



计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

# 第一章 计算理论导引

姚 刚

中国科学院信息工程研究所



# 目录

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

- ① 数学预备知识和表示
- ② 三个基本概念
- ③ 课程内容简介



# 集合(set)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

集合是元素的组合，除去成员资格关系，无其它结构。

用  $x \in S$  表示元素  $x$  是集合  $S$  的成员，  
用  $x \notin S$  表示元素  $x$  不是集合  $S$  中的成员。  
集合在大括号中列出它的元素，  
如  $S = \{0, 1, 2\}$ 。



# 集合的运算

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

并(union):

$$S_1 \cup S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ 或者 } x \in S_2\};$$

交(intersection):

$$S_1 \cap S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ 并且 } x \in S_2\};$$

差(difference):

$$S_1 - S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ 并且 } x \notin S_2\}。$$



# 集合的补(complementation)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

集合 $S$ 的补集表示为 $\overline{S}$ ，它包含所有不在集合 $S$ 中的元素。

我们定义全集(universal set)  $U$ ，在给定全集 $U$ 的情况下，有补集 $\overline{S} = \{x : x \in U \text{ 并且 } x \notin S\}$ 。



# 空集(empty set, null set)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

没有元素的集合称为空集，表示为 $\emptyset$ 。

$$S \cup \emptyset = S - \emptyset = S, \quad S \cap \emptyset = \emptyset, \\ \overline{\emptyset} = U, \quad \overline{\overline{S}} = S.$$

德摩根定律(DeMorgan's Laws):

$$\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}, \quad \overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}.$$



# 子集(subset)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果集合 $S_1$ 的元素都是集合 $S$ 的元素，那么称集合 $S_1$ 是集合 $S$ 的子集，记为 $S_1 \subseteq S$ 。

如果 $S_1 \subseteq S$ ，并且 $S$ 中包含有不属于 $S_1$ 中的元素，那么称集合 $S_1$ 是集合 $S$ 的真子集(proper subset)，记为 $S_1 \subset S$ 。



# 不相交和有限集

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果集合 $S_1$ 和 $S_2$ 没有共同的元素，即 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ，那么这两个集合称为不相交(disjoint)。

如果集合 $S$ 包含有限个元素，那么这个集合是有限的，否则，这个集合是无限的。一个有限集合的大小指的是它包含的元素个数，记为 $|S|$ 。





# 幂集和笛卡儿积

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一个给定的集合通常有很多子集。集合 $S$ 的所有子集组成的集合称为集合 $S$ 的幂集(power set), 记为 $2^S$ 。

如果一个集合的元素是其他集合元素的有序排列, 这个集合称为其他集合的笛卡儿积(Cartesian product)。一般有

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in S_i\}。$$



# 函数(function)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

函数是建立一个集合中的元素和另一个集合中唯一的一个元素之间对应关系的规则。

如果用 $f$ 表示一个函数，那么第一个集合称为函数的定义域(domain)，第二个集合称为函数的值域(range)。我们用 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 表示函数 $f$ 的定义域是集合 $S_1$ 的子集，值域是集合 $S_2$ 的子集。



# 全函数

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

设  $f : S_1 \rightarrow S_2$  是一个函数。如果函数  $f$  的定义域就是集合  $S_1$  本身，我们就称函数  $f$  是集合  $S_1$  上的全函数 (total function)，否则，称函数  $f$  是集合  $S_1$  上的部分函数 (partial function)。



# 函数的变化率

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 的定义域是正整数的子集。如果存在一个正整数 $c$ 满足：对于所有的 $n$ ，有 $|f(n)| \leq c|g(n)|$ ，那么我们就称 $g$ 是 $f$ 的最大阶(order at most)，记作 $f(n) = O(g(n))$ 。

如果 $|f(n)| \geq c|g(n)|$ ，那么我们就称 $g$ 是 $f$ 的最小阶(order at least)，记作 $f(n) = \Omega(g(n))$ 。



# 函数的等价

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果存在常数 $c_1$ 和 $c_2$ , 使得

$$c_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2|g(n)| ,$$

则称 $f$ 和 $g$ 等价(same order of magnitude),  
记作 $f(n) = \Theta(g(n))$ 。



# 关系 (relation)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一些函数用有序对的集合  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$  来表示, 使用这样的集合来定义函数, 任意  $x_i$  至多出现在有序对的第一个元素处一次。如果不满足这一点, 这个集合称为关系。

关系比函数的概念更广泛, 在函数中, 定义域中的每一个元素在值域中都恰好有一个关联元素; 在关系中, 可能有多 个值域中的元素与之关联。



# 等价(equivalence)关系

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果有有序对 $(x, y)$ 满足下面三条规则，  
则该关系称为是**等价关系**，记作

