问题

符号串而非符号，而且可以为空

假设x和y是符号串，定义运算

$$S(x,y)=\{w|\text{存在}n\geq 1,\text{使得}w=x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n,$$

$$\text{其中}x_i\text{和}y_i\text{是符号串，并且}x=x_1x_2\cdots x_n,y=y_1y_2\cdots y_n\}\text{。}$$

对于语言L_1和L_2，定义$S(L_1,L_2)=\{S(x,y):x\in L_1,y\in L_2\}$。证明：如果语言$L_1$和$L_2$是正则语言，则$S(L_1,L_2)$是正则语言。

解答

我们假设L_1由确定型有穷接受器$M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_{01},F_1)$接受，$L_2$由确定型有穷接受器$M_2=(Q_2,\Sigma_2,\delta_2,q_{02},F_2)$接受。我们构造有穷接受器

$$M=(Q_1\times Q_2,\Sigma_1\cup\Sigma_2,\delta,(q_{01},q_{02}),F_1\times F_2)\text{，}$$

其中转移函数δ如下定义：

$$\delta((q_{1i},q_{2j}),x)=\{(\delta_1(q_{1i},x),q_{2j}),(q_{1i},\delta_2(q_{2j},x))\}\text{。}$$

下面证明$S(L_1,L_2)=L(M)$。对任意$w\in L(M)$，当M输入w后，状态从(q_{01},q_{02})迁移到(q_{f1},q_{f2})，我们把w中会引发第一个状态分量迁移的符号依次连接在一起为x，把w中会引发第二个状态分量迁移的符号依次连接在一起为y，则有$w=S(x,y)$。我们将x输入到M_1中，状态会由q_{01}迁移到q_{f1}，从而$x\in L(M_1)=L_1$。同样有$y\in L(M_2)=L_2$，从而有$w\in S(L_1,L_2)$。

反之，对任意$w\in S(L_1,L_2)$，则存在$x\in L_1$，$y\in L_2$，使得$w=S(x,y)$。由于$x\in L_1$，我们将x输入到M_1中，状态会由q_{01}迁移到q_{f1}；由于$y\in L_2$，我们将y输入到M_2中，状态会由q_{02}迁移到q_{f2}。如果把w输入到M中，其中属于x的部分会使得状态的第一个分量由q_{01}迁移到q_{f1}，属于y的部分会使得状态的第一个分量由q_{02}迁移到q_{f2}，从而，M的状态从(q_{01},q_{02})迁移到(q_{f1},q_{f2})，即$w\in L(M)$。