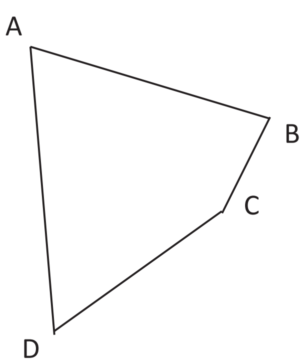
Propiedades de los polígonos convexos

- Suma de los ángulos interiores de un polígono: $S \angle \text{ int.} = 180°.\ (n-2)$
- Suma de los ángulos exteriores de un polígono: $S \angle \ ext. = 360º$
- Valor del ángulo central, de un polígono regular: $\text{Ángulo central} = \dfrac{360º}{n}$
- Valor de un ángulo interior en un polígono regular $\text{Ángulo int.} = \dfrac{S \angle \text{ int}}{n}$
- Cada lado es menor que la suma de los restantes.

Recomendamos este enlace a GeoGebra
https://www.geogebra.org/m/cxjyd8fw

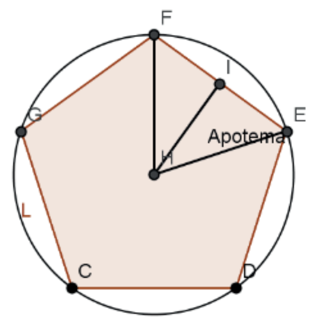
Perímetro

Se llama perímetro de un polígono a la suma de todos sus lados.



Perímetro ABCD= $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

Si el polígono es **regular** el perímetro se calcula: $\text{Perímetro pol.} = L.\ n$



Área de un polígono regular
Se calcula mediante la siguiente fórmula

$$\text{Área ABCDE} = \frac{\text{Perímetro ABCDE . Apotema}}{2}$$

Se llama Apotema al segmento de menor distancia entre el centro del polígono regular y cualquiera de sus lados. Es un segmento cuyos extremos son el centro del polígono y el punto medio del lado, es perpendicular al lado.

Diferencia entre el concepto de superficie y área: Una **superficie** plana es una parte del plano, una superficie es un ente geométrico, un conjunto de puntos. El **área** es una propiedad de la superficie. El área de una superficie es una cantidad.

Ejercicio 4

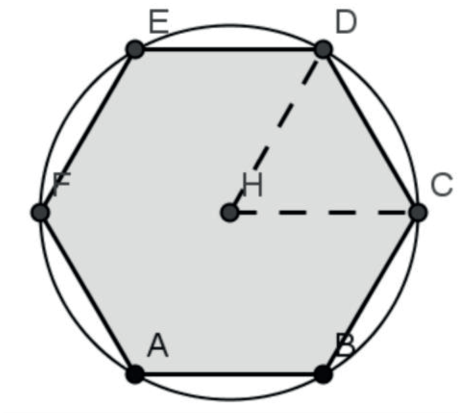
a) Calcular la suma de los ángulos interiores de un:
a-1) Pentágono **a-2)** Decágono **a-3)** Un polígono de 14 lados

b) Conociendo que la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es de 1080º. Calcular:
b-1) La cantidad de lados del polígono. ¿Cuál es el nombre que recibe de acuerdo a su cantidad de lados?
b-2) La medida de cada ángulo interior y exterior.
b-3) La medida del ángulo central.

Ejercicio 5
Cada ángulo exterior de un polígono regular vale: a) 20º b) 72º Determinar de qué polígono se trata en cada caso.

Ejercicio 6
En el pentágono regular ABCDE, se prolongan los lados $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ que se intersecan en el punto F. Calcula la amplitud del $D\hat{F}E$.

Construcción de polígonos regulares
Vamos a mostrar el procedimiento para construir un hexágono regular:



- Trazar una circunferencia con centro en "H", de un radio cualquiera, en nuestro gráfico $\overline{DH}$
- Se calcula el valor del ángulo central: en nuestro caso 360º:6=60º y se traza el mismo utilizando el transportador ($D\hat{H}C$) 
- Con el compás se toma la longitud del arco de circunferencia DC y se transporta 5 veces es decir quedan determinados los puntos E, F, A, B, que son los vértices del hexágono
- Se trazan los segmentos correspondientes a cada lado

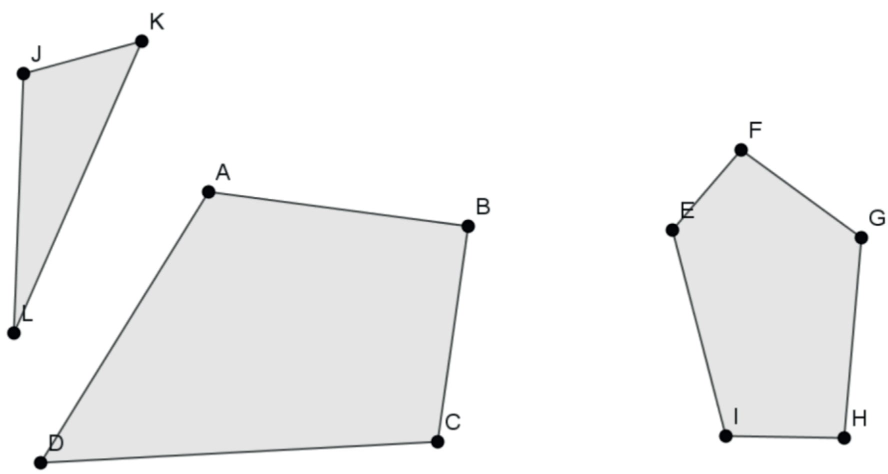
Ejercicio 7

Dibujar, indicando en cada caso el valor del ángulo central y el de los ángulos interiores de cada uno de los siguientes polígonos:

a) Un eneágono regular
b) Un dodecágono regular
c) Un icoságono regular
d) Un triángulo equilátero

Ejercicio 8

Determina en forma gráfica el perímetro de los siguientes polígonos:



Ejercicio 9

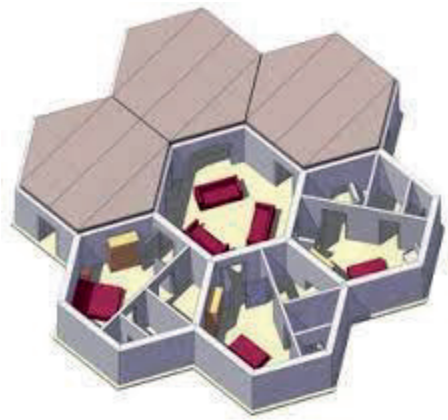
Calcular el perímetro de un polígono regular de 13 lados sabiendo que cada uno de ellos vale: 4,7 cm

Ejercicio 10

Calcular el lado de un decágono regular cuyo perímetro vale 372 cm.

Ejercicio 11

Reproduce usando regla y compás el polígono de alguna de estas dos imágenes. Explica el procedimiento.



Ejercicio tomado en algún examen

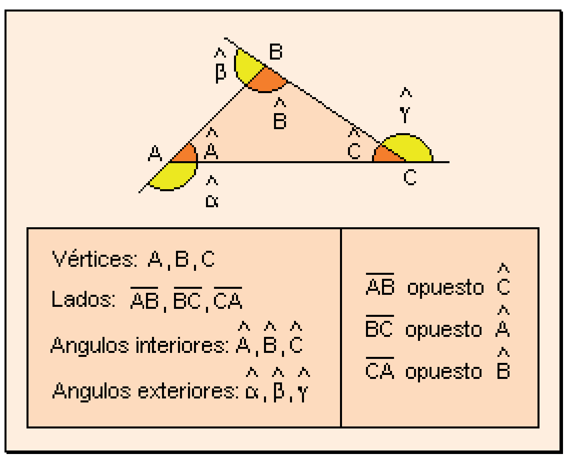
https://youtu.be/Qng0x8IrT68

Problema con eneágono regular

TRIÁNGULOS

Estudiaremos en particular a los polígonos de 3 lados que denominamos triángulos

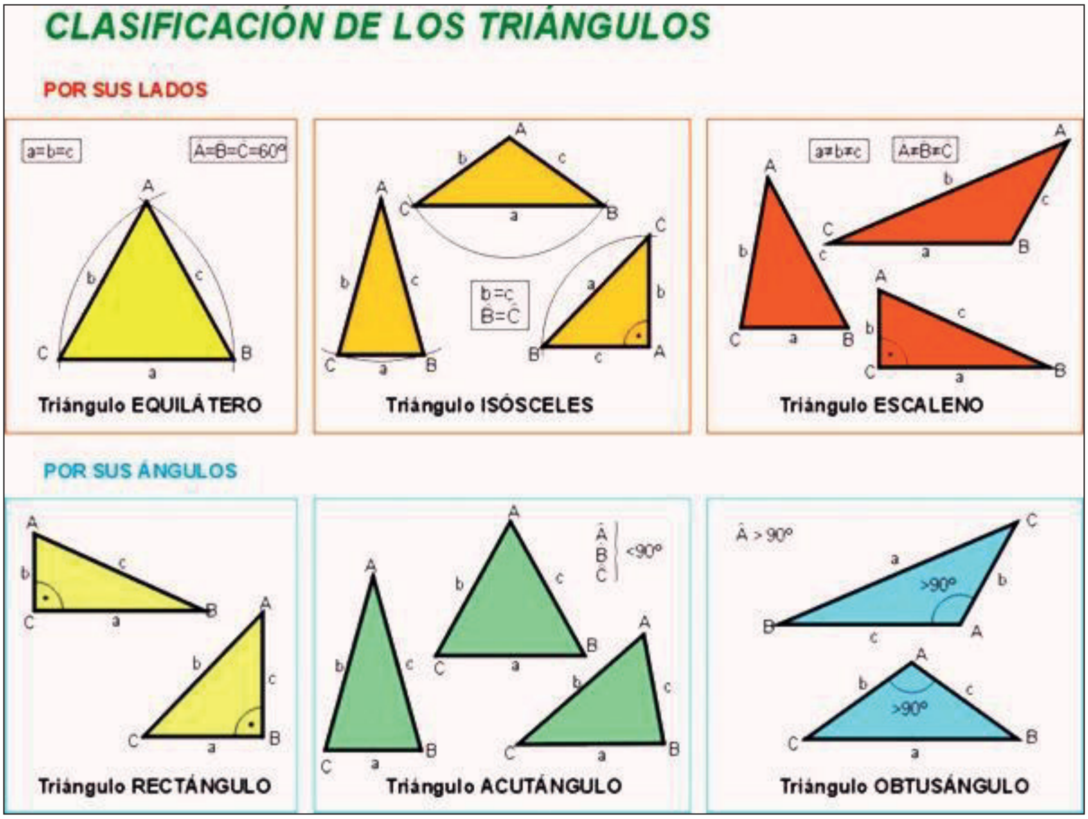
Elementos de un triángulo



Clasificación

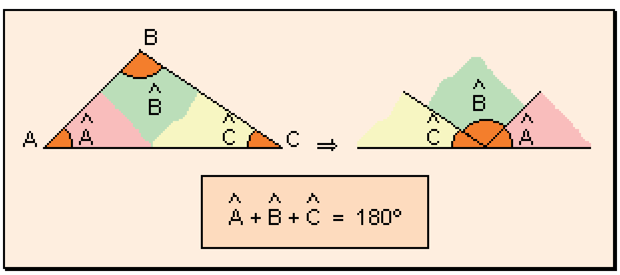
Según sus lados:
Equilátero: tres lados congruentes
Isósceles: al menos dos lados congruentes
Escaleno: los tres lados diferentes

Según sus ángulos:
Acutángulo: los tres ángulos interiores agudos
Rectángulo: un ángulo interior recto
Obtusángulo: un ángulo interior obtuso

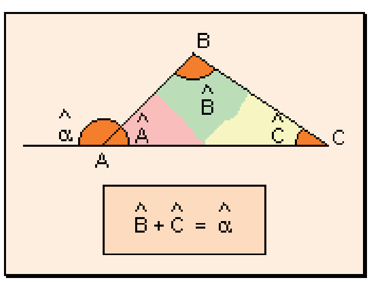


Propiedades

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.



- Un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.
-



- En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

- A lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.

- En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de los mismos.

- Área de un triángulo= $\frac{\text{Base. Altura}}{2}$ (Ver más abajo la definición de alturas de un triángulo)

Ejercicio 12

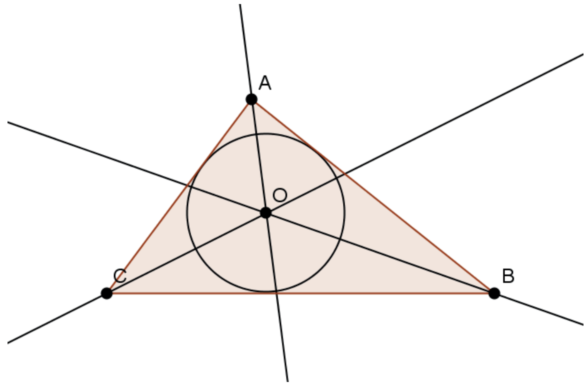
a) Construir un triángulo equilátero cuyo lado mide 6cm

b) Construir un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual (Base) mide 6,8 cm y los otros dos lados miden 5 cm.

c) Construir un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual mide 7cm y los ángulos congruentes miden 48º

Puntos notables de un triángulo

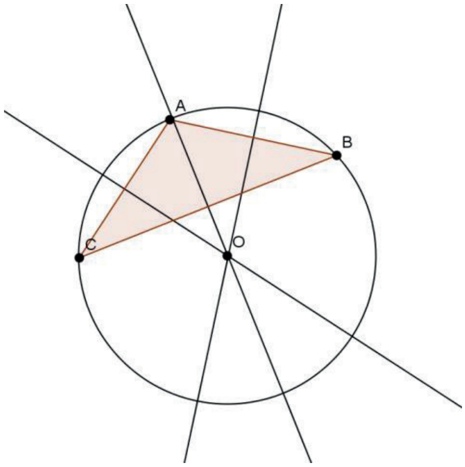
Bisectriz: Son las bisectrices de cada uno de los ángulos interiores del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$



La intersección de las bisectrices es un punto que se denomina **INCENTRO**. Es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo. Como se ve en la figura anterior.

https://youtu.be/gi99B42d1H4 Incentro

Mediatriz: Son las mediatrices de cada uno de los lados del triángulo ABC



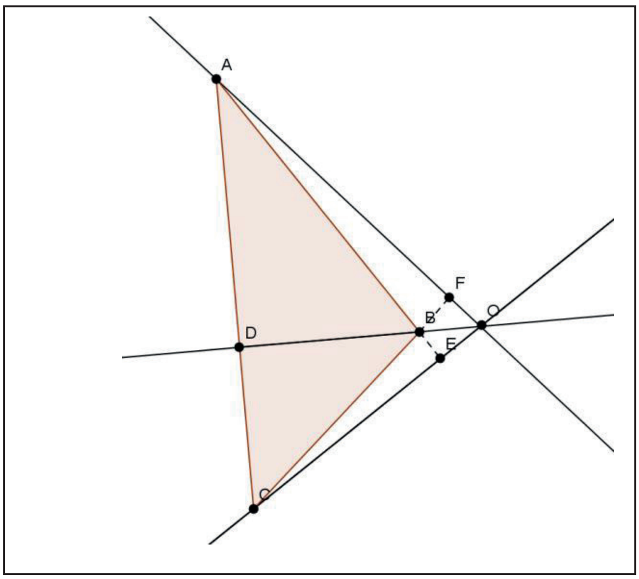
La intersección de las mediatrices es un punto que se denomina **CIRCUNCENTRO**. Es el centro de la circunferencia circunscripta en el triángulo. Como se ve en la figura anterior.
https://youtu.be/9L-bg8aPXRY Circuncentro.

Alturas: Es el segmento perpendicular al lado (o a la recta que incluye al lado) que pasa por el vértice opuesto al mismo.

Las rectas que incluyen a las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado **ORTOCENTRO**.

El triángulo que tiene por vértices a los puntos de intersección de las alturas con los lados (los pies de las tres alturas) se llama triángulo ÓRTICO.

El ORTOCENTRO es el centro de una circunferencia inscripta en el triángulo ÓRTICO,



$\overline{CE}$ es la altura del lado $\overline{AB}$

$\overline{BD}$ es la altura del lado $\overline{AC}$

$\overline{AF}$ es la altura del lado $\overline{BC}$

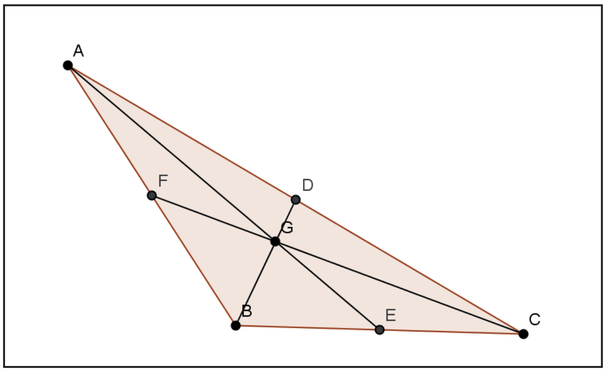
O Es el ORTOCENTRO

Ortocentro
https://youtu.be/WGGq5e2Eqhk

Medianas: Es el segmento determinado por el punto medio de cada lado del triángulo y su vértice opuesto.

El punto de intersección de las medianas se denomina BARICENTRO y es el centro de gravedad del triángulo. Se halla a 2/3 del vértice y a 1/3 del lado.

https://youtu.be/RkV1egaKDws Baricentro



$\overline{BD}$ es la mediana de $\overline{AC}$

$\overline{AE}$ es la mediana de $\overline{BC}$

$\overline{FC}$ es la mediana de $\overline{AB}$

G es el BARICENTRO

$\overline{BG}$ es 2/3 de $\overline{BD}$

Ejercicio 13

a) Trazar la altura, bisectriz y mediatriz de la base de un triángulo isósceles y sacar alguna conclusión:
b) Trazar las alturas de un triángulo rectángulo y sacar conclusiones
c) Dibujar un triángulo obtusángulo y trazarles las mediatrices a los lados, determinar el circuncentro y traza la circunferencia circunscripta al triángulo.
d) Dibujar un triángulo obtusángulo isósceles y trazarles las bisectrices a los ángulos, determinar el incentro y traza la circunferencia inscripta en el triángulo.

Ejercicio 14

Escribe siempre, a veces o nunca, sobre la línea punteada, de manera que la afirmación resulte verdadera
a) Las **medianas** de un triángulo ………………………...…… se cortan en un punto **interior** al triángulo.
b) Las **bisectrices** de un triángulo ………………………… se cortan en un punto **exterior** al triángulo.
c) Las **mediatrices** de un triángulo ………………………… se cortan en un punto **interior** al triángulo.
d) Las **alturas** de un triángulo ………………………………… se cortan en un punto **exterior** al triángulo.

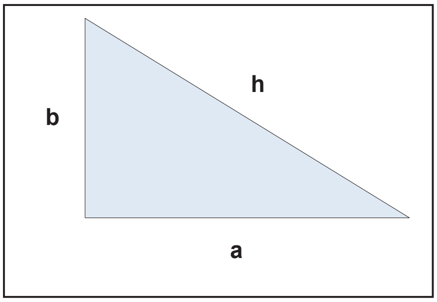
Enlaces a GeoGebra que pueden interesar
https://www.geogebra.org/m/satdurzx BARICENTRO
https://www.geogebra.org/m/ygjjzedq CIRCUNCENTRO
https://www.geogebra.org/m/jbgpbp7k INCENTRO
https://www.geogebra.org/m/htpdcduw ORTOCENTRO
.

TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras establece una relación entre los lados de un triángulo rectángulo que es la siguiente:

Nota: la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto y el de mayor longitud.

> En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

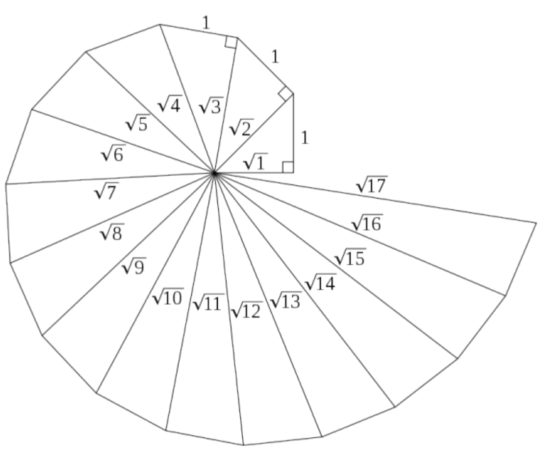


$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h = +\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = +\sqrt{h^2 - b^2}$$
$$b = +\sqrt{h^2 - a^2}$$

En el siguiente enlace se puede observar la verificación gráfica www.geogebra.org/m/hpcxqpz

Este teorema es muy importante y tiene infinidad de aplicaciones, te mostramos algunas imágenes estáticas interesantes que incluso se puede ver en el siguiente link su animación: http://yair.es/xms/algebra/imagenes/pitagoras.swf

Otra imagen interesante que vincula este teorema con los números irracionales que hemos visto en el capítulo de matemática. Esta especie de caracol se la conoce como Espiral de Teodoro de Cirene y se construye con sucesivos triángulos rectángulos. En el siguiente link encontrarán la explicación de esta gráfica
http://soda.ustadistancia.edu.co/enlinea/ivanflorezRazonamientoyArgumentacion/teorema_de_pitgoras_aplicacin.html

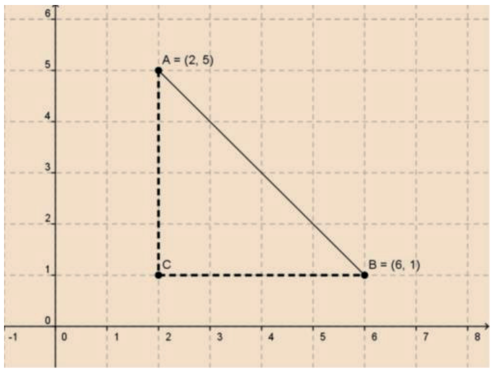


Esta espiral está presente en la naturaleza y en algunos elementos de la arquitectura moderna:

El teorema de Pitágoras se aplica para determinar la distancia entre dos puntos de los cuales se conocen sus coordenadas cartesianas.

Veamos el siguiente ejemplo: Distancia $A\bar{B} = \sqrt{(6-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 2^2.\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$



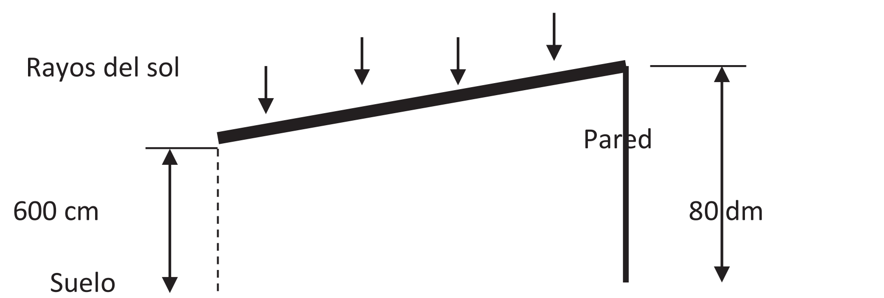
Generalizando este procedimiento decimos: $A=(x_1;y_1)$ $B=(x_2;y_2)$

$$Dist.AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejercicio 15

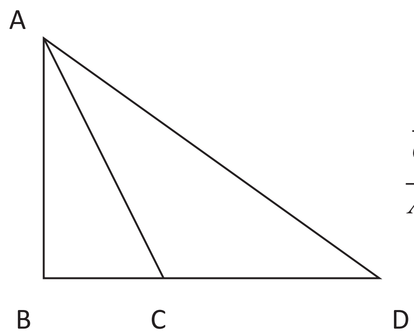
a) En un sistema de ejes cartesianos el punto C= (4;3) es el centro de una circunferencia a la que pertenece el punto F= (2;-4). ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

b) Los rayos del sol pueden considerarse paralelos entre sí y perpendiculares al piso cuando éste se encuentra en el cenit (12 hs.), de modo tal que la sombra de un objeto sobre el suelo es su proyección ortogonal, tal como se observa en el siguiente gráfico. Calcula la longitud del toldo en metros, si la sombra proyectada por él en ese instante es de 3 m.



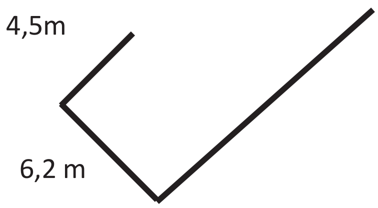
Los ítems a) y b) están explicados en el siguiente video
https://youtu.be/NgC8dABosMY

c) Hallar el valor en centímetros de $\overline{AB}$ en la siguiente figura, sabiendo que el ángulo $\hat{B}$ es recto.



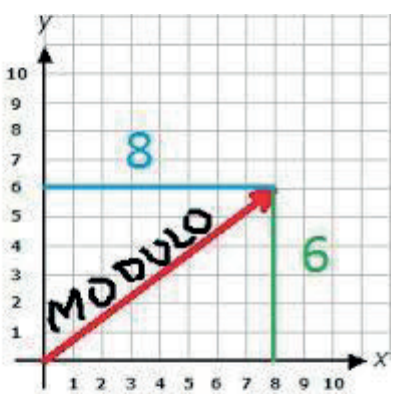
$\overline{BD}$ = 18 cm
$\overline{CD}$ = 12 cm
$\overline{AC}$ = 16cm

d) Con un alambre de 20 m se realiza una estructura como la que muestra la figura. Se quedaron sin alambre y deben cerrar dicha estructura ¿Cuántos metros de alambre deberán comprarse? Si el metro de alambre cuesta $ 1,5, calcular el costo total de dicha estructura.

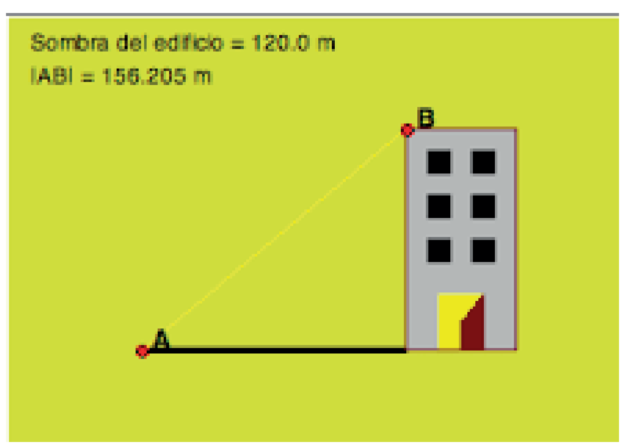


e) Un poste de luz se quiebra 4 m de su base. Si su extremo superior cae a 8 m de la base, ¿cuál era la longitud original del poste?

f) Observa el siguiente gráfico y calcula el módulo del vector
Si bien no estudiaremos, en este curso, el concepto de vector puedes tener una noción de él considerando un segmento en el cual se le ha asignado una orientación entre sus extremos, un sentido entre ellos. Se emplea para representar magnitudes físicas.



g) Observa la gráfica y determina la altura del edificio



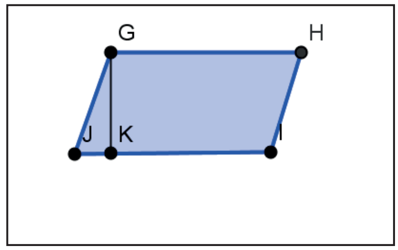
CUADRILÁTEROS

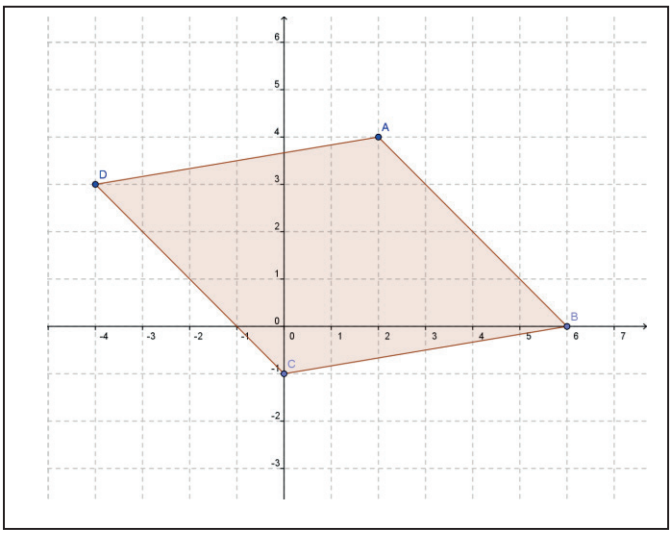
Estudiaremos en particular a los polígonos de 4 lados que denominamos cuadriláteros.

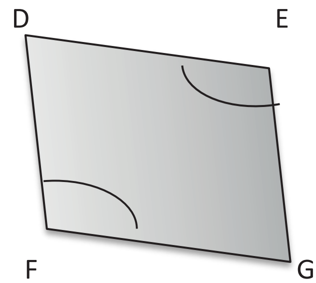
Paralelogramo: es el cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos

Propiedades:

- Los lados y ángulos opuestos son congruentes.
- Dos ángulos consecutivos son suplementarios
- Las diagonales se cortan en su punto medio.
- Área del paralelogramo=Base. Altura= $\overline{JI}\ .\ \overline{GK}$
- Perímetro del paralelogramo= $2\left(\overline{JI}+\overline{GJ}\right)$







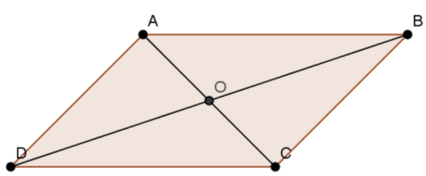
Propiedades: $\overline{DE} = \overline{FG}$

$$\overline{DF} = \overline{EG}$$

$$\hat{F} = \hat{E} \quad \hat{D} = \hat{G}$$

$$\hat{D}+\hat{F}=180^{o}, \hat{F}+\hat{G}=180^{o}$$

$$\hat{G}+\hat{E}=180^{o}, \hat{E}+\hat{D}=180^{o}$$



$\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{DO} = \overline{OB}$

Ejercicio 16

a) Determina las coordenadas de los vértices del paralelogramo ABCD de la figura anterior.

b) Dibuja un nuevo paralelogramo en coordenadas cartesianas y determina las coordenadas de sus vértices. Calcula la medida de alguno de sus lados.

c) Construye utilizando regla y transportador un paralelogramo cuyos lados midan respectivamente 6 cm y 9 cm y el ángulo que determinan entre sí es de 54º. Calcular el perímetro.

d) Construye un paralelogramo cuyas diagonales miden 10 cm y 6 cm y uno de los ángulos que determinan entre sí es de 42º.

Ejercicio 17

a) Si $\hat{F} = 132^{\circ}$. Calcular los restantes ángulos interiores del paralelogramo.

b) Si $\overline{HG}$ es el doble de $\overline{FG}$ FG y sabiendo que el perímetro del paralelogramo es de 480cm. Calcular el valor de cada lado.

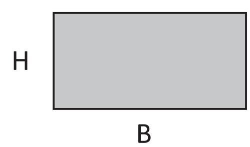
c) Sabiendo que el ángulo exterior adyacente al interior $\hat{H}$ mide 53º. Calcular los ángulos interiores del paralelogramo.

d) Sabiendo que $\hat{H}$ supera a $\hat{G}$ en 42º. Calcular los ángulos interiores del paralelogramo.

Rectángulo: es el paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos congruentes y, por lo tanto, rectos.

Propiedades:

- Cumple todas las propiedades de los paralelogramos.
- Las diagonales son congruentes.
- Área del rectángulo= B.H
- Perímetro del rectángulo= 2.B + 2.H



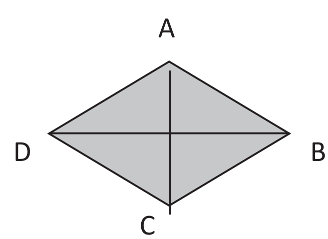
Ejercicio 18

a) Dibujar un rectángulo cuyas diagonales miden 8,2 cm y uno de los ángulos que ellas determinan es de 65º.
b) Dibujar un rectángulo sabiendo que uno de sus lados mide 7,5 cm y el ángulo determinado por este lado y la diagonal es de 32º.

c) Sabiendo que el perímetro de un rectángulo es de 172 cm y que uno de los lados supera al otro en 24 cm. Calcular el valor de cada lado y luego el área del rectángulo.

d) *Resuelve analíticamente.* El área de un rectángulo es 40 metros cuadrados. Si uno de los lados se incrementara en 2 metros el área hubiera sido 60 metros cuadrados. Determina la longitud de cada lado.

