



上下文无关语  
言的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语  
言的性质

# 第八章

## 上下文无关语言的性质

姚 刚

中国科学院信息工程研究所



# 目录

上下文无关语  
言的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语  
言的性质

① 两个泵引理

② 上下文无关语言的性质



# 两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

在判定一个给定的语言 $L$ 是否为正则语言的时候，一个有效的方法是使用泵引理。对于上下文无关语言，也有类似的泵引理，这里介绍两个：

- 针对一般性上下文无关语言的；
- 针对一种受限形式的上下文无关语言。



# 上下文无关语言的泵引理

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

## 定理

设 $L$ 是一个无穷的上下文无关语言，  
则存在一个正整数 $m$ ，使得对于任意  
满足 $|w| \geq m$ 的 $w \in L$ ，都能分解  
为 $w = uvxyz$ ，其中 $|vxy| \leq m$ 且 $|vy| \geq 1$ ，  
则对于所有的 $i = 0, 1, 2, \dots$ ，满足  
 $uv^i xy^i z \in L$ 。



# 例子

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

- 证明语言  $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$  不是上下文无关语言。
- 证明语言  $L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$  不是上下文无关语言。
- 证明语言  $L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$  不是上下文无关语言。
- 证明语言  $L = \{a^n b^j : n = j^2\}$  不是上下文无关语言。



# 线性语言

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

## 定义 (线性语言)

对于一个上下文无关语言 $L$ ，如果存在一个线性上下文无关文法 $G$ ，满足 $L = L(G)$ ，则称该语言为线性语言。

- ① 语言 $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ 是线性语言。
- ② 文法 $S \rightarrow SS | \varepsilon | aSb | bSa$ 不是线性文法，其给出的语言 $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$ 不一定是线性语言。



# 线性语言的泵引理

上下文无关语  
言的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语  
言的性质

## 定理

设 $L$ 是一个无穷的线性语言，则存在一个正整数 $m$ ，使得对于任意满足 $|w| \geq m$ 的 $w \in L$ ，都能分解为 $w = uvxyz$ ，其中 $|uvyz| \leq m$ 且 $|vy| \geq 1$ ，则对于所有的 $i = 0, 1, 2, \dots$ ，满足 $uv^i xy^i z \in L$ 。

证明语言 $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$ 不是线性语言。



# 上下文无关语言

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

上下文无关语言 $L$ 在形式语言体系中占有重要的作用。

- 上下文无关语言包含了一些受限制的语言；
- 下文无关语言是更大语言族的一个特例。

上为了理清不同语言族之间的关系，以及展现它们的相似性与区别，我们需要研究不同语言族的特性。





# 上下文无关语言的性质

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

我们已经了解了正则语言的运算封闭性，以及判定正则语言族性质的算法。对于上下文无关语言，我们需要研究同样的问题，但是相对要困难一些。

- 在正则语言中成立的性质，在上下文无关语言中并不一定成立，即使成立，这些性质的证明也相对复杂；
- 在上下文无关语言中，仍然有一些直观上简单而又重要的问题，目前无法解决。



# 上下文无关语言的封闭性质

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

## 定理

上下文无关语言族对并运算、连接运算和闭包运算是封闭的。

## 定理

上下文无关语言族对交运算和补运算是不封闭的。

## 定理

设 $L_1$ 是一个上下文无关语言， $L_2$ 是一个正则语言，则 $L_1 \cap L_2$ 是一个上下文无关语言。



# 例子

上下文无关语  
言的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语  
言的性质

- 证明语言  $L = \{a^n b^n : n \geq 0, n \neq 100\}$  是一个上下文无关语言。
- 证明语言  $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$  不是一个上下文无关语言。



# 上下文无关语言的可判定性

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

## 定理

给定一个上下文无关文法  $G = (V, T, S, P)$ , 存在一个判定  $L(G)$  是否为空的算法。

## 定理

给定一个上下文无关文法  $G = (V, T, S, P)$ , 存在一个判定  $L(G)$  是否有穷的算法。



# 上下文无关语言是否相同

上下文无关语言  
的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语言  
的性质

上下文无关语言中其它的简单性质却不这么容易处理，比如：我们希望找到一个算法，判定两个上下文无关语言是否相同，但是，事实上不存在这样的算法。



上下文无关语  
言的性质

姚刚

目录

两个泵引理

上下文无关语  
言的性质

# 谢谢！

主 讲 人： 姚 刚

电子邮箱： [yaogang@iie.ac.cn](mailto:yaogang@iie.ac.cn)