

Note of Fluid Dynamics

Wang Yizhen

2019 年 10 月 12 日

前言

流体力学笔记。主要内容来自 Nicholas Hutchins 教授撰写的流体力学课程讲义，同时参考了一部分朗道的《流体力学》，以及沈维道的《工程热力学》

所有内容仅供学习参考，遵循 CC-BY-SA-4.0 开源协议。有疏漏之处请提交 Issue 或发起 Pull request。能力一般，水平有限，恳请斧正。

目录

1	不可压缩流体	1
2	可压缩流体 - 基本公式	2
2.1	可压缩流体的重要关系式	2
2.1.1	连续性方程（质量守恒）	2
2.2	动量守恒	2
2.2.1	能量守恒	2
2.2.2	其他可用关系式	3
2.3	声速	3
3	等熵可压缩流	4
3.1	可压缩流体的欧拉方程	4
3.2	温度、压力与密度关系	4
3.3	二维喷管中的流体	4
3.4	喷管中的流体	4
3.5	喷管的截面积	5
4	激波	6
4.1	一维导管内的激波	6
4.2	导管内的熵变	6
4.3	正向激波内的马赫数变化	7
4.4	弱激波下的熵增	8
4.5	滞止压力在激波中的变化	8
4.6	二维喷管中的流体	8
4.7	斜激波	10
4.8	马赫角	11
4.9	偏折角 θ 与激波倾角 β 间的关系	11
4.10	斜激波的特殊解	12
4.11	马赫线与其性质	13
4.12	马赫线分析	14
5	可压缩流体的空气动力学	18
5.1	激波-膨胀波方法	18
5.2	Ackeret 理论	18
6	兴波阻力	23
6.1	音障	23
6.2	延迟阻力发散与降低兴波阻力的方法	24
7	管道中的有摩擦绝热流	25
8	Prandtl 关系	27
8.1	正激波推导的另一种方法	27
9	数学	28
9.1	高斯散度定理	28

1 不可压缩流体

暂时先搁置，先整理可压缩流体章节。

2 可压缩流体 - 基本公式

对于不可压缩流体而言, $\rho = \text{constant}$; 可压缩流体则一般 $\rho \neq \text{constant}$ 。

2.1 可压缩流体的重要关系式

2.1.1 连续性方程 (质量守恒)

对于一个控制体, 有

$$[\text{控制体内的质量改变率}] + [\text{通过控制体边界的质量}] = 0$$

利用梯度算子, 可以写作

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0$$

借助高斯散度定理, 对等式两边积分, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

2.2 动量守恒

考虑一个控制体的动量,

$$[\text{控制体动量的变化率}] = [\text{对控制体施加的外力}]$$

对控制体施加的合外力可以视为三个部分的和, 压力、体积力和粘滞力的共同效果导致了控制体动量的改变。在三个方向的分量可以表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (F_x)_{viscous} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho v \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (F_y)_{viscous} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho w \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (F_z)_{viscous} \end{aligned}$$

再次对等式两边积分, 并利用高斯散度定理可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega + \oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = - \oiint_S p d\mathbf{S} + \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega + \mathbf{F}_{viscous}$$

左侧第一项可以视为控制体内动量的变化量, 第二项则是通过控制体边界净增加/减少的动量; 等式右侧第一项是作用在控制体上的压力之和 (负号由于压力与单位面积向量的方向相反), 第二项是控制体体积力之和, 第三项则是总的粘滞力。

2.2.1 能量守恒

从热力学第一定律, 我们有

$$\Delta E = Q + W$$

即

$$[\text{控制体内的能量变化率}] = [\text{传递给控制体的热功率}] + [\text{外界对控制体做功的功率}]$$

微分形式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = \rho \dot{q} + \dot{\mathbf{Q}}'_{\text{viscous}} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \rho(\mathbf{f}, \mathbf{V}) + \dot{\mathbf{W}}'_{\text{viscous}}$$

积分形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\Omega + \oint_S \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \rho \dot{q} d\Omega - \oint_S (p \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} + \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) d\Omega + \dot{\mathbf{Q}}_{\text{viscous}} + \dot{\mathbf{W}}_{\text{viscous}}$$

2.2.2 其他可用关系式

理想气体状态方程

$$p = \rho RT$$

其中 R 为气体常数,

$$R = \frac{R_u}{MW}$$

内能关系:

$$e = c_v T$$

焓关系:

$$h = c_p T$$

绝热指数与热容关系:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_p - c_v = R$$

绝热（等熵）过程:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$$

2.3 声速

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT$$

由此可定义马赫数

$$M = \frac{V}{a} = \text{Mach number}$$

类似地, 可以定义水中的波速

$$c = \sqrt{gy}$$

式中, g 为重力加速度, y 为水深。同样也可定义 Froude 数,

$$\text{Froude number} = F = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

3 等熵可压缩流

3.1 可压缩流体的欧拉方程

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} &= \text{const} \\ \frac{p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2 &= \text{const} \\ \frac{1}{2} V^2 + T c_p &= \text{const}\end{aligned}$$

滞止温度与滞止焓：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} V^2 + T c_p &= T_0 c_p \\ \frac{1}{2} V^2 + h &= h_0\end{aligned}$$

3.2 温度、压力与密度关系

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \\ \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}\end{aligned}$$

3.3 二维喷管中的流体

考虑连续性方程：

$$\begin{aligned}\rho A V &= (\rho + d\rho)(A + dA)(V + dV) \\ 0 &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V}\end{aligned}$$

考虑动量守恒（牛顿第二定律）：

$$\frac{dp}{\rho} + V dV = 0$$

3.4 喷管中的流体

考虑

$$\frac{dp}{\rho} + V dV = 0$$

代入

$$\begin{aligned}a^2 &= \frac{dp}{d\rho} \\ M^2 &= \frac{V^2}{a^2}\end{aligned}$$

可以得到

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V}$$

再把此式代回

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

不难得到

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

上式揭示了喷管截面积、马赫数与流体速度间的关系。 $M = 0$ 时，流体可以视为不可压缩流体； $0 < M < 1$ 时为亚音速流，渐缩喷管加速流体，渐扩喷管减速流体； $M = 1$ 时为音速流，喷管截面积在此时取到最值； $M > 1$ 时为超音速流，渐缩喷管减速流体，渐扩喷管加速流体。

为了得到超音速流体，需要使用缩放喷管（拉伐尔喷管）。

3.5 喷管的截面积

利用先前推导的温度、压力、密度关系，

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \\ \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}\end{aligned}$$

在喉部位置，马赫数 $M = 1$ ，并且考虑空气的绝热指数 $\gamma = 1.4$ ，可以得到喉部的状态：

$$\begin{aligned}\frac{T^*}{T_0} &= 0.833 \\ \frac{p^*}{p_0} &= 0.528 \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= 0.634\end{aligned}$$

另一方面，利用连续性方程，统一代换为马赫数之比，即可得到任意截面面积与喉部截面积之比：

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{1}{M}\right) \left(\frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2\right]\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

其中 A^* 为对应 $M^* = 1$ 的喉部截面积。

类似的，利用可压缩流体的伯努利方程（取参考点为滞止点），附加上绝热关系，可以得到，当地速度只与当地压力有关：

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)}$$

4 激波

4.1 一维导管内的激波

考虑如图 4.1所示的导管，可以列写出相关的质量、动量、能量守恒方程式：

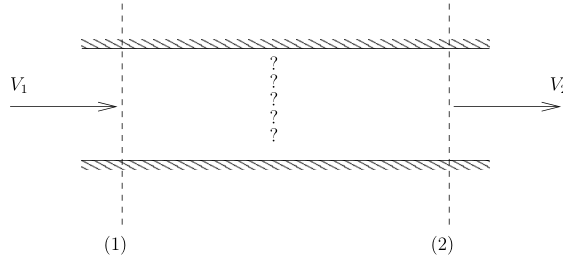


图 4.1: 正向激波

$$\begin{aligned}\rho_1 V_1 A &= \rho_2 V_2 A = \dot{m} \\ p_1 A + \rho_1 A V_1^2 &= p_2 A + \rho_2 A V_2^2 \\ \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}\end{aligned}$$

对于该方程，一个非常直观的解就是 $p_1 = p_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $V_1 = V_2$.

