1.8 λ矩阵与Jordan标准形

定义1 以λ的多项式为元素的矩阵称为λ-矩阵，记为$A(\lambda)$,即$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, $a_{ij}(\lambda)$是多项式.

注1： 数字矩阵是特殊的λ矩阵,特征矩阵$\lambda I-A$为λ矩阵.

注2： λ-矩阵和通常数字矩阵一样有各种运算（加，减， 乘等）且有相同的运算规律.可定义正方λ-矩阵的行列式,余子式,代数余子式,进而定义秩.

定义2：$A(\lambda)$中不等于零的子式的最高阶数r为A的秩，记为$rank\,A(\lambda)=\ r$.

定义3： λ-矩阵初等变换指一下三类变换：

1)任两行(列)互换；

2)用数k (不为零)乘某行 (列);

3)用λ 的多项式φ乘某行 (列)并加到另一行 (列)上去.

易见三种初等阵的行列式均为非零常数，故满秩所以它们左(右)乘不改变λ -矩阵的秩.

定义4：若$A(\lambda)$经过有限次初等变换化成$B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$ 与$B(\lambda)$等价，记为$A(\lambda) \cong B(\lambda)$.

注： λ -矩阵等价则秩相同，反之不然，这与数字矩阵有区别．如：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}, B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

问：两个λ -矩阵何时等价？

定理1： 设λ-矩阵$A(\lambda)$的秩是r，则

$$A(\lambda) \cong \begin{bmatrix} D(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中$D(\lambda) = \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_r(\lambda) \end{bmatrix}$, $d_i(\lambda)$是首1多项式,且 $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$, $1 \le i \le r-1$.

注： 称此标准形为$A(\lambda)$的Smith标准形.称$d_i(\lambda)$为不变因子.

例1 求$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$的Smith标准形.

例1 求$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$的Smith标准形.

解:$\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{l1+l3}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r3-r1}$

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{l3+l2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\lambda^2\end{bmatrix}$$

定理2 $A(\lambda) \cong B(\lambda) \Leftrightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$有完全一致的不变因子.

定义5 $\mathbb{C}$上多项式可分解成一次因子的幂的乘积，设$A(\lambda)$的不变因子$d_1(\lambda),\ldots,d_m(\lambda)$的分解为：

$$\begin{cases} d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{1s}} \\ d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{2s}} \\ \qquad\vdots \\ d_m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{m1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{m2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{ms}} \end{cases}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$互异，因为$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$,指数递增且$e_{m1},\cdots,e_{ms}$全不为零.上式中指数大于零的全部因子，统称为$A(\lambda)$的初等因子(组).

例2 求

$A(\lambda) \cong diag\{1,1,(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2,(\lambda-2)^2(\lambda-3)^4(\lambda+2),0,0,0\}.$

分析：$A(\lambda)$是一个7阶矩阵，秩为4.

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1,$

$d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2,$

$d_4(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^4(\lambda+2).$

初等因子组为$(\lambda-2)^2,(\lambda-3)^2,(\lambda-2)^2,$ $(\lambda-3)^4,$ $(\lambda+2).$

注 $A(\lambda) \cong B(\lambda) \Leftrightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$有完全一致的不变因子$\Rightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$有完全一致的初等因子.反之不真，例如

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & (\lambda-2)(\lambda-3) & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)(\lambda-3) \end{bmatrix}$$

它们有相同的初等因子，但是秩不同，故不等价.

定理3 $A(\lambda) \cong B(\lambda) \Leftrightarrow A(\lambda)$与$B(\lambda)$有完全一致的初等因子,且秩相同.

事实上，我们一般先将$A(\lambda)$变换成对角阵，不一定是标准型，再分解因式求出初等因子，进而求得不变因子及标准形. 这依赖于下面的结论：

命题 设$A(\lambda) \cong diag\{f_1(\lambda), \cdots, f_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$,则$f_1(\lambda), \cdots, f_r(\lambda)$的所有一次因子的幂构成$A(\lambda)$的初等因子.

