概率失真条件下技术准备金评估

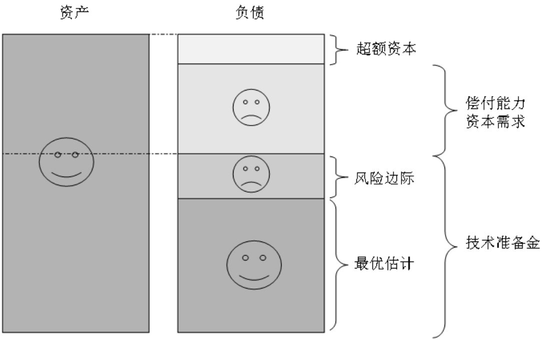
基于贝叶斯对数正态模型

刘乐平　高磊　田静

Department of Statistics
Tianjin University Of Finance and Economics

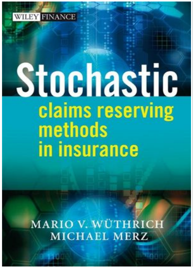
2014 年 8 月 27 日

技术准备金 = 准备金的最优估计 + 风险边际



准备金的最优估计：研究较为成熟

- 未决赔款的预测均方误差 (Mack,1993))⇒
- 未决赔款的预测分布 (England,1999，2002，2006)⇒
- 随机性准备金评估模型 (Wüthrich & Merz,2008；张连增和段白鸽,2013)

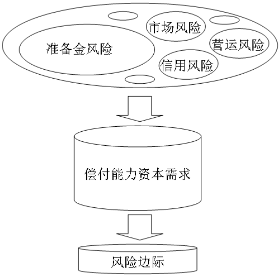


计算风险边际：资本成本法

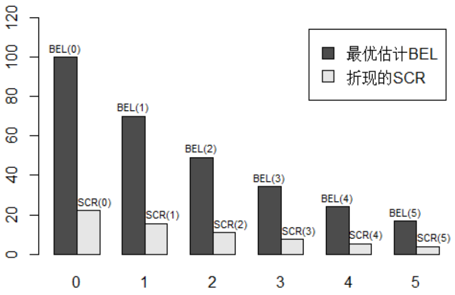
- Salzmann and Wüthrich(2010)
- 张连增和刘怡（2013）

资本成本法

$$RM = COC \times \frac{\sum_{t\geq 0} SCR(t)}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$$



计算风险边际：资本成本法的不足



$$\frac{SCR(i)}{BEL(i)} = \frac{SCR(0)}{BEL(0)} \Rightarrow SCR(i) = SCR(0) \times \frac{BEL(i)}{BEL(0)}$$

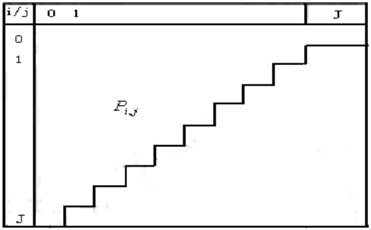
本文思路

- 本文不再把准备金最优估计和风险边际单独考虑，而是在准备金评估中融入风险因素，从而直接得到技术准备金。具体而言，基于贝叶斯对数正态模型，在概率失真条件下，通过选取风险参考变量的方式，将风险因素考虑到准备金的评估中来，最终得到技术准备金估计。

Content

Content

贝叶斯对数正态模型假设



贝叶斯对数正态模型 (Hertig,1985; Gogol,1993)：

- 累计赔款进展因子减去 1 并对数化后服从正态分布：

$$f_{i,j} = \log\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - 1\right) \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$$

- 均值向量相互独立，并且有各自的先验分布：

$$\mu_j \sim N(\gamma_j, \delta_j^2) \quad j = 1, \cdots, n-1,$$

估计参数的后验分布

- 在给定均值参数 $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ 的条件下，可以得到似然函数：

$$L_{D_n}(\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}) \propto \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n-i} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2}(f_{ij} - \mu_j)^2 \right\}$$

- $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ 的先验分布为正态分布：

$$\mu_j \sim N(\gamma_j, \delta_j^2) \quad j = 1, \cdots, n-1$$

- 根据贝叶斯公式可以得到 $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ 的后验分布：

$$p(\mu_1, \cdots, \mu_{n-1} \mid D_n) \propto \prod_{j=1}^{n-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2\delta_j^2}(\mu_j - \gamma_j)^2 \right\} \times \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n-i} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2}(f_{ij} - \mu_j)^2 \right\}$$

估计参数的后验分布

- 根据贝叶斯公式可以得到 $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ 的后验分布：

$$p(\mu_1,\cdots,\mu_{n-1} \mid D_n) \propto \prod_{j=1}^{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta_j^2}(\mu_j-\gamma_j)^2\right\} \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n-i} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}(f_{ij}-\mu_j)^2\right\}$$

