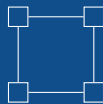

我赠满篇 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 于你

仍觉满篇 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 不及你



PRODUCED BY: CBH

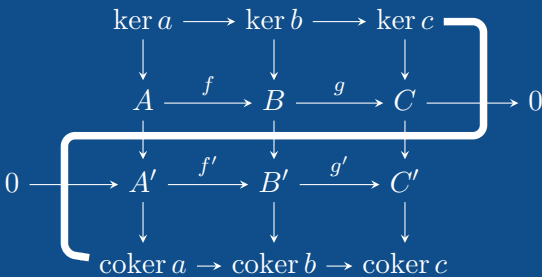
1172440795@QQ.COM

EDITOR: CBH

1172440795@QQ.COM

2022 年 12 月 26 日

$$\pi_6(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}_{12}$$



HAPPY READ-ING!

我赠满篇 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 于你，仍觉满篇 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 不及你

Abstract

Abstract

自从 11 月 18 日的晚上遇见了你，我就对你有了好感

你对我的第一印象是，我看到你的 QQ 头像很好看，我那时候猜测，你一定是一个很漂亮的女孩吧……直到我在 11 月 18 日看到了你的本人，我很惊讶，你比你的 QQ 头像好看那么多，既清纯又可爱，身高 160，那时候，我出现了很多的想法……

那天晚上一起唱歌的时候，我感觉你的声音是那样的甜美，像天使一样……

那天晚上，有两个想法在我心里游荡了无数次：1. 现在就冲吧，我们都还单身，可能性不是 0，晚一点，他有对象了呢？2. 我想做更重要的事情，我想等自己变得优秀了再去跟你表白，但是你这么漂亮，你剩余的单身时间，可能要按秒算了……

直到现在，我还是没能平息下来，我幻想过无数次表白你说的话，但是我一直不敢你的一个代号是 12，我想起来了一个数学定律

$$\pi_6(S^2) = \mathbb{Z}_{12}$$

这就是我的 iPad 壁纸。

以前我的择偶标准是，以前没有感情经历的但是遇见你之后，我的择偶标准只有一个：是你

目录

1	这里是关于你的不能称作故事的故事	1
2	曾经试图及时止损，又放不下	3
3	Time Line	4
4	基于动态规划的是否发消息问题	7
5	这是我想象的聊天	9
6	$\pi_6(S^2) = \mathbb{Z}_{12}$	14
7	理想的时间线	18
8	那就放弃吧，去等待功成名就，去等待春暖花开	21

1 这里是关于你的不能称作故事的故事

让你感到绝望的事情是什么

就在前几天，我遇到了一个很漂亮的女孩，Ta 完全是我的理想型（哪里有什么理想型呢，理想型只是把你的特征提取出来罢了……）我想要照顾 Ta 一生，想跟 Ta 一辈子走下去，但是……

1. 我是一个没有感情经历的人，从来不敢表达自己的想法，我做什么事情都考虑后果，我不敢想象，如果我迈出了那一步，我将会面临什么样的后果，什么样的灭顶之灾

2. 我是一个理性的人，自从上大学开始，我从前往后对很多人有过好感，但是从来没有变的观点就是“我现在有什么资本去追 Ta 呢？”，“我有什么资本，在其他男人面前自信地说出‘我的女孩你随便动，跟你走算我输’这样的话呢？”，“我想让自己变优秀了，再去追女孩子”

3. 那天晚上，有两个选择在我心里游荡了无数次，但是最终还是没敢做出决策。“现在就冲吧，我们目前都是确定单身的，这是我难得的机会了，可能性不为 0，如果出手晚了，Ta 有对象了呢？”，“我想做更重要的事情，想好好建设自己，如果在 2023 年 9 月 28 日，Ta 依然单身的话，就直接表达出自己的想法吧，但是 Ta 这么漂亮，说话声音又那么好听，怎么可能到 2023 年 9 月 28 日都没人追呢？还是就此别过吧”

