Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Пример курсовой

работы

КУРСОВАЯ РАБОТА

студента (ки) 2 курса 241 группы

направления (специальности) 080801 Прикладная информатика

Механико-математический факультет

Петровой Исидоры Ивановны

Научный руководитель

Зав. кафедрой
зав.каф., д.ф.м.н. Ю. А. Блинков

Саратов 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Структурный элемент «Обозначения и сокращения» содержит перечень обозначений и сокращений, применяемых в работе. Запись обозначений и сокращений приводится в порядке их появления в тексте работы с необходимой расшифровкой и пояснениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Структурные элементы «Определения», «Обозначения и сокращения», «Приложения» не являются обязательными, их включают в работу по усмотрению исполнителя.

Структурный элемент «Определение» содержит определения, необходимые для уточнения или установления терминов, используемых в работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Допускается определения, обозначения и сокращения приводить в одном элементе «Определения, обозначения и сокращения».

ВВЕДЕНИЕ

Структурными элементами курсовой работы (проекта) и выпускной квалификационной работы (далее - работы) являются:

- титульный лист;
- содержание;
- определения;
- обозначения и сокращения;
- введение;
- основная часть;
- заключение;
- список использованных источников;
- приложения.

Введение должно включать:

- общую информацию о состоянии разработок по выбранной теме;
- обоснование актуальности и новизны темы, связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами;
- цель работы и решаемые задачи.

1 Основная часть

Основная часть может содержать:

1. обоснование направления исследования, методы решения задач и их сравнительную оценку, описание выбранной методики проведения работы;
2. процесс теоретических и (или) экспериментальных исследований, включая определение характера и содержания теоретических исследований, методы исследований, методы расчета, обоснование необходимости проведения экспериментальных работ, принципы действия разработанных объектов, их характеристики;
3. анализ текстов, фактов, процессов, составляющих проблематику работы;
4. обобщение и оценку результатов исследований, включающих оценку полноты решения поставленных задач и предложения по дальнейшим направлениям работ, оценку достоверности полученных результатов, технико-экономической эффективности их внедрения и их сравнение с аналогичными результатами отечественных и зарубежных работ, обоснование необходимости проведения дополнительных исследований, отрицательные результаты, приводящие к необходимости прекращения дальнейших исследований.

Основная часть обычно состоит из разделов. В конце каждого раздела рекомендуется делать выводы, которые должны быть краткими и содержать конкретную информацию о полученных результатах.

1.1 Список использованных источников

Список использованных источников должен содержать сведения об источниках, использованных в работе.

Количество источников при выполнении курсовой работы (проекта) составляет, как правило, не менее 10, а при выполнении выпускной квалификационной работы – не менее 20.

1.2 Приложения

В приложения рекомендуется включать материалы, связанные с выполненной работой, которые по каким-либо причинам не могут быть включены в основную часть. Приложениями могут быть:

- промежуточные математические доказательства, формулы и расчеты;
- таблицы вспомогательных цифровых данных;
- протоколы испытаний;
- описание аппаратуры и приборов, применяемых при проведении экспериментов, измерений и испытаний;
- заключение метрологической экспертизы;
- инструкции, методики, разработанные в процессе выполнения работы;
- иллюстрации вспомогательного характера;
- акты внедрения результатов работы;
- примеры, не вошедшие в работу;
- своды источников;
- другие материалы.

2 Правила оформления курсовых работ (проектов) и выпускных квалификационных работ

2.1 Общие положения

Курсовая работа (проект) и выпускная квалификационная работа (далее - работа) должна быть выполнена с использование компьютера и принтера на одной стороне листа белой бумаги формата А4 шрифтом Times New Roman через полтора интервала.

Цвет шрифта должен быть черным, высота цифр, букв и других знаков - размером 14 пт (кеглей).

Текст работы следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: левое – 25 мм, правое – 15 мм, верхнее и нижнее – 20 мм.

Объем курсовой работы (проекта), как правило, составляет **20-30** страниц, объем выпускной квалификационной работы бакалавра, специалиста – **40-60** страниц, магистра – **50-90** страниц.

Количество страниц, отводимых на каждый раздел работы, определяется студентом по согласованию с научным руководителем (руководителем). Допускается использовать компьютерные возможности для акцентирования внимания на определениях, терминах, формулах и других важных особенностях путем применения разных начертаний шрифта (курсив, полужирный, полужирный курсив, разрядка и др.).

Опечатки, описки и графические неточности, орфографические, синтаксические и речевые ошибки, обнаруженные в процессе выполнения работы, допускается исправлять закрашиванием корректором и нанесением на том же месте исправленного текста (графики).

Повреждения листов, помарки, следы не полностью удаленного прежнего текста (графики), орфографические, синтаксические и речевые ошибки не допускаются.

Работа должна быть подписана исполнителем. Подпись и дата ставятся исполнителем после списка использованных источников.

2.2 Изложение текста

Текст работы должен быть кратким, четким, логически последовательным и не допускать двусмысленных толкований.

В работе должны применяться научные и научно-технические термины, обозначения и определения, установленные соответствующими стандартами, а при их отсутствии - общепринятые в научной и научно-технической литературе. Если в работе принята специфическая терминология, то перечень терминов с соответствующими разъяснениями должен быть приведен в структурном элементе «Определения». При этом перед началом перечня указывают: «В работе принята следующая специфическая терминология:»

В тексте работы не допускается применять:

- обороты разговорной речи, техницизмы, профессионализмы;
- для одного и того же понятия различные научные и научно-технические термины, близкие по смыслу (синонимы), если синонимические обозначения не являются общепринятыми;
- произвольные словообразования;
- сокращения слов, кроме тех, которые установлены правилами русской орфографии, стандартами, а также в данной работе.