$x \equiv y$ :

- ① 自反性：对所有的 $x$ ，有 $x \equiv x$ ；
- ② 对称性：对所有的 $x$ 和 $y$ ，如果 $x \equiv y$ ，有 $y \equiv x$ ；
- ③ 传递性：对所有的 $x$ ， $y$ 和 $z$ ，如果 $x \equiv y$ ， $y \equiv z$ ，则有 $x \equiv z$ 。



# 图(graph)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

图包含有两个有限集合，顶点(vertex)集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和边(edge)集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。每条边由顶点集 $V$ 中的一对顶点构成。

例如 $e_i = (v_j, v_k)$ 是一条从顶点 $v_j$ 到 $v_k$ 的边。





# 有向图(digraph)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果我们认为边 $e_i$ 对于顶点 $v_j$ 而言是输出边，对于顶点 $v_k$ 而言是输入边，那么，这种构造的图实际上是有向图。因为我们把每条边都关联了一个方向(从 $v_j$ 到 $v_k$ )。

我们也可以给图加上标记，这个标记可以是名字，或者是和图的部分相关联的其它信息。顶点和边也可以加上标记。



# 通道(walk)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一个边的序列 $(v_i, v_j), (v_j, v_k), \dots, (v_m, v_n)$ 称为从 $v_i$ 到 $v_n$ 的通道。通道的长度指的是从起点到终点经过的边的数目。

没有重复边的通道称为路径(path)。没有重复顶点的路径称为简单(simple)路径。



# 回路(cycle)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一个从顶点 $v_i$ 出发，又回到该顶点的无重复边的通道称为以 $v_i$ 为初始点(base)的回路。如果回路中除了作为初始点的顶点以外，没有重复的顶点，这个回路是简单的。

一条从某个顶点到它自身的边称为环(loop)。



# 树(tree)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

树是一个没有回路的有向图。在这个图中，有一个唯一的顶点，称为根结点(root)。从根结点到任何一个其它顶点只有唯一的一条路径。根结点没有输入边。在树中存在一些没有输出边的顶点，这些顶点称为树的叶结点(leave)。

如果从顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 存在一条边，那么 $v_i$ 就是 $v_j$ 的父结点(parvent)， $v_j$ 是 $v_i$ 的子结点(child)。



# 层数(level)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

每个结点的层数指的是从根结点到该结点的路径的边数。

树的高度(height)指的是所有结点的最大层数。

如果我们把每层的结点和一定的顺序相联系，这种情况的树，称为顺序树(ordered tree)。



# 归纳证明(proof by induction)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

归纳证明是根据一些特殊例子的正确性来推出更多命题的正确性的方法。假设我们要证明命题序列 $P_1, P_2, \dots$ 是正确的。如果我们能够证明下列条件成立：(1) 对于某个 $k \geq 1$ ，我们已知 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 是正确的；(2) 对于任何 $n \geq k$ ， $P_1, P_2, \dots, P_n$ 正确都可以推出 $P_{n+1}$ 正确，那么我们就可以证明这个序列中的每一个命题都是正确的。



# 归纳证明

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

开始的这些命题 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 是归纳的基础(basis)。从 $P_n$ 到 $P_{n+1}$ 的步骤之间的联系是归纳步骤(inductive step)。使用 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是正确的归纳假设(inductive assumption), 使得归纳步骤变得更加容易。

二元树指的是不存在父结点有两个以上的子结点的树。证明：高度为 $n$ 的二元树至多有 $2^n$ 个叶结点。



# 反证法(proof by contradiction)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

假设我们要证明命题 $P$ 是正确的。我们就先假定在某一时刻，命题 $P$ 是错误的，然后看通过这个假定会得出什么样的结论。

如果我们获得了一个已知是错误的结论，那么，我们就会怀疑最初的假定，从而证明命题 $P$ 一定是正确的。





# 例子

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一个有理数可以表示为两个正整数 $n$ 和 $m$ 的比，并且这两个正整数没有大于1的公共因子。如果某个数是实数，但不是有理数，我们称之为无理数。

证明： $\sqrt{2}$ 是无理数。



# 符号串(string)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

我们先给出一个非空有限的符号集合 $\Sigma$ , 称为字母表(alphabet)。使用多个符号可以构成符号串, 这个符号串是字母表中符号的有穷序列。

我们一般用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示 $\Sigma$ 中的元素, 使用 $u, v, w, \dots$ 来表示符号串的名字。例如用 $w = aba$ 来表示名为 $w$ 的符号串, 它的值为 $aba$ 。



