02 | 基本概念：线性代数研究的到底是什么问题？

2020-07-27 朱维刚

重学线性代数

进入课程 >

讲述：朱维刚
时长 14:30　大小 13.29M

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有 n 个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要 0.2 单位的另一类化学品，0.3 单位的食品，以及 0.4 单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\begin{vmatrix} 化学输出 \\ 食品输出 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 化学输入 \\ 食品输入 \end{vmatrix}$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组 $Ax=b$ 的形式来表达：

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 = b_1 \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 = b_2 \\ 0.5x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 = b_3 \end{cases}$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的 $Ax=b$ 的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

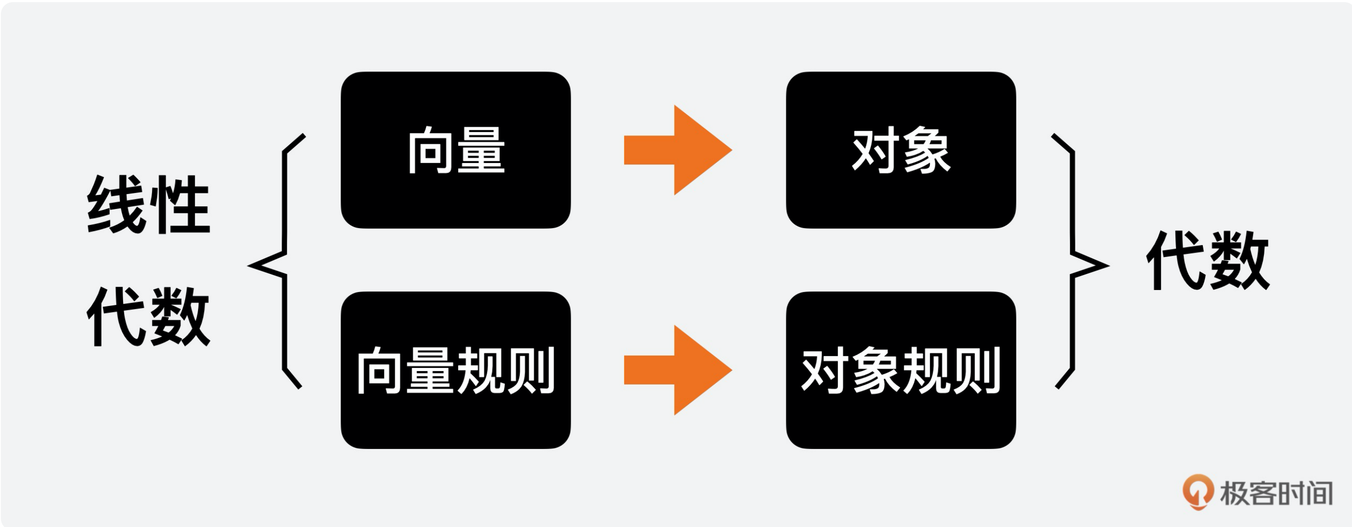
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

