Note of Fluid Dynamics

Wang Yizhen

2019 年 10 月 10 日

前言

流体力学笔记。主要内容来自 Nicholas Hutchins 教授撰写的流体力学课程讲义，同时参考了一部分朗道的《流体动力学》，以及沈维道的《工程热力学》

有疏漏之处请提交 Issue 或发起 Pull request。能力一般，水平有限，恳请斧正。

目录

1 不可压缩流体

暂时先搁置，先整理可压缩流体章节。

2 可压缩流体 - 基本公式

对于不可压缩流体而言，$\rho = constant$；可压缩流体则一般 $\rho \neq constant$。

2.1 可压缩流体的重要关系式

2.1.1 连续性方程（质量守恒）

对于一个控制体，有

$$[\text{控制体内的质量改变率}] + [\text{通过控制体边界的质量}] = 0$$

利用梯度算子，可以写作

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{V}) = 0$$

借助高斯散度定理，对等式两边积分，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \oiint_{S} \rho \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

2.2 动量守恒

考虑一个控制体的动量，

$$[\text{控制体动量的变化率}] = [\text{对控制体施加的外力}]$$

对控制体施加的合外力可以视为三个部分的和，压力、体积力和粘滞力的共同效果导致了控制体动量的改变。在三个方向的分量可以表示为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \boldsymbol{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (F_x)_{viscous} \\
\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho v \boldsymbol{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (F_y)_{viscous} \\
\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho w \boldsymbol{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (F_z)_{visous}
\end{aligned}$$

再次对等式两边积分，并利用高斯散度定理可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho \boldsymbol{V} d\Omega + \oiint_{S} (\rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{dS})\boldsymbol{V} = -\oiint_{S} \rho d\boldsymbol{S} + \iiint_{\Omega} \rho f d\Omega + \boldsymbol{F}_{viscous}$$

左侧第一项可以视为控制体内动量的变化量，第二项则是通过控制体边界净增加/减少的动量；等式右侧第一项是作用在控制体上的压力之和（负号由于压力与单位面积向量的方向相反），第二项是控制体体积力之和，第三项则是总的粘滞力。

2.2.1 能量守恒

从热力学第一定律，我们有

$$\Delta E = Q + W$$

即

$$[\text{控制体内的能量变化率}] = [\text{传递给控制提的热功率}] + [\text{外界对控制体做功的功率}]$$

微分形式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\boldsymbol{V}\right]=\rho\dot{q}+\dot{\boldsymbol{Q}}'_{\text{viscous}}-\nabla\cdot(p\boldsymbol{V})+\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})+\boldsymbol{W}'_{\text{viscous}}$$

积分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]d\Omega+\oiint_{S}\rho\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\boldsymbol{V}\cdot dS=\iiint_{\Omega}\rho\dot{q}d\Omega-\oiint_{S}(p\boldsymbol{V})\cdot d\boldsymbol{S}+\iiint_{\Omega}\rho(f\cdot V)d\Omega+\dot{\boldsymbol{Q}}_{viscous}+\dot{\boldsymbol{W}}_{viscous}$$

2.2.2 其他可用关系式

理想气体状态方程

$$p=\rho RT$$

其中 R 为气体常数，

$$R=\frac{R_u}{MW}$$

内能关系：

$$e=c_vT$$

焓关系：

$$h=c_pT$$

绝热指数与热容关系：

$$\gamma=\frac{c_p}{c_v}$$

$$c_p-c_v=R$$

绝热（等熵）过程：

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\text{const}$$

2.3 声速

$$a^2=\frac{\gamma p}{\rho}=\gamma RT$$

由此可定义马赫数

$$M=\frac{V}{a}=\text{Mach number}$$

类似地，可以定义水中的波速

$$c=\sqrt{gy}$$

式中，g 为重力加速度，y 为水深。同样也可定义 Froude 数，

$$\text{Froude number }=F=\frac{V}{\sqrt{gy}}$$

3 等熵可压缩流

3.1 可压缩流体的欧拉方程

$$
\begin{gathered}
\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\text{const} \\
\frac{p}{\rho}\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{1}{2}V^2=\text{ const} \\
\frac{1}{2}V^2+Tc_p=\text{ const}
\end{gathered}
$$

滞止温度与滞止焓：

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}V^2+Tc_p=T_0c_p \\
\frac{1}{2}V^2+h=h_0
\end{gathered}
$$

3.2 温度、压力与密度关系

$$
\begin{gathered}
\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2 \\
\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}
\end{gathered}
$$

3.3 二维喷管中的流体

考虑连续性方程：

$$
\begin{gathered}
\rho AV=(\rho+d\rho)(A+dA)(V+dV) \\
0=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dA}{A}+\frac{dV}{V}
\end{gathered}
$$

考虑动量守恒（牛顿第二定律）：

$$
\frac{dp}{\rho}+VdV=0
$$

3.4 喷管中的流体

考虑

$$
\frac{dp}{\rho}+VdV=0
$$

代入

$$
\begin{gathered}
a^2=\frac{dp}{d\rho} \\
M^2=\frac{V^2}{a^2}
\end{gathered}
$$

可以得到

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V}$$

再把此式代回

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

不难得到

$$\frac{dA}{A} = \left(M^2 - 1\right) \frac{dV}{V}$$

上式揭示了喷管截面积、马赫数与流体速度间的关系。$M = 0$ 时，流体可以视为不可压缩流体；$0 < M < 1$ 时为亚音速流，渐缩喷管加速流体，渐扩喷管减速流体；$M = 1$ 时为音速流，喷管截面积在此时取到最值；$M > 1$ 时为超音速流，渐缩喷管减速流体，渐扩喷管加速流体。

为了得到超音速流体，需要使用缩放喷管（拉伐尔喷管）。

3.5 喷管的截面积

利用先前推导的温度、压力、密度关系，

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$
$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

在喉部位置，马赫数 $M = 1$，并且考虑空气的绝热指数 $\gamma = 1.4$，可以得到喉部的状态：

$$\frac{T^*}{T_0} = 0.833$$
$$\frac{p^*}{p_0} = 0.528$$
$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.634$$

另一方面，利用连续性方程，统一代换为马赫数之比，即可得到任意截面面积与喉部截面积之比：

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{1}{M}\right) \left(\frac{2}{(\gamma + 1)} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2\right]\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

其中 A^* 为对应 $M^* = 1$ 的喉部截面积。

类似的，利用可压缩流体的伯努利方程（取参考点为滞止点），附加上绝热关系，可以得到，当地速度只与当地压力有关：

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)}$$

4 激波

4.1 一维导管内的激波

考虑如图 4.1所示的导管，可以列写出相关的质量、动量、能量守恒方程式：

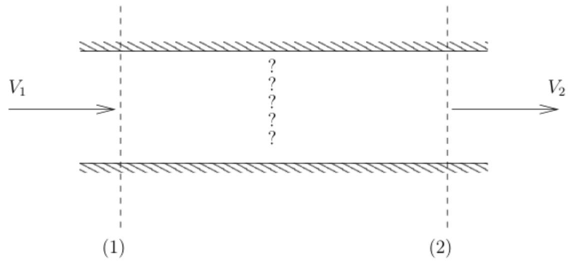


图 4.1: 正向激波

$$
\begin{aligned}
\rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A = \dot{m} \\
p_1 A + \rho_1 A V_1^2 = p_2 A + \rho_2 A V_2^2 \\
\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}
\end{aligned}
$$