这是一场注定没有结局的，不能称作故事的故事……

最近有什么特别想说的话吗

自从见到你以后，我就在想，能够跟你在一起，是对于我来说，除了学数学以外，最重要的事情了……

择偶标准是什么

遇见你之前，我有一个择偶标准：以前没有感情经历的。

遇见你之后，我无数次默念着，我不在乎你的过往，我的择偶标准只有一个：是你……

My Title

如果我再优秀一点就好了，就不用每次在你面前故意装作面无表情了……

My Title

这周五考完试以后，就去实现自己的梦想去吧……

My Title

那就冲吧，像卖卡一样……

My Title

我可以学会 LaTeX，但是我却追不到你……

以前，我总是说，我想一辈子孤独终老，做一个一辈子只学数学的科研人
但是在遇见 ta 以后，我才发现，过去的自己，无非就是给自己的无能，找借口而已

2 曾经试图及时止损，又放不下

让你感到最绝望的事情是什么

我是一个没有感情经历的人，从小学到现在，我暗恋过十几个女孩子，但是从来都是单相思，从来都没有去主动追过，一直以来，我或多或少面临过不可跨越的障碍：

Case1: 不知道 Ta 有没有对象，没办法迈出第一步

Case2: 没有联系方式

Case3: 不熟，好几年来一句话都没说过

小学到现在，我面临的困境从来都是 Case1 ~ 3 之间的，但是，就在前几天，我遇到了一个想要去照顾一生的女孩子，更离奇的是，Ta 的情况不属于上面的 Case1 ~ 3，我们有联系方式，说过话，我也确定现在的你是没有对象的，你是我唯一一个动了去追的念头，去实际行动过的人

以前我的择偶标准是：以前没有感情经历的，但是遇见你之后，我的择偶标准只有一个：是你

可是，种种迹象表明，你是不喜欢我的，这是很明显的规律

此时的我面临两种抉择：

Case1: 继续追吧，说不定时间长了 Ta 就对我有感觉了

Case2: 及时止损，喜欢一个不喜欢自己的人，是不会有结果的

3 Time Line

2022.11 月的第一周

这一天，是我对你有印象的第一天，你加了我的 QQ 好友，我感觉你的 QQ 头像很好看，那时候我在想，你本人一定也是非常好看吧

2022 年 11 月 18 日

这一天，是我们见面的第一天，看到你的那一刻我很惊讶，我感觉，在我的对好看的定义下，你的本人比你的 QQ 头像好看那么多

那一天我记得我们一起唱歌，你的声音像天使一样，那一刻，我真的心动了

你是我第一个动了去追的念头的人……

好想给你发个消息：你的声音好好听啊……

2022 年 11 月 25 日

这一天，是我考完数字信号处理的日子，一次偶然的机会，我们在操场上玩游戏，看到你在我右面的那一刻，我再也控制不住心动的情绪了，感觉你好小巧可爱呀，我好想和你一辈子走下去啊

晚上回宿舍的时候，是我第一次给你发消息，那时候的我很胆小，让我记忆犹新的是，那一天，是我的同事指导我，告诉我发什么，让我直接复制粘贴发送的，我还记得，第一条消息，从复制粘贴到点击发送，用了十分钟，现在还能回想起来那时候的心跳

2022 年 11 月 26 日

内容...

2022 年 11 月 28 日

内容...

2022 年 11 月 29 日

今天深夜，我的同事教了我很久，让我印象最深刻的是

“不要刻意去想每一句话”

“你要让 Ta 喜欢真实的自己”

“重要的是行动，不是用数学去计算，也不是写 LaTeX 模板”

2022 年 11 月 30 日

这一天晚上，我的同事鼓励我可以给 Ta 聊天说“今天好冷啊”，我还是像以前一样，打字完成到点击发送用了好久，手颤抖了好久，终于发出去了，但是看结果，你没有冷落我，看到我们的对话，我很开心……

2022 年 12 月 2 日

今天，我好像感觉到了你是很明显不喜欢我的，我想放弃你了，想及时止损去做重要的事情去了

2022 年 12 月 3 日

那天，我在写数值计算方法的实验报告，我还是感觉，没有你的世界，好像少了点什么，所以我还是想继续追你……

2022 年 12 月 5 日

内容...

2022 年 12 月 8 日

内容...

