Princípios de Controle Baseado em Dados
Controle Adaptativo

Prof. Wilkley Bezerra Correia, Dr

Departamento de Engenharia Elétrica

UFC

Introdução

Definições

Controle de sistemas dinâmicos depende da especificação de critérios de desempenho;

O projeto é direcionado para um determinado processo;

Necessário a obtenção de um modelo (MBC) a partir de técnicas já bem estabelecidas
Controle adaptativo MBC normalmente estabelece condições de uso de determinado algoritmo, a fim de garantir que os sinais permanecem limitados quando o tempo tende ao infinito (HOU; WANG, 2013)

UFC

Introdução

Definições

O desenvolvimento e a modernização de processos industriais no séc. XX levou à produção de uma grande quantidade de dados;

O uso desses dados tanto em aplicações *on-line* quanto *off-line* pode ser utilizado para a identificação de modelo e o projeto de controladores

Os dados podem ser usados diretamente para projetar as leis de controle se os processos levam a modelos imprecisos

UFC

Introdução

Definições

Dessa forma, a teoria de controle passa a apresentar duas formas diferentes de se realizar o projeto de controladores:

- MBC: controle preditivo, controle baseado em alocação de polos, realimentação de estados, entre outros;
- DDC: controladores cuja lei de controle é obtida diretamente a partir do conjunto de dados de um experimento ou ensaio.

UFC

Modelos

Lei de controle

O modelo de um sistema é dado por

$$y(k) = G(z)u(k) + v(k)$$

Cuja lei de controle tipicamente é dada por

$$u(k) = C(z, \rho)e(k)$$

em que,

$$\begin{aligned} e(k) &= r(k) - y(k); \\ v(k) &= H(z)\eta(k) \end{aligned}$$

Controlador

PID

O controle pertence a uma determinada classe (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011)

$$\mathcal{C} = \{C(z,\rho) : \rho \in \mathcal{P}\}$$

em que $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$. O controle PID é definido por:

$$C(z, k_p, k_i, k_d) = k_p + k_i \frac{z}{z-1} + k_d \frac{z-1}{z}$$

UFC

Controle VRFT

PID

ou seja,

$$C(z,\rho) = \rho^T C'(z)$$

sendo

$$\rho = \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} \qquad C'(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \\ \frac{z-1}{z} \end{bmatrix}$$

UFC

Controle VRFT

Lei de controle

Veja que a lei de controle pode ser expressa por

$$u(k) = \rho^T \phi(k)$$

sendo $\phi(k)$ um conjunto de regressores do sinal de erro $e(k)$

Controle VRFT

Lei de controle

O problema de projeto de controle data-driven, consiste em obter uma estrutura de controle, a partir de um vetor $C'(z,\rho)$ conhecido, para um processo com funções de transferência $G(z)$ e $H(z)$ desconhecidas, a fim de obter um critério de desempenho desejado em malha fechada.

O controlador procurado é obtido a partir da minimização de uma função custo do tipo

$$\min_{\rho} J(\rho)$$

UFC

Controle Data Driven

Definição de conjunto de dados

A técnica de projeto de controladores baseados e dados depende da definição dos conjuntos de dados:

$$
\begin{aligned}
U_0 &:= \begin{bmatrix} u_d(0) & u_d(\tau_s) & \dots & u_d((T-1)\tau_s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times T} \\
X_0 &:= \begin{bmatrix} x_d(0) & x_d(\tau_s) & \dots & x_d((T-1)\tau_s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times T} \\
X_1 &:= \begin{bmatrix} x_d(\tau_s) & x_d(2\tau_s) & \dots & x_d(T\tau_s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times T}
\end{aligned}
$$

UFC

Controle Data Driven

Definição de conjunto de dados

A matriz Hankel associada à entrada é dada por

$$U_{0,t,T-t+1} := \begin{bmatrix} u_d(0) & u_d(\tau_s) & \dots & u_d((T-t)\tau_s) \\ u_d(\tau_s) & u_d(\tau_s) & \dots & u_d((T-t+1)\tau_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_d((t-1)\tau_s) & u_d(t\tau_s) & \dots & u_d((T-1)\tau_s) \end{bmatrix}$$

Controle Data Driven

Definição de conjunto de dados

A matriz Hankel associada aos estados é dada por

$$X_{0,t,T-t+1} := \begin{bmatrix} x_d(0) & x_d(\tau_s) & \dots & x_d((T-t)\tau_s) \\ x_d(\tau_s) & x_d(\tau_s) & \dots & x_d((T-t+1)\tau_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d((t-1)\tau_s) & x_d(t\tau_s) & \dots & x_d((T-1)\tau_s) \end{bmatrix}$$

UFC

Controle Data Driven

Definição do sistema a partir dos dados

Considere a representação em espaço de estados de um sistema em tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

UFC

Controle Data Driven

Definição do sistema a partir dos dados

Na forma compacta de conjunto de dados, fica

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,T} \\ \hline X_{0,T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} = X_{1,T} \begin{bmatrix} U_{0,T} \\ \hline X_{0,T} \end{bmatrix}^{\dagger}$$

onde o sobrescrito † indica inversa à direita e $X_{1,T}$ é a segunda linha da matriz $X_0, t, T-t+1$

