

问题

用 $\langle M \rangle$ 表示图灵机 M 的编码，记语言 $L = \{\langle M \rangle : M \text{ 是图灵机, 并且 } L(M) = \Sigma^*\}$ ，判定语言 L 是否是递归可枚举语言。

解答

(1) 语言 $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle : M \text{ 是图灵机, 并且 } w \in L(M)\}$ 是递归可枚举语言。

为了证明语言 A_{TM} 是递归可枚举语言，需要构造一个接受该语言的图灵机。实际上，通用图灵机 M_u 接受语言 A_{TM} 。

对于通用图灵机 M_u ，输入符号串为 $\langle M, w \rangle$ ，其中 M 是一个(确定型)图灵机， w 是 M 字母表上的符号串，通用图灵机 M_u 模拟图灵机 M 作用在 w 上的动作：

- 如果图灵机 M 接受符号串 w ，通用图灵机 M_u 进入终止状态，接受符号串 $\langle M, w \rangle$ ；
- 如果图灵机 M 拒绝符号串 w ，通用图灵机 M_u 进入非终止状态，拒绝符号串 $\langle M, w \rangle$ 。

如果图灵机 M 作用在 w 上进入循环，通用图灵机 M_u 作用在 $\langle M, w \rangle$ 上也进入循环。因此，通用图灵机 M_u 接受语言 A_{TM} ，即语言 A_{TM} 是递归可枚举语言。

(2) 语言 A_{TM} 不是递归语言，即 $\overline{A_{TM}} = \{\langle M, w \rangle : M \text{ 是图灵机, 并且 } w \text{ 不属于语言 } L(M)\}$ 不是递归可枚举语言。

用反证法，假设语言 A_{TM} 是递归语言，则语言 A_{TM} 存在成员资格判定算法，即存在图灵机 H ，判定符号串 $\langle M, w \rangle$ 是否在语言 A_{TM} 中。我们由图灵机 H 构造如下图灵判定器 D ：

图灵机 D 的输入是符号串 w 。图灵机 D 将符号串 w 复制一次，使得存储带上为 $\langle w, w \rangle$ 。如果 $\langle w, w \rangle \in L(H)$ (这里将第一个 w 视为一个图灵机的编码)，图灵机 D 拒绝符号串 w ，否则图灵机 D 接受符号串 w 。

由于图灵机 H 不会循环(H 是判定算法)，图灵机 D 可以把 H 作为子程序使用。下面考虑图灵机 D 在输入符号串 $w = \langle D \rangle$ 的动作：

- 如果 $\langle \langle D \rangle, \langle D \rangle \rangle$ 在语言 $L(H)$ 中，则图灵机 D 拒绝符号串 $\langle D \rangle$ ，即符号串 $\langle D \rangle$ 不在语言 $L(D)$ 中，但是 $\langle \langle D \rangle, \langle D \rangle \rangle$ 在语言 $L(H)$ 中，图灵机 D 接受符号串 $\langle D \rangle$ ，即符号串 $\langle D \rangle$ 在语言 $L(D)$ 中，矛盾；
- 如果 $\langle \langle D \rangle, \langle D \rangle \rangle$ 不在语言 $L(H)$ 中，则图灵机 D 接受符号串 $\langle D \rangle$ ，即符号串 $\langle D \rangle$ 在语言 $L(D)$ 中，但是 $\langle \langle D \rangle, \langle D \rangle \rangle$ 不在语言 $L(H)$ 中，图灵机 D 不接受符号串 $\langle D \rangle$ ，即符号串 $\langle D \rangle$ 不在语言 $L(D)$ 中，矛盾。

从而有假设错误，即语言 A_{TM} 不是递归语言。

(3) 语言 $U_{TM} = \{\langle M \rangle : M \text{ 是图灵机, 并且 } L(M) = \Sigma^*\}$ 不是递归可枚举语言。

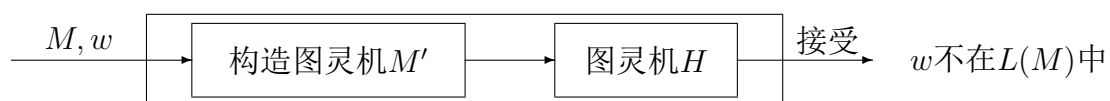
我们先构造如下图灵机 M' ，其输入是符号串 w' ：

- 图灵机 M' 记住 $j = |w'|$ ，然后用符号串 w 重写 w' ；

- 图灵机 M' 模拟图灵机 M 作用在 w 上的动作，如果在 j 步内， M 接受 w ，则图灵机 M' 拒绝符号串 w ；
- 如果在 j 步内， M 没有接受 w ，则图灵机 M' 接受符号串 w 。

图灵机 M' 不会进入循环状态。如果符号串 w 在语言 $L(M)$ 中，则存在一个整数 j ，使得图灵机 M 在 j 步内接受 w ，从而语言 $L(M')$ 包含所有长度小于 j 的符号串；如果符号串 w 不在语言 $L(M)$ 中，则不存在这样的整数 j ，即 $L(M') = \Sigma^*$ 。 $(\overline{A_{TM}} \leq_m U_{TM})$ 因此有语言 U_{TM} 不是递归可枚举语言。

注：用反证法证明。如果语言 U_{TM} 是递归可枚举语言，其可以被图灵机 H 接受，构造如下图灵机：



易知我们构造的图灵机可以识别语言 $\overline{A_{TM}}$ ，但是语言 $\overline{A_{TM}}$ 不是递归可枚举语言，矛盾。因此有语言 U_{TM} 不是递归可枚举语言。