2022 年 12 月 9 日

这一天是 4 个人的卧谈会，他们教了我很多情感方面的东西

“Ta 没有在明显的抗拒你”

“你的话题，像是在强行输入”

“不要在一棵树上吊死”

“大家都是从不熟走过来的”

2022 年 12 月 10 日

今天上午，我送了几个人去车站进行了模拟演练

但是直到晚上 22 点，我才鼓起了勇气提出送你去车站的想法，但是被拒绝了，不过没事，我驻守到 11 日，就是给自己的最好的证明了吧

那天，是我第二次试图放弃你了，我想把时间交给推免，想把自己的人生大事交给两年后……

2022 年 12 月 11 日

今天修电脑去了，可是失败了，今天给快递员打电话问快件的下落了，快递员只是告诉我正在给我调监控，快递下落不明，好难受啊……

放弃你的第一天，总感觉少了点什么，做什么都无精打采

晚上开会的时候，我的一个同事给我讲了很多：

“你怎么突然放弃了，像 Ta 这样的好女孩，以后真的很难遇到了……”

“你跟 Ta 聊天的话题，要是给我，我都得跟你尬聊”；

“Ta 肯定是单纯的不好意思，换做是我，我也会这样的，在 Ta 眼里，你应该就是没事闲着想去玩……”

听到你给我讲的，我不能再欺骗自己了，Ta 已经深深扎根在我的生命里面了
熄灭的火，又一次复燃了……

2022 年 12 月 12 日

今天是我飞回家的一天，也是我第一天出现异常症状的一天，我记得这一天的下午，我在地铁上，我的一个同事指导我“你追人，那你首先要有自信”这句话让我印象深刻，可是我好没有自信啊，连消息都不敢发，这一天也是我休战的第 2 天

记得下飞机的时候，我在我们的小群里面提到了今天发烧了，当时你第一个对我说多喝水，我很开心，但是我没有表达出来，那时候我的心情，就像是星星之火引爆了加油站一样……

晚上，我们在小群里面玩了游戏，我很开心

2022 年 12 月 14 日

内容...

2022 年 12 月 15 日

内容...

2022 年 12 月 24 日

现在是 12 月 24 日的凌晨 2 点，我好担心你被他掠夺啊，一直在担心，好长时间了，一直难以入睡

如果说，现在我和所有追你的人构成 n 方零和博弈，

那么，如果在某年某月的哪一天，你突然有了对象，那时候我会面临两种抉择：1. 已经没有了，忘掉 Ta，等待一个可以双向奔赴的人吧；2. Ta 还没结婚，我可以默默等待 Ta 分手，只不过，这就是生存分析了……

希望我永远也不要到生存分析的那一天……

明天就是圣诞节了，幸运的是，大家都不在学校。往年，我很怕各种节日，因为每当过节的时候，会有很多人互相送礼物，我不敢送给你，怕你不要；又不甘心什么都不做，很难做出决策

4 基于动态规划的是否发消息问题

Question

设想这样一个情形：你正在追一个女孩子，所以准备时常 Ta 发消息. 但是，Ta 是否理你，是不可估计的，下面请做一个适当的规划.

符号说明

n : 时间单位，表示从第一天开始所经历的天数

$y(n)$: 第 n 天的决策， $y(n) = 1$ 表示第 n 天给 Ta 发消息， $y(n) = 0$ 表示第 n 天不给 Ta 发消息

$L(n)$: 第 n 天收到的反馈， $L(n) = 1$ 表示第 n 天 Ta 理我了， $L(n) = 0$ 表示第 n 天 Ta 没理我

$\pi(n)$: 表示第 n 天为止，Ta 没理我的累计天数.

$x(m)$: 表示 Ta 没理我累计 m 次时，暂停发消息的时间 (冷却天数)，用 n 表示即为 $x(\pi(n))$

策略

设想存在如下 2 种情形：

Case1. 第 n 天，你给 Ta 发了消息，同时收到了 Ta 的反馈. 即 $y(n) = 1, L(n) = 1$ ，所以第 $n+1$ 天当然继续给 Ta 发消息.