对于该方程，一个非常直观的解就是 $p_1 = p_2$，$\rho_1 = \rho_2$，$V_1 = V_2$.
但除此之外，利用动量式除以质量式，代入能量式，并利用理想气体状态方程，可以得到一个非平凡的解：

$$
\begin{aligned}
\frac{p_2}{p_1} - 1 &= \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 - 1\right) \\
\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 &= \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \\
\frac{T_2}{T_1} &= \frac{\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right)\left(2 + (\gamma-1)M_1^2\right)}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \\
\frac{T_2}{T_1} - 1 &= \frac{2(\gamma-1)\left(\gamma M_1^2 + 1\right)\left(M_1^2 - 1\right)}{(\gamma+1)^2 M_1^2}
\end{aligned}
$$

4.2 导管内的熵变

$$
\begin{aligned}
T ds &= du + p dv \\
dh &= du + p dv \\
v &= \frac{1}{\rho} \\
ds &= c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} \\
s_2 - s_1 &= c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{R}\right] \\
\frac{s_2 - s_1}{c_v} &= \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}^{\gamma}\right)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \ln\left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

代入上一节中关于压力比与密度比的式子，并且定义 $m = M_1^2 - 1$，最终我们可以得到

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left\{\left[\frac{(m+1)(\gamma-1)+2}{(m+1)(\gamma+1)}\right]^{\gamma}\left[1+\frac{2\gamma m}{\gamma+1}\right]\right\} = f(m)$$

可以发现，导管内的熵变只与上游马赫数以及绝热指数相关。导管内的熵变可以用两部分来表示，

$$s_2 - s_1 = \Delta s_q + \Delta s_{irr}$$

其中第一项为传热带来的熵变，第二项为不可逆过程带来的熵变。如果考虑绝热流，那么根据热力学第二定律，我们可以得到

$$s_2 - s_1 \geq 0$$

从而

$$\begin{aligned}
M_1^2 - 1 &\geq 0 \\
M_1^2 &\geq 0 \\
\frac{p_2}{p_1} &\geq 1 \\
\frac{\rho_2}{\rho_1} &\geq 1 \\
\frac{V_2}{V_1} &\leq 1 \\
\frac{T_2}{T_1} &\geq 1 \\
\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} &= 1
\end{aligned}$$

因此，如果等截面导管内的流体存在熵变，或是流体状态发生改变，那么入口处的流体必须是超音速的。

4.3 正向激波内的马赫数变化

仍然从质量守恒（连续性）方程出发，将流速用马赫数替代，并代入理想气体状态方程、声速定义和压力比、密度比关系，可以得到

$$\begin{aligned}
M_2^2 &= \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} \\
M_2^2 - 1 &= \frac{\frac{\gamma+1}{2}\left(1-M_1^2\right)}{\gamma\left(M_1^2-1\right)+\frac{\gamma+1}{2}}
\end{aligned}$$

从而，我们得到了出口、入口马赫数 M_2 M_1 间的关系。如图 4.2所示。

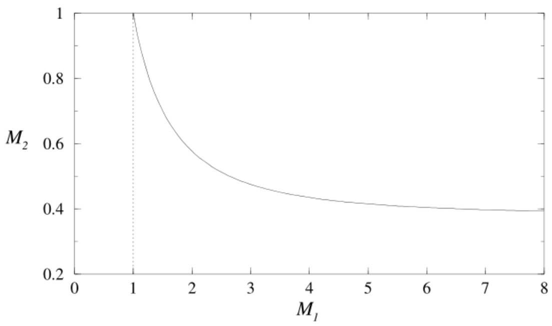


图 4.2: 出口、入口马赫数关系

可以看出，入口处为超音速流体，出口处则为亚音速流体。因此可以得出结论：超音速流在经历激波后，变为亚音速流。

4.4 弱激波下的熵增

弱激波定义为

$$\frac{p_2}{p_1} \approx 1$$

不难得到，在此条件下的入口马赫数接近 1。同时由于 $m = M_1^2 - 1 \to 0$，因此

$$f(m) \approx \frac{1}{15} m^3$$

4.5 滞止压力在激波中的变化

对于等熵流，我们有

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

但对于激波而言，这个等式并不成立，因为激波本身并不是一个等熵过程。但对于间断面前后的区域，分别有

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

可以替换式中的压力比和 M_2，从而得到

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

由于入口处为超音速流，因此 $M_1 > 1$，

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} < 1$$

可以得知，滞止压力在经历激波后将会下降，且入口处马赫数越高，压力下降越多。

4.6 二维喷管中的流体

$$\frac{A^*}{A} = \frac{\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

对于一个确定的喷管，如果能够确定出口处流体是超音速流体，那么出口处的压力比 p_e/p_0 就是唯一确定的。但是事实上，出口处的压力可以被设计为任意的值，这会导致在渐扩喷管中一定会出现激波，这个过程会是不可逆的。