- 先验分布为正态分布似然函数又是正态分布密度的乘积，满足共轭条件，因此 $p(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ 仍然是正态分布，即：

$$\mu_j \mid D_n \sim N(\gamma_j^{(n)}, (\delta_j^{(n)})^2) \quad j=1,\cdots,n-1,$$

- 其中后验参数 $r_j^{(n)}$ 和 $(\delta_j^{(n)})^2$ 为：

$$\gamma_j^{(n)} = \frac{\delta_j^2}{(n-j-1)\delta_j^2+\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{n-j-1} f_{i,j} + \frac{\sigma_j^2}{(n-j-1)\delta_j^2+\sigma_j^2}\gamma_j$$

$$(\delta_j^{(n)})^2 = \left(\frac{1}{\delta_j^2}+\frac{n-j-1}{\sigma_j^2}\right)^{-1}$$

准备金的最优估计

- 根据模型假设，可得未决增量赔款为：

$$X_{i,j} \mid D_n = C_{i,n+1-i} \times \prod_{l=n+1-i}^{j-2} \left(\exp\{f_{i,l}\}+1\right) \times \exp\{f_{i,j-1}\}$$

- $f_{i,j}$ 的后验分布为正态分布：

$$f_{i,j} \mid D_n \sim N(\gamma_j^{(n)}, \sigma_j^2 + (\delta_j^{(n)})^2)$$

- 利用对数正态分布的期望公式，可以得到未决增量赔款的最优估计：

$$E[X_{i,j} \mid D_n] = C_{i,n+1-i}\left(\prod_{l=n+1-i}^{j-2}\left(\exp(\gamma_l^{(n)} + \frac{1}{2}(\delta_l^{(n)})^2 + \frac{1}{2}\sigma_l^2) + 1\right)\right) \times \exp(\gamma_{j-1}^{(n)} + \frac{1}{2}(\delta_{j-1}^{(n)})^2 + \frac{1}{2}\sigma_{j-1}^2)$$

- 将未决增量赔款的最优估计加总可以得到准备金的最优估计：

$$R_n = \sum_{k>n+1} \sum_{i+j=k} E[X_{i,j} \mid D_n]$$

Content

概率失真：指数倾向转换

- 概率失真通过引入风险参考变量（reference portfolio）的方式，将风险因素考虑到准备金的评估中来。
- 我们关心 $X_{i,j}$，风险参考变量是 Y，指数倾向转换估计风险调整的未决赔款：

$$E^{*}(X_{i,j}) = \frac{E[\exp(\lambda Y)X_{i,j}]}{E(\exp(\lambda Y))}$$

- 如果 $exp(\lambda Y)$ 和 $X_{i,j}$ 正相关，则：

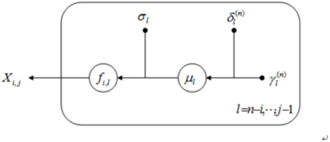
$$E^{*}(X_{i,j}) > E(X_{i,j})$$

概率失真: 选取风险参考变量

- 根据模型假设，可得未决增量赔款为：

$$X_{i,j} \mid D_n = C_{i,n+1-i} \times \prod_{l=n+1-i}^{j-2} \left(\exp\{f_{i,l}\}+1\right) \times \exp\{f_{i,j-1}\}$$

- X_{ij} 、 f_{ij} 和 μ_j 的关系用贝叶斯图模型来表示



- 选取 f_{ij} 和 μ_j 作为风险参考变量，并利用指数化的方法组合如下：

$$\Lambda = \prod_{j=1}^{n-1} \exp\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} f_{i,j} + \beta \mu_j\right).$$

概率失真: 选取风险参考变量

- 估计风险调整的未决增量赔款：

$$E^*(X_{i,j} \mid D_n) = \frac{1}{E(\Lambda \mid D_n)} E[\Lambda X_{i,j} \mid D_n]$$

- Λ 与 X_{ij} 正相关，所以：

$$E^*[X_{i,j}|D_n] > E[X_{i,j}|D_n]$$

- 加总求得风险调整准备金，也即技术准备金：

$$R_n^* = \sum_{k \geq n+1} \sum_{i+j=k} E^*[X_{i,j} \mid D_n]$$

计算策略：解析求解

- $E^*[X_{ij}|D_n]$ 的显式解：

$$E^*(X_{i,j}\mid D_n)=\frac{1}{E(\Lambda\mid D_n)}E[\Lambda X_{i,j}\mid D_n]$$

$$=C_{i,n-i}\left(\prod_{l=n-i}^{j-1}\left\{\exp\left\{\gamma_l^{(n)}+\frac{\left(\delta_l^{(n)}\right)^2}{2}+\frac{\sigma_l^2}{2}\right\}\exp\left\{(\beta+l\alpha)\left(\delta_l^{(n)}\right)^2+\alpha\sigma_l^2\right\}+1\right\}\right)$$

