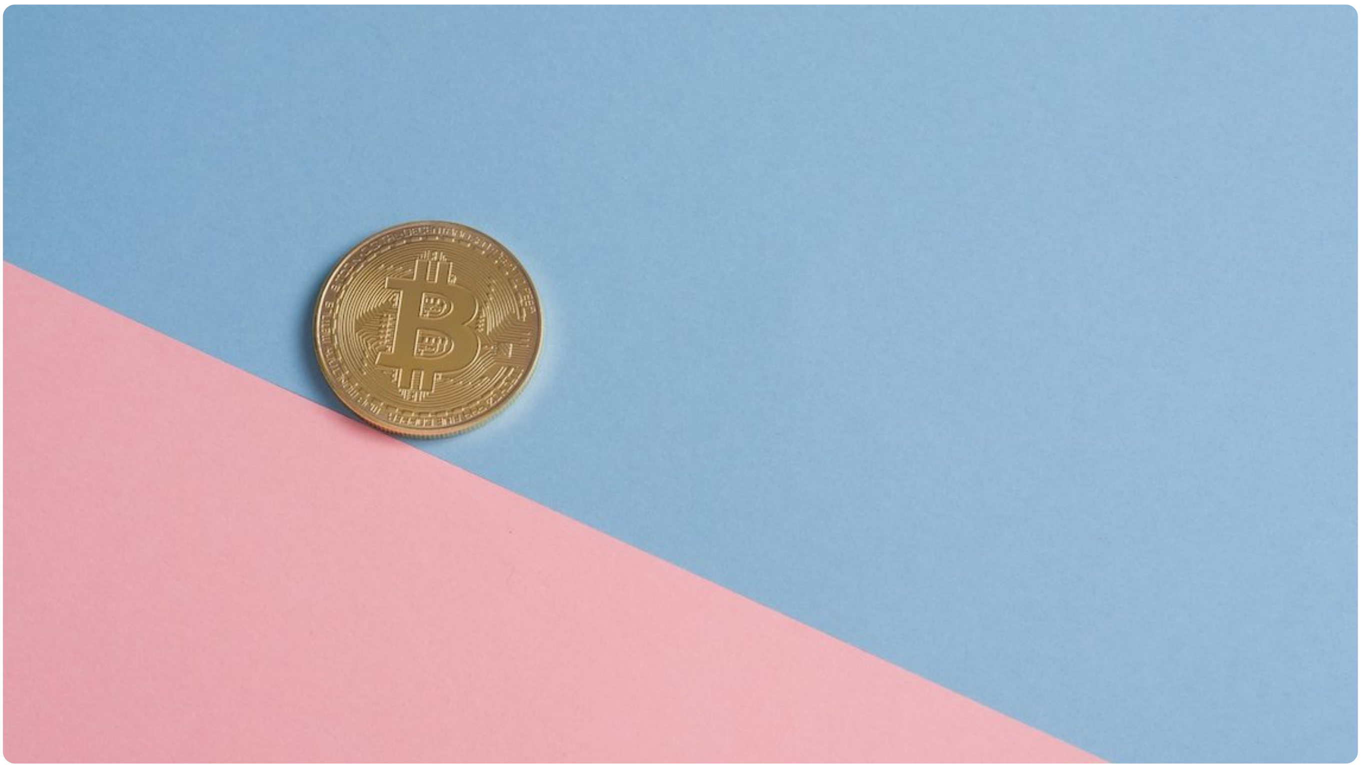
下载APP

10 | 解析几何：为什么说它是向量从抽象到具象的表达?

2020-08-19 朱维刚

重学线性代数 进入课程 >



讲述：朱维刚
时长 14:27 大小 13.24M

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析 PCA 中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间 V 上的一个范数就是一个函数，它计算 V 中的每一个向量 x 的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正 λ 倍，其对应的函数也扩正大倍。设 $\lambda \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设 $x, y \in V$，$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$；
3. 正定性：向量 x 的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_1, L_2, \ldots, L_\infty$。

L_1 范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设 $x \in R^n$，得到下面这个表达式。

