# 通俗易懂：导数、偏导数、梯度向量

白鲸
有时间就写点东西







**前言：**

> $\Delta$ 表示增加了一个微小的变化量， $d$ 表示增加一个无穷小的变化量 为了简化，本文中统一使用 $\Delta$ 来指代增加了一个很小的变化量 不再区分 $\Delta$ 和 $d$

## 一. 导数

导数，是一元函数中的概念，它描述的是下面这样一件事

自变量 $x$ 每**增加**一个单位量 $\Delta x$ ，因变量 $z$ 对应的变化量 $\Delta y$

此时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ 比值，也叫变化率、切线斜率，即函数在 $x$ 处的导数

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

## 二. 偏导数

偏导，是多元函数中的概念，它描述的是下面这样一件事

以二元函数为例，即由一个因变量和两个自变量构成

$z=f(x,y)$ ，因变量 $z$ 的取值变化，受到 $x,y$ 两个自变量的取值影响

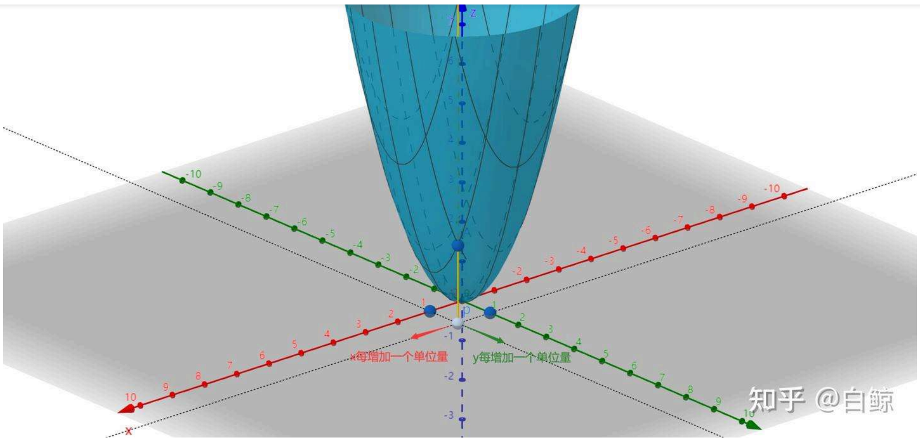
自变量 $x$ 每**增加**一个单位量 $\Delta x$ ，因变量 $z$ 对应的变化量 $\Delta z$

> $f_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$ ，即： $\Delta z$ 对 $\Delta x$ 的偏导： $\frac{\partial z}{\partial x}$

自变量 $y$ 每**增加**一个单位量 $\Delta y$ ，因变量 $z$ 对应的变化量 $\Delta z$

> $f_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}$ ，即： $\Delta z$ 对 $\Delta y$ 的偏导： $\frac{\partial z}{\partial y}$

我们以： $z=x^2+y^2$ 为例，则有： $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=2y$




在点 $p=(1,1)$ 处， $x$ 每**增加**一个单位量 $z$ 对应的变化量为：2

在点 $p=(1,1)$ 处， $y$ 每**增加**一个单位量 $z$ 对应的变化量为：2

## 三.方向导数

### 1.什么是方向导数

由偏导数可知，它反应的是**某一个自变量**的变化引起的因变量的变化

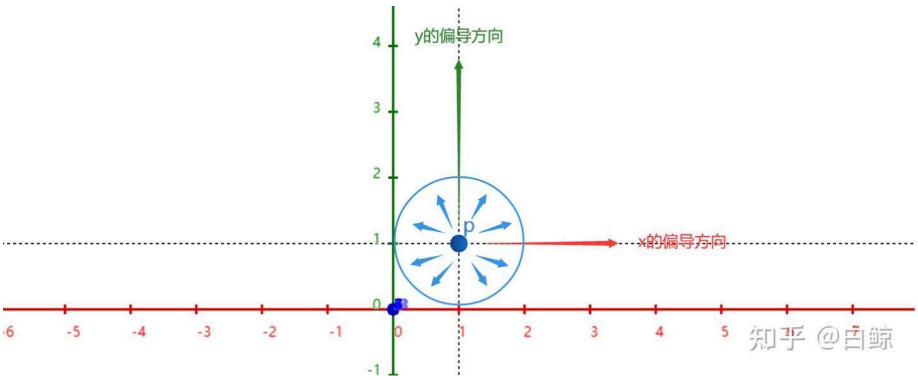
如果我们想知道，由多个自变量的变化引起的因变量变化呢?

也就是从关注： $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ 或 $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ 的关系，变为关注 $\frac{\Delta z}{\Delta x,\Delta y}$ 的关系

即 $x,y$ 都增加一个单位量的变化 $\Delta$ ，和 $\Delta z$ 的变化的关系是怎样的

我们以： $z=x^2+y^2$ 为例，求在点 $p=(1,1)$ 处的方向导数

也就是：**求点p任意方向变化时的导数就叫方向导数**




### 2.全微分公式

全微分表达式： $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

> 全微分表达的是： $\Delta z$ 的变化可分解成 $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$

多元函数可全微分的判定条件是：

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

> $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$，函数值的**实际变化量** $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，函数值通过**全微分拆分后估计的变量化** $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，指 $x, y$ 移动前后的距离（步长）

那：实际变化量减去估计变化量等于0(无差异)，就可用全微分拆解公式来代替

实际中：若两者的差值非常小，也可用全微分拆解公式来近似计算

其中：$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$，指 $\Delta x, \Delta y$ 对应的变化率