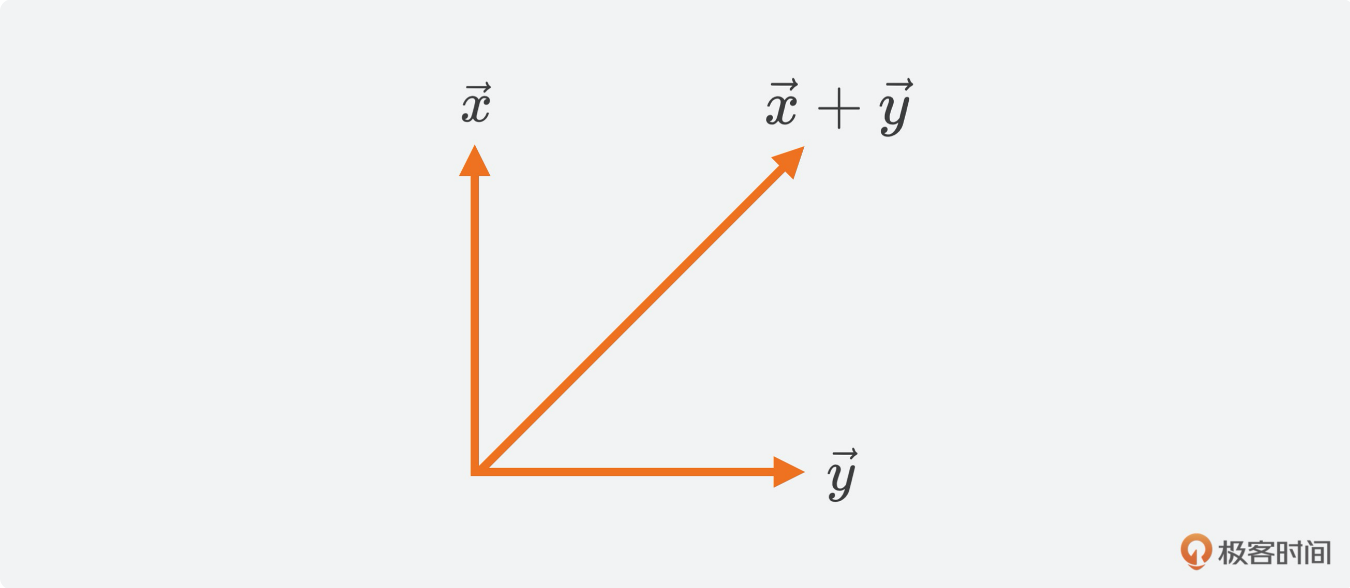


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成 $\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量 x 加上向量 y 等于向量 z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x 向量也能被一个标量乘。再比如，标量 λ 乘向量 x 结果也是向量，$\lambda\vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^3 : x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

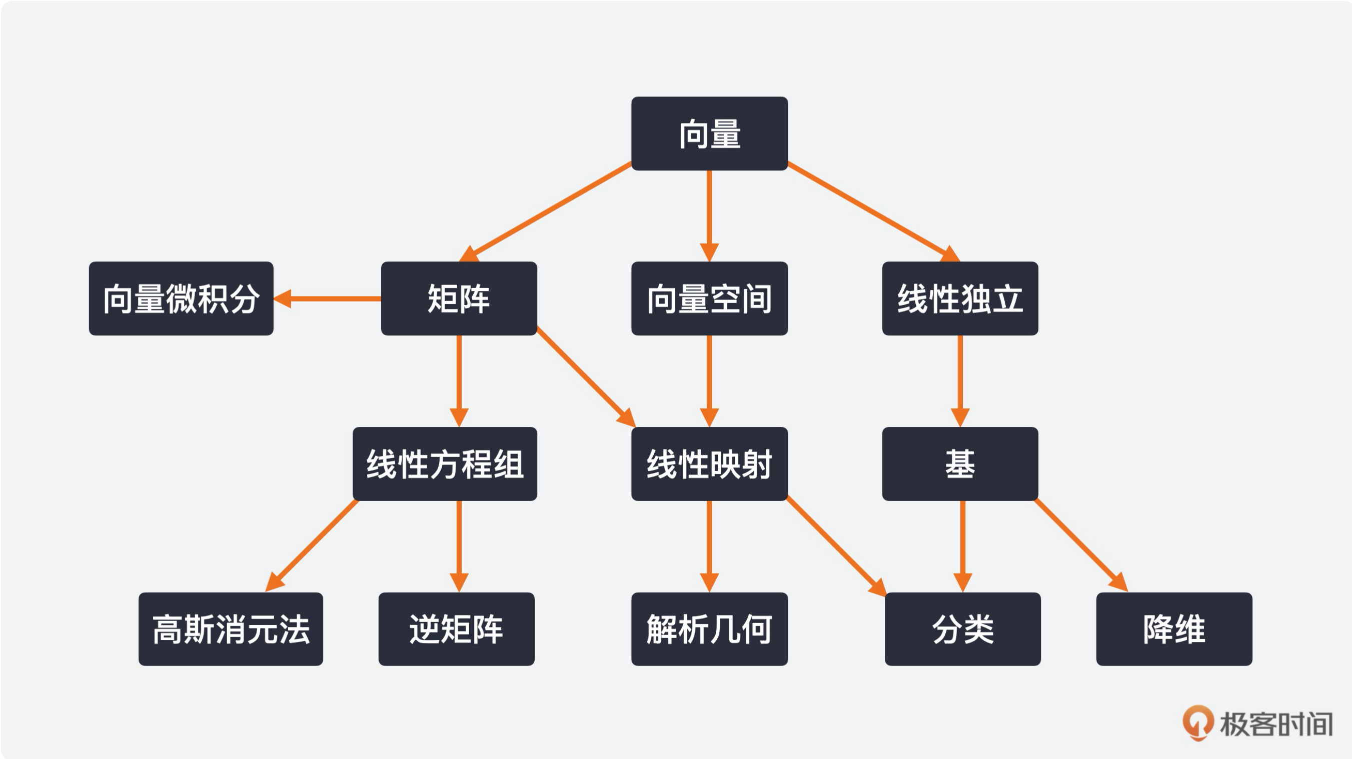
矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有

