# 第八章习题

1．叙述二元可满足性问题，并证明二元可满足性问题是 P 类问题；

叙述：

**例**：给定布尔变量的一个有限集合 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 及定义其上的子句 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，其中 $|c_k|=2,k=1,2,\cdots,m$。

**问**：是否存在 $U$ 的一个真赋值，使得 $C$ 中所有的子句均被满足？

证明：

**证明**：2SAT 是 P－类问题。为叙述方便，采用数理逻辑中的“合取式”表达逻辑命题，于是

$$C=c_1\wedge c_2\wedge\cdots\wedge c_m=\prod_{k=1}^{m}c_k=\prod_{k=1}^{m}(x_k+y_k)$$

其中 $c_i\cdot c_j$ 表示逻辑“与”，$x_k+y_k$ 表示逻辑“或”，$x_k,y_k$ 是某个 $u_j$ 或 $\overline{u}_i$。

考虑表达式 $C=\prod_{k=1}^{m}(x_k+y_k)$，如果有某个 $x_k+y_k=u_i+\overline{u}_i$，则在乘积式中可以去掉该子句：$C'=C\setminus(u_i+\overline{u}_i)$，可见 $C$ 与 $C'$ 的可满足性是等价的。所以我们可以假定 $C$ 中不含有形如 $u_i+\overline{u}_i$ 的子句。注意到此时 $C$ 中的子句个数不会超过 $n(n-1)$。

如果逻辑变量 $u_n$ 或它的非 $\overline{u}_n$ 在 $C$ 的某个子句中出现，我们将 $C$ 表示成

$$C=G\cdot(u_n+y_1)\cdots(u_n+y_k)(\overline{u}_n+z_1)\cdots(\overline{u}_n+z_h) \qquad (1)$$

其中 $G$ 是 $C$ 的一部分子句，而且不出现逻辑变量 $u_i$ 或它的非 $\overline{u}_i$。令

$$C'=G\cdot\prod_{1\le i\le k,1\le j\le h}(y_i+z_j) \qquad (2)$$

(2)式中不再含有变量$u_n$和它的非$\bar{u}_n$。记$U'=\{u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}\}$。如果存在$U$的真赋值，使得$C$满足，在$U'$也一定满足。因为如果$u_n$取真值，则所有的$z_j$必然取真值；$u_n$取假值，所有的$y_i$必然都取真值，不管那中情况，$C'$的乘积部分必然取真值。反之，假设存在$U'$的真赋值，使得$C'$满足。若有某个$y_i$取假值，则所有的$z_j$必然取真值，此时令$u_n$取真值，得到$U$的真赋值，使得$C$满足。若有某个$z_j$取假值，则令$u_n$取假值，得到$U$的真赋值，使得$C$满足。如果所有的$y_i$和$z_j$都取真值，$u_n$取假值得到$U$的真赋值，使得$C$满足。至此我们得到：$C$与$C'$的可满足性是等价的。但是后者涉及的变量数比前者少 1，子句数为$m-(k+h)+kh$。但是，我们可以象前面一样简化掉所有形如$u_i+\bar{u}_i$的子句，因而可以假定$C'$中子句个数不超过$(n-1)(n-2)$。

上述过程可以一直进行到判定只含有一个逻辑变量的逻辑语句的可满足性问题。这需要一个常数时间即可。注意到我们每一步简化都可以在多项式（关于$n$的）步骤内完成，总共需要至多$n-1$步简化，因而，在多项式时间内可以完成 2SAT 二满足性问题的判定。即 2SAT 是 P一类问题。 证毕