Case2. 第 n 天，你给 Ta 发了消息，但是没有收到 Ta 的反馈. 即 $y(n) = 1, L(n) = 0$ ，所以你在第 $n+1$ 天必不可能给 Ta 发消息，此时存在冷却时间 $t_0 = x(\pi(n))$ ，需要在冷却时间过后才能给 Ta 发消息，即 $y(n+1) = y(n+2) = \cdots = y(n+t_0-1) = 0, y(n+t_0) = 1$ ，所以这种情形可以表示为 $y(n) = 1$ ，条件为 $y(n-1) = y(n-2) = \cdots = y(n-t_0+1) = 0, y(n-t_0) = 1$ ，同时 n 与 t_0 之间存在关系式 $t_0 = x(\pi(n-t_0))$

基于上述假设的情形，可以构造出 $y(n)$ 的递推表达式.

$$y(n) = \begin{cases} 1, L(n-1) = 1 \\ 0, L(n-1) = 0 \\ 1, y(n-1) = y(n-2) = \cdots = y(n-t_0+1) = 0, y(n-t_0) = 1, x(\pi(n-t_0)) = t_0 \end{cases}$$

设 $x(m) = x(\pi(n))(x(\pi(n)) \geq 2)$ 是冷却时间，在第 $n + x(\pi(n))$ 天继续发消息，设定冷却时间的目的是让 Ta 更加珍惜我，因为人性表明，人们倾向选择得不到的，和已经失去的.

我们规定， $m = \pi(n)$ ，其中， $x(m)$ 是一个随 Ta 没理我的次数 $m = \pi(n)$ 增加的数列， $x(m)$ 可以有如下选择：

$$1. x(m) = m + k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

$$2. x(m) = x(m-1) + x(m-2), \text{ 取初值 } x(0) = 1, x(-1) = 1$$

$$3. x(m) = [e^m] + k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, [\] \text{ 表示向下取整}$$

$$4. x(m) = \sin \frac{\pi}{2}n + k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Example

我们选取 $x(m) = x(m-1) + x(m-2)$, 初值为 $x(0) = 1, x(-1) = 1$

11 月 25 日, 第 1 天, 我给 Ta 发了消息, Ta 的反馈很好, 即 $y(1) = 1, L(1) = 1$, 所以在第 2 天必然会给 Ta 发消息, 即 $y(2) = 1$, 但是根据实际经历, 第 2 天的反馈不是很好, $L(2) = 0$, 截止第 2 天, Ta 累计没有良好反馈的天数是 1, 所以 $\pi(2) = 1$, 所以我们需要冷却时间 $x(\pi(2)) = x(1)$

根据等效 Fibonacci 数列 (加入自变量 -1 和 0) 的性质, $x(1) = 2$, 这说明需要在第 $2 + x(\pi(2)) = 4$ 天给 Ta 发消息, 即 11 月 28 日继续给 Ta 发消息, 第 5 天 (11 月 29 日) 是否发消息, 取决于 $L(4)$ 是 0 还是 1

如果 $L(4) = 0$ 这说明情况不是很理想, 冷却时间变为 $x(\pi(4)) = x(2) = 3$, 需要在 12 月 1 日才能发消息了.

这个情况可以使用计算机随机模拟, $L(n)$ 是一个概率函数, 取值存在如下几种情形:

Case1: $L(n)$ 是一个纯随机数

Case2: $L(n)$ 随时间单调增加且 $L(n) = 1$ 的概率收敛于 1, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} p[L(n) = 1] = 1$

若我们清楚 $x(m)$ 的表达式, 以及在 $y(n) = 1$ 的条件下对 $L(n)$ 依次赋值, 则 $y(n)$ 是可以确定的, 这是一个确定的算法.