课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价 3 元，大人票价 3.2 元，总共花费 118.4 元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价 3.5 元，大人票价 3.6 元，总共花费 135.2 元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为 x_1，大人人数为 x_2，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}3x_1 + 3.2x_2 = 118.4 \\ 3.5x_1 + 3.6x_2 = 135.2\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{l}x_1 = 16 \\ x_2 = 22\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及 iWatch 四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS 屏幕四大类资源，产品分别用 N_1， N_2， N_3， N_4 来表示，资源分别用 R_1， R_2， R_3， R_4 来表示。

生产一单位的产品 N_1，也就是 iPhone，需要 a_{11}， a_{21}， a_{31}， a_{41} 的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和 IPS 屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有 b_i 个单位资源 R_i 可用情况下，每个产品 N_i 有多少单元 x_i 应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=b_4 \end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，x_1， $\cdots$， x_n 是未知变量，每个满足方程组表达式的 n 元组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+3x_3=1 \end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到 $2x_1+3x_3=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=2 \\ x_2+x_3=2 \end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以 -1 和第二行相加得到 $x_1=1$ ，第一行和第二行相加，得到 $2x_1+3x_3=5$ ，代入 x_1 后，得到 $x_3=1$，最后，我们可以得到 $(1,1,1)$ 是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+3x_3=5 \end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量 $x_3=a$ ，a 属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a, a\right)$$

