系訊系統專論　HW1

60947037S　吳羽倫

October 16, 2020

1. 在$n=2$時，沒有所謂的"第2隻到第$n-1$隻馬"，因此數學歸納法不成立。 □

2. 設三根木樁從左到右依序命名爲A, M, B，n個碟子所需要的最少步數爲a_n：
   $a_1 = 2$ (將碟子從A移到M再移到B)
   claim: $a_n = 3a_{n-1} + 2\ \forall n \geq 2$

   Proof. 想要將最大的碟子從A移到B必須先移到M才能移到B，而想要將最大的碟子從A移到M，必須先把前$n-1$個碟子通通從A移到B；而後想要將最大的碟子從M移到B，必須先把前$n-1$個碟子通通從B移到A。最大的碟子到B後，再把前$n-1$個碟子通通從A移到B，這就是最快的方法了。

   1) 前$n-1$個碟子通通從A移到B 至少需要a_{n-1}步
   2) 最大的碟子從A移到$M \Rightarrow$ 至少需要1步
   3) 前$n-1$個碟子通通從B移到A 至少需要a_{n-1}步
   4) 最大的碟子從M移到$B \Rightarrow$ 至少需要1步
   5) 前$n-1$個碟子通通從A移到B 至少需要a_{n-1}步

   $\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 3a_{n-1} + 2\ \forall n \geq 2$ □

   Closed form:
   $a_n = 3a_{n-1} + 2$
   $\Rightarrow a_n + 1 = 3(a_{n-1} + 1) = 3^{n-1}(a_1 + 1) = 3^n$
   $\Rightarrow a_n = 3^n - 1,\ n \in N$

3. 若過程中第m步與第$m+k$步時的排列相同，則代表中間的k步是多餘的。因此我們可以知道最一開始的排列以及過程的3^n-1步，共3^n個排列皆不相同。
   而n個碟子在三個木樁上總共會有3^n種排列，因此可以知道所有的排列都會剛好遇到一次。 □

4. 無論開始與結束的排列爲何，皆不需要超過2^n-1個步驟。

   Proof. $n=1$時，碟子要嘛就在它該在的木樁上(共需0步)、要嘛需要1步將它移動到它該在的木樁上，而$max\{0,1\} = 1 \leq 1 = 2^1 - 1$.
   設$n = k(k \in N)$時，無論開始與結束的排列爲何，皆不需要超過2^n-1個步驟，則當$n = k+1$時，分爲兩個情況討論：

   - 最大的碟子已在它該在的木樁上：
     此時只須要處理前$n-1$個碟子，共需至多2^k-1步。

- 最大的碟子不在它該在的木樁上：
  先將前$n-1$個碟子移動到不是最大的碟子的所在位置以及目的地的木樁上，然後將最大的碟子移到目的地，最後將前$n-1$個碟子移到各自該在的木樁上，共需要不超過$(2^k-1)+1+(2^k-1)=2^{k+1}-1$步。
  而$max\{2^k-1,2^{k+1}-1\}=2^{k+1}-1=2^n-1\leq 2^n-1$，根據數學歸納法得證。

$\square$

5. 設$a_n(n\in N)$爲n個圓最多能將平面分割的區域個數。
   $a_1=2$ $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$ (第n個圓能跟前面的每個圓多分割2個區域)
   $\Rightarrow a_n=2+\sum_{k=1}^{n}2(k-1)=2+n(n-1)$ $n(n\in N)$
   $a_4=14<16$，因此4個圓沒辦法區分16種不同情況。 $\square$

6. 設a_n爲n條直線可劃分的bounded area 的最大數量，則:
   For $n\leq 2$, $a_n=0$
   For $n\geq 3$, $a_n=a_{n-1}+(n-2)$
   (第n條直線最多可以跟前$n-1$條直線產生$n-1$個不同的交點，進而多分割$n-2$個不同的bound area)
   $\Rightarrow a_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $n\in N$