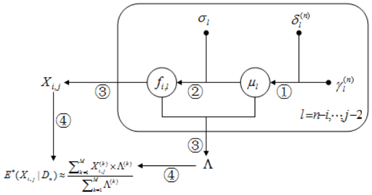
$$\times\exp\left\{\gamma_j^{(n)}+\frac{\left(\delta_j^{(n)}\right)^2}{2}+\frac{\sigma_j^2}{2}\right\}\exp\left\{(\beta+j\alpha)\left(\delta_j^{(n)}\right)^2+\alpha\sigma_j^2\right\}$$

计算策略：随机模拟

$$E^*(X_{i,j} \mid D_n) = \frac{1}{E(\Lambda \mid D_n)} E[\Lambda X_{i,j} \mid D_n]$$

$$X_{i,j} \mid D_n = C_{i,n+1-i} \times \prod_{l=n+1-i}^{j-2} \left(\exp\{f_{i,l}\}+1\right) \times \exp\{f_{i,j-1}\}$$

$$\Lambda = \prod_{j=1}^{n-1} \exp(\alpha \sum_{i=1}^{n} f_{i,j} + \beta \mu_j).$$



Content

数据来源

- 数据来源于 Wüthrich,Embrechts 和 Tsanakas(2011):

13109	20355	21337	22043	22401	22658	22997	23158	23492	23664	23699	23904	23960	23992	23994	24001	24002
14457	22038	22627	23114	23238	23312	23440	23490	23964	23976	24048	24111	24252	24538	24540	24550	0
16075	22672	23753	24052	24206	24757	24786	24807	24823	24888	24986	25401	25681	25705	25732	0	0
15682	23464	24465	25052	25529	25708	25752	25770	25835	26075	26082	26146	26150	26167	0	0	0
16551	23706	24627	25573	26046	26115	26283	26481	26701	26718	26724	26728	26735	0	0	0	0
15439	23796	24866	25317	26139	26154	26175	26205	26764	26818	26836	26959	0	0	0	0	0
14629	21645	22826	23599	24992	25434	25476	25549	25604	25709	25723	0	0	0	0	0	0
17585	26288	27623	27939	28335	28638	28715	28759	29525	30302	0	0	0	0	0	0	0
17419	25941	27066	27761	28043	28477	28721	28878	28948	0	0	0	0	0	0	0	0
16665	25370	26909	27611	27729	27861	29830	29844	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15471	23745	25117	26378	26971	27396	27480	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15103	23393	26809	27691	28061	29183	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14540	22642	23571	24127	24210	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14590	22336	23440	24029	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13967	21515	22603	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12930	20111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12539	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

先验参数设定

- 参照 Wüthrich,Embrechts and Tsanakas(2011) 设定先验参数 σ_j^2、δ_j^2 和 γ_j：

j	σ_j^2	δ_j^2	γ_j
1	0.0081	0.0392	-0.6700
2	0.1296	0.0392	-3.0000
3	0.3600	0.0392	-3.6900
4	0.8100	0.0392	-4.3600
5	1.3456	0.0392	-4.8200
6	1.6641	0.0392	-5.4700
7	1.6900	0.0392	-5.9000
8	1.7161	0.0392	-6.1000
9	1.7956	0.0392	-6.2000
10	1.9600	0.0392	-6.3000
11	2.2500	0.0392	-6.4000
12	2.2500	0.0392	-6.5500
13	1.6900	0.0392	-7.0000
14	0.6400	0.0392	-7.5000
15	0.0576	0.0392	-7.9700
16	0.0016	0.0392	-9.0000