其中 a 属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

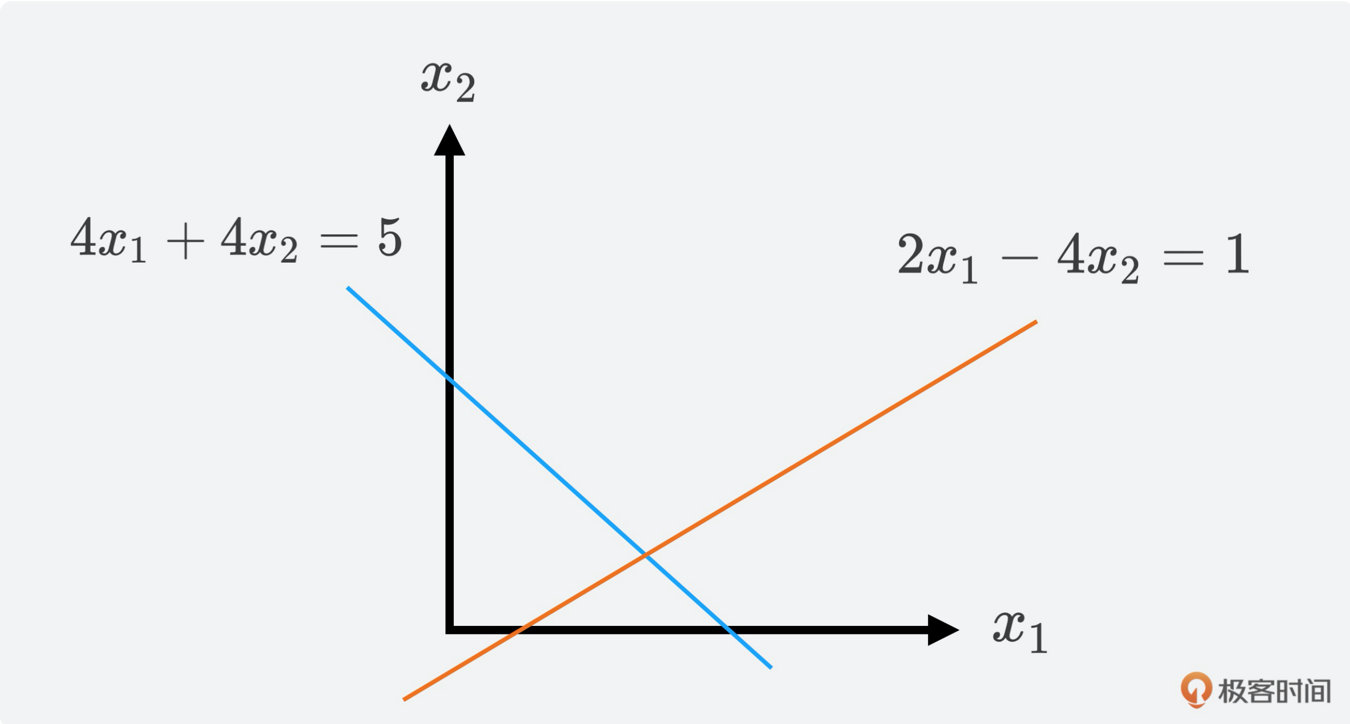
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量 x_1, x_2 的线性方程组中，我们定义一个 x_1, x_2 平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$$

把其中的两个线性方程在 x_1, x_2 平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点 $(1, \frac{1}{4})$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{vmatrix} + \cdots + x_n \begin{vmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ . \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ . \\ b_m \end{vmatrix}
$$

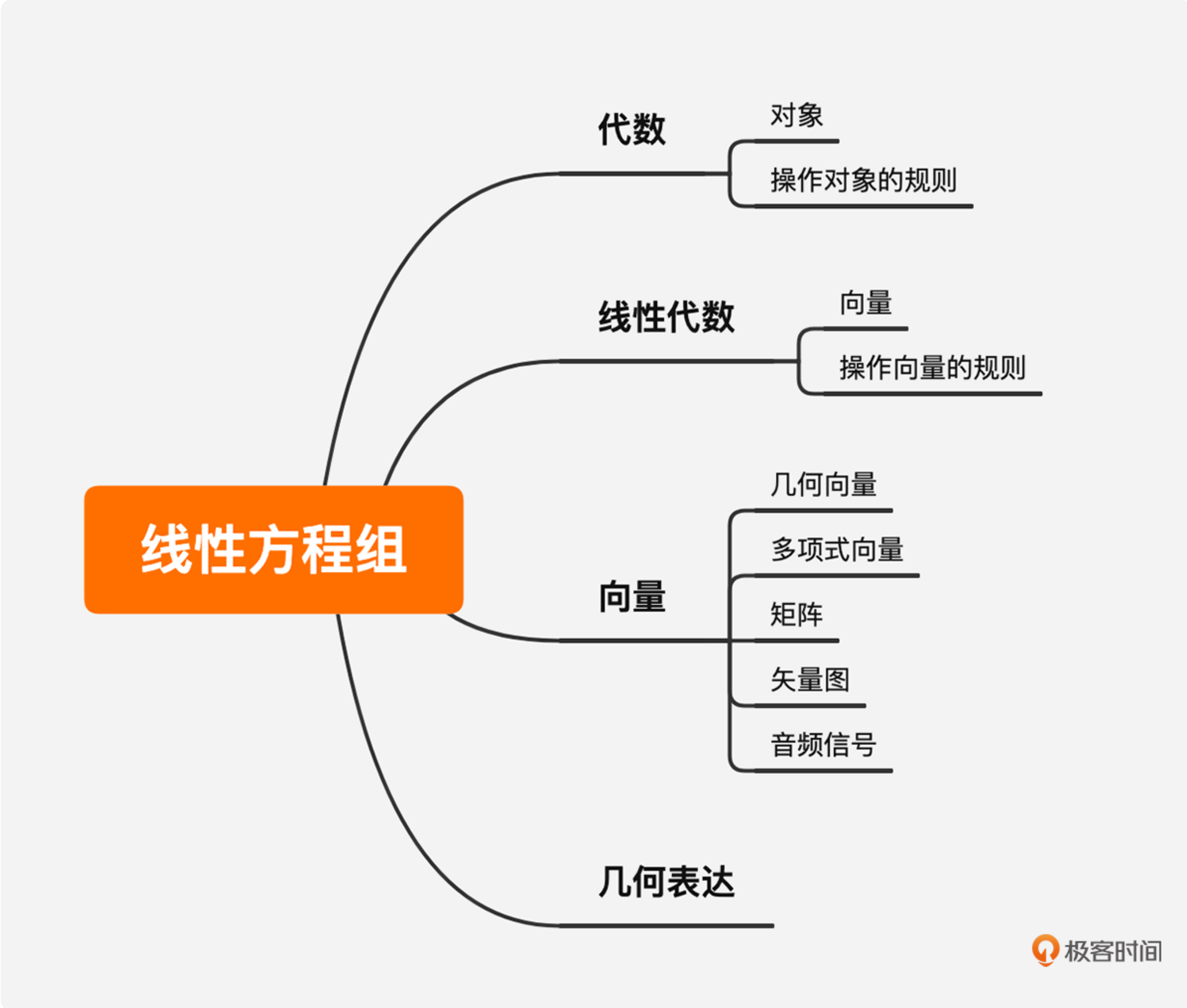
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了 10 亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利 18000 元。其中甲蔬菜每亩获利 2000 元，乙蔬菜每亩获利 1500 元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