7. 沒檢查初始情況：$H(1)=J(2)-J(1)=1-1=0\neq 2$ $\square$

8. $Q_0=\alpha, Q_1=\beta$
   $Q_2=\frac{1+Q_1}{Q_0}=\frac{1+\beta}{\alpha}$
   $Q_3=\frac{1+Q_2}{Q_1}=\frac{1+\frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta}=\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$
   $Q_4=\frac{1+Q_3}{Q_2}=\frac{1+\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}}=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{\beta+\beta^2}=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{\beta(1+\beta)}=\frac{1+\alpha}{\beta}$
   $Q_5=\frac{1+Q_4}{Q_3}=\frac{1+\frac{1+\alpha}{\beta}}{\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}}=\frac{\alpha+\alpha^2+\alpha\beta}{1+\alpha+\beta}=\alpha$
   $Q_6=\frac{1+Q_5}{Q_4}=\frac{1+\alpha}{\frac{1+\alpha}{\beta}}=\beta$
   因爲$(Q_5,Q_6)=(Q_0,Q_1)$且新的一項只跟前兩項有關，因此可以知道此數列是週期性的，且對於非負整數n：
   $$Q_n=\begin{cases}\alpha, & n=5k \text{ for sime } k\in Z\\ \beta, & n=5k+1 \text{ for some } k\in Z\\ \dfrac{1+\beta}{\alpha}, & n=5k+2 \text{ for some } k\in Z\\ \dfrac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}, & n=5k+3 \text{ for some } k\in Z\\ \dfrac{1+\alpha}{\beta}, & n=5k+4 \text{ for some } k\in Z\end{cases}$$

9. **a** 設$P(n)$成立，即
   $x_1x_2...x_n\leq(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})^n$, $x_1,x_2,...,x_n\geq 0$ 令$x_n=\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1}$，則：
   $x_1x_2...x_n\leq(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n}{n})^n=(\frac{(n-1)x_n+x_n}{n})^n=x_n^n$
   $\Rightarrow x_1x_2...x_{n-1}\leq x_n^{n-1}=\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1})^{n-1}$
   $\Rightarrow P(n-1)$ 成立 $\square$

   b 若$P(n)$及$P(2)$成立，則:
   $x_1x_2...x_{2n}=(x_1x_2...x_n)(x_{n+1}x_{n+2}...x_{2n})\leq(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})^n\times(\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{2n}}{n})^n$
   $=[(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})(\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{2n}}{n})]^n$

$\leq ((\frac{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{2n}}{n}}{2})^2)^n$
$= (\frac{x_1+x_2+...+x_{2n}}{2n})^{2n}$
$\Rightarrow P(2n)$ 成立 $\square$

c 從**b** 部分可以知道對所有非負整數k，$P(2^k)$皆成立。
$\forall n \in N, \exists k \in N$ s.t. $n < 2^k$, since $P(2^k)$ is true, we can know $P(n)$ is also true from part **a**. $\square$

10. 令另一個木樁爲C：
Q_n:
$Q_0 = 0$ is trivial.
要把最大的碟子從A放到B前，必須先把前$n-1$個碟子放到C，才能將最大的碟子從A放到B。放完後，再把前$n-1$個碟子放到B就是最快的方法了。

1) 把前$n-1$個碟子從A放到C(最少R_{n-1}步)
2) 把最大的碟子從A放到B(最少1步)
3) 把前$n-1$個碟子從C放到B(最少R_{n-1}步)

$\Rightarrow Q_n = R_{n-1} + 1 + R_{n-1} = 2R_{n-1} + 1$ $\square$

R_n:
$R_0 = 0$ is trivial.
要把最大的碟子從B移到A前，必須先把前$n-1$個碟子放到A(因爲移動的順序是$B \to C \to A$，放到C也會擋到最大的碟子的路)，然後把最大的碟子從B移到C。再來把前$n-1$個碟子從A移到B，就可以把最大的碟子從C移到A，最後再把前$n-1$個碟子從B移到A就結束了。

1) 把前$n-1$個碟子從B放到A(最少R_{n-1}步)
2) 把最大的碟子從B放到C(1步)
3) 把前$n-1$個碟子從A放到B(最少Q_{n-1}步)
4) 把最大的碟子從C放到A(1步)
5) 把前$n-1$個碟子從B放到A(最少R_{n-1}步)

$\Rightarrow R_n = R_{n-1} + 1 + Q_{n-1} + 1 + R_{n-1} = (2R_{n-1} + 1) + Q_{n-1} + 1$
$= Q_n + Q_{n-1} + 1$ $\square$

11. **a Solution1**:
$a_0 = 0, a_1 = 2$(trivial)
For $n > 1$:
將最大的兩個碟子從左放到右之前，必須先將前面的$2n-2$個碟子從左移到中，等最大的碟子都移到右之後，再把那$2n-2$個碟子從中移到右，這樣的步數就是最少的了。

1) 把前$2n-2$個碟子從左放到中(最少需要a_{n-1}步)
2) 把最大的兩個碟子從左放到右(最少2步)
3) 把前$2n-2$個碟子從中放到右(最少需要a_{n-1}步)

