

## 面向多相流模拟的体积通量无散度 SPH 方法

徐衍睿<sup>1,2)</sup>, 王笑琨<sup>1,3)\*</sup>, 班晓娟<sup>1,3,4)</sup>, 王佳敏<sup>1,2)</sup>, 宋重明<sup>1,2)</sup>, 王勇<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> (北京科技大学智能科学与技术学院 北京 100083)

<sup>2)</sup> (北京科技大学计算机与通信工程学院 北京 100083)

<sup>3)</sup> (北京科技大学人工智能研究院 北京 100083)

<sup>4)</sup> (北京材料基因工程高精尖创新中心 北京 100083)

<sup>5)</sup> (北京科技大学土木与资源工程学院 北京 100083)

(wangxiaokun@ustb.edu.cn)

**摘 要:** 针对高密度比多相流体模拟中存在的相间密度计算误差问题及产生的不合理对流运动模拟效果, 提出一种基于体积通量无散度的隐式流体压强求解方法. 首先, 分析传统多相流模拟方法产生密度近似误差的原因; 其次, 提出“体积-压缩率”的关联计算方式, 构建流体压缩率与压强间的线性关系; 再次, 分别设计恒定体积求解器和体积通量无散度求解器, 以实现多相流模拟过程中流体体积的不可压缩性和速度场的无散度特性. 为验证所提方法性能, 以流体模拟方法 DFSPH 为对比对象, 分别以模拟效果合理性、数值计算稳定性与收敛性为定性和定量评估指标, 依次开展两相溃坝、热对流等多相流交互实验. 结果表明, 该方法能够实现高效、稳定的多相流交互模拟视觉效果, 在同等多相流条件下较 DFSPH 方法耗费更少计算时间实现收敛, 在各种复杂模拟场景中均具有良好的健壮性、有效性和可扩展性, 尤其适用于高密度比流体交互模拟.

**关键词:** 基于物理的模拟; 不可压缩流体; 多相流; 光滑粒子流体动力学

**中图法分类号:** TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2022.19190

## Volume Flux Free SPH Approach for Multiphase Fluids

Xu Yanrui<sup>1,2)</sup>, Wang Xiaokun<sup>1,3)\*</sup>, Ban Xiaojuan<sup>1,3,4)</sup>, Wang Jiamin<sup>1,2)</sup>, Song Chongming<sup>1,2)</sup>, and Wang Yong<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Intelligence Science and Technology, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083)

<sup>2)</sup> (School of Computer and Communication Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083)

<sup>3)</sup> (Institute of Artificial Intelligence, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083)

<sup>4)</sup> (Beijing Advanced Innovation Center for Materials Genome Engineering, Beijing 100083)

<sup>5)</sup> (School of Civil and Resource Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083)

**Abstract:** Aiming at the numerical issue at the interface during multiphase flow simulation with high density ratio and resulting unreasonable effect of convective motion, an implicit pressure algorithm based on volumetric flux free condition is proposed. Firstly, the causes of density approximation errors in the traditional multiphase flow simulation methods are analyzed. Secondly, the correlation calculation of “volume-compression ratio” is proposed to construct the linear relationship between fluid compression state and pressure. Thirdly, the constant volume solver and the volume flux free solver are designed respectively to realize the incompressibility of fluid volume and the divergence free of velocity field. In order to verify the

收稿日期: 2021-06-21; 修回日期: 2021-07-24. 基金项目: 国家自然科学基金(61873299); 海南省重点研发计划(ZDYF2020031); 佛山市科技创新专项(BK19AE034, BK20AF001); 中央高校基本科研业务费(FRF-IDRY-20-031, FRF-TP-19-043A2). 徐衍睿(1995—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 王笑琨(1987—), 男, 博士, 副教授, 论文通信作者, 主要研究方向为计算机图形学; 班晓娟(1970—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为人工智能、计算机图形学; 王佳敏(2000—), 女, 在校学生, 主要研究方向为计算机图形学; 宋重明(1998—), 女, 在校学生, 主要研究方向为计算机图形学; 王勇(1985—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为金属矿膏体充填.

performance of the proposed algorithm, the advanced fluid simulation method DFSPH is taken as comparison. And the rationality of simulation effect, numerical stability and convergence are taken as the qualitative and quantitative evaluation factors respectively. Experiments such as two-phase dam break and thermal convection are carried out under multiphase flow condition. The results show that the proposed method can achieve efficient and stable multiphase flow interaction. Under the same multiphase flow conditions, it can consume less calculation time and achieve convergence faster than DFSPH. It has good robustness, effectiveness and scalability in various complex simulation scenarios, especially suitable for simulating fluids with high density ratio.

**Key words:** physical simulation; incompressible fluid; multiphase flows; smoothed particle hydrodynamics

流体广泛存在于自然界、日常生活与工业生产中,是一种常见的物质形态. 通过计算机对流体物理现象进行模拟,一直是计算机图形学领域的研究热点. 当前,流体模拟的主要研究对象为单一种类流体,即单相流体,很少考虑对由多种具有不同物理性质的流体混合而成的多相流体进行动力学建模,并对其中耦合交互作用进行计算分析. 然而,自然界中的流体多以多相流形式存在,如油水混合以及冷热空气对流等. 多相流交互现象中最显著的即为由流相间物质密度差及速度差所导致的耦合交互运动效果. 本文面向不可压缩黏性混合多相流间的耦合交互运动计算问题,提出隐式体积通量无散度光滑粒子流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法,解决当前隐式拉格朗日流体模拟方法中对于高密度比流体交互计算的不精确和不稳定问题,实现高性能混合多相流模拟.

在当前先进 SPH 流体模拟方法中,求解器通过预测-矫正方案分 2 步计算离散化流体粒子在各时刻所具有的加速度,并在时间上对粒子运动进行积分以形成粒子运动路径,实现对流体运动的描述. 在对每一时刻粒子位置预测过程中,通过考虑当前粒子速度及非压力力所形成的加速度,分析粒子在每一时刻的压缩趋势,并在矫正过程中迭代计算维持流体整体不可压缩所需要的压强大小,实现流体每一时刻的完整受力分析. 传统意义上,该预测-矫正过程依托 SPH 方法对流体密度场的近似计算获取压缩状态量化预测. 然而,当面向由多种不同密度的流体所组成的混合多相流进行密度场近似时,传统 SPH 方法会在多相流交互边界处产生密度计算误差,形成阶跃式压强场,极大地增加数值计算收敛难度,并产生不稳定效果.

