第一章 线性代数基础

1.4 线性变换及矩阵

定义1（线性变换）设V，W是数域F上的两个线性空间，T是V到W的一个映射. 如果$\forall x, y \in W$, $k, l \in F$,有

$$T(kx + ly) = kTx + lTy$$

称T是V到W的一个线性映射.如果$W = V$,则称T是V上的一个线性变换.

例1

恒等变换 $T_e: V \to V$，$Tx = x$，$\forall x \in V$.

零变换 $T_0: V \to V$，$Tx = 0$，$\forall x \in V$.

例2（旋转变换）$\mathbb{R}^2$中的向量绕原点按逆时针旋转θ角的变换T定义如下

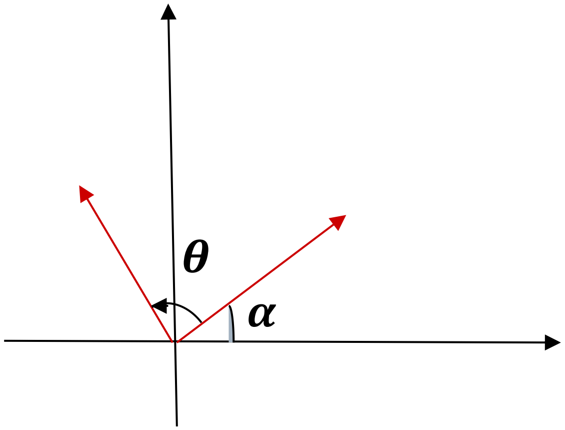
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

分析： $x_1 = rcos(\alpha+\theta) = rcos\alpha cos\theta - rsin\alpha sin\theta = xcos\theta - ysin\theta$

同理$y_1 = rsin(\alpha+\theta)$

$= rsin\alpha cos\theta + rcos\alpha sin\theta$

$= ycos\theta + xsin\theta$



$\forall x=(x_1,y_1)^T, y=(x_2,y_2)^T, k,l\in F$,有

$$T(kx+ly)=\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx_1+lx_2 \\ ky_1+ly_2 \end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+l\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$=kTx+lTy.$$

例3（微分积分算子）$C[a,b]$与$C^1[a,b]$分别表示$[a,b]$上连续函数集合与导函数连续的函数集合，可以验证它们都是实数域上的线性空间.令

$$D: C^1[a,b] \to C[a,b]$$

$$D\big(f(x)\big) = f'(x), \forall f(x) \in C^1[a,b]$$

$$S: C[a,b] \to C[a,b]$$

$$S\big(f(x)\big) = \int_a^t f(t)dt, \forall f(x) \in C[a,b]$$

线性映射的性质:

(1)$T(0)=0$.

(2) $T\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{s} k_i T(\alpha_i)$

(3)$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性相关,则$T(\alpha_i)\dots,T(\alpha_s)$也线性相关.

注: $\alpha_1,\dots,\alpha_s$线性无关，则$T(\alpha_i)\dots,T(\alpha_s)$不一定线性无关.

线性映射的矩阵表示

设V的维数是n，V的一组基为$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$;

设W的维数是m，W的一组基为$\beta_1, \ldots, \beta_m$;

T是V到W的一个线性映射，则

$$T\alpha_j = a_{1j}\beta_1 + \ldots + a_{mj}\beta_m, 1 \le j \le n,$$

采用矩阵记法

$$T(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) = (T\alpha_1 \ldots, T\alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_m)A,$$

其中$A = (a_{ij})_{m\times n}$.称矩阵A为线性映射T**在这两组基**下的矩阵表示.

例4:设$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$,映射$T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$定义如下:

$$T(\alpha)=B\alpha,\alpha\in\mathbb{R}^2$$

求T在基$\alpha_1=(1,0)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$与基$\beta_1=(1,0,0)^T$，$\beta_2=(0,1,0)^T$, $\beta_3=(0,\ 0,1)^T$下的矩阵表示A.

例4:设$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$,映射$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$定义如下:

$$T(\alpha)=B\alpha,\alpha\in\mathbb{R}^2$$

求T在基$\alpha_1=(1,0)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$与基$\beta_1=(1,0,0)^T$，$\beta_2=(0,1,0)^T$, $\beta_3=(0,\ 0,1)^T$下的矩阵表示A.

解： $T(\alpha_1)=(1,1,0)^T=\beta_1+\beta_2$,

$T(\alpha_2)=(2,1,1)^T=2\beta_1+\beta_2+\beta_3$,所以$A=B$.

例5:线性映射$D: P_n(x) \to P_{n-1}(x)$.由下式子确定

$$D\big(f(x)\big) = f'(x)$$

求D在基$1, x, \dots, x^n$与基$1, x, \dots, x^{n-1}$下的矩阵表示.

例5:线性映射$D: P_n(x) \to P_{n-1}(x)$.由下式子确定

$$D\big(f(x)\big) = f'(x)$$

求D在基$1, x, \dots, x^n$与基$1, x, \dots, x^{n-1}$下的矩阵表示.