如图 4.3所示，分别展示了几种不同出口压力下，激波产生的位置。

- (7) $p_{e7}/p_0 = p_e/p_0$，全过程均为等熵流。

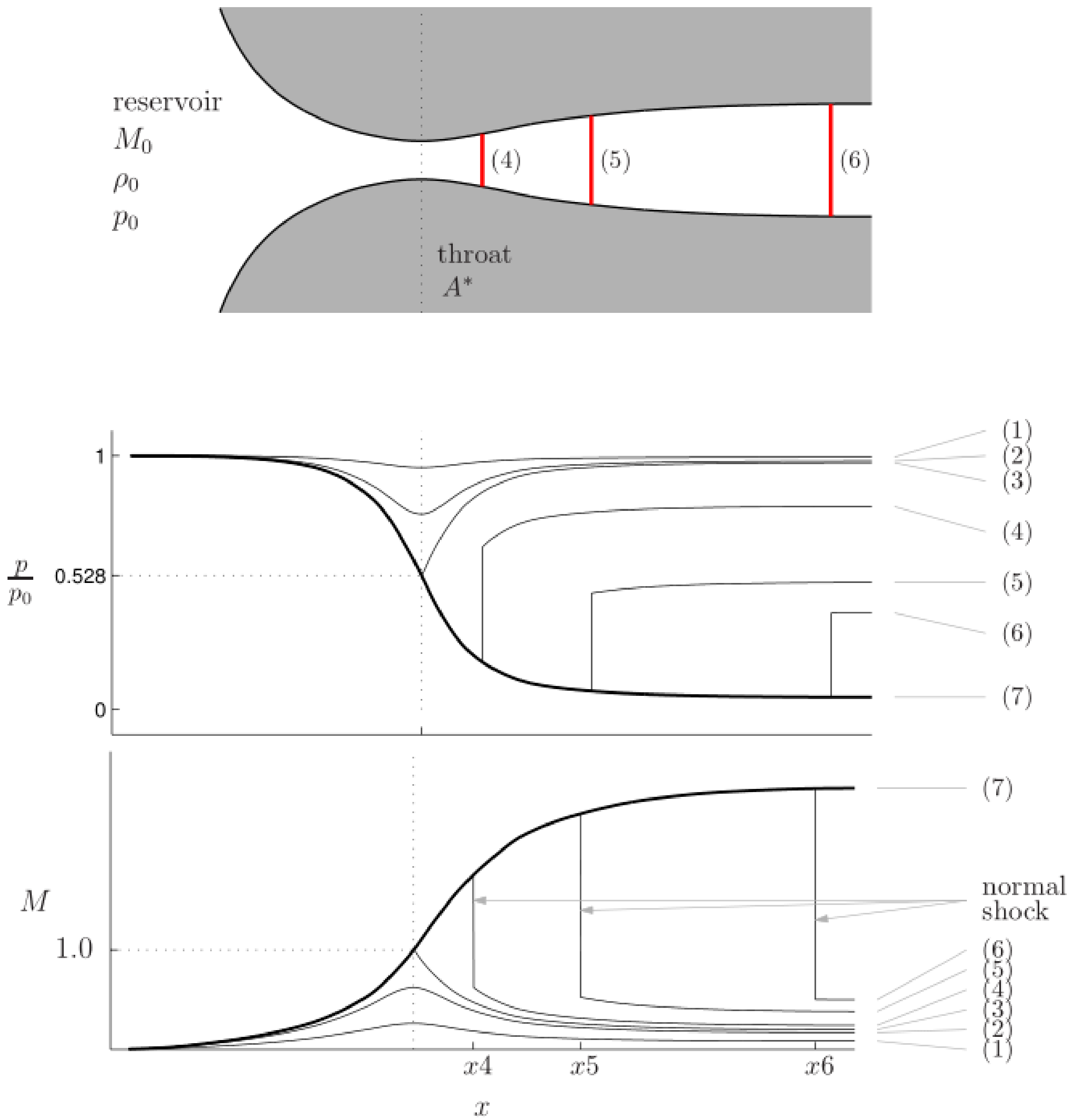


图 4.3: 出口压力不同导致的激波

- (1)，(2) 流体全程均未超过声速，同时全程均为等熵流
- (3) 出口压力的设置使得在喉部的流体恰好达到声速。此时，在喉部会发生弱激波，在渐扩喷管部分流体会减速，但流体全程仍为等熵流。
- (4) 当 $p_{e4} < p_{e3}$ 时，流体在通过喉部之后将无法保持等熵流，因为出口压力 $p_{e4}/p_0 > p_{e7}/p_0$，因此一定会在渐扩喷管的某个部分发生激波。
- (5)，(6) 与 (4) 类似，但由于压力比与 p_{e7}/p_0 更加接近，因此激波发生的位置也更加接近出口位置

- 如果压力进一步降低，斜激波将会发生

4.7 斜激波

考虑如图 4.4所示的斜激波，

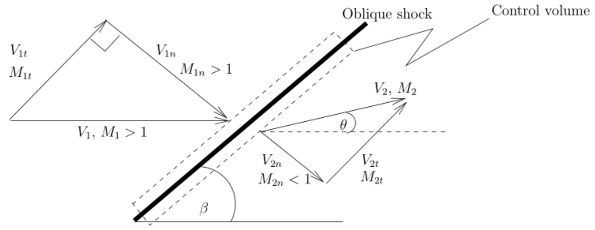


图 4.4: 斜激波

考虑连续性方程与切向和法向的动量：

$$
\begin{gathered}
\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \\
p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \\
\rho_1 V_{1n} V_{1t} = \rho_2 V_{2n} V_{2t}
\end{gathered}
$$

不难得到 $V_{1t} = V_{2t}$。由此我们可以得出，对于斜激波，在法向上，其规律与正激波一致；在切向上，速度分量则不产生变化。
如果我们基于上述结果观察一个斜激波，我们就会发现，斜激波的存在会导致流体的流向发生改变，如图 4.5所示。

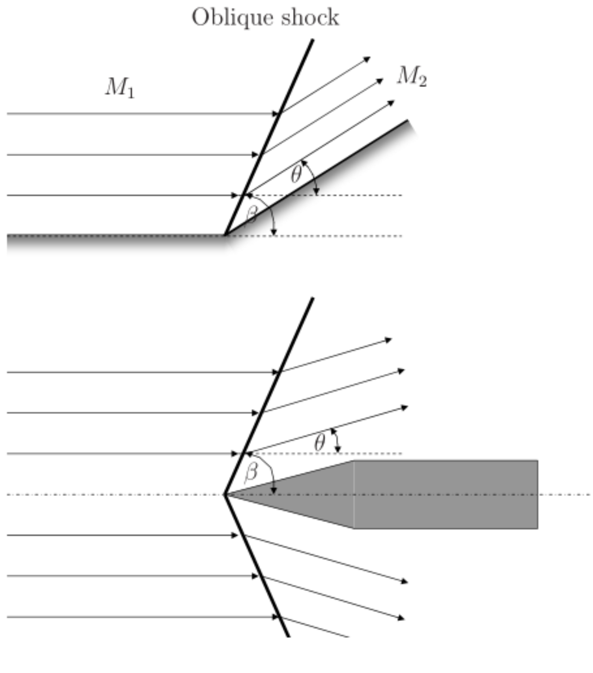


图 4.5: 斜激波导致流体流向的变化

$$
\begin{gathered}
M_1 = \frac{M_{1n}}{\sin\beta} \\
M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta - \theta)}
\end{gathered}
$$

注意到，$M_1 > 1$，但 $M_{2n} < 1$ 并不意味着 $M_2 < 1$。在经历斜激波后，流体仍然可能是超音速的。

4.8 马赫角

对于超音速流体，如图 4.6所示的圆锥顶角称为马赫角 μ,

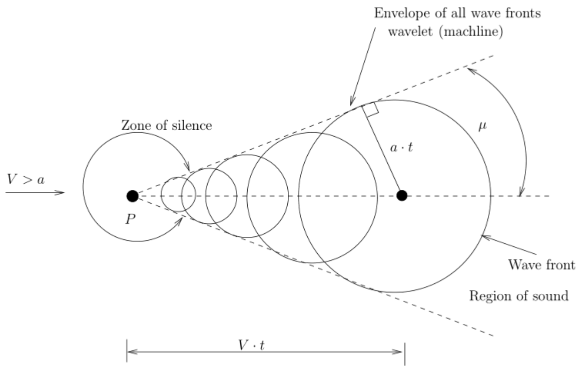


图 4.6: 马赫角

满足

$$
\begin{aligned}
\sim \mu = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \\
M = \frac{1}{\sin \mu} \\
\sin \mu = \frac{1}{M}
\end{aligned}
$$