本文首先提出利用“体积-压缩率”为中心的体积通量无散度 SPH 数值计算方案,替代传统 SPH 方法中以“质量-密度”为中心的密度不可压缩计算方案,以有效地避免高密度比多相流体交互和边界处数值计算误差. 其次,本文基于时下先进的隐式压强泊松方程(pressure Poisson equation, PPE)求解思想,分别设计 2 种压强力求解器,实现流体速度场无散度和流体不可压缩条件.

## 1 相关工作

流体模拟是计算机图形学和虚拟现实领域的研究热点,在影视及工程产业中有着广泛的应用需求. 流体模拟方法主要分为基于网格的欧拉法和基于粒子的拉格朗日法,其中,拉格朗日法更适合模拟流体的复杂激烈运动,近年来受到广泛关注<sup>[1-4]</sup>. SPH 方法是最典型且使用最广泛的拉格朗日法之一<sup>[1,5]</sup>,本节讨论基于 SPH 的流体模拟和多相流体交互模拟的相关工作.

### 1.1 基于 SPH 的流体模拟

SPH 方法最初由 Lucy<sup>[6]</sup>提出,用于解决天体物理学问题,2003 年由 Müller 等<sup>[7]</sup>应用于流体动画,以加速流体仿真并实现实时交互.

#### 1.1.1 基于状态方程的求解器

基于密度压缩与压强大小的关系,SPH 方法可使用状态方程(equation of state, EOS)显式求解流场各处压强. 该方法称为基于 EOS 的压强力求解器. 此类方法通常导致一定的密度波动,不能很好地满足液体的不可压缩性. Müller 等<sup>[7]</sup>基于理想气体状态方程计算压强力. Becker 等<sup>[8]</sup>提出弱可压缩 SPH(weakly compressible SPH, WCSPH),使用泰特方程取代理想气体状态方程,将密度波动保持在较小范围内(通常为 1%).

### 1.1.2 迭代压力求解器

为增强模拟过程中流体不可压缩性, 并提升模拟效率, 不同的基于 PPE 的迭代压力求解器被相继发明<sup>[1]</sup>. 迭代压力求解器基于预测-矫正方案对粒子受力进行拆分, 首先根据除压力以外的所有力引起的粒子运动确定密度偏差, 然后隐式地迭代求解使密度偏差被抵消至最小的压力. 与 EOS 方法相比, 虽然 PPE 迭代压力求解方法在每个时间步内具有更高的计算复杂度, 但其允许更大的时间步长, 可以提高方法的整体效率. 2009 年, Solenthaler 等<sup>[9]</sup>提出了预测-矫正 SPH(predictive-corrective incompressible SPH, PCISPH), 在每轮迭代中通过粒子预测位置计算密度, 并更新压力以矫正密度. 2012 年, He 等<sup>[10]</sup>提出了 Local Poisson SPH, 以避免求解全局 PPE 带来的巨大计算开销. 2014 年, Ihmsen 等<sup>[11]</sup>提出隐式不可压缩 SPH(implicit incompressible SPH, IISPH)方法, 通过预测速度计算密度. 2015 年, Bender 等<sup>[12]</sup>提出无散度 SPH(divergence free SPH, DFSPH), 在简化 PPE 方法迭代步骤的同时, 使用 2 个压力求解器来确保密度不变和速度场散度为 0. 与前 2 种方法相比, DFSPH 可实现更好的不可压缩性, 使用更长的时间步长, 从而显著提升模拟效率.

### 1.2 多相流体交互模拟

在多相流的相互作用中, 流体通常展现出不可混溶与可混溶 2 种行为<sup>[13]</sup>. 不可混溶流体的各相间不互溶, 具有清晰可辨的相间界面; 相反, 可混溶流体相间可互溶, 可同时存在于一个模拟单元内.

针对不可混溶多相流, 研究人员提出了各种解决方案, 如基于位置的流体(position-based fluids, PBF)<sup>[14]</sup>, 流体隐式粒子(fluid implicit particle, FLIP)<sup>[15-18]</sup>, 格子玻尔兹曼方法(lattice Boltzmann method, LBM)<sup>[19]</sup>等流体模拟方法. 而在 SPH 框架中, 一种早期方法是显式地计算不同相粒子的碰撞并调整粒子位置<sup>[20]</sup>, 另一种方法是为不同相粒子分配不同的标签和物理属性<sup>[21]</sup>. 然而, 由于相间交界面处密度不连续, 早期方法会造成较大计算误差. 为处理界面密度不连续问题, Solenthaler 等<sup>[22]</sup>引入了数量密度, 显著地提升了 EOS 方法所支持的多相流交互密度比.

对于可混溶流体的 SPH 模拟, Müller 等<sup>[21]</sup>首先引入了体积分数概念, 以表示同一粒子中存在的多相流体. Ren 等<sup>[23]</sup>进一步引入了漂移速度模型, 以模拟相间受力不同所引起的混合效果, 并使用

了 Solenthaler 等<sup>[22]</sup>的方案处理粒子间密度不同的问题. Yang 等<sup>[24]</sup>引入亥姆霍兹自由能, 并提出改进的 Cahn-Hilliard 方程, 以支持萃取等更多现象. 2020 年, Jiang 等<sup>[25]</sup>将 Solenthaler 等<sup>[22]</sup>的模型与基于 PPE 的隐式迭代求解器结合, 然而, 当将数量密度方法应用于隐式迭代 PPE 压力求解中时, 即使使用数量密度, 也只能支持密度相近的流体(密度比不高于 3)所组成的多相流体交互.

### 1.3 本文方法

本文针对现有方法不能在迭代压力求解器中处理高密度比相间界面的问题, 对不可压缩流体提出一种体积通量无散度的 SPH 方法, 以实现高密度比多相流体交互现象的稳定模拟, 并结合热传导的物理性质, 验证连续变化密度场中流体的对流动态效果.

## 2 SPH

### 2.1 连续介质的 SPH 离散化

光滑粒子流体动力学方法, 即 SPH 方法, 使用离散宏观粒子来描述连续流体介质. 对位于  $\mathbf{x}_i$  处的粒子  $i$  的任意物理量  $A_i$ , 其数值可以通过 SPH 方法近似为

$$A_i = \sum_j V_j A_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (1)$$

其中,  $V_j = \frac{m_j}{\rho_j}$  为局部体积;  $j$  为在粒子  $i$  支持半径  $h$  内所有邻居粒子,  $m_j$  为粒子  $j$  的质量,  $\rho_j$  为粒子  $j$  处的密度;  $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$  为光滑核函数(以下简称为  $W_{ij}$ ), 为归一化类高斯函数, 本文采用 3 次样条插值函数作为光滑核函数.