Перечень допускаемых сокращений слов установлен в ГОСТ 2.316. Если в работе принята особая система сокращения слов или наименований, то их перечень приводят в структурном элементе «Обозначения и сокращения». При этом перед началом перечня указывают: «В работе принята следующая особая система сокращений и наименований:»

Используемые в работе условные буквенные обозначения, изображения или знаки должны соответствовать принятым в действующих стандартах. При необходимости применения условных обозначений, изображений или знаков, не установленных действующими стандартами, их следует пояснять в тексте или в перечне обозначений с указанием: «В работе приняты следующие условные обозначения, изображения или знаки:».

В работе следует применять стандартизованные единицы физических величин, их наименования и обозначения в соответствии с ГОСТ 8.417.

2.3 Заголовки

Заголовки должны четко и кратко отражать содержание разделов, подразделов, пунктов и подпунктов. Недопустимы формулировки заголовков разделов, подразделов, пунктов или подпунктов идентичные друг другу и названию работы в целом.

Заголовки разделов, подразделов, пунктов и подпунктов следует печатать с абзацного отступа, с прописной буквы, полужирным шрифтом, без точки в конце и подчеркивания.

Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой. Переносы слов в заголовках не допускаются.

2.4 Примечания и примеры

Примечания приводят в работе, если необходимы пояснения или справочные данные к содержанию текста, таблиц или графического материала.

Примечания следует помещать непосредственно после текстового, графического материала или в таблице, к которым относятся эти примечания, и печатать с прописной буквы с абзаца.

Если примечание одно, то после слова «Примечание» ставится тире и примечание печатается тоже с прописной буквы. Одно примечание не нумеруют. Несколько примечаний нумеруют по порядку арабскими цифрами. Примечание к таблице помещают в конце таблицы над линией, обозначающей окончание таблицы.

Примеры

Примечание – ...

Примечания

1 ...

2 ...

Примеры размещают, оформляют и нумеруют так же, как и примечания.

2.5 Ссылки и сноски

Ссылки могут относиться к использованным источникам или элементам работы.

Ссылки на использованные источники [?] следует указывать порядковым номером библиографического описания [?, ?, ?, ?] источника в списке использованных источников. Порядковый номер ссылки заключают в квадратные скобки [?, ?]. Нумерация ссылок ведется арабскими цифрами в порядке их приведения в тексте независимо от деления на разделы. Ссылаться следует на источник в целом или его разделы и приложения. Ссылки на подразделы, пункты, таблицы и иллюстрации источника не допускаются.

Для задания своих ссылок нужно отредактировать файл biblio.bib. Правила оформления можно посмотреть в файле gost2008.pdf согласно ГОСТ Р 7.0.5 от 2008 года.

При ссылке на элементы работы (разделы, подразделы, пункты, подпункты) указываются их номера, например, «в соответствии с подразделом **??** настоящей работы» или «в соответствии с разделом **??**, перечисление **??**)».

При ссылках на стандарты и технические условия указывают только их обозначение, при этом допускается не указывать год их утверждения при условии полного описания стандарта и технических условий в списке использованных источников. 6.7.2 Если необходимо пояснить отдельные данные, приведенные в тексте, то эти данные следует обозначать надстрочными знаками сноски (подстрочная библиографическая ссылка – ГОСТ Р 7.0.5).

Сноски в тексте располагают с абзацного отступа в конце страницы, на которой они обозначены, и отделяют от текста короткой тонкой горизонтальной линией с левой стороны. Сноски к данным, представленным в таблице, располагают в конце таблицы под линией, обозначающей окончание таблицы.

Знак сноски ставят непосредственно после того слова, числа, символа, предположения, к которому дается пояснение, и перед текстом пояснения. Знак сноски выполняют арабскими цифрами и помещают на уровне верхнего обреза шрифта.

Пример – «... печатающее устройство[1]... »

[1] ссылка на печатающее устройство

Нумерация сносок может вестись отдельно для каждой страницы или быть сплошной внутри раздела (главы).

2.6 Иллюстрации

К иллюстрациям относят чертежи, графики, схемы, компьютерные распечатки, диаграммы, фотоснимки. Их следует располагать непосредственно после текста , в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице.

Иллюстрации могут быть в компьютерном исполнении, в том числе и цветные.

На все иллюстрации должны быть даны ссылки в тексте.

Чертежи, графики, диаграммы, схемы, помещаемые в работе, должны соответствовать требованиям стандартов Единой системы конструкторской документации (ЕСКД).

Фотоснимки размером меньше формата А4 должны быть наклеены на стандартные листы белой бумаги.

Иллюстрации при необходимости, могут иметь наименование и пояснительные данные (подрисуночный текст). Слово «Рисунок» и наименование помещают после пояснительных данных и располагают следующим образом: Рисунок 1 - Детали прибора.

При ссылках на иллюстрации следует писать «... в соответствии с рисунком **??**» при сквозной нумерации и «... в соответствии с рисунком **??**» при нумерации в пределах раздела.