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

L_2 范数：欧式范数，也叫欧式距离，设 $x \in R^n$，得到下面这个表达式。

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

L_∞ 范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设 $x \in R^n$，得到下面这个表达式。

$$\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)$$

我们发现，向量的模和 L_2 范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于 L_2 范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间 V 是 R^2，定义内积 $\langle x, y\rangle = x_1 y_1-(x_1 y_2+x_2 y_1)+2 x_2 y_2$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 这样的形式，那么内积空间 V 可以被表示成这样：$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间 V 和它的元素 x、y、z，以及一个 $c \in R$：

> 满足对称性：x 和 y 的内积等于 y 和 x 的内积，$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$；
>
> 满足线性性：x 和 $y+cz$ 的内积等于，x 和 y 的内积，与 x 和 z 的内积乘以 c 后的和，
> $\langle x,y+cz\rangle=\langle x,y\rangle+c\langle x,z\rangle$；
>
> 满足正定性：x 和 y 的内积大于等于零，$\langle x,y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵 A 属于方阵 $R^{n\times n}$，对任意非零向量 x，都有 $x^TAx>0$，那么 A 就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$A=\begin{bmatrix}9 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix}$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为 $x^TAx>0$。

$$x^TAx=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=(3x_1+2x_2)^2+x_2^2>0$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$A=\left[\begin{array}{ll}9 & 6 \\ 6 & 3\end{array}\right]$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为 $x^{T} A x$ 可能小于 0。

$$x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}x_{1} & x_{2}\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}9 & 6 \\ 6 & 3\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}x_{1} \\ x_{2}\end{array}\right]=\left(3 x_{1}+2 x_{2}\right)^{2}-x_{2}^{2}$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量 $x=\left[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}\right]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出 x 的范数是 $\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间 V，$(V,\langle\cdot, \cdot\rangle)$，$x$ 和 y 是它的两个向量，那么 x 和 y 之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算 x 和 y 之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西 - 施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量 x 和 y 之间的角度：a。

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

取值是从 -1 到 1 之间，那么角度就是从 0 到 π 之间，我们用 cos 来表示就是：

$$\cos(a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

其中 a 就是角度，a 的角度取值是 0 到 π 之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x 和 $y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是 0，也就是说它们的方向是一样的，y 只是对 x 扩大了 4 倍而已。