5 这是我想象的聊天

Memorandum-Day 1(想象的)

1

你好，想问一下你也有转专业的准备吗

1-Case 1

嗯

1-Case 2

是的，怎么了

2

没什么，因为我前年也是经历过转专业的，队这方面比较了解，可以根据你的情况帮你做适当的规划

2-Case 1

哦

2-Case 2

嗯

3

你以后想从事什么工作，这个有想过吗

3-Case 1

我想……

3-Case 2

不知道

4

我感觉电信挺好的，挺热门的，这个专业竞争压力应该还是挺大的，不过只要认真准备的话是肯定没问题的

4-Case

哦

5

想转专业的话，最重要的就是好好学高数，这学期所有水课的分都尽量考到最高，(水课很容易准备的，后街和农贸就有考试题库)，(高数如果感觉难的话可以来问我，我会随时为你进行耐心的解答)

5-Case

哦

6

除了高数之外的其他数学也可以来问我，你们专业后面应该要学复变函数和数学物理方程，这两科比较难，不会的话可以随时问我

6-Case

哦

7

你们的 C 题做的怎么样了

7-Case

就那样。

Memorandum-Day 2(想象的)

1

C 题模型做完了吗，我会 ARIMA，有现成的 Matlab 代码，我可以帮你们加一点东西

1-Case

没有

2

论文写的怎么样了，我可以帮你看看排版有没有什么修改的建议，我打过两年数模，对排版什么的比较了解，会打好看的公式吗，不会的话我可以教你

2-Case

不怎么样

3

想用 latex 排版论文吗，如果想的话我可以把我自己做的模板发给你，可以帮你安装 latex

3-Case 1

不用

3-Case 2

行

Memorandum-Day 3

1

最近高数，学的怎么样了

2

你们讲到微分方程了吗，这个地方如果不会可以随时问我

3

今天下午一起去图书馆吗

3-Case 1-1

我看看你们高数学到了哪里了

3-Case 1-2

你这个题是不太会吗，我感觉，这个可以用 XX 方法，xx 这个可以学一下，挺重要的这个

3-Case 1-3

(22:00) 现在有点晚了，我送你回宿舍吧……

3-Case 2

全剧终

Memorandum Day-4

1

到宿舍了吗现在

2

今天玩的感觉好吗，如果感觉玩的好的话，我们后面可以经常出来玩

3

你们的 C 题做的怎么样了

4

正好明天上午我要去图书馆，明天一起去图书馆吗/ww

5

明天你应该要做数学建模题吧

6

你们的亚太打的怎么样了

Memorandum-Day 5(Monday)

Now

虽然说周六晚上 22:18 以后，就没有后续了，那一天，22:18 发出的消息，终究还是没有等到回复.22:20,22:24,22:30,23:00, 直到回宿舍的时候，00:00，这是一场没有结果的等待……

不过在重大的执念面前，这点弯路不算什么的，我想起今年暑假有个学弟，也是比较喜欢给我发消息喜欢找我聊天，那时候我还不怎么认识他，但是他经常找我，时间久了，我对他印象就越来越深了，我也开始喜欢找学弟聊天了，或许，坚持下去，就可能有结果吧……

1

上周亚太杯打的怎么样呀 ~

2

图片.png

3

上次玩丢手绢又输了

4

结果被拍了这个照片/ll

5

我是不是挺好看的 ya/ww

6

下次让你也变成米老鼠/ww

7

最近感觉状态怎么样，如果有不开心的地方可以随时找我聊天 ~

8

有兴趣玩 latex 吗，我把我的模板送给你 ~

9

后面有时间的话，一起去图书馆吗 ~

10

前几天你们参加亚太杯辛苦了，今天记得早点休息

11

论文写完没呀 ~

12

比赛有啥感觉呀哈哈哈哈

My Title

或许，我在等待，我对 ta 的感觉消退的那一天

My Title

该说不说，进口的表情包挺好看的

6 $\pi_6(S^2) = \mathbb{Z}_{12}$

Definition 6.0.1: 纤维

我们称 $p: E \rightarrow B$ 满足对空间 X 的同伦提升性, 若对任意同伦 $H: I \times X \rightarrow B$, 只要有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ I \times X & \xrightarrow{H} & B \end{array} \quad (1)$$

则 H 可以提升为同伦 $\tilde{H}: I \times X \rightarrow E$ 使得上图交换, 这里 $i: x \rightarrow (0, x)$ 是嵌入映射. 这相当于说, 只要态射 $g: X \rightarrow B$ 能提升为 $f: X \rightarrow E$, 则连接 g 的同伦 H 可以提升为连接 f 的同伦 \tilde{H} .