当超音速流体遇到遇到较强的物理约束时，此时斜激波就会产生，并且满足关系

$$
M_{1n} = M_1 \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\sin \mu} > 1
$$

斜激波的角度始终大于马赫角，$\beta > \mu$。

4.9 偏折角 θ 与激波倾角 β 间的关系

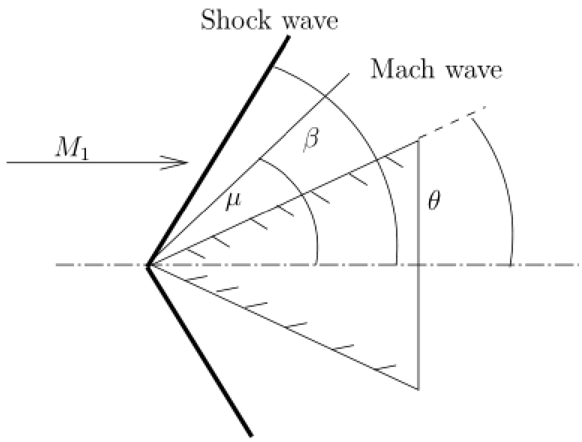


图 4.7: 偏折角与激波倾角间的关系

利用之前的结论，对于斜激波，在法向上，正激波的结论依然适用，因此

$$
\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}\left(M_1 \sin \beta\right)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\left(M_1 \sin \beta\right)^2}
$$

考虑到激波两侧的连续性，因此

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{V_{1n}}{V_{2n}} \\
&= \frac{V_{1n}}{V_{1t}}\frac{V_{2t}}{V_{2n}} \\
&= \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\theta)}
\end{aligned}
$$

把上述两式进行比较，可以得到

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\tan\beta\left(M_1^2\sin^2\beta-1\right)}{\tan^2\beta\frac{\gamma}{2}M_1^2+\frac{1}{2}M_1^2\sin^2\beta\left(1-\tan^2\beta\right)+\tan^2\beta} \\
&= 2\cot\beta\left[\frac{M_1^2\sin^2\beta-1}{M_1^2(\gamma+\cos2\beta)+2}\right]
\end{aligned}
$$

对应关系可以从图 4.8中得到更直观的了解。

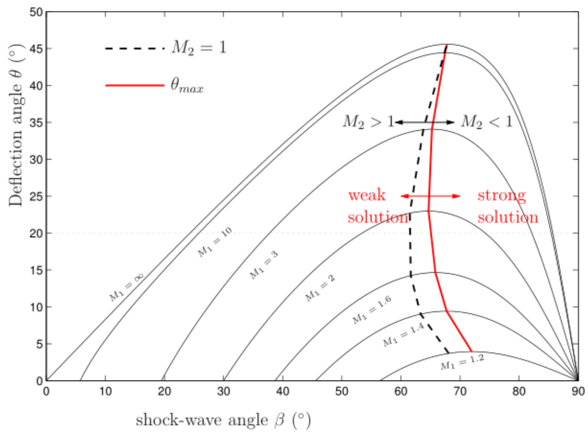


图 4.8: θ vs. β

可以看出，对于给定的 θ 角，有两个 β 角与之对应，其中一个为出流马赫数小于 1 的强解，另一个为出流马赫数大于 1 的弱解。在实际中，出现的究竟是强解还是弱解，取决于背景中的压力；一般而言，弱解更加常见，但是如果提升背景压力，则强解也有可能出现。

$$
\begin{aligned}
M_{2\ \text{strong}} &< M_{2\ \text{weak}} \\
\beta_{\text{strong}} &> \beta_{\text{weak}}
\end{aligned}
$$

4.10 斜激波的特殊解

1. 从喷管进入高压区域的超音速流体（喷气式飞机）

   当 $p_{e7} < p_e < p_{e6}$ 时，接近出口处的流体将会是超音速流，并且在喷管出口处的压力将会与 p_{e7} 相等，但当流体到达出口处时，必须立刻提升压力到 p_e，为了达到这样的效果，斜激波会在出口的边角处生成。

   涡流层的存在是压力发生骤变的原因。把正激波的式子代入斜激波的法向，可以得到

$$
\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2\sin^2\beta-1\right)
$$

   其中 p_1 是出口前压力，p_2 是出口后压力，通过这个式子以及已知的 M_1，我们可以得到对应的 β 角，从而找到对应的 θ 和 M_2。

2. 固体边界带来的激波反射

   当激波碰到墙时，激波也会反射，而对应的反射角由墙带来的边界条件确定：原本平行于墙面的流体在经过激波的两次折射后，仍然平行于墙面，如图 4.9所示。

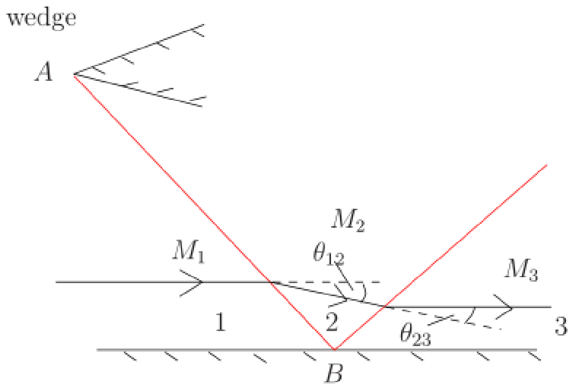


图 4.9: 激波的反射

4.11 马赫线与其性质

通过马赫线，如果气体被压缩，则马赫数减小，马赫角增加；若通过马赫线，气体膨胀，则马赫数增加，马赫角减小。

1. 凹角

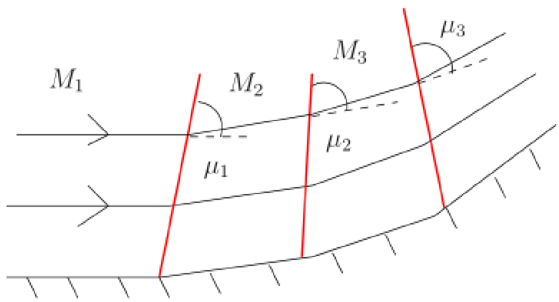


图 4.10: 凹角马赫线

   如图 4.10所示，凹角处存在一系列压缩的马赫线，$M_1 > M_2 > M_3$，$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$。通过马赫线的流体可以视为等熵流。同时如图 4.11，这一系列的马赫线会交汇于一点，此时，激波生成了。同时，在这个交汇点的后方，也存在一个涡流层，涡流层上下流体的速度是不连续的，但压力仍然是连续的。在涡流层和固体边界之间的流体可以视为等熵流提，他们只经过了一系列马赫线；在涡流层上方的流体通过了激波间断线，因为通过了斜激波，存在熵变，因此不可逆，等熵关系不再保持。