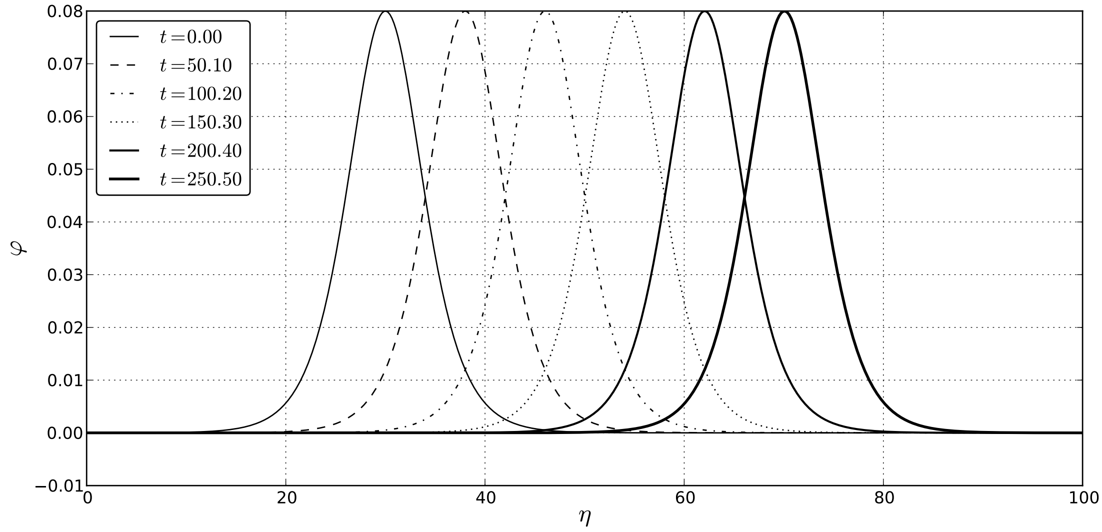

Рисунок 2.1 — Проверка точного решения

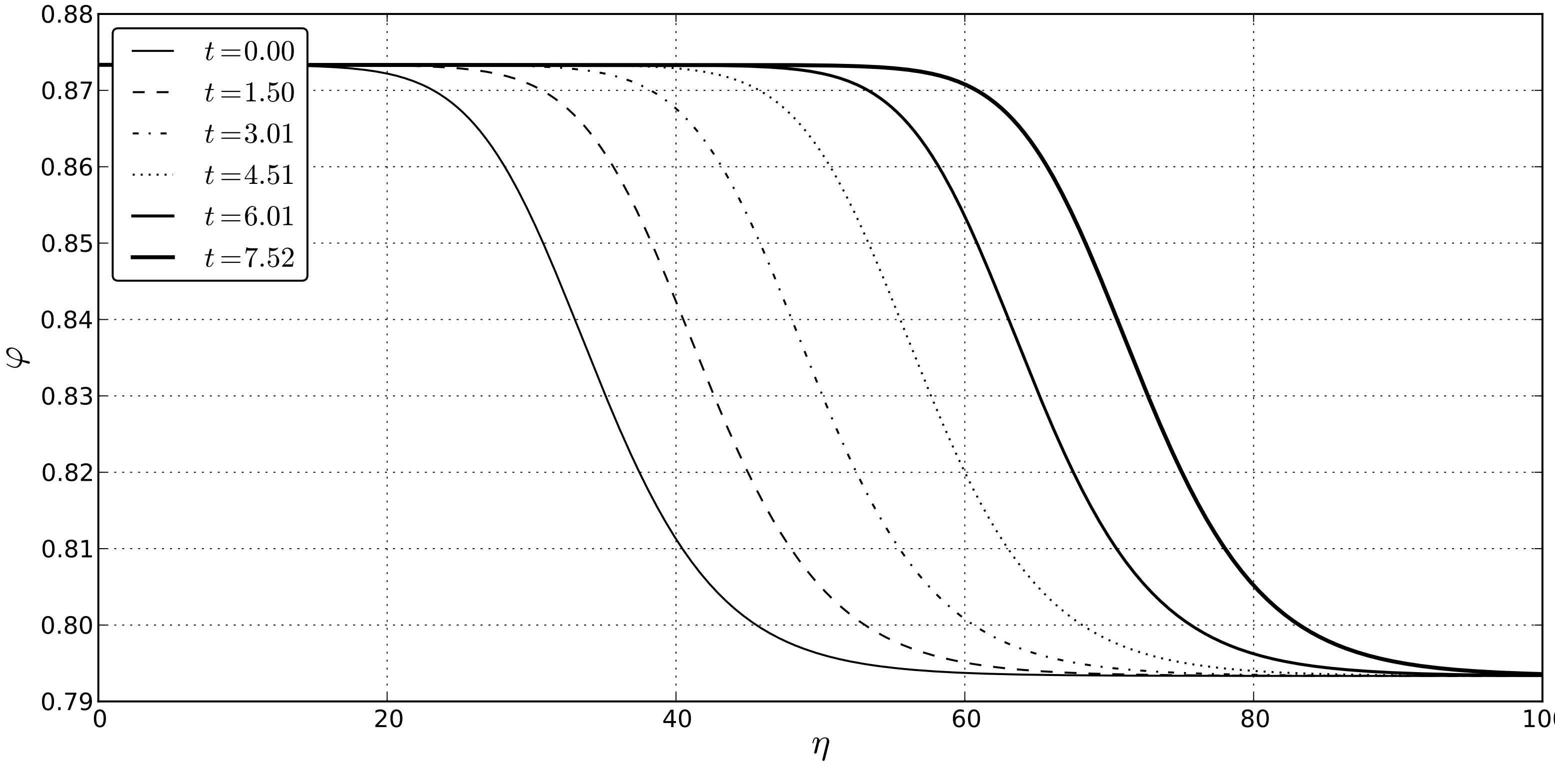

Рисунок 2.2 — Проверка точного решения $\frac{3}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2\sqrt{6}}{6\sqrt{\sigma_1}} + \frac{k\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_1}} \tanh\left(kx + t\left(-9\frac{k}{\sigma_1} + \frac{1}{6}k\sigma_2^2 + 2k^3\right)\right)$

2.7 Таблицы

Таблицы применяют для лучшей наглядности и удобства сравнения показателей. Цифровой материал, как правило, оформляют в виде таблиц.