对  $A_i$  一阶导数计算可以通过求取光滑核函数梯度近似为

$$\nabla A_i^{(0)} = \sum_j V_j A_j \nabla W_{ij} \quad (2)$$

关于其高阶导, 也可同理计算<sup>[26]</sup>.

不可压缩黏性流体运动可用纳维-斯托克斯(Navier-Stokes, N-S)方程描述为

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3)$$

其中,  $p$  为压强;  $\mu$  为黏度系数;  $\mathbf{v}$  为流体流动速度;  $D(\cdot)/Dt$  为物质导数, 表示流体微团物理量随时间的变化率;  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  为重力场等体积力. 根据上述

SPH 方法,可离散化计算 N-S 方程. 其中,  $\rho_i = A_i$  时,可通过式(1)计算密度为

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (4)$$

## 2.2 无散度 SPH 求解器

最先进的 SPH 无散度隐式不可压缩求解器 DFSPH<sup>[12]</sup>通过压缩状态描述压强数值,即

$$p_i = \kappa_i (\rho_i - \rho_i^0) \quad (5)$$

其中,  $\kappa_i$  为决定压强力大小的刚度系数;  $\rho_i^0$  为在粒子  $i$  处的流体理想静态密度. 粒子  $i$  处的压强梯度可根据式(5)表示为  $\nabla p_i = \kappa_i \nabla \rho_i = \kappa_i \sum_j m_j \nabla W_{ij}$ .

在预测-矫正隐式压强求解 SPH 方法中,首先考虑引起粒子速度变化率的非压强项,即式(3)中黏滞力与重力等外力项,此时速度变化率引起有散度速度场和流体的压缩. 随后,矫正过程通过迭代求取压强项(DFSPH 方法中以式(5)中的刚度系数  $\kappa$  代表),获取无散度的粒子速度变化率,并令流体在下一时刻不可压缩.

在每个时间步长中,为每个粒子确定 2 个独立的刚度系数,分别确保恒定密度场和无散度速度场,求得刚度系数与流场压缩性关系为

$$\begin{cases} \kappa_i = \frac{\rho_i^* - \rho_i^0}{\Delta t^2} \alpha_i \\ \kappa_i^v = \frac{1}{\Delta t} \frac{D\rho_i}{Dt} \alpha_i \end{cases}$$

其中,  $\rho_i^*$  为非压强项所导致 2 个时刻间压缩密度;  $\alpha_i$  用于维持流体密度不可压缩;  $\kappa_i^v$  用于维持速度场无散度;  $\alpha_i$  为仅取决于当前粒子位置的因子,

其计算式为  $\alpha_i = \rho_i / \left( \left| \sum_j m_j \nabla W_{ij} \right|^2 + \sum_j \left| m_j \nabla W_{ij} \right|^2 \right)$ .

## 2.3 密度近似中的数值误差

在模拟具有非均一静态密度场的多相流运动时,不同粒子的密度会有所不同. 当相邻粒子密度显著不同时,基于式(4)的密度近似产生误差,使流体模拟产生不稳定问题.

举例说明该问题,如图 1a 所示,有 2 种具有不同静态密度流体,分别为流相 1 ( $\rho_1^0 = 100$ ) 和流相 2 ( $\rho_2^0 = 1\,000$ ),在粒子大小相同情况下有  $m_2 = 10m_1$ . 虽然粒子在空间中均匀分布没有重叠,呈现不可压缩状态,但根据式(4),两相流体交互边界近似密度不同于静态密度,导致不合理过大压强,产生间隙.

Solenthaler 等<sup>[22]</sup>针对该问题提出数量密度计

算方案,将式(4)改为  $\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}$ .

当计算密度时,将邻居粒子  $j$  处静态密度与粒子  $i$  处同步以避免上述误差. 该方法十分适用于显式压强求解方法,但不能很好地与更高效精确的隐式压强求解方法结合. 如图 1b 所示,当产生压缩时,根据式(5),流相 2 边界处密度压缩数值远高于流相 1,同样会导致不稳定情况,无法实现稳定高密度比多相流交互.

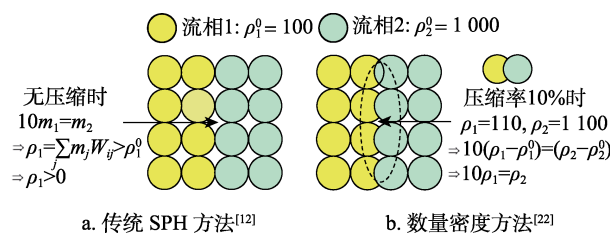


图 1 密度计算误差产生示意图

综上所述,在隐式迭代压强求解 SPH 方法中,现有多相流处理方法在处理激烈多相流交互时不能实现稳定压强场. 为解决该问题,受 DFSPH 方法启发,本文提出了体积通量无散度 SPH 方法,以实现高密度比流体稳定、高效的交互效果. 本文方法在面向单相流体计算的 DFSPH 方法的基础上,将其中关于密度压缩所产生的压强项转化为关于体积压缩所产生的压强,通过压强力抵消非压强项所产生各粒子体积压缩,因此与传统 DFSPH 方法相比,在不额外增加计算开销的基础上,可更精确地处理多相流体交互运动.

## 3 体积通量无散度 SPH

本文提出的体积通量无散度 SPH 方法使用“体积-压缩率”数值模型替代传统“质量-密度”模型,将流体粒子运动的物理意义从质点运动转化为粒子体积通过单位平面的运动所产生的体积通量(单位为  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ,微观上为流体速度场),流体速度场无散度转化为体积通量无散度,通过测量粒子体积而非密度的压缩状态替代传统 SPH 密度近似方法. 本文方法建立流体体积压缩和压强之间的关系,利用刚度系数隐式确定压强场,在不提升计算时空复杂度的前提下,提升多相流交互数值精度,避免了使用传统 SPH 方法的近似误差,也消除了高密度比多相流交界面的不稳定性.

本文针对 SPH 方法提出压缩率概念,用  $\gamma$  表

示局部位位的压缩状态. 粒子  $i$  的压缩率可以写为

$$\gamma_i = \sum_j V_j^0 W_{ij} \quad (6)$$

类比于传统 SPH 方法中的静态密度, 本文将粒子  $i$  不可压缩状态下的体积定义为静态体积  $V_i^0$ . 依靠压缩率计算, 可在体积-压缩率与质量-密度 SPH 数值体系下进行转换.