若 p 对任意空间都有同伦提升性, 我们称 p 是一个 (Hurewicz) 纤维化 (fibration), 此时称 B 是底空间, E 是全空间, $x \in B$ 在 p 下的逆像通常记为 Fib_x 称为 x 的纤维 (fiber); 若只对单位闭球 D^n 有同伦提升性则称为弱纤维化或 Serre 纤维化.

纤维映射可以自然在基点空间中定义, 这时基点在纤维化下的逆像称为该纤维化的纤维. 所有到 B 的纤维化自然构成了 Top/B 的一个全子范畴.

Definition 6.0.2: 纤维丛

空间 B 上的一个纤维丛包含以下资料

- (1) 给定的丛 $p: E \rightarrow B$
- (2) 给定的空间 F , 称为此纤维丛的纤维

使得存在一个开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, 满足对任意 $i \in I$ 存在同胚映射 $\phi_i: U_i \times F \rightarrow p^{-1}(U_i)$, 使得 $p \circ \phi_i$ 恰好是积空间的典范投射 $U_i \times F \rightarrow U_i$

这里 $\{\phi_i\}_{i \in I}$ 称为 p 的一个平凡化, 平凡纤维化自然是一个纤维丛, 称为平凡丛

Exampe 6.0.3: 平凡纤维

投射 $p_B: B \times F \rightarrow B$ 是纤维化, (在 Top/B 中) 同构于此类纤维化的切片自然还是纤维化, 我们称为平凡纤维.

Definition 6.0.4: 覆叠空间 (Covering Space)

若纤维丛 (B, p, E, F) 满足 F 是离散空间, 则称它是 B 上的一个覆叠, E 称为 B 上的覆叠空间

由于离散空间的同伦群是平凡群, 所以

Theorem 6.0.5

若 $p: \hat{X} \rightarrow X$ 是覆叠映射, 纤维为 F , 则有自然的群同态 $p_*: \pi_n(\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$, 这里 $p(\hat{x}_0) = x_0, n \geq 1$, 则

- (1) p_* 是单同态
- (2) 若 $n \geq 2$, 则 p_* 是同构
- (3) 若 \hat{X} 道路连通, 则存在集合的一一对应 $F \cong \pi_1(\hat{X}, x_0)/p_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0))$

Theorem 6.0.6 (环面同伦群)

把 S^1 看作复平面的单位圆周, 则指数映射

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\rightarrow e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

是一个覆叠映射, 一般地有覆叠映射

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow T^n \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) &\rightarrow (e^{2i\pi t_1}, e^{2i\pi t_2}, \dots, e^{2i\pi t_n}) \end{aligned}$$

具备如下性质

$$\pi_k(T^n, *) = \begin{cases} \mathbb{Z}^n, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

这个定理具有下面的推论

Corollary 6.0.7

$$\pi_r(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

Theorem 6.0.8

若 X 是 (由基点作为唯一 0 胞腔的) CW 复形而 i_n 是 n 维骨架 X^n 到 X 的嵌入 ($n > 0$), 则同伦群函子作用于 i_n 上得到群同态

$$\pi_r(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_r(X, x_0) \quad (3)$$

则

- (1) 若 $r < n$, 则上述同态是同构
 - (2) 若 $r = n$, 则上述同态是满射
- 换言之 CW 复形的同伦群只与其相应维数的骨架有关.

Corollary 6.0.9

若 $r < n$, 则 $\pi_r(S^n) = 0$

Theorem 6.0.10

若 $p: E \rightarrow B$ 是弱纤维化, 取 $b_0 \in B', E' = p^{-1}(B'), e_0 \in E$ 满足 $p(e_0) = b_0$. 则 p 看作基点空间偶的态射 $p: (E, E', e_0) \rightarrow (B, B', b_0)$, 再将相对同伦函子作用于 p 上, 得到映射 $p_*: \pi_n(E, E', e_0) \rightarrow \pi_n(B, B', b_0)$, 则当 $n \geq 1$ 时, p_* 是保基点的一一映射.