### 3. 方向导数公式

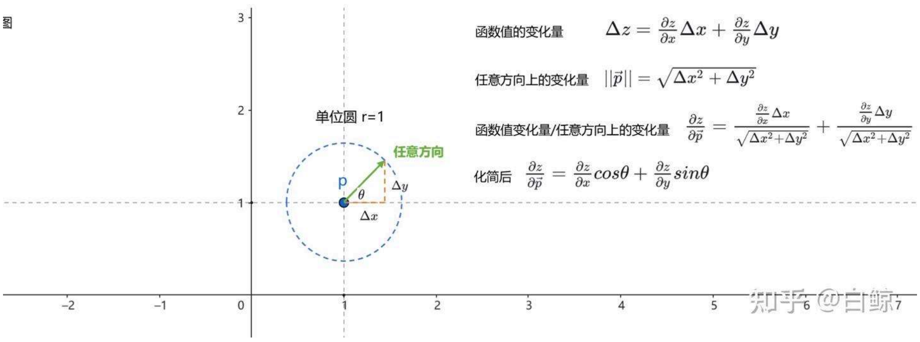
方向导数表达式：

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{p}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

> 函数值的变化量，全微分公式可知：$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 任意方向的变化量，即自变量变化的长度 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 函数值的变化量/自变量的变化量 = $\frac{\partial z}{\partial \vec{p}}$

拆开后：$\frac{\partial z}{\partial \vec{p}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

实际上就是：$\frac{\partial z}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial z}{\partial x}cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}sin\theta$




## 四. 梯度向量+

### 1. 基本定义

由方向导数公式可知：

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial z}{\partial x}cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}sin\theta$$

将等式转换为向量点乘：$(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) \cdot (cos\theta, sin\theta)$

此时：grad $f(x,y) = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$ 就称作梯度向量

梯度向量实质上就是：自变量对应的偏导数组成的一个向量

### 2. 向量点乘

两个向量点乘公式：$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||\cdot cos\alpha$

由此可得：$\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}\cdot||\sqrt{cos\theta^2+sin\theta^2}||\cdot cos\alpha$

由于 $(cos\theta, sin\theta)$ 指的是单位圆上的任意方向，模长为1

那么：$\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}\cdot 1\cdot cos\alpha$

当 $\alpha=0$ 时，$cos\alpha=1$：

> 此时：$\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}\cdot 1\cdot 1=\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}$ 指：梯度方向和单位圆上的任意方向是同一个方向 也就是：该方向就是梯度向量所指的方向 此时：**梯度方向为方向导数中变化率最大的那个方向**

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$cos\alpha=0$：

> 此时：$\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}\cdot 1\cdot 0=0$ 指：梯度方向和单位圆上的任意方向是垂直的 因为向量的点乘=0，代表向量互相垂直 此时：**梯度方向为方向导数中变化率不变的那个方向**

当 $\alpha=\pi$ 时，$cos\alpha=-1$：

> 此时：$\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}\cdot 1\cdot -1=-\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}$ 指：梯度方向和单位圆上的任意方向是相反的方向 此时：**梯度方向为方向导数中变化率最小（可负）的那个方向**

### 3.梯度方向的含义

$$(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\cdot(cos\theta,sin\theta)=\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}$$

即：**此时梯度方向，为方向导数中变化率(上升最快)最大的那个方向**

$$(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\cdot(cos\theta,sin\theta)=0$$

即：**此时梯度方向，为方向导数中变化率为0的那个方向**

$$(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\cdot(cos\theta,sin\theta)=-\sqrt{||(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2||}$$

即：**此时梯度方向，为方向导数中变化率最小(下降最快)的那个方向**

编辑于 2024-05-12 21:29・江苏

导数 偏导数 梯度

理性发言，友善互动

**4 条评论** 默认 最新

**爱科学**
那些图是啥软件生成的
03-17 · 山西 回复 喜欢

**会飞的机器人**
德尔塔y:德尔塔x
在x趋于0才是倒数吧
2024-07-22 · 北京 回复 喜欢

**我是路人呐**
占了占了三天，还不更，批评😆😆😆
2024-05-11 · 四川 回复 喜欢

**白鲸** 作者
周末更😄
2024-05-11 · 江苏 回复 喜欢

## 推荐阅读

**补充-向量函数求导**
在学习数值优化的过程中,遇到了这么一个函数: \\ m_k(p)=f_k+p^T abla f_k+\frac12p^T abla^2 f_kp p 是一个n维向量, f_k, abla f_k, abla^2 f_k 分别是另一个函数的函数值, 梯度和黑塞矩阵....
不思量自难... 发表于数值优化

**微积分II 方向导数与梯度向量 14.5 (12)**
来到Section 14.5 Directional Derivatives and Gradient Vectors了，方向导数与梯度向量。本章依靠前文知识，没看过的读者可以先复习： 链式法则 Jerry：Calculus II Review: Section 14.4...
Jerry 发表于南科大基础...

**泛函分析 08 赋范空间的基本概念**
本文第一部分，主要介绍的是赋范空间的基本概念并且导出来Banach空间的定义（完备的赋范空间）。第二部分，介绍了范数的连续性，并在其中证明了赋范运算和极限运算之间可以交换顺序。第三部...
轻狂书生 发表于泛函分析学...

**数学分析笔记（六）——多变量函数的极限与连续**
Tyalmath