2. 相遇集问题

**例**：给定集合$S$的一个子集族$C$和一个正整数$K$；

**问**：$S$是否包含子集$S'$，$|S'|\le K$，使得$S'$与$C$中的任何一个子集的交均非空？（$S'$称为$C$的相遇子集）试判定相遇集问题是 P 类的还是 NP 完全的，并给出你的证明？

- 相遇集问题是 NP完全问题。

## 相遇集问题属于 NP 类

给定一个解 $H \subseteq U$，验证 $H$ 是否是一个合法解的步骤如下：

1. 检查 $H$ 的大小是否满足 $|H| \le k$。
2. 检查对于每个 $c \in C$，是否 $H \cap c \neq \emptyset$。

这两步都可以在多项式时间内完成，因此相遇集问题属于 **NP 类**。

## 归约：从顶点覆盖问题（VC）到相遇集问题（HS）

✧ **顶点覆盖**问题 VC（Vertex Cover）

**例**：给定一个图 G(V,E)和一个正整数 K≤|V|.

**问**： 是否存在 G 的一个顶点数不超过 K 的覆盖？即是否存在一个顶点子集 $V' \subseteq V, |V'| \le K$，使得对于每一条边$\{u,v\} \in E$，u 与 v 中至少有一个属于 $V'$.

- 已知**顶点覆盖问题**是讲义中给出的**几个典型的NPC问题**之一

1. **构造相遇集问题的输入**：
   - 设 $G = (V, E)$ 是顶点覆盖问题的输入，其中 $V$ 是顶点集合，$E$ 是边集合。
   - 定义相遇集问题中的有限集合 $U$ 为图的顶点集合 $V$：

$$U = V$$

   - 定义相遇集问题中的子集族 $C$ 为图的边集合 $E$，其中每条边 $(u, v)$ 对应于一个包含两个顶点的子集：

$$C = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in E\}$$

   - 将顶点覆盖问题的整数 $k$ 保持不变，作为相遇集问题的整数 $k$。

2. **归约结果的正确性**：
   - 顶点覆盖问题的一个解 $S \subseteq V$ 是大小不超过 $k$ 的顶点集，覆盖了所有边。对于每条边 $(u, v) \in E$，有 $u \in S$ 或 $v \in S$。
   - 相遇集问题的一个解 $H \subseteq U$ 是大小不超过 $k$ 的集合，与 $C$ 中的每个集合有交集。对于每个集合 $\{u, v\} \in C$，有 $u \in H$ 或 $v \in H$。
   - 显然，两个问题的解是等价的。

3. 0/1 整数规划问题

**例**：给定一个 $m \times n$ 矩阵 $A$ 和一个 $m$ 元整数向量 $b$；

**问**：是否存在一个 $n$ 元 0/1 向量 $x$，使得 $Ax \le b$？

试证明 0/1 整数规划问题是 NP 完全问题。

## 证明 0/1 整数规划问题属于 NP 类

要验证给定的解向量 $x$ 是否满足条件 $Ax \le b$:

1. 计算向量 $Ax$（矩阵乘法），时间复杂度为 $O(mn)$。
2. 检查不等式 $Ax \le b$ 是否成立，时间复杂度为 $O(m)$。

这两个步骤都可以在多项式时间内完成。因此，0/1 整数规划问题属于 **NP 类。**

## 采用限制法归约：从 0/1 背包问题到 0/1 整数规划问题

### 0/1 背包问题定义

**例**：给定一个有限集合 $U$，对于每个 $a \in U$，对应一个值 $w(a) \in Z^+$ 和另一个值 $v(a) \in Z^+$。另外给定一个约束值 $B \in Z^+$ 和目标 $K \in Z^+$

**问**：是否存在 $U$ 的一个子集 $U' \subseteq U$，使得 $\sum_{a \in U'} w(a) \le B$，而且 $\sum_{a \in U'} v(a) \ge K$

0/1 背包问题已知是 **NP 完全问题。**

将 0/1 背包问题归约到 0/1 整数规划问题:

1. **构造矩阵 $A$ 和向量 $b$**:
   - 将 0/1 背包问题的重量 $w_i$ 映射为 $A$ 的一行（例如第 $i$ 行 $A_{i*} = w$）。
   - 将背包的容量限制 $W$ 映射为 $b$ 的对应分量。
2. **价值系数 $v_i$**:
   - 令 $v_i = 0$，即目标值为 $K = 0$。
   - 由于 $\sum v_i x_i \ge K$ 恒成立（因为 $K = 0$），不需要额外约束。
3. **结果**:
   - 0/1 背包问题化为:

$$Ax \le b$$

   - 此时 $x \in \{0, 1\}$，即满足 0/1 整数规划的约束形式。

当 0/1 整数规划问题有 $m$ 个不等式约束时，可以看成**多个 0/1 背包问题的交**：

- 给定 $m$ 个有限集合 $U_i$，每个元素 $a \in U_i$ 有对应的权重 $A_i(a)$ 和目标系数 $0(a) = 0$。
- 对应的约束为：

$$\sum_{a \in U'} A_i^*(a) \leq b_i$$

因为每个约束都可以看成一个**0/1 背包问题**，而多个约束的交即为**0/1 整数规划问题**的形式。

因此，0/1 整数规划问题也必然是 **NP 完全问题。**

4. 如何证明精确覆盖问题和三元精确覆盖问题都是 NPC 问题？

4.1 精确覆盖问题描述：

**例**：已知有限集合 $S$ 的子集族 $C$

**问**：$C$ 是否包含一个精确覆盖，即是否存在 $C' \subseteq C$，使得 $C'$ 中的子集互不相交，且 $\bigcup_{c \in C'} c = S$。

这个问题是 NPC 问题。我们将利用它证明定和子集问题是 NPC 问题。

根据上节的结论，证明一个新问题 $\Pi$ 是 NPC 问题的一般步骤是：

(a) 证明 $\Pi \in NP$；

(b) 选取一个已知的 NP 完全问题 $\Pi'$；

(c) 构造一个从 $\Pi'$ 到 $\Pi$ 的变换 $f$；

(d) 证明 $f$ 为一个多项式变换。

**证明 $\Pi \in NP$**：

对于一个给定解 $S' \subseteq S$，我们可以在**多项式时间**内验证：

1. $S'$ 中的集合是否两两不相交；
2. $S'$ 中的所有集合的并集是否等于 $X$。

因此，精确覆盖问题属于 NP 类。

**选择一个已知的 NP完全问题 $\Pi'$**：

选择布尔可满足性问题（SAT）或**集合覆盖问题（Set Cover）**作为已知的 NP完全问题。

**构造一个从 $\Pi'$ 到 $\Pi$ 的转换 $f$**：

将集合覆盖问题（Set Cover）转换为精确覆盖问题：

1. 对于集合覆盖问题的每个元素 $e_i$，我们将其表示为 $X$ 中的元素。
2. 将集合覆盖问题的集合族 $S$ 直接对应到精确覆盖问题中的集合族 $S$。
3. 修改约束，要求所有集合在精确覆盖问题中**互不重叠**，并且完全覆盖 $X$。

这种转换在多项式时间内完成。

**证明 $f$ 是一个多项式变换：**

从集合覆盖问题到精确覆盖问题的转换只涉及简单的集合构建和条件修改，时间复杂度是多项式的。

4.2 三元精确覆盖问题描述：

**例**：给定有限集合 $X$, $|X|=3q$，以及 $X$ 的三元子集族 $C$。

**问**：$C$ 含有 $X$ 的一个精确覆盖吗？即是说，是否存在一个子族 $C'\subseteq C$，使得 $X$ 的每个元素恰好只出现在 $C'$ 的一个三元子集中。

注意到，如果令 $U=W\cup X\cup Y$，$C=\{\{w,x,y\}|w\in W,x\in X,y\in Y\}$，则三元匹配问题就转化为三元精确覆盖问题（若已知道三元匹配问题是 NP-完全问题，那么，三元精确覆盖问题也必是 NP-完全问题)。

## 证明 X3C 属于 NP 类：

给定一个子集 $C' \subseteq C$，我们可以在多项式时间内验证：

1. $C'$ 中的每个集合都包含 3 个元素（符合三元子集条件）。
2. $C'$ 中的集合**两两不重叠**（每个元素在 $C'$ 中的集合里只出现一次）。
3. $C'$ 的并集是否恰好覆盖 $X$。