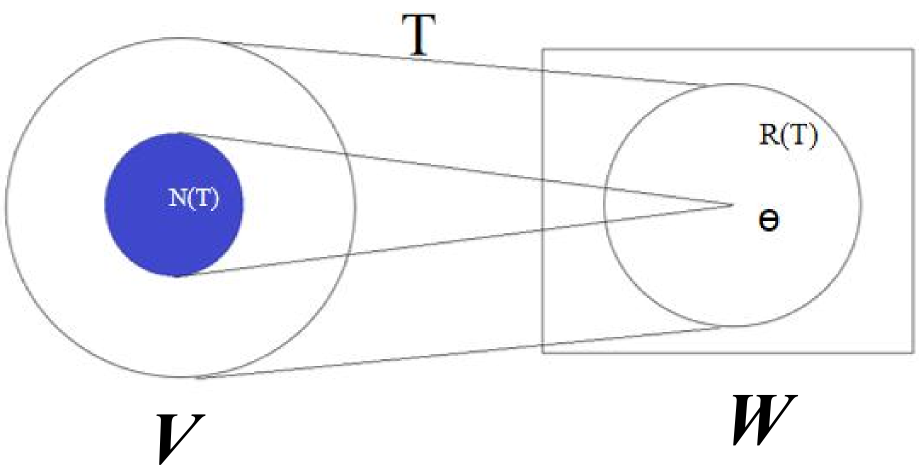
解：$D(1) = 0$，$D(x) = 1$，$D(x^2) = 2x$，…，$D(x^n) = nx^{n-1}$. 所以

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$$

定义2(核空间，像空间) 设V,W为F上线性空间，令$L(V,W)$表示所有V到W的线性映射的集合，设$T\in L(V,W)$，令

$$N(T)=\{x\in V|Tx=0\},$$

$$R(T)=Im(T)=\{y\in W|y=Tx,\forall x\in V\}.$$



定义2(核空间，像空间) 设V,W为F上线性空间，令$L(V,W)$表示所有V到W的线性映射的集合，设$T\in L(V,W)$，令

$$N(T)=\{x\in V|Tx=0\},$$

$$R(T)=Im(T)=\{y\in W|y=Tx,\forall x\in V\}.$$

易验证$N(T)$为V的子空间，$R(T)$为W的子空间，称$N(T)$及$R(T)$为T的核空间和像空间.并称$\dim N(T)$为T的零度（或亏），$\dim R(T)$为T的秩，一般有以下定理：

定理1（亏加秩定理） 设$T \in L(V,W)$,V为有限维，则$N(T)$及$R(T)$均为有限维，且

$$dimN(T) + dimR(T) = dimV$$

即T的亏加秩等于其定义域的维数.

例6: 映射$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$基$\alpha_1=(-1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$, $\alpha_3=(0,\ 1,1)^T$与基$\beta_1=(1,1)^T$，$\beta_2=(0,2)^T$ 下的矩阵表示

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

求(1) T的核子空间$N(T)$的基与维数;

(2) T的值域$R(T)$的基与维数.

解： $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(T\alpha_1,T\alpha_2,T\alpha_3)=(\beta_1,\ \beta_2)A$

(1)求$N(T)$就是求$x\in\mathbb{R}^3$满足$Tx=0$,

$$设x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix},$$

$$Tx=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=(\beta_1,\ \beta_2)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=0.$$

只需要求方程组$A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=0$的解空间,求得它的基础解系为$k_1=3,k_2=-2,k_3=1$因此$N(T)$的基是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=(-5，4，4)^T$, $\dim N(T)$ =1.

注：求$N(T)$,只需要先求$N(A)$的基础解系，再添加基底即可.

解： $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(T\alpha_1,T\alpha_2,T\alpha_3)=(\beta_1,\ \beta_2)A$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(2)求$R(T)$

$$R(T)=span\{T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3)\}$$
$$=span\{\beta_1,\beta_1+\beta_2,-\beta_1+2\beta_2\}$$
$$=span\{\beta_1,\beta_1+\beta_2\}=\ span\{\beta_1,\beta_2\}=\mathbb{R}^2$$

例7:在矩阵空间$\mathbb{R}^{2\times 2}$中取定矩阵基$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$,线性变换$T$定义如下:

$$T(X)=BX-XB,\forall X\in\mathbb{R}^{2\times 2}.$$

求(1) T的核子空间$N(T)$的基与维数;

(2) T的值域$R(T)$的基与维数.

答案: (1) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\dim N(T)$ =2

(2) $\begin{bmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, $\dim R(T)$ =2

线性变换的矩阵表示

设V的维数是n，V的一组基为$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$;

T是V上的一个线性变换，则

$$T\alpha_j = a_{1j}\alpha_1 + \ldots + a_{nj}\alpha_n, 1 \leq j \leq n,$$

采用矩阵记法

$$T(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) = (T\alpha_1 \ldots, T\alpha_n) = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n)A,$$

其中$A = (a_{ij})_{n\times n} \in F^{n\times n}$.称矩阵$A$为线性变换$T$**在这组基**下的矩阵表示.

