Note of Fluid Dynamics

Wang Yizhen

2019 年 10 月 3 日

前言

流体力学笔记。主要内容来自 Nicholas Hutchins 教授撰写的流体力学课程讲义，同时参考了一部分朗道的《流体动力学》，以及沈维道的《工程热力学》

有疏漏之处请提交 Issue 或发起 Pull request。能力一般，水平有限，恳请斧正。

目录

1 不可压缩流体

暂时先搁置，先整理可压缩流体章节。

2 可压缩流体 - 基本公式

对于不可压缩流体而言，$\rho = constant$；可压缩流体则一般 $\rho \neq constant$。

2.1 可压缩流体的重要关系式

2.1.1 连续性方程（质量守恒）

对于一个控制体，有

$$[\text{控制体内的质量改变率}] + [\text{通过控制体边界的质量}] = 0$$

利用梯度算子，可以写作

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{V}) = 0$$

借助高斯散度定理，对等式两边积分，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \oiint_{S} \rho \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

2.2 动量守恒

考虑一个控制体的动量，

$$[\text{控制体动量的变化率}] = [\text{对控制体施加的外力}]$$

对控制体施加的合外力可以视为三个部分的和，压力、体积力和粘滞力的共同效果导致了控制体动量的改变。在三个方向的分量可以表示为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \boldsymbol{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (F_x)_{viscous} \\
\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho v \boldsymbol{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (F_y)_{viscous} \\
\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho w \boldsymbol{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (F_z)_{visous}
\end{aligned}$$

再次对等式两边积分，并利用高斯散度定理可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \boldsymbol{V} d\Omega + \oiint_{S} (\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{dS}) \boldsymbol{V} = -\oiint_{S} \rho d\boldsymbol{S} + \iiint_{\Omega} \rho f d\Omega + \boldsymbol{F}_{viscous}$$

左侧第一项可以视为控制体内动量的变化量，第二项则是通过控制体边界净增加/减少的动量；等式右侧第一项是作用在控制体上的压力之和（负号由于压力与单位面积向量的方向相反），第二项是控制体体积力之和，第三项则是总的粘滞力。

2.2.1 能量守恒

从热力学第一定律，我们有

$$\Delta E = Q + W$$

即

$$[\text{控制体内的能量变化率}] = [\text{传递给控制提的热功率}] + [\text{外界对控制体做功的功率}]$$

微分形式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\boldsymbol{V}\right]=\rho\dot{q}+\dot{\boldsymbol{Q}}'_{\text{viscous}}-\nabla\cdot(p\boldsymbol{V})+\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})+\boldsymbol{W}'_{\text{viscous}}$$

积分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]d\Omega+\oiint_{S}\rho\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\boldsymbol{V}\cdot dS=\iiint_{\Omega}\rho\dot{q}d\Omega-\oiint_{S}(p\boldsymbol{V})\cdot d\boldsymbol{S}+\iiint_{\Omega}\rho(f\cdot V)d\Omega+\dot{\boldsymbol{Q}}_{viscous}+\dot{\boldsymbol{W}}_{viscous}$$

2.2.2 其他可用关系式

理想气体状态方程

$$p=\rho RT$$

其中 R 为气体常数，

$$R=\frac{R_u}{MW}$$

内能关系：

$$e=c_vT$$

焓关系：

$$h=c_pT$$

绝热指数与热容关系：

$$\gamma=\frac{c_p}{c_v}$$

$$c_p-c_v=R$$

绝热（等熵）过程：

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\text{const}$$

2.3 声速

$$a^2=\frac{\gamma p}{\rho}=\gamma RT$$

由此可定义马赫数

$$M=\frac{V}{a}=\text{Mach number}$$

类似地，可以定义水中的波速

$$c=\sqrt{gy}$$

式中，g 为重力加速度，y 为水深。同样也可定义 Froude 数，

$$\text{Froude number }=F=\frac{V}{\sqrt{gy}}$$

3 等熵可压缩流

3.1 可压缩流体的欧拉方程

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}&=\text{const}\\
\frac{p}{\rho}\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{1}{2}V^2&=\text{ const}\\
\frac{1}{2}V^2+Tc_p&=\text{ const}
\end{aligned}
$$