$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 2$
$\Rightarrow (a_n + 2) = 2(a_{n-1} + 2) = 2^{n-1}(a_1 + 2) = 2^{n+1}$
$\Rightarrow a_n = 2^{n+1} - 2$, for $n \geq 0$

Solution2:
比較小的碟子放到兩個不同的木樁(如果能的話)會讓比較大的碟子動不了，所以最快的方

法就是一次移動兩個相同大小的碟子(需要2步)，也因此所需步數就是最原始的問題的兩倍。

設此題答案爲a_n,則$a_n = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$ $(n \geq 0)$

b 設此題答案爲b_n，則$b_0 = 0, b_1 = 3$(trivial)，且對於$n \geq 2$：

Possible solution1:

最大的碟子(上)從左移到中→最大的碟子(下)從左移到右→最大的碟子(上)從中移到右。過程中視情況把前$2n-2$個碟子移到適當的位置。

1) 把前$2n-2$個碟子從左放到右(不管順序，最少a_{n-1}步)
2) 把最大的碟子(上)從左放到中(1步)
3) 把前$2n-2$個碟子從右放到中(不管順序，最少a_{n-1}步)
4) 把最大的碟子(下)從左放到右(1步)
5) 把前$2n-2$個碟子從中放到左(不管順序，最少a_{n-1}步)
6) 把最大的碟子(上)從中放到右(1步)
7) 把前$2n-2$個碟子從左放到右(不管順序，最少a_{n-1}步)

可以注意到a_{n-1}有4次，所以相同大小的碟子的順序最後並不會改變。因此$b_n = 4a_{n-1} + 3 = 2^{n+2} - 5$

Possible solution2:

觀察不要求順序時的情況：

1) 把前$2n-2$個碟子從左放到中(不管順序)
2) 把最大的兩個碟子從左放到右(2步)
3) 把前$2n-2$個碟子從中放到右(不管順序)

及要求順序時的情況：

1) 把前$2n-2$個碟子從左放到右(不管順序)
2) 把最大的碟子(上)從左放到中(1步)
3) 把前$2n-2$個碟子從右放到中(不管順序)
4) 把最大的碟子(下)從左放到右(1步)
5) 把前$2n-2$個碟子從中放到左(不管順序)
6) 把最大的碟子(上)從中放到右(1步)
7) 把前$2n-2$個碟子從左放到右(不管順序)

可以注意到要求順序時，前$2n-2$碟子動的步數是不要求順序時的兩倍，而最大的碟子也接近不要求順序時的兩倍(再少1步)，因此$b_n = 2a_n - 1 = 2^{n+2} - 5$

Possible solution3:

最大的兩個碟子從左移到中(目前順序顛倒)→從中移到右(回到原本的順序)。過程中視情況把前$2n-2$個碟子移到適當的位置。

1) 把前$2n-2$個碟子從左放到右(不管順序，最少a_{n-1}步，此時有些碟子順序可能會亂)
2) 把最大的兩個碟子從左放到中(2步)
3) 把前$2n-2$個碟子從右放到左(不管順序，最少a_{n-1}步，此時原本順序亂的碟子順序會回到初始情況)
4) 把最大的兩個碟子從中放到右(1步)
5) 把前$2n-2$個碟子從左放到右(管順序，最少b_{n-1}步)

$\Rightarrow b_n = a_{n-1} + 2 + a_{n-1} + 2 + b_{n-1} = 2a_{n-1} + 4 + b_{n-1} = 2^{n+1} + b_{n-1}$
$\Rightarrow b_n = b_1 + \sum_2^{n-1} 2^{n+1} = 3 + \frac{2^3(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^{n+2} - 5$

Remark: 其實應該要這三個可能的答案中挑最小的一個(所以才稱其爲'possible')，但第二個可能的答案中的式子($b_n = 2a_n - 1$)保證了這三個是相等的。

16. $g(1) = \alpha$ (1)
$g(2n+j) = 3g(n) + \gamma n + \beta_j$ for $j = 0, 1$ and $n \in N$ (2)
Solution1:(just use repertoire method)
$g(n)$ must be the form: $A(n)\alpha + B(n)\beta_1 + C(n)\beta_2 + D(n)\gamma$ (3)

(a) Let $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma) = (1, 0, 0, 0)$, then $g(n) = A(n)$.
By(1), we know $A(1) = 1$.
By(2), we know $A(2n+j) = 3A(n) \Rightarrow A(n) = 3^m, m = \lfloor \log 2n \rfloor$
(其實m就是[n在2進位時的位數-1])

