

问题

设字母表 $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ 上的语言 L 包含具有如下形式的符号串：

$$a_1a_2\cdots a_k\#b_1b_2\cdots b_k\#c_1c_2\cdots c_k,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k, c_1, c_2, \dots, c_k \in \{0, 1\}$ ，并且满足条件，如果将 $a_1a_2\cdots a_k$ 、 $b_1b_2\cdots b_k$ 和 $c_1c_2\cdots c_k$ 视为二进制数，则有

$$(c_1c_2\cdots c_k)_2 = (a_1a_2\cdots a_k)_2 + (b_1b_2\cdots b_k)_2.$$

例如：由 $(10010)_2 = (01011)_2 + (00111)_2$ ，可得 $01011\#00111\#10010 \in L$ 。判断语言 L 是否是递归语言，并证明你的结论。

解答

语言 L 是递归语言，为证明此结论，构造一个可以识别语言 L 的图灵机，并且对任意输入都可以停机。

图灵机的带字母表 $\Gamma = \{0, 1, \#, x, \square\}$ ，它的运行方式是逐个比较 w_i 在二进制运算下是否真的是 u_i 和 v_i 的和。图灵机在检查了 w_i 之后，它将用符号 x 替换它。最后，当所有 w 的符号都被检查完毕时，图灵机检查 u 和 v 的所有符号是否都被检查到。

图灵机的状态转换图如下，图中的左半部对因无进位运算。右半部对应有进位运算：