滞止温度与滞止焓：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}V^2+Tc_p&=T_0c_p\\
\frac{1}{2}V^2+h&=h_0
\end{aligned}
$$

3.2 温度、压力与密度关系

$$
\begin{aligned}
\frac{T_0}{T}&=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\\
\frac{p_0}{p}&=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\\
\frac{\rho_0}{\rho}&=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}
\end{aligned}
$$

3.3 二维喷管中的流体

考虑连续性方程：

$$
\begin{aligned}
\rho AV&=(\rho+d\rho)(A+dA)(V+dV)\\
0&=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dA}{A}+\frac{dV}{V}
\end{aligned}
$$

考虑动量守恒（牛顿第二定律）：

$$
\frac{dp}{\rho}+VdV=0
$$

3.4 喷管中的流体

考虑

$$
\frac{dp}{\rho}+VdV=0
$$

代入

$$
\begin{aligned}
a^2&=\frac{dp}{d\rho}\\
M^2&=\frac{V^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

可以得到

$$\frac{d\rho}{\rho}=-M^2\frac{dV}{V}$$

再把此式代回

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dA}{A}+\frac{dV}{V}=0$$

不难得到

$$\frac{dA}{A}=\left(M^2-1\right)\frac{dV}{V}$$

上式揭示了喷管截面积、马赫数与流体速度间的关系。$M=0$ 时，流体可以视为不可压缩流体；$0<M<1$ 时为亚音速流，渐缩喷管加速流体，渐扩喷管减速流体；$M=1$ 时为音速流，喷管截面积在此时取到最值；$M>1$ 时为超音速流，渐缩喷管减速流体，渐扩喷管加速流体。
为了得到超音速流体，需要使用缩放喷管（拉伐尔喷管）。

3.5 喷管的截面积

利用先前推导的温度、压力、密度关系，

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{T}&=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\\ \frac{p_0}{p}&=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\\ \frac{\rho_0}{\rho}&=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

在喉部位置，马赫数 $M=1$，并且考虑空气的绝热指数 $\gamma=1.4$，可以得到喉部的状态：

$$\begin{aligned}\frac{T^*}{T_0}&=0.833\\ \frac{p^*}{p_0}&=0.528\\ \frac{\rho^*}{\rho_0}&=0.634\end{aligned}$$

另一方面，利用连续性方程，统一代换为马赫数之比，即可得到任意截面面积与喉部截面积之比：

$$\frac{A}{A^*}=\left(\frac{1}{M}\right)\left(\frac{2}{(\gamma+1)}\left[1+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M^2\right]\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

其中 A^* 为对应 $M^*=1$ 的喉部截面积。
类似的，利用可压缩流体的伯努利方程（取参考点为滞止点），附加上绝热关系，可以得到，当地速度只与当地压力有关：

$$V=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$$

4　激波与扩展波

4.1　激波

考虑如图 4.1所示的导管，可以列写出相关的质量、动量、能量守恒方程式：

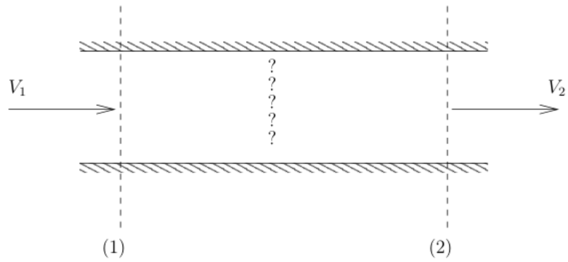

图 4.1: 正向激波

$$
\begin{aligned}
\rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A = \dot{m} \\
p_1 A + \rho_1 A V_1^2 = p_2 A + \rho_2 A V_2^2 \\
\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}
\end{aligned}
$$