压缩率作为基于压缩体积所抽象出的概念, 其实际意义也存在于传统 DFSPH 方法中. 在压缩率的定义式(6)中, 若左右同乘静态密度, 则压缩率为压缩密度与静态密度之比, 可得出当所模拟流体为单相流体时, 本文方法与传统 DFSPH 方法具有同等性能. 式(1)(2)传统 SPH 离散化形式中密度项可转化为压缩率项; 反之, SPH 近似密度可用压缩率表示为  $\rho_i = \gamma_i \rho_i^0$ , 从而实现传统 SPH 模拟方法. 因此, 粒子质量、静态密度和静态体积间的关系为  $m_i = \rho_i^0 V_i^0$ .

粒子  $i$  的压缩体积  $V_i^c$  可用压缩率定义为

$$V_i^c = \gamma_i V_i^0 = \frac{V_i}{\gamma_i} \quad (7)$$

压缩体积所表征的具体含义如图 2 所示, 将其中每组粒子作为一个整体考虑, 图 2a 描述不可压缩状态, 各粒子均保持静态体积, 故  $V^c = V^0$ ; 图 2b 中同样大小空间加入一个额外粒子, 令局部空间整体呈压缩状态, 压缩体积为  $V^c = \frac{10}{9}V_0$ , 压缩率同为  $\gamma = \frac{10}{9}$ .

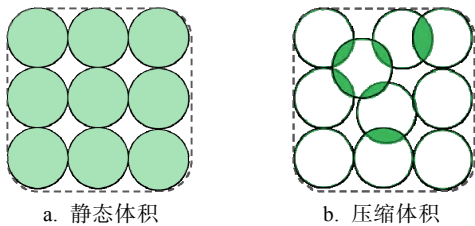


图 2 流体粒子的压缩体积和压缩率示意图

为进一步消除 SPH 近似方法中高阶精度误差, 本文参考传统 SPH 梯度近似差分形式<sup>[1]</sup>, 根据式(2)实现基于压缩率的数值梯度差分求解方式, 即

$$\begin{aligned} \nabla A_i^{(1)} &= \frac{1}{\gamma_i} [\nabla(A_i \gamma_i)^{(0)} - A_i \nabla \gamma_i^{(0)}] = \\ &= \frac{1}{\gamma_i} \sum_j V_j^0 (A_j - A_i) \nabla W_{ij} \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.1 基于体积通量的隐式压强力求解

类似于传统 SPH 隐式迭代压强力求解方法<sup>[11-12]</sup>

中密度压缩与压强的关系, 本文通过刚度系数  $\kappa_i^v$  根据式(7)建立体积压缩状态与压强之间的关系, 即  $p_i = \kappa_i^v (V_i^c - V_i^0) = \kappa_i^v (\gamma_i - 1) V_i^0$ .

由此, 压强梯度可基于式(2)转化为压缩率梯度表达, 即  $\nabla p_i = \kappa_i^v V_i^0 \nabla \gamma_i^{(0)} = \kappa_i^v V_i^0 \sum_j V_j^0 \nabla W_{ij}$ .

根据 N-S 方程, 由压强  $p_i$  施加的在粒子  $i$  处的压强力表示为

$$\mathbf{F}_i^{p_i} = -\frac{m_i}{\rho_i} \nabla p_i = -\frac{\kappa_i^v}{\gamma_i} (V_i^0)^2 \sum_j V_j^0 \nabla W_{ij} \quad (9)$$

根据牛顿第 2 定律, 粒子  $i$  作用在粒子  $j$  上的压强力应与在  $i$  处完全相反. 根据式(9), 有

$$\mathbf{F}_j^{p_i} = \frac{\kappa_i^v}{\gamma_i} (V_i^0)^2 V_j^0 \nabla W_{ij} \quad (10)$$

N-S 方程中的非压强力  $\mathbf{F}_i^*$ , 为重力、黏滞力和表面张力等外力之和, 用于预测中间速度  $\mathbf{v}_i^*$ , 为

$$\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i + \Delta t \mathbf{F}_i^* / m_i \quad (11)$$

压强力用于抵消体积压缩, 使体积通量变化率为 0. 因此, 使用差分式(8), 体积通量变化率可以用速度的散度和压缩体积表示, 即

$$\frac{DV_i^c}{Dt} = -V_i^c \nabla \cdot (\mathbf{v}_i^*)^{(1)} = -V_i^0 \sum_j V_j^0 (\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_j^*) \cdot \nabla W_{ij} \quad (12)$$

为使粒子  $i$  处无压缩, 压强力对体积变化率的作用应为  $-\frac{DV_i^c}{Dt}$ . 根据式(12), 可得到实际体积变化率和局部压强力  $\mathbf{F}_i^{p_i}$  之间的关系为

$$\frac{DV_i^c}{Dt} = -\Delta t V_i^0 \sum_j V_j^0 \left( \frac{\mathbf{F}_i^{p_i}}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j^{p_i}}{m_j} \right) \cdot \nabla W_{ij} \quad (13)$$

将式(9)(10)代入式(13), 可得

$$\begin{aligned} \frac{DV_i^c}{Dt} &= \frac{\Delta t \kappa_i^v (V_i^0)^3}{\gamma_i} \cdot \\ &\cdot \left( \frac{1}{m_i} \left( \sum_j V_j^0 \nabla W_{ij} \right)^2 + \sum_j \frac{(V_j^0 \nabla W_{ij})^2}{m_j} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

进一步可得关于刚度系数  $\kappa_i$  的线性表达式, 即

$$\begin{aligned} \kappa_i^v &= \frac{DV_i^c}{Dt} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{(V_i^0)^3} \cdot \\ &\cdot \frac{\gamma_i}{\underbrace{\left( \frac{\left( \sum_j V_j^0 \nabla W_{ij} \right)^2}{m_i} + \sum_j \frac{(V_j^0 \nabla W_{ij})^2}{m_j} \right)}_{\alpha_i'}} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 等号右端最后一项对应于 DFSPH 中的  $\alpha_i$ , 本文中记为  $\alpha'_i$ . 考虑动量守恒, 作用在粒子  $i$  上的总压力为

$$\mathbf{F}_{i,\text{total}}^p = \mathbf{F}_i^{p_i} + \sum_j \mathbf{F}_j^{p_i} = -\frac{\kappa_i^v}{\gamma_i} (V_i^0)^2 \sum_j V_j^0 \nabla W_{ij} - V_i^0 \sum_j \frac{\kappa_j^v}{\gamma_j} (V_j^0)^2 \nabla W_{ij}.$$

每次迭代的速度更新为

$$\mathbf{v}_i^* := \mathbf{v}_i^* - \frac{\Delta t V_i^0}{m_i} \left( \frac{\kappa_i^v}{\gamma_i} V_i^0 \sum_j V_j^0 \nabla W_{ij} + \sum_j \frac{\kappa_j^v}{\gamma_j} (V_j^0)^2 \nabla W_{ij} \right) \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{v}_i^*$  为由前一时间步长的速度和 N-S 方程中的其他非压力引起的中间速度, 通过求解压力修正粒子速度, 使体积通量变化率满足无散度条件.