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \quad \text{对所有流体适用}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{仅对绝热流体适用}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{仅对绝热流体适用}$$

2. 凸角

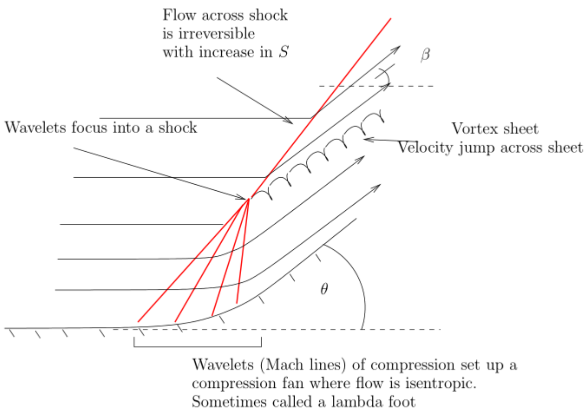


图 4.11: 凹角处的激波

对于凸角，同样存在一系列扩张马赫线，如图 4.12所示，$M_1 < M_2 < M_3$，$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$。但是这一系列的扩张马赫线并不会汇聚于一点。在凸角处，这一现象被称为 Prantdl-Meyer 膨胀扇，如图 4.13。在这种条件下，整个流体都是等熵的。

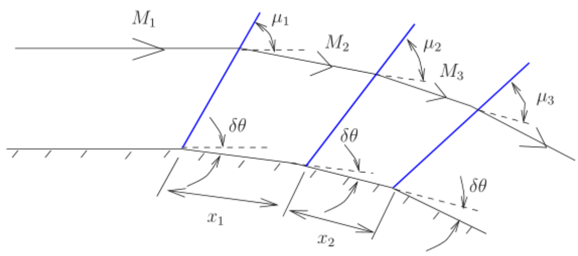


图 4.12: 凸角马赫线

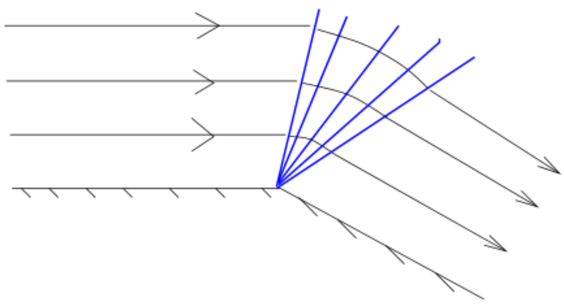


图 4.13: 凸角马赫线

4.12 马赫线分析

考虑如图 4.14所示的凹角，对控制体分析：
质量守恒

$$\rho v_n = (\rho + \delta\rho)(v_n + \delta v_n)$$
$$0 = v_n \delta\rho + \rho \delta v_n$$

切向方向的动量守恒

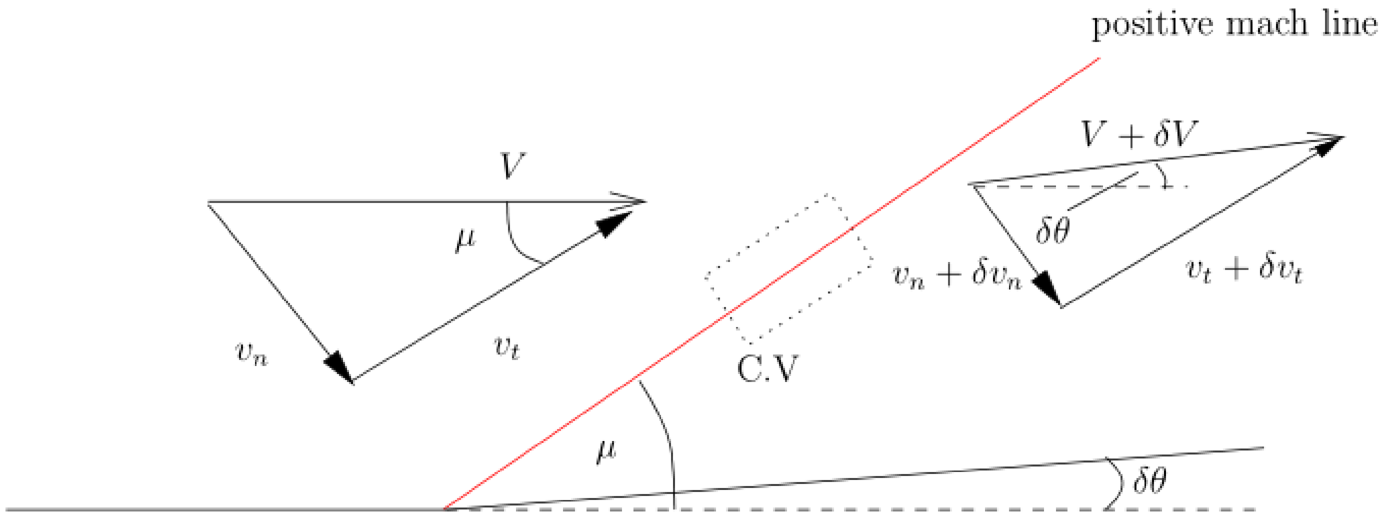


图 4.14: 马赫线分析

$$\begin{aligned}\rho v_n v_t &= (\rho+\delta\rho)(v_n+\delta v_n)(v_t+\delta v_t)\\ \delta v_t &= 0\end{aligned}$$

也可以写作

$$V\cos\mu = (V+\delta V)\cos(\mu-\delta\theta)$$

利用和角公式，并近似 $\sin\delta\theta\to\delta\theta$，$\cos\delta\theta\to 1$，可以得到

$$V\cos\mu = (V+\delta V)(\cos\mu+\delta\theta\sin\mu)$$

展开并忽略高阶小量，可以得到

$$\begin{aligned}\delta V\cot\mu &= -V\delta\theta\\ \delta\theta &= \mp\frac{\delta V}{V}\sqrt{M^2-1}\end{aligned}$$

式中的 $\mp$ 代表，对于正的马赫线，此处取负号；对于负的马赫线，此处取正号。
为了将 θ 与压力变化 δp 联系起来，利用欧拉方程：

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\text{const}$$

微分得到

$$\frac{\delta p}{\rho}=-V\delta V$$

代回前式可得

$$
\begin{aligned}
\delta\theta &= \pm\frac{\delta p}{\rho V^2}\sqrt{M^2-1} \\
&= \pm\frac{\delta p}{\gamma p M^2}\sqrt{M^2-1} \\
&= \mp\frac{\delta M\left(M^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{M\left(1+\frac{M^2(\gamma-1)}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

对于上式进行积分，

$$
\begin{aligned}
\theta &= \mp\int\frac{dM\left(M^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{M\left(1+\frac{M^2(\gamma-1)}{2}\right)} \\
&= \mp\omega(M)+\theta_0
\end{aligned}
$$