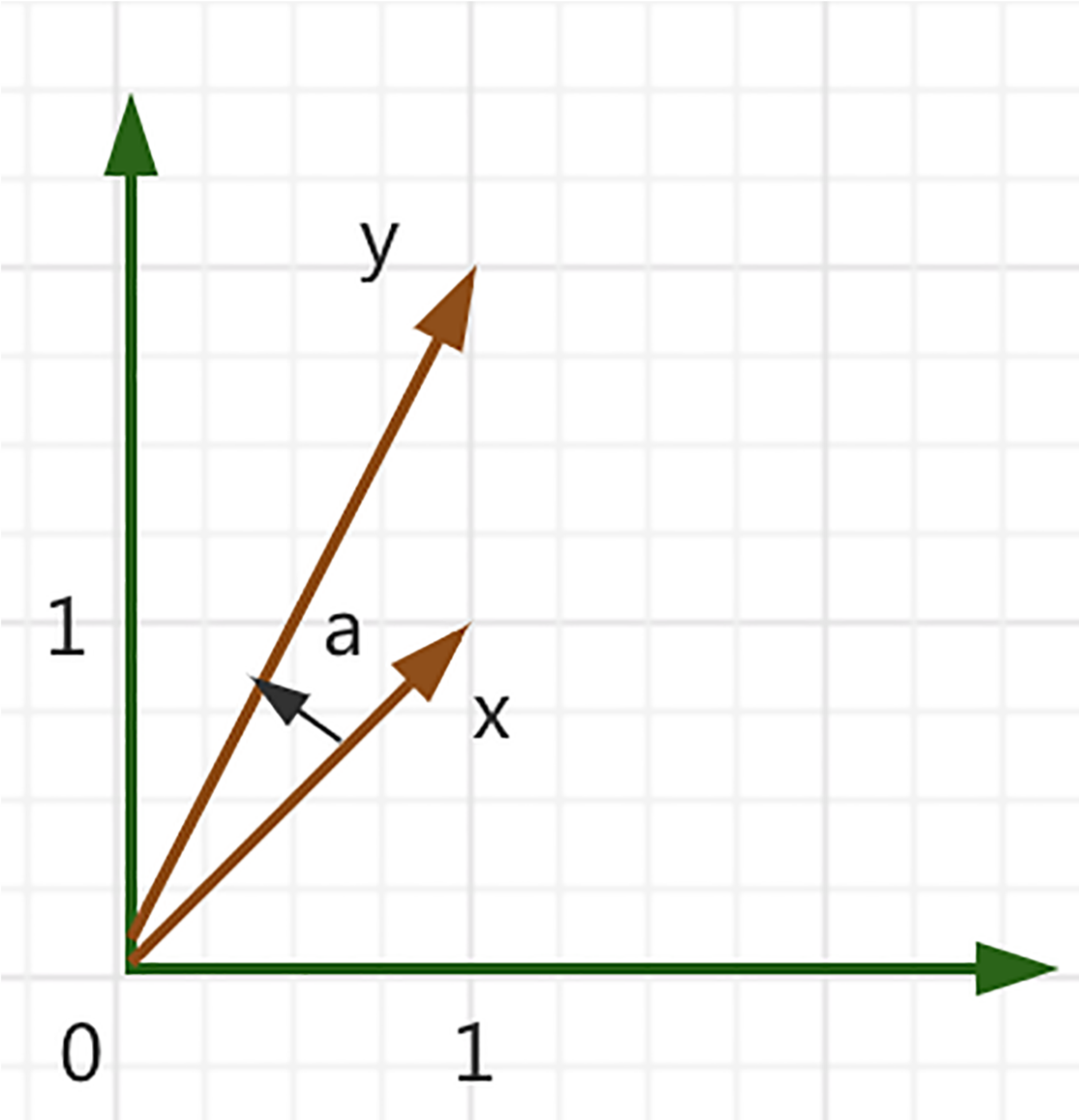
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设 $x=\left[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}\right]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$\cos(a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

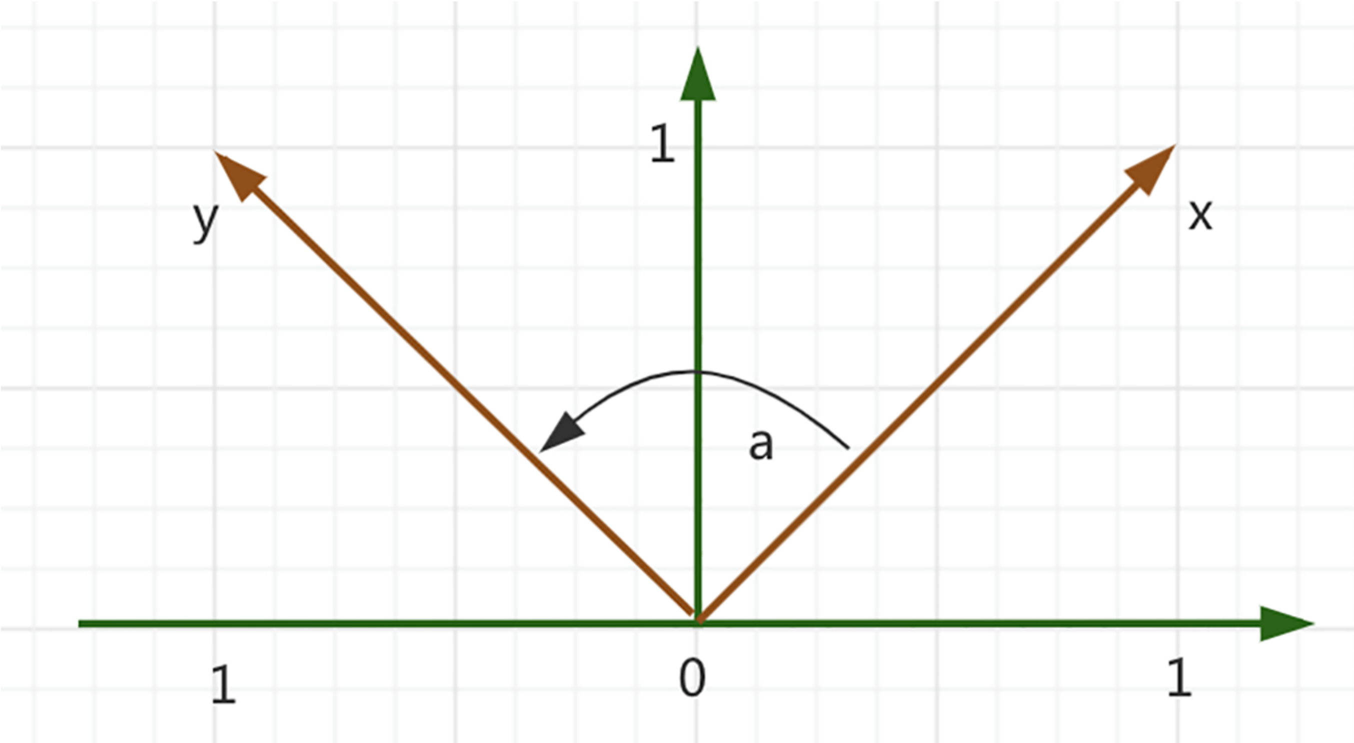
$$\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量 x 和 y 内积等于 0，$\langle x, y\rangle = 0$，那么 x 和 y 是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x 和 y 的范数都等于 1，$\|x\| = \|y\| = 1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么 x 和 y 就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