### 3.2 流体模拟求解器设计

根据第 3.1 节算法, 本文共设计 2 个求解器, 以满足流体模拟的不可压缩条件(恒定体积求解器)以及体积通量无散度条件(体积通量无散度求解器). 第 3.1 节中所述流程即为体积通量无散度求解器设计思路, 恒定体积求解器思路与之相似, 只对式(12)模式进行改变, 令

$$V_i^* = V_i^c + \Delta t V_i^0 \sum_j V_j^0 (\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_j^*) \cdot \nabla W_{ij} \quad (17)$$

从而使压力修正粒子位置, 以达到恒定体积的状态, 即

$$V_i^* - V_i^0 = \Delta t^2 V_i^0 \sum_j V_j^0 \left( \frac{\mathbf{F}_i^{p_i}}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j^{p_i}}{m_j} \right) \cdot \nabla W_{ij}.$$

该求解器中使用的刚度系数为

$$\kappa_i = \frac{(V_i^* - V_i^0)}{\Delta t^2} \frac{1}{(V_i^0)^3} \alpha'_i \quad (18)$$

虽然  $\kappa_i$  与  $\kappa_i^v$  需分别求解, 但  $\alpha'_i$  可由 2 个求解器共享, 且每个时间步长只需计算一次.

体积通量无散度 SPH 方法结合 2 个求解器算法步骤如下.

输入. 时刻  $t$  所有粒子  $i$  静态体积  $V_i^0$ , 位置  $\mathbf{x}_i$ , 速度  $\mathbf{v}_i$ , 质量  $m_i$ , 时间步长  $\Delta t$ , 粒子数量  $n$ .

输出. 下一时刻  $t + \Delta t$  所有粒子  $i$  位置  $\mathbf{x}_i(t + \Delta t)$ , 速度  $\mathbf{v}_i(t + \Delta t)$ .

Step1. 于当前时刻  $t$ , 遍历所有粒子  $i$ , 对每个粒子  $i$  查找邻居粒子集合  $N_i$ .

Step2. 遍历所有粒子  $i$ , 根据式(7)计算每个粒子

的压缩体积  $V_i^c$ , 根据式(15)计算  $\alpha'_i$ .

Step3. 体积通量无散度求解器, 设定最小迭代次数  $l_{\min}^v$  (本文取 2), 最大迭代次数  $l_{\max}^v$  (本文取 50), 以及体积通量变化率阈值  $\eta^v$  (本文取  $10^{-3}$ ), 并令当前求解器迭代次数  $l^v = 0$ ,  $\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i$ :

Step3.1. 遍历所有粒子, 根据式(12)计算粒子  $i$  的体积通量变化率  $\frac{DV_i^c}{Dt}$ ;

Step3.2. 遍历所有粒子  $i$ , 根据式(15)计算每个粒子的刚度系数  $\kappa_i^v$ ;

Step3.3. 遍历所有粒子  $i$ , 根据式(16)修正中间速度  $\mathbf{v}_i^*$ ;

Step3.4. 若

$$(l^v < l_{\min}^v) \vee \left[ \left( \Delta t \sum_i \frac{DV_i^c}{Dt} / n > \eta^v \right) \wedge (l^v < l_{\max}^v) \right]$$

为真, 令  $l^v + 1$  并转 Step3.1; 否则对所有粒子  $i$ , 令  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^*$ .

Step4. 预测步骤:

Step4.1 遍历所有粒子  $i$ , 计算非压力  $\mathbf{F}_i^*$ ;

Step4.2 遍历所有粒子  $i$ , 根据式(11)更新中间速度  $\mathbf{v}_i^*$ .

Step5. 恒定体积求解器, 设定最小迭代次数  $l_{\min}$  (本文取 1), 最大迭代次数  $l_{\max}$  (本文取 50), 以及体积通量变化率阈值  $\eta$  (本文取  $10^{-4}$ ), 并令当前求解器迭代次数  $l = 0$ :

Step5.1 遍历所有粒子  $i$ , 根据式(17)计算体积偏差  $V_i^*$ ;

Step5.2 遍历所有粒子  $i$ , 根据式(18)计算刚度系数  $\kappa_i$ ;

Step5.3 遍历所有粒子  $i$ , 将式(16)中  $\kappa_i^v$  项替换为  $\kappa_i$ , 并删去式(16)中  $\Delta t$  项, 计算修正中间速度  $\mathbf{v}_i^*$ ;

Step5.4 若

$$(l < l_{\min}) \vee \left[ \left( \sum_i \min(V_i^* - V_i^0, 0) / n > \eta \right) \wedge (l < l_{\max}) \right]$$

为真, 令  $l + 1$  并转 Step5.1; 否则对所有粒子  $i$ , 令  $\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i + \Delta t \mathbf{v}_i^*$ ,  $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i^*$ .

体积通量无散度 SPH 计算复杂度与 DFSPH 相同, 而本文方法使用体积相关计算代替密度相关计算, 更好地满足了高密度比混合流体模拟的需求, 提高了计算的稳定性和动画的真实感效果.

## 4 实验及讨论

本节将体积通量无散度 SPH 方法在多个场景



中进行测试, 并将其与 DFSPH 方法<sup>[12]</sup>进行比较, 模拟时流体体积压缩误差比  $\eta$  均设置为  $10^{-4}$ , 体积散度误差  $\eta^v$  均设置为  $10^{-3}$ . 模拟方法采用了邻居搜索算法<sup>[27]</sup>、边界处理方法<sup>[28]</sup>、热传导算法<sup>[29]</sup>, 和文献[30]中的表面张力模型. 物理模拟系统框架基于 C++ 实现, 并使用各向异性方法<sup>[31]</sup>进行流体表面重构, 使用 Blender 进行动画渲染. 实验设备为配备 Intel Xeon E5-2687 v4(15M 高速缓存, 3.5 GHz, 4 核)CPU, 80 GB RAM 和 NVIDIA Quadro P4000 GPU 的台式工作站. 本文实验数据如表 1 所示.

表 1 实验数据统计

实验场景	对应图序号	$10^{-3} \times$ 粒子数	粒子大小/m	时间步长/ms
两相溃坝	图 3, 4	117	0.10	2.0
高密度比交互	图 5	108	0.05	CFL <sup>[1]</sup>
两相流体搅动	图 6	19	0.15	4.5
热对流	图 7	252	0.10	1.0

#### 4.1 两相溃坝实验

为考查体积通量无散度 SPH 方法在模拟不同密度多相流交互耦合时的性能, 首先进行两相流体溃坝实验. 如图 3 所示, 2 种具有不同密度的水块从高处落下, 并相互碰撞产生交互, 随后两相流体分层.