但除此之外，利用动量式除以质量式，代入能量式，并利用理想气体状态方程，可以得到一个非平凡的解：

$$\begin{aligned}\frac{p_2}{p_1} - 1 &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 &= \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)) (2 + (\gamma-1) M_1^2)}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \\ \frac{T_2}{T_1} - 1 &= \frac{2(\gamma-1) (\gamma M_1^2 + 1) (M_1^2 - 1)}{(\gamma+1)^2 M_1^2}\end{aligned}$$

4.2 导管内的熵变

$$\begin{aligned}T ds &= du + p dv \\ dh &= du + p dv \\ v &= \frac{1}{\rho} \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \\ s_2 - s_1 &= c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{c_p} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^R \right] \\ \frac{s_2 - s_1}{c_v} &= \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \ln \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \right]\end{aligned}$$

代入上一节中关于压力比与密度比的式子，并且定义 $m = M_1^2 - 1$ ，最终我们可以得到

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left\{ \left[\frac{(m+1)(\gamma-1)+2}{(m+1)(\gamma+1)} \right]^\gamma \left[1 + \frac{2\gamma m}{\gamma+1} \right] \right\} = f(m)$$

可以发现，导管内的熵变只与上游马赫数以及绝热指数相关。导管内的熵变可以用两部分来表示，

$$s_2 - s_1 = \Delta s_q + \Delta s_{irr}$$

其中第一项为传热带来的熵变，第二项为不可逆过程带来的熵变。如果考虑绝热流，那么根据热力学第二定律，我们可以得到

$$s_2 - s_1 \geq 0$$

从而

$$M_1^2 - 1 \geq 0$$

$$M_1^2 \geq 1$$

$$\frac{p_2}{p_1} \geq 1$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 1$$

$$\frac{V_2}{V_1} \leq 1$$

$$\frac{T_2}{T_1} \geq 1$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$$

因此，如果等截面导管内的流体存在熵变，或是流体状态发生改变，那么入口处的流体必须是超音速的。

4.3 正向激波内的马赫数变化

仍然从质量守恒（连续性）方程出发，将流速用马赫数替代，并代入理想气体状态方程、声速定义和压力比、密度比关系，可以得到

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}$$

$$M_2^2 - 1 = \frac{\frac{\gamma+1}{2}(1 - M_1^2)}{\gamma(M_1^2 - 1) + \frac{\gamma+1}{2}}$$

从而，我们得到了出口、入口马赫数 M_2 M_1 间的关系。如图 4.2所示。

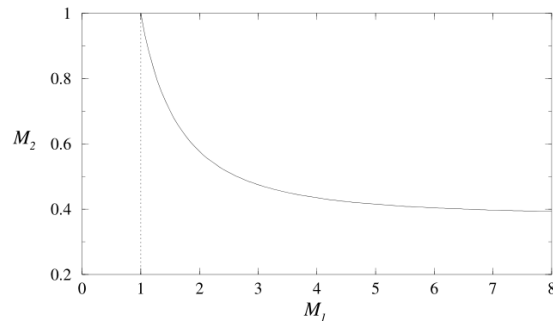


图 4.2: 出口、入口马赫数关系

可以看出，入口处为超音速流体，出口处则为亚音速流体。因此可以得出结论：超音速流在经历激波后，变为亚音速流。

4.4 弱激波下的熵增

弱激波定义为

$$\frac{p_2}{p_1} \approx 1$$

不难得到，在此条件下的入口马赫数接近 1。同时由于 $m = M_1^2 - 1 \rightarrow 0$ ，因此

$$f(m) \approx \frac{1}{15} m^3$$

4.5 滞止压力在激波中的变化

对于等熵流，我们有

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

但对于激波而言，这个等式并不成立，因为激波本身并不是一个等熵过程。但对于间断面前后的区域，分别有

$$\begin{aligned} \frac{p_{01}}{p_1} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{p_{02}}{p_2} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{aligned}$$

可以替换式中的压力比和 M_2 ，从而得到

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{\frac{-1}{\gamma - 1}}$$

由于入口处为超音速流，因此 $M_1 > 1$ ，

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} < 1$$

可以得知，滞止压力在经历激波后将会下降，且入口处马赫数越高，压力下降越多。

4.6 二维喷管中的流体

$$\frac{A^*}{A} = \frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}$$

对于一个确定的喷管，如果能够确定出口处流体是超音速流体，那么出口处的压力比 p_e/p_0 就是唯一确定的。但是事实上，出口处的压力可以被设计为任意的值，这会导致在渐扩喷管中一定会出现激波，这个过程会是不可逆的。如图 4.3所示，分别展示了几种不同出口压力下，激波产生的位置。

- (7) $p_{e7}/p_0 = p_e/p_0$ ，全过程均为等熵流。

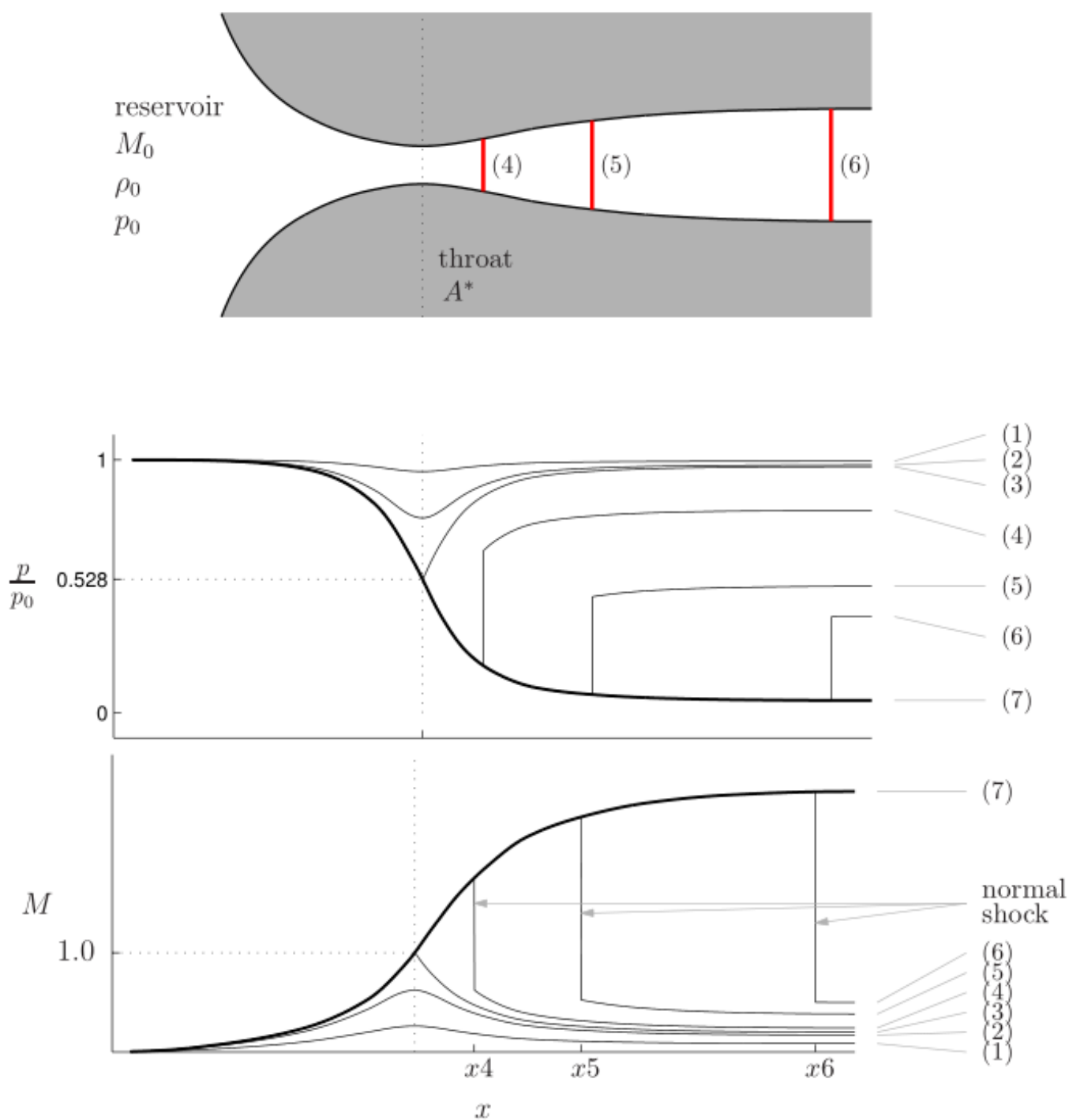


图 4.3: 出口压力不同导致的激波

- (1), (2) 流体全程均未超过声速，同时全程均为等熵流
- (3) 出口压力的设置使得在喉部的流体恰好达到声速。此时，在喉部会发生弱激波，在渐扩喷管部分流体会减速，但流体全程仍为等熵流。
- (4) 当 $p_{e4} < p_{e3}$ 时，流体在通过喉部之后将无法保持等熵流，因为出口压力 $p_{e4}/p_0 > p_{e7}/p_0$ ，因此一定会在渐扩喷管的某个部分发生激波。
- (5), (6) 与 (4) 类似，但由于压力比与 p_{e7}/p_0 更加接近，因此激波发生的位置也更加接近出口位置