取 $B' = b_0, E' = p^{-1}(b_0)$ 记为 F , 在相对同伦群的长正合列

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(F, e_0) \longrightarrow \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E, e_0)$$

中引入 Theorem 6.0.10 的同构得到如下的长正合列:

Theorem 6.0.11: 弱纤维化的正合列

我们有长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) &\xrightarrow{\partial'} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \\ &\xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(B, b_0) \end{aligned}$$

Theorem 6.0.12

若 p 是 B 上的纤维丛, 则 p 是一个弱纤维化但未必是纤维化, 若 p 仿紧 Hausdorff, 则 p 是纤维化.

Theorem 6.0.13: Hopf 纤维丛

$h: S^3 \rightarrow S^2$ 是一个纤维为 S^1 的纤维丛

Corollary 6.0.14: Hopf 纤维化

我们把 S^{2n-1} 视为 \mathbb{C}^n 的子空间, 商映射 $\mathbb{C}^n \rightarrow P\mathbb{C}^n$ 限制在 S^{2n-1} 上得到纤维为 S^1 的纤维化, 由于球面是紧的, 根据 Theorem 6.0.12, 上述纤维丛给出了一个纤维化, 称为 **Hopf 纤维化**

Theorem 6.0.15

若 $r \geq 3$, 则存在正合列

$$0 \longrightarrow \pi_r(S^3) \xrightarrow{h_*} \pi_r(S^2) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi_2(S^2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

证明. 根据 Corollary 6.0.7, Corollary 6.0.9 以及 Theorem 6.0.11 可得 □

由正合列的性质, 可知 Theorem 6.0.15 中的 h_* 是同构。下面就是求解 $\pi_6(S^2)$ 的核心定理了

Theorem 6.0.16

Hopf 纤维化 h 诱导的同伦群同态 $h_* : \pi_r(S^3) \rightarrow \pi_r(S^2)$ 在 $r \geq 3$ 的时候是同构, 所以有 $\pi_6(S^3) \cong \pi_6(S^2)$, 由于 $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$, 所以 $\pi_6(S^2) \cong \mathbb{Z}_{12}$

证明. 由于 $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$ 以及 $\pi_r(S^3) \cong \pi_r(S^2)$ $r \geq 3$, 所以 $\pi_6(S^2) \cong \pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$ □

Answer

$$\pi_6(S^2) \cong \mathbb{Z}_{12}$$

7 理想的时间线

2022 年 12 月

好好打数学基础，好好学英语准备六级争取过 500 分

2023 年 1 月

自己一个人写完至少一篇数模论文并且发表为 EI 会议以上级别的
参加早读打卡的志愿活动
好好搞心理情景剧的活动
青马工程的册子好好卷

2023 年 2 月

学完代数拓扑，黎曼几何，交换代数，范畴论，同调代数，复几何，代数 K 理论，……

2023 年 3 月

教资不再翻车，可以今年拿到证
数学竞赛拿到自己满意的成绩
上学期的期末考试拿到极限成绩，让绩点上去

2023 年 4 月

尽自己的全力让自己做到对协会的付出问心无愧，再把协会交给 21 级的同学们
把去年的项目做完，科技立项可以成功立项，大创可以拿到省级以上，Mathorcup 可以拿到一等奖，可以自己发一个关于去年项目的北大核心……

2023 年 5 月

可以精通很多纯数学方面的知识，可以用拓扑或者代数的知识去发一个论文，哪怕是普刊也可以
好好学专业课，下学期一科也不可以翻车

2023 年 6 月

拿到综 A，参加互联网 +，视当时具体情况决定是否参加三下乡
写简历，去追寻自己的梦想
好好补习数分高代复变概率论 ode 的基础，以及政治方面的必备知识，准备接下来的面试