Таблицу следует располагать непосредственно после текста, в котором она упоминается впервые, или на следующей странице. Наименование таблицы, при его наличии, должно отражать ее содержание, быть точным, кратким.

На все таблицы должны быть ссылки в тексте. При ссылке следует писать слово «таблица **??**» с указанием ее номера.

Таблица 2.1 — Расчет весомости параметров ПП

Параметр x_i	Параметр x_j				Первый шаг		Второй шаг	
	X_1	X_2	X_3	X_4	w_i	$K_{\text{в}i}$	w_i	$K_{\text{в}i}$
X_1	1	1	1.5	1.5	5	0.31	19	0.32
X_2	1	1	1.5	1.5	5	0.31	19	0.32
X_3	0.5	0.5	1	0.5	2.5	0.16	9.25	0.16
X_4	0.5	0.5	1.5	1	3.5	0.22	12.25	0.20
Итого:					16	1	59.5	1

Таблицу с большим числом строк допускается переносить на другой лист. При переносе части таблицы на другой лист слово «Таблица **??**», ее номер и наименование указывают один раз слева над первой частью таблицы, а над другими частями также слева пишут слова "Продолжение таблицы"и указывают номер таблицы.

Допускается нумеровать таблицы в пределах раздела. В этом случае номер таблицы состоит из номера раздела и порядкового номера таблицы, разделенных точкой.

Таблицы каждого приложения обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения “таблица **??**”.

3 Математический текст

3.1 Деление целых чисел

Следующие предложение (Childs, 1979), будет использоваться для доказательств теорем.

Предложение 1. *(Принцип полной упорядоченности).* Пусть k_0 – произвольное целое число. Тогда всякое непустое множество целых чисел $\geq k_0$, имеет наименьший элемент.

Доказательство. Докажем, что всякое множество целых чисел $\geq k_0$, неимеющее наименьшего элемента, должно быть пустым. Пусть S – множество целых чисел $\geq k_0$ без наименьшего элемента. Предположим S не содержит целых чисел $\leq k$. При $k = k_0$ это утверждение истинно, иначе бы S имела наименьший элемент k_0. Пусть это утверждение верно для $k = n$. Тогда S не содержит элементов $\leq k = n+1$, иначе $n+1$ наименьший элемент. Поскольку n произвольно, значит S пустое множество. $\square$

Одно из основных свойств целых чисел – это свойство *делимости* или *евклидовости.*

Теорема 2. *(свойство евклидовости).* Для любого a и любого $b \neq 0$ существуют единственные (целые) *частное* q и *остаток* r, такие, что $a = b \cdot q + r,\ 0 \leq r < |b|$

Доказательство. Рассмотрим множество целых чисел вида $a - kb$, где k пробегает все множество целых чисел

$$\ldots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \ldots$$

Выберем в этой последовательности наименьшее неотрицательное число и обозначим его r, и пусть q обозначает соответствующее значение k. Такое r существует, потому что множество $\{a - kb\}$ содержит отрицательные и неотрицательные значения, а из принципа полной упорядоченности следует, что непустое множество неотрицательных целых чисел содержит наименьший элемент. По определению $r = a - qb$.

Для доказательства единственности допустим, что

$$a = b \cdot \hat{q} + \hat{r},\ 0 \le \hat{r} < |b|$$

и что $\hat{r} \neq r$. Пусть для определенности $\hat{r} < r$, так что $0 < r - \hat{r} < |b|$, тогда

$$r - \hat{r} = (\hat{q} - q)b$$

и $b \mid (r - \hat{r})$, что противоречит неравенствам $0 < r - \hat{r} < |b|$. □

3.2 Наибольший общий делитель

Определение 3. Пусть a, b одновременно не равны нулю. Целое число $d > 0$ называется *наибольшим общим делителем* a и b, если

1. $d \mid a$ и $d \mid b$
2. если $c \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid d$.

Наибольший общий делитель a и b будем обозначать $\gcd(a, b)$. Единственность наибольшего общего делителя следует из свойства (2) определения и того, что он положителен. В самом деле, если $\hat{d}$ – другой наибольший общий делитель, тогда $\hat{d} \mid d$, $d \mid \hat{d}$ и $\hat{d} = d$, поскольку оба положительны.

Теорема 4. *(существование* gcd*). Если a и b одновременно не равны нулю, то существуют целые числа x и y, такие что $\gcd(a, b) = ax + by$.*

Доказательство. Пусть d – наименьшее положительное целое число вида $ax + by$. Согласно принципу полной упорядоченности такое число, например $d = ax_0 + by_0$ существует. Тогда по построению выполняется свойство (2) определения наибольшего общего делителя, если $c \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid (ax_0 + by_0) = d$. Допустим, что свойство (1) не выполняется, и предположим, для определенности, что d не делит b. Тогда $b = d \cdot q + r$, $0 < r < d$, и, следовательно, $d > r = b - dq = b - (ax_0 + by_0)q = a(-qx_0) + b(1 - qy_0) > 0$, что противоречит минимальности d. □

Соотношение $\gcd(a, b) = ax + by$ носит название *соотношения Безу*. Теорема (**??**) не утверждает, что x и y определены однозначно, она лишь говорит о том, что наибольший общий делитель может быть выражен в таком виде.