其中 $\omega(M)$ 被称为 Prandtl 角，为积分

$$
\omega(M) = [\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(M^2-1\right)}-\arctan\sqrt{M^2-1}]
$$

也可以通过查表得到。

因此，我们有结论

$$
\theta\pm\omega(M)=\theta_0=\text{const}
$$

对于流体的全过程成立。

马赫线与偏转角度的正负定义如图 4.15所示。注意到，$\mu=\arcsin(1/M)$，始终是正值。

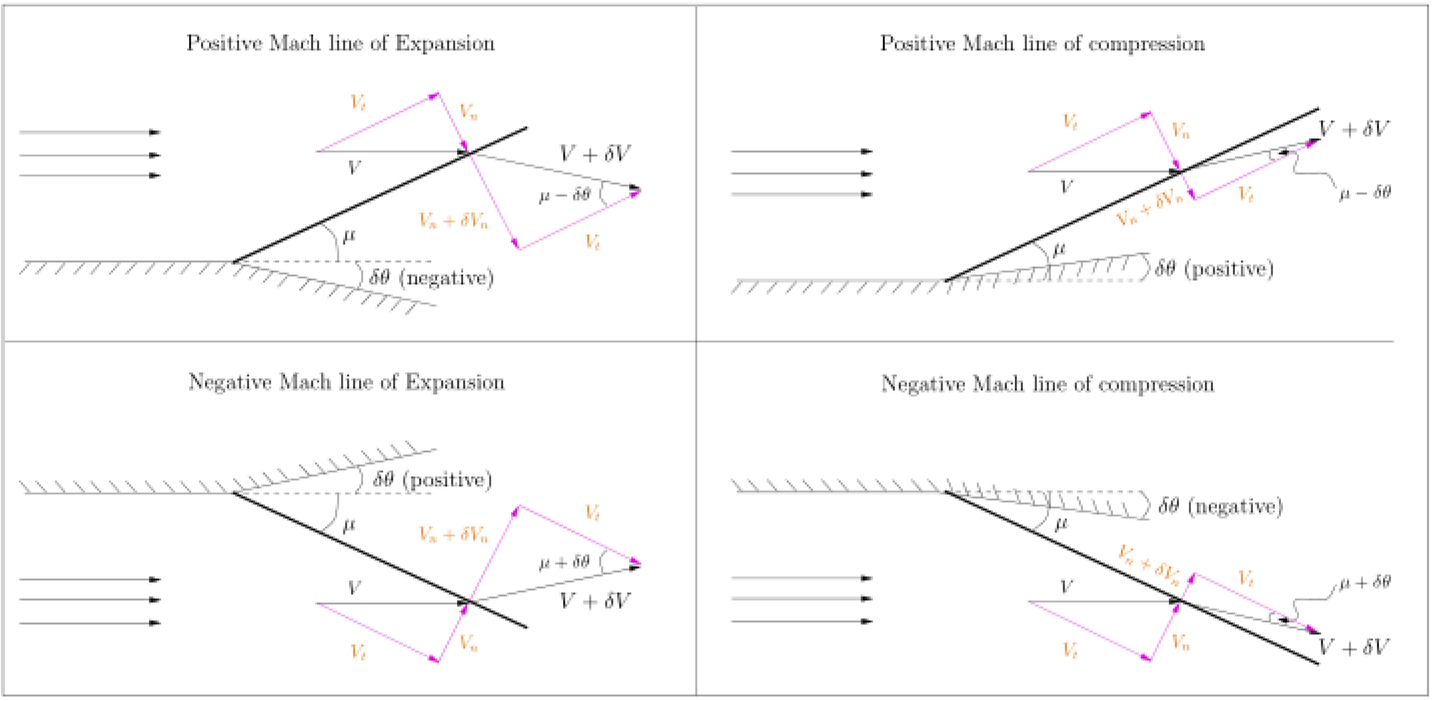


图 4.15: 马赫线与偏转角度的正负定义

从而，

$$
\begin{aligned}
V\cos\mu &= (V+\delta V)\cos(\mu-\delta\theta) \quad \text{正马赫线} \\
V\cos\mu &= (V+\delta V)\cos(\mu+\delta\theta) \quad \text{负马赫线}
\end{aligned}
$$

$$\delta\theta = \mp \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} \delta M$$

