第四章 矩阵分析

4.2 特征值的估计

我们知道, 对角阵和上、下三角阵的特征值为其对角线上的值, 幂等矩阵的特征值为0或1, 正交矩阵和酉矩阵的特征值在单位圆上, 实对称和Hermite矩阵的特征值在实轴上, 反实对称和反Hermite矩阵的特征值在虚轴上.

对于一般矩阵的特征值是怎样分布的呢?

定理1 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则

(1) $|\lambda_l|\leq \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\|A\|_1$（最大列范数）

(2) $|\lambda_l|\leq \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\|A\|_\infty$（最大行范数）

以上两个结论中$l=1,\cdots,n$;

(3) $\sum_{l=1}^{n}|\lambda_l|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\ (Schur)$,

等号成立$\Leftrightarrow A$正规.

证明 由于谱半径≤ A的任何一个矩阵范数，取矩阵范数为$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$即可得(1)和(2).

对于(3)由$Schur$定理知存在酉矩阵U使

$$U^H AU = T(\text{上三角阵})= (t_{ij})_{n\times n},$$

故T的对角元为A的特征值，因此

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |t_{ii}|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} \left|t_{ij}\right|^2 = tr(T^H T).$$

而由$A=UTU^H$得$A^HA=U(T^HT)U^H$,而相似的矩阵有相同的迹，故

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left|t_{ij}\right|^2=tr(T^HT)=tr(A^HA)=\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2.$$

易见等号成立$\Leftrightarrow$ T的非对角线上元素为零, 即T是对角阵.

从而等号成立$\Leftrightarrow$ A酉相似于一个对角阵, 即A正规.

注 上述定理中的(1), (2)通过列范数和行范数将A的特征值限定在复平面的某圆盘内, 比较粗糙. 因此我们引入:

定义 (**盖尔圆盘**) 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$,

令$\delta_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ (即第i行非对角线元素的模的和),

$i=1,\cdots,n.$

定义 (盖尔圆盘) 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$,

令$\delta_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|$ (即第i行非对角线元素的模的和),

$i=1,\cdots,n.$

令

$$G_i=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a_{ii}|\leq\delta_i\},i=1,\cdots,n.$$

即G_i为复平面上以a_{ii}为圆心, δ_i为半径的闭圆盘,

称之为A的一个**盖尔圆**. A有n个盖尔圆.

定理2 (盖尔圆盘定理) 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个盖尔圆为$G_1,\cdots,G_n$, 则

(1) A的任一特征值$\lambda\in\bigcup_{i=1}^{n}G_i$;

(2) 若A的n个盖尔圆中有k个的并形成一个连通的区域, 且与其余$n-k$个圆盘都不相交, 则此连通域内恰有k个A的特征值. 特别地, 孤立的盖尔圆内有且只有一个特征值.

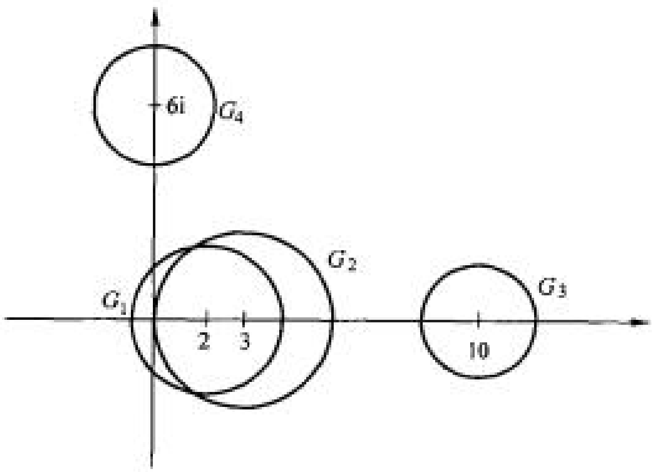
例1 估计矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2i & 0 \\ 0 & -i & 10 & i \\ -2 & 0 & 0 & 6i \end{pmatrix}$的特征值分布范围.

例1 估计矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2i & 0 \\ 0 & -i & 10 & i \\ -2 & 0 & 0 & 6i \end{pmatrix}$的特征值分布范围.