Пример 5.

a	b	$\gcd(a, b)$	x	y
36	24	12	1	-1
-36	24	12	3	4
40	24	8	2	-3
40	24	8	5	-8
36	25	1	16	-23
36	25	1	-34	49

Пользуясь понятием наибольшего общего делителя, мы можем охарактеризовать целые решения линейных уравнений, от двух переменных (*линейных диофантовых уравнений*).

Теорема 6. Рассмотрим уравнение вида $ax + by = c$, в котором a и b не равны нулю одновременно, и пусть $d = \gcd(a, b)$. Тогда

1. уравнение разрешимо относительно x и y тогда и только тогда, когда $d \mid c$,
2. если x_0, y_0 – частное решение, то все решения имеют вид $x_0 - n(b/d)$, $y_0 + n(a/d)$ для всех n.

Доказательство. Поскольку $d \mid a$ и $d \mid b$ то $d \mid c$. Следовательно $c = d \cdot k$ для некоторого целого k. По теореме (**??**) существуют целые числа s, t, такие, что $d = as + bt$. Умножая это равенство на k, получим $c = dk = a(sk) + b(tk)$, откуда следует, что $x = sk$ и $y = tk$ удовлетворяют уравнению $ax + by = c$.

Для доказательства второй части, предположим $ax_0 + by_0 = c$, тогда $a(x_0 - n(b/d)) + b(y_0 + n(a/d)) = c$ для любого целого n, поскольку $d \mid a$, $d \mid b$, и следовательно $an(b/d) = bn(a/d)$. □

Пример 7. Уравнение $40x + 24y = 4$ неразрешимо, поскольку $\gcd(40, 24) = 8$ не делит 4.

Уравнение $36x + 25y = c$ разрешимо, поскольку $\gcd(40, 24) = 1$ делит любое число и его решения можно представить ввиде $x = (16 - 25n)c, y = (-23 + 36n)c$.

Определение 8. Два целых числа a и b называются взаимно простыми, если $\gcd(a, b) = 1$.

Согласно теореме (**??**) это равносильно существованию целых чисел s, t, таких, что $as + bt = 1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. Пусть a и b одновременно не равны нулю, тогда $a/\gcd(a, b)$ и $b/\gcd(a, b)$ взаимно просты.

Доказательство. По теореме (**??**) существуют целые числа s, t, такие, что $\gcd(a, b) = as + bt$. Разделив на $d = \gcd(a, b)$ получим $1 = (a/d)s + (b/d)t$, что влечет за собой $\gcd(a/d, b/d) = 1$. $\square$

Эта теорема дает обоснование для введения следующей процедуры S канонизации (задача вычисления единственного представления для эквивалентных объектов) рациональных чисел. Пусть

$$\mathrm{S}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a/\gcd(a, b)}{b/\gcd(a, b)}$$

тогда, поскольку $b \neq 0$, то наибольший общий делитель всегда определен и

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \mathrm{S}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{S}\left(\frac{c}{d}\right)$$

3.3 Алгоритм Евклида

Основой алгоритма Евклида служит следующий факт: если $d \mid a$ и $d \mid b$, то $d \mid (a - b \cdot q)$ для любого целого q. В частности, если выбрать в качестве $d = \gcd(a, b)$ и $q = a/b$, при $b \neq 0$, получим $\gcd(a, b) = \gcd(a, a - bq) = \gcd(a, a \bmod b)$. Если $b = 0$, то по определению наибольшего общего делителя имеем $\gcd(a, 0) = a$. В результате имеем следующий алгоритм:

```
def Euclid(a, b):
  assert a != 0 or b != 0
  while b != 0:
    a, b = b, a % b
  return a
```

Обоснованием окончания алгоритма служит тот факт, что во-время выполнения из $a \geq b$ следует $a > a \mod b$ по определению остатка от деления.

Для различных приложений очень важно уметь представлять наибольший общий делитель чисел a и b в виде соотношения Безу $\gcd(a, b) = ax + by$. Для этого можно воспользоваться алгоритмом Евклида поскольку остаток от деления, на каждом шаге алгоритма, можно представить в виде линейной комбинации делителя и делимого. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую последовательность

$$
\begin{array}{ll}
a_0 = a, & a_0 = ax_0 + by_0, \\
a_1 = b, & a_1 = ax_1 + by_1, \\
a_2 = a_0 - a_1 q_1, & a_2 = ax_2 + by_2, \\
\dots & \\
a_i = a_{i-2} - a_{i-1} q_{i-1}, & a_i = ax_i + by_i, \\
\dots & \\
a_k = a_{k-2} - a_{k-1} q_{k-1}, & a_k = ax_k + by_k, \\
0 = a_{k-1} - a_k q_k, & 0 = ax_{k+1} + by_{k+1}
\end{array}
$$

Очевидно, что $x_0 = 1, y_0 = 0$ и $x_1 = 0, y_1 = 1$. Сравнивая обе части на i-м шаге, имеем

$$
\begin{aligned}
ax_i + by_i &= a_{i-2} - a_{i-1} q_{i-1} = \\
&= (ax_{i-2} + by_{i-2}) - (ax_{i-1} + by_{i-1}) q_{i-1} = \\
&= a(x_{i-2} - x_{i-1} q_{i-1}) + b(y_{i-2}) - y_{i-1} q_{i-1}).
\end{aligned}
$$