# 连接和逆

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果  $w = a_1a_2 \cdots a_n$ ,  $v = b_1b_2 \cdots b_m$ 。  
符号  $w$  和  $v$  的连接(concatenation)是把  $v$  添加到  $w$  的右端。我们用  $wv$  表示  $w$  和  $v$  的连接, 有  $wv = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_m$ 。

符号串的逆(reverse)是把符号串中的符号按照相反的顺序列出。符号串  $w$  的逆用  $w^R$  来表示, 有  $w^R = a_n \cdots a_2a_1$ 。



# 空串(empty string)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

空串中没有任何符号，用 $\varepsilon$ 表示。

符号串 $w$ 的长度(length)，记为 $|w|$ ，指的是符号串 $w$ 中包含的符号个数。

对于所有的符号串 $w$ ，有 $w\varepsilon = \varepsilon w = w$ ， $|\varepsilon| = 0$ 。



# 子串(substring)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

符号串 $w$ 中任何连续符号构成的符号串称为 $w$ 的子串。

如果 $w = uv$ ，那么子串 $u$ 称为 $w$ 的前缀(prefix)，子串 $v$ 称为 $w$ 的后缀(suffix)。

如果 $u$ 和 $v$ 都是符号串，那么它们的连接的长度是它们各自长度之和，即

$$|uv| = |u| + |v|。$$



# $\Sigma^*$ 和 $\Sigma^+$

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果 $w$ 是符号串，那么 $w^n$ 表示重复 $w$ 这个符号串 $n$ 次。我们定义：对于所有的 $w$ ，都有 $w^0 = \varepsilon$ 。

如果 $\Sigma$ 是字母表，那么 $\Sigma^*$ 表示连接 $\Sigma$ 中的零个或者多个符号获得的所有符号串的集合。集合 $\Sigma^*$ 总是包含 $\varepsilon$ ，为了把空串排除在外，定义 $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$ 。



# 语言(language)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一种语言通常定义为  $\Sigma^*$  上的子集。

一种语言  $L$  中的一个符号串称为这个语言  $L$  的一个句子(sentence)。字母表  $\Sigma$  上的符号串的任意集合都可以看成是一种语言。



# 语言的运算

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

语言是集合，可以定义两种语言的并、交和差。

在全集 $\Sigma^*$ 上定义语言 $L$ 的补集为 $\overline{L} = \Sigma^* - L$ 。

一种语言的逆指的是所有的符号串的逆所构成的集合，即 $L^R = \{w^R : w \in L\}$ 。





# 语言的连接

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

两种语言  $L_1$  和  $L_2$  的连接指的是  $L_1$  中的任意元素和  $L_2$  中的任意元素通过连接形成的所有符号串的集合。具体表示为  $L_1 L_2 = \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$ 。

我们定义  $L^n$  为  $L$  自身连接  $n$  次，特殊地，对任意语言  $L$ ，都有  $L^0 = \{\varepsilon\}$ ， $L^1 = L$ 。



# 闭包

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一种语言  $L$  的星闭包 (star-closure) 定义为  
$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots。$$

一种语言  $L$  的正闭包 (positive closure) 定义为  
$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots。$$



# 例子

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

设  $\Sigma = \{a, b\}$ , 则  $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$ 。

$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$  是一个语言,  
 $L^2 = \{a^n b^n a^m b^m : n \geq 0, m \geq 0\}$ ,  
 $L^R = \{b^n a^n : n \geq 0\}$ 。



# 文法(grammar)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

## 定义(文法)

文法 $G$ 是一个四元组 $G = (V, T, S, P)$ , 其中 $V$ 是对象的有限集合, 称为变量(*variable*),  $T$ 是对象的有限集合, 称为终结符(*terminal symbol*),  $S \in V$ 是一个特殊的符号, 称为开始符(*start variable*),  $P$ 是产生式(*production*)的有限集合。如果不特殊声明,  $V$ 和 $T$ 是不相交的非空集合。



# 产生式

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

产生式规则是文法的核心，他们指出文法如何把一个符号串转化为另一个符号串。通过这个过程，产生式规则定义了一个和这个文法相关的语言。

假设产生式规则是按照  $x \rightarrow y$  的形式表示，这里  $x \in (V \cup T)^+$ ， $y \in (V \cup T)^*$ 。



# 推导(derive)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果一个符号串 $w$ 可以写成 $w = uxv$ , 我们就说产生式 $x \rightarrow y$ 可以应用到这个符号串中, 我们可以用 $y$ 替换 $x$ , 由此获得一个新的符号串 $z = uyv$ 。