UFC

Controle Data Driven

Matriz pseudo-inversa

Considere uma matriz $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A matriz $X^\dagger$ é tal que

$$XX^\dagger = I_n,$$

e pode ser obtida a partir da pseudo-inversa de Moore-Penrose, cujas propriedades são

$$XX^\dagger X = X;$$
$$X^\dagger XX^\dagger = X^\dagger$$
$$\left(XX^\dagger\right)^T = XX^\dagger$$
$$\left(X^\dagger X\right)^T = X^\dagger X$$

UFC

Controle Data Driven

Definição do sistema a partir dos dados

Aplicando a relação de dados ao sistema pode-se escrever

$$x(k+1) = X_{1,T} \left[\begin{array}{c} U_{0,T} \\ \hline X_{0,T} \end{array}\right]^{\dagger} \begin{bmatrix} u(k) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

UFC

Controle Data Driven

Lemma fundamental

Lemma fundamental de dados (MARKOVSKY; WILLEMS; MOOR, 2005)

$$rank \begin{bmatrix} U_{0,t,T} \\ \hline X_{0,t,T} \end{bmatrix} = n + tm$$

UFC

Controle Data Driven

Persistência de excitação

Persistência de excitação: Se $U_{0,t,T}$ é persistentemente excitante de ordem $n+t$ então qualquer trajetória de entrada/saída do sistema $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ pode ser escrito como combinação linear das colunas de $X_{0,t,T}$, ou seja, a trajetória pode ser escrita na forma

$$\left[\begin{array}{c} U_{0,T} \\ \hline X_{0,T} \end{array}\right] g$$

sendo $g \in \mathbb{R}^{T-t+1}$ o vetor de pesos que pondera a combinação linear

UFC

Controle Data Driven

Malha fechada

Se a condição de persistência de excitação é assegurada, então é possível encontrar uma lei de controle $u = Kx$, que é combinação linear dos estados

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= (A + BK)x(k) \\
&= \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} x(k)
\end{aligned}
$$

UFC

Controle Data Driven

Malha fechada

Veja que se escrevermos a matriz do controlador em função das matrizes de dados tem-se

$$\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} U_{0,T} \\ \hline X_{0,T} \end{array}\right] G_K$$

sendo G_K uma variável matricial.

UFC

Controle Data Driven

Malha fechada

Teorema (PERSIS; TESI, 2019)

Se a condição de persistência de excitação é assegurada, então a lei de controle $u = Kx$ estabiliza o sistema em malha fechada com a representação

$$x(k+1) = X_{1,T} G_K x(k)$$

tal que

$$\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{0,t,T} \\ \hline X_{0,t,T} \end{bmatrix} G_K$$

Controle Data Driven

Malha fechada

Qualquer matriz Q que satisfaz à LMI

$$\begin{bmatrix} X_{0,T}Q & X_{1,T}Q \\ * & X_{0,T}Q \end{bmatrix} \prec 0$$

e à restrição

$$X_{0,T}Q \succ 0$$

leva à lei de controle $u = Kx$ sendo

$$K = U_{0,T}Q\left(X_{0,T}Q\right)^{-1}$$

UFC

Controle Data Driven

Estabilização por realimentação de estados

Considere o conjunto de sistemas com matrizes (A, B) tais que estes sistemas são estabilizados por um certo ganho K

$$\Sigma_K := \{(A, B) | A + BK \text{ é estável}\}$$

Por outro lado, considere o conjunto de dados $\Sigma_{i/s}$ de entrada e estados (U_0, X). Os dados são ditos *informativos para identificação* se

$$\Sigma_{i/s} = \{(A, B)\}$$

UFC

Controle Data Driven

Estabilização por realimentação de estados

Teorema (WAARDE et al., 2020)

Os dados (U_0, X) são informativos para a estabilização por realimentação de estados se e somente se a matriz X_0 tem posto completo e existe sua inversa pela direita $X_0^\dagger$ tal que $X_1 X_0^\dagger$ é estável.

Além disso, se existe K tal que $\Sigma_{i/s} \subseteq \Sigma_K$, então $K = U_0 X_0^\dagger$

Desvantagem: Não é claro como encontrar $X_0^\dagger$ tal que $X_1 X_0^\dagger$ é estável, já que existem diversas inversas à direita.

UFC

Controle Data Driven

Estabilização por realimentação de estados

Teorema (WAARDE et al., 2020)

Os dados (U_0, X) são informativos para a estabilização por realimentação de estados se e somente se existe a matriz $\Theta \in \mathbb{R}^{T \times n}$ que satisfaz

$$\begin{bmatrix} X_0\Theta & X_1\Theta \\ * & X_0\Theta \end{bmatrix} \succ 0$$

$$X_0\Theta = (X_0\Theta)^T$$

Além disso, se existe K tal que $\Sigma_{i/s} \subseteq \Sigma_K$, então

$$\mathbf{K} = \mathbf{U_0\Theta(U_0\Theta)^{-1}}$$

UFC

Referências

BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. *Data-driven controller design: the H2 approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

HOU, Z.-S.; WANG, Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective. *Information Sciences*, Elsevier, v. 235, p. 3–35, 2013.

MARKOVSKY, I.; WILLEMS, J. C.; MOOR, B. D. State representations from finite time series. In: IEEE. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 2005. p. 832–835.

PERSIS, C. D.; TESI, P. Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality, and robustness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 65, n. 3, p. 909–924, 2019.

WAARDE, H. J. V. et al. Data informativity: A new perspective on data-driven analysis and control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 65, n. 11, p.

UFC