Rombo: es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes



Propiedades:

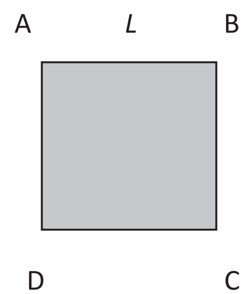
- Cumple todas las propiedades de los paralelogramos.
- Las diagonales se cortan perpendicularmente: AC $\perp$ DB

- Las diagonales son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.
- Área del rombo= $\dfrac{Diagonal1 . \, diagonal2}{2} = \dfrac{\overline{AC} . \, \overline{DB}}{2}$
- Perímetro del rombo = Lado. 4

Cuadrado: es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados y ángulos congruentes

Propiedades:

- Cumple todas las propiedades del rectángulo y rombo
  - Área del cuadrado= $\overline{DC}^2 = L^2$ o $\dfrac{diagonal^2}{2}$
- Perímetro del cuadrado= 4.Lado



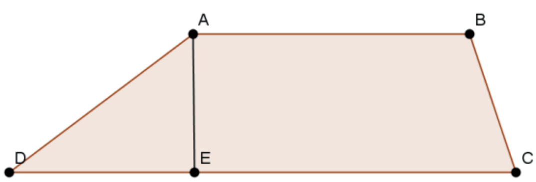
Ejercicio 19

a) Calcular la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro vale 48 cm.
b) Hallar el radio de la circunferencia inscripta en un cuadrado cuya área es 169 cm^2 .
c) En un rombo, los ángulos que las diagonales forman con un lado son tales que uno de ellos supera en 30º al quíntuplo del otro. Calcula las amplitudes de los ángulos interiores de dicho rombo.

Trapecio: es el cuadrilátero que tiene un solo par de lados opuestos paralelos.

$\overline{AB} \; // \; \overline{DC}$

$\overline{AB} \; y \; \overline{DC}$ bases del trapecio $\overline{AE}$ es la altura del trapecio



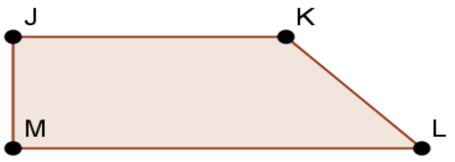
Propiedades

- Área del trapecio

$$= \frac{(Base\ mayor\ +\ base\ menor).altura}{2} =$$

$$= \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}).\overline{AE}}{2}$$

Clasificación de los trapecios



Trapecio rectángulo: Tiene 2 ángulos rectos

$\hat{J} = \hat{M} = 90^{o}$

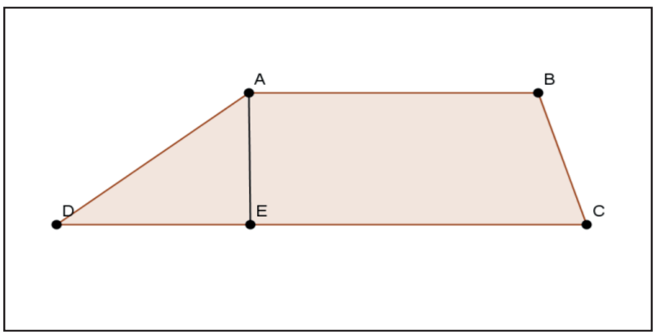
Trapecios isósceles: sus lados no paralelos son congruentes

$\overline{IF} = \overline{GH}$

Además $\hat{I} = \hat{H}$ y $\hat{F} = \hat{G}$

Ejercicio 20

Hallar el área del siguiente trapecio:



$A\overline{D} = 28cm$

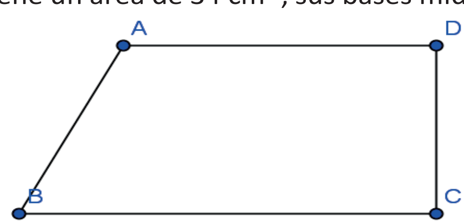
$D\overline{E} = 13cm$

$A\overline{B} = 17cm$

$B\overline{C} = 25cm$

Ejercicio 21

Sabiendo que, el siguiente trapecio rectángulo tiene un área de 34 cm^2 , sus bases miden



$\overline{AD} = 7\ cm$, $\overline{BC} = 10\ cm$

Se pide:

a) Calcular la medida de la altura del trapecio.

b) Calcular su perímetro.

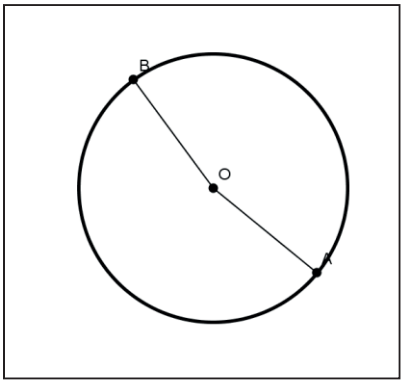
Ejercicio explicado en el siguiente video:
https://youtu.be/HmcRHeWLE4M

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.
La distancia de cualquier punto de ella al centro es el radio

Círculo: es el conjunto de puntos interiores a una circunferencia.

- Área de círculo= $\pi.r^2$
- Longitud circunferencia= $\pi.2.r = \pi.d$



CIRCUNFERENCIA

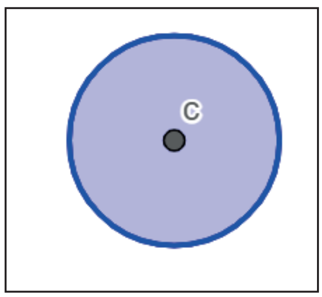
C(O, r)

$\overline{OB} = \overline{OA}$

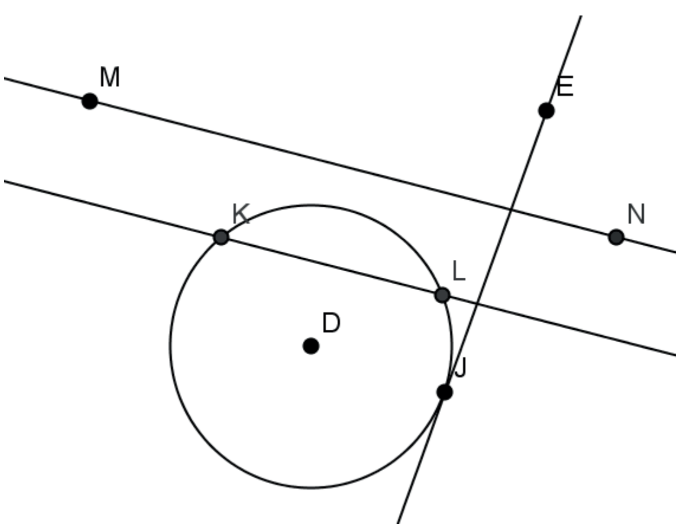
O *centro de la circunferencia*

$\overline{OB}$ *y* $\overline{OA}$ *son radios de la circunferencia*

CÍRCULO



Posiciones relativas entre rectas y circunferencia



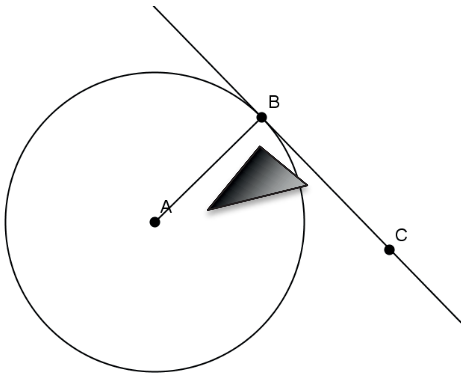
MN Recta exterior a la circunferencia ya que:
MN ∩ C (D, r) ={ }

KL Recta secante a la circunferencia, ya que la intersección entre ambas figuras son dos puntos (K y L)

EJ Recta tangente a la circunferencia ya que
EJ ∩ C(D, r)={J}

Propiedad de la tangente a una circunferencia

Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

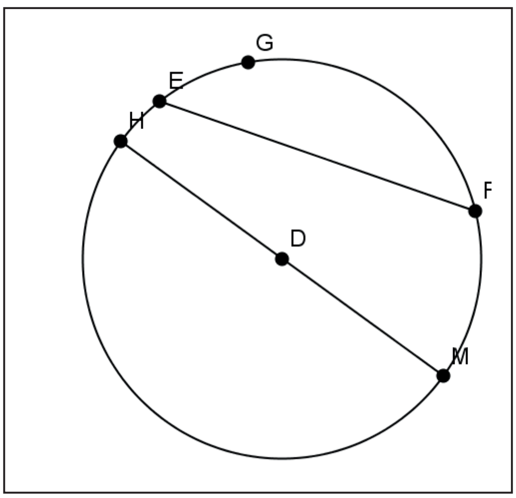


$AB \perp BC$

AB Radio

$BC \cap AB = \{B\}$

Arcos, cuerdas segmentos circulares y sectores circulares



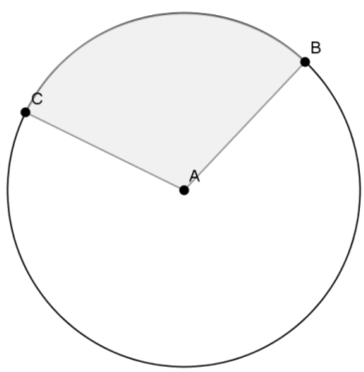
$\overline{EF}$ Cuerda

$\overline{HM}$ Es la mayor de las cuerdas.

$\overline{HM}$ se llama Diámetro

$E\widehat{G}F$ Arco de circunferencia

Sector circular: CAB

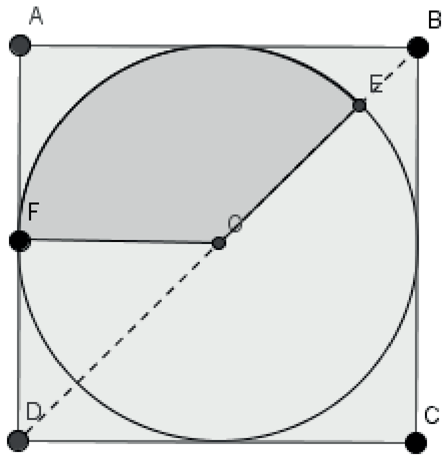


Ejercicio 22

Se va a construir una mesa grande para una sala de conferencias. La mesa tendrá forma de rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Debe tener un perímetro de 15 m. El área de la porción rectangular tiene que ser el doble de la suma de las áreas de los dos extremos. Encuentra la longitud *l* y el ancho *w* de la parte rectangular

Ejercicio 23

Una circunferencia está inscripta en un cuadrado de área 144 cm^2 como se indica en la figura, se pide:



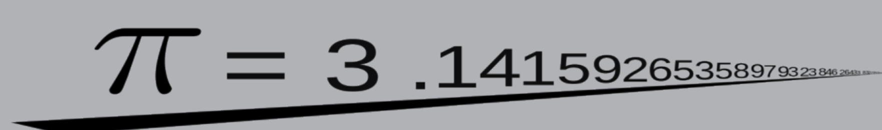
a) Calcular el área del círculo y la longitud de la circunferencia.
b) Determinar la longitud de la diagonal del cuadrado.

Ejercicio 24

De un cuadrado de diagonal igual a $2\sqrt{2}$ cm, se recorta de cada uno de sus vértices ¼ de círculo de 0.5 cm de radio. Calcular el valor exacto del área de la figura que se obtiene luego de dichos recortes.

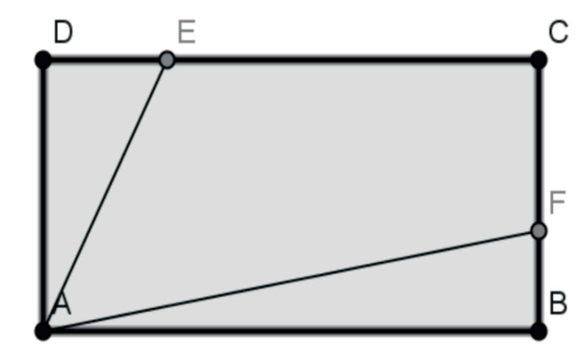
Nota histórica

En un papiro egipcio conocido como Rhind, fechado alrededor de 1650 a.C.(copia de otro anterior), se plantean problemas para determinar el volumen de silos cilíndricos para guardar granos. Un escriba llamado Ahmés para obtener la superficie del círculo y poder resolver el problema anterior logró una primera aproximación del número que hoy conocemos como π



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problema 1



.

En el rectángulo ABCD, se sabe:

$$5.\overline{AB} = 12.\overline{BC}$$

El triángulo ADE es isósceles de 450 cm^2 de área y $.\overline{CB} = 3.\overline{FB}$.

Calcula el área de AFCE.

Respuesta: área de AFCE es 1350 cm^2

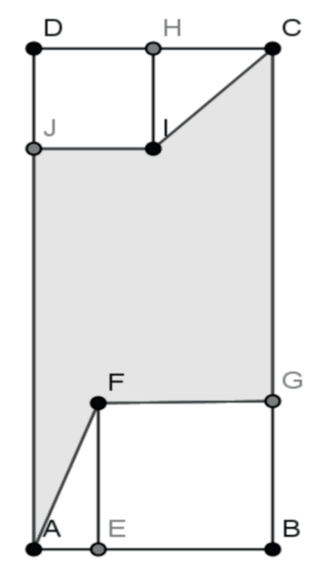
Explicación de este problema en el siguiente video https://youtu.be/YG_F2cJHiJE

Problema 2

En el rectángulo ABCD de 84 cm de perímetro, $\overline{BC} = 2\overline{AB}$. Sobre $\overline{AB}$ se dibujan un cuadrado de 100 cm^2 de área y un triángulo.

Sobre $\overline{CD}$ se dibujan un cuadrado de 36 cm^2 de área y un triángulo.

¿Cuál es el área de la región sombreada?

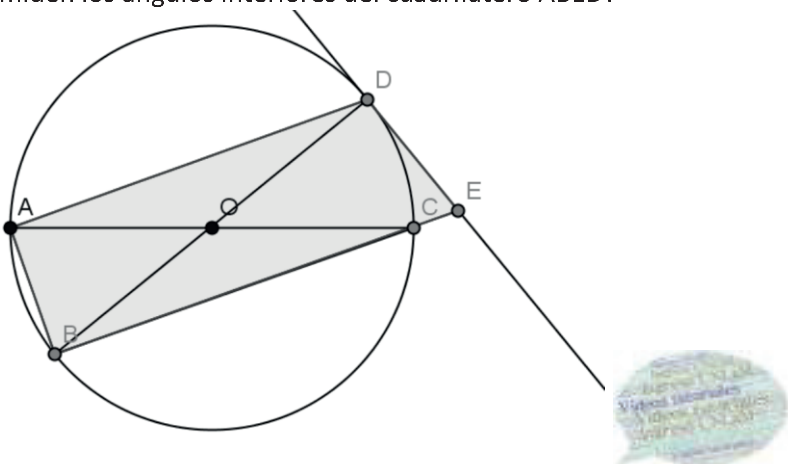


Respuesta: 212 cm^2

Problema 3

En la circunferencia de centro O se marcan los puntos A, B, C; D de modo que el ángulo AOB = 40º , $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros .

Por D se traza la recta tangente a la circunferencia. La semirrecta $\overrightarrow{BC}$ corta a esa recta tangente en el punto E. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del cuadrilátero ABED?

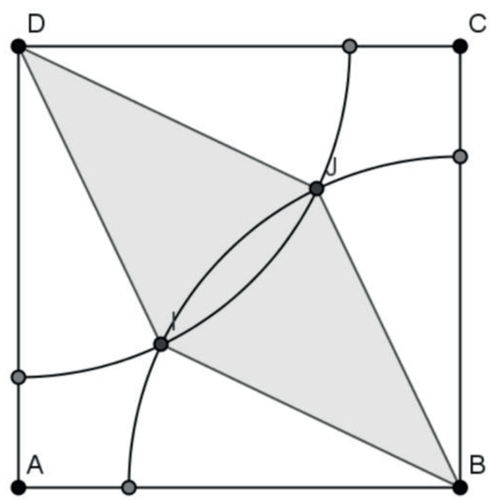


Respuesta: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^{\circ}, \widehat{D} = 110^{\circ}, \widehat{E} = 70^{\circ}$

Explicación de este problema en el siguiente video https://youtu.be/6qdOMf_qhk4

Problema 4

El cuadrado ABCD tiene 48 cm de perímetro. Con centro en los vértices B y D se trazan arcos de circunferencias de 9 cm de radio. Estos arcos se cortan en los puntos I y J ¿Cuál es el área del cuadrilátero BIDJ?



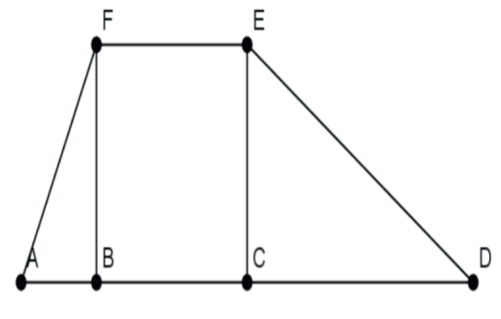
Respuesta: Área del cuadrilátero BIDJ = $36\sqrt{2}\ cm^2$ (Es un rombo)

Problema 5

Área del cuadrilátero ADEF = 624 cm^2 . Área del ABF = $\frac{1}{3}$ área del rectángulo BCEF

Área del CDE = $\frac{5}{6}$ área del rectángulo BCEF .

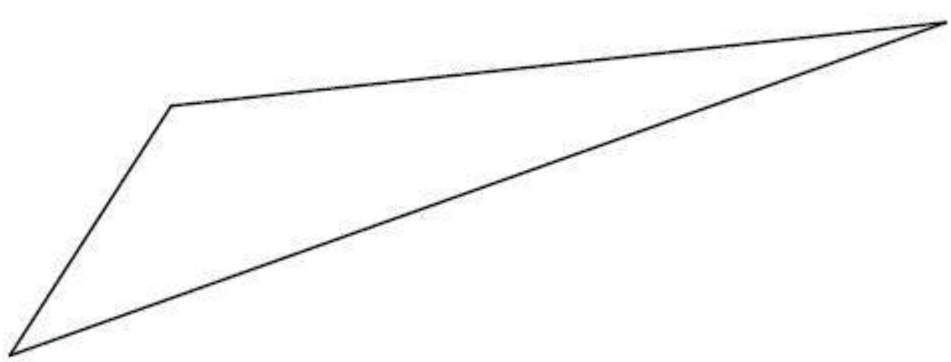
Perímetro del cuadrilátero BDEF= 116 cm . Perímetro del CDE = 80 cm. Perímetro del ABF = 48 cm
¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero ADEF?



Respuesta: 132 cm

Problema 6

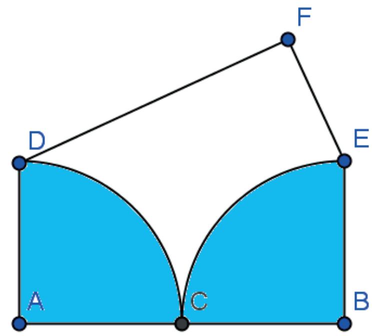
Raúl les dijo a sus cuatro nietos que había estado cortando el césped de su jardín, pero como estaba muy cansado no había terminado y les pide entonces que terminen de cortar el sector restante.
Cuando los chicos se dispusieron a hacer el trabajo, se encontraron con un sector triangular.
Disponiendo de una soga que alcanza para cubrir cuatro veces el perímetro del sector, ¿cómo hicieron los chicos para dividirse el trabajo por igual?
Intenta varias posibilidades.



Tomado del artículo "La aplicación de la geometría en un problema de la vida cotidiana de los ingresantes a las carreras de ingeniería" de las III Jornadas de experiencias innovadoras en educación en la fceia, autores D'agostini, Viviana, Demti, Graciela y Pérez, Mariana del valle

Problema 7

Los arcos DC y EC son cuartos de circunferencia de igual radio. EF es perpendicular a DF, $\overline{EF}$ = 12 cm
El perímetro de la región sombreada es 71,4 cm.
¿Cuál es el área y cuál el perímetro de la región no sombreada?

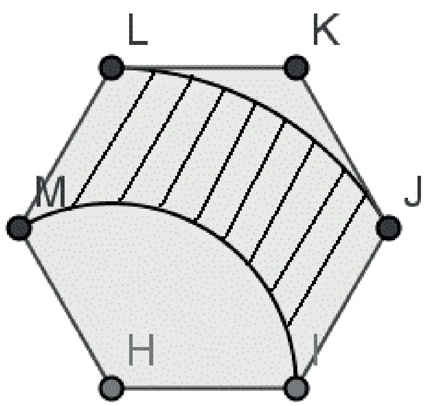


Respuesta: área 139 cm^2 y perímetro 59,4 cm

Estos problemas son un poco más complejos pueden resolverlos luego de ver el capítulo de trigonometría.

Problema 8

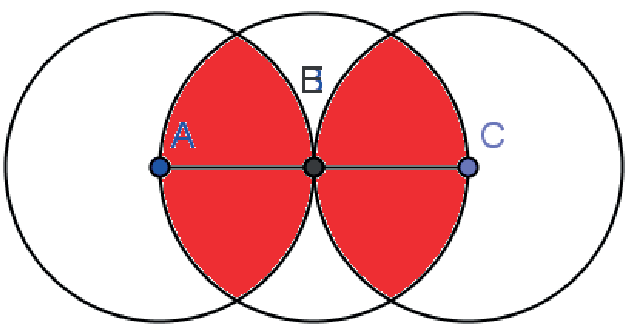
HIJKLM es un hexágono regular de 12 cm de lado MI es un arco de circunferencia de radio HÍ, LJ es un arco de circunferencia de radio HL?. ¿Cuál es el área de la región rayada?



Respuesta: 199,92 cm2 Las respuestas son tomando π =3,14

Problema 9

Las circunferencias, de centros A, B y C tienen radio igual a $\overline{AB}$. El circulo de centro A y radio $\overline{AB}$ tiene 452,16 cm^2 de área. ¿Cuál es el área de la región no sombreada? (Considera 3,14 como aproximación del número π)



Respuesta = 649,44 cm^2

MÓDULO 3

MOVIMIENTOS Y SEMEJANZA

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Estudiaremos los movimientos de figuras en el plano. En un movimiento la única transformación que se observa es el cambio de posición, es decir la figura no se deforma.

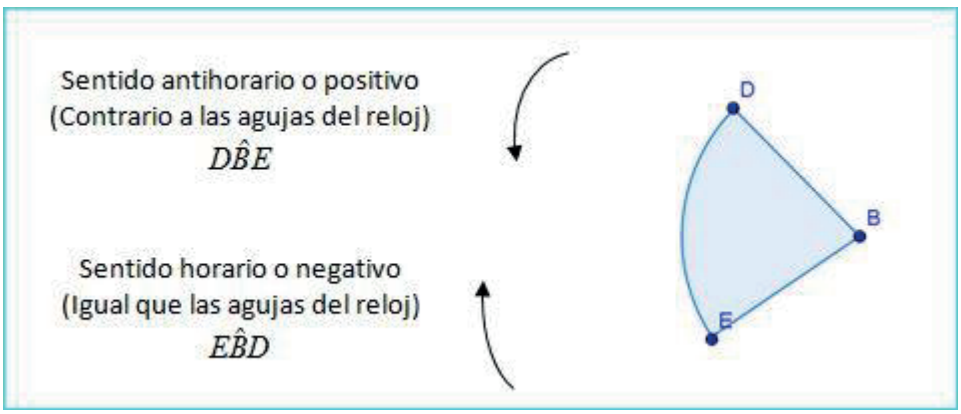
Es por ello que a estas transformaciones las denominamos MOVIMIENTOS RÍGIDOS.

ROTACIÓN

Frecuentemente observamos objetos que giran alrededor de un punto "O". Ejemplos: las agujas del reloj, las aspas de un ventilador, una puerta giratoria. Otro movimiento que a veces registran los objetos los conocemos como movimientos de vaivén como es por ejemplo el limpiaparabrisas. Estas situaciones nos permiten introducirnos en un movimiento que denominaremos GIROS o ROTACIONES.

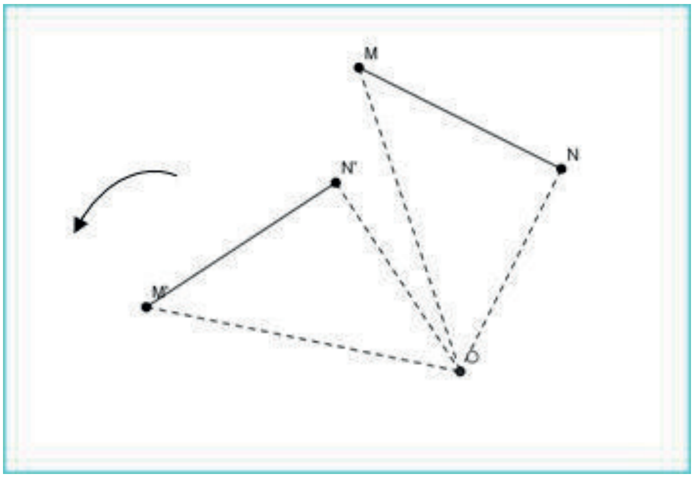
Ángulo orientado:

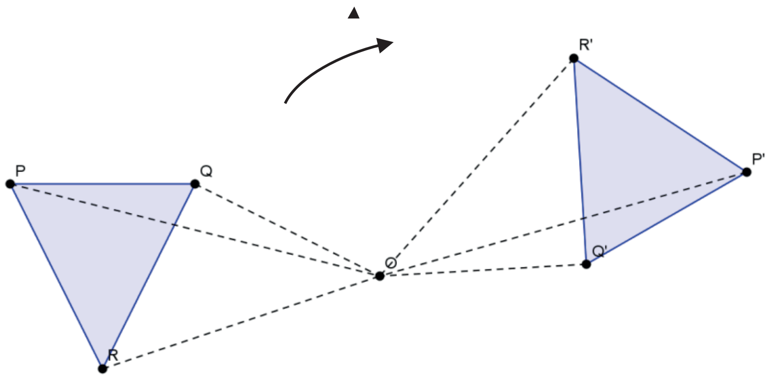
Los ángulos se pueden graficar siguiendo dos sentidos, horario u antihorario. Lo indicaremos de la siguiente manera:



Definición: se llama rotación de centro "O" y ángulo de giro $N\hat{O}N'$ (Antihorario o sentido positivo) a la transformación del plano en sí mismo que a todo punto N del mismo le hace corresponder un punto N' tal que $\overline{ON} = \overline{ON'}$ y $N\hat{O}N'$ es el ángulo de giro. Veamos el gráfico que transforma al segmento $\overline{MN}$ en $\overline{M'N'}$.

R (O, + 60º) Indica una rotación en sentido antihorario



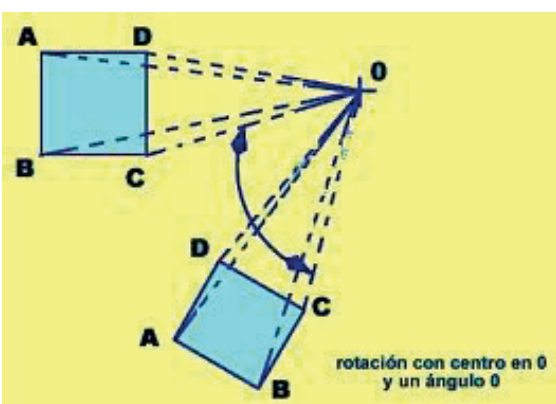


R (O, - 150º) Indica una rotación en sentido horario

En este caso la rotación del triángulo PQR es de 150º alrededor del punto "O" y en sentido horario transformándolo en el triángulo P'Q'R'

Ejercicio 1

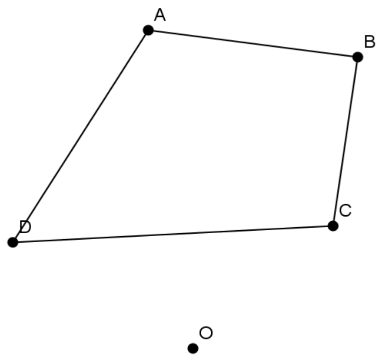
La siguiente figura se copió de una página Web ¿Te parece correcta? Argumenta tu respuesta



Ejercicio 2

Reproducir el gráfico en tus apuntes y aplicarle al cuadrilátero ABCD:

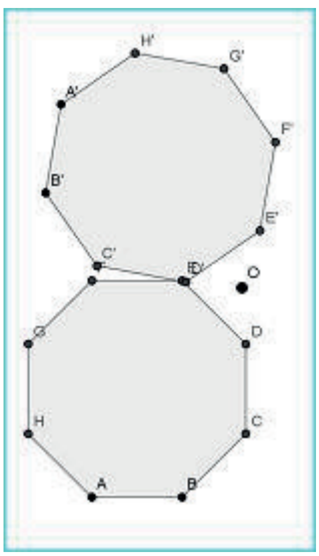
a) R (O, +120º)   b) R(O, - 60º)



Ejercicio 3

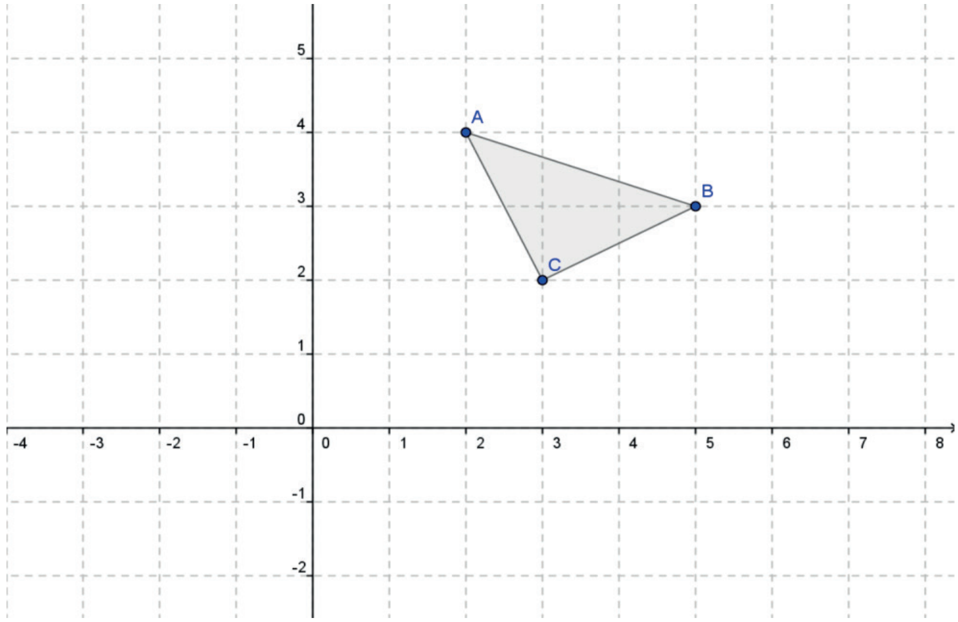
Determinar que rotación se le aplicó al octógono ABCDEFGH para obtener el A’B’C’D’E’F’G’H’.

Hacer los trazos correspondientes.

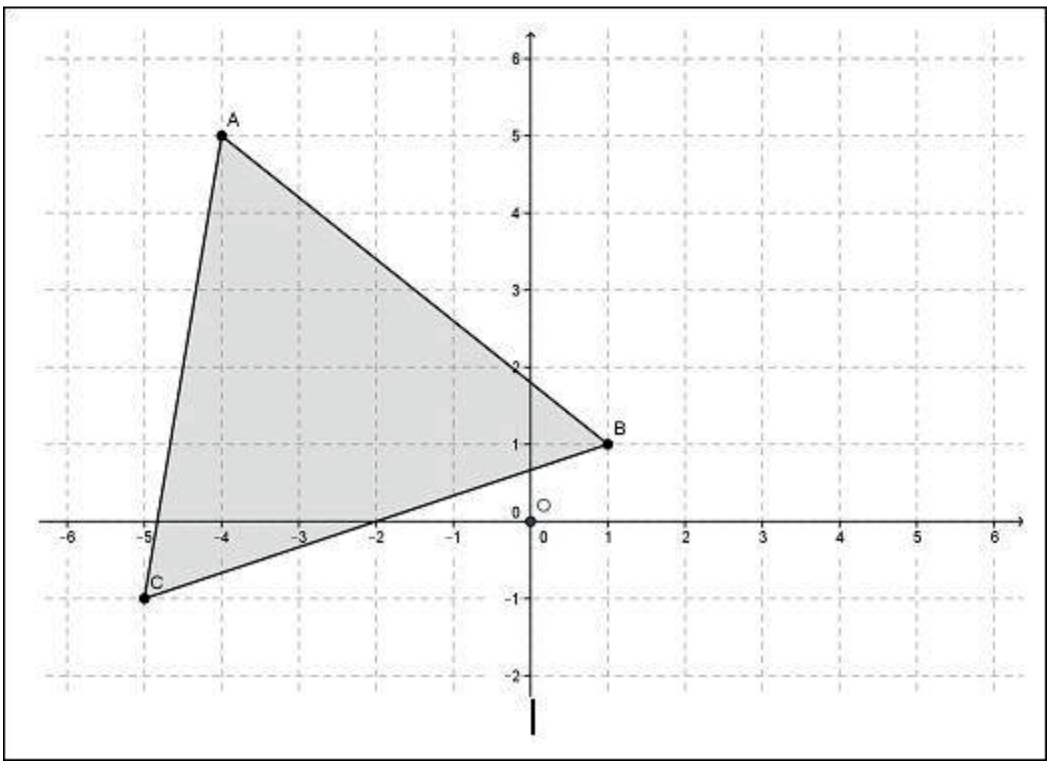


Ejercicio 4

a) Aplicarle al triángulo ABC una Rotación cuyo centro coincida con el origen de coordenadas de 80º sentido antihorario



b) Hallar gráficamente el triángulo transformado del $\overset{\Delta}{ABC}$ a través de la rotación o giro con centro en el origen y ángulo de - 90º (Hazlo en esta misma hoja) (Ten cuidado con el sentido de giro)



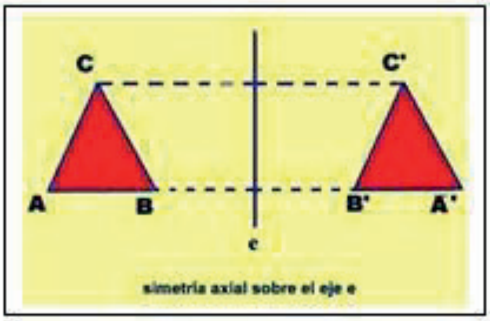
c) Para el triangulo del ejercicio **b)** Escribir las coordenadas de los vértices del triángulo transformado $A'\overset{\Delta}{B}'C'$ Calcula la medida del lado $\overline{A'B'}$

SIMETRÍAS

Simetría Axial

Si dibujamos sobre un papel alguna figura y doblamos el papel de modo que la figura quede en una de las caras del mismo, y calcamos la figura en la otra parte de la hoja obtenemos una figura simétrica respecto de la primera con respecto a un eje que en este caso está representado por la recta determinada por el doblez de la hoja.

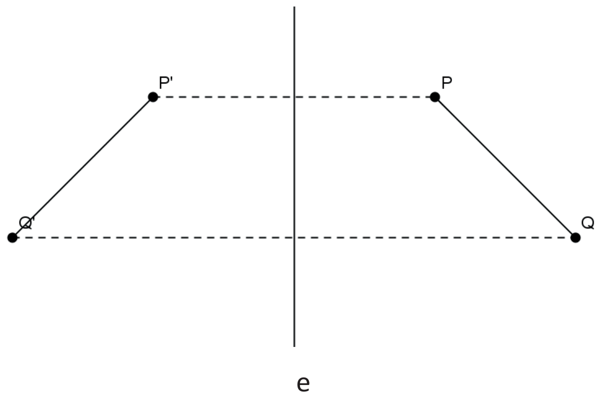
Veamos algunas imágenes de figuras simétricas respecto de un eje (Recta)

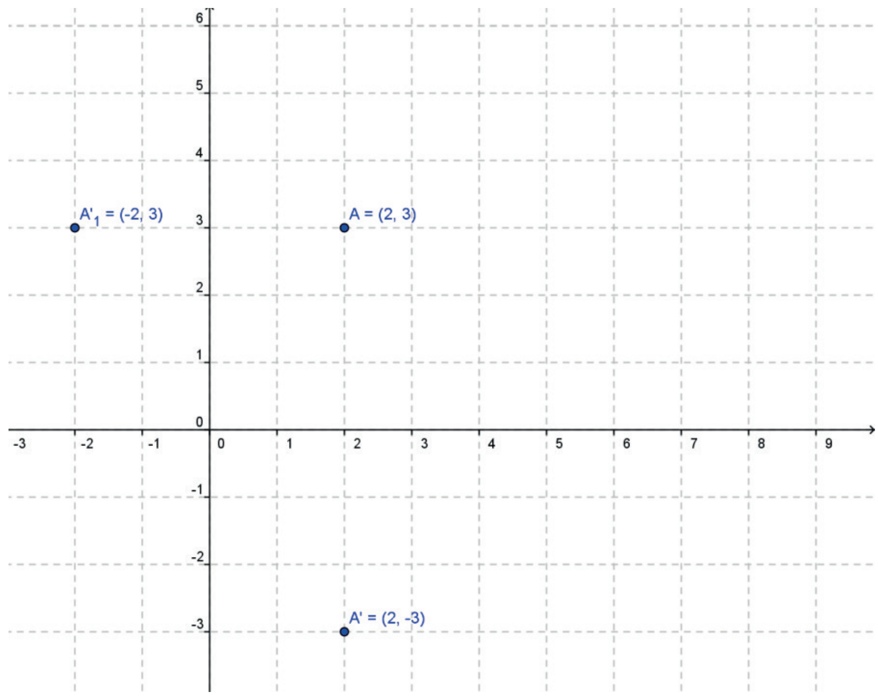


Definición: Se llama simetría axial de eje “e” a la transformación del plano en sí mismo que a todo punto P le hace corresponder un punto P’ de modo tal que la recta “e” es la mediatriz del segmento PP’.

Al construir el simétrico, resulta que el segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje “e” y la distancia entre el eje “e” y el punto P es la misma que la distancia entre el eje “e” y el punto simétrico P’.

Notación $\overline{PQ} \xrightarrow{Se} \overline{P'Q'}$

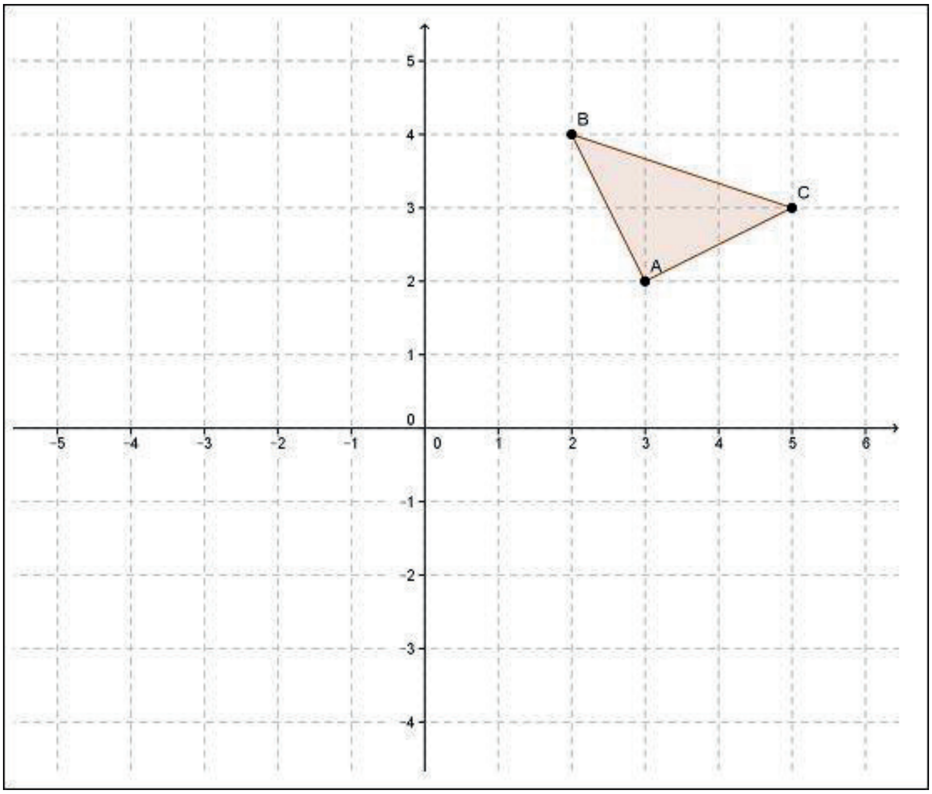




Si un punto se refleja con el eje de ordenadas, (el eje y es el eje de simetría) las primeras componentes de los pares cambian por sus opuestas y las segundas permanecen igual (puntos A y A'_1 de la figura). En cambio, si el eje de simetría es el eje de abscisas las que cambian por sus opuestas son las segundas componentes mientras que las primeras permanecen igual (puntos A y A' de la gráfica)

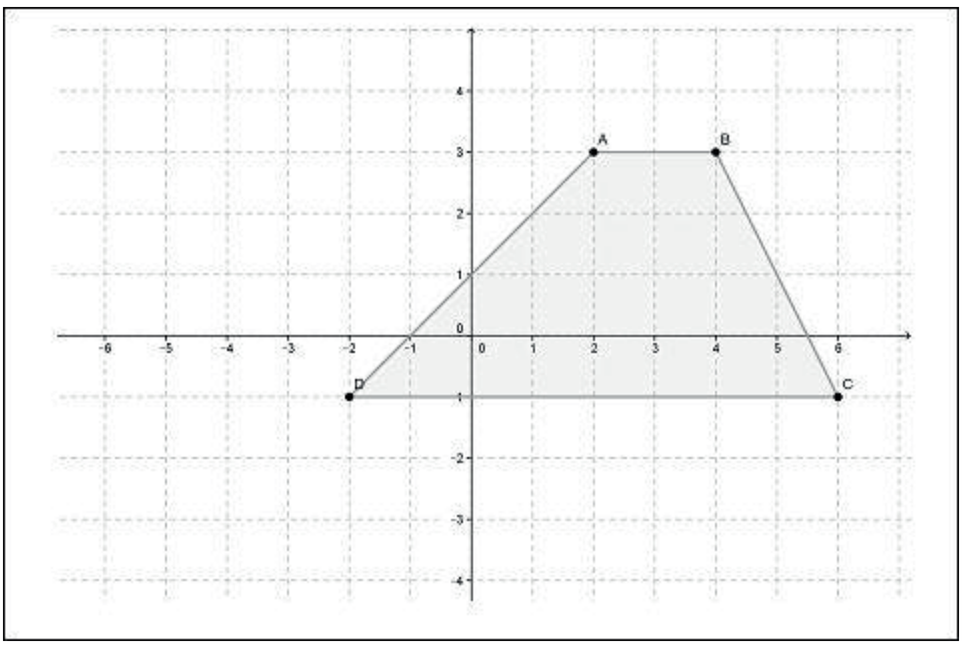
Ejercicio 5

Aplicarle al triángulo ABC una simetría de eje de ordenadas y otra de eje de abscisas. Indicar las coordenadas de todos los puntos.



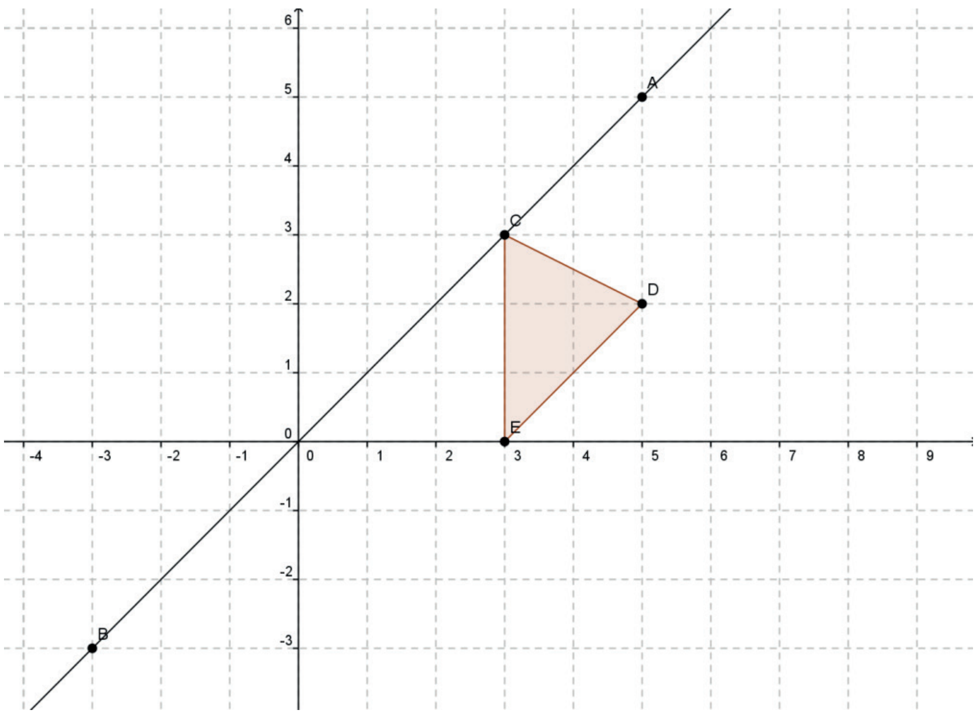
Ejercicio 6

Aplicarle al trapecio ABCD una simetría de eje “y”



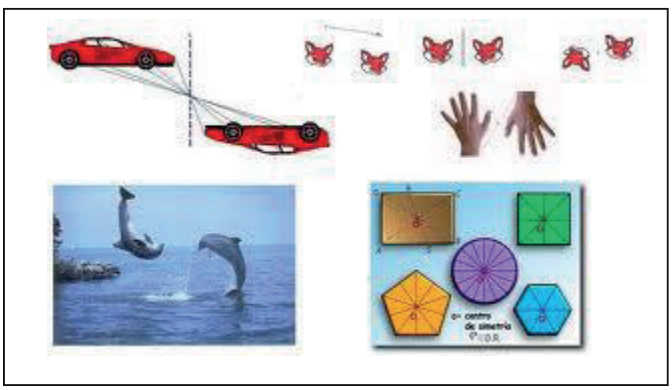
Ejercicio 7

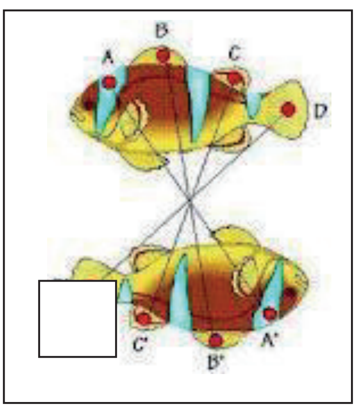
Hallar el triángulo simétrico respecto de la recta AB (Bisectriz del cuadrante).Escribir las coordenadas de todos los puntos.

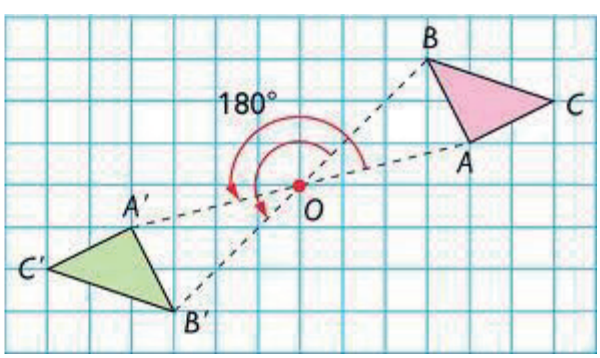


Explica con tus palabras la relación entre las coordenadas de cada punto y de su simétrico respecto de la recta de ecuación y =x , bisectriz del primer y tercer cuadrante.

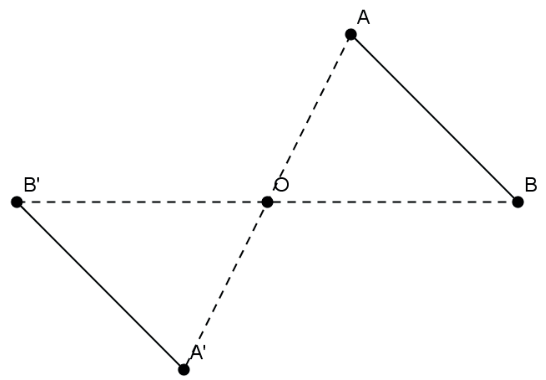
Simetría Central





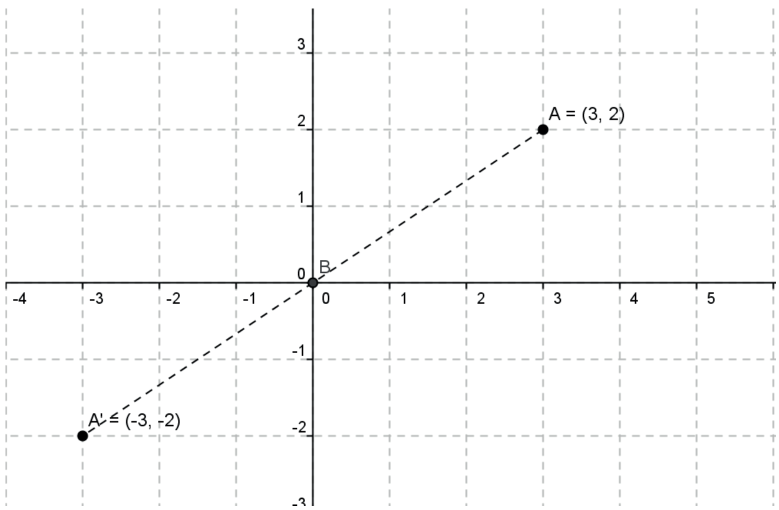


Si a una figura le aplicamos un giro de 180º se obtiene un nuevo movimiento del plano que denominamos SIMETRÍA CENTRAL



Notación: So (Simetría de centro O)

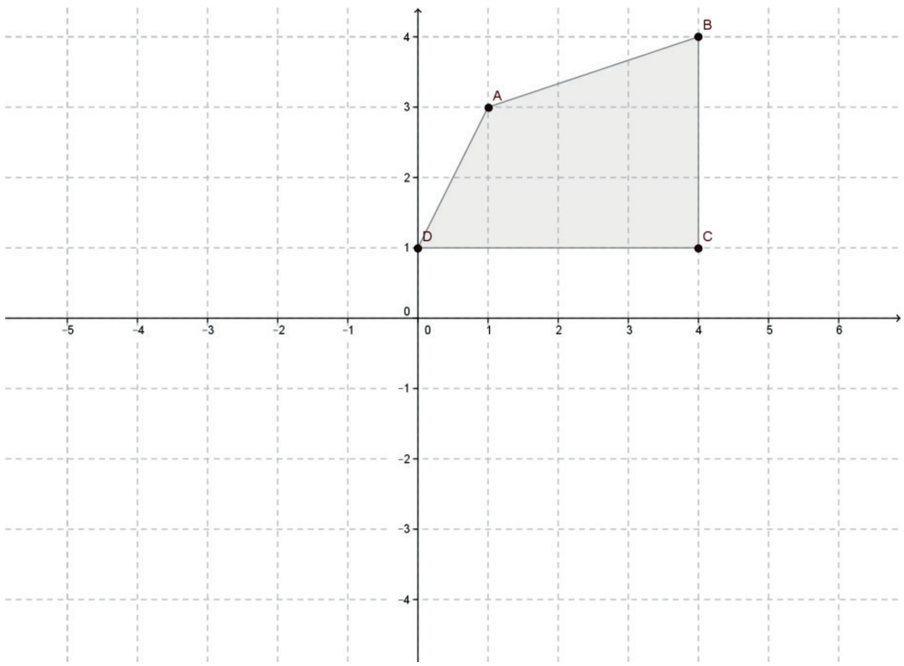
Definición: se llama simetría de centro O a la transformación del plano en sí mismo, que a cada punto A le hace corresponder un punto A' del mismo plano tal que las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ son opuestas y $\overline{OA} = \overline{OA'}$



Si un punto es simétrico respecto a (0;0) ambas coordenadas cambian por los números opuestos, como se observa en la figura.

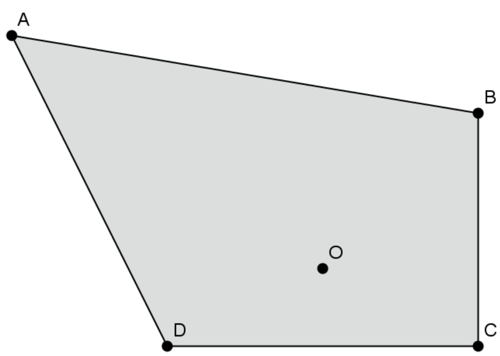
Ejercicio 8

Hallar la simetría central del cuadrilátero ABCD respecto al origen (0; 0). Indicar las coordenadas de todos los puntos.



Ejercicio 9

Hallar el simétrico del ABCD respecto a la simetría central, de centro O.

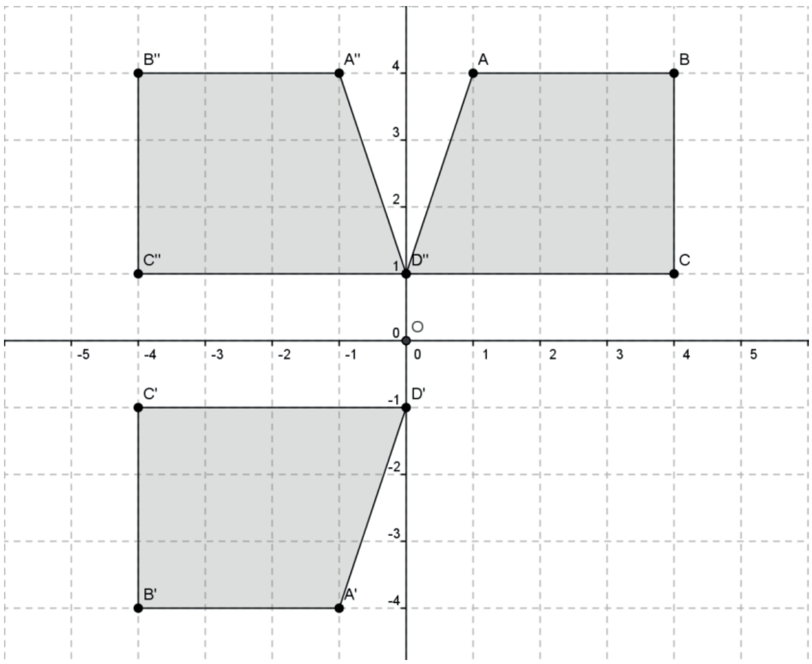


Ejercicio 10

Al cuadrilátero del ejercicio 9 aplicarle una simetría de centro B, a la figura obtenida aplicarle una simetría respecto al eje DC.

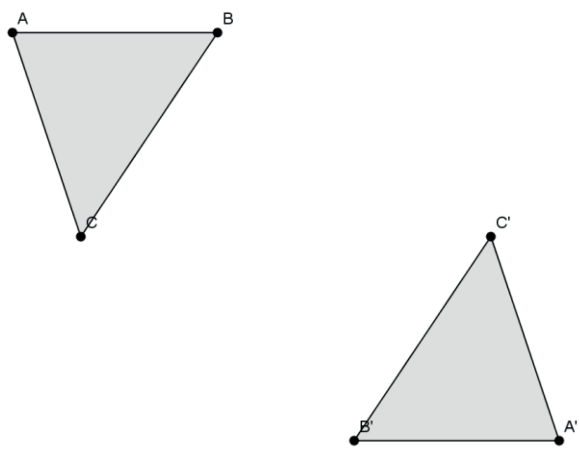
Ejercicio 11

Indicar que movimientos se aplican y en qué orden para obtener el cuadrilátero A’’B’’C’’D’’ a partir del ABCD



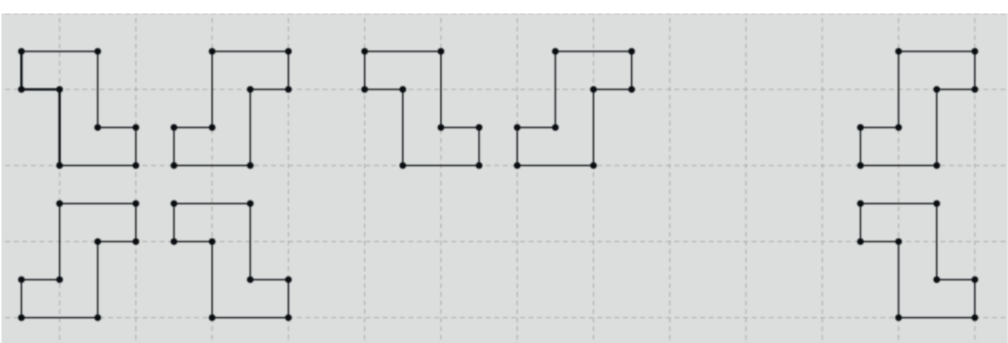
Ejercicio 12

Encontrar el centro de simetría.

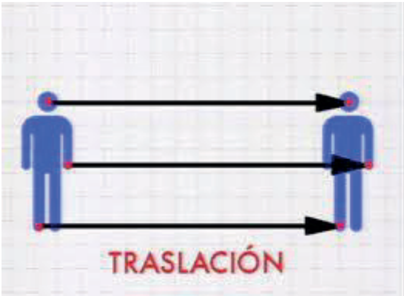


Ejercicio 13

Completen el siguiente diseño aplicando simetrías centrales o axiales



TRASLACIÓN

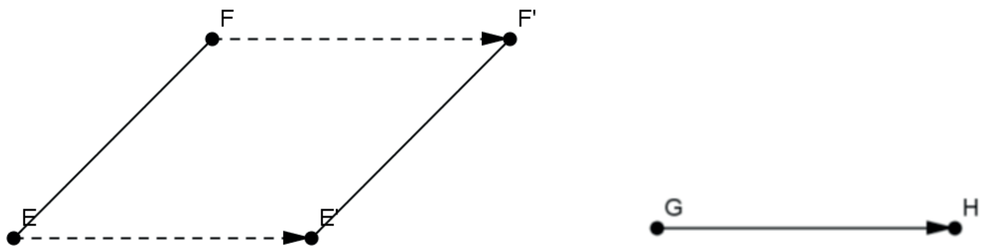


Todo segmento orientado se denomina VECTOR

Vector $\overrightarrow{OP}$ O P

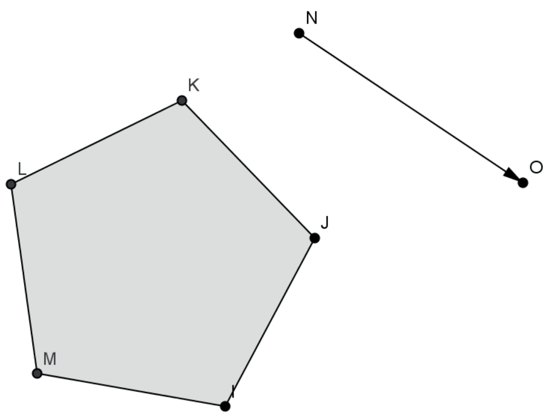
"O" Es el origen del vector "P" el extremo

Se llama **traslación** de vector $\overrightarrow{GH}$ a la transformación del plano en sí mismo, que a cada punto F le hace corresponder como imagen otro punto F' del mismo plano tal que $\overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{GH}$



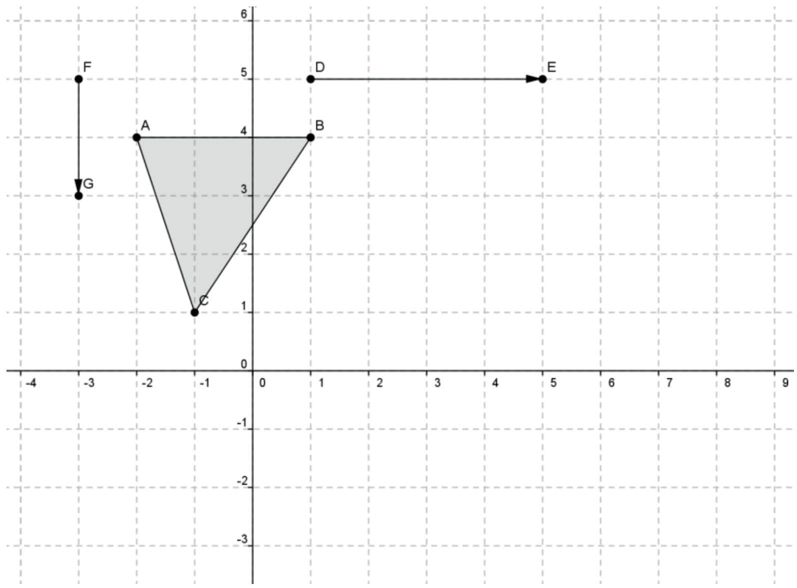
Ejercicio 14

Aplicarle al pentágono regular la traslación del vector indicado.



Ejercicio 15

Trasladar el triángulo ABC primero según el vector horizontal $\overrightarrow{DE}$ y a la figura obtenida aplicarle la traslación del vector vertical $\overrightarrow{FG}$.

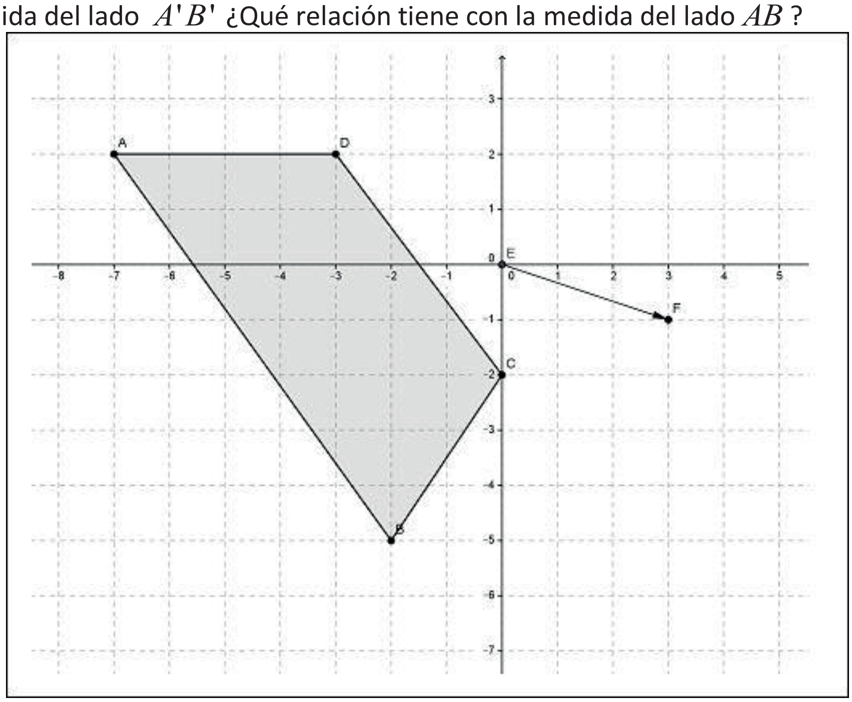


Ejercicio 16

a) Hallar gráficamente el cuadrilátero transformado del cuadrilátero ABCD a través de la traslación de vector $\overrightarrow{EF}$ de la figura.

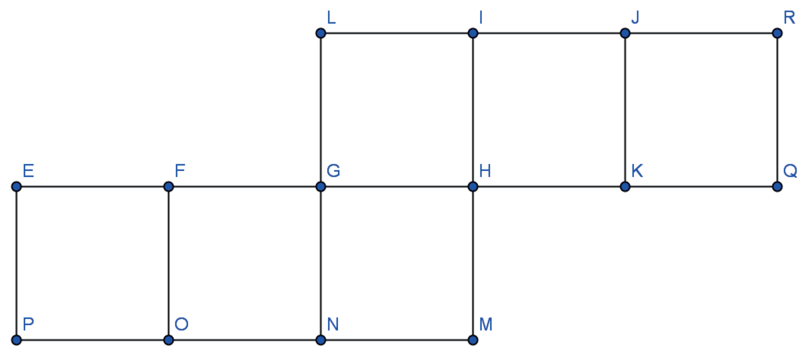
b) Escribir las coordenadas de los vértices del cuadrilátero transformado A'B'C'D'

Calcula la medida del lado $\overline{A'B'}$ ¿Qué relación tiene con la medida del lado $\overline{AB}$?



Ejercicio 17

Dada la siguiente figura



Completar las afirmaciones siguientes de, manera que los cuadrados dados se correspondan a través de alguno de los movimientos estudiados.

Ejemplo:

El cuadrado IJKH se transforma en el JRQK a través de una traslación de vector $\overrightarrow{IJ}$

Ten en cuenta que el orden en que se nombran los vértices corresponde a los transformados de los originales, en el ejemplo anterior J es el transformado de I , R es el transformado de J, Q es el transformado de K, K es el transformado de H

a) El cuadrado IJKH se transforma en el RJKQ a través de ………………………….

b) El cuadrado LIHG se transforma en el ……. a través de una simetría de eje GH

c) El cuadrado EFOP se transforma en el OFGN a través de …………………..

d) El cuadrado LIHG se transforma en el NOFG a través de …………………..

e) El cuadrado LIHG se transforma en el EFOP a través de …………………….

f) El cuadrado FGNO se transforma en el HGNM a través de …………………..

g) El cuadrado HIJK se transforma en el a través de R (K ; - 90º)…………………..

h) El cuadrado GNMH se transforma en el ……. a través de de una traslación de vector $\overrightarrow{MH}$

FIGURAS SEMEJANTES

¿Qué significa que dos figuras geométricas sean semejantes?

En el lenguaje cotidiano usamos la palabra “semejante” con el significado de “similar, parecido, igual, etc.” aplicado a objetos o personas.

Se dice que las figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño son figuras semejantes.

En la vida diaria, al ampliar o reducir una fotografía, en una maqueta de un monumento histórico, en copias de cuadros famosos, en reproducciones de modelos de automóviles, en los mapas y planos, contemplamos figuras semejantes.

En Matemática el concepto de semejanza está ligado al concepto de **proporcionalidad**.

Recordemos algunas definiciones

Razón: es el cociente entre magnitudes a y b que pueden ser números, distancias, peso, etc.

$$\frac{a}{b}$$

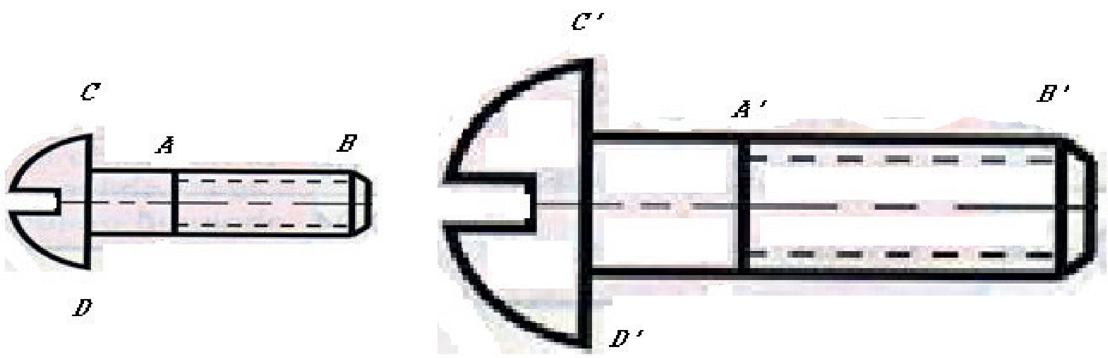
Proporción: es la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

En toda proporción se cumple que el producto de los términos medios es igual al producto de los extremos: *b. c = a. d*

Figuras semejantes

Definición:

Si consideramos una transformación que a partir de una de las figuras nos permita obtener la otra, definiremos como **lados homólogos** de dos figuras, a los lados de ambas que se corresponden en esa transformación.

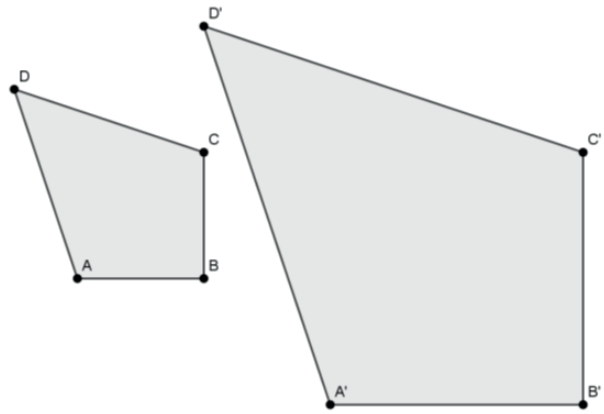


En el gráfico anterior, las dos figuras son semejantes. El segmento A'B' es el correspondiente al AB, El segmento C'D' es el correspondiente al CD, se dice que A'B' y AB son homólogos, también C'D' y CD son homólogos.

> Se establece que **dos figuras son semejantes, si y solo si:**
>
> **a) Sus ángulos respectivos son iguales**
>
> **b) Sus lados homólogos son proporcionales**

Los lados homólogos de dos figuras son los lados de ambas que unen pares de vértices de ángulos respectivamente iguales.

En el ejemplo siguiente, el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero A'B'C'D'. (Se simboliza ABCDE ~ A'B'C'D'E').



Se caracterizan porque los ángulos correspondientes, de uno y otro, son iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}'; \ \hat{B} = \hat{B}' \ ; \hat{C} = \hat{C} \ ; \ \hat{D} = \hat{D}'$$

Y los lados homólogos son proporcionales $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}}$

Y esas razones son iguales a la llamada razón de de semejanza (r)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = r$$

En este caso r = 2

La transformación puntual que origina figuras semejantes, es la Homotecia, para mayor información sobre el tema, remitirse al Apéndice.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS SEMEJANTES

La razón de los perímetros de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza.

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al **cuadrado** de la razón de semejanza.

Ejercicio 18

Dos polígonos son semejantes y dos de sus lados homólogos miden 6,5 cm y 19,5 cm.

a) ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?

b) ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

Ejercicio 19

Un rectángulo tiene área 6 cm^2. Otro rectángulo es semejante a él con una razón de semejanza r = 3. (Cada longitud del segundo es 3 veces la del primero).

a) ¿Cuál es el área del segundo rectángulo?

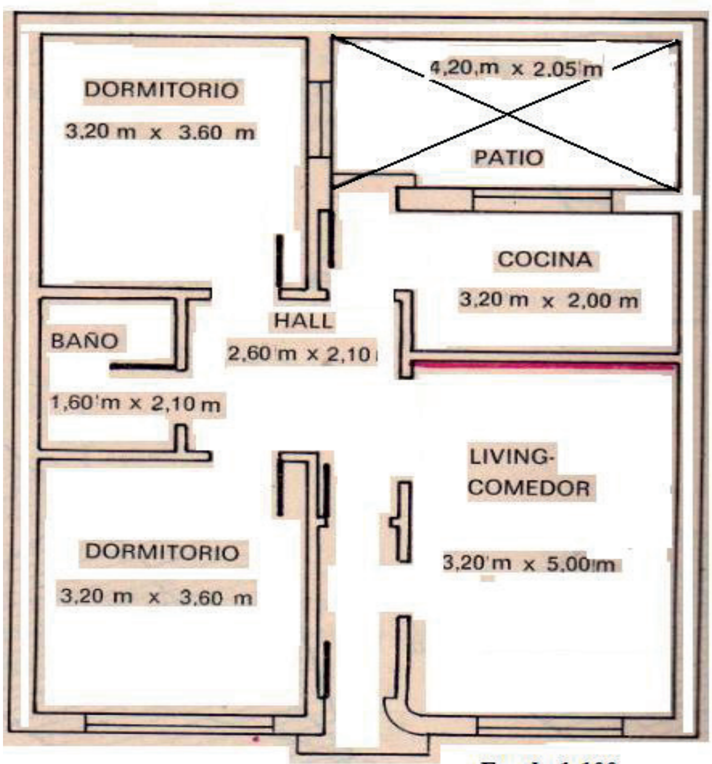
b) Un tercer rectángulo tiene cada uno de los lados de valor la mitad del primero, r = 1/2. ¿Cuál es su área?

APLICACIÓN DE LA SEMEJANZA. ESCALAS

Los mapas y los planos,(de edificios, terrenos, ciudades), en general, son representaciones mediante figuras semejantes. La razón de semejanza se llama **Escala**

Escala es la razón entre dos pares de segmentos homólogos: el primero es un segmento de la representación y el segundo en la realidad, homólogo con aquel.

La figura siguiente muestra una copia de un plano de un departamento en el que se empleo una escala E 1:100, significa que 1 cm del plano representa 100cm = 1 m en la realidad.



Escala 1:100

El segmento de pared que se encuentra destacado en el plano, el que limita la cocina con el living, mide en el plano 3,2 cm = 0,032 m y en la realidad mide 3,2 m. Por eso la escala es:

$$E = \frac{0,032m}{3,2m} = \frac{32}{3200} = \frac{1}{100}$$

Si se designa con “l” a la longitud de un segmento en el dibujo y con “L” a la longitud del segmento en la realidad homólogo a él, resulta entonces que: $E = \frac{l}{L}$

En los planos siempre está expresada de manera que su antecedente es 1.

Las escalas se utilizan también en la construcción de maquetas muy frecuentes en las carreras de arquitectura e ingeniería civil.

Video para repasar el concepto de escala https://youtu.be/V-0rKxJG2ac

Ejercicio 20

a) Se quiere dibujar una puerta de 0,90 m de ancho por 2,1 m de alto en una escala 1:50. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener la representación de la puerta?

b) En un mapa de la provincia de Córdoba, en escala 1: 1.000.000 el segmento determinado por Villa María y Córdoba mide 14,8 cm. ¿A qué distancia se encuentran la ciudades en la realidad? ¿Qué opinas de que los carteles indicadores de la ruta fijan que por el camino que comunica a esas dos rutas hay 146 km. ¿Qué conclusión puedes extraer?

c) En un plano un campo de deportes rectangular mide 6 cm de largo y 4,5 cm de ancho. Si la E = 1: 8.000, ¿Cuáles son las medidas reales del campo de deportes?

Problemas Diversos

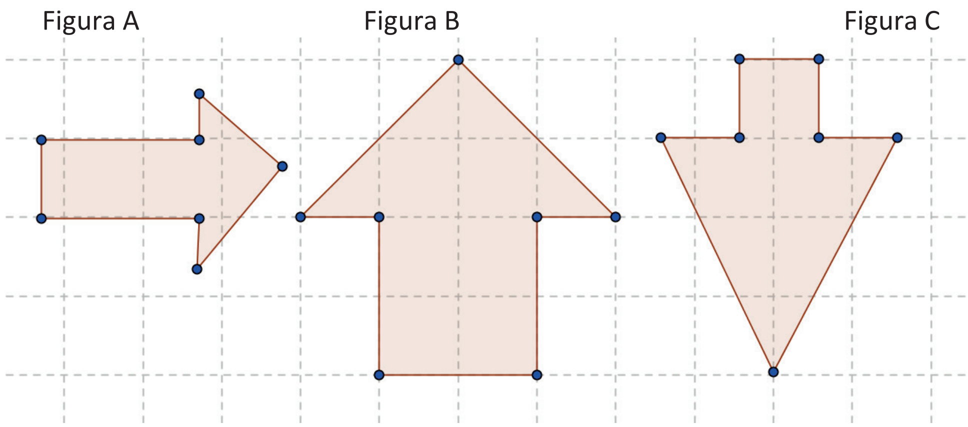
Problema 1 Un adulto mide 1,83 m y proyecta una sombra de 3,05. Al mismo tiempo la sombra de un niño es de 2,30 m. ¿Cuál es la estatura del niño?

Problema 2 Demuestra que todos los polígonos regulares, de una determinada cantidad de lados son semejantes.

Problema 3 Construye dos cuadriláteros que tengan sus lados respectivamente paralelos y no sean semejantes.

Problema 4 Se sacó una fotocopia reduciendo un original de 25 cm de largo y 15 cm de ancho, de tal forma que se obtuvo una copia de 18 cm de largo. ¿Qué escala se utilizó?

Problema 5 Establece si entre los gráficos de flecha que figuran debajo, existen figuras semejantes. Justifica.



Problema 6 Una pequeña ciudad tiene forma rectangular de 20 cuadras de largo por 10 de ancho. Tiene entonces 200 manzanas. ¿Cuántas manzanas tendrá si se triplica el número de cuadras de largo y de ancho? ¿Qué propiedad puedes usar para resolver este problema?

Problema 7 En un plano, la representación de un campo rectangular mide 5,4 cm de largo por 3,2 cm de ancho. Si la escala es E = 1 : 5000 ¿ Cuáles son las medidas reales, **en metros**, del terreno en cuestión ?

Problema 8

Interpreta la escala del mapa.
Determinar la distancia que separa Madrid de Coruña y compara con la distancia real por ejemplo usando este link http://es.distance.to/Coru%C3%B1a/Madrid

MÓDULO 4

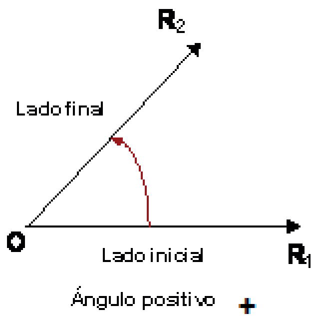
TRIGONOMETRÍA

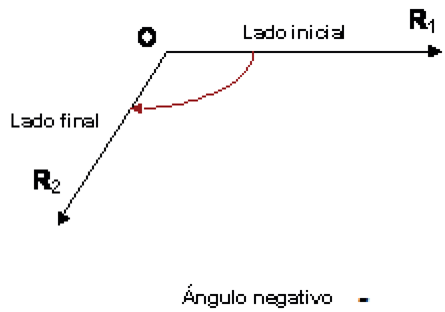
La Trigonometría es la rama de la Matemática que estudia las relaciones entre los ***lados*** y ***ángulos*** de un ***triángulo***. Su nombre deriva del griego (*trigonon* = triángulo y *metron* = medida).

ÁNGULOS

Un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto. Podemos interpretar a un ángulo como la rotación de una de las semirrectas a la que denominamos lado inicial (**R_1**) hacia la otra que llamamos lado final o terminal (**R_2**). Al origen común se le denomina **vértice** del ángulo.

Por convención se determina que si el giro se realiza en sentido contrario a las agujas del reloj el ángulo se considera positivo mientras que los ángulos negativos corresponden a un giro realizado en el mismo sentido horario.





SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

La medida de un ángulo es saber "cuanto" debe girar **R_1** hasta alcanzar a **R_2**. Para decirlo en una forma coloquial: medimos la "abertura" del ángulo.

Podemos utilizar diferentes sistemas de medición.

Sistema Sexagesimal

Este sistema para medir los ángulos lo hemos trabajado desde la unidad 2.

En él se considera que un ángulo de un giro mide 360°, un ángulo llano mide 180° y un recto 90°.

La unidad es el grado, que es a noventa ava parte de un ángulo recto.

$1° = \frac{1\ recto}{90}$ ó también $1° = \frac{1\ \text{giro}}{360} = \frac{1\ llano}{180}$

En este sistema de medidas se define también el minuto sexagesimal que equivale a 1/60 de grado y el segundo sexagesimal que equivale a 1/60 de minuto o 1/3600 de grado.

Sintetizando:

1º = 60\`= 3600'' 1\`= 60\`\`

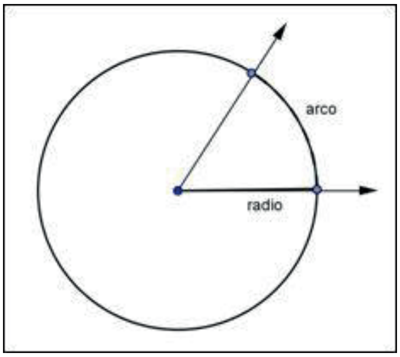
Sistema Circular

En este sistema los ángulos se miden como números reales, a cada ángulo se le asigna un número real como su medida.

En este sistema la unidad es el **radián**.

Podemos trazar un ángulo de tal forma que su vértice coincida con el centro de una circunferencia.

La intersección del ángulo con la circunferencia determina un arco, que se llama arco subtendido por el ángulo



En este sistema se define como unidad un ángulo de 1 **Radián** que es la medida del ángulo cuyo arco subtendido es igual a la longitud del radio de la circunferencia.

α = 1 radián $\Leftrightarrow$ Longitud del arco = radio

En la práctica es común trazar una circunferencia de radio unitario (de acuerdo a la unidad de medida de longitud que se esté usando) y el ángulo de 1 Radián subtenderá un arco cuya longitud tiene valor 1.

Equivalencia entre los dos sistemas

Como la longitud de la circunferencia (con radio unitario) es 2π , entonces el ángulo de un giro mide 2π radianes, el de medio giro π radianes y el ángulo recto medirá $\pi/2$ radianes.

¿Cuál es la relación entre la medida de un ángulo en radianes y en grados sexagesimales?

Sabemos que para el ángulo de un giro la medida en grados es 360º y en radianes es 2π.

Luego podemos establecer una proporción $\dfrac{360°}{2\pi} = \dfrac{x}{1 \text{ radian}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{360°.1}{2\pi} = 57°17'44,8''$

Un ángulo de 1 radián mide en el sistema sexagesimal 57º 17`44.8``

Inversamente $\dfrac{2\pi}{360°} = \dfrac{x}{1°} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2\pi.1°}{360°} = 0,017453$.

Un ángulo de 1 grado sexagesimal mide en el sistema circular 0,017453 radianes.

Para expresar un ángulo medido en un sistema, en el otro sistema usaremos la equivalencia

$360° = 2\pi$ ó $180° = \pi$

Ejemplo: Expresemos un ángulo de 15° en el sistema circular:

$$\frac{\pi}{180°}=\frac{x}{15°} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15°.\pi}{180°}=\frac{1}{12}\pi$$

Ahora expresemos en el sistema sexagesimal, un ángulo que mide 2,5

$$\frac{180°}{\pi}=\frac{x}{2{,}5} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2{,}5.180°}{\pi}=143°14'22''$$

https://youtu.be/z6BJGCTTjm8 Sistemas de medición de ángulos: sexagesimal y circular.
https://youtu.be/FZ-TOGNDK90 Equivalencias entre sistemas

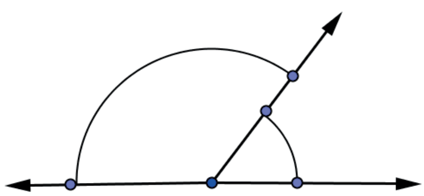
https://youtu.be/vRrhB14CPQs Conversión de un sistema a otro

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y ADYACENTES

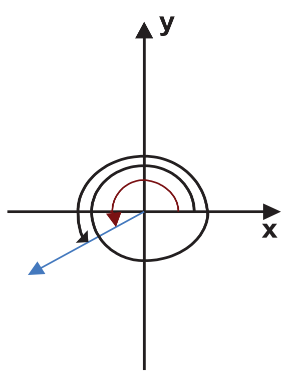
Dos ángulos α y β son **complementarios** cuando su suma $\alpha + \beta$ es igual a 90º ($\pi/2$ rad)

Dos ángulos α y β son **suplementarios** cuando su suma $\alpha + \beta$ es igual a 180º (π rad)

Dos ángulos α y β son **adyacentes** cuando son consecutivos (tienen un lado en común) y sus lados no comunes son semirrectas opuestas. Los ángulos adyacentes son suplementarios



Dos ángulos para los cuales sus lados coinciden se llaman **coterminales** y difieren en su valor en una cantidad entera de vueltas, es decir, difieren en un múltiplo entero de 360º o de 2π. La figura siguiente muestra dos ángulos coterminales



ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL Y CUADRANTES

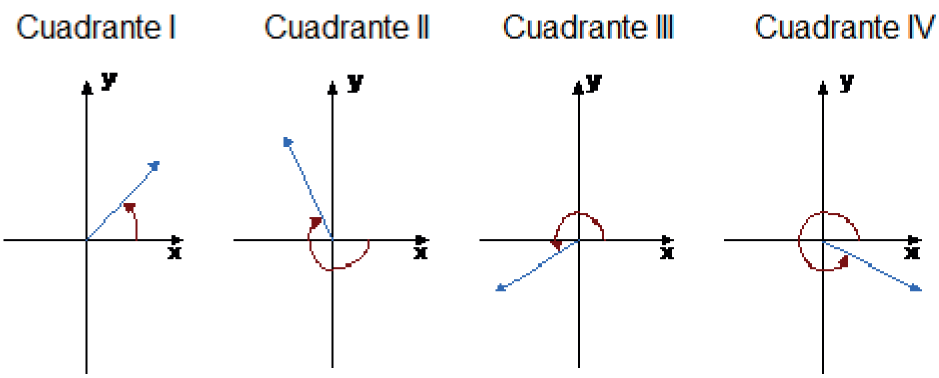
Muchas veces nos será útil considerar un ángulo ubicado en un sistema cartesiano de coordenadas de modo que el vértice del ángulo coincida con el origen de coordenadas y el lado inicial coincida con el eje positivo de abscisas, el lado terminal resultará ubicado en cualquier parte del plano.

A esta posición del ángulo se le suele denominar **posición normal o estándar**.

Al trazar los ejes de abscisas y ordenadas, el plano queda dividido en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.

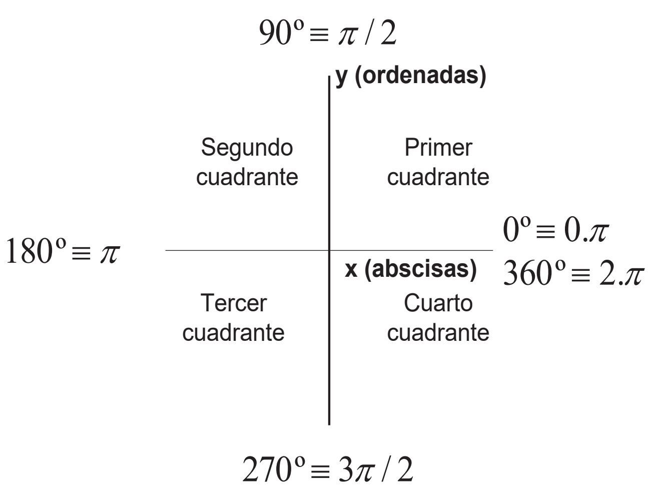
Los cuadrantes se numeran desde el semieje positivo del eje x en sentido positivo (antihorario) de giro, cuadrante I, II , III y IV.

Decimos que un ángulo pertenece a un determinado cuadrante, si su lado terminal se encuentra ubicado en ese cuadrante. En la figura anterior se muestran ángulos pertenecientes al I, II , III y IV cuadrante respectivamente.



Ángulos en posición estándar

En la figura siguiente se identifican los valores (expresados en grados sexagesimales y en radianes) de los ángulos que marcan el límite entre un cuadrante y el sucesivo.



Los signos de las abscisas y ordenadas en cada cuadrante se presentan en la siguiente tabla.

	Valor de la abscisa	**Valor de la ordenada**
Primer cuadrante	Positivo	Positivo
Segundo cuadrante	Negativo	Positivo
Tercer cuadrante	Negativo	Negativo
Cuarto cuadrante	Positivo	Negativo

Ejercicio 1

Determine la medida en radianes de los siguientes ángulos

1) 40º 2) 330º 3) 72º 4) –30º 5) 765º 6) –1457º

Ejercicio 2

Determine la medida en grados sexagesimales de los siguientes ángulos

1) $3\pi/4$ 2) $-7\pi/2$ 3) $5\pi/6$ 4) 2 5) 1,5 6) $-\pi/12$

Ejercicio 3

Completa el siguiente cuadro colocando los nombres de los ángulos que pertenecen a cada cuadrante:

$\hat{a} = 7\pi/6$ $\hat{b} = 97.200''$ $\hat{c} = -570°$

$\hat{d} = 2\pi/3$ $\hat{e} = -4\pi/3$ $\hat{f} = 12.300'$

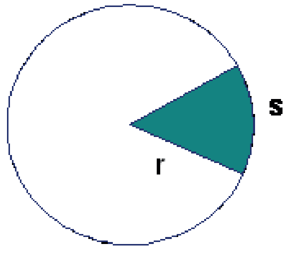
CUADRANTE	ÁNGULO
Primero	
Segundo	
Tercero	
Cuarto	

LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Sea un arco subtendido por un ángulo cuya medida en radianes es θ y el radio de la circunferencia r . Podemos determinar cuál es la longitud *s* de dicho arco

El ángulo subtiende una fracción $\theta/2\pi$ de la longitud total de la circunferencia.

Luego consideramos una proporción: $$\frac{angulo\ \ central}{long.\ del\ arco} = \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{\theta}{s}$$ entonces:



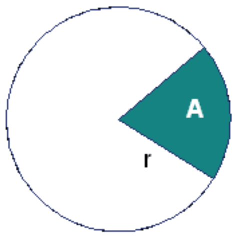
$$\boxed{s = \frac{\theta}{2\pi}.2\pi r = \theta.r}$$

Lo que nos indica que la longitud del arco subtendido es igual al producto del radio de la circunferencia por la medida del ángulo (expresada en radianes).

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

Procediendo análogamente a la sección anterior podemos calcular el área de un sector circular subtendido por un ángulo que mide θ radianes en un círculo de radio r.

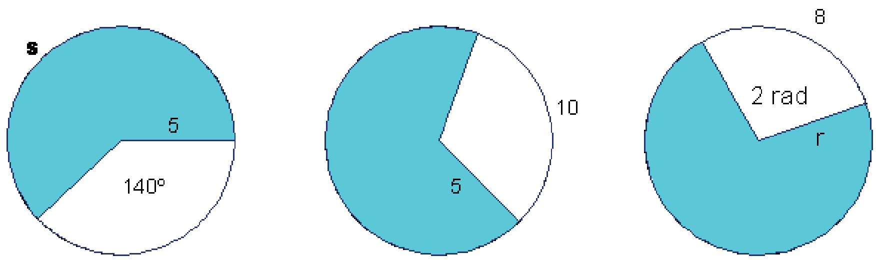
$$\frac{angulo\ \ central}{area\ del\ \ sector\ circular}=\frac{2\pi}{\pi r^2}=\frac{\theta}{A}$$



$$\boxed{A=\frac{\theta}{2\pi}.\pi r^2=\frac{1}{2}\theta.r^2}$$

Ejercicio 4

En las siguientes figuras determine el valor del elemento faltante (longitud de arco, ángulo o radio de la circunferencia)



Ejercicio 5

Un sector circular tiene un ángulo central de 60º. Determine el área del sector si el radio mide 12 cm.

Ejercicio 6

El área de un sector circular con ángulo central de 2 radianes es de 16 m^2 . Determine el radio del círculo.

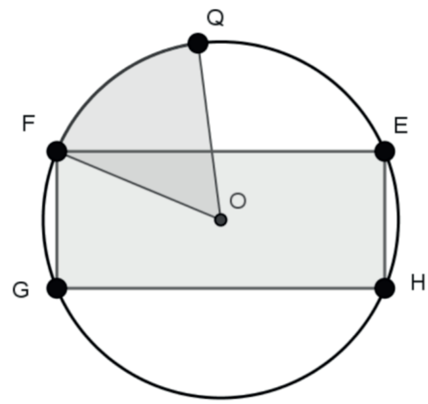
Ejercicio 7

a) El área de un sector circular es de 19,365 cm^2 . Si el radio del círculo es 10 cm, halle el valor del ángulo central en grados sexagesimales.

b) El área de un círculo es de 78,54 cm^2 . Determine el área de un sector circular perteneciente a dicho círculo cuyo ángulo central mida 30º.

Ejercicio 8

i) Sabiendo que, el perímetro del rectángulo inscripto en una circunferencia, como se muestra en la figura, es de 68 cm y el lado $\overline{EH} = \frac{2}{3}\left(\overline{EF} - 9cm\right)$.



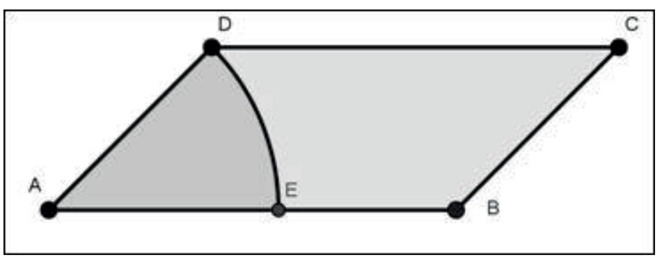
Se pide:

a) Calcular la medida de los lados del rectángulo.

b) Calcular la medida del radio de la circunferencia.

c) Calcular el área del sector circular, cuyo ángulo central es $F\hat{O}Q = 60^{\circ}$

ii) Sabiendo que, en el siguiente paralelogramo el lado $\overline{AB}$ excede en una unidad al doble de $\overline{AD}$ y tiene un perímetro de 26 cm.



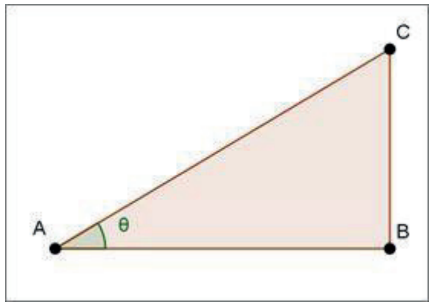
a) Calcular la medida de los cuatro lados del paralelogramo.

b) Sabiendo que el ángulo interior $\hat{A}$ vale 30º. Calcular el área del sector circular $D\hat{A}E$ graficado.

Video donde explicamos un ejercicio similar a este último: https://youtu.be/ArNbSzjNG4A

TRIGONOMETRÍA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

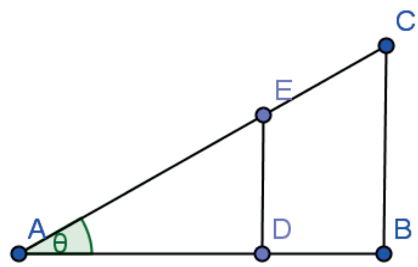
Sea el triángulo rectángulo de la figura, podemos definir algunas razones entre los lados del mismo según su relación con el ángulo θ .



Por ejemplo:

$$\frac{Cateto \quad opuesto}{hipotenusa} \qquad \frac{Cateto \quad adyacente}{hipotenusa} \qquad \frac{Cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$$

¿Tiene algún sentido plantearse estas razones entre los lados del triángulo?



Observemos la figura siguiente

Los triángulos ABC y ADE son ambos rectángulos y además del ángulo recto tienen otro ángulo igual (en este caso θ). Entonces, también el tercer ángulo será igual ¿por qué?

De acuerdo con uno de los criterios de semejanza expresados en la unidad anterior (Criterio ángulo-ángulo), estos dos triángulos resultan semejantes y por consiguiente se cumplen las proporciones:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \quad , \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \quad , \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Por consiguiente, no interesan las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos que podamos construir, manteniendo constante (en magnitud y posición) el ángulo θ, las razones construidas tendrán siempre el mismo valor y **dependerán solamente del ángulo en cuestión.**

Esto nos permite definir las llamadas **funciones trigonométricas de un ángulo agudo** de un triángulo rectángulo.

$$seno \quad \theta = \frac{Cat. \ opuesto}{hipotenusa}, \quad coseno \ \theta = \frac{Cat. \ adyacente}{hipotenusa} \ , \ \text{tangente} \ \theta = \frac{Cat. \ opuesto}{cateto \ adyacente}$$

$$\cos ecante \ \theta = \frac{hipotenusa}{Cat. \ opuesto}, \ \sec ante\theta = \frac{hipotenusa}{Cat. \ adyacente} \ , \text{cotangente} \ \theta = \frac{Cat. \text{ adyacente}}{cat. \text{ opuesto}}$$

Al ser 3 los lados de un triángulo existen 6 formas distintas de dividir 2 de ellos, por lo tanto las funciones trigonométricas son 6.

Estas son funciones del ángulo, mientras el ángulo se mantenga constante, independientemente de las longitudes de los lados, los valores de las funciones trigonométricas se mantienen igual.

Ejercicio 9

Construye, usando los instrumentos de geometría, algún triángulo ABC, rectángulo en $\hat{A}$, en cada caso, tal que:

a) tg $\hat{B}$ = 3 b) tg $\hat{C}$ = 5,5 c) sen $\hat{B}$ = 1/5

Ejercicio 10

El triángulo JKO es rectángulo en j , y $\overline{JK} = 10\ \overline{JO}$. Calcula:

a) tg $\hat{O}$ = b) cotg $\hat{O}$ =

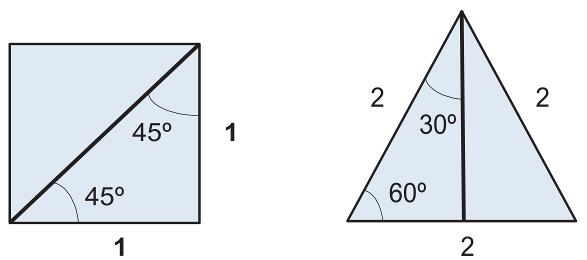
c) tg $\hat{K}$ = d) cotg $\hat{K}$ =

Ejercicio 11

Expresar a x e y en función de las razones trigonométricas del ángulo señalado en cada figura:

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ALGUNOS ÁNGULOS ESPECIALES

Analicemos los triángulos de las siguientes figuras:



El primero se forma trazando la diagonal en un cuadrado de lado 1. Se forman dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden 1 y su hipotenusa mide $\sqrt{2}$ (Justifícalo). Además los ángulos agudos miden 45º (¿Por qué?)

El segundo se forma trazando la bisectriz (¿qué es?) del ángulo opuesto a la base en un triángulo equilátero cuyos lados miden 2. Se forman así dos triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos miden 60º y 30º, su hipotenusa mide 2, un cateto mide 1 y el otro mide $\sqrt{3}$ (explicar por qué).

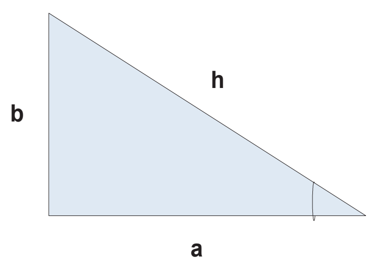
Para estos ángulos de 30º, 45º y 60º es fácil hallar sus razones trigonométricas, empleando las definiciones dadas en la página anterior.

Realiza los cálculos necesarios para obtenerlos (No olvides racionalizar los denominadores).

θ en grados	θ en radianes	seno θ sen θ	cosenoθ cos θ	tangenteθ tan θ	cosecanteθ csc θ	secante θ sec θ	cotangenteθ cot θ
30º	π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45º	π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60º	π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN MISMO ÁNGULO

Relación Pitagórica



$$sen^2\theta + \cos^2\theta = \frac{b^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{b^2+a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

En consecuencia: $\boxed{sen^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ $\Rightarrow$

$$sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$
$$|sen\ \theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$|\cos\ \theta| = \sqrt{1-sen^2\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot g\theta = \frac{1}{tg\theta}$$

$$tg\theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} \qquad \cot g\theta = \frac{\cos\ \theta}{sen\ \theta}$$

Si en la relación pitagórica dividimos por $\cos^2\theta$ se obtiene

$$\frac{sen^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \boxed{tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Análogamente, si en la Relación Pitagórica dividimos por $sen^2\theta$ se obtiene:

$$\frac{sen^2\theta + \cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta} \Rightarrow 1 + \frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta} \Rightarrow \boxed{1 + cotg^2\theta = c\,sc^2\,\theta}$$

Todas las relaciones anteriores, si bien se presentaron de una determinada manera, de acuerdo a los datos de un problema puede ser necesario despejar otra de las funciones trigonométricas que figura en ellas.

Ejercicio 12

Calcula el valor de todas las razones trigonométricas del ángulo θ a partir de la razón trigonométrica dada (suponemos que el ángulo θ es agudo)

a) sen $\theta = 3/5$ b) cos $\theta = 2/7$ c) tg $\theta = 3^{1/2}$

d) cotg $\theta = 1$ e) sec $\theta = 7$ f) cosec $\theta = 13/12$

¿Se puede hallar el valor del ángulo en cada caso?

Ejercicio 13 Completar en base a los datos, en cada caso:

a) sen μ = 0,247 y cos μ = 0, 969

tg μ = cotg μ =

b) sen ß = 0,866 y tg ß = 1,732

cos ß = sec ß =

c) tg α = 1.05 y sec α = 1,45

sen α = cosec α =

d) cotg γ = 0,038 y sen γ = 0,9992

cos γ = sec γ =

https://youtu.be/MszL-mQF4jk Relaciones trigonométricas de un mismo ángulo. Ejercicio

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

A partir del conocimiento de las propiedades de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y de las razones trigonométricas, estamos en condiciones de “resolver” triángulos rectángulos, es decir, determinar el valor de todos sus elementos a partir de algunos datos conocidos.

En general, en un triángulo rectángulo, descontando el ángulo recto, si se conocen dos de sus elementos (siendo al menos uno de ellos un lado) es posible averiguar lados y ángulos restantes.

Algunas consideraciones previas

1- En algunas ocasiones deberemos utilizar las fórmulas inversas de las funciones trigonométricas (no confundir con las razones inversas (cosecante, secante y cotangente))

Por ejemplo, en alguna oportunidad será necesario conocer el ángulo para el cual el seno vale 0.8 , o sea determinar el valor del ángulo θ para el cual seno θ = 0.8

Para ello podemos utilizar calculadoras y de acuerdo al teclado que posean presionar las teclas SIN^{-1} , o INV SIN, o ARCSIN .

En el caso en cuestión presionaremos la combinación de teclas anterior y luego 0.8 $\boxed{=}$.

Si la calculadora está programada para dar el resultado en grados sexagesimales (DEG) 53,13º , lo que equivale a 53º 7` 48`` .

Si la calculadora está programada para dar el resultado en radianes (RAD), el mismo será 0.972.

De la misma forma se procederá con el coseno y la tangente, siendo sus respectivas fórmulas inversas COS^{-1} , o INV COS, o ARCCOS y TAN^{-1} , o INV TAN, o ARCTAN

Intenta calculando con tu calculadora

Cos α = 0,54 $\qquad \alpha$ =

Tg β = 3 $\qquad \beta$ =

Sen ψ = 0,2 $\qquad \psi$ =

Ejercicio 14

Encontrar los siguientes ángulos usando calculadora:

a) arc sen 0,68 = _______ b) arc sen 0,70711 = ______

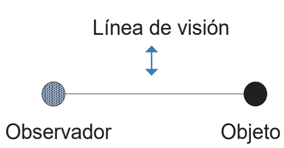
c) arc cos 0,5 = _______ d) arc cos 0,12 = ______

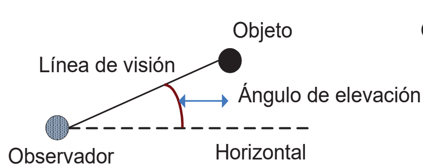
e) arc tg 0,476 = _______ f) arc tg 28,64 = ______

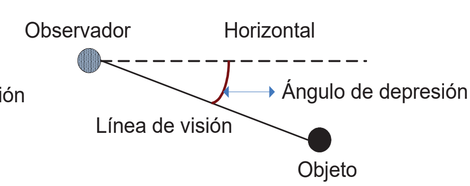
2- Para resolver algunos de los problemas que se plantean a continuación, definiremos algunos términos que utilizaremos en ellos.

Si un observador está viendo un objeto, entonces la línea que une su ojo con el objeto se llama **línea de visión.**

Si el objeto que se está observando está por arriba de la horizontal, entonces el ángulo formado entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación**. En el caso contrario (objeto por debajo de la horizontal) el ángulo se llama **ángulo de depresión**.

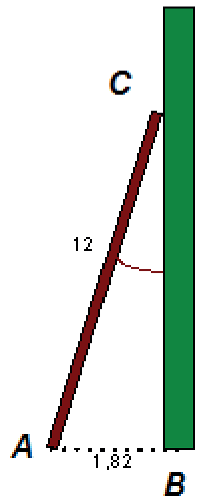






Ejemplos

1) Una escalera de 12 metros de largo está apoyada contra una pared. Si la base de la escalera está a 1,82 metros de la base de la pared. ¿Cuál es el ángulo formado entre la escalera y la pared?



En el triángulo rectángulo ABC, el lado $\overline{AC}$ (la escalera) es la hipotenusa y, con respecto al ángulo pedido, $\overline{AB}$ = 1,82 m es el cateto opuesto.

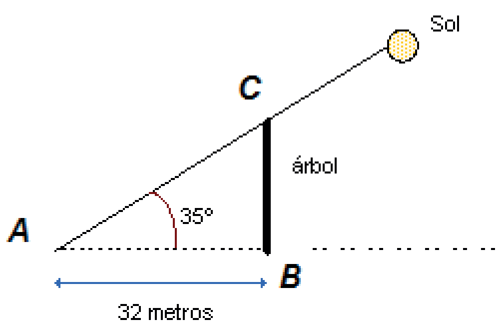
La función trigonométrica que relaciona estos dos elementos de un triángulo rectángulo es el seno, es la función trigonométrica que usaremos para resolver el problema.

$$sen\ \hat{C} = \frac{cat.\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1{,}82m}{12m} = 0{,}151666$$ entonces

$$\hat{C} = \sin^{-1} 0{,}151666 = \arcsin\ 0{,}151666 = 9{,}01° = 9°6'$$

El ángulo que forma la escalera con la pared mide 9° 6´

2) Un árbol proyecta una sombra de 32 metros de largo y el ángulo de elevación al Sol es de 35º. Determine la altura del árbol.



En el triángulo rectángulo ABC, $\overline{BC}$ es la altura del árbol.

Con respecto al ángulo dado, el lado $\overline{BC}$ (la altura del árbol) es el cateto opuesto y $\overline{AB}$ = 32 m es el cateto adyacente.

La función trigonométrica que relaciona estos dos elementos es la tangente, es la función que usaremos para resolver el problema.

$$tg35° = \frac{cat.\ opuesto}{cat.\ adyacente} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{32m} \quad \text{entonces} \quad \overline{BC} = 32m \ . \ tg35° = 32m \ . \ 0,7002$$

$\overline{BC}$ = 22,4 metros

Por lo tanto, la altura del árbol es 22,40 metros

Como habrás podido observar para resolver este tipo de problemas es conveniente realizar un diagrama que los represente. De esa manera podemos visualizar claramente todos los elementos, la relación entre los mismos y elaborar un método de resolución. Te recomendamos hacer lo mismo con los ejercicios siguientes.

Ejercicio 15

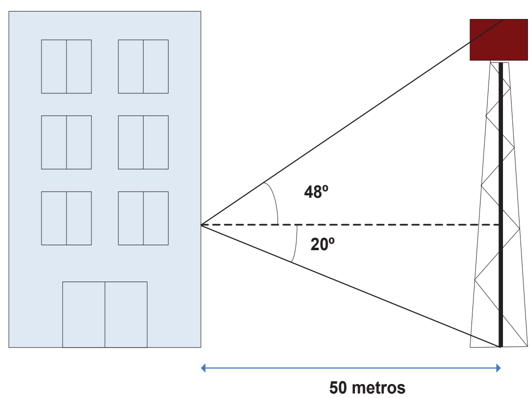
El piloto de un avión que está volando a una altura de 10,67 km tiene a la vista un puente sobre un río. El ángulo de depresión respecto a un punto ubicado exactamente debajo del puente es de 22º. Determine:

a) la distancia del aeroplano a la base del puente

b) la distancia del punto ubicado en la tierra exactamente debajo del avión y la base del puente

Ejercicio 16

En el siguiente gráfico, determine la altura de la torre de agua

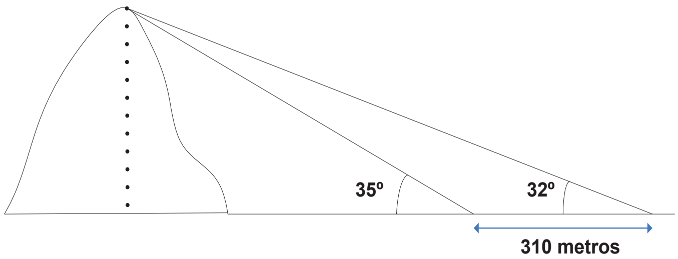


Ejercicio 17

Se dirige un rayo láser hacia el centro de la Luna, pero el mismo se desvía 0,5º en su trayectoria. ¿Cuánto se ha desviado de su objetivo si se sabe que la distancia Tierra-Luna es aproximadamente de 384.400 km? El radio de la Luna es aproximadamente 1737 km ¿el rayo impactará sobre la Luna? (suponga como si el rayo fuese dirigido desde el centro de la Tierra hacia el centro de la Luna)

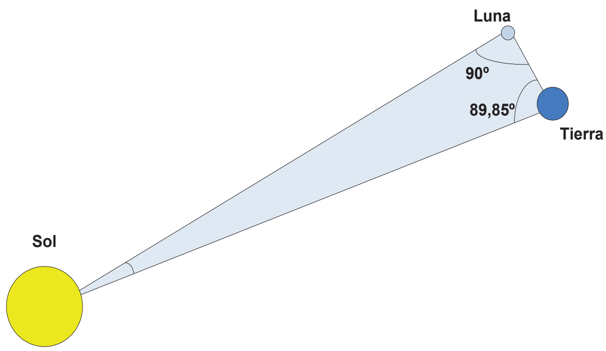
Ejercicio 18

Para poder calcular desde una llanura la altura de una montaña se realizan dos mediciones del ángulo de elevación del pico de la misma. Ambas mediciones se toman sobre un camino lineal que se dirige en forma recta a la base de la montaña. La primer medición da un resultado de 32º. La segunda se realiza a 310 m mas cerca de la montaña y da un resultado de 35º. ¿Puede estimar la altura de la montaña? (no es un cálculo directo).



Ejercicio 19

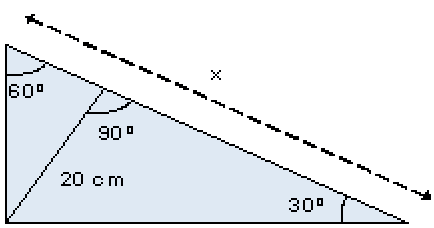
En el cuarto creciente la Luna, el Sol y la Tierra forman entre sí un triángulo rectángulo Con los datos de la figura y sabiendo que la distancia Tierra – Luna es aproximadamente 384.400 km , hallar la distancia Tierra – Sol.



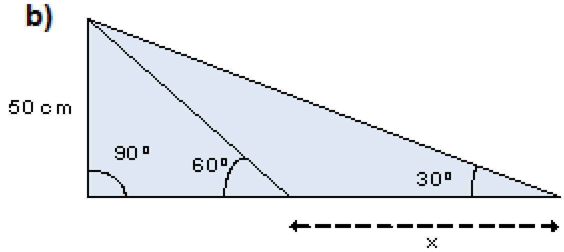
Ejercicio 20

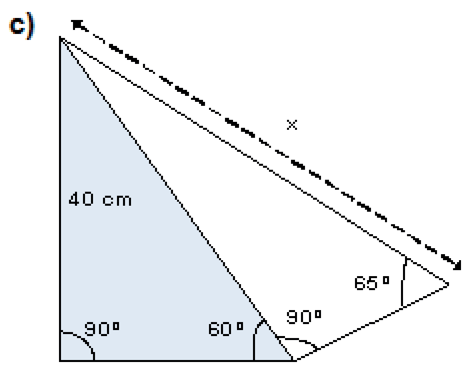
En los siguientes gráficos determinar el valor de x.

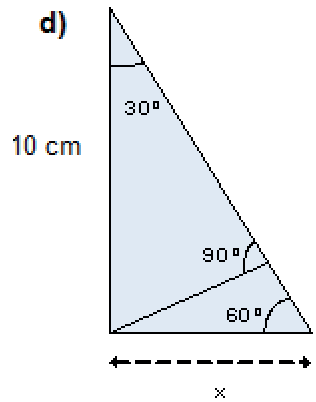
a)



b)







Ejercicio 21

Un cable de acero que actúa como sostén está sujeto al extremo superior de una torre metálica. Si la longitud del cable es de 183 m y el ángulo que forma con el suelo es de 60º, calcule la altura de la torre.

Ejercicio 22

Una escalera de 6 metros de longitud está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera se encuentra separada 1,8 m de la base del edificio. Determine el valor de todos los ángulos internos del triángulo que determinan la escalera, el edificio y el suelo.

Ejercicio 23

Un árbol de 29 m de alto proyecta una sombra de 36 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación al Sol?

Ejercicio 24

Las hojas de una escalera están unidas por una cadena que tiene 80cm de longitud ubicada en la mitad; cuando la escalera está totalmente abierta, sus hojas forman con el piso ángulos de 80º.¿Cuál es la altura que alcanza la escalera al estar totalmente abierta? ¿Qué longitud tiene la escalera cuando está plegada?

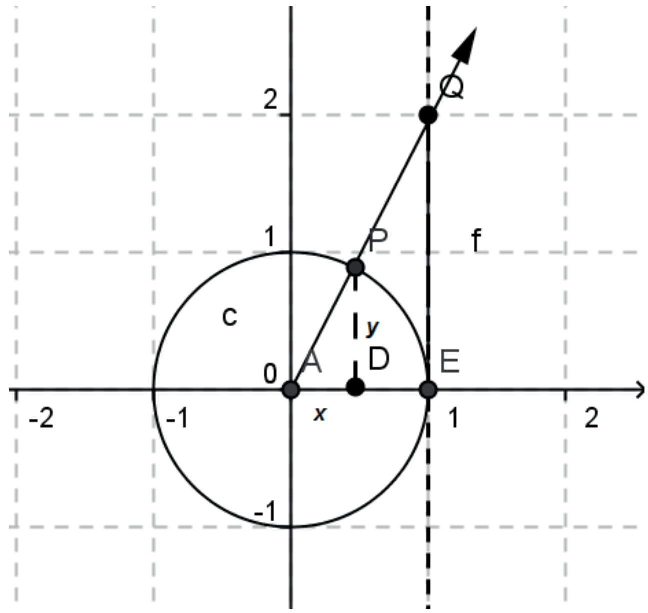
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

Ubiquemos un ángulo θ en posición estándar y consideremos una circunferencia trigonométrica.

Se llama **circunferencia trigonométrica** a una circunferencia que tiene centro en el origen de coordenadas (0 ; 0) y es de radio 1 unidad .

El punto P de coordenadas (x , y) representa el punto de intersección entre el lado final del ángulo θ y la circunferencia trigonométrica.

En principio ubicaremos a dicho punto P en el primer cuadrante, por lo cual el ángulo θ será un ángulo agudo.



Como x e y son, respectivamente, los catetos adyacente y opuesto al ángulo θ , y la hipotenusa es el radio de la circunferencia, igual a 1, podemos definir las razones trigonométricas en función del cociente de ***x , y.***

De esta manera definimos las razones trigonométricas para cualquier tipo de ángulos. Si P*(x,y)* puede situarse en cualquier punto de cualquier cuadrante, definiremos las siguientes **funciones trigonométricas , (**teniendo en cuenta que $r = 1$):

En el triángulo ADP , rectángulo en D , $\overline{PD}$ es el cateto opuesto , $\overline{AD}$ es el cateto adyacente y $\overline{PA}$ es la hipotenusa

$$sen\ \theta = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{y}{1} = y \quad , \quad \cos\theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{PA}} = \frac{x}{1} = x$$

Es decir, para cualquier ángulo, las coordenadas *x* e *y* del punto P, nos dan el valor del coseno y el seno del ángulo respectivamente

Trazamos la recta tangente a la circunferencia por el punto E = (1;0) . El punto Q es el punto de intersección entre el lado final del ángulo θ y la tangente x=1 . En el triángulo AEQ, rectángulo en E , $\overline{QE}$ es el cateto opuesto , $\overline{AE}$ es el cateto adyacente y $\overline{QA}$ es la hipotenusa

$$tg\ \theta = \frac{\overline{QE}}{\overline{EA}} = \frac{ordenada\ de\ Q}{1} = ordenada\ de\ Q$$

Entonces la coordenada y del punto Q (ordenada de Q) nos da el valor de la tangente de θ.

Como al pasar por los diferentes cuadrantes, las abscisas y las ordenadas van cambiando su signo, así también lo harán las funciones trigonométricas que dependen de ellas

Función	Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
Seno	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
Coseno	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Tangente	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa
Cosecante	Positiva	Positiva	Negativa	Negativa
Secante	Positiva	Negativa	Negativa	Positiva
Cotangente	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa

Para interpretar la tabla anterior recuerda las relaciones vistas entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo:

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot g\theta = \frac{1}{tg\theta} = \frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

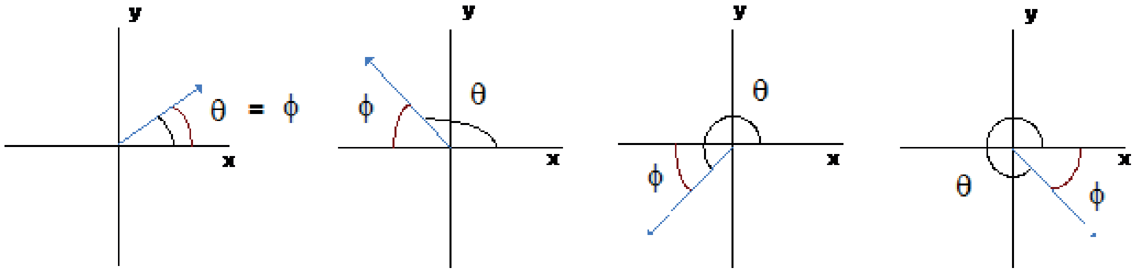
Podemos además completar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos pertenecientes a los ejes coordenados, pensando siempre en las coordenadas del punto P y Q.

σ en grados	σ en radianes	Coord. P	Coord. Q	Sen σ	Cos σ	Tan σ	Cosec σ	Sec σ	Cotg σ
0º	0	(1;0)	(1;0)	0	1	0	No está definida	1	No está definida
90º	$\frac{\pi}{2}$	(0;1)	No existe	1	0	No está definida	1	No está definida	0
180º	π	(-1;0)	(1;0)	0	-1	0	No está definida	-1	No está definida
270º	$\frac{3\pi}{2}$	(0;-1)	No existe	-1	0	No está definida	-1	No está definida	0

¿Cómo podemos determinar el valor de la función trigonométrica para cualquier ángulo?

Vamos a definir un ángulo auxiliar, llamado ángulo de referencia, con el cual podremos calcular lo expuesto en la pregunta anterior.

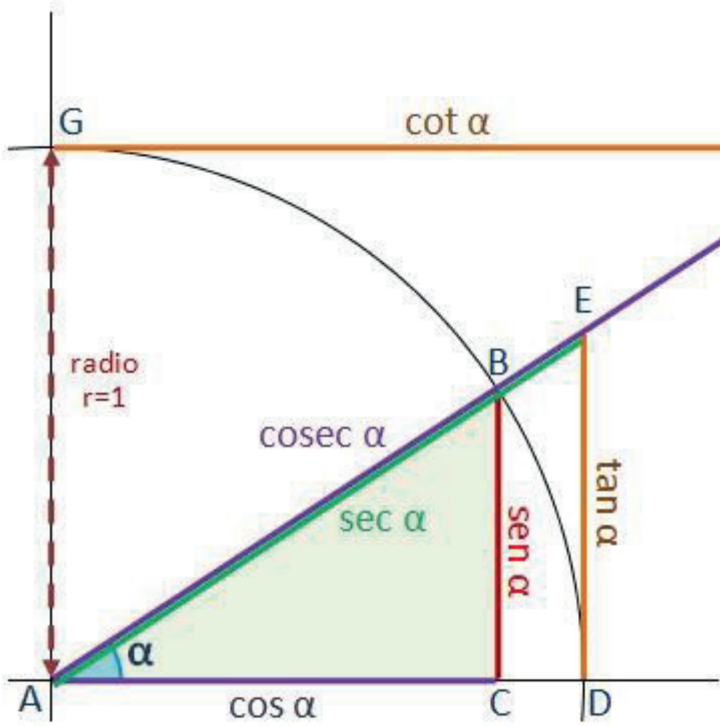
Sea θ un ángulo en posición estándar, se llama ángulo de referencia ϕ asociado con θ al ángulo agudo formado por el lado final de θ y el eje de las x (abscisas)



Para determinar el valor de la función trigonométrica de cualquier ángulo θ procederemos de la siguiente manera:

1. Encontramos el ángulo de referencia ϕ asociado a θ
2. Determinamos el signo de la función trigonométrica de θ
3. El valor de la función trigonométrica de θ será igual al de la función trigonométrica de ϕ (salvo un cambio de signo).

En el siguiente gráfico verán representadas los diferentes segmentos que representan a las distintas funciones trigonométricas:



$\cos ec\,\alpha = \overline{AF}$ $\qquad sec\,\alpha = \overline{AE}$ $\qquad \cot g\alpha = \overline{GF}$

Ejemplos

Determinar a) seno 225º , b) coseno 120º , c) tangente 330º

a) El ángulo de 225º está ubicado en el tercer cuadrante, luego el ángulo de referencia que le corresponde es la diferencia entre 225º y 180º o sea 45º. El seno 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como en el tercer cuadrante el seno toma valor negativo seno 225º = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) El ángulo de 120º está ubicado en el segundo cuadrante. Su ángulo de referencia será 180º -120º = 60º. El coseno 60º = $\frac{1}{2}$. Como en el segundo cuadrante el coseno toma valor negativo coseno 120º = - $\frac{1}{2}$

c) El ángulo de 330º está ubicado en el cuarto cuadrante, luego el ángulo de referencia será 360º - 330º = 30º. La tangente 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como la tangente es negativa en el cuarto cuadrante el resultado será tangente 330º = - $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Si el ángulo del cual deseamos calcular una de sus funciones trigonométricas supera los 360º, se le deberá restar 360º (las veces que lo permita) hasta obtener el ángulo coterminal al dado, que esté comprendido en el primer giro positivo.

Ejemplo: si queremos calcular seno 1105º, a este ángulo podremos restarle 3 veces 360º, o sea 1080º y el ángulo sobre el que realizaremos el cálculo de la función seno será el de 1105º - 1080º = 25º. Luego seno 1105º = seno 25º = 0.4226.

Ejercicio 25

Hallar el valor de las siguientes funciones trigonométricas

a) seno 150º , b) coseno 570º , c) cotangente 210º , d) tangente 330º

e) seno (-60º) f) secante (-60º) g) secante $2\pi/3$ h) coseno 7π

i) cotangente $(-\pi/4)$ j) seno $11\pi/6$

Ejercicio 26

i) Determinar el valor de las funciones trigonométricas restantes a partir de la información dada:

a) seno θ= 3/5 y θ pertenece al segundo cuadrante
b) coseno θ = -7/12 y θ pertenece al tercer cuadrante
c) cotangente θ = ¼ y seno θ < 0
d) tangente θ = -3/4 y coseno θ > 0.

ii) Colocar V o F en la columna de la derecha, según si la afirmación es verdadera o falsa.

a) $\dfrac{1}{co\sec\alpha} = \cos\alpha$ cualquiera sea el ángulo α	
b) $\dfrac{7\pi}{12} = 210^{\circ}$	
c) cos 150º= -cos30º	
d) La tangente de un ángulo del tercer cuadrante es positiva	
e) Si el lado y una de las diagonales de un rombo vale 10cm entonces dos de sus ángulos interiores valen 60º	
f) Si cos β > 0 y cosec β < 0 entonces β es un ángulo del tercer cuadrante	

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Como hemos dicho, resolver un triángulo significa encontrar, a partir de ciertos datos, los valores de todos los ángulos y lados del mismo.

Hasta ahora hemos trabajado sólo con triángulos rectángulos, ampliaremos nuestro estudio a cualquier tipo de triángulo. En general un triángulo cualquiera queda determinado si conocemos tres de sus elementos (ángulos y lados) siendo al menos uno de ellos un lado.

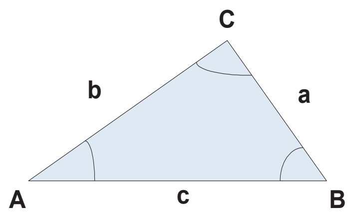
Si conocemos solo los tres ángulos, es imposible determinar cuál es el triángulo, porque se pueden construir muchos triángulos (que resultan semejantes entre sí) que tienen los mismos ángulos.

Para resolverlos necesitamos, como herramientas teóricas, dos teoremas, llamados **teorema de seno y teorema de coseno**

TEOREMA DEL SENO

En todo triángulo, se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{sen\ \hat{A}}{a} = \frac{sen\ \hat{B}}{b} = \frac{sen\ \hat{C}}{c}$$

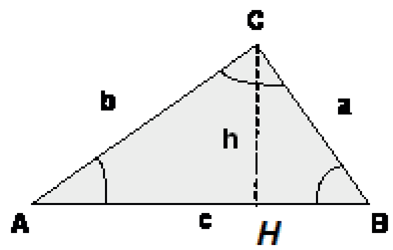


Demostración

En el triángulo tracemos la altura h correspondiente a lado $\overline{AB}$.

En el triángulo BHC se cumple que $sen\ \hat{B} = \dfrac{h}{a}$, por lo tanto *h = a . sen B*

En el triángulo AHC se cumple que $sen\ \hat{A} = \frac{h}{b}$, por lo tanto *h = b . sen A*



Como la altura h es la misma, resulta:

b sen A = a sen B

$$\frac{sen\ \hat{A}}{a} = \frac{sen\ \hat{B}}{b} \qquad (1)$$

Análogamente si trazamos la altura correspondiente a otro lado del triángulo, por ejemplo al $\overline{BC}$,

podemos concluir $\frac{sen\ \hat{C}}{c} = \frac{sen\ \hat{B}}{b}$ (2)

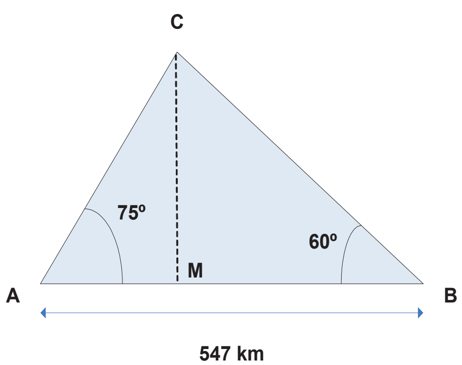
Como entre (1) y (2) una de las razones coincide resulta que las tres razones son iguales,

$\frac{sen\ \hat{A}}{a} = \frac{sen\ \hat{B}}{b} = \frac{sen\ \hat{C}}{c}$ que es la tesis-

Ejemplo

Un satélite pasa directamente por dos estaciones de rastreo A y B separadas entre sí 547 km. Si en el mismo momento desde ambas estaciones miden el ángulo de elevación del satélite y dichas mediciones resultan ser 75º y 60º respectivamente. ¿Cuál es la distancia del satélite a cada estación? ¿Cuál es la distancia del satélite a la superficie terrestre?

Realizamos un diagrama en el cual el satélite ocupa el punto C



El ángulo correspondiente al vértice C resulta ser 180º -(75º+60º) = 45º.

Aplicando la ley de los senos resulta que:

$\frac{sen\ 60°}{\overline{AC}} = \frac{sen\ 45°}{547km}$, de donde surge que $\frac{547km\ .\ sen\ 60°}{sen\ 45°} = \overline{AC}$

$\frac{547km\ .\ 0,866}{0,707} = \overline{AC}$ = 670, 02 km.

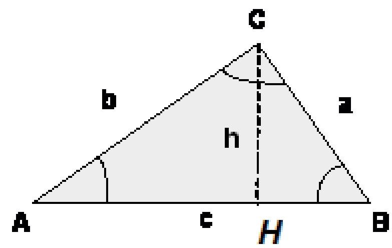
De igual forma $\frac{sen\ 75°}{\overline{BC}} = \frac{sen\ 45°}{547km}$ $\overline{BC} = \frac{547km\ .\ sen\ 75°}{sen\ 45°} = \frac{547km.0.966}{0,707}$ = 747,38 km

Si deseamos conocer la altura del satélite sobre la superficie terrestre, debemos calcular la distancia $\overline{CM}$ Si consideramos el triángulo rectángulo AMC , $\overline{AC}$ es la hipotenusa y $sen\ 75° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}}$ = 0,966.

Luego $\overline{CM} = 0,966.\ \overline{AC} = 0,966\ .\ 670,02\ km$ = 647,24 *km.*

TEOREMA DEL COSENO

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$$



Demostración

En el triángulo tracemos la altura h correspondiente a lado $\overline{AB}$.

Los triángulos BHC y AHC son rectángulos en H , aplicamos el teorema de Pitágoras

$$a^2 = \overline{BH}^2 + h^2, \quad b^2 = \overline{AH}^2 + h^2$$ y restamos miembro a miembro, resulta:

$a^2 - b^2 = \overline{HB}^2 - \overline{AH}^2$ como $\overline{HB} = c - \overline{AH}$ queda

$a^2 - b^2 = \left(c - \overline{AH}\right)^2 - \overline{AH}^2$ desarrollando el cuadrado del binomio

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2.c.\overline{AH} + \overline{AH}^2 - \overline{AH}^2$$

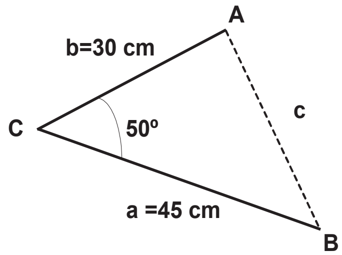
$a^2 - b^2 = c^2 - 2.c.\overline{AH}$ como $\cos\hat{A} = \frac{\overline{AH}}{b}$ y $b\ .\cos\hat{A} = \overline{AH}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.b.\cos\hat{A}$ que es la tesis

De igual forma se pueden demostrar las otras dos posibilidades

Ejemplos

1- Resolver el siguiente triángulo



Aplicando la ley del coseno para el lado *c* , se obtiene :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C = (45cm)^2 + (30cm)^2 - 2.\ 45cm.\ 30cm.\ \cos 50º$$

De donde resulta que $c^2 = 2025\ cm^2 + 900cm^2 - 2700\ cm^2\ .0{,}643 = 1188{,}9\ cm^2$

Luego c = 34,48 cm

Si deseamos calcular el valor del ángulo B podemos usar la fórmula

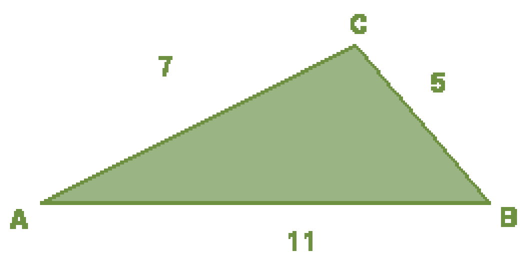
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c} = \frac{(45\ cm)^2 + (34{,}48\ cm)^2 - (30\ cm)^2}{2.(45\ cm).(34{,}48\ cm)} = \frac{2313{,}87cm^2}{3103{,}2cm^2} = 0{,}7456$$

Aplicando la fórmula inversa para el coseno se obtiene B = 41,79º = 41°47´21”

También se puede calcular aplicando el teorema del seno.

En forma similar se puede calcular el ángulo A o si no restando 180 ° - 41°47´21”-50° = 88° 12’ 39”

2- Hallar los ángulos del siguiente triángulo



Como lo único que poseemos como datos son las longitudes de los lados del triángulo, podemos aplicar las fórmulas del teorema del coseno, despejando en las mismas el coseno de cada ángulo en función de los lados.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$$

Sean a = 5 , b = 7 y c = 11 , realizando los cálculos resulta

$$\cos \hat{A} = \frac{49+121-25}{2.7.11} = \frac{145}{154} = 0{,}942$$

$$\hat{A} = arc\cos(0{,}942) = 19{,}68^{o} = 19°36'35"$$

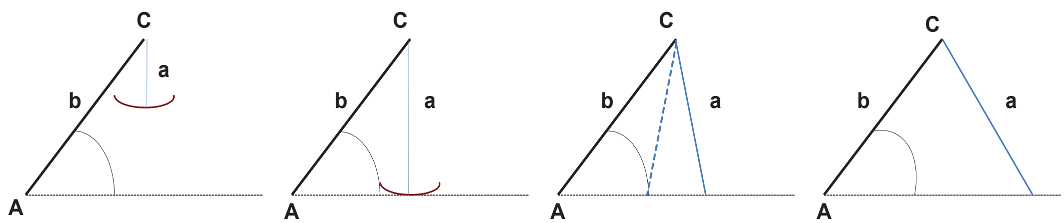
$$\cos \hat{B} = \frac{25+121-49}{2.5.11} = \frac{97}{110} = 0{,}882$$

$$\hat{B} = \arccos(0{,}882) = 28{,}14^{o} = 28°6'55"$$

$\hat{C}$ = 180 ° - 19°36´35”-28°6’55” = 132° 6’30”

Aclaración Importante:

Cuando se emplea el teorema del seno para averiguar un ángulo de un triángulo en el caso de tener como datos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, puede resultar que se determine uno o dos triángulos que cumplan con las condiciones o bien ninguno. Se denomina el **caso ambiguo**. Analicemos las distintas posibilidades que se presentan cuando nos dan como dato un lado **b** , un ángulo $\hat{A}$ y el lado opuesto **a** .



En el primer gráfico es claro que la longitud del lado **a** es menor que la mínima distancia del vértice C a la línea horizontal (que cerraría el triángulo). Luego en este caso no es posible construir un triángulo.

En la segunda imagen la longitud del lado **a** es igual a la distancia del vértice C a la línea horizontal, y se puede construir un único triángulo (que resulta ser rectángulo).

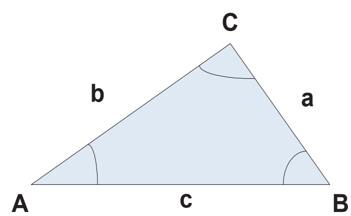
En la tercer imagen la longitud de **a** es mayor que la distancia del vértice C a la línea horizontal pero a su vez es menor que la longitud de **b**. En este caso es posible construir dos triángulos.

En la cuarta imagen la longitud del lado **a** es igual o mayor a la longitud del lado **b** y se puede construir un solo triángulo.

Ejemplos

1-- Dados

a= 15 cm , b = 25 cm y $\hat{A}$ = 47



$$\frac{sen\ \hat{A}}{a} = \frac{sen\ \hat{B}}{b} \text{ entonces } \frac{sen\ 47°}{15cm} = \frac{sen\ \hat{B}}{25cm}$$

$$\frac{sen\ 47°.\ 25cm}{15cm} = sen\ \hat{B} \qquad \text{entonces} \qquad sen\ \hat{B} = \frac{0{,}73135.\ 25cm}{15cm} = 1{,}21$$

No existe un ángulo cuyo seno sea 1,21, un ángulo de un triángulo es mayor que 0° y menor a 180° y por lo tanto su seno varía entre 0 y 1 .

No existe un triángulo con los datos dado.

2- Dados a= 15 cm , b = 20 cm y $\hat{A}$ = 30°

$$\frac{sen\ \hat{A}}{a} = \frac{sen\ \hat{B}}{b} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{sen\ 30°}{15cm} = \frac{sen\ \hat{B}}{20cm}$$

$$\frac{sen\ 30°.\ 20cm}{15cm} = sen\ \hat{B} \qquad \text{entonces} \qquad sen\ \hat{B} = \frac{0{,}5.\ 20cm}{15cm} = 0{,}\widehat{6}$$

Existen dos ángulos entre 0° y 180° cuyo seno vale 0,6666…, el agudo es arc sen (0,66666) = 41°48’37” (obtenido con la calculadora) y el otro pertenece al segundo cuadrante y es

$\hat{B}$ *= 180 ° - 41°48’37” = 138° 11´ 23” .

Ambos valores pueden corresponder al ángulo $\hat{B}$, ya que al ser el lado **b** mayor que el lado **a** , el ángulo $\hat{B}$ debe ser mayor a $\hat{A}$ y ambas medidas son mayores que 30 ° .

Por otra parte al sumarle a $\hat{B}$ * la medida de $\hat{A}$ no supera 180° que es la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo.

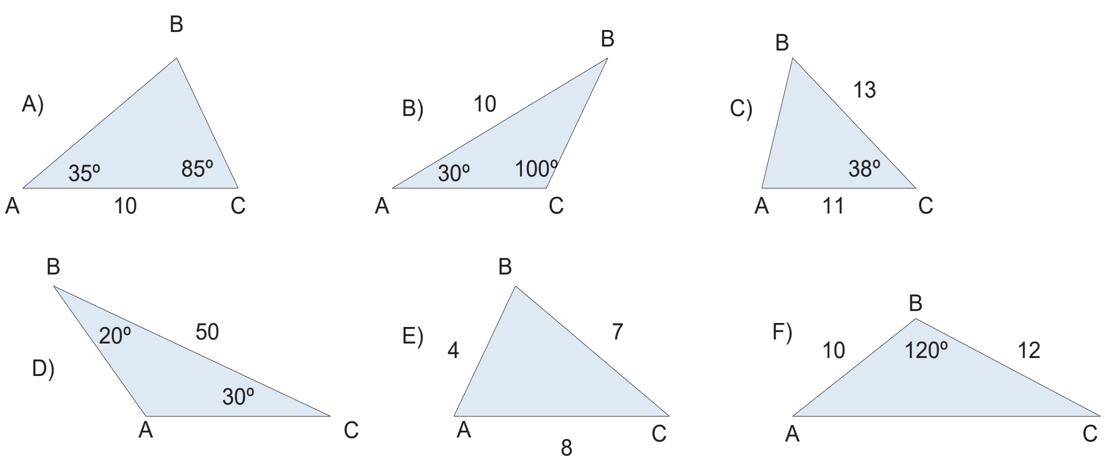
En este caso existen dos triángulos posibles.

Continua el ejemplo calculando, con los dos valores posibles $\hat{B}$ y $\hat{B}$ * , los elementos faltantes (c , c* , $\hat{C}$ y $\hat{C}$ *) del triángulo.

Intenta resolver el ejercicio desde cero, calculando primero el lado c aplicando el teorema del coseno, verás que queda para resolver una ecuación cuadrática con dos soluciones válidas para los lados.

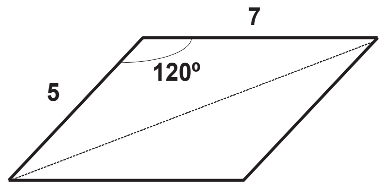
Ejercicio 27

Resolver los siguientes triángulos, aplicando la ley que resulte más apropiada



Ejercicio 28

Encuentre el valor de la diagonal del siguiente paralelogramo



Ejercicio 29

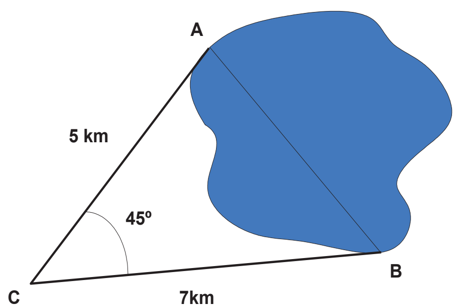
Las longitudes de los lados de un terreno de forma triangular son 22 m , 36 m y 44 m respectivamente. Determine los ángulos del terreno y el área del mismo.

Ejercicio 30

Un barco navega en línea recta y en forma paralela a la costa. Desde dos puntos A y B situados en la costa y separados entre sí por 510m se miden los ángulos que forman las líneas que unen al barco con los puntos A y B con la línea de la costa. Si los valores de dichos ángulos son respectivamente 45º y 68º . Determine la distancia del barco a los puntos A y B y la distancia del barco a la costa. (Haga un diagrama).

Ejercicio 31

Un topógrafo desea medir la distancia entre los puntos A y B ubicados en la orilla de un lago. Los datos que conoce son los que aparecen en la figura adjunta. Calcule la distancia de A a B.



Ejercicio 32

Mateo y Pedro tienen sus casas en el campo a una distancia de 500 m. Ambos divisan un helicóptero volando entre ellos. Mateo lo ve con un ángulo de elevación de 58º y Pedro está a una distancia de 600 m del helicóptero.

a) ¿A qué distancia del helicóptero se encuentra Mateo?

b) ¿A qué altura del suelo está el helicóptero?

c) Si se realiza un dibujo de la situación usando una escala E 1: 5000 ¿Cuántos cm medirá, en el dibujo, la distancia entre el helicóptero y Pedro?

Video tutorial que explica parte de este ejercicio, no lo reproduzcan hasta tratar de resolverlo ustedes
https://youtu.be/JizzoPcZ2bw

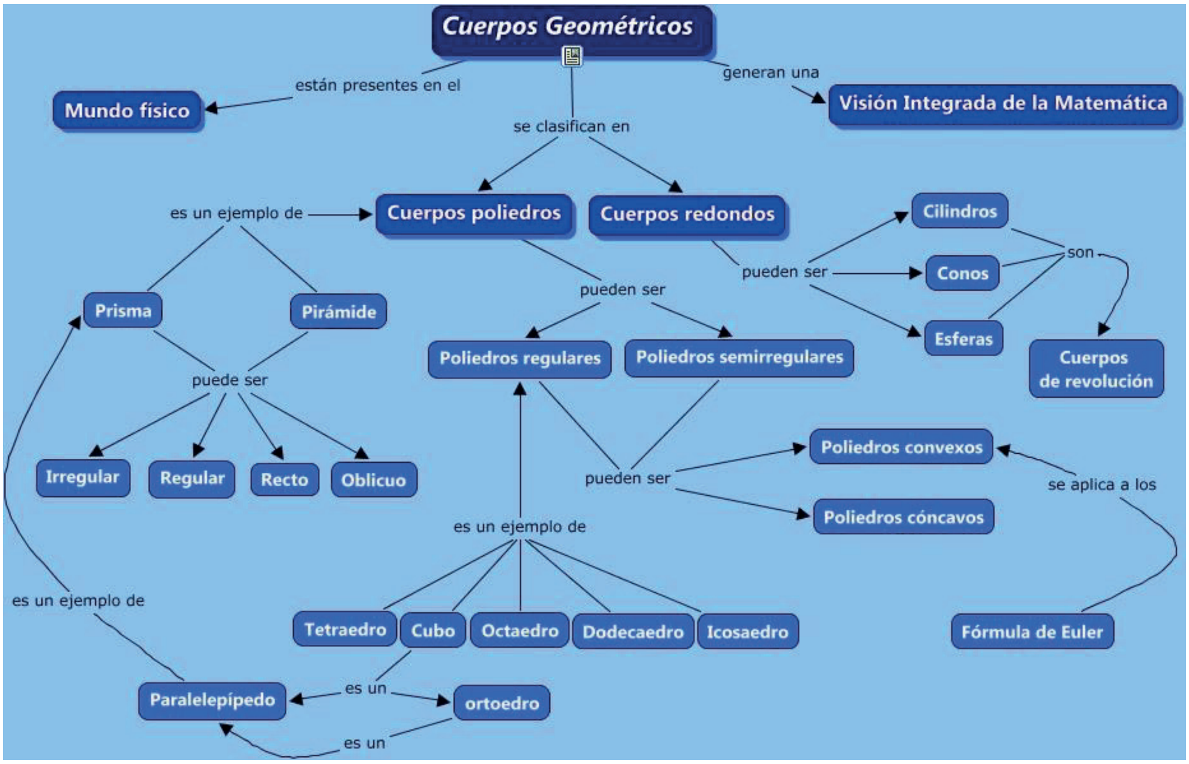
MÓDULO 5
CUERPOS GEOMÉTRICOS

Un cuerpo geométrico es una figura geométrica que ocupa un volumen.

Se los puede clasificar en cuerpos poliédricos y cuerpos redondos.

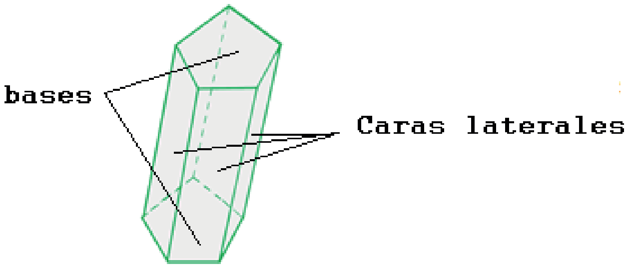
Un poliedro es un sólido cuyas caras son todas planas, cada cara plana es un polígono. En este capítulo veremos algunas características de los prismas y las pirámides.

Los cuerpos redondos son aquellos que tienen al menos una cara o superficie curva. Analizaremos el cilindro recto, el cono y la esfera.



PRISMA

Un prisma es un cuerpo geométrico determinado por dos polígonos paralelos y congruentes, llamados *bases* del prisma, y por tantos paralelogramos como lados tengan dichos polígonos, llamados ***caras laterales*** del prisma.



Es decir, un prisma es un poliedro que tiene dos caras paralelas e iguales llamadas bases y sus caras laterales son paralelogramos.

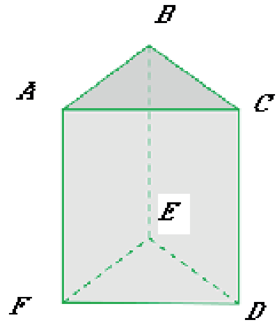
Los lados de los polígonos que constituyen sus caras se llaman **aristas** del prisma. Los lados de las bases se llaman **aristas básicas** y las demás son las **aristas laterales**. Todas las aristas laterales son iguales. Cada arista es la intersección de dos caras del prisma.

Los vértices de las caras de un prisma, son también los **vértices** del polígono.

A, B, C, D, E, F Vértices

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{FE}, \overline{ED}, \overline{DF}$ Aristas básicas

$\overline{AF}, \overline{BE}, \overline{DC}$ Aristas laterales



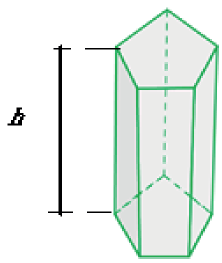
Un prisma se llama triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, …según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, …… etc.

Si los planos que incluyen a las bases de un prisma son perpendiculares a las aristas laterales, el prisma es un ***prisma recto***. En caso contrario es un ***prisma oblicuo***.

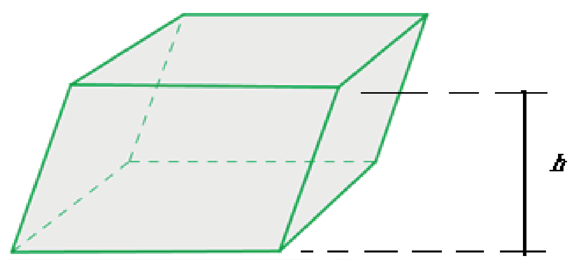
En el primer caso, las caras laterales son rectángulos y en el segundo caso, las caras laterales son paralelogramos.

La distancia entre los planos que contienen a las bases del prisma es la altura (*h*) del prisma.

En un prisma recto la altura es la longitud de cualquier arista lateral del mismo.



Prisma recto



Prisma oblicuo

Si cortamos un prisma con un plano perpendicular a las aristas laterales, el polígono obtenido como intersección se llama *sección recta* del prisma. Todas las secciones rectas de un prisma son iguales.

Área Lateral Y Área Total de un Prisma Recto

Se llama área lateral (A_L) a la suma de las áreas de sus caras laterales y área total (A_T) a la suma del área lateral y el área de sus dos bases.

Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos, cuyas bases son las aristas básicas del prisma y la altura de los rectángulos coincide con la altura del prisma, por lo tanto la suma de las áreas de las caras laterales es el producto del perímetro de la base por la altura del prisma.

Por ejemplo, en el prisma graficado debajo, para calcular el área lateral, comenzamos calculando el área de cada cara, para ello, multiplicamos la medida de la base por su altura

Área lateral = $A_L = a.h + b.h + c.h + d.h + e.h$

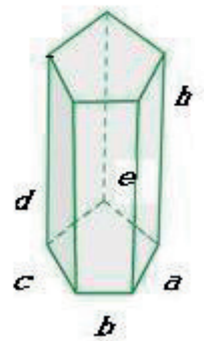
Sacando factor común, resulta:

$A_L = (a. + b + c + d + e) \, . \, h$

El paréntesis es el perímetro de la base

A_L = Perímetro de la base . altura = $P_B \, . \, h$

Entonces:



ÁREA LATERAL = PERÍMETRO DE LA BASE . ALTURA

Para obtener el área total se debe sumar al área lateral, el área de las dos bases, resulta entonces:

$A_T = A_L + 2. A_B$

ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + 2. ÁREA BASE

Ejemplo 1

Calcular la superficie lateral de un prisma recto cuya base es un cuadrilátero cuyos lados miden 9 cm, 7 cm, 10 cm y 13 cm, siendo la altura del prisma de 4 cm.

Solución:

Cálculo del perímetro de la base. P_B = 9 cm + 7 cm + 10 cm + 13 cm = 39 cm

Cálculo de la superficie lateral $A_L = P_B \, . \, h$ = 39 cm . 4 cm = 156 cm^2

Ejemplo 2

Calcular la superficie total de un prisma recto de altura 10 cm cuya base es un hexágono regular de 6 cm de lado.

Cálculo del perímetro de la base: P_B = 6 . 6 cm = 36 cm

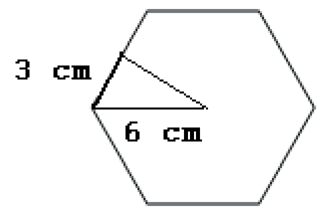
Cálculo de la superficie lateral: $A_L = P_B \, . \, h$ = 36 cm . 10 cm = 360 cm^2

Para calcular la superficie total se debe calcular la superficie de la base, que es un polígono regular de seis lados.

Recordar que la superficie es la mitad del producto del perímetro (36 cm) por la apotema.

Cálculo de la apotema del hexágono: Se aplica el teorema de Pitágoras

$$A_p = \sqrt{(6\ cm)^2 - (3\ cm)^2} =$$
$$\sqrt{36\ cm^2 - 9\ cm^2} =$$
$$\sqrt{27 cm^2} = 3\sqrt{3}\ cm$$



Cálculo de la superficie de la base: $S_B = \frac{P_B . A_p}{2} = \frac{36\ cm\ .\ 3\ \sqrt{3}\ cm}{2} = 54\sqrt{3} cm^2$

Cálculo de la superficie total:

$$A_T = A_L + 2.\ A_B = 360\ cm^2 + 2\ .\ 54\ \sqrt{3}\ cm^2 = (\ 360 + 108\ \sqrt{3}\ )\ cm^2$$

Aproximadamente 547,06 cm^2

Volumen del Prisma

El volumen de un prisma es igual al producto del área de una de sus bases por la medida de la altura. También puede pensarse como la multiplicación entre el área de la sección recta y la altura del prisma.

$$\boxed{V = A_b\ .\ h}$$

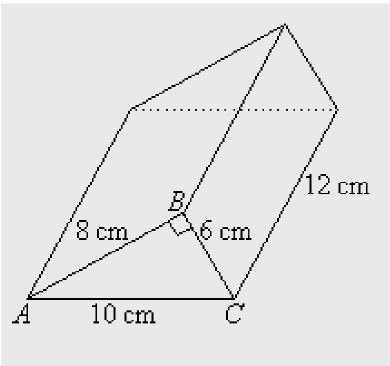
Ejemplo

El volumen del prisma de la derecha cuya base es un triángulo rectángulo y su altura es de 12 cm es:

$V = A_b\ .\ h =$

= Área del triángulo . altura del prisma =

$= \frac{1}{2}\ .\ 8\ cm\ .\ 6\ cm\ .\ 12\ cm = 288\ cm^3$



ORTOEDRO

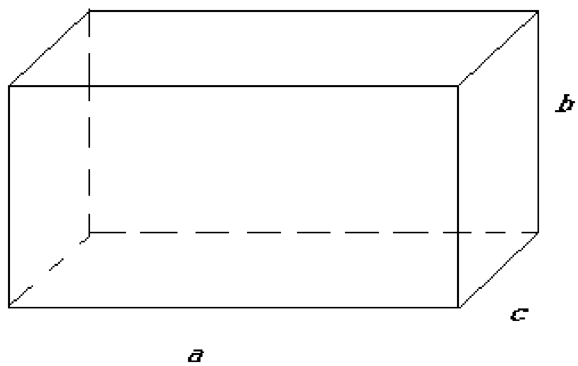
Si las bases de un prisma recto son rectángulos, el prisma recibe el nombre de ortoedro.

Un ortoedro tiene, por lo tanto, seis caras, todas rectangulares.

Las caras opuestas son congruentes

Las aristas a, b, c que concurren en un vértice, se conocen como las tres dimensiones del ortoedro, muchas veces nombradas como ancho, alto y profundidad.

Las cuatro diagonales del ortoedro son iguales.



Teorema de Pitágoras en el Ortoedro

En todo ortoedro, el cuadrado de la medida de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las aristas concurrentes en un vértice. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Demostración:

La base del ortoedro es un rectángulo, al trazar su diagonal queda determinado un triángulo rectángulo, aplicando en él, el teorema de Pitágoras, resulta: $p^2 = a^2 + b^2$ (1)

El triángulo *PAB* incluido en un plano diagonal, es rectángulo en *A*, si se aplica nuevamente el teorema de Pitágoras:

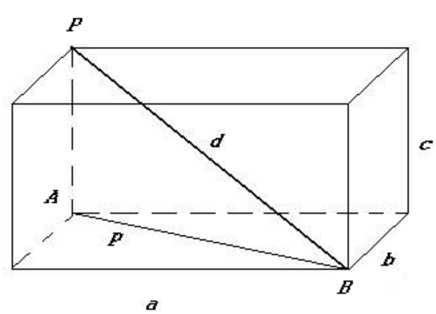
$d^2 = p^2 + c^2$ (2)

Reemplazando (1) en (2) obtenemos.

$$d^2 = \left(a^2 + b^2\right) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Que es la tesis, es decir:

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$



CUBO

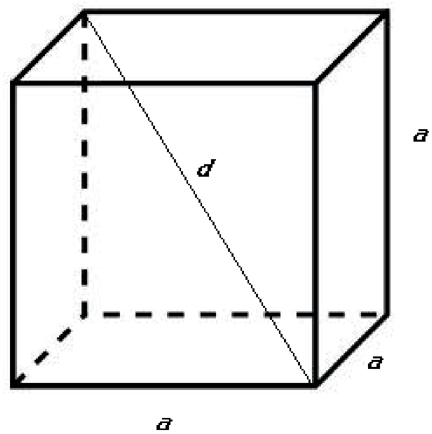
El cubo, también llamado hexaedro es un poliedro regular de seis caras, es un ortoedro cuyas aristas son todas iguales, a = b = c y por lo tanto también es un prisma.

Todas sus caras son cuadradas. Es uno de los poliedros regulares.

Siendo “a” la arista del cubo, la medida de su diagonal es $d = \sqrt{3}\,a$ ya que aplicando el teorema de Pitágoras resulta $d^2 = 3\,a^2$

Recordando que el área del cuadrado es el cuadrado del lado, el área total del cubo puede calcularse como:

$$\boxed{A_T = 6 \,.\, \text{arista}^2 = 6 \,.\, a^2}$$



Y su volumen, es el cubo de la medida de la arista:

$$\boxed{V = a^3}$$

Ejercicio 1

Calcula la medida de la arista de un prisma cuya base es un triangulo equilátero, si se sabe que su volumen es de 64 cm^3 y su altura es de 16 cm.

Ejercicio 2

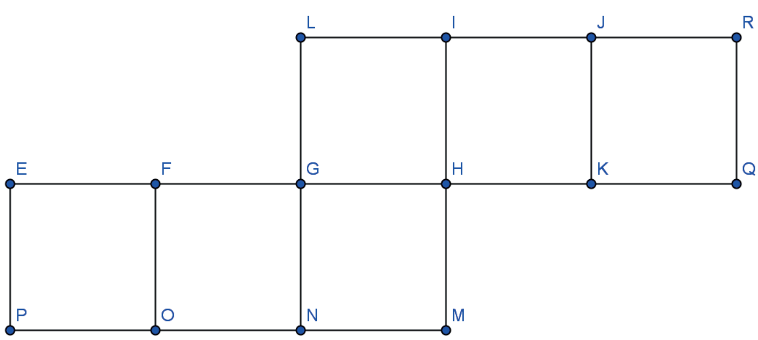
Calcula el volumen de un prisma cuadrangular, cuya altura es el triple de la arista en la base sabiendo que el área lateral es de 684 cm^2.

Ejercicio 3

Piensa en el cubo que se construiría plegando este desarrollo.

a) ¿Cuáles son los vértices de la figura plana que quedan superpuestos al construir el cubo?

b) ¿Cuáles son los segmentos de la figura plana que quedan superpuestos al construir el cubo?



Ejercicio 4

Calcula el área total y el volumen de un prisma hexagonal, si se sabe que la arista de la base mide 4 cm y la altura del cuerpo coincide con la apotema de la base.

Ejercicio 5

Tenemos que construir un tanque con forma de prisma con una base de 70 cm por 50 cm. ¿Qué altura debemos darle para que tenga una capacidad de 300 litros, si debemos dejar un margen del 5 % para que no desborde?

Ejercicio 6

Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma de altura 24 cm , cuya base es un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 18 cm.

Ejercicio 7

Calcula el área total y el volumen de un cubo en el cual sus caras tienen una diagonal de 4,24 m.

Videos donde se explican ejercicios similares a los planteados

https://youtu.be/VMiW2jPexEg Prisma elementos y problema

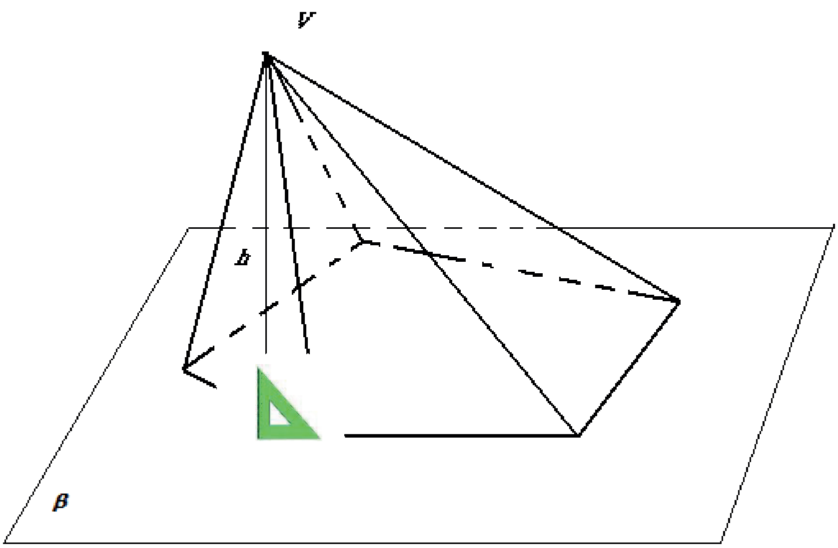
https://youtu.be/M8Olk-YNSCo Problema de volumen de prisma

https://youtu.be/Z--4vrB8-Vc Problema de prisma con un trapecio

PIRÁMIDE

Una pirámide es un cuerpo geométrico que tiene un polígono como base y caras triangulares que concurren en un punto llamado vértice V de la pirámide.

La distancia entre el vértice V y el plano β que contiene a la base es la altura (h) de la pirámide.



Una pirámide se llama triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, …según que su base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, …… etc.

La pirámide triangular se llama tetraedro por ser un poliedro de cuatro caras-

Una pirámide se llama **regular** si su base es un polígono regular y el pie de su altura en el plano que incluye a la base es el centro de ese polígono (Es decir, la figura anterior no corresponde a una pirámide regular, dado que el pie de la misma no es el centro del polígono base).

En una pirámide regular se verifican las siguientes propiedades:
Las aristas laterales son segmentos congruentes.
Las caras laterales son triángulos isósceles congruentes.
Se llama eje de la pirámide regular a la recta determinada por su vértice y el centro de la base. Incluye a la altura.

Se llama **Apotema (Ap)** de una pirámide regular al segmento determinado por el vértice de la pirámide y el punto medio de uno de los lados de la base de la misma.

Área Lateral y Área Total de una Pirámide Regular

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes, la apotema de la pirámide (Ap) es la altura de esos triángulos.

El área lateral es la suma de las áreas de las caras laterales, entonces para calcularla basta calcular el área de una cara triangular y multiplicarla por el número de triángulos (que es la cantidad de lados del polígono regular de la base)

Área lateral = A_L = n . Área de una cara

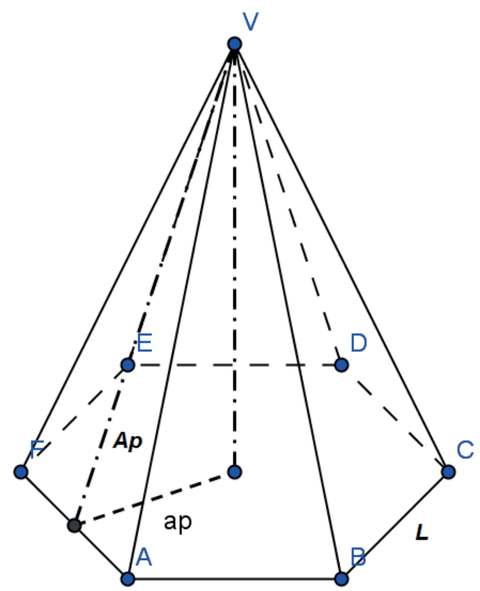
$A_L = n.\frac{L.h}{2}$ siendo L lado de la base

Como la *h* es la Apotema de la pirámide

$A_L = n.\ \frac{L\ .\ Ap}{2}$

Pero *n . L* es el perímetro de la base

$$\boxed{A_L = \frac{Perimetro\ \ base\ .\ Ap}{2}}$$



$$\boxed{\textbf{ÁREA LATERAL} = \frac{1}{2}\textbf{.PERÍMETRO DE LA BASE . APOTEMA de la PIRÁMIDE}}$$

Para obtener el área total se debe sumar al área lateral, el área de la base, que es un polígono regular.

Recordemos que el área de un polígono regular es $A_B = \frac{Perimetro\ \ base\ \ .\ apotema}{2}$

$A_T = A_L + A_B = \frac{Perimetro\ \ base\ .\ Ap}{2} + \frac{Perimetro\ \ base\ \ .\ apotema}{2}$

Sacando factor común resulta:

$$A_T = \frac{Perimetro\ \ base\ .\ (Ap + ap)}{2}$$

siendo $\begin{cases} Ap & \text{apotema de la pirámide} \\ ap & \text{apotema de la base} \end{cases}$

ÁREA TOTAL = $\frac{1}{2}$ **PERÍMETRO DE LA BASE .(APOTEMA de la PIRÁMIDE + APOTEMA de la BASE)**

Ejemplo

Calcular el área total de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 6 cm de lado, siendo la arista lateral de la pirámide de 12 cm

Calculamos la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras

$$ap = \sqrt{(6cm)^2 - (3cm)^2} = \sqrt{36cm^2 - 9cm^2} = \sqrt{27cm^2} = 3\sqrt{3}cm$$

Calculamos la apotema de la pirámide aplicando también el teorema de Pitágoras

$$Ap = \sqrt{(12cm)^2 - (3cm)^2} = \sqrt{144cm^2 - 9cm^2} = \sqrt{135cm^2} = 3\sqrt{15}cm$$

Perímetro de la base = 6 . 6 cm = 36 cm

Entonces el área total es :

$$A_T = \frac{Perimetro\ \ base\ .\ (Ap + ap)}{2} = \frac{36cm.\left(3\sqrt{15}cm + 3\sqrt{3}cm\right)}{2} = 54\left(\sqrt{15} + \sqrt{3}\right)cm^2$$

$A_T \cong$ 302,67 cm^2

Área Lateral y Área Total de una Pirámide Irregular

Si la pirámide es irregular, el área lateral es la suma de las áreas de los triángulos que constituyen sus caras laterales.

ÁREA LATERAL = SUMA DE ÁREAS DE LAS CARAS LATERALES

Para calcular el área total habrá que sumarle al área lateral el área de la base de la pirámide, de acuerdo al polígono que sea:

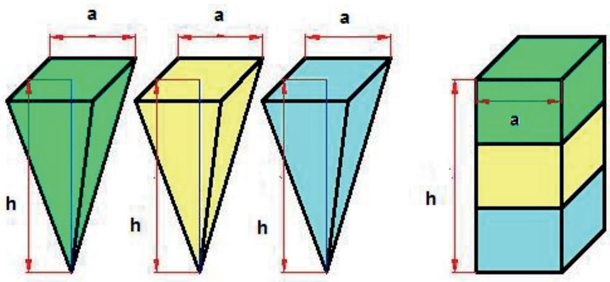
ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA BASE

Volumen de una Pirámide

El volumen de una pirámide es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base por la medida de la altura.

$$V = \frac{1}{3} A_b \, . \, h$$

Ten en cuenta que el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide.



Ejemplo

Encontrar el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado cuya diagonal mide $6\sqrt{2}$ cm y su altura es el triple del lado de la base.

Resolución:

Cálculo del lado del cuadrado que es base de la pirámide:

Aplicando el teorema de Pitágoras en el cuadrado base:

$d^2 = l^2 + l^2 = 2\,l^2 \quad \rightarrow \quad \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 2.l^2$

$36 \, . \, 2 = 2. \, l^2 \quad \rightarrow \quad 72 = 2. \, l^2$

$36 = \boldsymbol{l^2} \quad \rightarrow \quad 6 = l$

Cálculo de la superficie de la base:

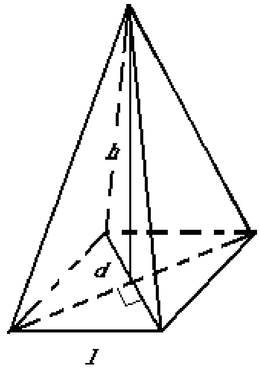
Área base = $A_b = l^2 = 36$ cm^2

La altura de la pirámide es el triple del lado del cuadrado:

h = 3 . 6 cm = 18 cm

Cálculo del volumen de la pirámide:

$V = \frac{1}{3} A_b \, . \, h = \frac{1}{3}$ 36 cm^2 . 18 cm = 216 cm^3



Ejercicio 8

Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 8 cm de lado y el área lateral es igual a dos tercios del área total. Calcula la altura, el área lateral y el volumen del cuerpo.

Ejercicio 9

Determinar el área lateral, área total y el volumen de una pirámide triangular regular de 9 cm de Apotema, sabiendo que el radio del círculo circunscripto a la base es igual a 2 cm.

Ejercicio 10

La superficie lateral de una pirámide regular hexagonal es de 84 cm^2 , siendo la apotema de la pirámide igual a 7 cm. Calcular el área total de la pirámide y su volumen.

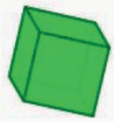
Ejercicio 11

Por lo general las famosas pirámides de Egipto son pirámides cuadrangulares. La pirámide de Keops es una de las más famosas. Aproximando sus medidas podemos afirmar que tiene por base un cuadrado de lado 230.35 m y una altura de 146.61 m, calcula el volumen que ocupa dicha pirámide. Redondea a dos cifras decimales en los casos que sea necesario.

Si quisiéramos cubrir la pirámide de Keops con una tela, ¿qué cantidad de la misma necesitaríamos?

Este ejercicio se explica en el siguiente video https://youtu.be/iL8JlvbSJJQ

Les adjuntamos un cuadro con nombres de algunos cuerpos, cantidad de vértices, aristas y caras como síntesis de esta parte de cuerpos de caras planas

Nombre	Imagen	Vértices (V)	Aristas (A)	Caras (C)
Tetraedro		4	6	4
Cubo o Hexaedro		8	12	6
Octaedro		6	12	8
Dodecaedro		20	30	12
Isocaedro		12	30	20
Prisma triangular		6	9	5
Prisma rectangular		8	12	6
Prisma pentagonal		10	15	7
Prisma hexagonal		12	18	8
Pirámide cuadrangular		5	8	5

portaleducativo.net

CILINDRO

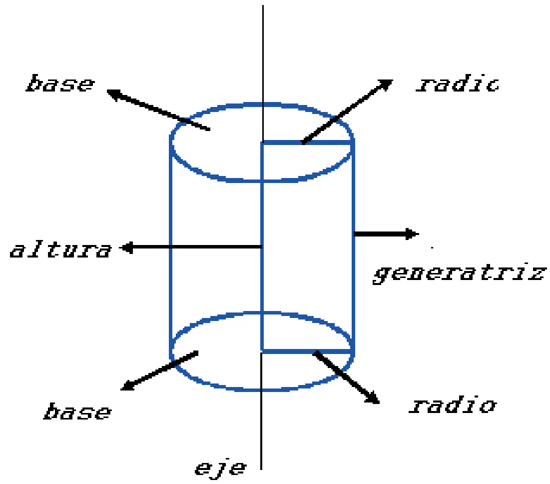
Un cilindro recto es un cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un rectángulo en torno a uno de sus lados.

Eje del cilindro es el lado fijo sobre el que gira el rectángulo,

Generatriz del cilindro es el segmento que representa cada una de las infinitas posiciones que adopta el otro lado del rectángulo.

Bases del cilindro son los círculos que determinan los lados perpendiculares al eje.

Altura del cilindro: es la distancia entre las dos bases.



Área Lateral y Área Total de un Cilindro Recto

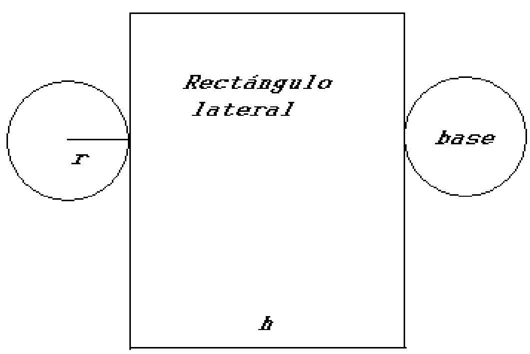
Se llama Área lateral del cilindro circular al área del rectángulo cuya base es la circunferencia rectificada de una de las bases del cilindro y su altura es la altura del cilindro.

Como el área del rectángulo es el producto de su base y su altura, el área lateral es:

$A_L = B \,.\, h$ pero $B = 2 \,.\pi \,.\, r$ entonces :

$$\boxed{A_L = 2 \;\; \pi \,.\, r \;\, .\, h}$$

El área total se calcula sumando al área lateral, el área de sus dos bases.



$\mathbf{A_t = A_l + 2\, A_b}$

El área de cada base es $\mathbf{A_b = \pi \,.\, r^2}$. Entonces resulta:

$$\boxed{A_t = 2 \;\; \pi \,.\, r \,.\, h + 2 \;\pi \,.\, r^2 = 2 \;\; \pi \,.\, r\,(\,h + r\,)}$$

Volumen del Cilindro

El volumen de un cilindro circular es igual al producto de la superficie de su base por la medida de la altura. Siendo su base un círculo, resulta:

$$\boxed{V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Ejemplo:

El área lateral de un cilindro de 5 cm de altura es de 100 π cm^2. Calcula el diámetro de la base y el volumen del cilindro.

Se sabe que: $A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$ $\quad$ $100\pi\ cm^2 = 2\pi \cdot r \cdot 5\ cm$

$$\frac{100\ \pi\ cm^2}{2\ \pi\ 5\ cm} = r \rightarrow 10\ cm = r$$

Entonces el diámetro de la base es de *d= 2 r = 20 cm*

El volumen del cilindro es:

$$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \quad \pi.(10cm)^2 .5cm = \pi.100\ cm^2.5\ cm = 500\ \pi\ cm^3$$

Ejercicio 12

Demuestra que si la altura de un cilindro recto es igual a la mitad del radio de la base, entonces el área lateral es igual al área de la base

Ejercicio 13

Un cilindro tiene un volumen de 72 π cm^3 y una altura de 8 cm. Si su altura se incrementa en 4 cm, ¿Cuál será el volumen del nuevo cilindro, en cm^3 ?

a) 576 π b) 9 π c) 108 π d) 38 π e) 76 π π

Ejercicio 14

a) Determina el área lateral de un cilindro recto, siendo su área total igual a 24 cm^2 y el radio $\frac{2}{3}$ de la altura

b)- Un cilindro tiene un área total de 660 π cm^2 (aproximadamente 2073,45 cm^2) y el radio de las bases es de 15 cm. Calcular la medida de la altura y el volumen del cilindro.

Ejercicio 15

a) Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito cilíndrico sin tapa de 9,7 dm de alto y 3,6 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base solo se puede pintar por dentro, ¿Cuánto habrá costado la pintura, si cada dm2 de ésta cuesta 20 pesos?

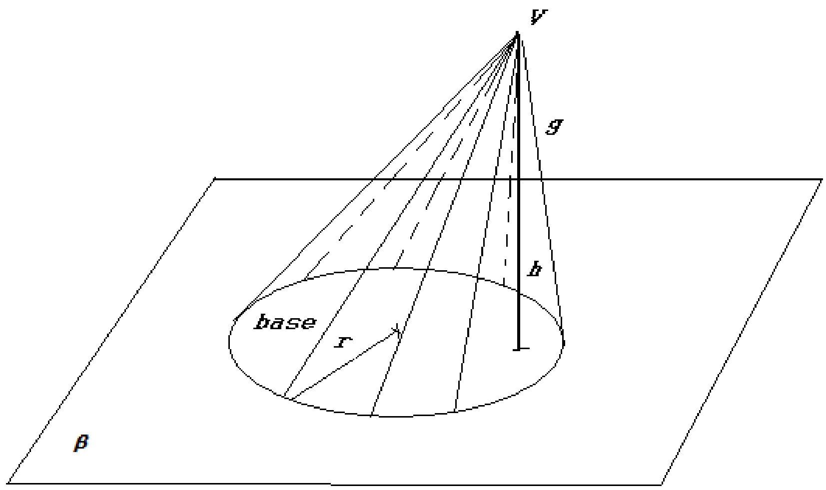
b) Dado un prisma recto de base cuadrada cuya altura mide 16,4 cm y su volumen es de 590,4 cm^3.

Determinar el volumen del cilindro cuya base es un circulo inscripto en la base del prisma y tiene la misma altura que éste.

CONO CIRCULAR

Si consideramos un circulo incluido en un plano β y un punto V exterior al plano, la figura delimitada por el círculo y los infinitos segmentos que tienen extremo en algún punto de la circunferencia borde del círculo y el punto V es un cono.

El círculo es la *base* del cono y el punto V es el vértice.



El radio de la base es r.

Cada uno de los segmentos que tiene por extremo el vértice del cono y un punto de la circunferencia es una generatriz del cono (*g*).

Si el punto V está ubicado sobre la perpendicular al plano de la base que pasa por el centro de la circunferencia, el cono se llama recto. En caso contrario se llama oblicuo.

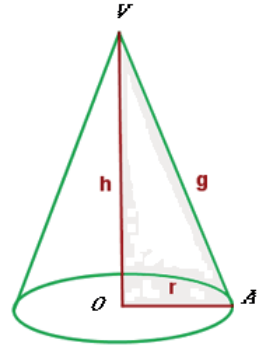
El gráfico anterior muestra un cono oblicuo.

Un cono recto puede obtenerse al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos

En un cono recto todas las generatrices son congruentes.

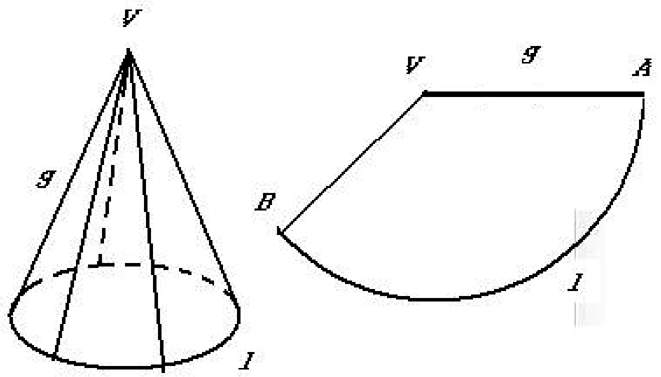
En la figura de la derecha, se observa un cono recto, obtenido al hacer girar el triángulo rectángulo *VOA* en torno al cateto OV.

En un cono recto, al aplicar Pitágoras resulta $g^2 = r^2 + h^2$



Área Lateral y Área Total de un Cono Circular Recto

Para calcular el área lateral de un cono recto se debe tener en cuenta que si se dibuja en papel un sector circular BVA tal que el segmento VA tenga la misma longitud de la generatriz g del cono y el arco AB tenga como longitud, la misma que la circunferencia de la base del cono, se obtiene el desarrollo plano del cono. Si recortamos esta figura y se hace coincidir el segmento VB con la generatriz g, y se envuelve el cono, se observa que el segmento VA también coincide con g.



Por lo tanto: la superficie lateral del cono es la superficie de un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono siendo el arco correspondiente de longitud igual a la circunferencia de la base del cono.

Para poder demostrar la expresión que calcula el área lateral del cono se deben recordar algunas cuestiones

Para obtener la longitud de un arco de circunferencia que corresponde a un ángulo central α (medido en radianes) se arma una proporción con la longitud de la circunferencia.

El ángulo de un giro (2π) es a la longitud de la circunferencia (2π radio) como el ángulo α es a la longitud de arco correspondiente :

$$\frac{2.\pi}{2.\pi.radio} = \frac{\alpha}{long\ arco} \quad \rightarrow \quad long\ arco = \frac{2.\pi.\ radio\ .\ \alpha}{2.\pi} = radio\ .\ \alpha$$

Lo mismo para el área de un sector circular, El ángulo de un giro (2π) es al área del circulo (π radio^2) como el ángulo α es al área del sector circular correspondiente :

$$\frac{2.\pi}{\pi.radio^2} = \frac{\alpha}{area\ sector\ circ.} \quad \rightarrow \quad area\ sector\ circ. = \frac{\pi.radio^2.\alpha}{2.\pi} = \frac{radio^2.\alpha}{2}$$

Si las expresiones anteriores te resultan nuevas, relee los apartados titulados “Longitud de un arco de circunferencia” y “Área de un sector circular” del Módulo 5.

Entonces, el área del sector circular, expresado en función de la longitud del arco que abarca es:

$$area\ sector\ circ. = \frac{radio^2.\ \alpha}{2} = \frac{1}{2}radio.\ (radio\ .\ \alpha) = \frac{1}{2}radio.\ long\ arco$$

Ahora se puede aplicar esta deducción para calcular el área lateral del cono, que es el área de un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono y la longitud del arco que abarca es la longitud del arco de la circunferencia de la base

$$\text{Area lateral} = area\ \ sector\ circ. = \frac{1}{2} radio.\ long\ arco =$$

$$\frac{1}{2} radio.\ long\ de\ la\ circunferencia\ de\ la\ base = \frac{1}{2}.g.2\pi.r = \pi.g.r$$

Por lo que el área lateral es el producto de Pi por la generatriz por el radio de la base del cono:

$$\boxed{\boldsymbol{A_l = \pi .\ g\ .\ r}}$$

Para obtener el área total se debe sumar el área del círculo de la base.

$\boldsymbol{A_t = A_l + A_b = \pi\ .\ g\ .\ r + \pi\ .\ r^2 = .\ \pi\ .\ r\ .\ (g + r)}$

Entonces: $$\boxed{\boldsymbol{A_t = \pi\ .\ r\ (g + r)}}$$

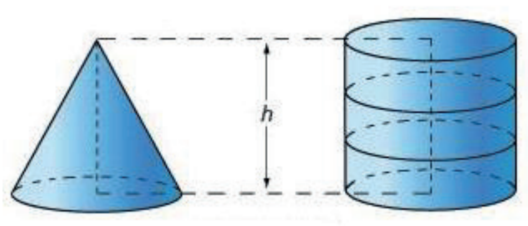
Volumen del Cono

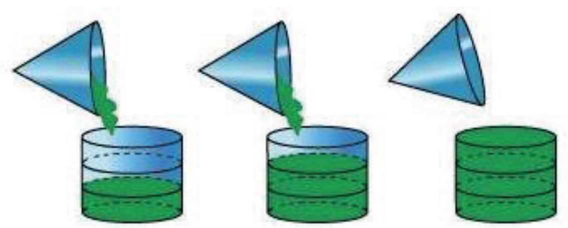
El volumen de un cono es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base por la medida de la altura:

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\ A_b\ .\ h}$

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\ \pi\ .\ r^2\ .\ h}}$$

Ten en cuenta que así como el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro que tiene la misma base y la misma altura que el cono.





Ejemplo:

Calcular el área lateral, total y el volumen de un cono circular recto cuya base tiene un radio de 8 cm y la generatriz mide 10 cm.

Cálculo del área lateral: $\boldsymbol{A_l = .\ \pi .\ g\ .\ r}$ = π . 10 cm. 8 cm = 80 π cm^2

Cálculo del área lateral: $\boldsymbol{A_l = \pi\ .\ r\ (g + r)}$ = π 8 cm. (10 cm + 8 cm) = 144 π cm^2

Cálculo del volumen:

Se necesita la medida de la altura, aplicando el teorema de Pitágoras, resulta:

$$h = \sqrt{(10cm)^2 - (8cm)^2} = \sqrt{100cm^2 - 64cm^2} = \sqrt{36cm^2} = 6cm$$ Luego;

$$V = \frac{1}{3}\ \pi . r^2 . h = \frac{1}{3}.\pi.\ (8cm)^2.6\ cm = \frac{1}{3}.\pi.\ 64\ cm^2.6\ cm = 128\ \pi\ cm^3$$

Ejercicio 16

Determina el área lateral y total de un cono recto, sabiendo que su volumen es igual a 104 cm^3 y su altura es de 11 cm.

Ejercicio 17

Averiguar que ocurre con el volumen de un cono si se duplica su altura. ¿Y si se duplica el radio de la base?

Ejercicio 18

Si el volumen de un cono es de 301,44 cm^3 y el radio es de 6 cm. ¿Cuál es la altura?
¿Cuánto mide la generatriz del cono anterior?

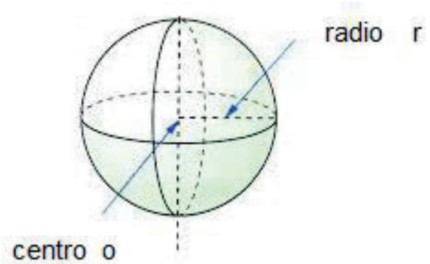
Ejercicio 19

Calcula el volumen de un cono cuya longitud de la circunferencia de la base mide 75,36 cm y su área lateral es 753,6 cm

ESFERA

Dado un punto O y un segmento r, se llama esfera de centro O y radio r al conjunto de puntos del espacio cuya distancia a O es menor o igual a r.

El conjunto de puntos del espacio que se encuentran de O a una distancia igual a r forman la superficie esférica. Todos los puntos que se encuentran a una distancia menor que r son los puntos interiores a la esfera.



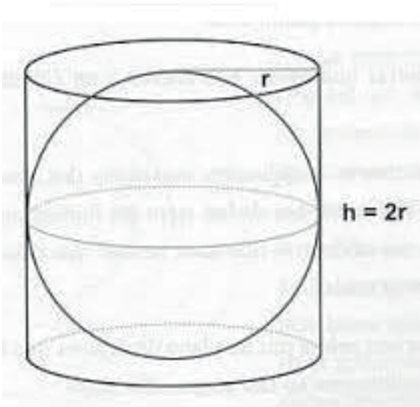
Se llama sección plana de una esfera a la intersección de ella con un plano que pasa por uno de sus puntos. Las secciones planas son círculos. Y si el plano pasa por el centro de la esfera, la sección plana es un círculo cuyo centro y radio son iguales al centro y radio de la esfera.

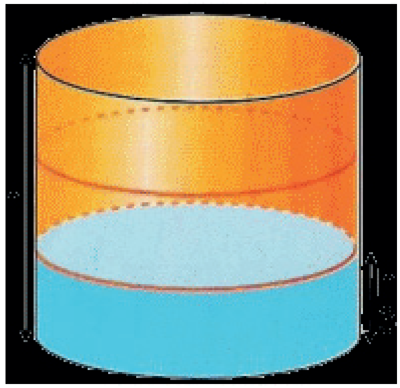
Área y Volumen de la Esfera

El área de la superficie esférica es cuatro veces el área de un círculo máximo de la esfera que tiene el mismo radio que la superficie esférica:

$$\boxed{A = 4.\ \pi\ .\ r^2}$$

Arquímedes demostró que el volumen de la esfera se calcula como las dos terceras partes del volumen del cilindro circunscripto a la esfera.





$$V = \frac{2}{3}\ volumen\ del\ cilindro = \frac{2}{3}.\pi r^2 2r$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3} . \pi . r^3}$$

El volumen de la esfera se calcula como los cuatro tercios del producto entre Pi y el cubo del radio de la esfera:

Ejemplo:

Calcular el volumen de una esfera sabiendo que su área es igual a 36 π cm^2

Cálculo de la medida del radio:

$A= 4. \pi . r^2 = 36 \pi\ cm^2$ $\qquad r^2 = \frac{36\ \pi\ cm^2}{4\ \pi} = 9\ cm^2 \rightarrow r = 3\ cm$

Cálculo del volumen

$$V= \frac{4}{3} . \pi . r^3 = \frac{4}{3}.\pi.\ (3cm)^3 = \frac{4}{3}.\pi.\ 27\ cm^3 = 4.\ \pi.\ 9\ cm^3 = 36.\pi\ cm^3$$

Ejercicio 20

Calcule el volumen de una esfera sabiendo que la longitud de su circunferencia máxima es de 31,4 cm.

Ejercicio 21

Determinar el área y el volumen de una esfera, sabiendo que su radio es igual a $\frac{1}{5}$ del radio de otra esfera de 204,1 cm3 de volumen.

Ejercicio 22

Halla el área y el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima (longitud de la circunferencia) mide 47,1 cm.

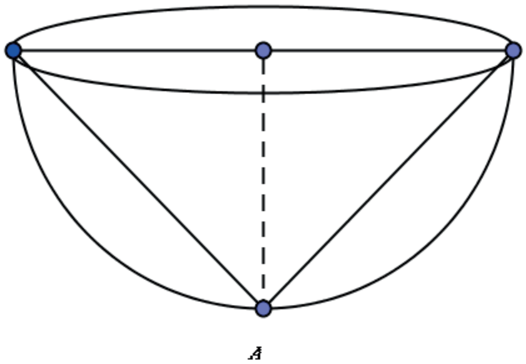
Problemas Varios

Ejercicio 23

Calcula el área lateral y total y el volumen de una pirámide triangular regular, si se sabe que la arista de la base y la altura miden 10 cm cada una.

Ejercicio 24

Comprobar que el volumen de la semiesfera es el doble del volumen del cono cuyo vértice es el punto A de la esfera y cuya base es la misma que la de la semiesfera.



Ejercicio 25

La sección plana uniforme de corte de una pileta de natación es un trapecio cuyos lados paralelos miden 1 m y 2,5 metros, y se encuentran a una distancia de 30 metros. La profundidad de la piscina es de 10 m. ¿Cuánta agua cabe en la pileta cuando está llena?

Ejercicio 26

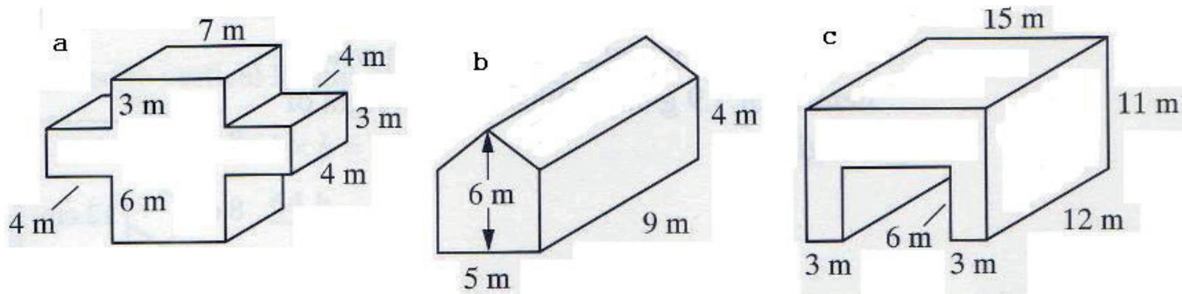
Determina el volumen de un cilindro recto de 12 cm de altura, sabiendo que su área lateral es igual al área de la base.

Ejercicio 27

Considere una esfera de radio r y un cubo circunscripto en la esfera. Calcule la razón entre sus volúmenes.

Ejercicio 28

Calcula el volumen de cada prisma.



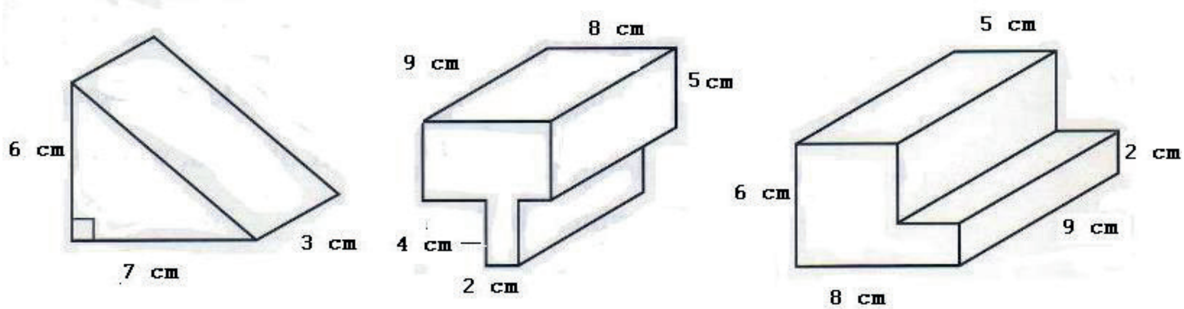
Ejercicio 29

Para cada uno de los prismas mostrados debajo:

i) grafica la sección recta

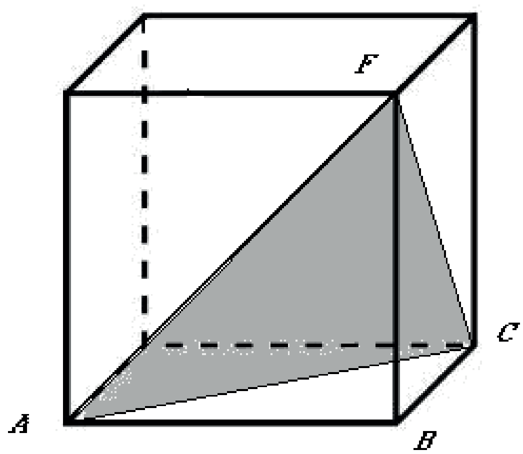
ii) calcula el área de dicha sección.

iii) calcula el volumen del prisma.



Ejercicio 30

Supón que el cubo de la figura está cortado por un plano ACF.



a) ¿Qué tipo de cuerpo es ABCF? ¿Cómo son las caras de este cuerpo entre sí?

b) ¿Cuántos cuerpos como el ABCF pueden cortarse desde el cubo? ¿Cuáles son?

Ejercicio 31

Un prisma de 8 cm de altura tiene por base un cuadrado inscripto en un círculo de 2 cm de radio. Calcular su volumen.

Ejercicio 32

¿Cuál es el volumen de un cubo que tiene un área total de 96?

a) 8 b) 16 c) 27 d) 48 e) 64

APÉNDICE MATEMÁTICA
RADICALES

Operaciones entre radicales.

Suma y resta

Dos números reales cualesquiera se pueden sumar. Por ejemplo la suma entre 5 y $\sqrt{3}$ se puede expresar como $5+\sqrt{3}$. Esta suma no se puede simplificar.
Pero cuando estamos en presencia de radicales semejantes (con igual índice y radicando) es posible aplicar factor común (propiedad distributiva) para simplificar una suma o resta.

Ejemplos:

1) $3\sqrt{5}+8\sqrt{5}-\sqrt{5}=(3+8-1)\sqrt{5}=10\sqrt{5}$ Al extraer factor común $\sqrt{5}$ es posible sumar y restar los coeficientes. (En la unidad 2 trabajaremos más con factor común, que es la propiedad distributiva usada para convertir de una suma a una multiplicación)

2) $6\sqrt{5}-7\sqrt{2}$ No tienen ningún factor común, la expresión no puede simplificarse más.

En algunos casos es necesario primero simplificar los radicales dados, para decidir si existen radicales semejantes.

Para resolver
3) $3\sqrt{8}-7\sqrt{2}+\sqrt{32}$ primero debemos simplificar aquellos radicales que se puedan, extrayendo factores.

$$=3\sqrt{2^3}-7\sqrt{2}+\sqrt{2^5}=3.2\sqrt{2}-7\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}=6\sqrt{2}-7\sqrt{2}+4\sqrt{2}$$

Ahora sí, que queda bien explícito que los radicales son semejantes, procedemos a sacar factor común $\sqrt{2}$

$$=(6-7+4)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

Otro ejemplo:

4) $3\sqrt{27}+\sqrt{80}-\sqrt{108}+4.\sqrt{75}-\sqrt{5}$ = primero simplificamos los radicales para saber si existen radicales semejantes

$3\sqrt{3.9}+\sqrt{5.16}-\sqrt{4.9.3}+4.\sqrt{3.25}-\sqrt{5}=3.3\sqrt{3}+4.\sqrt{5}-2.3\sqrt{3}+4.5\sqrt{3}-\sqrt{5}=$ o también

$3\sqrt{3^3}+\sqrt{2^4.5}-\sqrt{2^2.3^3}+4.\sqrt{3.5^2}-\sqrt{5}=3.3\sqrt{3}+2^2.\sqrt{5}-2.3\sqrt{3}+4.5.\sqrt{3}-\sqrt{5}$

Realizamos luego, los productos en los coeficientes
$=9\sqrt{3}+4.\sqrt{5}-6\sqrt{3}+20\sqrt{3}-\sqrt{5}=$ ahora podemos observar que algunos términos tienen el radical $\sqrt{3}$ y otros $\sqrt{5}$

Procedemos a sacar como factor común esos radicales entre los términos que los contienen.

$=\left(9-6+20\right)\sqrt{3}+(4-1).\sqrt{5}=23.\sqrt{3}+3.\sqrt{5}$ y este es el resultado final.

Multiplicación y división de radicales

Si los radicales a multiplicar o dividir tienen el mismo índice, debes aplicar propiedad distributiva y multiplicar los radicandos.

Ejemplos:

1) $\sqrt{2}.\sqrt{18}=\sqrt{2.18}=\sqrt{36}=6$

2) $\sqrt{2}.\sqrt{6}=\sqrt{2.6}=\sqrt{12}=\sqrt{4.3}=2.\sqrt{3}$

3) $\sqrt[3]{12}.\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{12.9}=\sqrt[3]{108}=$ es posible que el radical resultante se pueda simplificar, si es así, factoreamos y extraemos factores.

$\sqrt[3]{2^2.3^3}=3.\sqrt[3]{4}$ que es el resultado final

2) $\dfrac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{12}{3}\sqrt{\dfrac{6}{3}}=4\sqrt{2}$

En algunos casos vas a necesitar racionalizar el denominador, procedimiento que encontrarás más adelante

Si los radicales tienen distinto índice, es necesario escribirlos con un índice común, procedimiento que no revisaremos en este curso.

Racionalización de denominadores

Racionalizar significa quitar los irracionales del denominador.

El método de racionalización consiste en multiplicar la fracción por 1, pero expresado de manera conveniente, para qué al multiplicar los denominadores, se simplifique y “desaparezca” la raíz del denominador.

Veamos algunas alternativas

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ se multiplica y divide por el mismo radical

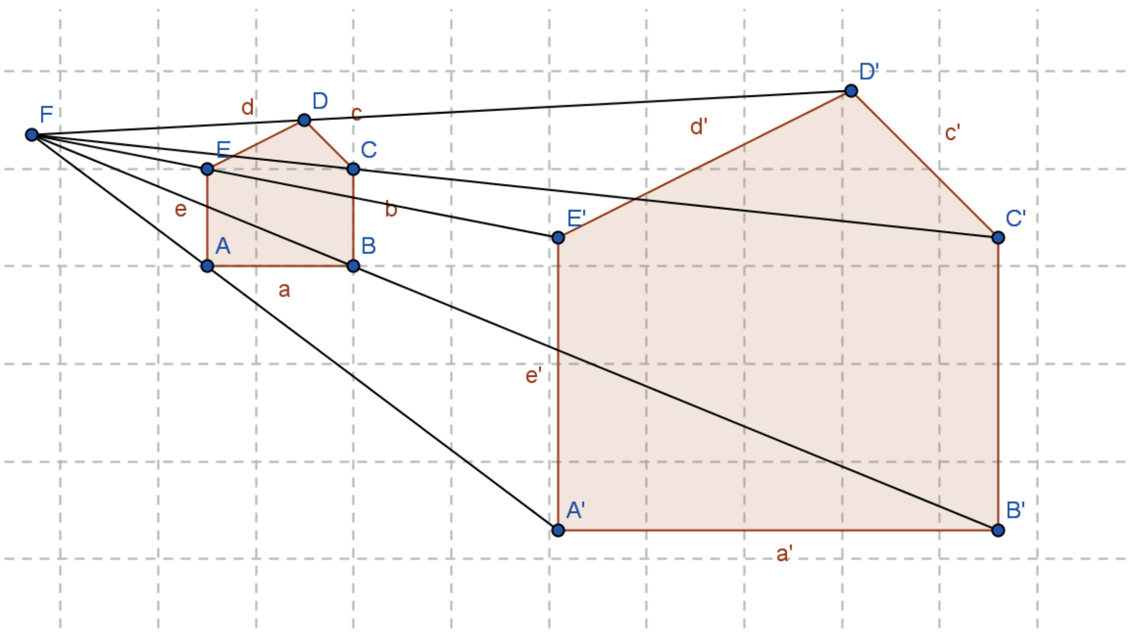
b) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}=\frac{1}{\sqrt[5]{7}}\cdot\frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^4}}=\frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7.7^4}}=\frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{\sqrt[5]{7^4}}{7}$ se multiplica y divide por un radical con el mismo índice pero que el radicando tenga como exponente la diferencia entre el índice y el exponente del radicando dado, en este caso 5 – 1 = 4

c) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ se multiplica y divide por un binomio conjugado al dado, tiene un término igual y otro opuesto, para luego poder aplicar la propiedad de diferencia de cuadrados y conseguir simplificar la raíz.

APÉNDICE GEOMETRÍA

HOMOTECIA

La homotecia es la transformación que produce figuras semejantes.



Al pentágono anterior ABCDE se le aplicó una homotecia y se obtuvo el pentágono A’B’C’D’E’, se le aplicó una homotecia de centro F y razón de homotecia igual a 3.

El punto A’ es el transformado de A, el punto B’ es el transformado de B, y así …, el punto E’ es el transformado de E

Los dos pentágonos son semejantes (Se simboliza ABCDE ~ A’B’C’D’E’), se caracterizan porque sus ángulos son iguales

$$\hat{A} = \hat{A}'; \ \hat{B} = \hat{B}' \ ; \hat{C} = \hat{C} \ ; \ \hat{D} = \hat{D}'; \ \hat{E} = \hat{E}'$$

Y los lados homólogos son proporcionales

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}}$$

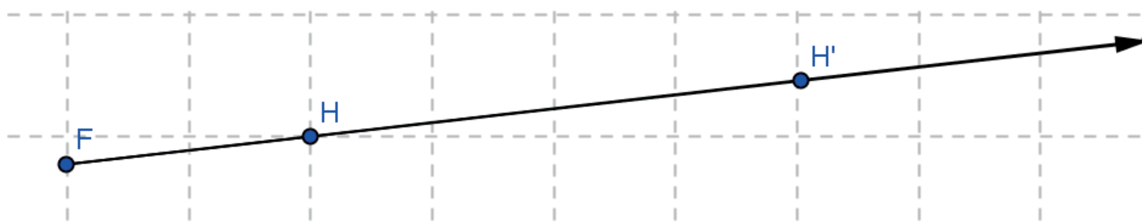
Y esas razones son iguales a la razón de homotecia o de semejanza (r)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}} = 3$$

En este caso r = 3

Para obtener el transformado de cada punto trazamos la semirrecta con origen en el centro de la homotecia que pasa por el punto.

Y, por ejemplo para un punto H tomamos la medida del segmento $\overline{FH}$ y la multiplicamos por el valor absoluto de la razón de homotecia, 3. $\overline{FH}$ y marcamos el punto H' de tal forma que $\overline{FH'}$ sea el triple de $\overline{FH}$ $\overline{FH'} = 3\overline{FH}$



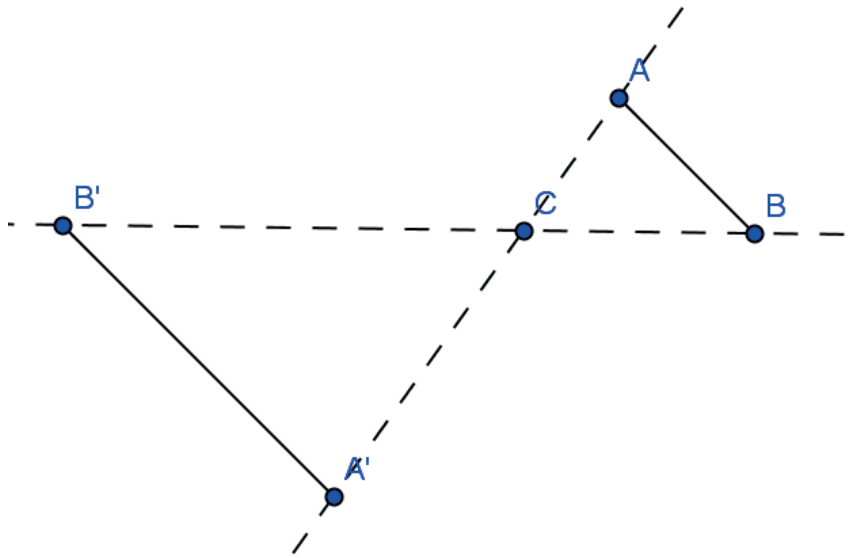
Para aplicar una homotecia a un polígono se realiza la homotecia a cada vértice del polígono.

Si la razón de la homotecia es un número negativo, el punto correspondiente a uno dado se encuentra en la semirrecta opuesta a la que pasa por ese punto y tiene origen en el centro de la homotecia.

En el ejemplo siguiente se realizó al segmento AB una homotecia de centro C y razón -2

El transformado de A, A´ se encuentra en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{CA}$, y B´ el transformado de B se encuentra en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{CB}$.

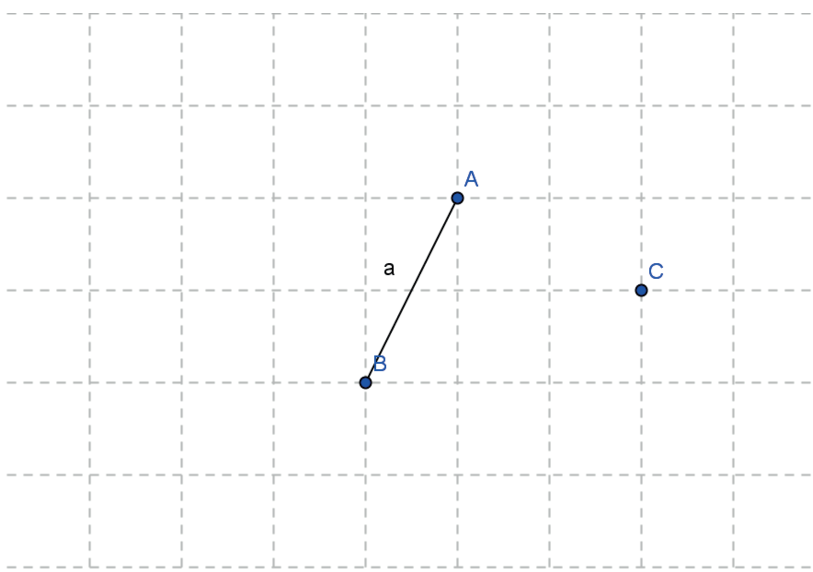
Además el cociente entre las medidas de los segmentos $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = 2$



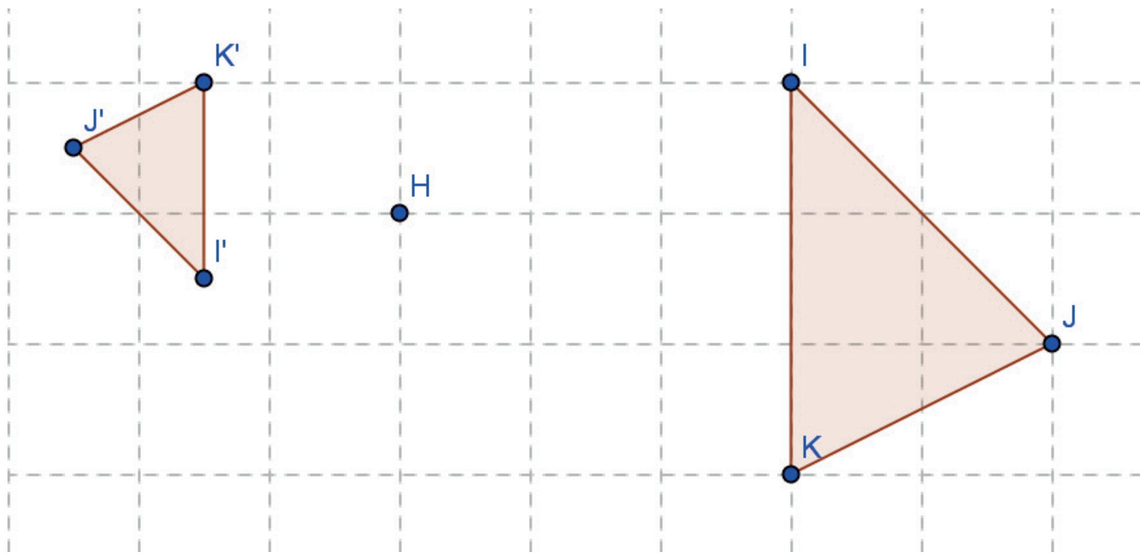
El cociente entre las medidas de los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{AB}$ coincide con el valor absoluto de la razón de homotecia.

Completa:

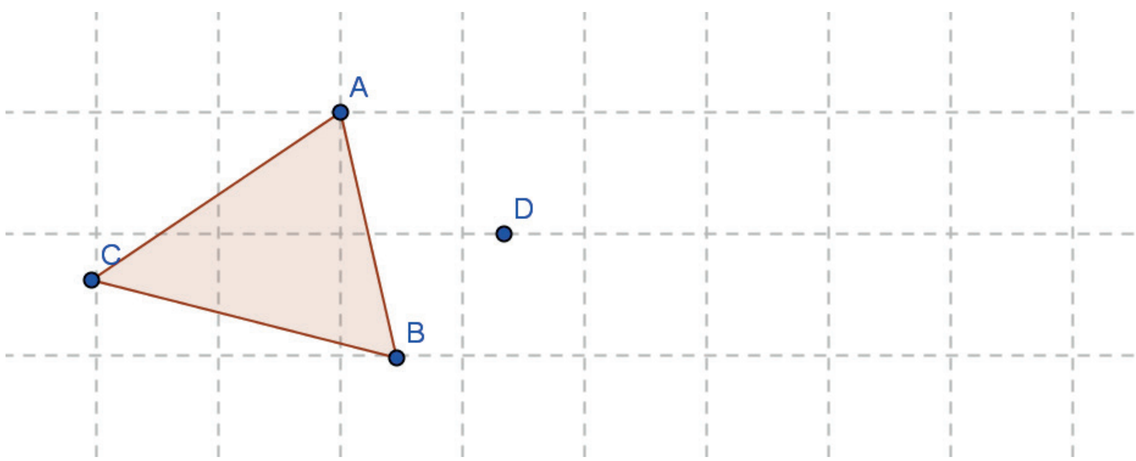
a) En la cuadrícula siguiente obtiene el transformado del segmento $\overline{AB}$ a través de una homotecia de centro C y razón 2



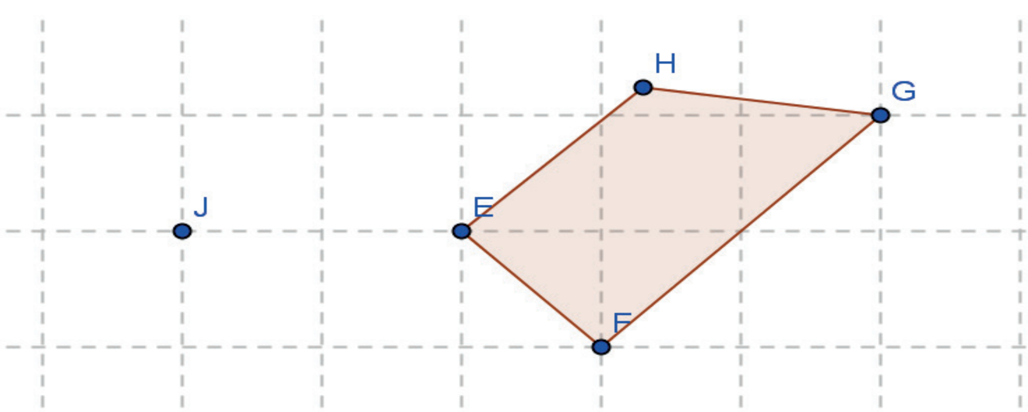
b) Encuentra la razón de semejanza o razón de homotecia entre los dos triángulos de la siguiente figura.



c) Encuentra el triángulo semejante al dado, a través de la homotecia de centro D y razón -1



d) Encuentra el cuadrilátero semejante al dado, a través de la homotecia de centro J y razón igual a 1

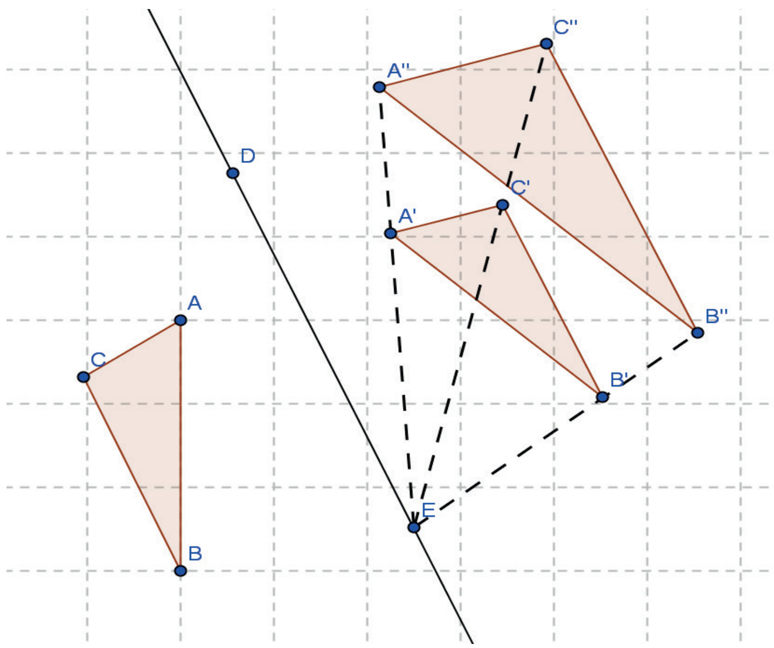


En los últimos dos ejercicios se cumple que la razón de las medidas de los segmentos homólogos es 1, por ejemplo $\frac{\overline{E'F'}}{\overline{EF}} = 1$, por lo tanto los segmentos homólogos son congruentes. La figura dada y su transformado son congruentes, tienen los lados y ángulos iguales. Se cumple la propiedad:

Si dos figuras son congruentes, entonces son semejantes

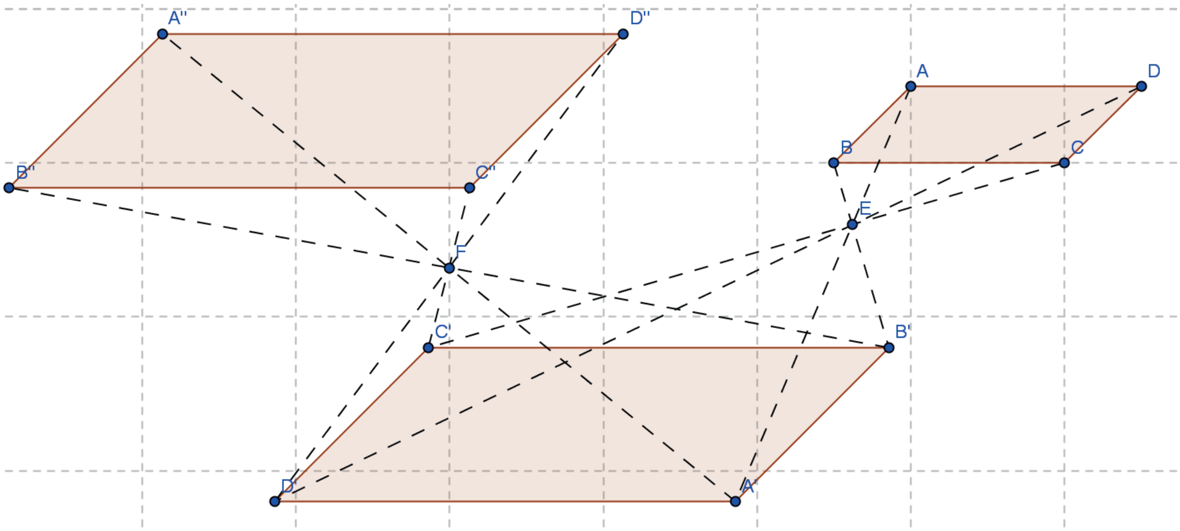
También es posible obtener figuras semejantes si se aplican sucesivamente un movimiento rígido (simetría central, axial, traslación, etc.) y una homotecia, o viceversa.

Como en el ejemplo siguiente, al triángulo ABC, se le realizó una simetría axial de recta DE y luego una homotecia de centro E y razón $\frac{3}{2}$.



Las figuras obtenidas son semejantes. Los triángulos A¨B¨C¨y ABC son semejantes, tienen sus lados homólogos proporcionales y los ángulos congruentes.

O en este otro ejemplo, en el que al paralelogramo ABCD se le aplicó una homotecia de centro E y razón -2, obteniéndose el paralelogramo A´B´C´D´ y luego a él se le aplicó una simetría central de centro F, resultando el paralelogramo A¨B¨C¨D¨. Los tres paralelogramos son semejantes.


A''
D''
A
D
B''
C''
B
C
E
F
C'
B'
D'
A'

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

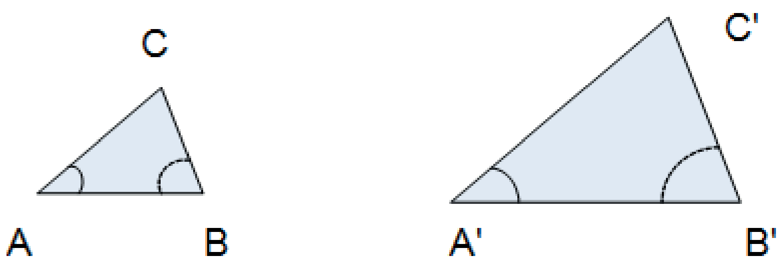
De acuerdo a la definición de polígonos semejantes, dos triángulos son semejantes si tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos respectivamente congruentes.

Pero para demostrar que dos triángulos son semejantes no es necesario demostrar la proporcionalidad de los tres lados y la congruencia de los tres ángulos. Es suficiente demostrar que dos o tres de los elementos enumerados, elegidos convenientemente, cumplen las condiciones enunciadas, para establecer la semejanza de los triángulos.

Estas condiciones suficientes mínimas exigidas para que se verifique una propiedad son las condiciones necesarias y suficientes, conocidas, en este caso, como criterios de semejanza de triángulos.

Criterio Ángulo-Ángulo

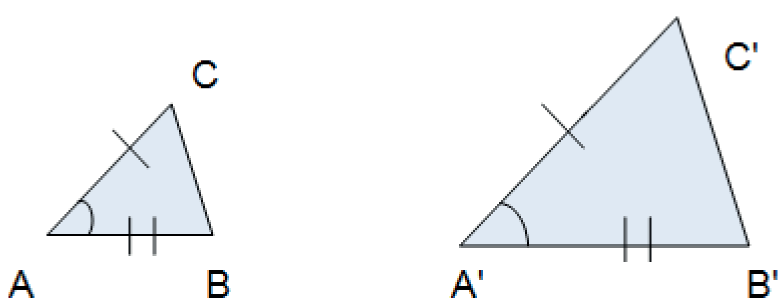
Si dos triángulos tienen las medidas de sus ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes. Pero como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, si tienen dos ángulos interiores respectivamente iguales, los terceros ángulos correspondientes también lo serán, en consecuencia, bastará para que los triángulos sean semejantes que posean dos ángulos correspondientes iguales.



$\hat{A} = \hat{A}'; \ \hat{B} = \hat{B}'$ entonces el *ABC* es semejante al *A'B'C'*

Criterio Lado – Ángulo – Lado

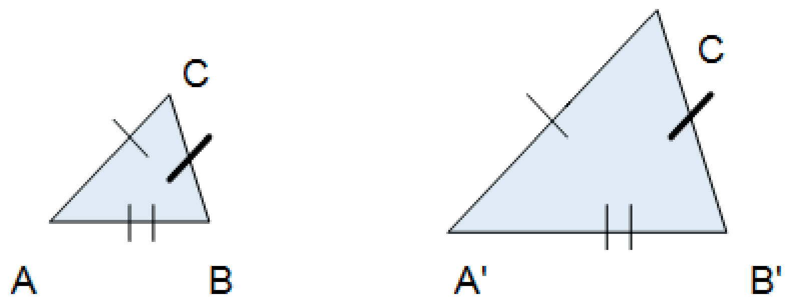
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre los mismos igual.



$\hat{A} = \hat{A}'$ $\qquad \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ entonces el *ABC* es semejante al *A'B'C'*

Criterio Lado – Lado – Lado

Dos triángulos son semejantes si tienen todos sus lados homólogos proporcionales.



$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ entonces el *ABC* es semejante al *A'B'C'*

PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS SEMEJANTES

Razón de los Perímetros de dos Polígonos Semejantes

La razón de los perímetros de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza.

Si se sabe que el polígono ABCDE es semejante al A´B´C´D´E', ABCDE ~ A´B´C´D´E', y la razón de semejanza es r , entonces sus lados homólogos son proporcionales :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}} = r$$

Teniendo en cuenta que en toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes (numeradores de las razones) es a la suma de los consecuentes (denominadores de las razones) como un antecedente es a su consecuente, resulta que:

$$\frac{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'A'}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = r$$

El numerador de la primera razón es el perímetro del polígono A´B´C´D´E' y el denominador es el perímetro del polígono ABCDE. Entonces

$$\frac{Perimetro\ A'B'C'D'E'}{Perimetro\ ABCDE} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = r$$

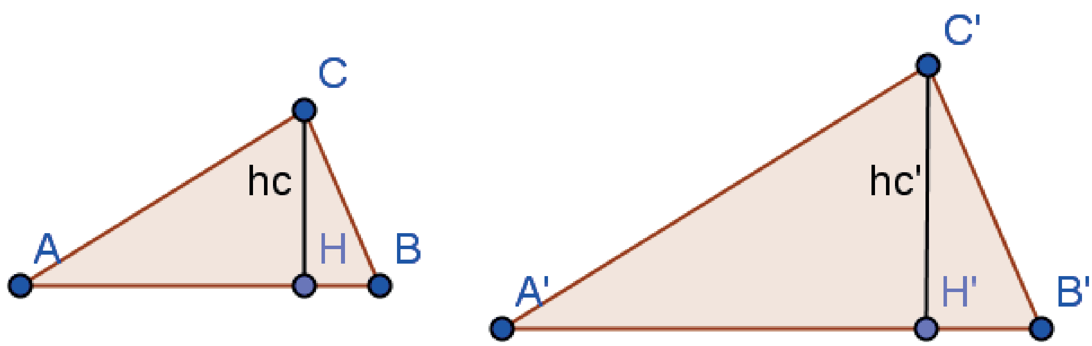
Que es lo que queríamos demostrar.

Razón de las Alturas de dos Triángulos Semejantes

La razón de las alturas de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.

Consideremos dos triángulos semejantes ABC y A’B’C’. hc es la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ y hc’ es la altura correspondiente al lado $\overline{A'B'}$.

Se cumple entonces que: $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = r \qquad (1)$$



Los triángulos ACH y A’C’H’ son semejantes , de acuerdo al criterio ángulo-ángulo ya que los ángulos $\widehat{H}$ y $\widehat{H}'$ son congruentes, por ser ambos rectos, y los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A}'$ son congruentes por pertenecer a los triángulos semejantes ABC y A’B’C’

Entonces en ACH y A’C’H’ los lados homólogos son proporcionales y la razón es igual a la razón de semejanza., en particular: $\dfrac{hc'}{hc} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$

Pero la razón $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ es igual a r , de acuerdo a lo expresado en (1), $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = r$

Por transitividad de la igualdad $\dfrac{hc'}{hc} = r$, es decir, la razón de las alturas de los triángulos es igual a la razón de semejanza.

Razón de las Áreas de dos Polígonos Semejantes

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Demostraremos esta propiedad para el caso de los triángulos.

Consideremos dos triángulos semejantes ABC y A'B'C', hc es la altura correspondiente al lado AB y hc' es la altura correspondiente al lado A'B'.

Se cumple entonces que: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = r$

Expresamos el área de cada triángulo

$$Area\ A'B'C' = \frac{\overline{A'B'}.\ hc'}{2} \text{ y } Area\ ABC = \frac{\overline{AB}.\ hc}{2}$$

Hallamos la razón entre las áreas y aplicamos la propiedad de las alturas de los triángulos semejantes.

$$\frac{Area\ A'B'C'}{Area\ ABC} = \frac{\dfrac{\overline{A'B'}.\ hc'}{2}}{\dfrac{\overline{AB}.\ hc}{2}} = \frac{\overline{A'B'}.\ hc'}{\overline{AB}\ .\ hc} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.\frac{hc'}{hc} = r.\ r = r^2$$

Resulta entonces lo que queríamos demostrar, que la razón entre las áreas de los triángulos es igual al cuadrado de la razón de semejanza: $\dfrac{Area\ A'B'C'}{Area\ ABC} = r^2$

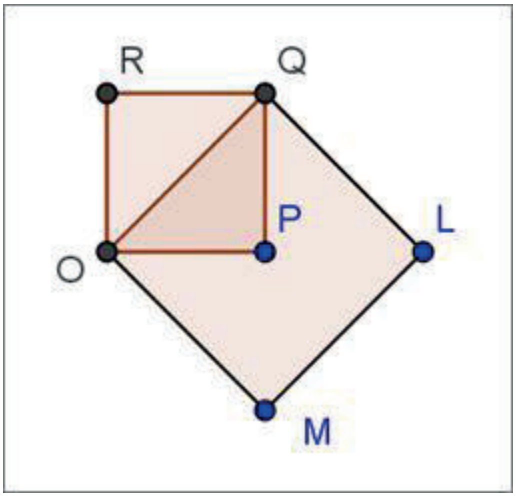
Ejemplo

Considera los cuadrados OPQR y LMOQ de la siguiente figura, sabiendo que

$\overline{OR}$ =10 cm. Calcula:

a) la razón entre el perímetro del LMOQ y el perímetro del OPQR.

b) la razón entre el área del LMOQ y el área del OPQR.



Los dos cuadrados son semejantes, obtenemos la razón de semejanza dividiendo las medidas de sus lados.

La medida del lado $\overline{OR}$ es 10, la medida de $\overline{OQ}$ es $\overline{OQ} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ por aplicación del teorema de Pitágoras.

a) De acuerdo a la propiedad de los perímetros de las figuras semejantes:

$$\frac{Perimetro\ LMOQ}{Perimetro\ OPQR} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} = \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$$

b) De acuerdo a la propiedad de las áreas de las figuras semejantes:

$$\frac{Area\ LMOQ}{Area\ OPQR} = \left(\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

La razón entre los perímetros es $\sqrt{2}$ y entre las áreas es 2

FORMULARIO: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante:

....

Versión
4.0 - 2013

....

Nombre y Apellido del Docente DNI del Docente

FORMULARIO: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante:

....

Versión
4.0 - 2013

....

Nombre y Apellido del Docente DNI del Docente

FORMULARIO: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza

Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante: ....

Versión 4.0 - 2013

....

Nombre y Apellido del Docente DNI del Docente

FORMULARIO: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza

Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante: ....

Versión 4.0 - 2013

....

Nombre y Apellido del Docente DNI del Docente

<u>FORMULARIO</u>: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza

Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante:

....

Versión 4.0 - 2013

....

Nombre y Apellido del Docente DNI del Docente

<u>FORMULARIO</u>: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza

Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante:

....

Versión 4.0 - 2013

....

Nombre y Apellido del Docente DNI del Docente

FORMULARIO: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza

Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante:

....

Versión 4.0 - 2013

.... Nombre y Apellido del Docente

.... DNI del Docente

FORMULARIO: CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EVALUACION

Universidad Nacional de La Matanza

Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

Solicitud de constancia de presentación de evaluación

San Justo, .../......./........

Dejase constancia de que el/la alumno/a:

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

se ha presentado a la evaluación de la asignatura: ....

el día.. a las........... hs. en el aula...

Se extiende la presente constancia a pedido del interesado/a para ser presentada ante:

....

Versión 4.0 - 2013

.... Nombre y Apellido del Docente

.... DNI del Docente

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

FORMULARIO Nº 1
Curso de Ingreso

SOLICITUD DE REVISIÓN DE EXAMEN

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

Carrera: .... Departamento: ....

Materia que solicita revisión de examen	Aula dónde rindió el examen	Calificación obtenida
Detalle los puntos donde considera y fundamenta la necesidad de revisión		

Fecha: ..../........./........

……………………………….. Firma del solicitante

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

FORMULARIO Nº 1
Curso de Ingreso

SOLICITUD DE REVISIÓN DE EXAMEN

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

Carrera: .... Departamento: ....

Materia que solicita revisión de examen	Aula dónde rindió el examen	Calificación obtenida
Detalle los puntos donde considera y fundamenta la necesidad de revisión		

Fecha: ..../........./........

………………………………. Firma de recepción

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

FORMULARIO Nº 1
Curso de Ingreso

SOLICITUD DE REVISIÓN DE EXAMEN

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

Carrera: .... Departamento: ....

Materia que solicita revisión de examen	Aula dónde rindió el examen	Calificación obtenida
Detalle los puntos donde considera y fundamenta la necesidad de revisión		

Fecha: ....../......../.......

…………………………………..
Firma del solicitante

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

FORMULARIO Nº 1
Curso de Ingreso

SOLICITUD DE REVISIÓN DE EXAMEN

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

Carrera: .... Departamento: ....

Materia que solicita revisión de examen	Aula dónde rindió el examen	Calificación obtenida
Detalle los puntos donde considera y fundamenta la necesidad de revisión		

Fecha: ....../......../.......

………………………………….
Firma de recepción

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

FORMULARIO Nº 1
Curso de Ingreso

SOLICITUD DE REVISIÓN DE EXAMEN

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

Carrera: .... Departamento: ....

Materia que solicita revisión de examen	Aula dónde rindió el examen	Calificación obtenida
Detalle los puntos donde considera y fundamenta la necesidad de revisión		

Fecha: ..../........./........

…………………………………..
Firma del solicitante

Universidad Nacional de La Matanza
Secretaría Académica - Dirección de Alumnos

FORMULARIO Nº 1
Curso de Ingreso

SOLICITUD DE REVISIÓN DE EXAMEN

Apellido/s: ....

Nombre/s: .... DNI: ....

Carrera: .... Departamento: ....

Materia que solicita revisión de examen	Aula dónde rindió el examen	Calificación obtenida
Detalle los puntos donde considera y fundamenta la necesidad de revisión		

Fecha: ..../........./........

…………………………………
Firma de recepción

UBICACIÓN DE AULAS