- 如果压力进一步降低，斜激波将会发生

4.7 斜激波

考虑如图 4.4所示的斜激波，

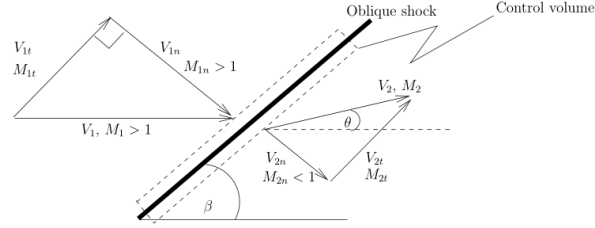


图 4.4: 斜激波

考虑连续性方程与切向和法向的动量：

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n}$$

$$p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2$$

$$\rho_1 V_{1n} V_{1t} = \rho_2 V_{2n} V_{2t}$$

不难得到 $V_{1t} = V_{2t}$ 。由此我们可以得出，对于斜激波，在法向上，其规律与正激波一致；在切向上，速度分量则不产生变化。

如果我们基于上述结果观察一个斜激波，我们就会发现，斜激波的存在会导致流体的流向发生改变，如图 4.5所示。

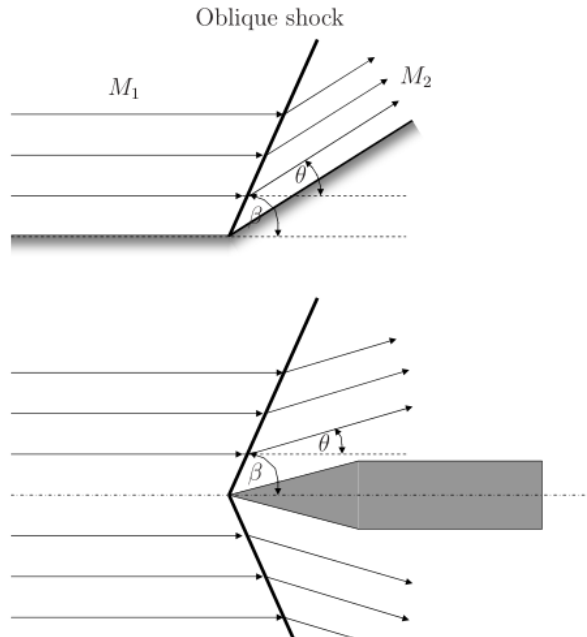


图 4.5: 斜激波导致流体流向的变化

$$M_1 = \frac{M_{1n}}{\sin \beta}$$

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta - \theta)}$$

注意到， $M_1 > 1$ ，但 $M_{2n} < 1$ 并不意味着 $M_2 < 1$ 。在经历斜激波后，流体仍然可能是超音速的。

4.8 马赫角

对于超音速流体，如图 4.6所示的圆锥顶角称为马赫角 μ ,

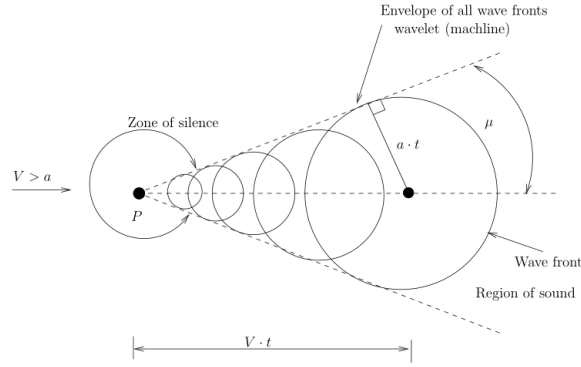


图 4.6: 马赫角

满足

$$\begin{aligned}\sin \mu &= \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \\ M &= \frac{1}{\sin \mu} \\ \sin \mu &= \frac{1}{M}\end{aligned}$$

当超音速流体遇到遇到较强的物理约束时，此时斜激波就会产生，并且满足关系

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\sin \mu} > 1$$

斜激波的角度始终大于马赫角， $\beta > \mu$ 。

4.9 偏折角 θ 与激波倾角 β 间的关系

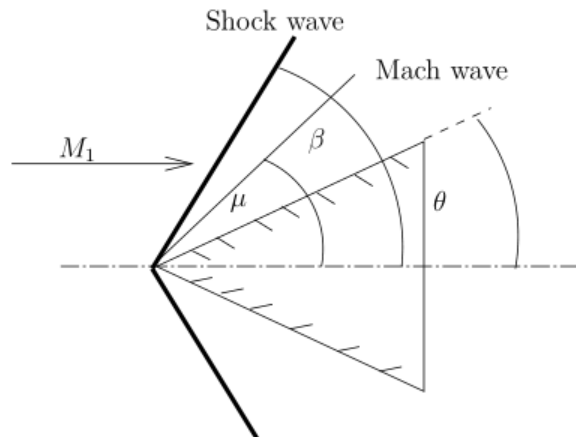


图 4.7: 偏折角与激波倾角间的关系

利用之前的结论，对于斜激波，在法向上，正激波的结论依然适用，因此

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} (M_1 \sin \beta)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} (M_1 \sin \beta)^2}$$

考虑到激波两侧的连续性，因此

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{V_{1n}}{V_{2n}} \\ &= \frac{V_{1n}}{V_{1t}} \frac{V_{2t}}{V_{2n}} \\ &= \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)}\end{aligned}$$

把上述两式进行比较，可以得到

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\tan \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{\tan^2 \beta \frac{\gamma}{2} M_1^2 + \frac{1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta (1 - \tan^2 \beta) + \tan^2 \beta} \\ &= 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]\end{aligned}$$

对应关系可以从图 4.8中得到更直观的了解。

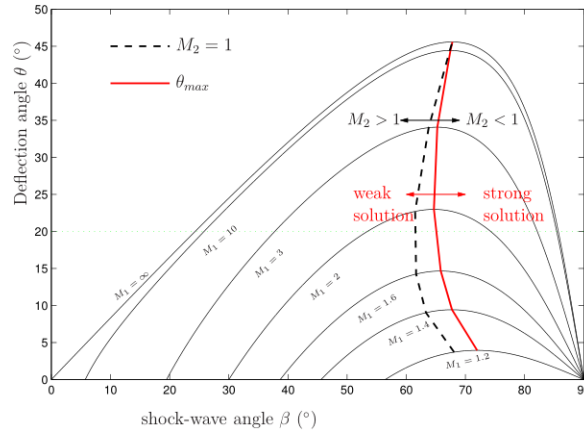


图 4.8: θ vs. β

可以看出，对于给定的 θ 角，有两个 β 角与之对应，其中一个为出流马赫数小于 1 的强解，另一个为出流马赫数大于 1 的弱解。在实际中，出现的究竟是强解还是弱解，取决于背景中的压力；一般而言，弱解更加常见，但是如果提升背景压力，则强解也有可能出现。

$$\begin{aligned}M_{2 \text{ strong}} &< M_{2 \text{ weak}} \\ \beta_{\text{strong}} &> \beta_{\text{weak}}\end{aligned}$$

4.10 斜激波的特殊解

1. 从喷管进入高压区域的超音速流体（喷气式飞机）

当 $p_{e7} < p_e < p_{e6}$ 时，接近出口处的流体将会是超音速流，并且在喷管出口处的压力将会与 p_{e7} 相等，但当流体到达出口处时，必须立刻提升压力到 p_e ，为了达到这样的效果，斜激波会在出口的边角处生成。

