3.2 广义逆矩阵A^+

例1:令 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 可直接验证

$$A^+=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & 0\end{pmatrix}, B^+=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

任给矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,伪逆是否存在呢?若存在是否唯一?

定理1:(*Penrose*)任给矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^+存在且唯一.

定理1:(*Penrose*)任给矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^+存在且唯一.

证明:由A的奇异值分解($r\,(A)=r$) 有

$$A = V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H,$$

其中S_r=$diag\{\sigma_1,\cdots,\sigma_i\}$, $\sigma_i > 0$,U和V是酉阵.

令$G = U\begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$,可以验证G满足方程1)~4),如第1)3)方程:

定理1:(*Penrose*)任给矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^+存在且唯一.

证明:AGA

$$= V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H U \begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H V \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H$$

$$= V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H = A$$

$$(AG)^H = (V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H U \begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H)^H$$

$$= (V\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H)^H = AG$$

定理1:(*Penrose*)任给矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^+存在且唯一.

证明:下证唯一性:现设X,Y均满足方程1)~4),则

$$X = XAX = X(AX)^H = XX^HA^H = XX^H(AYA)^H = XX^HA^H(AY)^H = X(AX)^HAY = XAX(AYA)Y = X(AYA)Y = XA(YA)^HY = XAA^HY^HY = (XA)^HA^HY^HY = (AXA)^HY^HY = A^HY^HY = (YA)^HY = YAY = Y.$$

定理表明,任一类广义逆都存在,因为A^+是任一广义逆.

定理2:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则

1)$(A^+)^+ = A$;**2)**$(A^H)^+ = (A^+)^H$;**3)** $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4) $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$, $(AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$;

5)$(AB)^+ \neq B^+A^+$;**6)**一般地, $A^+A \neq AA^+ \neq I$;

7)$r(A^+) = r(A)$;

8) $A^+ = (A^HA)^+A^H = A^H(AA^H)^+$;

9)$R(A^+) = R(A^H)$,$N(A^+) = N(A^H)$.

定理2:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则

1)$(A^+)^+ = A$;**2)**$(A^H)^+ = (A^+)^H$;**3)** $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

4) $(A^H A)^+ = A^+(A^H)^+$, $(AA^H)^+ = (A^H)^+A^+$.

证明:1)由存在唯一性和方程1~4中A与A的对等地位可得.

2)~3)由方程1~4共轭转置或转置可得.

4)可直接验证 ,如方程1:

$A^H A(A^+(A^H)^+)A^H A = A^H(AA^+)^H(AA^+)^H A = (AA^+A)^H(AA^+A) = A^H A$.同理可证其他方程.

定理2:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则

5)$(AB)^+ \neq B^+A^+$;**6)**一般地, $A^+A \neq AA^+ \neq I$.

证明: 5)例如取$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,易得

$A^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^+ = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

而$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $B^+A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,所以

$(AB)^+ \neq B^+A^+$.

6)取$A = 0_{3\times 2}$,易见$A^+ = 0_{2\times 3}$,而$A^+A = 0_{2\times 2}$, $AA^+ = 0_{3\times 3}$.

定理2:设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,则

7)$r(A^+)=r(A)$;**8)** $A^+=(A^HA)^+A^H=A^H(AA^H)^+$.

证明: 7)由方程1,2易得，因为矩阵乘积的秩不超过各因子的秩.

8)由4)得

$$(A^HA)^+A^H=A^+(A^H)^+A^H=A^+(AA^+)^H=A^+AA^+=A^+,$$

$$A^H(AA^H)^+=A^H(A^H)^+A^+=(A^+A)^HA^+=A^+AA^+=A^+.$$

定理2:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则

$$9)R(A^+) = R(A^H), N(A^+) = N(A^H).$$

证明: 9)由7) 得$r(A^+) = r(A) = r(A^H)$,从而 $dimR(A^+) = dimR(A^H)$,而$R(A^+) = R(A^+AA^+) = R(A^H(A^+)^H A^+) \subseteq R(A^H)$,所以$R(A^+) = R(A^H)$.

定理2:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则

$$9) R(A^+) = R(A^H), N(A^+) = N(A^H).$$

证明: 由亏加秩定理知:

$dimN(A^+) + dimR(A^+) = dimN(A^H) + dimR(A^H)$,

所以$dimN(A^+) = dimN(A^H)$,而$N(A^+) =$

$N(A^+AA^+) = N(A^+(A^+)^H A^H) \supseteq N(A^H)$,

所以$N(A^+) = N(A^H)$.

注:1. $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$,其中$\lambda^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$,

2.$D = diag\{d_1, \cdots, d_n\}$,则$D^+ = diag\{d_1^+, \cdots, d_n^+\}$,且$D^+D = DD^+$.

3.分块公式:$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}_{m\times n}$,则

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_1^+ & 0 \\ 0 & A_2^+ \end{pmatrix}_{n\times m}$$

注:4.列酉矩阵A满足$A^HA=I$,所以$A^+=A^H$.

例如$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$,则$A^+=A^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.