第二章 矩阵的分解

2.0 三角分解

单选题 1分

设置

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$列酉矩阵,则（　）

A $A^H A = I_n$

B $AA^H = I_m$

C **以上都有可能**

提交

航空航天大學 UNIVERSITY

单选题 1分

设置

A为酉矩阵，下列错误的是（ ）

A $A^HA = AA^H = I$

B $A^{-1} = A^H$

C A的列$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$都是单位向量且两两正交

D A的特征值都是实数

提交

定义1(单位三角矩阵)： 如果上（下）三角矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的对角线上全为1，则称$A$是单位上(下)三角矩阵.

注： 两个单位上(下)三角矩阵的乘积仍然是单位上(下)三角矩阵，单位上(下)三角矩阵的逆也是单位上(下)三角矩阵.

定理1： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是非奇异矩阵，则存在唯一的单位下三角矩阵$L$和上三角矩阵$R$使得$A = LR$的充分必要条件是$A$的顺序主子式均非零.

定理1： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是非奇异矩阵，则存在唯一的单位下三角矩阵$L$和上三角矩阵$R$使得$A = LR$的充分必要条件是$A$的顺序主子式均非零.

证明：必要性. 如果存在单位下三角矩阵L和上三角矩阵R使得$A = LR$，则$|A| = \mathrm{r}_{11}\mathrm{r}_{22}\cdots\mathrm{r}_{nn}$，其中$\mathrm{r}_{ii}$是$R$对角线元素,因为$A$非奇异所以$\mathrm{r}_{ii} \neq 0$.

将$A = LR$作矩阵分块

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

其中$\mathrm{A}_{11}, L_{11}, R_{11}$分别是$A, L, R$的$k$阶顺序主子式.

于是$|\mathrm{A}_{11}| = |L_{11}R_{11}| = |R_{11}| = \mathrm{r}_{11}\mathrm{r}_{22}\cdots\mathrm{r}_{kk} \neq 0$.

充分性. 用数学归纳法. A的阶数为1时显然成立.假设分解式当A的阶数为n时成立.当阶数为$n+1$时,

$$A_{n+1}=\begin{bmatrix} A_n & \alpha_n \\ \beta_n & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_n & 0 \\ \beta_n R_n^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_n & L_n^{-1}\alpha_n \\ 0 & a_{n+1,n+1}-\beta_n R_n^{-1} L_n^{-1}\alpha_n \end{bmatrix}$$

其中$\alpha_n=\left[a_{1,n+1},a_{2,n+1},\cdots,a_{n,n+1}\right]^T$, $\beta_n=$

$\left[a_{n+1,1},a_{n+1,2},\cdots,a_{n+1,n}\right]$.

唯一性. 设$A = LR = L_1R_1$，其中L, L_1是n阶单位下三角矩阵， R, R_1是n阶可逆上三角矩阵.则

$$L_1^{-1}L = R_1R^{-1}$$

上式左边是单位下三角矩阵右端是上三角矩阵，因此$L_1^{-1}L = R_1R^{-1} = I$,所以$L = L_1$， $R = R_1$.

定理得证.

注： 定理1中把L改为下三角矩阵， R改为单位上三角矩阵，结论仍然成立.

分解方法：由

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{r}_{11} & \mathrm{r}_{12} & \dots & \mathrm{r}_{1n} \\ 0 & \mathrm{r}_{22} & \dots & \mathrm{r}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{r}_{nn} \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases} \mathrm{r}_{1j} = a_{1j} \quad (j = 1, \cdots, n) \\ l_{j1} = \frac{a_{1j}}{\mathrm{r}_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n) \\ r_{ki} = a_{ki} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt}\mathrm{r}_{tj} \quad (k = 2, \cdots, n, j = k, \cdots, n) \\ l_{ik} = \frac{1}{\mathrm{r}_{kk}}(a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{it}\mathrm{r}_{tk}) \quad (k = 2, \cdots, n, i = k+1, \cdots, n) \end{cases}$$

例1：求$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$的三角分解.

例1：求$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 2 & 1\\2 & 4 & 3\end{bmatrix}$的三角分解.

解：$\mathrm{r}_{11}=a_{11}=2, \mathrm{r}_{12}=a_{12}=-1, \mathrm{r}_{13}=a_{13}=3$

$l_{21}=\frac{a_{21}}{\mathrm{r}_{11}}=\frac{1}{2}, l_{31}=\frac{a_{31}}{\mathrm{r}_{11}}=1,$

$r_{22}=a_{22}-l_{21}\mathrm{r}_{12}=\frac{5}{2}, r_{23}=a_{23}-l_{21}\mathrm{r}_{13}=-\frac{1}{2},$

$l_{32}=\frac{1}{\mathrm{r}_{22}}(a_{32}-l_{31}\mathrm{r}_{12})=2$

$r_{33}=a_{33}-l_{31}\mathrm{r}_{13}-l_{32}\mathrm{r}_{23}=1$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

注： 也可以使用初等行变换求三角分解.

定理2（LDR分解）： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是非奇异矩阵，则存在唯一的单位下三角矩阵$L$,对角矩阵$D = diag\{d_1, \ldots, d_n\}$和单位上三角矩阵$R$使得$A = LDR$的充分必要条件是$A$的顺序主子式均非零.

分析： 因为

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & & \\ & r_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{12}}{r_{11}} & \cdots & \frac{r_{1n}}{r_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{r_{2n}}{r_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

应用： 如果线性方程组$Ax = b$的系数矩阵A可以进行LR分解$A = LR$， 则$Ax = b$与以下方程组同解：

$$Ly = b,\ Rx = y.$$

例2：设$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}-3\\ 4\\ 7\end{bmatrix}$,求$Ax=b$的解.

例2：设$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}-3\\ 4\\ 7\end{bmatrix}$,求$Ax=b$的解.

解:由例1

$$A=LR=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由$Ly=b$递推求得

$$y_1 = b_1 = -3, y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = \frac{11}{2},$$

$$y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 = -1$$

再由$Rx = y$求得

$$x_3 = \frac{y_3}{\mathrm{r}_{33}} = -1, x_2 = \frac{1}{\mathrm{r}_{22}}(y_2 - r_{23}x_3) = 2,$$

$$x_1 = \frac{1}{\mathrm{r}_{11}}(y_1 - r_{12}x_2 - r_{13}x_3) = 1.$$

定理3（Cholesky分解）： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是Hermite，正定矩阵，则存在下三角矩阵 G 使得$A = GG^{\mathrm{H}}$.

定理3（Cholesky分解）： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是Hermite正定矩阵，则存在下三角矩阵 G 使得$A = GG^{\mathrm{H}}$.

证明： 因为正定所以顺序主子式都大于0，由定理2, A有唯一的LDR分解，又因为A是Hermite矩阵，由LDR分解的唯一性，可得$R = L^{\mathrm{H}}$, 即$A = LDL^{\mathrm{H}}$. 设$D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$,令

$$G = Ldiag\{\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n}\},$$

则$A = GG^{\mathrm{H}}$.

习题：求下列矩阵的LR分解和LDR分解

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

答案：$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$