这个过程可以记为 $w \Rightarrow z$ , 这时我们称 $w$ 推导出 $z$ , 或者称 $z$ 由 $w$ 推导出。



# 推导

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

应用文法产生式，我们可以以任意顺序推导出连续的符号串。

如果  $w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n$ ，我们就称  $w_1$  推导出  $w_n$ ，并记为  $w_1 \xRightarrow{*} w_n$ 。 $*$ 表示从  $w_1$  推导出  $w_n$  经过没有指定数量的步骤(包括零步)。因此， $w \xRightarrow{*} w$  总是正确的。



# 文法生成的语言

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

以不同的顺序应用产生式规则，一个给定的文法可以生成许多符号串，其中，  
所有仅有终结符构成的符号串的集合就是这个文法定义或生成的语言。

定义 (文法生成的语言)

设  $G = (V, T, S, P)$  是一个文法，那么  $L(G) = \{w \in T^* : S \xRightarrow{*} w\}$  就是文法  $G$  生成的语言。





# 文法生成的语言

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

## 定义

如果  $w \in L(G)$ , 那么序列  $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n \Rightarrow w$  就是句子  $w$  的一个推导 (*derivation*), 包含变量和终结符的符号串  $S, w_1, w_2, \cdots, w_n$  称为推导的句型 (*sentence form*)。

设  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ , 其中  $P$  定义为  $S \rightarrow \varepsilon$  和  $S \rightarrow aSb$ , 则  $L(G) = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ 。



# 语言由文法生成

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

为了证明某个语言  $L$  是由文法  $G$  生成的，我们必须证明：

- ① 每个  $w \in L$  都可以使用  $G$  中的产生式由  $S$  推导出；
- ② 每个这样推导出的符号串都是语言  $L$  中的句子。



# 例子

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

给出生成语言  $L(G) = \{a^n b^{n+1} : n \geq 0\}$  的一个文法。

设  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $n_a(w)$  和  $n_b(w)$  分别表示符号串  $w$  中  $a$  和  $b$  的个数。

文法  $G$  的产生式定义为  $S \rightarrow SS$ ,  $S \rightarrow \varepsilon$ ,  $S \rightarrow aSb$  和  $S \rightarrow bSa$ , 则它生成的语言是  $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$ 。



# 等价(equivalent)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

一个语言可以由多个文法生成。尽管这些文法是有区别的，但是它们在某种程度上是等价的。

## 定义

如果两个文法 $G_1$ 和 $G_2$ 产生相同的语言，即 $L(G_1) = L(G_2)$ ，我们就称这两种文法是等价的。



# 自动机(automata)

计算理论导引

姚刚

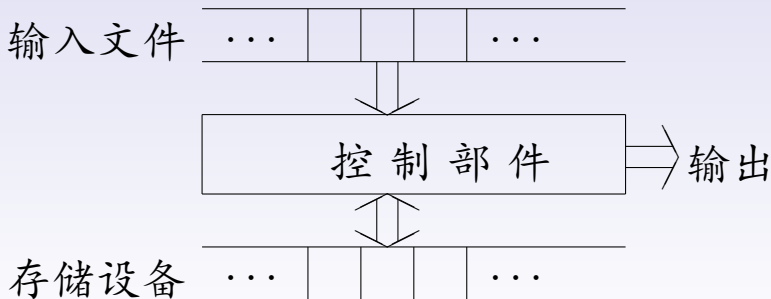
目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

自动机是数字计算机的抽象模型，包含一些本质特征。





# 输入输出

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

自动机有读入装置，一般假设输入是字母表上的一个符号串，将其写在输入文件(input file)上。自动机只能读入输入文件，不能修改。输入文件可以分成若干个单元格，每个单元存放一个符号。读入装置从左到右读入输入文件，一次读入一个符号。读入装置可以识别输入串的尾部。

自动机可以生成某种形式的输出。



# 存储设备和控制部件

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

自动机有临时存储(storage)设备, 其包含无限个单元, 每个单元存放字母表上的一个符号(不一定是输入字母表上的符号)。自动机可以读入存储单元的内容, 并可以修改。

自动机有控制部件(control unit), 它可以处于有限个内部状态(internal state)中的任何一个上, 并且按照某个指定的方式改变状态。



# 转移函数(transition function)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

自动机是在离散时间框架上操作的。在任意给定的时间上，控制部件处于某个内部状态，读入装置正在搜索输入文件上的一个特定符号。下一时刻，控制部件会出现在哪一个内部状态上由下一状态(next-state)或转移函数决定。转移函数根据当时的状态、当前读入的符号和临时存储空间中的当前信息，来决定下一个状态。