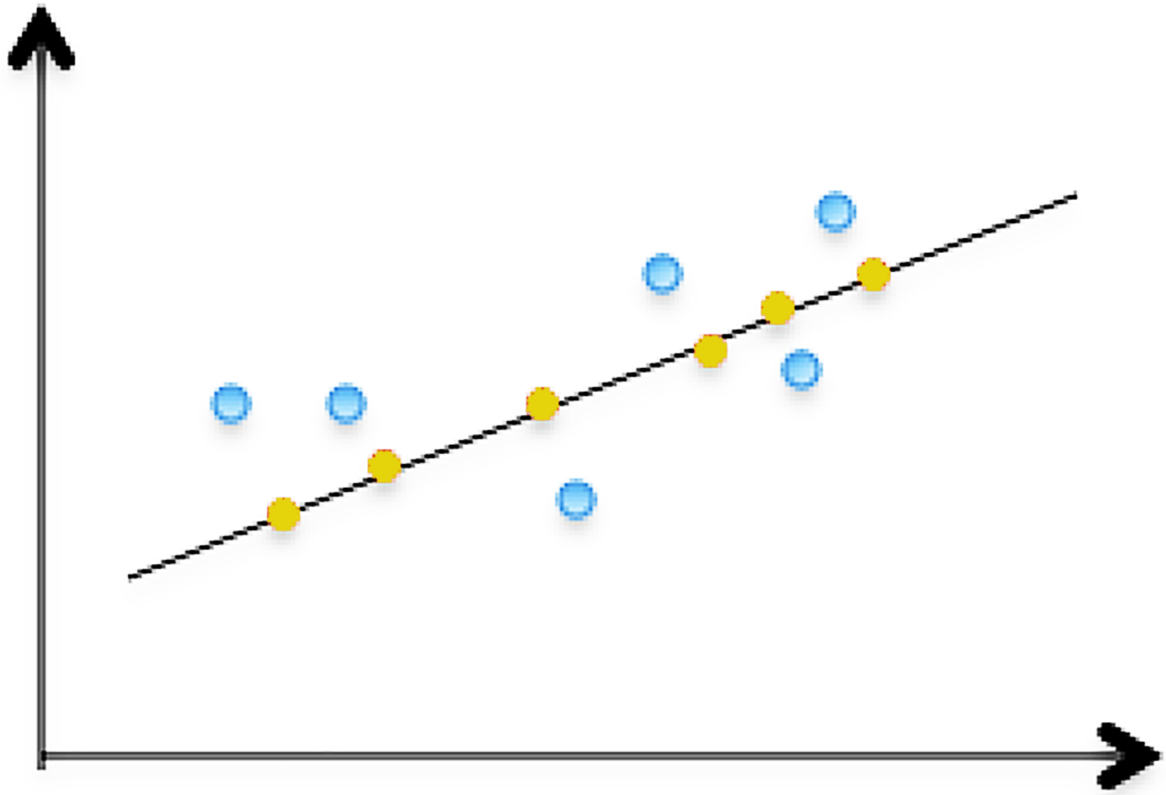
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第 5 节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA 主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