图 3 所示为分别采用 DFSPH 方法和本文方法的模拟结果, 第 1 行 2 种流体的密度分别为  $500 \text{ kg/m}^3$  和  $1\,000 \text{ kg/m}^3$ , 第 2 行 2 种流体的密度分别为  $200 \text{ kg/m}^3$  和  $1\,000 \text{ kg/m}^3$ , 第 3 行 2 种流体的密度分别为  $25 \text{ kg/m}^3$  和  $1\,000 \text{ kg/m}^3$ , 3 行密度比分别为 1:2, 1:5 与 1:40. 实验中, DFSPH 方法的结果会出现明显的不稳定现象, 进而内部流体局部消失产生空腔(图中黄框区域). 在流体相对运动较为激烈时, 较高黏滞力可抑制 DFSPH 方法在高密度比两相流体交界处不合理密度近似所导致的压强场不稳定; 当黏滞效应随着流体相对运动幅度减弱时, 不稳定压强效果开始显著, 产生空腔.

另外, 随着密度比不断提升, DFSPH 方法中两相流体交互边界处缝隙不断扩大(灰色放大区域), 而本文方法始终保持两相流体模型交互边界处无缝贴合. 该现象是由于 DFSPH 方法出现如图 1 所示的密度计算误差所导致的压强梯度阶跃现象而产生的, 且会随密度比增大而愈发明显.

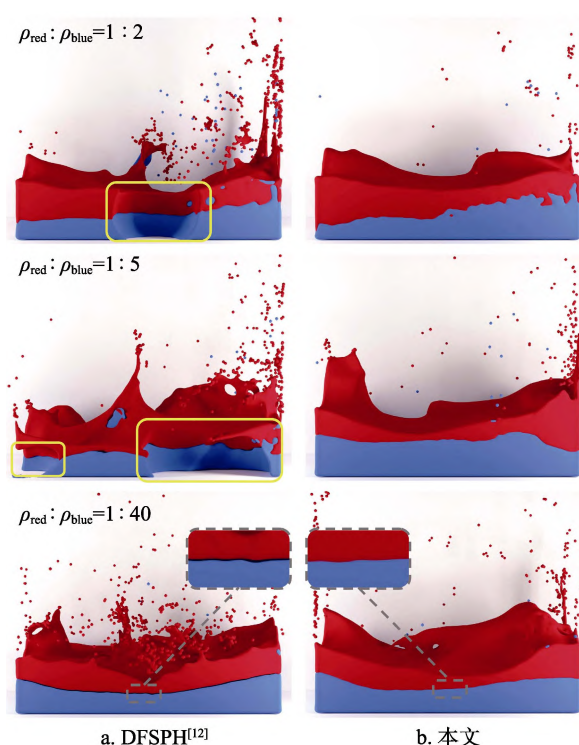


图 3 2 种方法两相溃坝实验

由于本文方法与 DFSPH 方法同属于隐式压强求解 SPH 方法, 2 个求解器配置方案与 DFSPH 方法原理相仿, 均根据流体刚性系数, 实现流体整体不可压缩与速度场无散度(本文方法为体积通量形式), 每轮迭代均只考虑单轮邻居粒子迭代(非 IISPH 方法考虑 2 轮迭代方案)带来的压强影响, 故本文方法与 DFSPH 方法具有相同计算复杂度, 因此可通过在 2 种方法中设置相同的收敛阈值, 比较相同时间内迭代轮数, 考查计算效率. 迭代次数越少, 意味着计算效率越高.

图 4 进一步对比了流体密度比为 40 时两者在该场景内每 0.1 s 所产生的迭代次数. 当 2 个流体块发生相互接触时, 由于很难保持无散度状态, 所以 2 种方法中无散度求解器都需迭代多次; 之后的过程中, 由于 DFSPH 方法多相流界面处存在密度近似误差, 其速度无散度求解器与体积通量无散度 SPH 相比, 需要更多轮迭代.

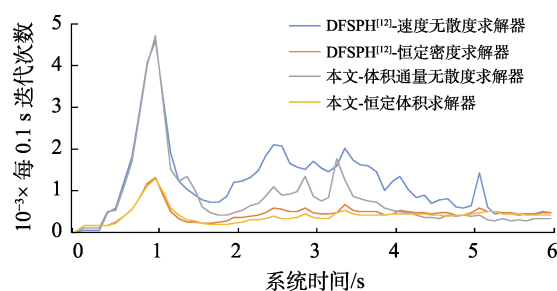


图 4 DFSPH 与本文方法的迭代次数对比

## 4.2 高密度比交互实验

为进一步验证本文方法在极端密度比流体交互条件下的稳定性, 本文开展了密度比为 1:100 的蛇形管道内两相流体交互实验. 如图 5 所示, 高密度流体(蓝色,  $1\,000\text{ kg/m}^3$ )受重力作用在蛇形管道内冲向低密度流体(青色,  $10\text{ kg/m}^3$ ), 两者展开交互.

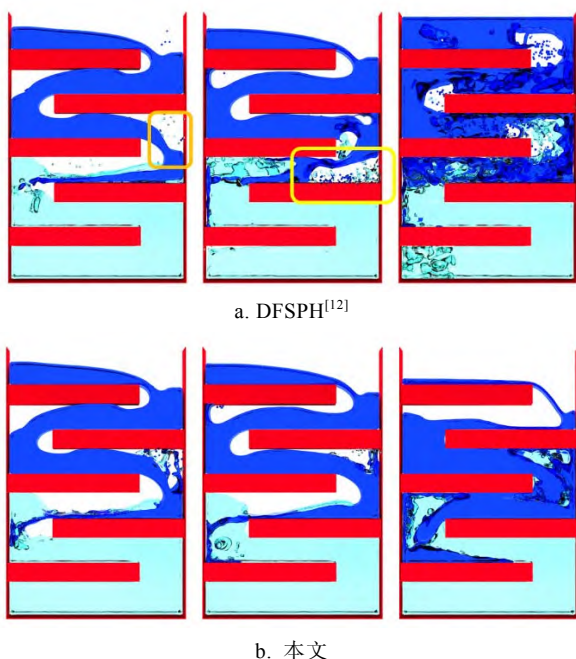


图 5 1:100 密度比两相流体在复杂边界条件下运动交互模拟效果

由于该实验中两相流体密度差距极大, 故采取 CFL 条件<sup>[1]</sup>动态控制模拟时间步长, 提升稳定性. 图 5a 中采用传统 DFSPH 方法模拟该场景, 在两相流体最初接触时便由于压强场精确性问题产生动态细节丢失问题(橙框区域), 并随时间发展出现局部不稳定(黄框区域), 最终出现全局压强过大所导致的“爆炸”效果(第 3 列). 图 5b 采用本文体积通量无散度方法进行模拟, 可以稳定实现复杂边界条件下高密度比多相流模拟交互, 且可明显看出, 两相流体交互产生接近气-液交互效果, 可显式实现对气-液交界面的动态描述.