涡流层的存在是压力发生骤变的原因。把正激波的式子代入斜激波的法向，可以得到

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$

其中 p_1 是出口前压力， p_2 是出口后压力，通过这个式子以及已知的 M_1 ，我们可以得到对应的 β 角，从而找到对应的 θ 和 M_2 。

2. 固体边界带来的激波反射

当激波碰到墙时，激波也会反射，而对应的反射角由墙带来的边界条件确定：原本平行于墙面的流体在经过激波的两次折射后，仍然平行于墙面，如图 4.9所示。

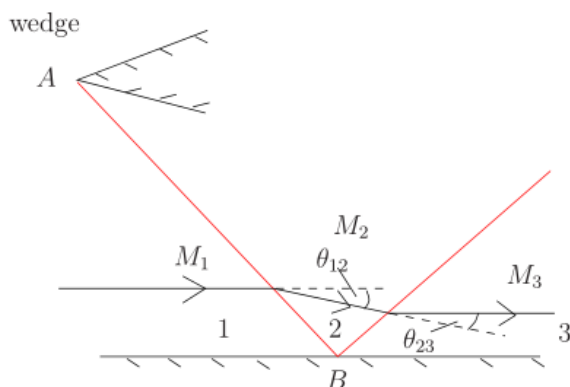


图 4.9: 激波的反射

4.11 马赫线与其性质

通过马赫线，如果气体被压缩，则马赫数减小，马赫角增加；若通过马赫线，气体膨胀，则马赫数增加，马赫角减小。

1. 凹角

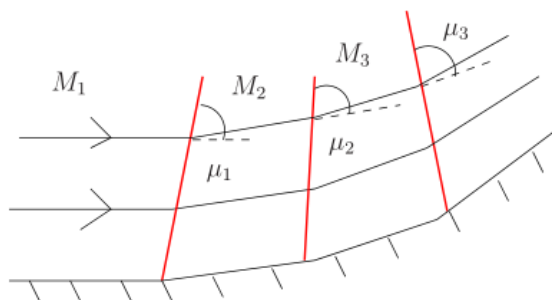


图 4.10: 凹角马赫线

如图 4.10所示，凹角处存在一系列压缩的马赫线， $M_1 > M_2 > M_3$ ， $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ 。通过马赫线的流体可以视为等熵流。同时如图 4.11，这一系列的马赫线会交汇于一点，此时，激波生成了。同时，在这个交汇点的后方，也存在一个涡流层，涡流层上下流体的速度是不连续的，但压力仍然是连续的。在涡流层和固体边界之间的流体可以视为等熵流提，他们只经过了一系列马赫线；在涡流层上方的流体通过了激波间断线，因为通过了斜激波，存在熵变，因此不可逆，等熵关系不再保持。

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad \text{对所有流体适用}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \text{仅对绝热流体适用}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \text{仅对绝热流体适用}$$

2. 凸角

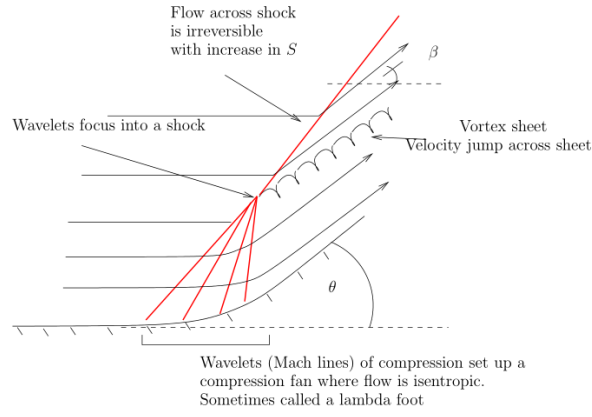


图 4.11: 凹角处的激波

对于凸角，同样存在一系列扩张马赫线，如图 4.12所示， $M_1 < M_2 < M_3$ ， $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ 。但是这一系列的扩张马赫线并不会汇聚于一点。在凸角处，这一现象被称为 Prantdl-Meyer 膨胀扇，如图 4.13。在这种条件下，整个流体都是等熵的。

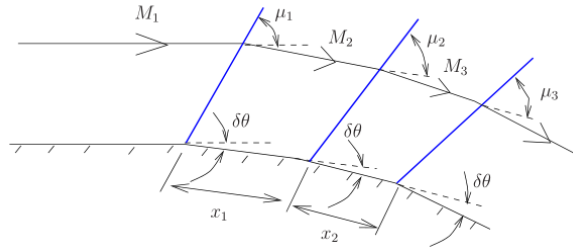


图 4.12: 凸角马赫线

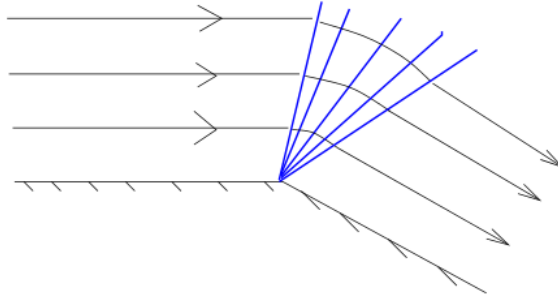


图 4.13: 凸角马赫线

4.12 马赫线分析

考虑如图 4.14所示的凹角，对控制体分析：
质量守恒

$$\rho v_n = (\rho + \delta\rho)(v_n + \delta v_n)$$

$$0 = v_n \delta\rho + \rho \delta v_n$$

切向方向的动量守恒

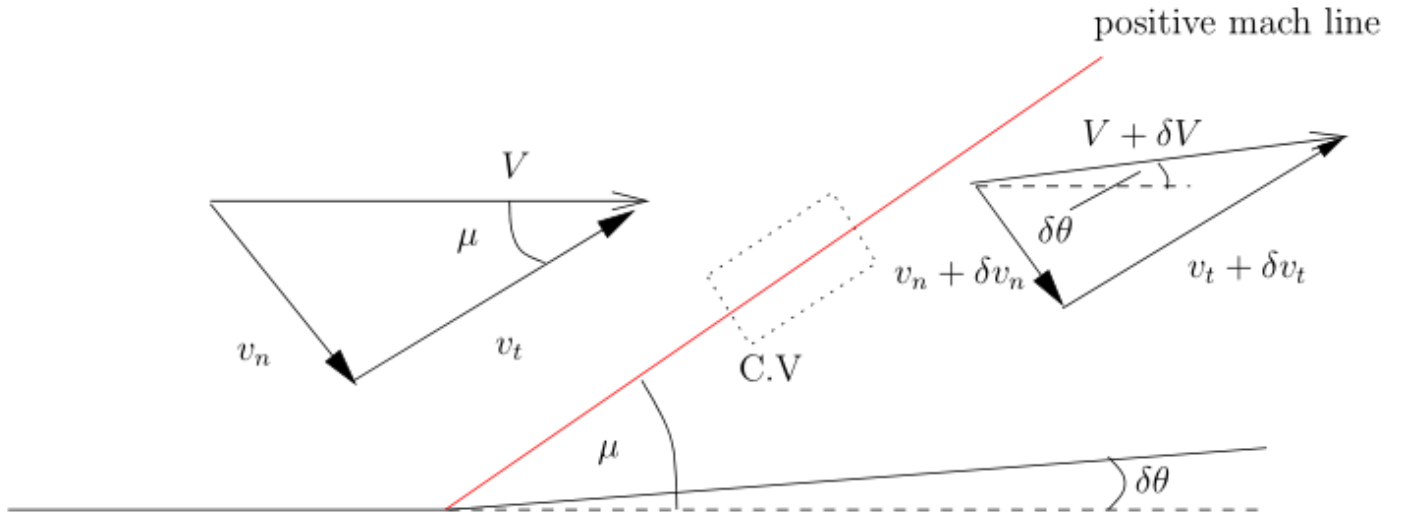


图 4.14: 马赫线分析

$$\begin{aligned}\rho v_n v_t &= (\rho + \delta\rho)(v_n + \delta v_n)(v_t + \delta v_t) \\ \delta v_t &= 0\end{aligned}$$

也可以写作

$$V \cos \mu = (V + \delta V) \cos(\mu - \delta\theta)$$

利用和角公式，并近似 $\sin \delta\theta \rightarrow \delta\theta$ ， $\cos \delta\theta \rightarrow 1$ ，可以得到

$$V \cos \mu = (V + \delta V)(\cos \mu + \delta\theta \sin \mu)$$

展开并忽略高阶小量，可以得到

$$\begin{aligned}\delta V \cot \mu &= -V \delta\theta \\ \delta\theta &= \mp \frac{\delta V}{V} \sqrt{M^2 - 1}\end{aligned}$$

式中的 \mp 代表，对于正的马赫线，此处取负号；对于负的马赫线，此处取正号。为了将 θ 与压力变化 δp 联系起来，利用欧拉方程：

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}$$

微分得到

$$\frac{\delta p}{\rho} = -V \delta V$$

代回前式可得

$$\begin{aligned}
\delta\theta &= \pm \frac{\delta p}{\rho V^2} \sqrt{M^2 - 1} \\
&= \pm \frac{\delta p}{\gamma p M^2} \sqrt{M^2 - 1} \\
&= \mp \frac{\delta M (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{M \left(1 + \frac{M^2(\gamma-1)}{2}\right)}
\end{aligned}$$

对于上式进行积分，

$$\begin{aligned}
\theta &= \mp \int \frac{dM (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{M \left(1 + \frac{M^2(\gamma-1)}{2}\right)} \\
&= \mp \omega(M) + \theta_0
\end{aligned}$$

其中 $\omega(M)$ 被称为 Prandtl 角，为积分

$$\omega(M) = \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \right]$$

也可以通过查表得到。

因此，我们有结论

$$\theta \pm \omega(M) = \theta_0 = \text{const}$$

对于流体的全过程成立。

马赫线与偏转角度的正负定义如图 4.15 所示。注意到， $\mu = \arcsin(1/M)$ ，始终是正值。

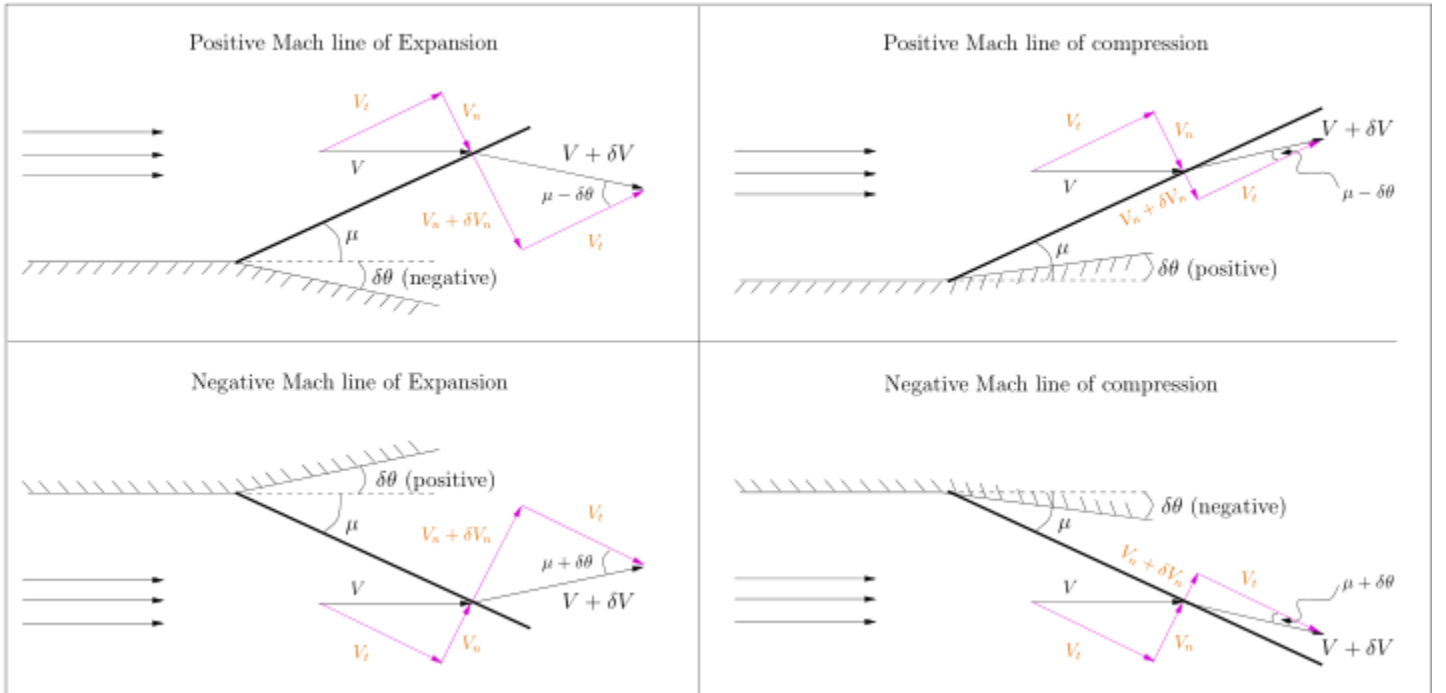


图 4.15: 马赫线与偏转角度的正负定义

从而，

$$V \cos \mu = (V + \delta V) \cos(\mu - \delta\theta) \quad \text{正马赫线}$$

$$V \cos \mu = (V + \delta V) \cos(\mu + \delta\theta) \quad \text{负马赫线}$$

$$\delta\theta = \mp \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \delta M$$

5 可压缩流体的空气动力学

5.1 激波-膨胀波方法

为了得到升力和阻力 (C_L 和 C_D)，可以采用激波-膨胀波方法。

考虑如图所示的具有攻角 α 的菱形机翼。

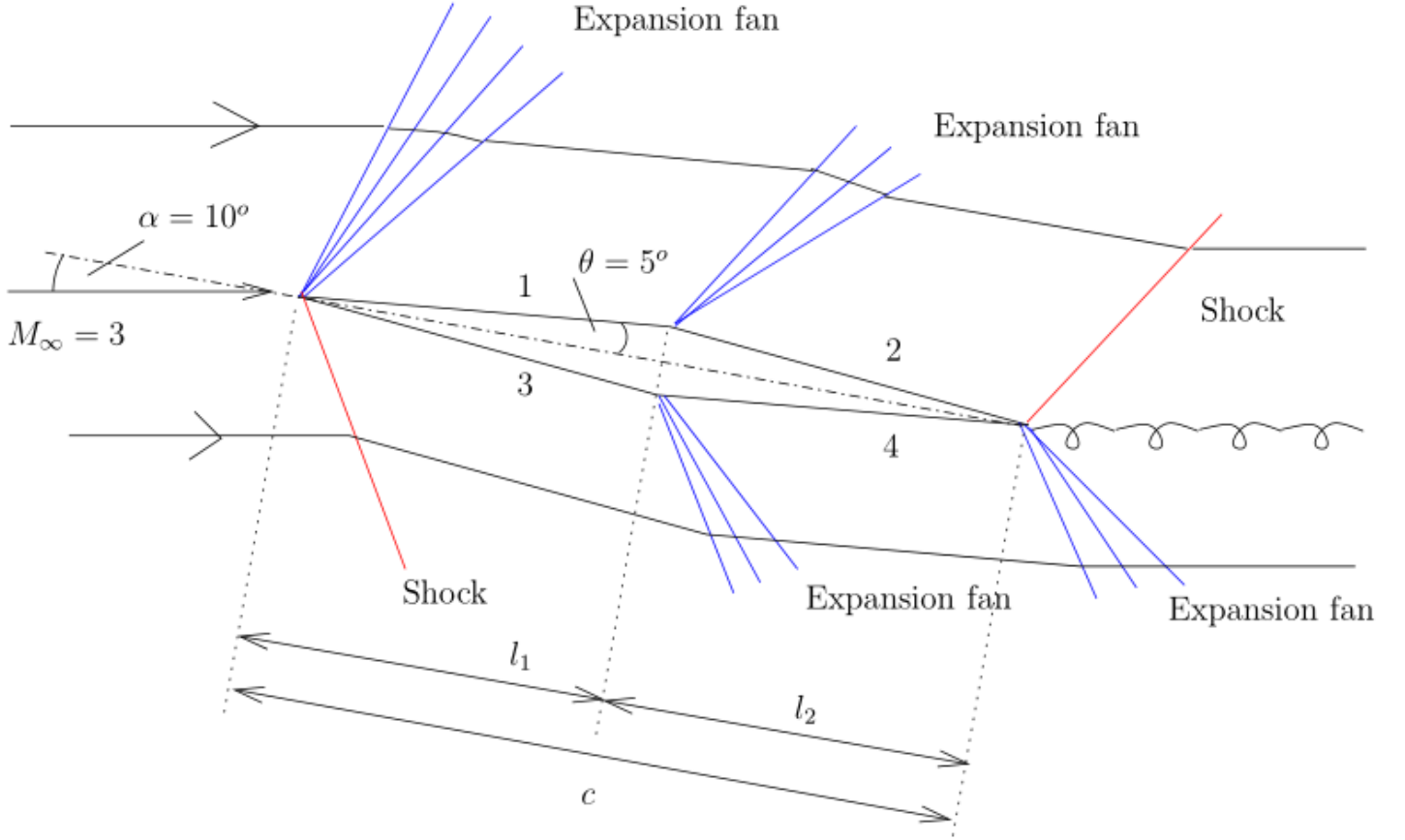


图 5.16: 菱形机翼示意图

无量纲升力系数 C_L 可以写作

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \\ &= \frac{L}{\frac{1}{2}a_\infty^2 M_\infty^2 c} \\ &= \frac{L}{\frac{1}{2}p_\infty \gamma M_\infty^2 c} \end{aligned}$$

类似地，无量纲阻力系数为

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}p_\infty \gamma M_\infty^2 c}$$

要完整的计算升阻力，我们需要各段的压力，求解的方法如下：

5.2 Ackeret 理论

Ackeret 理论仅在流体的改变较小、激波相对较弱的情况下成立 ($\beta \rightarrow \mu$)，这也就意味着 Ackeret 理论只能适用于薄机翼、折射角较小的情况。

$M_\infty \rightarrow M_1$	Prandtl-Meyer 关系
$p_\infty \rightarrow p_1$	绝热关系
$M_1 \rightarrow M_2$	Prandtl-Meyer 关系
$p_1 \rightarrow p_2$	绝热关系
$M_\infty \rightarrow M_3$	激波关系
$p_\infty \rightarrow p_3$	激波关系
$M_3 \rightarrow M_4$	Prandtl-Meyer 关系
$p_3 \rightarrow p_4$	绝热关系

利用之前的结论，

$$\delta\theta = \pm \frac{\delta p}{\gamma p M^2} \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\delta\theta = \pm \frac{\delta p}{\rho V^2} \sqrt{M^2 - 1}$$

由于偏折角比较小，我们可以认为 ρ , V^2 , M 均为常数，与来流的状态参数相同 (ρ_1 , V_1^2 , M_1)。因此，

$$\delta\theta = \pm \frac{\delta p}{\rho_1 V_1^2} \sqrt{M_1^2 - 1}$$

压力系数

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2}$$

由 $\delta p = p - p_1$ 代入前式，可得

$$\delta\theta = \frac{C_p}{2} \sqrt{M_1^2 - 1}$$

$$C_p = \pm \frac{2\delta\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

考虑上式的 $\delta\theta$ 为一个微小的角度 η ，则有

$$\pm C_p = \frac{2\eta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

取正号时代表机翼的上表面，取负号时代表机翼的下表面。再次强调，基于 Ackeret 理论的分析只适用于攻角小、机翼薄的情形。

考虑一片任意的机翼，他都可以被分解为三个元素的叠加：攻角 α 的弦线，厚度分布（两侧对称） $t(x)$ ，以及弯度分布（两侧不对称） $\xi(x)$ ，如图 4.14所示。

先前讨论的 η 为转角，因此 $\eta = dy/dx$ ，对于上下表面各有：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_U = -\alpha + \frac{dt(x)}{dx} + \frac{d\xi(x)}{dx}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_L = -\alpha - \frac{dt(x)}{dx} + \frac{d\xi(x)}{dx}$$

上表面

如图 5.18，取微元，则该微元的守力为

$$dF = p ds$$

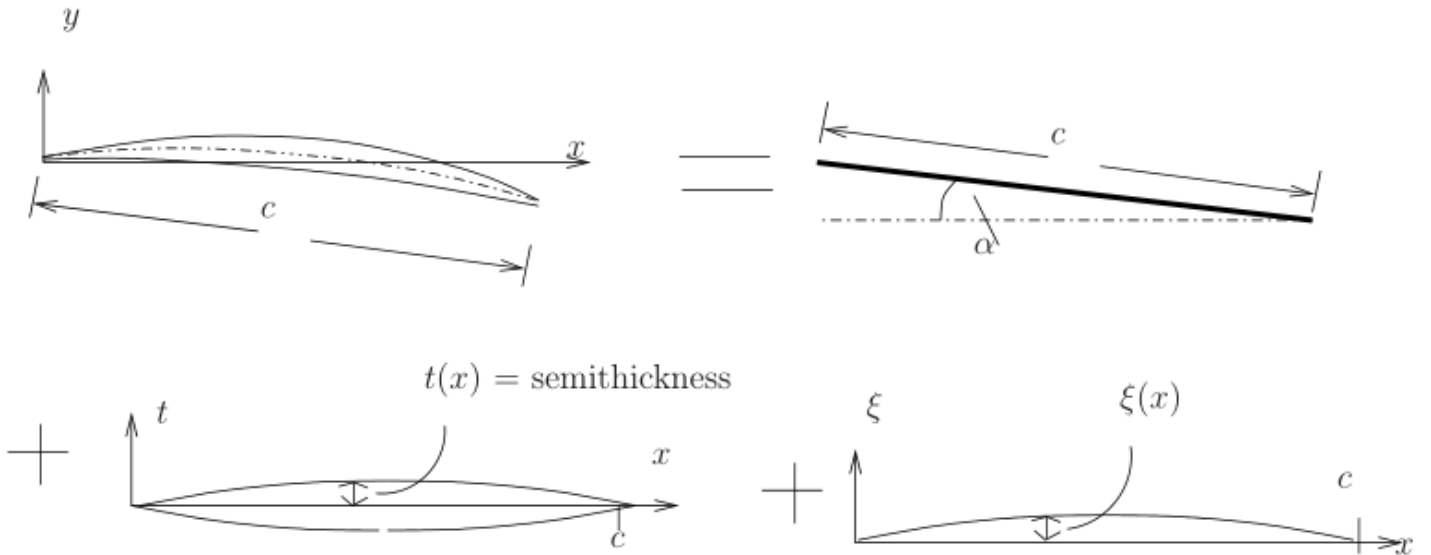


图 5.17: 机翼的分解

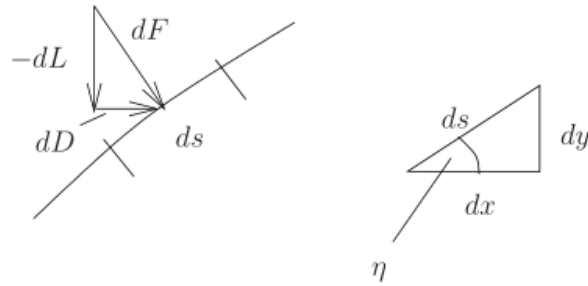


图 5.18: 上表面受力

代入 C_p , 可以得到

$$p = C_p \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 + p_{\infty}$$

$$dF = C_{pu} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 ds + p_{\infty} ds$$

升力:

$$dL = -C_{pu} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 \cos \eta ds - p_{\infty} \cos \eta ds$$

$$= -C_{pu} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 dx - p_{\infty} dx$$

阻力:

$$dD = C_{pu} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 \sin \eta ds + p_{\infty} \sin \eta ds$$

$$= C_{pu} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 dy + p_{\infty} dy$$

$$= C_{pu} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)_U dx + p_{\infty} \left(\frac{dy}{dx} \right)_U dx$$

下表面

如图 5.19, 类似地可以得到

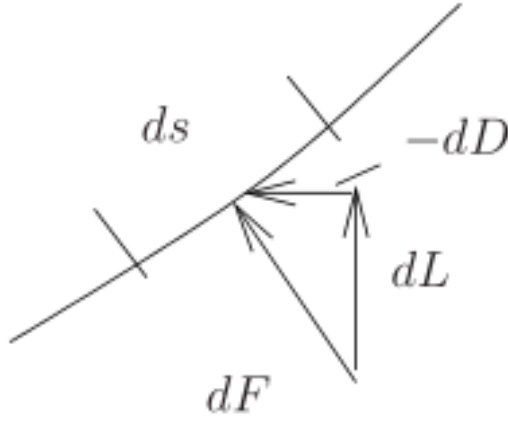


图 5.19: 下表面受力

$$dL = C_{pL} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 dx + p_{\infty} dx$$

$$dD = -C_{pL} \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)_L dx - p_{\infty} \left(\frac{dy}{dx} \right)_L dx$$

总升力与总阻力

对 dL 和 dD 积分，并近似 $\cos \alpha \approx 1$,

$$L = \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 \int_0^c (C_{pL} - C_{pU}) dx$$

$$D = \frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 \int_0^c \left[C_{pU} \left(\frac{dy}{dx} \right)_U - C_{pL} \left(\frac{dy}{dx} \right)_L + p_{\infty} \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)_U - \left(\frac{dy}{dx} \right)_L \right\} \right] dx$$

代入 C_{PU} , C_{PL} , 以及 η_U , η_L

$$L = \frac{-\gamma p_{\infty} M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \left[\int_0^c (-2\alpha) dx + \int_0^c \left(\frac{dt}{dx} + \frac{d\xi}{dx} \right)_U dx - \int_0^c \left(\frac{dt}{dx} - \frac{d\xi}{dx} \right)_L dx \right]$$

不难看出,

$$\int_0^c \left(\frac{dt}{dx} + \frac{d\xi}{dx} \right) dx = 0$$

可以得到

$$L = \frac{\gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 2\alpha c}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 c} = \frac{L}{\frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 c}$$

$$= \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

我们可以得到，升力系数与 α 成正比，并且不依赖于机翼形状。实验证明，Ackeret 理论在马赫数 $M > 1.5$ ，攻角 $\alpha < 8^\circ$ 时是相对准确的。

类似地，可以得到阻力

$$D = \frac{2\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^c \left\{ \alpha^2 + \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \right\} dx$$

定义

$$\overline{\left(\frac{dt}{dx} \right)^2} = \frac{1}{c} \int_0^c \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 dx$$

$$\overline{\left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2} = \frac{1}{c} \int_0^c \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 dx$$

可得

$$D = \frac{2\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \alpha^2 + \overline{\left(\frac{dt}{dx} \right)^2} c + \overline{\left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2} c \right\}$$

$$C_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \alpha^2 + \overline{\left(\frac{dt}{dx} \right)^2} + \overline{\left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2} \right\}$$

由上式可以知道，阻力系数不仅依赖于攻角 α ，同样也和机翼形状有关。

喷管出口的流体也可以应用 Ackeret 理论，

$p_1 > p_0$ ，则如图 20(a)所示； $p_1 < p_0$ ，则如图 20(b)所示。

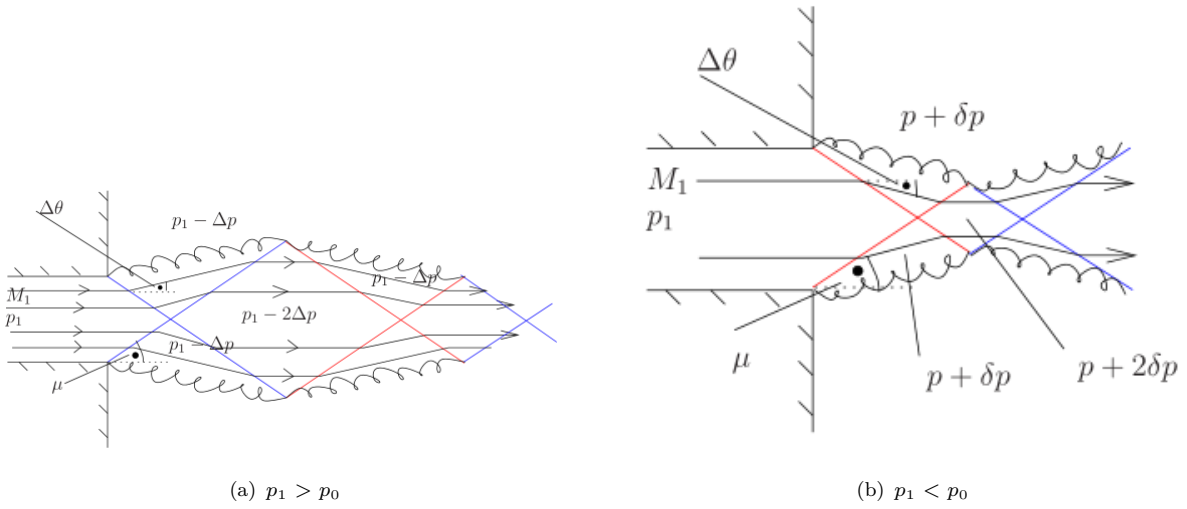


图 5.20: 喷管出口的流体

6 兴波阻力

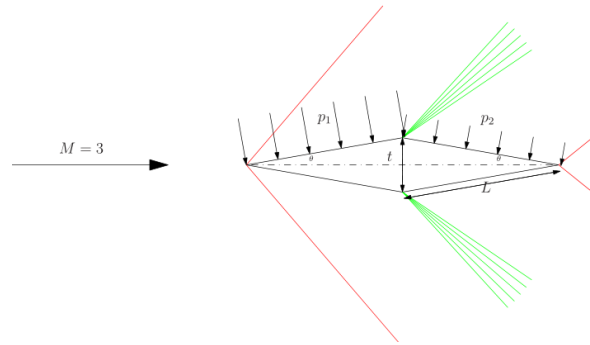


图 6.21: 兴波阻力

图 6.21展示了一个机翼在超音速情形下，周围流体的情况。首先在机翼的前缘，斜激波产生，超音速流体被压缩；随后在中段，流体膨胀（Prandtl-Meyer 膨胀扇）；最后在后缘，再次经历斜激波。图中展示的机翼攻角为 0，因此不存在升力，但由于激波和膨胀波的存在，压力随机翼的分布不再是对称的，因此存在阻力，

$$D = 2L \sin \theta (p_1 - p_2) = (p_1 - p_2) t$$

可以看到，尽管我们没有考虑流体的粘度，超音速流体仍然不可避免的有阻力存在。这种阻力称为兴波阻力。

6.1 音障

要突破声速，需要跨越音障。事实上，在马赫数尚未达到 1 时，阻力系数就会出现急剧的上升，这是由于尽管机翼的马赫数尚未突破 1，但机翼周围的流体速度已经达到了声速，从而带来的巨大阻力。这种情况被称为跨音速流态。

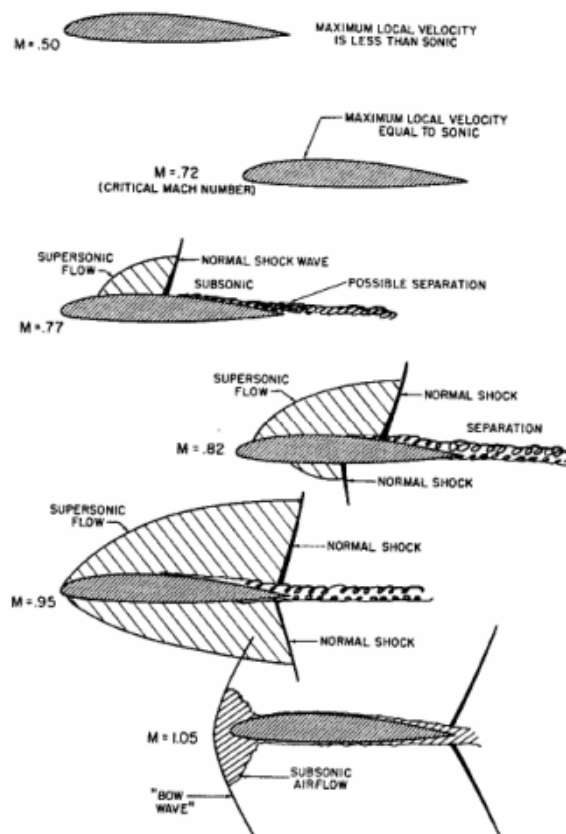


图 6.22: 跨音速流态

如图 6.22所示的跨音速流态，机翼上表面处的流体速度被加速到了超过来流速度。对于跨音速流态，机翼的上表面甚至下表面都有可能存在音速流域。当这种现象发生时，就会产生正激波，来把流体的速度带回到亚音速。当马赫数逐渐接近 1 时，由于正激波的存在，这个阻力将会不断提升（正激波会将大量的能量转化为热量耗散出去）。但当速度达到声速时，阻力系数将会减小。这是因为在前缘将会产生斜激波，将流体降回亚音速。

6.2 延迟阻力发散与降低兴波阻力的方法

1. 采用薄机翼

较薄的机翼会使得最大流体速度降低，因此可以延迟阻力发散的到来。同时，尖锐的前缘搭配较薄的机翼，也能带来高马赫数下较低的兴波阻力。但缺陷是，薄机翼结构上比较弱，也难以携带大量燃料，同时在低速状态下，升力有限。

2. 采用扫翼

扫翼在许多情形下时比较好的解决方案。增大扫角既能降低等效的前缘半径，同时还能保持低速状态下的性能表现。

7 管道中的有摩擦绝热流

- 理想气体 - 比热容为常数
- 稳态一维流动
- 绝热 - 没有热量传入或传出
- 摩擦因数 f 为此行数
- 不做功
- 竖直方向没有位移（重力不做功）

考虑如图 7.23 的控制体

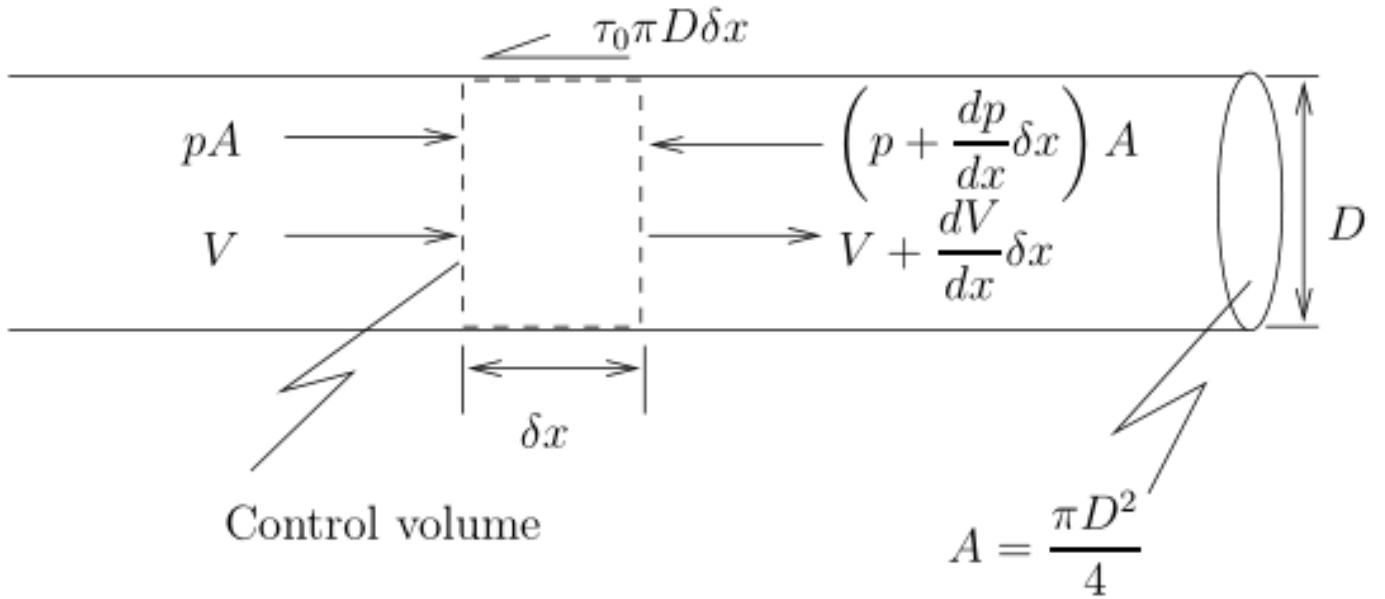


图 7.23: 控制体

x 方向的动量

$$pA - \left(p + \frac{dp}{dx}\delta x\right)A - \tau_0\pi\delta x D = \rho VA \left(V + \frac{dV}{dx}\delta x - V\right)$$

$$dp + \frac{4\tau_0}{D}dx + \rho V dV = 0$$

其中摩擦因数的定义为

$$\tau_0 = \frac{f\rho V^2}{8}$$

从而可以得到

$$\frac{dp}{p} + \frac{f\rho V^2}{2Dp}dx + \frac{\rho V dV}{p} = 0$$

将第三项中的 ρ , p , V 利用马赫数代换可得

$$\frac{\rho V dV}{p} = \frac{\gamma M dM}{\frac{(\gamma-1)M^2}{2} + 1}$$

类似地，第一项也可做类似的代换

$$\frac{dp}{p} = \frac{-(\gamma-1)M^2 + 1}{\frac{(\gamma-1)M^2}{2} + 1} \frac{dM}{M}$$

代回 x 方向动量式可得

$$\begin{aligned} \frac{f}{D} dx &= \frac{2(1-M^2)dM}{\gamma M^3 \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{2} + 1 \right)} \\ &= \frac{2dM}{\gamma M^3} - \frac{(\gamma+1)}{\gamma} \frac{dM}{M \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{2} + 1 \right)} \end{aligned}$$

边界条件为

$$M = M_0 \quad @x = 0$$

$$M = M \quad @x = l$$

对 $x = 0 \sim l$ 积分，并带入 $\gamma = 1.4$ ，有

$$\frac{fl}{D} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{6}{7} \ln \left[\left(\frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{M^2 + 5}{M_0^2 + 5} \right]$$

如果令出口马赫数为 1，可以得到 L_{max} ，当长度超过该限制时，流体会被限制

$$\frac{fL_{\max}}{D} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \left[\frac{6M_0^2}{M_0^2 + 5} \right]$$

8 Prandtl 关系

再次考虑一维管道内的超音速流动问题。

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 && \text{连续性方程} \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 && \text{动量方程} \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} && \text{能量方程}\end{aligned}$$

给定 $M_1(u_1)$ p_1 ρ_1 ，通过三个方程求解三个未知数 $M_2(u_2)$ p_2 ρ_2 。

8.1 正激波推导的另一种方法

动量式除以连续性式

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 &= \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2 \\ u_1 - u_2 &= \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1}\end{aligned}$$

由能量式

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = K(\text{常数})$$

设喉部达到声速 a^* ，则有

$$\begin{aligned}K &= \frac{a^{*2}}{2} + \frac{a^*}{\gamma-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} a^{*2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1^2 &= \frac{1}{2} \{(\gamma+1)a^{*2} - (\gamma-1)u_1^2\} \\ a_2^2 &= \frac{1}{2} \{(\gamma+1)a^{*2} - (\gamma-1)u_2^2\}\end{aligned}$$

代回至速度差式，则有

$$u_1 - u_2 = \frac{(\gamma+1)a^{*2} - (\gamma-1)u_2^2}{2\gamma u_2} - \frac{(\gamma+1)a^{*2} - (\gamma-1)u_1^2}{2\gamma u_1}$$

化简可以得到

$$u_1 u_2 = a^{*2}$$

定义 $M_1^* = u_1/a^*$ ， $M_2^* = u_2/a^*$ ，可以得到

$$M_1^* = \frac{1}{M_2^*}$$

这就是 Prandtl-Meyer 关系。

8.2 M 与 M^* 的关系

利用能量关系除以 u^2 ,

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2}$$
$$M_2^2 = \frac{\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 + 1}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

连续性方程

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{M_1^{*2} a^{*2}}{M_1^* M_2^* a^{*2}} = M_1^{*2}$$
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

动量方程

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2)$$
$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$$
$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)$$

求解温度则可以利用

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

9 数学

9.1 高斯散度定理

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界, \mathbf{n} 为曲面 Σ 朝外的单位向量。