单纯矩阵谱分解的另外一种方法

设矩阵$A \in C^{n\times n}$, 互异的特征值为$\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 令

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_k),$$

如果$m(A) = (A - \lambda_1 I)\cdots(A - \lambda_k I) = 0$, 则$A$是单纯矩阵.由推论知

$$E_i = \frac{(A- \lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{i-1} I)(A-\lambda_{i+1} I)(A-\lambda_k I)}{(\lambda_i - \lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_k)},$$

其中$i = 1,2, \dots, k$.

则有谱分解$A = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_k E_k$.

例: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, 容易看到$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3.$

$$A=\lambda_1 E_1+\lambda_2 E_2+\lambda_3 E_3,$$

$$f(A)=f(\lambda_1)E_1+f(\lambda_2)E_2+f(\lambda_3)E_3,$$

其中$E_1=\frac{(A-2I)(A-3I)}{(1-2)(1-3)}, E_2=\frac{(A-I)(A-3I)}{(2-1)(2-3)},$

$E_3=\frac{(A-I)(A-2I)}{(3-1)(3-2)}=I-E_1-E_2.$

例: $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 通过计算

$$\lambda_1 = 1, (\text{二重}) \lambda_2 =-2$$

因为$r(\lambda_1 I - A) = 1 = n - 2$, 所以代数重数等于几何重数$\Rightarrow A$是单纯矩阵.

所以$A^{100} = 1^{100}E_1 + (-2)^{100}E_2$.

秩1公式: 若$r(A)=1$, 则$A=\alpha\beta=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,\dots,b_n)$

且$\lambda(A)=\left\{(\beta\alpha),\underbrace{0,\dots,0}_{n-1\text{个}}\right\}=\{tr(A),\underbrace{0,\dots,0}_{n-1\text{个}}\}$, 且$\alpha=$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$是一个特征向量, $A\alpha=\lambda_1\alpha,\lambda_1=\beta\alpha.$

证明: $A\alpha=\alpha(\beta\alpha)=\lambda_1\alpha\Rightarrow\alpha$是特征向量, $\lambda_1=\beta\alpha$ 是特征根. 由换位公式

$$|\lambda I_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I_n-BA|(m\geq n),$$

其中$A=A_{m\times n}$, $B=B_{n\times m}$得

$$|\lambda I_n-\alpha\beta|=\lambda^{n-1}|\lambda I_1-\beta\alpha|.$$

例: $A=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}(1,\ldots,1)=:\alpha\beta.$

$\Rightarrow \lambda(A)=\{tr(A),0,\ldots,0\}=\{n,0,\ldots,0\}.$

例: $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & \cdots & 1\\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 3\end{pmatrix}_{n\times n}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & 2 & \cdots & -1\\ & & \ddots & \\ -1 & -1 & \cdots & 2\end{pmatrix}_{n\times n}$.

因为$B=A+2I\Rightarrow\lambda(B)=\{n+2,2,\ldots,2\}$,

因为$C=3I-A\Rightarrow\lambda(C)=\{3-n,3,\ldots,3\}$.

例: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$\lambda(A)$.

解： 令$B = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1, -1, -1, 1) \Rightarrow \lambda(B) = \{tr(B), 0,0,0\} = \{-4,0,0,0\}$. 因为$A = B + I \Rightarrow \lambda(A) = \{-4 + 1,1,1,1\}$.

例: $A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$, 求谱分解.

解: 令

$$B=A-3I=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}(4,4,-1)$$

$$\Rightarrow \lambda(B)=\{tr(B),0,0\}=\{9,0,0\}$$

$$\Rightarrow \lambda(A)=\{9+3,3,3\}.$$

$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 3$(二重). 因为$r(3I - A) = 1 = n - 2$,
所以A是单纯矩阵, 所以$f(A) = f(12)E_1 + f(3)E_2$.

特征值观察法

引理: (1)若$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行和等于常数a, 则$\lambda=a$是一个特征值, 且A必有特征向量$x=(1,\ldots,1)^T$使得$Ax=ax$.

(2)若$A=(a_{ij})_{n\times n}$的列和等于常数a, 则$\lambda=a$是一个特征值.

(3) $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=tr(A)=a_{11}+\ldots+a_{nn}$.

特别地当$n=2$时,

$$\lambda_1+\lambda_2=tr(A)\Rightarrow\lambda_2=tr(A)-\lambda_1.$$

例: $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, 或$B=A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, 求$A$的谱分解.

解: 行和等于4 $\Rightarrow \lambda_1=4, \lambda_2=tr(A)-4=1.$

$\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow A$是单纯矩阵.

所以$A=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2$且$f(A)=f(\lambda_1)E_1+f(\lambda_2)E_2$,

若取$f(x)=e^{tx}=1+tx+\frac{(tx)^2}{2}+\frac{(tx)^3}{3!}+\ldots$

则$f(A)=e^{tA}=1+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\ldots$

在本例中$f(A)=e^{4t}E_1+e^{t}E_2$.