2023 年 7 月

这时候就是面试的时间了，调整好自己的心态，留在学校，做完最后的冲刺

2023 年 8 月

不知道这个时间还有没有面试了，如果还有面试，就全力准备，如果没有面试，并且分不够的话，就回去逐梦计划，或者返家乡

2023 年 9 月

获取到推免资格，在 9 月 28 日下午，填报完成志愿，向全世界的人宣布胜利，请协会的同学一起吃饭，一起聊聊天，哪怕我已经放弃你了……

2023 年 10 月

去看看下一届协会的百团大战，去看看下一届协会的面试，去看看下一届协会的新生……
哪怕我不奢望自己得到什么

2023 年 11 月

这么快，我已经认识你一整年了，可能那时候，我对你的感觉就淡去了吧

2023 年 12 月

地质统计学考完了就可以跑路了，但是，我想晚点回家，想和协会的同学多聚会几次，因为总会有一天，我们分道扬镳，想让那一天慢一点，再慢一点……

2024 年 1 月

去成都的各个角落再看一看吧，可能不久后就没机会了

2024 年 2 月

时间不早了，去做一点实习吧，我想有一点收入的技能，想等待未来的 Ta 积累一点，哪怕不是你……

2024 年 3 月

是做毕业论文和毕业设计的时间了，那就用前几年学到的数学建模知识把毕业论文和毕业设计做到最好

2024 年 4 月

这时候就是协会换届的时候了，可能那时候，你已经是 23 届会长了，我和你可能不会有交集了，但是我还是好想把 LaTeX 和数学建模的技能传递给你啊……
可能换届大会那天，就是我们的最后一面了吧……

2024 年 5 月

那时候，我在校的时间应该所剩无几了吧，我想给学校的一草一木拍照纪念一下，去看看樱花盛开的东教小路，去感受夏天的花香，去看看农贸门口的果树……

2024 年 6 月

那时候，我应该已经毕业了，在毕业之前，我想认真的感谢每一个我身边对我帮助较大的人，想感谢协会，让我学会了很多东西；想感谢我的数学建模队友，两年的比赛，让我学会了 Matlab，让我学会了很多数学模型，让我学会了写论文，让我提升了很多自学能力，以及学会了 \LaTeX ；想感谢我的室友，四年的同住，帮助了我很多事情；想感谢你，我们的相遇，让我学会了追女孩子，学会了主动给女孩子发消息，学会了用 \LaTeX 写情感日记，让我学会了权衡与取舍……

2024 年 7 月

那时候，是暑假了，想找个人一起毕业旅行，往后，我和你应该不会见面了吧

2024 年 9 月

那时候，我应该开始新的生活了吧，不知道那时候还可不可以加入一个像数学建模协会一样温暖的团体了，不知道那时候还可不可以遇见一个在 2022 年 11 月 18 日那次遇见的女孩子了，不知道那时候还可不可以找到一个双向奔赴的人，不知道那时候还会有现在一样热爱数学了，不知道那时候，我会不会变得功成名就，变得很富有，……

8 那就放弃吧，去等待功成名就，去等待春暖花开

2022 年 12 月 26 日

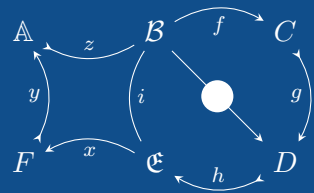
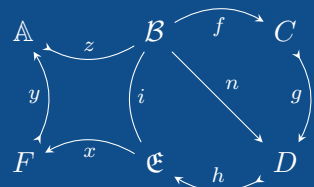
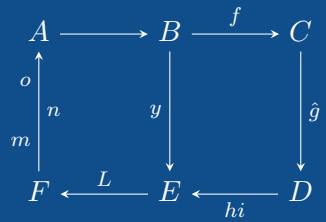
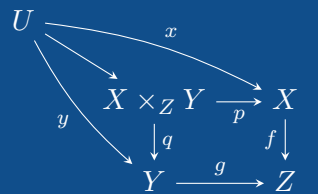
这边建议直接下一个

感觉没啥可能

建议及时止损

即使我不爱听，但是我的同事告诉我的，都是很明显的事实，这个时候，我更应该好好学习，更应该建设自己，做更重要的事情，而不是在一片沙漠中等待花开，应该做的是，找到出口，做自己现阶段适合做的事情，等待自己感觉消退的那一天，等待 2023 年 9 月 28 日向全世界宣告胜利，等待 2024 年 9 月遇到一个双向奔赴的人，……

$$\pi_6(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}_{12}$$



THANKS FOR READ-ING!