第一章 线性代数基础

1.9 欧式空间和酉空间

定义1设V是$\mathbb{R}$上的n维线性空间，在V上定义了一个二元函数，称为**内积**，记为(x, y)，且$\forall x, y, z$满足

1) 对称性$(x, y) = (y, x)$;

2) 可加性$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3) 齐次性$(kx, y) = k(x, y)$, k为任意实数;

4) 非负性$(x, x) \geq 0$, 当且仅当$x = 0$时有$(x, x) = 0$.

此时称V为n维欧式空间.

注： $(x, y+z) = (y+z, x) = (y, x) + (z, x)$

$$= (x, y) + (x, z)$$

$$(x, ky) = (ky, x) = k(y, x) = k(x, y)$$

即：内积对两个变量都满足**线性性质**.

例1在$\mathbb{R}^n$中,取$x = (x_1, \ldots, x_n)^T, y = (y_1, \ldots, y_n)^T$

令

$$(x, y) = x^T y = y^T x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

易验证满足内积四个条件, 故为欧氏空间,仍记为$\mathbb{R}^n$.

例2： $f,\ g\in C\,[a,b]$, 令

$$(f,\ g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$$

可以验证$C\,[a,b]$为欧氏空间.

例3： $A,\ B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 令

$$(A,\ B)=tr(A^TB)$$

可以验证$\mathbb{R}^{n\times n}$是欧氏空间.

定义2设V是欧氏空间,向量$x \in V$的长度(模)定义为

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

定理1设V是欧氏空间，向量长度$\|x\|$具有以下性质：

1) $\|x\| \geq 0$，等号成立当且仅当$x = 0$; 非负性

2) $\|kx\| = |k|\|x\|, \forall k \in \mathbb{R}$;齐次性

3) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;平行四边形公式

4) $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$;柯西不等式

5) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. 三角不等式

注：1.由柯西公式引入两个非零向量的**夹角**：

$$\langle x,y\rangle=\cos^{-1}\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

2.向量长度等于1的向量称为单位向量，对于非零向量x，$\frac{x}{\|x\|}$是**单位向量**，这个过程称为**单位化**.

定义3 在欧式空间中，如果$(x,y)=0$，则称x与y**正交（垂直）**，记为 $x\perp y$.

注： $x\perp y \Leftrightarrow y\perp x$, **0与任何向量正交**.

$x\perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ 勾股定理，可以推广到一般情形（有限个向量）.

定义4 n维欧式空间中一组非零的向量，如果它们两两正交，就称为一组正交向量组，正交向量组是线性无关的，所以个数不会超过n.

分析：设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是一组正交向量组，如果

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

$\forall\alpha_i(1\le i\le s)$,

$$(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s,\alpha_i)=(0,\alpha_i)=0$$

由正交性得$k_i=0\ (1\le i\le s)$.

定义5 n维欧式空间中，由n个向量组成的正交向量组称为正交基．由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

注： 1）将一组正交基**单位化**即可得到标准正交基.

2）设$e_1, \dots, e_n$为标准正交基，则

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

定理2.对于欧式空间中的任一组基$x_1, \dots, x_n$,均可以找到一组标准正交基.

定理2.对于欧式空间中的任一组基$x_1, \ldots, x_n$,均可以找到一组标准正交基.

证明： 我们采用构造性证明，称为Gram-Schmidt正交化过程. 取$y_1 = x_1$,

令$y_2 = x_2 + ky_1$,其中k待定满足y_2与y_1正交:

$$(y_2, y_1) = (x_2 + ky_1, y_1)$$
$$= (x_2, y_1) + k(y_1, y_1) = 0$$

求得$k = -\dfrac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}$.

再令$y_3 = x_3 + k_1 y_1 + k_2 y_2$,其中$k_1, k_2$待定满足$y_3$与$y_1$和$y_2$分别正交:

$$(y_3, y_1) = (x_3 + k_1 y_1 + k_2 y_2, y_1)$$
$$= (x_3, y_1) + k_1 (y_1, y_1) = 0$$

求得$k_1 = -\frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)}$,同理$k_2 = -\frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)}$.继续下去,令$y_{m+1} = x_{m+1} + l_1 y_1 + \cdots + l_m y_m$,其中系数待定使得$y_{m+1}$与$y_1, \cdots, y_m$分别正交,经过计算得:

$$l_i = -\frac{(x_{m+1}, y_i)}{(y_i, y_i)}, \ i = 1, \cdots, m.$$

我们得到一组正交基：

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i,\ k = 1, \cdots, \mathrm{n}.$$

再将其单位化

$$z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|},\ k = 1, \cdots, \mathrm{n}$$

得到一组标准正交基.定理得证.

