13 | 如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度?

2020-08-28 朱维刚

重学线性代数 进入课程 >

讲述：朱维刚
时长 09:10 大小 8.41M

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每 24 小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

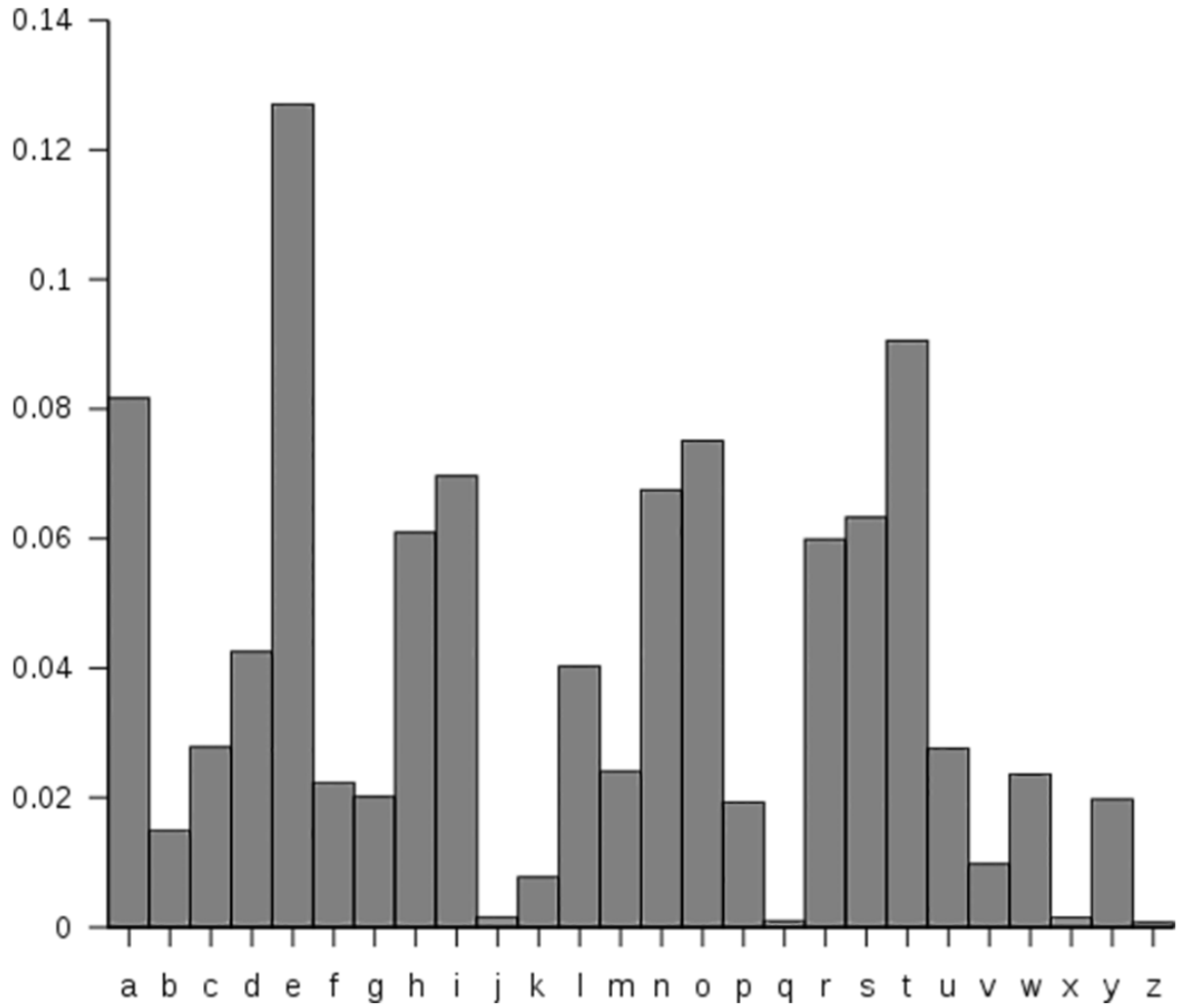
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是 26 个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由 Lester S. Hill 在 1929 年发明。每个字母当作 26 进制数

字：A=0，B=1，C=2...，把一串字母当成 n 维向量，和一个 $n \times n$ 的矩阵相乘，再将得出的结果和 26 进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵 E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为 n 的多个块：$v_1, v_2, \ldots$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的 n 表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是 n 越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵 E 相乘：$Ev_1, Ev_2, \ldots$，并和 26 进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵 E 的逆矩阵 $D \equiv E^{-1} (\mathrm{mod} 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵 D 相乘，并和 26 进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；

2. 对应字母表的排列未知；

3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A 和 B 双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个 3×3 矩阵。

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix}$$

这一次 A 要给 B 的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在 A 方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的 E 矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

极客时间

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为 3 的 5 个块，也就是维度为 3 的 5 个列矩阵。

$$v_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 19 \end{bmatrix}$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵 E 相乘：

$$Ev_1 = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 360 \\ 467 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$Ev_2 = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157 \\ 204 \\ 283 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$Ev_3 = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 470 \\ 691 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$Ev_4 = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 \\ 370 \\ 458 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 22 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$Ev_5 = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 203 \\ 305 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 25 \\ 21 \\ 19 \end{bmatrix}$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B 拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵 E 的逆矩阵 D：

$$D \equiv \begin{bmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{bmatrix}^{-1} (\mathrm{mod} 26) \equiv \begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵 D 相乘，并和 26 进行模运算，得到相应结果。

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 424 \\ 869 \\ 632 \end{bmatrix} \mathrm{mod}\ 26 = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 348 \\ 680 \\ 469 \end{bmatrix} \mathrm{mod}\ 26 = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 352 \\ 835 \\ 648 \end{bmatrix} \mathrm{mod}\ 26 = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 366 \\ 846 \\ 662 \end{bmatrix} \mathrm{mod}\ 26 = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 21 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 495 \\ 1092 \\ 929 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 19 \end{bmatrix}$$

最后，B 通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是 3×3 的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是 n 越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是 AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES 是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用 128、192 和 256 位密钥，并且用 128、192 和 256 位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的 3×3 可逆矩阵，也可以使用其它 n×n 的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

提建议

上一篇 12 | 如何通过矩阵转换让3D图形显示到二维屏幕上？

下一篇 14 | 如何在深度学习中运用数值代数的迭代法做训练？

精选留言 (2)

写留言

Paul Shan
2020-08-31

希尔密码原理例子的加密矩阵E和解密矩阵D相乘不是单位矩阵，是不是我哪里算错了。

作者回复: Hi Paul，漏了模乘逆元，我会修改一下。

qinsi
2020-08-30

模仿游戏里因为德军每天都会发送相同文字开头的报文，所以能被盟军反推出密码机每天的初始配置。希尔密码也有这个问题

展开