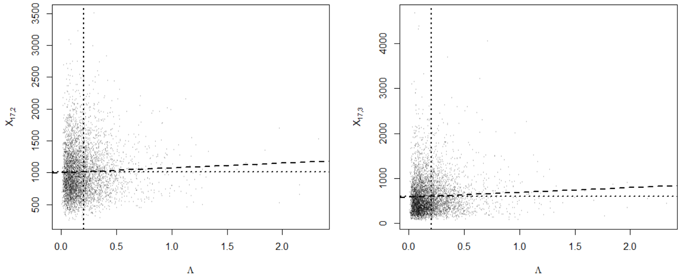
后验分布参数的估计

- 均值向量 $\mu_1, \ldots, \mu_{17-1}$ 的后验分布，后验参数 $r_j^{(n)}$ 和 $(\delta_j^{(n)})^2$ 为：：

j	$(\delta_j^{(n)})^2$	$\gamma_j^{(n)}$
1	0.00050	-0.6707
2	0.00708	-2.9995
3	0.01553	-3.6884
4	0.02406	-4.3603
5	0.02905	-4.8195
6	0.03114	-5.4710
7	0.03182	-5.9625
8	0.03252	-5.9294
9	0.03337	-6.1301
10	0.03439	-6.3914
11	0.03549	-6.3463
12	0.03606	-6.5498
13	0.03588	-6.9442
14	0.03312	-7.6638
15	0.01660	-7.9715
16	0.00154	-10.0433

风险参考变量组合 Λ 与 $X_{i,j}$ 具有正相关性

- Λ 与 $X_{17,2}$ 、$X_{17,3}$ 的散点图:



准备金最优估计、技术准备金估计与风险边际

- 准备金最优估计、技术准备金估计与风险边际：两种计算策略下的比较：

事故年 i	模拟方法		解析方法	
	准备金最优估计	技术准备金估计	准备金最优估计	技术准备金估计
2	1.0696	1.0720	1.0690	1.0712
3	10.3386	10.5888	10.3385	10.5528
4	27.5863	28.8791	27.7217	28.9162
5	91.5382	98.1890	89.4839	95.7352
6	209.1481	224.6551	211.5775	229.3020
7	347.8654	379.3841	344.3879	374.5576
8	548.8229	586.1291	545.1965	592.6011
9	683.4801	750.4740	680.8829	738.9505
10	900.2457	987.0672	896.7386	971.5642
11	1003.6628	1095.5805	998.0010	1079.8564
12	1355.8946	1458.9285	1356.8279	1465.6157
13	1547.9239	1664.8716	1532.2108	1648.6493
14	2000.5922	2129.4081	2016.0093	2155.2549
15	2626.1309	2791.8311	2635.7285	2788.4603
16	3512.6318	3647.9741	3542.8645	3698.0609
17	9771.7957	9905.0930	9782.5654	9934.1434
总计	24638.7269	25760.1251	24671.6038	25813.2918
风险边际	1121.3982		1141.6880	

两种风险因素单独考虑时的结果

- 分别考虑过程风险和参数风险时得到的技术准备金:

	准备金最优估计①	技术准备金估计	风险边际
$\alpha=0.02\quad\beta=1$（参数风险、过程风险）	24638.7269	25760.1251	1121.3982
$\alpha=0\quad\beta=1$（参数风险）	24638.7269	25151.9097	513.1828
$\alpha=0.02\quad\beta=0$（过程风险）	24638.7269	25230.5797	591.8528

结语

1. 在概率失真条件下，将风险因素——过程风险和参数风险融入到准备金评估中来，可以直接得到技术准备金，毋需再分别计算准备金的最优估计和风险边际。
2. 在贝叶斯对数正态模型下，利用随机模拟方法得到的技术准备金与解析推导结果非常接近；在一般的贝叶斯准备金评估模型下，尤其是多重积分运算不易求出显式解时，随机模拟方法更有优势。
3. 准备金评估中的两种风险因素 —-过程风险和参数风险可以分别考虑，从而得到不同风险因素下的技术准备金估计值，因此结果更为丰富。
4. 对于过程风险和参数风险前系数的设定，本文没有进行深入分析，未来研究将在这个方向上做进一步深入的工作。

参考文献

1 Wüthrich M V, Merz M. Stochastic claims reserving methods in insurance[M]. John Wiley & Sons, 2008.

2 England P. Solvency II: reserving risk, risk margins and technical provisions[C]. Casualty Loss Reserve Seminar,LasVegas,2011-09-15.

3 SALZMANN R W, Wüthrich M V. Cost-of-capital margin for a general insurance liability runoff[J]. ASTIN Bulletin-Actuarial Studies in non Life Insurance, 2010, 40(2): 415.

4 Wüthrich M V, Embrechts P, Tsanakas A. Risk margin for a non-life insurance run-off[J]. Stat Risk Model, 2011, 28(4): 299-317.

5 Wang S S. Normalized exponential tilting: pricing and measuring multivariate risks[J]. North American Actuarial Journal, 2007, 11(3): 89-99.

6 张连增, 刘怡. 欧盟保险偿付能力监管标准 II 框架下的技术准备金估计 [J]. 南京审计学院学报, 2013, 10(2).

谢谢大家！

A/Q?