对于该方程，一个非常直观的解就是 $p_1 = p_2$，$\rho_1 = \rho_2$，$V_1 = V_2$.
但除此之外，利用动量式除以质量式，代入能量式，并利用理想气体状态方程，可以得到一个非平凡的解：

$$
\begin{aligned}
\frac{p_2}{p_1} - 1 &= \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 - 1\right) \\
\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 &= \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \\
\frac{T_2}{T_1} &= \frac{\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right)\left(2 + (\gamma-1)M_1^2\right)}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \\
\frac{T_2}{T_1} - 1 &= \frac{2(\gamma-1)\left(\gamma M_1^2 + 1\right)\left(M_1^2 - 1\right)}{(\gamma+1)^2 M_1^2}
\end{aligned}
$$

4.2　导管内的熵变

$$
\begin{aligned}
T ds &= du + p dv \\
dh &= du + p dv \\
v &= \frac{1}{\rho} \\
ds &= c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} \\
s_2 - s_1 &= c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{R}\right] \\
\frac{s_2 - s_1}{c_v} &= \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}^{\gamma}\right)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \ln\left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

代入上一节中关于压力比与密度比的式子，并且定义 $m = M_1^2 - 1$，最终我们可以得到

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left\{\left[\frac{(m+1)(\gamma-1)+2}{(m+1)(\gamma+1)}\right]^{\gamma}\left[1+\frac{2\gamma m}{\gamma+1}\right]\right\} = f(m)$$

可以发现，导管内的熵变只与上游马赫数以及绝热指数相关。导管内的熵变可以用两部分来表示，

$$s_2 - s_1 = \Delta s_q + \Delta s_{irr}$$

其中第一项为传热带来的熵变，第二项为不可逆过程带来的熵变。如果考虑绝热流，那么根据热力学第二定律，我们可以得到

$$s_2 - s_1 \geq 0$$

从而

$$\begin{aligned} M_1^2 - 1 &\geq 0 \\ M_1^2 &\geq 0 \\ \frac{p_2}{p_1} &\geq 1 \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &\geq 1 \\ \frac{V_2}{V_1} &\leq 1 \\ \frac{T_2}{T_1} &\geq 1 \\ \frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} &= 1 \end{aligned}$$

因此，如果等截面导管内的流体存在熵变，或是流体状态发生改变，那么入口处的流体必须是超音速的。

4.3 正向激波内的马赫数变化

仍然从质量守恒（连续性）方程出发，将流速用马赫数替代，并代入理想气体状态方程、声速定义和压力比、密度比关系，可以得到

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} \\ M_2^2 - 1 &= \frac{\frac{\gamma+1}{2}\left(1-M_1^2\right)}{\gamma\left(M_1^2-1\right)+\frac{\gamma+1}{2}} \end{aligned}$$

