向量的数量积及运算律

王崇宁

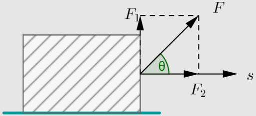
郑州四中

2015 年 5 月 6 日

数量积的物理背景

力和物体在力的方向上的位移的乘积叫做功，计算公式为 $W = Fs\cos\theta$.

$W = Fs\cos\theta$



$W = F_2 s = Fs\cos\theta$

学习目标

- 会使用平面向量的数量积的定义及其几何意义
- 能说出平面向量数量积的重要性质及运算律
- 了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题

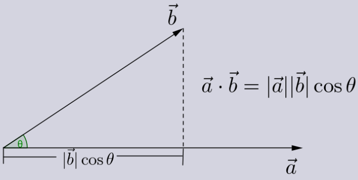
定义：向量的数量积

定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

我们规定，零向量与任一向量的数量积为 0.



例 1

已知 $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = 120°$, 求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

例 1

已知 $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = 120°$, 求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

解：$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta$

例 1

已知 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=120^\circ$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta\\&=5\times4\times\cos 120^\circ\end{aligned}$$

例 1

已知 $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = 120^\circ$, 求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

解：$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \\ &= 5 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= -10 \end{aligned}$$

练习 1. 已知 $|\boldsymbol{p}|=8$, $|\boldsymbol{q}|=6$, 向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的夹角是 $60°$, 求 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$.

练习 2. 设 $|\boldsymbol{a}|=12, |\boldsymbol{b}|=9$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-54$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

练习 1. 已知 $|\boldsymbol{p}|=8$, $|\boldsymbol{q}|=6$, 向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的夹角是 $60°$, 求 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$.

练习 2. 设 $|\boldsymbol{a}|=12, |\boldsymbol{b}|=9$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-54$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

答案：1. $\underline{24}$　2. $\underline{2\pi/3}$

思考

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

2.$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

思考

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

答：当 $0 \le \theta < \pi/2$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0$;

2.$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

思考

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

答：当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0$;
当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0$;

2.$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

思考

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

答：当 $0 \le \theta < \pi/2$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0$;
当 $\pi/2 < \theta \le \pi$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0$;
当 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

2.$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

思考

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

答：当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0$;
当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0$;
当 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

2.$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

答：$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,

思考

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

答：当 $0 \le \theta < \pi/2$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0$;
当 $\pi/2 < \theta \le \pi$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0$;
当 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

2.$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

答：$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, 等号当且仅当 $\boldsymbol{a} = \pm \boldsymbol{b}$ 时取到，
$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|^2$, 此公式可以计算向量的模 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都是非零向量,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则

- $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$(判断两向量垂直的依据)

数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都是非零向量,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则

- $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$(判断两向量垂直的依据)
- 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 特别地，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$(用于计算向量的模)

数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都是非零向量,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则

- $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$(判断两向量垂直的依据)
- 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 特别地，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$(用于计算向量的模)
- $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$． $\surd$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$．

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. $\surd$
- 若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \neq 0$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. $\surd$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为 $\mathbf{0}$.

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. $\surd$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为 $\mathbf{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. $\surd$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中至少有一个为 $\boldsymbol{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. $\times$
- 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

例 2. 判断正误

- 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. $\surd$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为 $\mathbf{0}$. $\times$
- 若 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. $\times$
- 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$. $\surd$

平面向量数量积 $a \cdot b$ 的几何意义

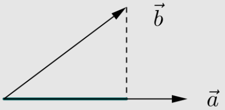
定义

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ 中，$|\boldsymbol{a}| \cos\theta(|\boldsymbol{b}| \cos\theta)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上 $(|\boldsymbol{b}| \cos\theta)$ 的投影.

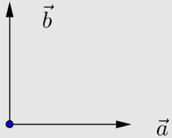
平面向量数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义

定义

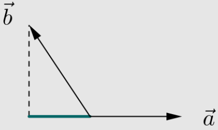
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 中，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上 $(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ 的投影.



投影$|\vec{b}|\cos\theta$为正



投影$|\vec{b}|\cos\theta$为零

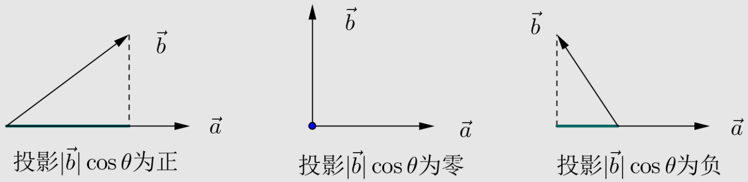


投影$|\vec{b}|\cos\theta$为负

平面向量数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义

定义

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 中，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上 $(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ 的投影.