## 4.3 混合液体搅动实验

图 6 展示了更加动态的实验场景, 实验中用 4 根棒子搅拌两相流体使之充分混合, 其中透明相密度为  $200\text{ kg/m}^3$ , 蓝色相密度为  $1\,000\text{ kg/m}^3$ , 分别用 2 种方法开展实验. 与 DFSPH 相比, 体积通量无散度 SPH 方法在模拟搅拌棒搅动 2 种流体过程中表现更加稳定. DFSPH 方法实验中, 可明显看到搅动时流体内部出现不自然迸溅情况, 且有离

散水滴不断飞出容器, 整体震荡十分剧烈. 本文方法在搅动过程中多相流表现更加稳定顺滑, 且搅动完成后可以顺利分层恢复平静, 两相交界面分层明显, 无 DFSPH 中所出现的明显噪声.



图 6 1:5 密度比两相流体搅动实验

## 4.4 热对流实验

为验证本文方法对于连续变化密度场中流体的对流动态模拟, 设计如图 7 所示的热对流实验, 水槽内部装满流体, 底部有一热源, 实验对比 2 种算法实现的热对流效果.

实验中, 为描述热对流现象, 每个粒子随着温度升高会产生一定的质量损失, 令粒子体积保持不变, 以实现同等压强浮力条件下较轻粒子上浮、较重粒子下沉的效应, 即为本实验中所近似模拟的热对流现象. 质量损失系数  $\beta$  与温度的关系为  $\beta_i = 1 - T_i / T_{\text{threshold}}$ . 其中,  $T_i$  为粒子  $i$  的温度; 由用户定义  $T_{\text{threshold}}$  以控制密度比. 此处选择  $T_{\text{threshold}} = 62.5\text{ }^\circ\text{C}$ , 使得当  $T = 50\text{ }^\circ\text{C}$  (此实验中的最高温度, 表示为红色) 时,  $\beta = 0.2$ , 粒子的质量变化为  $m_i := m_i \beta_i$ .

如图 7 所示, 图 7a 显示了没有粒子质量随升温损失的无对流效果. 热量只是缓慢散发开来, 而不会引起流体内部任何流动; 在图 7b 中, 通过 DFSPH 方法实现热对流, 尽管热对流在一定程度



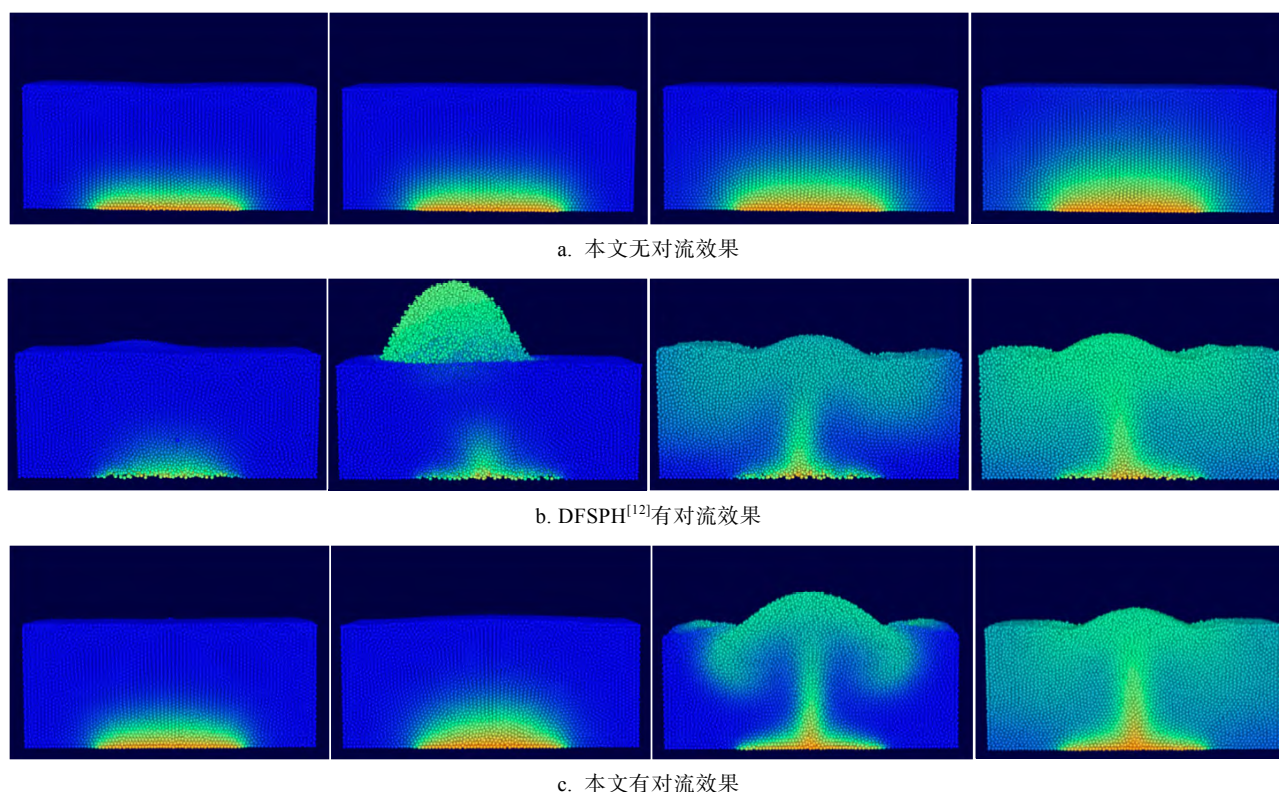


图 7 2 种方法热对流实验对比

上得以实现,但在底部最热的区域存在明显的不自然现象,该区域的粒子相距太远;另外,图 7b 第 2 列中,发生了不自然的“爆炸”现象,加热的粒子过早冒出表面,表明在模拟过程中出现了数值不稳定现象;在图 7c 中,使用本文方法模拟热对流,底部被加热的粒子更加稳定,对流引起的流动更加顺畅,实现了稳定的热对流效果。