从而，我们得到了出口、入口马赫数 M_2 M_1 间的关系。如图 4.2所示。

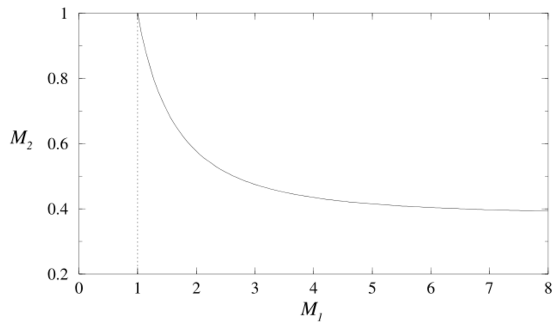

图 4.2: 出口、入口马赫数关系

可以看出，入口处为超音速流体，出口处则为亚音速流体。因此可以得出结论：超音速流在经历激波后，变为亚音速流。

4.4 弱激波下的熵增

弱激波定义为

$$\frac{p_2}{p_1} \approx 1$$

不难得到，在此条件下的入口马赫数接近 1。同时由于 $m = M_1^2 - 1 \to 0$，因此

$$f(m) \approx \frac{1}{15} m^3$$

4.5 滞止压力在激波中的变化

对于等熵流，我们有

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

但对于激波而言，这个等式并不成立，因为激波本身并不是一个等熵过程。但对于间断面前后的区域，分别有

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

可以替换式中的压力比和 M_2，从而得到

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

由于入口处为超音速流，因此 $M_1 > 1$，

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} < 1$$

可以得知，滞止压力在经历激波后将会下降，且入口处马赫数越高，压力下降越多。

4.6 二维喷管中的流体

$$\frac{A^*}{A} = \frac{\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

对于一个确定的喷管，如果能够确定出口处流体是超音速流体，那么出口处的压力比 p_e/p_0 就是唯一确定的。但是事实上，出口处的压力可以被设计为任意的值，这会导致在渐扩喷管中一定会出现激波，这个过程会是不可逆的。
如图 4.3所示，分别展示了几种不同出口压力下，激波产生的位置。