# 格局(configuration)

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

从一个时间间隔向下一个时间间隔转移的过程中，自动机会产生输出，或者改变临时存储空间中的信息。

格局这个术语是控制部件、输入文件和临时存储空间的某一特定状态。自动机从一个格局到另一个格局的转换称为一个迁移(mover)。



# 确定型自动机

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

确定型自动机(deterministic automata)指的是根据当前的格局，自动机的每一步迁移都是唯一确定的。如果我们知道内部状态、输入和临时存储空间的内容，我们就可以准确地预测自动机的下一步行为。

非确定型自动机(nondeterministic automata)指的是，在每一个格局上，自动机有几个可能的迁移。因此，我们只能得到一个可能行为的预测集合。



# 接受器和转换器

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

如果一个自动机的输出响应仅仅限定在简单的“是”和“否”之间的话，这个自动机就是接受器(accepter)。提供一个输入串，接受器要么接受它，要么拒绝它。

一个更为通用的自动机，能够输出和输入相同长度的符号，这种自动机称为转换器(transducer)。



# 有限自动机

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

一个有限自动机 $M$ 可以用一个五元组 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 表示。其中状态是一个有限集合。

确定型有限自动机，当其处于状态 $q$ ，注视输入字母 $a$ ，机器的控制器右移一格，状态转换为 $p$ 。非确定型有限自动机，当其处于状态 $q$ ，注视输入字母 $a$ ，机器的控制器右移一格，状态转换为一个可能状态集合中的一个状态 $p$ 。



# 正则语言

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

对于每个非确定型有限自动机，都可以构造一个与之等价的确定型有限自动机。

设 $G$ 是一个文法，如果它的产生式都有形式 $A \rightarrow a$ 或 $A \rightarrow aB$  (或者有形式 $A \rightarrow a$ 或 $A \rightarrow Ba$ )，则称为正则文法。

对于一个正则语言 $G$ ，存在一个有限自动机接受 $G$ 。



# 正则语言性质

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

- 正则语言对并、交、补、连接等运算封闭。
- 可以确定有限自动机接受的语言是空的、有限的、无限的。
- 可以判定一个元素是否属于某个正则语言。
- 存在算法，能够判定两个正则语言是否等价。



# 下推自动机

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

下推自动机可以用一个七元组 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ 表示，其中 $\Gamma$ 是一个栈字母表。

如果转移函数是确定的，则称为确定型下推自动机。确定型下推自动机和非确定型下推自动机不等价。



# 上下文无关文法

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

设 $G$ 是一个文法，如果它的产生式都有形式 $A \rightarrow B$ ，其中 $A$ 是单变量， $B$ 是 $(V \cup T)^*$ 中的元素，则称为上下文无关文法。

一个语言是上下文无关语言当且仅当存在一个下推自动机识别它。





# 上下文无关语言

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识和表示

三个基本概念

课程内容简介

上下文无关文法化简：消除无用产生式、消除空产生式、消除单位产生式。

范式：乔姆斯基范式和格里巴克范式。

性质：可以判定一个元素是否属于上下文无关语言；可以确定上下文无关语言是否是空的、有限的、无限的；上下文无关语言对并和连接运算封闭。



# 图灵机

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

标准图灵机的定义。图灵机的机制是非常简单的，但是足以解决非常复杂的过程。

被图灵机接受的语言称为递归可枚举语言。

图灵机的变种：带有不动选择的图灵机、多道图灵机；单向无穷带的图灵机；多带图灵机、多维图灵机；非确定型图灵机等。



# 线性有界自动机

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

线性有界自动机包含两个特殊的符号：  
[和]，分别是左端标志和右端标志，并  
且在[处没有向左移动的动作，在]处没  
有向右移动的动作。

线性有界自动机接受的语言称为上下文  
相关语言。



# 乔姆斯基层次

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

图灵机 $\Leftrightarrow$ 递归可枚举语言

线性有界自动机 $\Leftrightarrow$ 上下文相关语言

下推自动机 $\Leftrightarrow$ 上下文无关语言

有限自动机 $\Leftrightarrow$ 正则语言



# 其他问题

计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

- 图灵机不能解决的问题
- 递归可枚举语言和上下文无关语言的不可判定问题
- 计算模型
- 计算复杂性



计算理论导引

姚刚

目录

数学预备知识  
和表示

三个基本概念

课程内容简介

# 谢谢！

主讲人： 姚 刚

电子邮箱： [yaogang@iie.ac.cn](mailto:yaogang@iie.ac.cn)