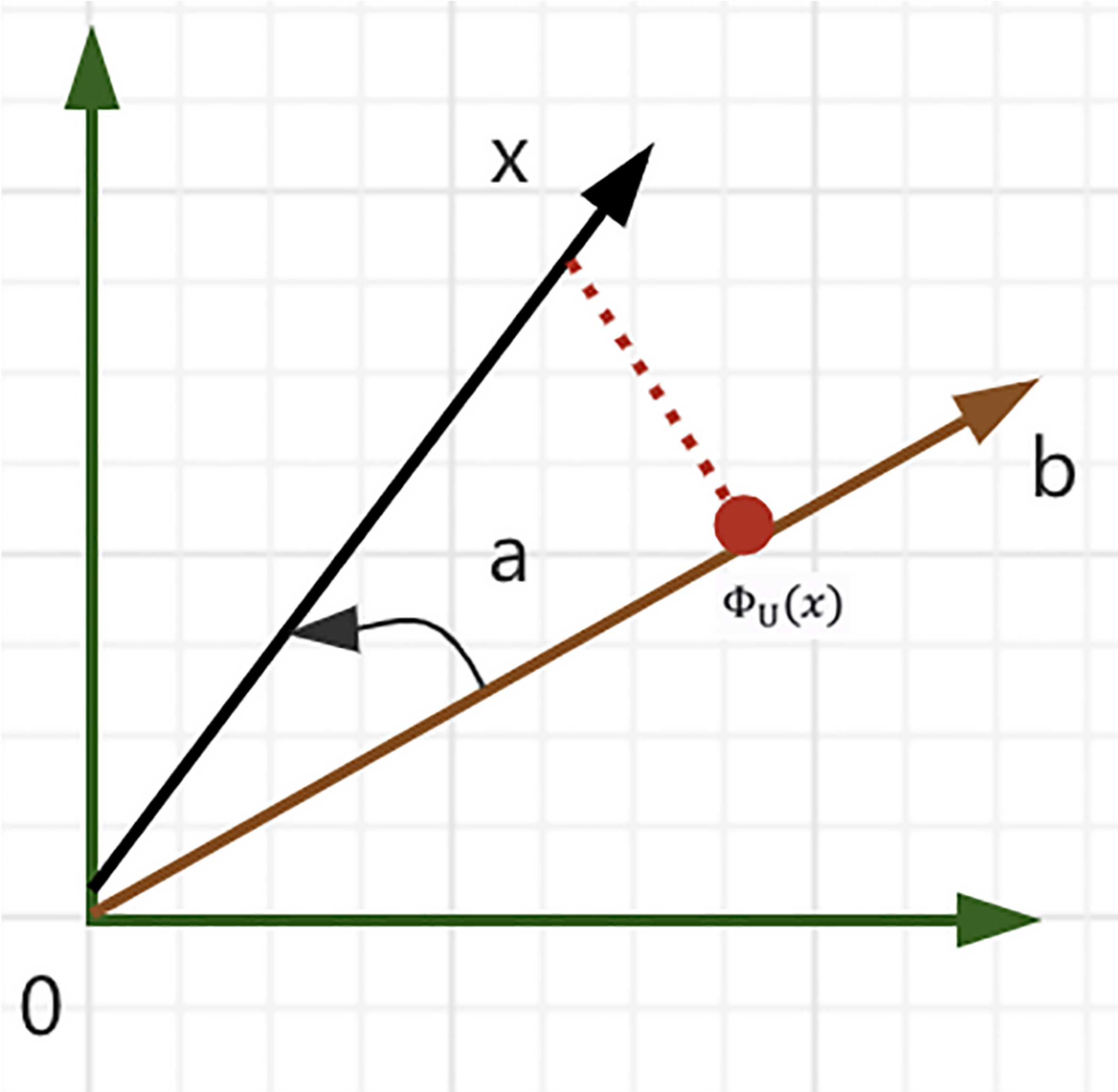
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V 是一个向量空间，U 是 V 的一个向量子空间，一个从 V 到 U 的线性映射 Φ 是一个投影，如果它满足：$\Phi^2 = \Phi \circ \Phi = \Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵 P_Φ，它也满足：$P_\Phi^2 = P_\Phi$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量 b 产生的一维子空间 U，当我们把一个向量 x 投影到 U 时，需要寻找另一个最靠近 x 的向量 $\Phi_U(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影 $\Phi_U(x)$ 靠近 x，也就是要找出 x 和 $\Phi_U(x)$ 之间的 $\|x-\Phi_U(x)\|$ 最小距离，从几何角度来说，就是线段 $\Phi_U(x)-x$ 和 b 正交，满足等式：$\langle\Phi_U(x)-x,b\rangle=0$ 。其次，投影 $\Phi_U(x)$ 必须是 U 的一个元素，也就是，基向量 b 的一个乘来产生 U，$\Phi_U(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到 λ、投影 $\Phi_U(x)$ 和投影矩阵 P_Φ，来把任意 x 映射到子空间 U 上。