5 可压缩流体的空气动力学

5.1 激波-膨胀波方法

为了得到升力和阻力（C_L 和 C_D），可以采用激波-膨胀波方法。
考虑如图所示的具有攻角 α 的菱形机翼。

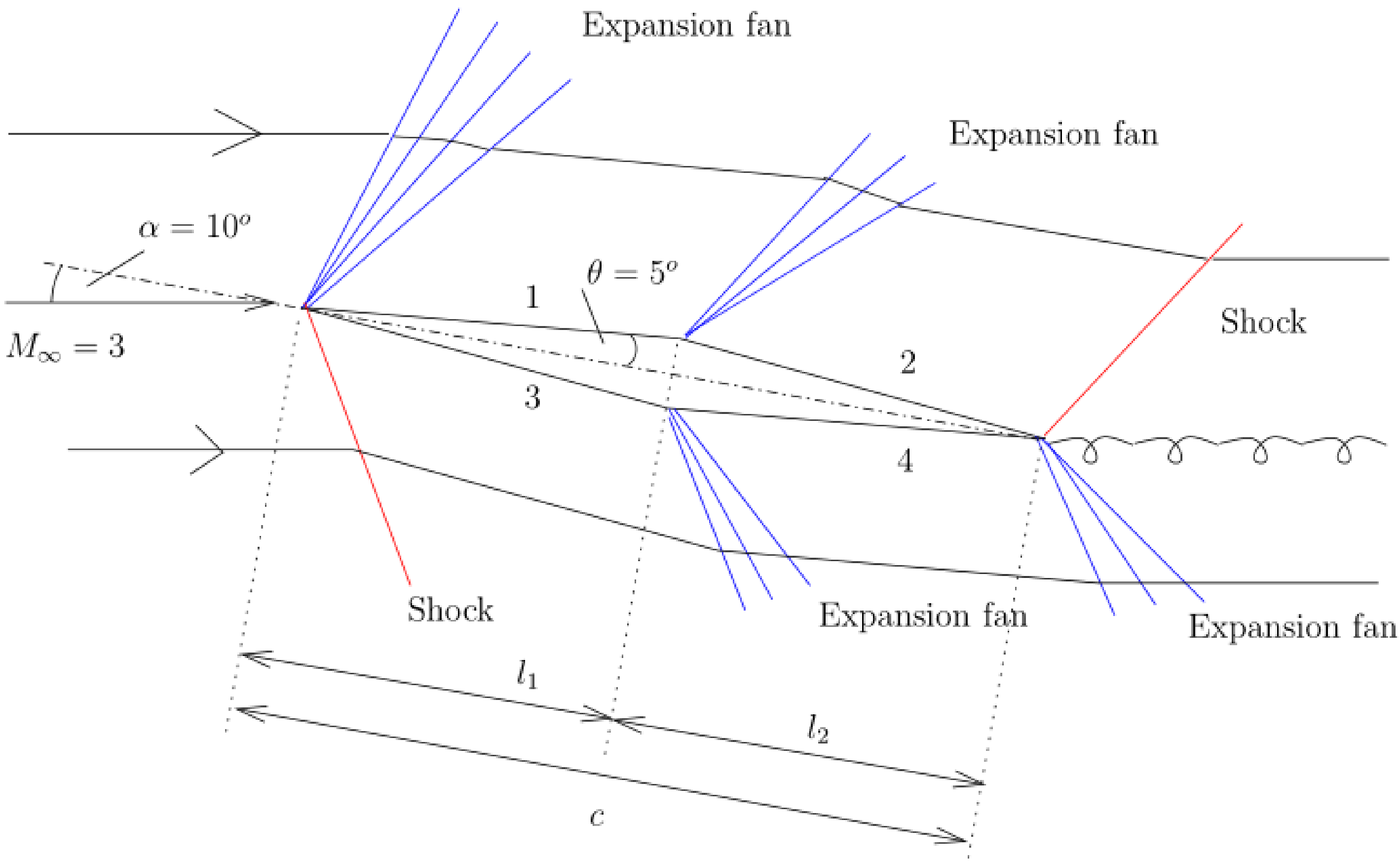


图 5.16: 菱形机翼示意图

无量纲升力系数 C_L 可以写作

$$
\begin{aligned}
C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \\
&= \frac{L}{\frac{1}{2}a_\infty^2 M_\infty^2 c} \\
&= \frac{L}{\frac{1}{2}p_\infty \gamma M_\infty^2 c}
\end{aligned}
$$

类似地，无量纲阻力系数为

$$
C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}p_\infty \gamma M_\infty^2 c}
$$

要完整的计算升阻力，我们需要各段的压力，求解的方法如下：

5.2 Ackeret 理论

Ackeret 理论仅在流体的改变较小、激波相对较弱的情况下成立（$\beta \to \mu$），这也就意味着 Ackeret 理论只能适用于薄机翼、折射角较小的情况。

$M_\infty \to M_1$ Prandtl-Meyer 关系
$p_\infty \to p_1$ 绝热关系
$M_1 \to M_2$ Prandtl-Meyer 关系
$p_1 \to p_2$ 绝热关系
$M_\infty \to M_3$ 激波关系
$p_\infty \to p_3$ 激波关系
$M_3 \to M_4$ Prandtl-Meyer 关系
$p_3 \to p_4$ 绝热关系

利用之前的结论，

$$\delta\theta = \pm\frac{\delta p}{\gamma p M^2}\sqrt{M^2-1}$$
$$\delta\theta = \pm\frac{\delta p}{\rho V^2}\sqrt{M^2-1}$$

由于偏折角比较小，我们可以认为 ρ, V^2, M 均为常数，与来流的状态参数相同（ρ_1, V_1^2, M_1。因此，

$$\delta\theta = \pm\frac{\delta p}{\rho_1 V_1^2}\sqrt{M_1^2-1}$$

压力系数

$$C_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2}$$

由 $\delta p = p - p_1$ 代入前式，可得

$$\delta\theta = \frac{C_p}{2}\sqrt{M_1^2-1}$$
$$C_p = \pm\frac{2\delta\theta}{\sqrt{M_1^2-1}}$$

考虑上式的 $\delta\theta$ 为一个微小的角度 η，则有

$$\pm C_p = \frac{2\eta}{\sqrt{M_\infty^2-1}}$$

取正号时代表机翼的上表面，取负号时代表机翼的下表面。再次强调，基于 Ackeret 理论的分析只适用于攻角小、机翼薄的情形。
考虑一片任意的机翼，他都可以被分解为三个元素的叠加：攻角 α 的弦线，厚度分布（两侧对称）$t(x)$，以及弯度分布（两侧不对称）$\xi(t)$，如图 4.14所示。
先前讨论的 η 为转角，因此 $\eta = dy/dx$，对于上下表面各有：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_U = -\alpha + \frac{dt(x)}{dx} + \frac{d\xi(x)}{dx}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_L = -\alpha - \frac{dt(x)}{dx} + \frac{d\xi(x)}{dx}$$

上表面
如图 5.18，取微元，则该微元的守力为

$$dF = pds$$

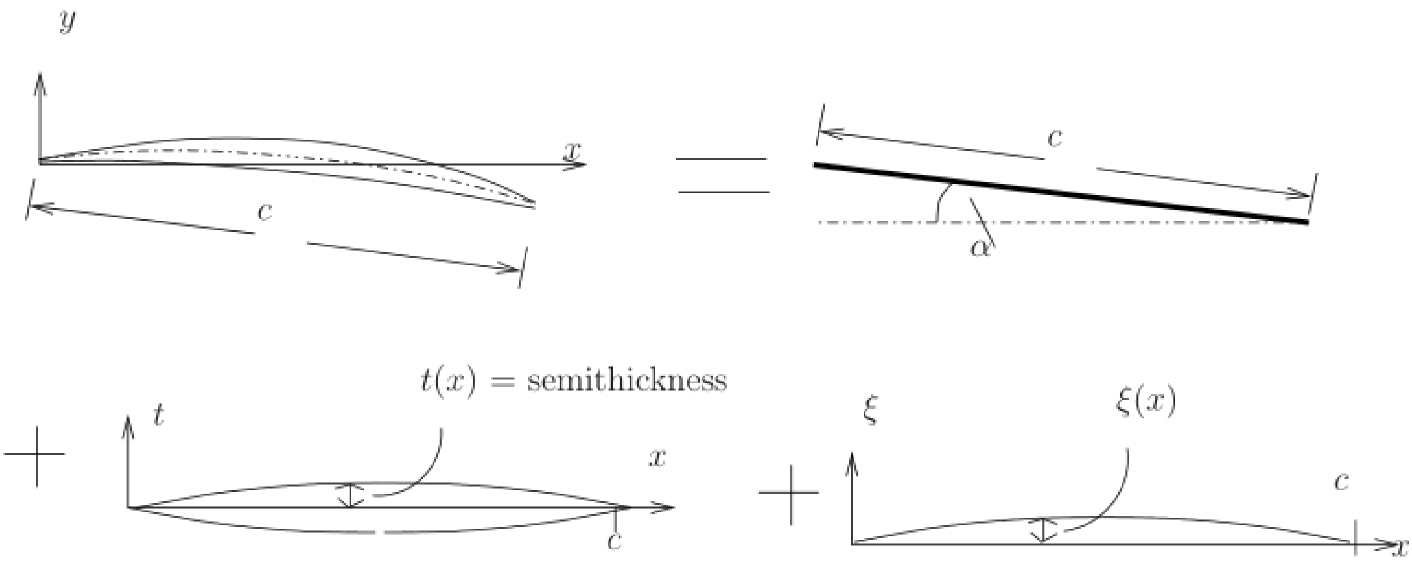


图 5.17: 机翼的分解

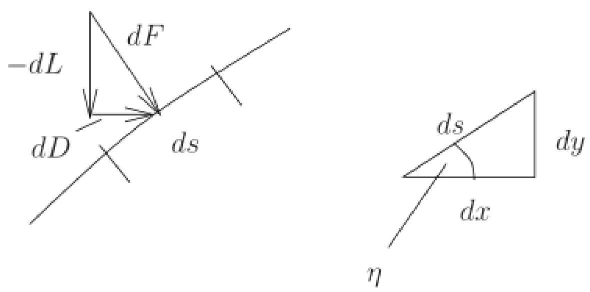


图 5.18: 上表面受力

代入 C_p，可以得到

$$
\begin{aligned}
p &= C_p \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 + p_\infty \\
dF &= C_{p_U} \frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 ds + p_\infty ds
\end{aligned}
$$