提建议

上一篇 01 | 导读：如何在机器学习中运用线性代数工具？

精选留言 (8)

写留言

Kǎfκã²⁰²⁰
2020-07-28

2000x + 1500y = 18000
x + y = 10
接着，2000x + 1500(10-x) = 18000，可得出x = 6，自然y = 4

作者回复: 送你一朵小红花 ;-)

2

Litt1eQ
2020-07-27

假设全是甲 获利 20000 现在获利 18000 说明有 20000 - 18000 / 500 的乙 所以 甲 6 乙 4

作者回复: ������，另一个不错的角度来解。

2

小叶
2020-07-27

设甲蔬菜种了x亩，乙蔬菜种了y亩，则
x + y = 10
2000x + 1500y = 18000
x = 10 - y
通过带入...

展开

作者回复: 送你一朵小红花 ;-)
后续继续关注怎么通过矩阵来解哦

1

孙瑜
2020-07-27

{ 1 1 10 * { 甲
2000 1500 18000 } 乙 }

解得甲蔬菜6亩，乙蔬菜4亩

作者回复: 这个角度去看也不错，送你一朵小红花 ;-)

1

码农Kevin亮
2020-07-27

请教下老师，是不是可以这样理解：
如果Ax=b成立，意味着向量空间x存在一个向量使得A可以线性变换成b?
而所谓的线性方程解就是这个令变换成立的向量?

作者回复: 你好，Kevin，这样理解也是可以的，但从数学角度来讲不太严格，因为从线性映射或变换角度来解释就是，两个向量空间V和W，有一个函数f来完成向量空间V到W的映射，或变换。

1

三件事
2020-07-29

| 2000 1500 | | x | = | 18000 |
| 1 1 | | y | | 10 |

x = 6, y = 4
...
展开

夜空中最亮的星（华仔...
2020-07-28

x 2000 + y 1500 = 18000
x + y = 10

20 x + (10 -x) 15 = 180
...
展开

作者回复: 很详细的解体步骤，������

宝bao
2020-07-28

强迫症想提议老师，能否把“矩阵”的ju读成第三声“举”/(ㄒoㄒ)/~

作者回复: 你好，宝bao，我一直没注意，可能是习惯了，我来改正。