注： 由上面两个公式得

$$\boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, z_i)\, z_i + \|y_k\| z_k,\ k = 1, \cdots, \mathrm{n},$$即

$$(x_1,\cdots,x_n)=(z_1,\cdots,z_n)\begin{bmatrix}\|y_1\| & (x_2,z_1) & \cdots & (x_n,z_1)\\ & \|y_2\| & \cdots & (x_n,z_1)\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \|y_n\|\end{bmatrix}$$

这表示过渡矩阵是一个**正线上三角阵**.

例3在$\mathbb{R}^4$中取一组基$x_1=(1,1,0,0)^T, x_2=(1,0,1,0)^T$, $x_3=(-1,0,0,1)^T, x_4=(1,-1,-1,1)^T$,将其正交标准化.

解： 先正交化,$y_1=x_1=(1,1,0,0)^T$,

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,\ y_1)}{(y_1,\ y_1)}y_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)^T,$$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,\ y_1)}{(y_1,\ y_1)}y_1-\frac{(x_3,\ y_2)}{(y_2,\ y_2)}y_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)^T,$$

$$y_4=x_4-\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_4,y_i)}{(y_i,y_i)}=(1,-1,-1,1)^T,$$

再单位化,$z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^T$,

$$z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)^T,$$

$$z_3=\frac{y_3}{\|y_3\|}=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})^T,$$

$$z_4=\frac{y_4}{\|y_4\|}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T.$$

定义6 V是欧式空间，$W \subseteq V$，$x \in V$，若$\forall y \in W$，有$x \perp y$，则称x垂直于W，记为$x \perp W$.

W_1, W_2是V的两个子集，若$\forall x \in W_1, \forall y \in W_2$，有$x \perp y$,则称$W_1$与$W_2$正交，记为$W_1 \perp W_2$.

注： W为V的子空间时，$x \perp W \Leftrightarrow x$与$W$的每个基元都正交，且$W^{\perp} = \{x \in V | x \perp W\}$仍是V的子空间，称为W的正交补.

定理3 设W是V的子空间，则$V = W \oplus W^{\perp}$.

证明：设$\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_r$是$W$的一组标准正交基，将其扩为$V$的一组标准正交基$\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_r, \mathrm{e}_{r+1}, \ldots, \mathrm{e}_n$.

不难验证$W^{\perp} = span\{\mathrm{e}_{r+1}, \ldots, \mathrm{e}_n\}$，即

$$V = W + W^{\perp}.$$

设$x \in W \cap W^{\perp}$,则$(x, x) = 0$,即$x = 0$.定理得证.

注： 定理3中的直和分解称为正交直和分解.正交直和分解是唯一的.

推论 (1) $dimV = dimW + dimW^{\perp}$.

(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

定理4 对于矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,有$\mathrm{R}(A^T)=N(A)^{\perp}$,且$\mathbb{R}^n=\mathrm{R}(A^T)\oplus N(A)$.

定理4 对于矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,有$\mathrm{R}(A^T)=N(A)^{\perp}$,且$\mathbb{R}^n=\mathrm{R}(A^T)\oplus N(A)$.

证明：设α_j是A^T的第j列$(1\le j\le \mathrm{m})$,则

$$\mathrm{R}(A^T)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(A^T)^{\perp}&=\{y\in\mathbb{R}^n|y\perp(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)\}\\&=\{y\in\mathbb{R}^n|y\perp\alpha_j,1\le j\le \mathrm{m}\}\\&=\left\{y\in\mathbb{R}^n\middle|\alpha_j{}^Ty=0,1\le j\le \mathrm{m}\right\}\\&=\{y\in\mathbb{R}^n|Ay=0\}=N(A)\end{aligned}$$

推论 对于矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,有$R(A)=N(A^T)^{\perp}$,且$\mathbb{R}^m=R(A)\oplus N(A^T)$.

定义7(正交变换) 欧式空间中的线性变换T称为正交变换，如果它保持向量的内积不变，即对任意的V中的x与y，

$$T(x,y)=(Tx,\ Ty)\ =(x,\ \ y).$$

定理5 V是欧式空间, $T \in L(V,V)$,以下命题等价:

1) T是正交变换.

2) T保持长度不变，即 $||Tx||=||x||$.

3)如果$\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$为标准正交基，则$T\mathrm{e}_1, \dots, T\mathrm{e}_n$为标准正交基.

4) T在V的任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

注：如果A^TA=$AA^T = I$，称A为正交矩阵，正交矩阵满足性质：

(a) A为非奇异阵，$|A| =\pm 1$.

(b) $A^{-1} = A^T$,都为正交阵.

(c)正交阵的乘积仍为正交阵.

(d)A的特征值的模为1.

定义8设V是$\mathbb{C}$上的n维线性空间，在V上定义了一个二元函数（值为复数），称为内积，记为(x,y)，且$\forall x,y,z$满足

1）共轭对称性$(x,y)=\overline{(y,x)}$；

2）可加性$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

3）齐次性$(kx,y)=k(x,y)$，k为任意复数；

4）非负性$(x,x)\geq 0$，当且仅当$x=0$时有$(x,x)=0$.