第一步，计算 λ，通过正交条件产生这样的等式：

$\langle x-\Phi_U(x),b\rangle=0$。因为 $\Phi_U(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b,b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x,b\rangle-\lambda\langle b,b\rangle=0$，我们得到：

$$\lambda=\frac{\langle x,b\rangle}{\langle b,b\rangle}=\frac{\langle b,x\rangle}{||b||^2}$$

然后，我们通过点积得到：

$$\lambda=\frac{b^Tx}{||b||^2}$$

如果 $||b||=1$，那 λ 就等于 b^Tx。

接着第二步，是计算投影点 $\Phi_U(x)$。从 $\Phi_U(x)=\lambda b$，我们得到：

$$\Phi_U(x)=\lambda b=\frac{\langle x,b\rangle}{||b||^2}b=\frac{b^Tx}{||b||^2}b$$

通过点积来计算，我们就得到了 $\Phi_U(x)$ 的长度：

$$||\Phi_U(x)||=\frac{|b^Tx|}{||b||^2}||b||=|\cos(a)|||x||||b||\frac{||b||}{||b||^2}=|\cos(a)|||x||$$

这里的 a，是 x 和 b 之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵 P_Φ，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_U(x)=P_\Phi x$，通过 $\Phi_U(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$\Phi_U(x)=\lambda b=b\lambda=b\frac{b^Tx}{||b||^2}=\frac{bb^T}{||b||^2}x$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵 P_Φ 的计算等式：

$$P_{\Phi}=\frac{bb^T}{||b||^2}$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D 图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵 P_{Φ}。

这条线通过原点，由基 $b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$ 产生，P_{Φ} 计算后，再通过一个 x 来验证一下它是否在 b 产生的子空间中，我们取 $x=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

提建议

上一篇 09 | 仿射空间：如何在图形的平移操作中大显身手？

下一篇 基础通关 | 线性代数5道典型例题及解析

精选留言 (2)

写留言

Dr.z

2020-08-20

老师 问一下

Φ2=Φ∘Φ=Φ

这里的空心圆 代表了什么操作？

展开

作者回复: 你好，Dr.z，这里的空心圆表示的是幂等。

那时刻

2020-08-19

请教老师两个问题，

1. 对称正定矩阵在深度学习中，被用来获取最小化损失函数。是因为正定矩阵可逆来求解吗？麻烦老师具体说一下
2. 投影矩阵P和SVM算法里的支持向量到超平面的距离看着蛮相似的，不知道这么理解...

展开

作者回复: 那时刻同学，很好的两个问题。
1. 从深度学习来理解对称正定矩阵，就是所有特征值都是正数的对称矩阵，推荐看下这篇文章详细说了深度学习中的对称正定矩阵，从图形看更明显，因为目前回复不支持富文本，可以看看这篇文章。https://zhuanlan.zhihu.com/p/112772023
2. 是的，没错，只不过是在不同的维度空间来看投影，超平面是在n-1维，第9篇也介绍了一下超平面和它的参数方程。