(b) Let $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma) = (0, 0, 0, 1)$:
By(1), we know $D(1) = 0$.
By(2), we know $D(2n+j) = 3D(n) + n$
$\Rightarrow D(n) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$
(如果不清楚$A(n)$跟$D(n)$的一般項怎麼得出的，建議設個n然後用二進位自己試一遍看看)

(c) Let $g(n) = 1$:
By(1), we know $\alpha = g(1) = 1$
By(2), we know $g(2n+j) = 3g(n) + \gamma n + \beta_j$
$\Rightarrow 1 = 3 \times 1 + n\gamma + \beta_j$ for $j = 0, 1$
$\Rightarrow \gamma = 0, \beta_0 = \beta_1 = -2$
$\Rightarrow$ by(3), we know $1 = A(n) - 2B(n) - 2C(n)$
$\Rightarrow B(n) + C(n) = \frac{3^m - 1}{2}$ (4)

(d) Let $g(n) = n$:
By(1), we know $\alpha = g(1) = 1$
By(2), we know $2n + j = 3n + \gamma n + \beta_j$ for $j = 0, 1$
$\Rightarrow \gamma = -1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$
$\Rightarrow$ by(3), we know $n = A(n) + C(n) - D(n)$
$\Rightarrow C(n) = n - A(n) + D(n) = n - 3^m + \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$
By (4), we know $B(n) = \frac{3^m - 1}{2} - C(n) = \frac{1}{2}(3^{m+1} - 1) - n - \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$

Finally, we know that for all $n \in N$, let $m = \lfloor \log 2n \rfloor$ then:
$g(n) = 3^m\alpha + (\frac{1}{2}(3^{m+1} - 1) - n - \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor)\beta_0 + (n - 3^m + \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor)\beta_1 + \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor \gamma$

Remark: 如果你嘗試設$g(n) = n^2$卻得不出結果，這是很正常的。這只是代表這個遞迴式不可能靠更動那些參數做到$g(n) = n^2$。

Solution2:(use other methods)
Lemma:
If $g_1(n)$ is the solution for

$$\begin{cases} a(1) = \alpha \\ a(2n+j) = 3a(n) + \beta_j \text{ for } j = 0, 1 \text{ and } n \in N \end{cases}$$

and $g_2(n)$ is the solution for

$$\begin{cases} b(1) = 0 \\ b(2n+j) = 3b(n) + \gamma n \text{ for } j = 0, 1 \text{ and } n \in N \end{cases}$$

Then $(g_1 + g_2)(n)$ is the solution for

$$\begin{cases} g(1) = \alpha \\ g(2n+j) = 3g(n) + \gamma n + \beta_j \text{ for } j = 0, 1 \text{ and } n \in N \end{cases}$$

Proof. $(g_1 + g_2)(1) = g_1(1) + g_2(1) = \alpha$
For $j = 0, 1$ and $n \in N$, $(g_1 + g_2)(2n+j) = g_1(2n+j) + g_2(2n+j) = (3g_1(n) + \beta_j) + (3g_2(n) + \gamma n)$
$= 3(g_1(n) + g_2(n)) + \gamma n + \beta_j$ □

Theorem1.18:(from text book) If $f(j) = \alpha_j$ and $f(dn + j) = cf(n) + \beta_j$ for $j = 0, 1, ..., d-1$ and $n \in N$, then for $n = (b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_d$,
$f((b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_d) = (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} ... \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c$.

Proof. 注意到在d進位的表示法中，n就是把$dn + j$的個位數拿掉的意思，而j就是拿掉前的個位數:
For $n = (b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_d$, $f((b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_d) = cf((b_m b_{m-1} ... b_2 b_1)_d) + \beta_{b_0}$
$= c^2 f((b_m b_{m-1} ... b_3 b_2)_d) + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$
$= c^3 f((b_m b_{m-1} ... b_4 b_3)_d) + c^2 \beta_{b_2} + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$
$= ...$ (持續做遞迴)
$= c^m f((b_m)_d) + c^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + c^{m-2} \beta_{b_{m-2}} + ... + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$ (遞迴結束)
$= c^m \alpha_{b_m} + c^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + c^{m-2} \beta_{b_{m-2}} + ... + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$ $(f(j) = \alpha_j)$
$= (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} ... \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c$. (可以用$c$進位表示)

□

$g_1(n)$:

- For $\gamma = 0$, it's clearly that $g_1(n) = 0$.
- For $\gamma \neq 0$, let $g_3(n) = \frac{g_1(n)}{\gamma}$, then $g_3(n) = 0$ and $g_3(2n+j) = \frac{g_1(2n+j)}{\gamma}$
  $= \frac{3g_1(n) + \gamma n}{\gamma} = \frac{3g_1(n)}{\gamma} + n = g_3(n) + n$
  Similarly from previous discussions in solution1, we can conclude that $g_3(n) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$
  $\Rightarrow g_1(n) = \gamma g_3(n) = \gamma \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$

$\Rightarrow g_1(n) = \gamma \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$
(No matter what value γ is.)