此时称V为n维酉空间.

例4在$\mathbb{C}^n$中,取$x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T$

定义**共轭转置**:$y^H = (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n})$.

令

$$(x, y) = y^H x = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

易验证满足内积四个条件，故为酉空间,仍记为$\mathbb{C}^n$.

酉空间的性质：

(1) $(x, y+z) = \overline{(y+z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)}$

$$= (x, y) + (x, z)$$

$$(x, ky) = \overline{(ky, x)} = \bar{k}\,\overline{(y, x)} = \bar{k}\,(x, y).$$

(2) $\sqrt{(x, x)}$称为向量x的长度（模），柯西不等式仍然成立，$|(x, y)| \le \|x\|\|y\|$； 当$(x, y) = 0$时，则称x与y正交（垂直），记为 $x \perp y$.

(3)在酉空间中同样可定义正交基和标准正交基，关于正交基我们有：任一组线性无关的向量，我们可以用施密特过程正交化，并扩为一组标准正交基.

(4) $T(x,y)=(Tx,\ Ty)\ =(x,\ \ y)$保持向量的内积不变称为酉变换，酉变换在标准正交基下的矩阵为酉矩阵.

(5)定义$A^H=\overline{A}^T$（共轭转秩），如果$A^HA=AA^H=I$，则称A为酉矩阵，$|A|=\pm 1$，两组标基的过渡矩阵为酉矩阵，共轭转秩有以下性质：

$(A+B)^H=A^H+B^H$，　　$(kA)^H=\overline{k}A^H$

$(AB)^H=B^HA^H$，　　$(A^H)^H=A$

$(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$

(6)酉空间也有正交直和分解.

(7)如果$A^H=A$,则称A为Hermite矩阵,如果$A^H=-A$,则称A为反Hermite矩阵.

酉矩阵的结构性质：

如果$A^H A = AA^H = I$，则称A为酉矩阵.

设$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,则

$$A^H A = \begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_i^H \alpha_j)_{n \times n} = I_n$$

所以$\alpha_i^H \alpha_j = \delta_{ij}$,即$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$都是单位向量，且两两正交.

定理6设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$,则以下命题等价：

1) A为**酉矩阵**,$A^HA=AA^H=I$.

2) $A^{-1}=A^H$.

3) A的列$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$都是**单位向量且两两正交**.

4)$A(x,y)=(x,y),\forall x$，$y\in\mathbb{C}^n$.

5) $\|Ax\|^2=\|x\|^2$或$(Ax,Ax)=(x,x)$.

证明： 1)⇒ 4) $A(x,y)=(Ax,Ay)=y^HA^HAx=y^Hx=(x,y)$.

4)⇒ 1)在上述等式中选取x,y为标基,即得$A^HA=I$.

4)⇒ 5)显然.

5)⇒ 4) 因为$(A(x+y), A(x+y)) = (Ax+Ay, Ax+Ay) = (x,x)+(Ax,Ay)+(Ay,Ax)+(y,y)$.

$(x+y, x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$.

所以

$$(Ax,Ay)+(Ay,Ax)=(x,y)+(y,x) \qquad (1)$$

同理,由$A(x+iy, x+iy) = (x+iy, x+iy)$可得

$$(Ax,Ay)-(Ay,Ax)=(x,y)-(y,x) \qquad (2)$$

联立(1)与(2)式即得$(Ax,Ay)=(x,y)$.

注 1 实空间的酉矩阵是正交矩阵.

2 若$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$是n阶酉矩阵,$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$任一排列，则$B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$也是酉矩阵，且$C=(k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\ldots,k_n\alpha_n)$也是酉矩阵，其中$|k_1|=\cdots=|k_n|=1$.

例5在$\mathbb{C}^2$中,验证$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$是酉矩阵.

证明设$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$,则$\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=1$.

$$且(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2^H\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}=0.$$

习题5验证$A=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$是酉矩阵.

例6设$x \in \mathbb{C}^n$是非零向量，证明$A = I_n - \frac{2xx^H}{\|x\|^2}$是酉矩阵.

证明$A^H A = (I_n - \frac{2xx^H}{\|x\|^2})^H \left(I_n - \frac{2xx^H}{\|x\|^2}\right) = I_n - \frac{4xx^H}{\|x\|^2} + \frac{4xx^H xx^H}{\|x\|^4} = I_n.$

定义9(列酉矩阵)设若$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$是一个$m\times n$矩阵（$m\geq n$），且$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$相互正交，长度是1，则称$A$是列酉矩阵.

例如$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$是列酉矩阵.

注：$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$列酉矩阵,则$A^HA=I_n$,但是$AA^H\neq I_m$.