解： A的四个盖尔圆为：

$G_1: |z-2| \leq 3, G_2: |z-3| \leq 3;$

$G_3: |z-10| \leq 2, G_4: |z-6i| \leq 2;$



推论1 对$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个盖尔圆为$G_1, \cdots, G_n$, 若原点$0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, A为非奇异阵.

推论2 对$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 若$A$对角占优,

即$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ (行对角占优), $i = 1, \cdots, n$.

或$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ (列对角占优), $i = 1, \cdots, n$, 则A为非奇异阵.

推论3 对$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个盖尔圆中有$k$个孤立圆, 则$A$至少有$k$个互异特征值, 特别地, A的n个盖尔圆两两不相交, 则A有n个互异的特征值,从而A可对角化.

推论4 对$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的$n$个盖尔圆中有$k$个孤立圆, 则$A$至少有$k$个互异实特征值, 特别地, A的n个盖尔圆两两不相交，则A有n个互异的实特征值.

推论4证明 实矩阵A的盖尔圆的圆心都在实轴上，且若有复特征值则共轭出现, 所以孤立的圆中只能有一个特征值, 故为实值.

例2 证明$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$至少有两个实特征值.

例2 证明$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$至少有两个实特征值.

解 A的四个盖尔圆为：$G_1: |z-9| \le 4$,

$G_2: |z-8| \le 2$, $G_3: |z-4| \le 1$, $G_4: |z-1| \le 1$.

G_4为孤立圆故有一个实特征值,$G_1 \cup G_2 \cup G_3$中有三个特征值, 其中必有一个为实值, 否则$G_1 \cup G_2 \cup G_3$中将有4个特征值, 矛盾.

在使用盖尔圆估计A的特征值时, 我们往往希望有更多的孤立圆, 我们采用以下方法:

(1) 对A^T使用盖尔圆定理(A与A^T有相同的特征值).

设A^T的盖尔圆为$G_1', \cdots, G_n'$, 则G_i与G_i'有相同的圆心.

故$\lambda_i \in (\bigcup_{i=1}^n G_i) \cap (\bigcup_{i=1}^n G_i')$.

(2) 取适当正数$d_1, d_2, \cdots, d_n$, 令$D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$. 则$B = DAD^{-1} = \left(a_{ij}\frac{d_i}{d_j}\right)_{n\times n}$.

B的盖尔圆的圆心仍为$a_{ii}(1 \le i \le n)$. A与B相似故有相同的特征值. 通常选取d_i的办法为:

若选取$d_i < 1$, 其余为1, 则使第i个盖尔圆G_i缩小, 其余放大.

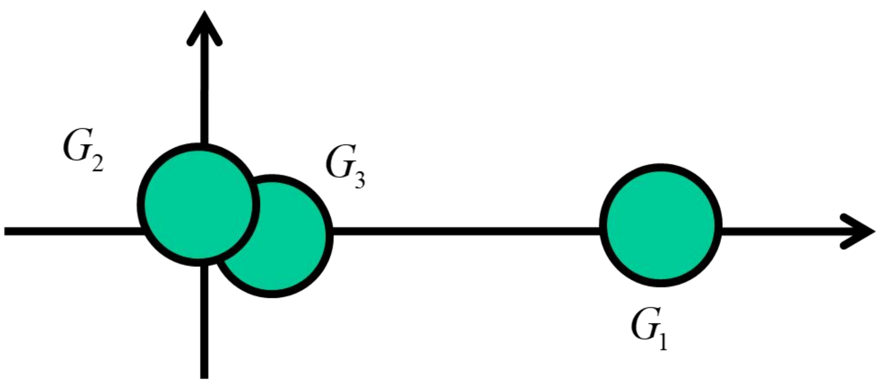
若选取$d_i > 1$, 其余为1, 则使第i个盖尔圆G_i放大, 其余缩小.

例3 估计$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$的特征值分布范围.

例3 估计$A=\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 1 & i & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$的特征值分布范围.

解 A的三个盖尔圆为:

$$G_1: |z-9|\le 2,\ G_2: |z-i|\le 2,\ G_3: |z-3|\le 2$$



我们希望G_2与G_3变小，不相交，故令$D = diag\{2,1,1\}$

则$B = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 0.5 & i & 1 \\ 0.5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. B的三个盖尔圆为：

G_1': $|z-9| \le 4$, G_2': $|z-i| \le 1.5$, G_3': $|z-3| \le 1.5$.