## 选择一个已知的 NP完全问题：

✧ **三维匹配问题** 3DM(3 Dimensional Matching)

**例**： 给定三个互不相交的、均含有 $q$ 个元素的集合 $W,X,Y$，取 $M\subseteq W\times X\times Y$。

**问**： $M$ 包含一个匹配吗？即是说，是否存在一个子集 $M'\subseteq M$，使得 $|M'|=q$，且 $M'$ 中任意两个三元组都没有相同的分量。

**已知**：三元匹配问题是 NP完全的。

为了将三元匹配问题转化为三元精确覆盖问题，可以通过以下步骤进行归约：

1. **将三元匹配问题的输入映射到 X3C 问题的输入**：
   - 三元匹配问题中，有三个集合 $W, X, Y$ 和一个三元组集合 $T \subseteq W \times X \times Y$。
   - 构建集合 $U = W \cup X \cup Y$，且 $|U|$ 的大小满足 $3q$，其中 $q$ 是三元匹配的规模。
   - 将三元组 $t = (w, x, y) \in T$ 映射为 X3C 中的三元子集 $C_i = \{w, x, y\} \subseteq U$。

2. **转换为 X3C 问题**：
   - X3C 问题的目标是找到一个三元子集族 $C' \subseteq C$，使得：
     - $C'$ 中的集合两两不重叠（对应三元匹配中三元组互不重叠的约束）；
     - $C'$ 的并集恰好覆盖 $U$（对应三元匹配中覆盖 $W \cup X \cup Y$ 的要求）。
3. **归约验证**：
   - 若三元匹配问题存在解 $T' \subseteq T$，则对应的 X3C 问题存在解 $C' \subseteq C$。
   - 反之，若 X3C 问题存在解 $C' \subseteq C$，则三元匹配问题存在解 $T' \subseteq T$。

该转换过程是**多项式时间**的，因为仅涉及集合的重构和三元组的映射。

三元匹配问题的输入规模为 $O(|T|)$，其中 $|T|$ 是三元组的数量。

将三元匹配问题转换为 X3C 问题的过程仅需遍历 $T$ 中的所有三元组，并将它们直接映射为三元子集 $C_i \subseteq U$。

该过程的时间复杂度为 $O(|T|)$，因此归约是**多项式时间**的。

5. 独立集问题：

**例**：对于给定的无向图$G=(V,E)$和正整数$k\ (\le|V|)$

**问**：$G$是否包含一个$k-$独立集$V'$，即是否存在一个子集$V'\subseteq V,\ |V'|=k$，使得$V'$中的任何两个顶点在图$G$中都不相邻。

证明独立集问题是 NPC 问题（提示：考虑独立集和团的关系：如果$V'$是图$G$的团，则$V'$是$G$的补图$\widetilde{G}$的独立集；反之亦然）。

**独立集问题属于 NP 类**：

因为其对应的补图的团问题是NP问题，所以该图的独立集也是NP问题

**团问题**：

**例**：给定一个无向图$G(V,E)$和一个正整数$k$。

**问**：$G$是否包含一个$k$团？即是否存在$V'\subseteq V,|V'|=k$，且对任意$u,v\in V'$，有$(u,v)\in E$。

1. **输入**：一个图 $G$ 和正整数 $k$。
2. **构造**：生成图 $G$ 的补图 $\overline{G}$。
3. **输出**：在 $\overline{G}$ 中，求解一个 $k$-独立集。

根据团与独立集的关系：

- 若在 $G$ 中存在一个 $k$-团，则在 $\overline{G}$ 中存在一个 $k$-独立集；
- 若在 $\overline{G}$ 中存在一个 $k$-独立集，则在 $G$ 中存在一个 $k$-团。

多项式时间为补图转换上，遍历边然后在以下时间内完成

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

因此，独立集问题是 **NP 完全问题。**