$g_2(n)$:
From theorem1.18, we know that for $n = (1b_{m-1} ... b_1 b_0)_2$, $g_2(n) = (\alpha \beta_{b_{m-1}} ... \beta_{b_1} \beta_{b_0})_3$

Finally, according to the lemma, we can conclude that for $n = n = (1b_{m-1} ... b_1 b_0)_2$, $g(n) = g_1(n) + g_2(n)$

$$g(n) = (\alpha \beta_{b_{m-1}} ... \beta_{b_1} \beta_{b_0})_3 + \gamma \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$$

Bonus1: 如果你覺得式子一部份用進位表示一部份不是感覺很不舒服，沒問題，我們來處理那個惱人的$\sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1}\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$。
首先我們已經知道$D(n) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{i-1}\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$滿足

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D(2n+j) = 3D(n) + n \text{ for } j = 0, 1 \text{ and } n \in N \end{cases}$$

而我們等等也會用到這個事實。

注意到在二進位下，n其實就是把$2n+j$的個位數拿掉(也因此會少一位)，因此：
設$n = (b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_2$,則:
$D((b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_2)$
$= 3D((b_m b_{m-1}...b_1)_2) + (b_m b_{m-1}...b_1)_2$
$= 3^2 D((b_m b_{m-1}...b_2)_2) + 3(b_m b_{m-1}...b_2)_2 + (b_m b_{m-1}...b_1)_2$
$= 3^3 D((b_m b_{m-1}...b_3)_2) + 3^2(b_m b_{m-1}...b_3)_2 + 3(b_m b_{m-1}...b_2)_2 + (b_m b_{m-1}...b_1)_2$
$= ...$ (持續做遞迴)
$= 3^m D((b_m)_2) + 3^{m-1}(b_m)_2 + 3^{m-2}(b_m b_{m-1})_2 + ... + 3^i(b_m b_{m-1}...b_{i+1})_2 + ... + (b_m b_{m-1}...b_1)_2$
(遞迴結束)
$= 3^{m-1}(b_m)_2 + 3^{m-2}(b_m b_{m-1})_2 + ... + 3^i(b_m b_{m-1}...b_{i+1})_2 + ... + (b_m b_{m-1}...b_1)_2$
$(D((b_m)_2) = D(1) = 0)$
$= b_m(2^0 3^{m-1} + 2^1 3^{m-2} + ... + 2^{m-1}3^0) + b_{m-1}(2^0 3^{m-2} + 2^1 3^{m-2} + ... + 2^{m-2}3^0) + ...$
$+b_i(2^0 3^{i-1} + 2^1 3^{i-2} + ... + 2^{i-1}3^0) + ... + b_1(2^0 3^0)$
(每個括號裡面的都是一個等比級數和，首項3^{i-1},公比$\frac{2}{3}$,共i項$\Rightarrow 3^i - 2^i$)
$= b_m(3^m - 2^m) + b_{m-1}(3^{m-1} - 2^{m-1}) + ... + b_1(3^1 - 2^1) + b_0(3^0 - 2^0)$
(最後一項是自己補的，反正是0還會比較美觀)
$= (b_m 3^m + b_{m-1}3^{m-1} + ... + b_0 3^0) - (a_m 2^m + a_{m-1}2^{m-1} + ... + a_0 2^0)$
$= (b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_3 - (b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_2$
因此在solution2裡，可以改寫成：

$$g(n) = (\alpha\beta_{b_{m-1}}...\beta_{b_1}\beta_{b_0})_3 + \gamma[(b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_3 - (b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_2]$$

Bonus2: 對於Bonus1，我們其實可以有類似於Theorem1.18的結論：
If

(1) $c, d \in N$, $d > 1$ and $c \neq d$

(2) $f(0) = \alpha$

(3) $f(dn + j) = cf(n) + \gamma n$ for $n = (b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_d \geq 0$

Then:

$$f(n) = c^{m+1}\alpha + \gamma\left(\frac{(b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_c - (b_m b_{m-1}...b_1 b_0)_d}{c-d}\right)$$