В результате имеем следующий алгоритм называемый расширенным алгоритмом Евклида:

```
def EuclidExt(a, b):
  assert a != 0 or b != 0
  a0, a1, b0, b1 = 1, 0, 0, 1
  while b != 0:
    q, r = divmod(a, b)
    a, b = b, r
    a0, a1, b0, b1 = b0, b1, a0 - q*b0, a1 - q*b1
  return (a, a0, a1)
```

3.4 Непрерывные дроби

Алгоритм Евклида тесным образом связан с *непрерывными* или *цепными дробями*. Рассмотрим произвольную рациональную дробь, записанную в несократимом виде a_0/a_1. Применив к паре a_0, a_1 алгоритм Евклида получим

$$\begin{aligned}
&a_0 = a_1\,c_0 + a_2, && 0 < a_2 < a_1,\\
&a_1 = a_2\,c_1 + a_3, && 0 < a_3 < a_2,\\
&\dots\\
&a_{k-2} = a_{k-1}\,c_{k-2} + a_k, && 0 < a_k < a_{k-1},\\
&a_{k-1} = a_k\,c_{k-1}.
\end{aligned}$$

В результате получим следующие каноническое представление для рациональных дробей; если использовать условие $c_{k-1} > 1$ поскольку $a_k < a_{k-1}$

$$\frac{a_0}{a_1} = c_0 + /c_1, c_2, \dots, c_n/ = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \cfrac{1}{c_{n-1} + \cfrac{1}{c_n}}}}}. \tag{3.1}$$

Числа c_j называют *неполными частными*.

Определение 10. Полином, определяемые следующими правилами

$$Q_n(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0\\ c_1, & \text{при } n = 1\\ c_1\,Q_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + & \\ \qquad\qquad + Q_{n-2}(x_3, \dots, x_n) & \text{при } n > 0 \end{cases}$$

называются “континуантами” или Q-многочленами.

Нам также потребуются числа Фибоначчи определяемые по правилам:

$$\mathcal{F}_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1 \\ 1, & \text{при } n = 2 \\ \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} & \text{при } n > 2 \end{cases}$$

Следующая теорема нам потребуется при доказательстве теоремы Ламэ.

Теорема 11. Q-многочлены имеют следующие свойства:
1.

$$/c_1, c_2, \ldots, c_n/ = Q_{n-1}(c_2, \ldots, c_n)/Q_n(c_1, \ldots, c_n), \quad n \geq 1$$

2. Число мономов в Q-многочлене равно в точности $\mathcal{F}_{n+1}$ с коэффициентами равными 1
3.

$$\begin{aligned} &Q_n(c_1, \ldots, c_n)Q_n(c_2, \ldots, c_{n+1}) - \\ &\quad -Q_{n+1}(c_1, \ldots, c_{n+1})Q_{n-1}(c_2, \ldots, c_n) = (-1)^n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Доказательство. Все три свойства будут доказаны с использованием математической индукции.

1. Согласно $/c_1/ = 1/c_1$, это свойство верно для $n = 1$ и предположим его выполнение для $n = k$. Согласно определению непрерывных дробей и Q-многочленов будем иметь

$$\begin{aligned} /c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}/ &= \frac{1}{c_1 + /c_2, \ldots, c_{k+1}/} \\ &= \frac{1}{c_1 + Q_{k-1}(c_3, \ldots, c_{k+1})/Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1})} \\ &= \frac{Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1})}{c_1\, Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1}) + Q_{k-1}(c_3, \ldots, c_{k+1})} \\ &= Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1})/Q_{k+1}(c_1, \ldots, c_{k+1}). \end{aligned}$$

2. Согласно определению Q-многочленов число мономов при $n = 1$ равно $\mathcal{F}_1 = 1$ и $n = 2$ соответственно $\mathcal{F}_2 = 1$. Докажем, что из выполнения свойства при $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$. Согласно определению

$$Q_n(c_1, \ldots, c_{k+1}) = c_1 \, Q_k(c_2, \ldots, c_n) + Q_{k-1}(c_3, \ldots, c_n)$$

и поскольку полином $Q_{k-1}(c_3, \ldots, c_n)$ не зависит от c_1, то полином $Q_n(c_1, \ldots, c_{k+1})$ будет иметь коэффициентами при мономах 1 и их количество будет равно сумме мономов образующих его полиномов $\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{k-1} = \mathcal{F}_{k+1}$.

3. При $n = 1$ имеем $c_1 \, c_2 - (c_1 \, c_2 + 1) \cdot 1 = (-1)^1$. Докажем следование $n = k + 1$ из истинности свойства при $n = k$ используя определение Q-многочленов.

$$\begin{aligned}
&Q_{k+1}(c_1, \ldots, c_{k+1}) Q_{k+1}(c_2, \ldots, c_{k+2}) - \\
&\quad - Q_{k+2}(c_1, \ldots, c_{k+2}) Q_k(c_2, \ldots, c_k) = \\
&(c_1 \, Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1}) + Q_{k-1}(c_3, \ldots, c_{k+1})) Q_{k+1}(c_2, \ldots, c_{k+2}) - \\
&\quad - (c_1 \, Q_{k+1}(c_2, \ldots, c_{k+2}) + Q_k(c_3, \ldots, c_{k+2})) Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1}) = \\
&- Q_k(c_3, \ldots, c_{k+2}) Q_k(c_2, \ldots, c_{k+1}) + \\
&\quad + Q_{k-1}(c_3, \ldots, c_{k+1}) Q_{k+1}(c_2, \ldots, c_{k+2}) = (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

□

Согласно третьему свойству доказанной выше теоремы $Q_n(c_1, \ldots, c_n)$ и $Q_{n-1}(c_2, \ldots, c_n)$ взаимно просты. Следовательно любая дробь $b/a < 1$ может быть представлена в виде

$$\frac{b}{a} = \frac{Q_{n-1}(c_2, \ldots, c_n) \ \mathrm{gcd}(a, b)}{Q_n(c_1, \ldots, c_n) \ \mathrm{gcd}(a, b)} \tag{3.2}$$

Теперь возможно рассмотрение поведение алгоритма Евклида в “наихудшем случае”, другими словами дать верхнюю границу числа шагов деления.

