



算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

第十二章 算法计算的限制

姚 刚

中国科学院信息工程研究所



目录

算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

- ① 图灵机所不能解决的问题
- ② 递归可枚举语言的不可判定问题
- ③ 波斯特对应问题
- ④ 上下文无关语言的不可判定问题



可计算性和可判定性

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

对于一个函数 f ，如果存在一个图灵机，使得 f 在某个定义域上的所有值都能够被计算出来，那么称该函数在这个定义域上是可计算的。

我们可能关心能否给出一个简单的判定，来判断一个计算的结果是“是”还是“否”。这样，我么可以说一个问题是可判定的(decidable)还是不可判定的。



停机问题

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

给定一个图灵机 M 的描述和输入 w ，当图灵机 M 从初始格局 q_0w 出发执行一个计算，最终会停机吗？

问题的定义域是所有图灵机 M 和所有符号串 w 的集合，即我们要找到一个图灵机，对于给定的任意 M 和 w 的描述，它都可以预测用于 w 的 M 计算是否会停机。



停机问题的定义

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

定义 (停机问题)

令 w_M 是描述图灵机 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ 的符号串，令 w 是 M 的字母表中的一个符号串。我们假定将 w_M 和 w 编码为 0 和 1 的符号串。将停机问题的解决方案表示为一个图灵机 H ，对任意的 w_M 和 w ，如果 w_M 作用到 w 上会停机，则图灵机 H 执行计算 $q_0 w_M w \vdash^* x_1 q_y x_2$ ，如果 w_M 作用到 w 上不会停机，则图灵机 H 执行计算 $q_0 w_M w \vdash^* y_1 q_n y_2$ ，这里 q_y 和 q_n 都是 H 的终态。



定理

算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

定理

不存在满足上面定义的图灵机 H 。因此，图灵机的停机问题是不可判定的。

定理

如果停机问题是可判定的，那么所有的递归可枚举语言都将是递归的。因此，停机问题是不可判定的。



停机问题与成员资格判定

算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

停机问题和递归可枚举语言的成员资格判定问题几乎是等价的。

唯一不同的地方是：对于停机问题，我们不区分终态停机还是非终态停机；而对于成员资格判定问题，我们却要区分。



问题简化

算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

如果问题 A 的可判定性和问题 B 的可判定性一致，那么我们说问题 A 可以简化(reduced)成问题 B 。同时，如果我们知道了 A 是不可判定的，那么也就知道了 B 也是不可判定的。

状态进入问题：给定任意的图灵机 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ 和任意的 $q \in Q$, $w \in \Sigma^+$ ，来判定当 M 作用到 w 上，会不会进入状态 q 。这个问题是不可判定的。



例子

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

空白带停机问题：给定图灵机 M ，如果从空白带开始，判定 M 会不会停机。这个问题是不可判定的。

设 $\Gamma = \{0, 1, \square\}$ 。定义一个函数 $f(n)$ ，它的值是所有 n 态图灵机从空白带开始，到进入停机状态所进行的最大迁移数。这个函数是不可计算的。



定理

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

定理

设 G 是无限制文法。那么 $L(G) = \emptyset$ 是否成立是不可判定的。

定理

设 M 是任意的图灵机。那么不存在算法来判定 $L(M)$ 是否是有限的。



定理

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

对于任意的图灵机 M ，其中 $\Sigma = \{a, b\}$ ，问题“ $L(M)$ 包含两个相同长度的不同符号串”是不可判定的。

定理 (RICE定理)

递归可枚举语言的所有的非平凡性质都是不可判定的。



判定问题与递归语言

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

对于递归语言 L 对应的图灵机 M ，这类图灵机对应着“算法”的一种非形式化概念，即总是终止并产生答案的、有确切定义的步骤序列。如果认为语言 L 是“问题”，那么有结论：

- 若语言 L 是递归语言，则问题 L 是可判定的；
- 若语言 L 不是递归语言，则问题 L 是不可判定的。



波斯特对应问题

算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

定义 (波斯特对应问题)

给定在某个字母表 Σ 上的两个由 n 个字符串组成的序列,

$$A = w_1, w_2, \dots, w_n, \quad B = v_1, v_2, \dots, v_n,$$

如果存在一个非空的整数序列 i, j, \dots, k , 满足

$$w_i w_j \dots w_k = v_i v_j \dots v_k,$$

那么称 (A, B) 对存在波斯特对应解。



修改过的波斯特对应问题

算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

给定在某个字母表 Σ 上的两个由 n 个字符串组成的序列,

$$A = w_1, w_2, \dots, w_n, \quad B = v_1, v_2, \dots, v_n,$$

如果存在一个非空的整数序列 i, j, \dots, k , 满足

$$w_1 w_i w_j \cdots w_k = v_1 v_i v_j \cdots v_k,$$

那么称 (A, B) 对存在修改过的波斯特对应解。



MPC问题与RE语言成员资格判定

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

假设给定无限制文法 $G = (V, T, S, P)$ 和一个目标符号串 w ，我们按下面规则产生 (A, B) 对。 $FS \Rightarrow$ 视为 w_1 ， F 视为 v_1 ，其他符号串顺序任意。

A	B	
$FS \Rightarrow$	F	F 是不属于 $V \cup T$ 中的符号
a	a	对于每个 $a \in T$
V_i	V_i	对于每个 $V_i \in V$
E	$\Rightarrow wE$	E 是不属于 $V \cup T$ 中的符号
y_i	x_i	对于 P 中每个 $x_i \rightarrow y_i$
\Rightarrow	\Rightarrow	



例子

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机所不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

设无限制文法 $G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, 产生式包括

$$S \rightarrow aABb \mid Bbb,$$

$$Bb \rightarrow C,$$

$$AC \rightarrow aac。$$

取符号串 $w = aaac$ 。由 w 的推导过程可得 (A, B) 的 MPC 对应解。

设 (A, B) 是由无限制文法 G 和任意符号串 $w \in T^+$ 构造的相应的对, 则 (A, B) 对中存在 MPC-solution 当且仅当 $w \in L(G)$ 。



例子

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机所不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

i	w_i	w_i	i	w_i	w_i
1	$FS \Rightarrow$	F	8	S	S
2	a	a	9	E	$\Rightarrow aaacE$
3	b	b	10	$aABb$	S
4	c	c	11	Bbb	S
5	A	A	12	C	Bb
6	B	B	13	aac	AC
7	C	C	14	\Rightarrow	\Rightarrow

w_1			w_{10}				w_{14}	w_2	w_5	w_{12}	w_{14}	w_2	w_{13}			w_9
F	S	\Rightarrow	a	A	B	b	\Rightarrow	a	A	C	\Rightarrow	a	a	a	c	E
v_1	v_{10}	v_{14}	v_2	v_5	v_{12}		v_{14}	v_2	v_{13}			v_9				



定理

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机所不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

定理

修改过的波斯特对应问题是不可判定的。

定理

波斯特对应问题是不可判定的。



定理

算法计算的限制

姚刚

目录

图灵机不能解决的问题

递归可枚举语言的不可判定问题

波斯特对应问题

上下文无关语言的不可判定问题

定理

不存在算法能够判定给定的上下文无关文法是否是无二义性的。

定理

对于任意两个上下文无关文法 G_1 和 G_2 ，不存在算法能够判定下面的结论是否成立：

$$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset。$$



算法计算的限
制

姚刚

目录

图灵机所不能
解决的问题

递归可枚举语
言的不可判定
问题

波斯特对应问
题

上下文无关语
言的不可判定
问题

谢谢！

主 讲 人： 姚 刚

电子邮箱： yaogang@iie.ac.cn