例3 求$A(\lambda) \cong diag\{\lambda(\lambda+1), \lambda^2, (\lambda+1)^2, \lambda(\lambda-1)\}$.

求$A(\lambda)$的初等因子，不变因子以Smith标准形.

解： 初等因子：$\lambda, (\lambda+1), \lambda^2, (\lambda+1)^2, \lambda, (\lambda-1)$

按类降幂排列为

$$\begin{array}{cccc} \lambda^2 & \lambda & \lambda & 1 \\ (\lambda+1)^2 & (\lambda+1) & 1 & 1 \\ (\lambda-1) & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

不变因子为：$d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)$,

$d_3(\lambda) = \lambda(\lambda+1), d_2(\lambda) = \lambda, d_1(\lambda) = 1$. 标准形略.

定理4 设$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则$A$与$B$相似 $\Leftrightarrow \lambda\mathrm{I} - A$ 与 $\lambda\mathrm{I} - B$等价.

证明：只证必要性：假设A与B相似，存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP = B$,则

$$P^{-1}(\lambda\mathrm{I} - A)P = \lambda\mathrm{I} - B.$$

定理4 设$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则$A$与$B$相似$\Leftrightarrow \lambda\mathrm{I}-A$与$\lambda\mathrm{I}-B$等价.

注：因为$r(\lambda\mathrm{I}-A)=n$,所有

A与B相似$\Leftrightarrow \lambda\mathrm{I}-A$ 与 $\lambda\mathrm{I}-B$有完全一致的初等因子.

显然$\lambda\mathrm{I}-A$ 所有初等因子的次数之和等于n.

定义5设$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda\mathrm{I}-A$的初等因子组为$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$.对每一个$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$作$n_i$阶矩阵

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\quad i=1,\cdots,s$$

称J_i为A的Jordan块.

称准对角阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{bmatrix}$$

为A的Jordan标准型.

定理5（Jordan标准型定理）$A \sim J$

推论：A可对角化当且仅当$\lambda I - A$的初等因子为一次的.

例4 求$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$的Jordan标准型.

例4 求$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$的Jordan标准型.

解： $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$

初等因子为$\lambda-1,(\lambda-1)^2$. A的Jordan标准型为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例5 求$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$的Jordan标准型$J$,另外求矩阵$P$使得$P^{-1}AP=J$.

例5 求$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$的Jordan标准型$J$,另外求矩阵$P$使得$P^{-1}AP=J$.

解： $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\rightarrow$

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

初等因子为$\lambda-2,(\lambda-1)^2$.

A的Jordan标准型为$J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

设$P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$,由$P^{-1}AP=J$得

$$A[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即$A\eta_1=2\eta_1, A\eta_2=\eta_2, A\eta_3=\eta_2+\eta_3$.

η_1与η_2分别是特征值2与1对应的特征向量.

即$A\eta_1=2\eta_1, A\eta_2=\eta_2, A\eta_3=\eta_2+\eta_3$.

η_1与η_2分别是特征值2与1对应的特征向量. η_3满足非齐次方程$(A-I)\eta_3=\eta_2$.

由方程$(2I-A)X=0$求得$\eta_1=(0,0,1)^T$,

由方程$(I-A)X=0$求得$\eta_2=(1,2,-1)^T$,

由方程$(I-A)X=-\eta_2$求得$\eta_3=(1,3,-2)^T$,

所以$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$满足要求.(P不唯一)

定理6（Forbenious）设$\lambda I - A$的Smith标准形为$diag\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}$,则$m_A(\lambda) = d_n(\lambda)$.

推论：设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则以下命题等价：

1) A为可对角化；

2) $m_A(\lambda)$无重根；

3) $\lambda I - A$的不变因子无重根；

4) $\lambda I - A$的初等因子均为一次的.