## 5 结 语

本文提出了一种体积通量无散度 SPH 方法,可有效地提升 SPH 方法在非均一密度场的不可压缩流体模拟过程中的数值计算精度,实现了对于高密度比多相流体交互的稳定高效模拟。本文方法通过使用体积-压缩率框架代替传统 SPH 方法的质量-密度体系,分别构建了恒定体积求解器及体积通量无散度求解器,维持了流体体积不可压缩与速度场无散度状态。实验表明,本文方法不仅可以处理传统 SPH 方法难以稳定的高密度比多相流体交互,而且实现了多相流体边界无缝密贴,更能增强对流体对流效应模拟的精度与稳定性。

本文方法仍局限于处理不可混溶多相流体交互,未来将进一步探索多相流交互中可混溶流体相互作用的动力学模型,并结合本文所提出的思

路,实现包括混溶<sup>[23]</sup>、萃取<sup>[24]</sup>、强耦合边界<sup>[32]</sup>以及湍流<sup>[33]</sup>等更复杂现象的模拟效果。

## 参考文献(References):

- [1] Koschier D, Bender J, Solenthaler B, *et al.* Smoothed particle hydrodynamics techniques for the physics based simulation of fluids and solids[C] //Proceedings of the 40th Annual Conference of the European Association for Computer Graphics, Eurographics 2019. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2019: 1-41
- [2] Zhang Yalan, Ban Xiaojuan, Xu Yanrui, *et al.* Boundary handling for non-Newtonian fluid simulation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2019, 31(8): 1341-1349(in Chinese)  
(张雅澜, 班晓娟, 徐衍睿, 等. 面向非牛顿流体仿真的边界处理方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2019, 31(8): 1341-1349)
- [3] Liu S N, Wang X K, Ban X J, *et al.* Turbulent details simulation for SPH fluids via vorticity refinement[J]. Computer Graphics Forum, 2021, 40(1): 54-67
- [4] Yuan Zhiyong, Xu Biao, Liao Xiangyun. Fast and precise surface tension for SPH-based fluid simulation[J]. Chinese Journal of Computers, 2019, 42(9): 2062-2075(in Chinese)  
(袁志勇, 徐标, 廖祥云. 基于 SPH 方法的快速逼真流体表面张力仿真[J]. 计算机学报, 2019, 42(9): 2062-2075)
- [5] Bridson R. Fluid simulation for computer graphics [M]. 2nd eds. Natick: CRC Press, 2015

- [6] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. The Astronomical Journal, 1977, 82(12): 1013-1024
- [7] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2003: 154-159
- [8] Becker M, Teschner M. Weakly compressible SPH for free surface flows[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2007: 209-217
- [9] Solenthaler B, Pajarola R. Predictive-corrective incompressible SPH[J]. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): Article No.40
- [10] He X W, Liu N, Li S, *et al.* Local Poisson SPH for viscous incompressible fluids[J]. Computer Graphics Forum, 2012, 31(6): 1948-1958
- [11] Ihmsen M, Cornelis J, Solenthaler B, *et al.* Implicit incompressible SPH[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2014, 20(3): 426-435
- [12] Bender J, Koschier D. Divergence-free smoothed particle hydrodynamics[C] //Proceedings of the 14th ACM SIGGRAPH / Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2015: 147-155
- [13] Ren B, Yang X Y, Lin M C, *et al.* Visual simulation of multiple fluids in computer graphics: a state-of-the-art report[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2018, 33(3): 431-451
- [14] Alduñ I, Tena A, Otaduy M. DYVERSO: a versatile multiphase position - based fluids solution for VFX[J]. Computer Graphics Forum, 2017, 36(8): 32-44
- [15] Ando R, Thuerey N, Wojtan C. A stream function solver for liquid simulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(4): Article No.53
- [16] Boyd L, Bridson R. MultiFLIP for energetic two-phase fluid simulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(2): Article No.16
- [17] Gao Y, Li S, Qin H, *et al.* An efficient FLIP and shape matching coupled method for fluid-solid and two-phase fluid simulations[J]. The Visual Computer, 2019, 35(12): 1741-1753
- [18] Gao Y, Li S, Yang L P, *et al.* An efficient heat-based model for solid-liquid-gas phase transition and dynamic interaction[J]. Graphical Models, 2017, 94: 14-24
- [19] Guo Y L, Liu X P, Xu X M. A unified detail-preserving liquid simulation by two-phase lattice Boltzmann modeling[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2017, 23(5): 1479-1491
- [20] Mao H, Yang Y H. Particle-based immiscible fluid-fluid collision[C] //Proceedings of the Graphics Interface 2006. New York: ACM Press, 2006: 49-55
- [21] Müller M, Solenthaler B, Keiser R, *et al.* Particle-based fluid-fluid interaction[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/ Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2005: 237-244
- [22] Solenthaler B, Pajarola R. Density contrast SPH interfaces[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH /Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2008: 211-218
- [23] Ren B, Li C F, Yan X, *et al.* Multiple-fluid SPH simulation using a mixture model[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(5): Article No.171
- [24] Yang T, Chang J, Ren B, *et al.* Fast multiple-fluid simulation using Helmholtz free energy[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(6): Article No.201
- [25] Jiang Y, Li C, Deng S, *et al.* A divergence-free mixture model for multiphase fluids[J]. Computer Graphics Forum, 2020, 39(8): 69-77
- [26] Bodin K, Lacoursière C, Servin M. Constraint fluids[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2012, 18(3): 516-526
- [27] Ihmsen M, Akinci N, Becker M, *et al.* A parallel SPH implementation on multi-core CPUs[J]. Computer Graphics Forum, 2011, 30(1): 99-112
- [28] Akinci N, Ihmsen M, Akinci G, *et al.* Versatile rigid-fluid coupling for incompressible SPH[J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(4): Article No.62
- [29] Iwasaki K, Uchida H, Dobashi Y, *et al.* Fast particle-based visual simulation of ice melting[J]. Computer Graphics Forum, 2010, 29(7): 2215-2223
- [30] Wang X K, Ban X J, Zhang Y L, *et al.* Surface tension model based on implicit incompressible smoothed particle hydrodynamics for fluid simulation[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2017, 32(6):1186-1197
- [31] Wang X K, Ban X J, Liu X, *et al.* Efficient extracting surfaces approach employing anisotropic kernels for SPH fluids[J]. Journal of Visualization, 2016, 19(2): 301-317
- [32] Gissler C, Peer A, Band S, *et al.* Interlinked SPH pressure solvers for strong fluid-rigid coupling[J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(1): Article No.5
- [33] Wang X K, Liu S N, Ban X J, *et al.* Robust turbulence simulation for particle-based fluids using the Rankine vortex model[J]. The Visual Computer, 2020, 36(10): 2285-2298