Note of Fluid Dynamics

Wang Yizhen

2019 年 9 月 22 日

前言

流体力学笔记。主要内容来自 Nicholas Hutchins 教授撰写的流体力学课程讲义，同时参考了一部分朗道的《流体动力学》，以及沈维道的《工程热力学》

所有内容仅供学习参考，遵循 CC-BY-SA-4.0 开源协议。有疏漏之处请提交 Issue 或发起 Pull request。能力一般，水平有限，恳请斧正。

目录

1 不可压缩流体

暂时先搁置，先整理可压缩流体章节。

2 可压缩流体

对于不可压缩流体而言，$\rho = constant$；可压缩流体则一般 $\rho \neq constant$。

2.1 可压缩流体的重要关系式

2.1.1 连续性方程（质量守恒）

对于一个控制体，有

$$[\text{控制体内的质量改变率}] + [\text{通过控制体边界的质量}] = 0$$

利用梯度算子，可以写作

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{V}) = 0$$

借助高斯散度定理，对等式两边积分，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \oiint_{S} \rho \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

2.2 动量守恒

考虑一个控制体的动量，

$$[\text{控制体动量的变化率}] = [\text{对控制体施加的外力}]$$

对控制体施加的合外力可以视为三个部分的和，压力、体积力和粘滞力的共同效果导致了控制体动量的改变。在三个方向的分量可以表示为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (F_x)_{viscous} \\
\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho v \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (F_y)_{viscous} \\
\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho w \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (F_z)_{visous}
\end{aligned}$$

再次对等式两边积分，并利用高斯散度定理可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho \boldsymbol{V} d\Omega + \oiint_{S} (\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{dS})\boldsymbol{V} = -\oiint_{S} \rho d\boldsymbol{S} + \iiint_{\Omega} \rho f d\Omega + \boldsymbol{F}_{viscous}$$

左侧第一项可以视为控制体内动量的变化量，第二项则是通过控制体边界净增加/减少的动量；等式右侧第一项是作用在控制体上的压力之和（负号由于压力与单位面积向量的方向相反），第二项是控制体体积力之和，第三项则是总的粘滞力。

2.2.1 能量守恒

从热力学第一定律，我们有

$$\Delta E = Q + W$$

即

$$[\text{控制体内的能量变化率}] = [\text{传递给控制提的热功率}] + [\text{外界对控制体做功的功率}]$$

微分形式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\boldsymbol{V}\right]=\rho\dot{q}+\dot{\boldsymbol{Q}}'_{\text{viscous}}-\nabla\cdot(p\boldsymbol{V})+\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})+\boldsymbol{W}'_{\text{viscous}}$$

积分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]d\Omega+\iint_{S}\rho\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\boldsymbol{V}\cdot dS=\iiint_{\Omega}\rho\dot{q}d\Omega-\iint_{S}(p\boldsymbol{V})\cdot d\boldsymbol{S}+\iiint_{\Omega}\rho(f\cdot V)d\Omega+\dot{\boldsymbol{Q}}_{viscous}+\dot{\boldsymbol{W}}_{viscous}$$

3 数学

3.1 高斯散度定理

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 得边界,$\mathbf{n}$ 为为曲面 Σ 朝外得单位向量。