平面向量的数量积导学案第一课时

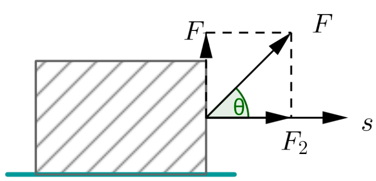
1　学习目标

- 会使用平面向量的数量积的定义及其几何意义
- 能说出平面向量数量积的重要性质及运算律
- 了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题

2　数量积的物理背景

在初中物理上，功等于力与位移的乘积. 这个定义仅适用于力与位移在同一个方向上时. 在高中，功被定义为力和物体在力的方向上的位移的乘积，计算公式为 $W = Fs\cos\theta$.

向上的分力不做功，就像水蒸气一样蒸发了



$$F\cos\theta = F_2$$
$$W = F_2 s = Fs\cos\theta$$

力是一个向量，位移也是一个向量，而力在物体位移的方向上所做和功是一个标量，这可以说是我们定义两个向量的数量积的出发点.

这是不是意味着两个向量的乘积是一个数量？
答：两个向量的数量积（也叫内积）是一个数量.

3　数量积的定义

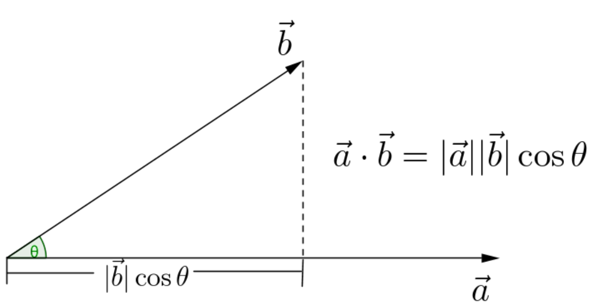
定义 1 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 我们规定，零向量与任一向量的数量积为 0

为什么叫数量积呢？叫点乘积岂不更好！因为两个向量运算的结果是一个数，所以叫数量积.

为什么要加一条规定呢？只是因为零向量与任意向量的夹角任意，没有办法计算 $\cos\theta$.



注意：中间的“·”不可以省略，也不可以写成“×”.

例 1. 已知 $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$ ， $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = 120^\circ$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

练习 1. 已知 $|\boldsymbol{p}|=8$, $|\boldsymbol{q}|=6$, 向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的夹角是 60°, 求 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$.

练习 2. 设 $|\boldsymbol{a}|=12$, $|\boldsymbol{b}|=9$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-54$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

4 数量积的性质

思考

老师，你问的要是非零向量就好了.

1. 向量的数量积什么时候为正，什么时候为负？

反正不是相等关系.

2. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 之间有不等关系吗？

数量积的性质

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量, θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则

- $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ (判断两向量垂直的依据)
- 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ (用于计算向量的模)
- $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ 一个常用不等式

例 2. 判断正误

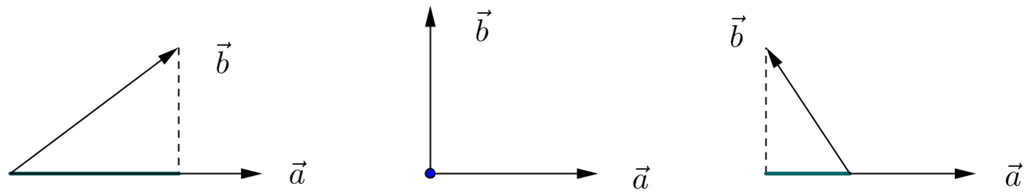
- 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则对任一向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. ( )
- 若 $\boldsymbol{a}\ne\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\ne 0$. ( )
- 若 $\boldsymbol{a}\ne\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. ( )
- 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为 $\boldsymbol{0}$. ( )
- 若 $\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. ( )
- 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$. ( )

符号 $\boldsymbol{a}^2$ 尚未定义，这里假定聪明的你明白是什么意思

5 数量积的几何意义

平面向量数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义

定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 中，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影**，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**.



投影$|\vec{b}|\cos\theta$为正　　投影$|\vec{b}|\cos\theta$为零　　投影$|\vec{b}|\cos\theta$为负

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的积.

6 运算律

数量积运算律

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　交换律
2. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　与数的结合律
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　分配律

学了数量积的坐标表示再来证明分配律，会容易得多.

思考：$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 成立吗？为什么？

老师，放这里是分明地暗示不成立呀！

例 3. 求证:(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

例 4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6\ |\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

7 数量积的几点应用

7.1 判断两个向量是否垂直

边注这么多空白,不拿来演草岂不可惜.

例 5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$ (且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线)，且仅当 k 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

变式训练 1：若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$ ______.

7.2 求向量之间的夹角

例 6. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角

变式训练 2：已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ______.

8 小结

- 向量的数量积的物理模型是力的做功.
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的结果是个数量.
- 数量积满足交换律，分配律，与数的结合律，但是不满足结合律
- 利用数量积可以求两向量的夹角, 特别是可以判定垂直.

变式训练答案：1. $\underline{0}$ 2. $\underline{\pi/3}$