升力：

$$
\begin{aligned}
dL &= -C_{p_U} \frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 \cos\eta ds - p_\infty \cos\eta ds \\
&= -C_{p_U} \frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 dx - p_\infty dx
\end{aligned}
$$

阻力：

$$
\begin{aligned}
dD &= C_{p_U} \frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 \sin\eta ds + p_\infty \sin\eta ds \\
&= C_{p_U} \frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 dy + p_\infty dy \\
&= C_{p_U} \frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_U dx + p_\infty \left(\frac{dy}{dx}\right)_U dx
\end{aligned}
$$

下表面

如图 5.19，类似地可以得到

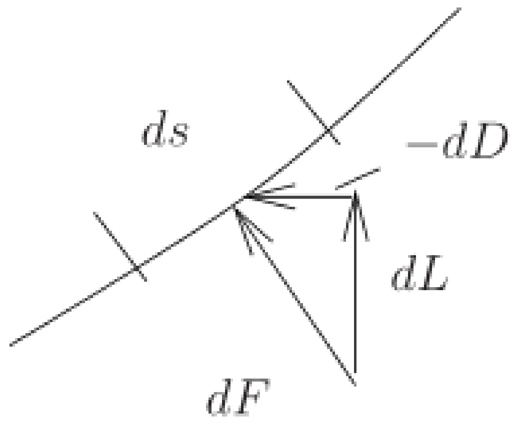


图 5.19: 下表面受力

$$
\begin{aligned}
dL &= C_{p_L}\frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 dx + p_\infty dx \\
dD &= -C_{p_L}\frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_L dx - p_\infty \left(\frac{dy}{dx}\right)_L dx
\end{aligned}
$$

总升力与总阻力

对 dL 和 dD 积分，并近似 $\cos\alpha \approx 1$，

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 \int_0^c \left(C_{p_L} - C_{p_U}\right) dx \\
D &= \frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 \int_0^c \left[C_{p_U}\left(\frac{dy}{dx}\right)_U - C_{p_L}\left(\frac{dy}{dx}\right)_L + p_\infty \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)_U - \left(\frac{dy}{dx}\right)_L\right\}\right] dx
\end{aligned}
$$

代入 C_{PU}，C_{PL}，以及 η_U，η_L

$$
L = \frac{-\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[\int_0^c (-2\alpha)dx + \int_0^c \left(\frac{dt}{dx} + \frac{d\xi}{dx}\right)_U dx - \int_0^c \left(\frac{dt}{dx} - \frac{d\xi}{dx}\right)_L dx\right]
$$

不难看出，

$$
\int_0^c \left(\frac{dt}{dx} + \frac{d\xi}{dx}\right) dx = 0
$$

可以得到

$$
L = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2 2\alpha c}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}
$$

$$
\begin{aligned}
C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} = \frac{L}{\frac{1}{2}\gamma p_\infty M_\infty^2 c} \\
&= \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}
\end{aligned}
$$

我们可以得到，升力系数与 α 成正比，并且不依赖于机翼形状。实验证明，Ackeret 理论在马赫数 $M > 1.5$，攻角 $\alpha < 8^\circ$ 时是相对准确的。

类似地，可以得到阻力

$$D=\frac{2\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\int_0^c\left\{\alpha^2+\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\right\}dx$$

定义

$$\overline{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}=\frac{1}{c}\int_0^c\left(\frac{dt}{dx}\right)^2dx$$

$$\overline{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2}=\frac{1}{c}\int_0^c\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2dx$$

可得

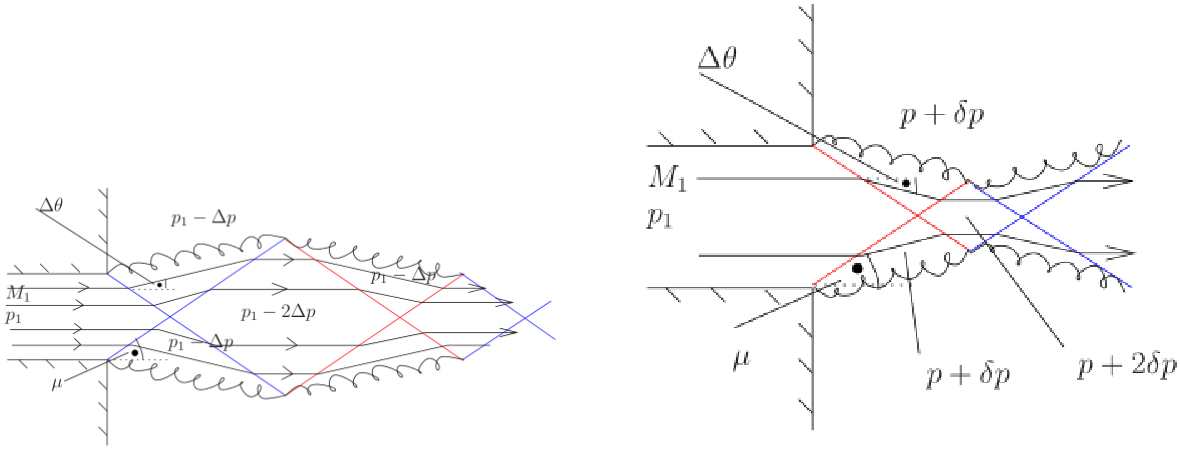
$$D=\frac{2\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left\{\alpha^2+\overline{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}c+\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2c\right\}$$

$$C_D=\frac{4}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left\{\alpha^2+\overline{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}+\overline{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2}\right\}$$

由上式可以知道，阻力系数不仅依赖于攻角 α，同样也和机翼形状有关。

喷管出口的流体也可以应用 Ackeret 理论，

$p_1>p_0$，则如图 20(a)所示；$p_1<p_0$，则如图 20(b)所示。



(a) $p_1>p_0$

(b) $p_1<p_0$

图 5.20: 喷管出口的流体

6 数学

6.1 高斯散度定理

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界,$\mathbf{n}$ 为曲面 Σ 朝外的单位向量。