3.5 Теорема Ламэ

Теорема 12. *(G. Lamé 1845.)* Пусть при $r \geq 1$ целые числа a и b, $0 < b < a$, такие, что алгоритм Евклида, примененный к a и b, требует в точности r шагов деления, и такие, что a есть наименьшее из возможных чисел, удовлетворяющих этим условиям. Тогда $a = \mathcal{F}_{r+2}$ и $b = \mathcal{F}_{r+1}$.

Доказательство. В силу (**??**) мы должны иметь для

$$b = Q_{r-1}(c_2, \dots, c_r) \gcd(a, b)$$

и

$$a = Q_r(c_1, \dots, c_r) \gcd(a, b)$$

. Поскольку согласно второму свойству теоремы **??** Q-многочлен состоит из мономов с коэффициентами равными 1, минимальное значение достигается тогда, когда $c_1 = 1, \dots, c_{r-1} = 1$, $c_r = 2$, $\gcd(a, b) = 1$. Используя определение Q-многочленов в результате получим для $r = 1$ $c_1 = 2$, $a = \mathcal{F}_3$ и $b = \mathcal{F}_2$, и следовательно для $r = k$ $a = \mathcal{F}_{k+2}$ и $b = \mathcal{F}_{k+1}$. □

Эта теорема явилась первым практическим применением последовательности Фибоначчи, с тех пор было дано много других применений чисел Фибоначчи к алгоритмам и к исследованию алгоритмов.

Для рассмотрения следствия этой теоремы нам понадобится понятие "золотого сечения". Пусть $a > b > 0$ две величины связанные соотношением

$$\phi = \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

откуда решая квадратное уравнение, выбирая корень для которого $a > b$, получим $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.61803\,39887\ldots$. Поскольку

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}}{\mathcal{F}_n} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n-1}}} = \phi$$

будем иметь следующую формулу для чисел Фибоначчи $\mathcal{F}_n \approx \left\lceil \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor$

Следствие 13. Если $0 < b < a$, то число шагов деления, необходимых алгоритма Евклида для обработки a, b не превышает $\lceil \log_\phi(\sqrt{5}\, b)) \rceil - 2$

Доказательство. Согласно теореме **??** максимальное число шагов r имеет место в случае, когда $a = \mathcal{F}_{r+2}$ и $b = \mathcal{F}_{r+1}$. В результате по формуле для чисел Фибоначчи будем иметь

$$b < \left\lceil \frac{\phi^{r+2}}{\sqrt{5}} \right\rceil$$

или $r < \lceil \log_\phi(\sqrt{5}\, b) \rceil - 2$. □

Заметим $\log_\phi(\sqrt{5}\, b) \approx 4.785 \log_{10} b + 1.672$ и возможна формулировка этого следствия использующая число десятичных цифр.

Как правило если существует одна оценка, то существуют много других не совпадающих с первой. Мы приведем несколько примеров:

Теорема 14. [?] Если $0 < b < a$, то число шагов деления, необходимых алгоритма Евклида для обработки a, b не превышает $(\log_\phi 2) \cdot \mathcal{F}_\beta(b) + 2$.

Теорема 15. *(С.А. Абрамов 1979.)* Пусть a, b – целые положительные числа, то число шагов деления, необходимых алгоритму Евклида для обработки a и b не превосходит $\lfloor \log_2 \max(a, b) \rfloor + 1$.

Теорема 16. *(E. Cesáro 1881.)* Если $a < b$ – случайно выбираемые целые числа, то вероятность того, что $\gcd(a, b) = 1$, равна $6/\pi^2$.

Согласно этой теореме в $6/\pi^2 \approx 61\%$ случаях наибольшим общем делителем является 1, поэтому для алгоритма Евклида актуальным остается оценка временной сложности в среднем.

4 Диаграммы UML

На рисунке ?? представлена диаграмма состояний построенная с помощью следующего кода на сайте `http://www.plantuml.com/plantuml/`.

```
[*] --> outbox
outbox -> отправка : С частотой 2 раза в сек.
отправка --> bounced : Известная ошибка,\nтребующая повторной\nотправки
отправка --> sent : Отправка без ошибок
отправка --> error : Неизвестная ошибка\nпри отправке
отправка --> overlimit : Превышен лимит\nотправок
overlimit --> [*]
sent --> [*]
error --> [*]
bounced --> outbox : После выдержки 1 минимальное
```