向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的积.

数量积运算律

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$　交换律

数量积运算律

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$　交换律
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b})$　与数的结合律

数量积运算律

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 交换律
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b})$ 与数的结合律
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 分配律

数量积运算律

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 交换律
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b})$ 与数的结合律
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 分配律

数量积运算律

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 交换律
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b})$ 与数的结合律
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 分配律

注意

$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ 成立吗?

例 3. 求证:

$$(1)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$$

$$(2)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}|=6$ $|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}| = 6$ $|\boldsymbol{b}| = 4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$.

解:

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}| = 6\ |\boldsymbol{b}| = 4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

解:

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - 3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 6\boldsymbol{b}^2$$

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}|=6$ $|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

解:

$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$

$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}|=6$ $|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

解:

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$$

$$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°-6|\boldsymbol{b}|^2$$

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}|=6\ |\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

解:

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$$
$$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ-6|\boldsymbol{b}|^2$$
$$=36-4\times 6\times\frac{1}{2}-6\times 4^2$$

例 4

已知 $|\boldsymbol{a}|=6$ $|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

解:

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$$
$$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°-6|\boldsymbol{b}|^2$$
$$=36-4\times 6\times\frac{1}{2}-6\times 4^2$$
$$=-72$$

例 5

已知 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$(且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线)，当且仅当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

解:

例 5

已知 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$(且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线)，当且仅当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

解:

$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$当且仅当

例 5

已知 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$(且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线)，当且仅当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

解:

$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$当且仅当

$\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-k^2|\boldsymbol{b}|^2=9-16k^2=0,$

例 5

已知 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$(且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线)，当且仅当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

解:

$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$当且仅当

$\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-k^2|\boldsymbol{b}|^2=9-16k^2=0,$

所以，当且仅当$k=\pm\dfrac{3}{4}$时,

例 5

已知 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$(且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线)，当且仅当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

解:

$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$当且仅当

$\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-k^2|\boldsymbol{b}|^2=9-16k^2=0$,

所以，当且仅当$k=\pm\dfrac{3}{4}$时,

向量$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$互相垂直.

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

解:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|}$$

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

解:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|}$$

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$,

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$, 则 $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = k$,

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$, 则 $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = k$,

因此

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k^2 \cos \frac{\pi}{3} = k^2/2$,

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$, 则 $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = k$,

因此

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k^2 \cos\frac{\pi}{3} = k^2/2, |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{3}k.$$

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$, 则 $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = k$,

因此

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k^2 \cos\frac{\pi}{3} = k^2/2, |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{3}k.$$

所以 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} = \dfrac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} =$

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$, 则 $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = k$,

因此

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k^2 \cos\frac{\pi}{3} = k^2/2, |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{3}k.$$

所以 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} = \dfrac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} = \dfrac{k^2 + k^2/2}{\sqrt{3}k^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

例 6

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 的夹角

设 $|\boldsymbol{a}| = k$, 则 $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = k$,

因此

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k^2 \cos \frac{\pi}{3} = k^2/2, |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{3}k.$$

所以 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} = \dfrac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|} = \dfrac{k^2 + k^2/2}{\sqrt{3}k^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\theta = \pi/6$.

小结

- 向量的数量积的物理模型是力的做功.
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的结果是个数量.
- 数量积满足交换律，分配律，与数的结合律，但是不满足结合律
- 利用数量积可以求两向量的夹角, 特别是可以判定垂直.

小结

- 向量的数量积的物理模型是力的做功.
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的结果是个数量.
- 数量积满足交换律，分配律，与数的结合律，但是不满足结合律
- 利用数量积可以求两向量的夹角, 特别是可以判定垂直.

小结

- 向量的数量积的物理模型是力的做功.
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的结果是个数量.
- 数量积满足交换律，分配律，与数的结合律，但是不满足结合律
- 利用数量积可以求两向量的夹角，特别是可以判定垂直.

小结

- 向量的数量积的物理模型是力的做功.
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的结果是个数量.
- 数量积满足交换律，分配律，与数的结合律，但是不满足结合律
- 利用数量积可以求两向量的夹角, 特别是可以判定垂直.

小结

- 向量的数量积的物理模型是力的做功.
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 的结果是个数量.
- 数量积满足交换律，分配律，与数的结合律，但是不满足结合律
- 利用数量积可以求两向量的夹角, 特别是可以判定垂直.