- (7) $p_{e7}/p_0 = p_e/p_0$，全过程均为等熵流。

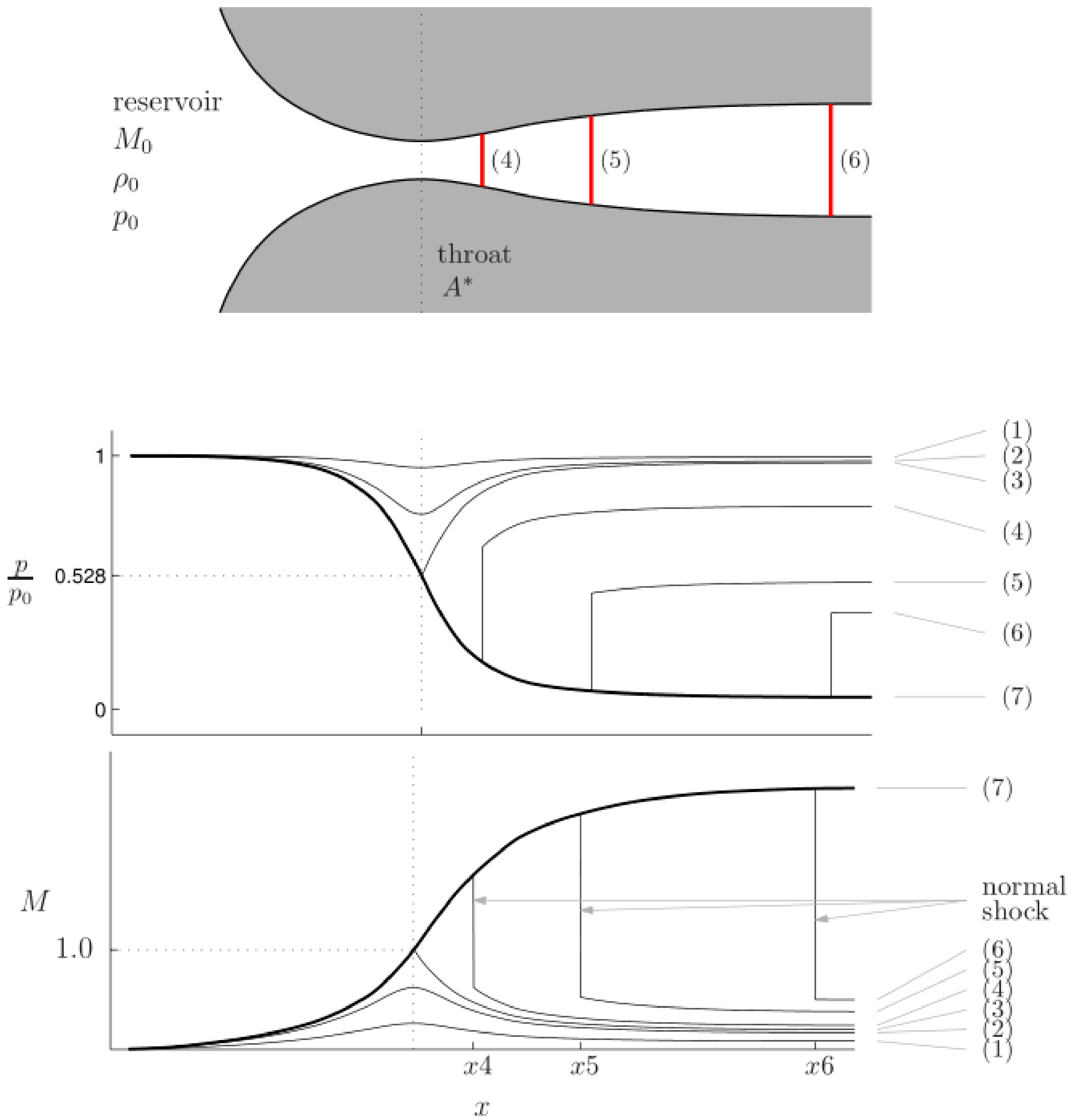

图 4.3: 出口压力不同导致的激波

- (1)，(2) 流体全程均未超过声速，同时全程均为等熵流
- (3) 出口压力的设置使得在喉部的流体恰好达到声速。此时，在喉部会发生弱激波，在渐扩喷管部分流体会减速，但流体全程仍为等熵流。
- (4) 当 $p_{e4} < p_{e3}$ 时，流体在通过喉部之后将无法保持等熵流，因为出口压力 $p_{e4}/p_0 > p_{e7}/p_0$，因此一定会在渐扩喷管的某个部分发生激波。
- (5)，(6) 与 (4) 类似，但由于压力比与 p_{e7}/p_0 更加接近，因此激波发生的位置也更加接近出口位置

- 如果压力进一步降低，斜激波将会发生

4.7 斜激波

考虑如图 4.4所示的斜激波，

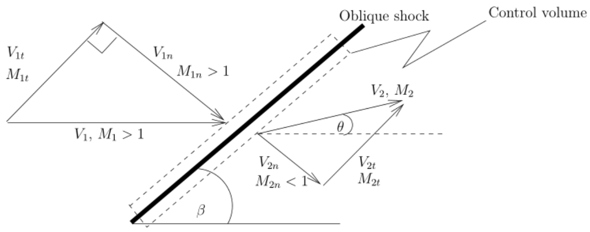

图 4.4: 斜激波

考虑连续性方程与切向和法向的动量：

$$
\begin{aligned}
\rho_1 V_{1n} &= \rho_2 V_{2n} \\
p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 &= p_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \\
\rho_1 V_{1n} V_{1t} &= \rho_2 V_{2n} V_{2t}
\end{aligned}
$$