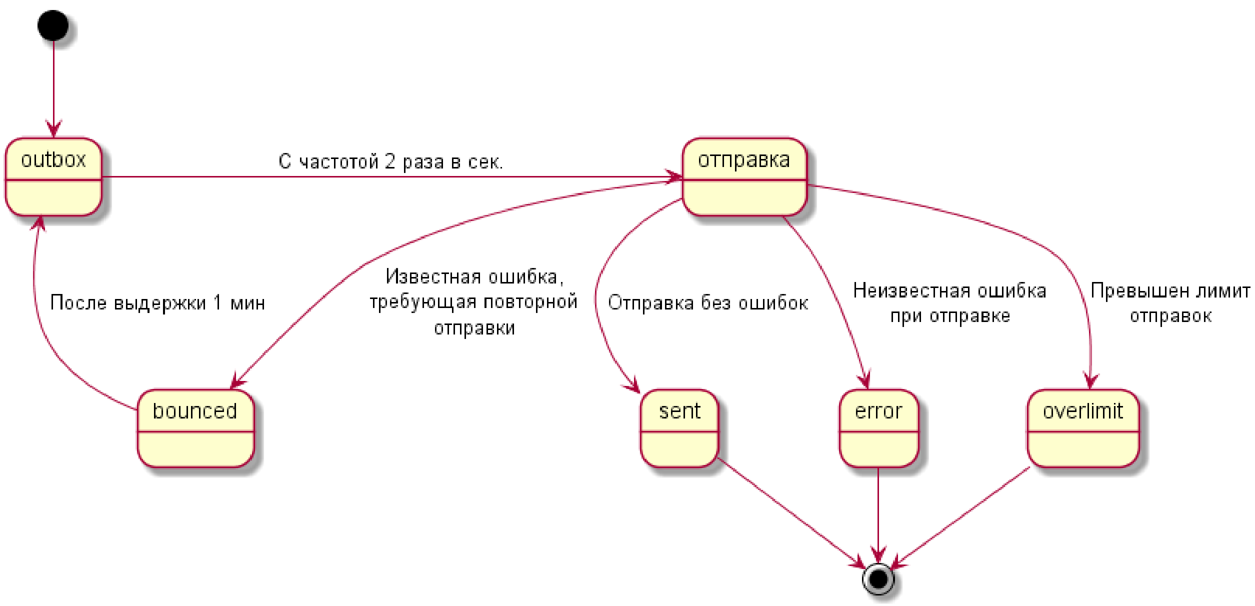

Рисунок 4.1 — Отправка sms через интернет ресурс

Примеры других типов диаграмм можно взять по адресу `http://plantuml.sourceforge.net/`. Например следующий ниже код строит рисунок ??.

```
class BaseClass

namespace net.dummy #DDDDDD
    .BaseClass <|-- Person
```

```
    Meeting o-- Person

    .BaseClass <|- Meeting

end namespace

namespace net.foo {
  net.dummy.Person  <|- Person
  .BaseClass <|-- Person

  net.dummy.Meeting o-- Person
}

BaseClass <|-- net.unused.Person
```

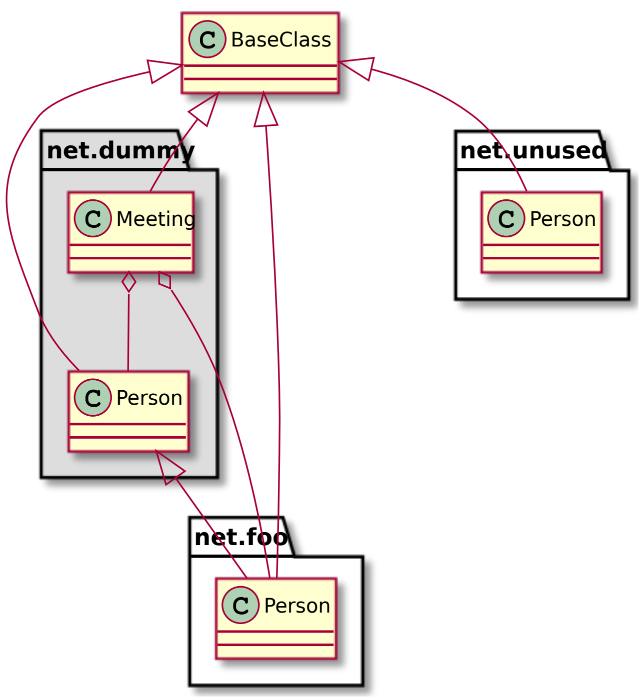

Рисунок 4.2 — Пример диаграммы классов

Для улучшения качества рисунка ?? по сравнению с рисунком ??, нужно его сохранить в формате SVG, а затем перевести в формат PDF с помощью бесплатного редактора векторной графики `http://inkscape.org/`.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заключение, как правило, должно содержать:

- основные результаты работы и краткие выводы по ним;
- оценку полноты решений поставленных задач;
- рекомендации по использованию результатов работы;
- результаты оценки эффективности предложенных решений и сопоставление с лучшими достижениями в данной области.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Исходные коды реализации алгоритма Евклида

```
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
Реализация алгоритмов наибольшего общего делителя
"""

def Euclid(a, b):
  assert a != 0 or b != 0
  while b != 0:
    a, b = b, a % b
  return a

def EuclidExt(a, b):
  assert a != 0 or b != 0
  a0, a1, b0, b1 = 1, 0, 0, 1
  while b != 0:
    q, r = divmod(a, b)
    a, b = b, r
    a0, a1, b0, b1 = b0, b1, a0 - q*b0, a1 - q*b1
  return (a, a0, a1)

if __name__ == '__main__':
  a, b = 1231231232*123, 123681726382*123
  print Euclid(a, b)
  g, x, y = EuclidExt(a, b)
  print a*x + b*y, "= %d*%d + %d*%d" % (a, x, b, y)
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Очень длинное название второго приложения

Таблица Б.1 — Описание входных файлов модели

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
Параметров &INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Продолжение таблицы ??

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс