Recursión

Taller de Álgebra I

Segundo cuatrimestre 2018

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad\qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
```

Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
     | n > 0 = n * factorial (n-1)
```

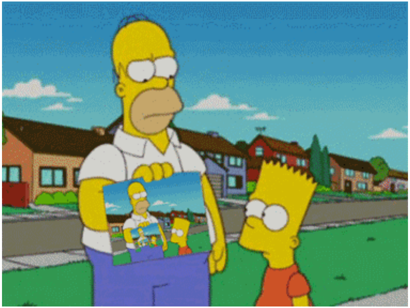
Recursión

- Hasta ahora, especificamos funciones que consistían en "expresiones sencillas".
- ¿Cómo es una función en Haskell para calcular el factorial de un número entero?

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

¡La segunda definición de `factorial` involucra a esta misma función del lado derecho!

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial n
     | n > 0 = n * factorial (n-1)
     | n == 0 = 1
```



¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,

Definiciones recursivas

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.
  - además, identificamos el o los casos base. En el ejemplo de `factorial`, definimos como casos base la función sobre 0: `factorial n | n == 0 = 1`

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.
  - además, identificamos el o los casos base. En el ejemplo de `factorial`, definimos como casos base la función sobre 0: `factorial n | n == 0 = 1`
- Propiedades de una definición recursiva:
  - las llamadas recursivas tienen que *"acercarse"* a un caso base.
  - tiene que tener uno o más casos base que dependerán del tipo de llamado recursivo.
    Un caso base, es aquella expresión que no tiene paso recursivo.

Definiciones recursivas

¿Cómo pensar recursivamente?

- Si queremos definir una función recursiva, por ejemplo `factorial`,
  - en el paso recursivo, **suponiendo** que tenemos el resultado para el caso anterior, ¿qué falta para poder obtener el resultado que quiero?
    En este caso, suponemos ya calculado `factorial (n-1)` y lo combinamos multiplicándolo por `n` para lograr obtener `factorial n`.
  - además, identificamos el o los casos base. En el ejemplo de `factorial`, definimos como casos base la función sobre 0: `factorial n | n == 0 = 1`
- Propiedades de una definición recursiva:
  - las llamadas recursivas tienen que *"acercarse"* a un caso base.
  - tiene que tener uno o más casos base que dependerán del tipo de llamado recursivo.
    Un caso base, es aquella expresión que no tiene paso recursivo.
- En cierto sentido, la recursión es el equivalente computacional de la inducción para las demostraciones.

Ejercicios

1. Implementar la función $fib : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ que devuelve el i-ésimo número de Fibonacci. Recordar que la secuencia de Fibonacci se define como:

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Implementar funciones recursivas para calcular el n-ésimo término de las siguientes sucesiones del Ejercicio 16 y 20 de la Práctica 2.

   1. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   2. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_{n+2} = na_{n+1} + 2(n+1)a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   3. $a_1 = -3$, $a_2 = 6$ y $a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función *sumatoria* $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde $\mathit{sumatoria}(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función *sumatoria* : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, donde $sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i$
Para resolver este tipo de ejercicios, se puede pensar a las sumatorias como

$$sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i \qquad \text{para n} > 1$$

Sumatorias

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función *sumatoria* : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde $sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Para resolver este tipo de ejercicios, se puede pensar a las sumatorias como

$$sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i \qquad \text{para n} > 1$$

Es decir:

$$sumatoria(n) = n + sumatoria(n-1) \qquad \text{para n} > 1$$

Sumatorias

Implementación de sumatorias

¿Cómo podemos implementar la función *sumatoria* : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde $sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Para resolver este tipo de ejercicios, se puede pensar a las sumatorias como

$$sumatoria(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i \qquad \text{para n} > 1$$

Es decir:

$$sumatoria(n) = n + sumatoria(n-1) \qquad \text{para n} > 1$$

Ejercicios: otras sumatorias

Implementar y dar el tipo de las siguientes funciones del Ejercicio 5 Práctica 2.

1. $f1(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i$, $n \in \mathbb{N}_0$.
2. $f2(n,q) = \sum_{i=1}^{n} q^i$, $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$
3. $f3(n,q) = \sum_{i=0}^{n} q^{2i}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{R}$
4. $f4(n,q) = \sum_{i=n}^{2n} q^i$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{R}$

Otras funciones recursivas

A veces el paso recursivo no es obvio o no está dado explícitamente. Hay que pensar...

Ejercicios

- Implementar la función `esPar :: Integer -> Bool` que determine si un número natural es par. No está permitido utilizar `mod` ni `div`.
- Escribir una función para determinar si un número natural es múltiplo de 3. No está permitido utilizar `mod` ni `div`.
- Implementar la función `sumaImpares :: Integer -> Integer` que dado $n \in \mathbb{N}$ sume los primeros n números impares. Ej: `sumaImpares 3` $\rightsquigarrow$ `1+3+5` $\rightsquigarrow$ `9`.
- Escribir una función `doblefact` que dado $n \in \mathbb{N}$ calcula $n!! = n\,(n-2)(n-4)\cdots$. Por ejemplo:

  `doblefact` $10 \rightsquigarrow 10*8*6*4*2 \rightsquigarrow 3840$.
  `doblefact` $9 \rightsquigarrow 9*7*5*3*1 \rightsquigarrow 945$.
- Escribir una función recursiva que no termine si se la ejecuta con enteros negativos (y en cambio sí termine para el resto de los enteros).

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```
  ```

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

  ¿Qué problema tiene esta función?
  ```

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

  ¿Qué problema tiene esta función?

  ¿Cómo se arregla?
  ```

Asegurarse de llegar a un caso base

- Consideremos este programa recursivo para determinar si un entero positivo es par:

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

  ¿Qué problema tiene esta función?

  ¿Cómo se arregla?

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | n==1 = False
          | otherwise = esPar (n-2)
  ```

- ```
  esPar :: Integer -> Bool
  esPar n | n==0 = True
          | otherwise = not (esPar (n-1))
  ```
  ```