不难得到 $V_{1t} = V_{2t}$。由此我们可以得出，对于斜激波，在法向上，其规律与正激波一致；在切向上，速度分量则不产生变化。

如果我们基于上述结果观察一个斜激波，我们就会发现，斜激波的存在会导致流体的流向发生改变，如图 4.5所示。

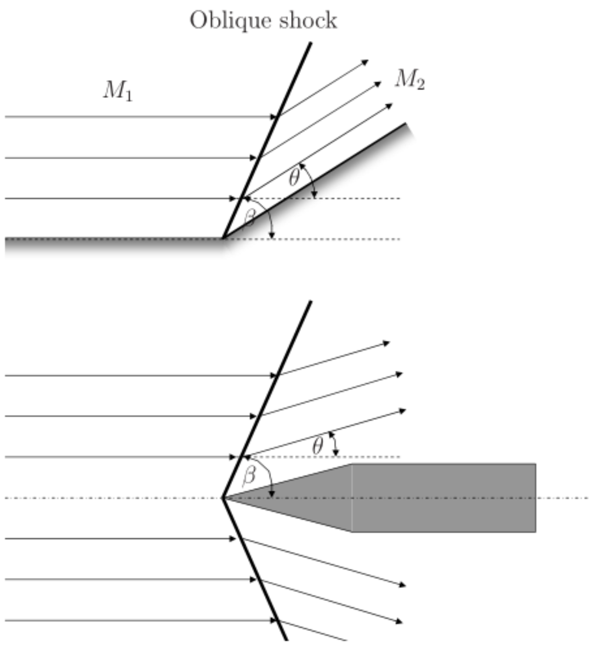

图 4.5: 斜激波导致流体流向的变化

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{M_{1n}}{\sin\beta} \\
M_2 &= \frac{M_{2n}}{\sin(\beta-\theta)}
\end{aligned}
$$

注意到，$M_1 > 1$，但 $M_{2n} < 1$ 并不意味着 $M_2 < 1$。在经历斜激波后，流体仍然可能是超音速的。

4.8 马赫角

对于超音速流体，如图 4.6所示的圆锥顶角称为马赫角 μ,

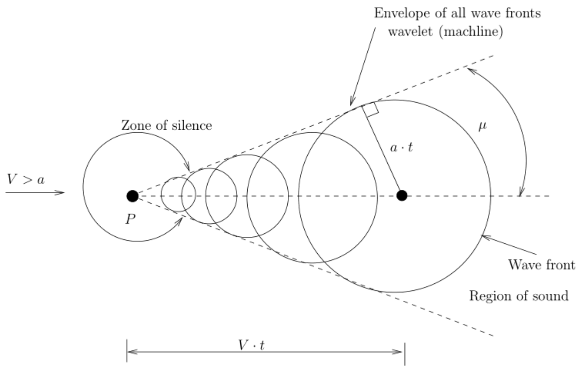

图 4.6: 马赫角

满足

$$
\sim \mu = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}
$$
$$
M = \frac{1}{\sin \mu}
$$
$$
\sin \mu = \frac{1}{M}
$$

当超音速流体遇到遇到较强的物理约束时，此时斜激波就会产生，并且满足关系

$$
M_{1n} = M_1 \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\sin \mu} > 1
$$

斜激波的角度始终大于马赫角，$\beta > \mu$。

4.9 偏折角 θ 与激波倾角 β 间的关系

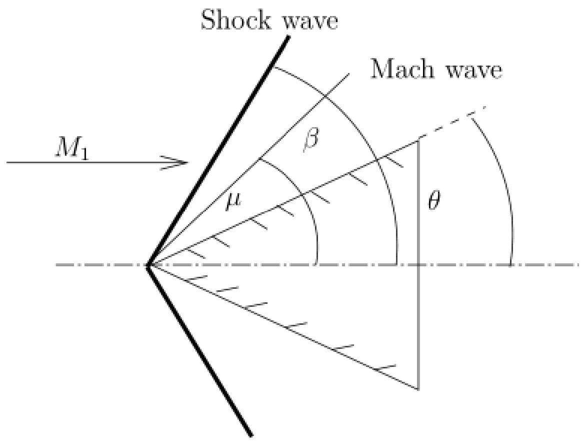

图 4.7: 偏折角与激波倾角间的关系

利用之前的结论，对于斜激波，在法向上，正激波的结论依然适用，因此

$$
\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}\left(M_1 \sin \beta\right)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\left(M_1 \sin \beta\right)^2}
$$

考虑到激波两侧的连续性，因此

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{V_{1n}}{V_{2n}} \\ &= \frac{V_{1n}}{V_{1t}}\frac{V_{2t}}{V_{2n}} \\ &= \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\theta)}\end{aligned}$$

5 数学

5.1 高斯散度定理

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界,$\mathbf{n}$ 为曲面 Σ 朝外的单位向量。