由空间结构和T的线性性质，T由$T\alpha_1 \ldots, T\alpha_n$完全确定，故由$T$唯一确定一个矩阵$A$.

思考：如果取定V的一组基，对于任意的V上的线性变换T，则唯一确定一个矩阵A，反之如何？

定理2:设$dimV = n$，$\alpha_1, \dots, \alpha_n$为$V$的一组基，任取$A = (a_{ij})_{n\times n} \in F^{n\times n}$,则有且仅有一个线性变换$T \in L(V,V)$，使其矩阵恰为$A$.

推论:$L(V,V)$与$F^{n\times n}$之间存在一一对应关系.

例如：零变换对应零矩阵，恒等变换对应单位矩阵.

定理3: $L(V) = L(V,V)$是线性空间，引入$L(V)$中的运算：$\forall T_1, T_2 \in L(V), \forall x \in V, \forall k \in F$,有

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

$$(kT_1)x = k(T_1x)$$

易验证$L(V,V)$是F上的一个线性空间，即线性变换空间.

定义3: 设$T_1, T_2 \in L(V)$,定义T_1与T_2的乘积T_1T_2为

$$(T_1T_2)x = T_2(T_1x)$$

可以验证$T_1T_2 \in L(V)$，并且线性变换的乘积满足结合律不满足交换律(与矩阵的乘积类似).

逆变换：设$T_1 \in L(V)$,如果存在$T_2 \in L(V)$,使得

$$(T_1T_2)x = (T_2T_1x) = x, \quad \forall x \in V$$

则称T_2是T_1的逆变换,记作$T_2 = {T_1}^{-1}$,且有$T_1T_2 = T_2T_1 = T_e$.

定理4:设$dimV = n$，$\alpha_1, \dots, \alpha_n$为$V$的一组基，在这组基下线性变换$T_1$的矩阵为$A$, T_2的矩阵为B,则

(1)线性变换$T_1 + T_2$的矩阵为$A + B$;

(2)线性变换的数乘kT_1的矩阵为kA;

(3)线性变换的乘积T_1T_2的矩阵为AB;

(4)线性变换T_1的逆变换(若存在)的矩阵为A^{-1};

定理4:设$dimV = n$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$为$V$的一组基，在这组基下线性变换$T_1$的矩阵为$A$, T_2的矩阵为B,则

(1)线性变换$T_1 + T_2$的矩阵为$A + B$;

(2)线性变换的数乘kT_1的矩阵为kA;

(3)线性变换的乘积T_1T_2的矩阵为AB;

(4)线性变换T_1的逆变换(若存在)的矩阵为A^{-1};

证明： (4)设 $T_1{}^{-1}(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n)X$,则

$$(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) = T_1 T_1{}^{-1}(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)$$

$$= T_1(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)X = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n)AX.$$

定义4(同构)：设V,W是F上的线性空间，若存在$f:V\to W$，满足：

1）f是一一到上（双射）的映射，

2）f保持线性运算，即$\forall k,l\in F,x,y\in V$,有

$$f(kx+ly)=kf(x)+lf(y),$$

则称V与W**同构**，记为$V\cong W$.

定义4(同构)：设V, W是F上的线性空间，若存在$f: V \to W$，满足：

1）f是一一到上（双射）的映射，

2）f保持线性运算，即$\forall k, l \in F, x, y \in V$,有

$$f(kx + ly) = kf(x) + lf(y),$$

则称V与W**同构**，记为$V \cong W$.

同构的线性空间具有完全一致的空间结构和各种运算规律，故可视为**一个空间**.

定理5:F上两个有限维线性空间同构⇔维数相同.

推论:(1)任一实（复）n维线性空间均与$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$）同构.

(2) $\mathrm{L}(V,W) \cong F^{m\times n}, dim\mathrm{L}(V,W) = mn$,

特别的$\mathrm{L}(V\ ) \cong F^{n\times n}, dim\mathrm{L}(V) = n^2$.

推论:(3)设$dimV = n, T \in L(V), T$的矩阵为A，则

a)$dimN（T） = dimN（A）$；

b)$dimR(T) = dimR(A) = r(A)$;

c)(亏加秩)$dimN(A) + dimR(A) = n$.

定理6:设$T \in L(V)$,则T在不同基下的矩阵相似.

证明:设$dimV = n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$与$\beta_1, \ldots, \beta_n$为$V$的两组基,且$(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)C$, C可逆是过渡矩阵.

设 $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)A$

$$T(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)CB$$

另一方面$T(\beta_1, \ldots, \beta_n) = T\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)C = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)AC$.

所以$CB = AC \Rightarrow B = C^{-1}AC$.

设$\xi=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,且$T\xi=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

$$T\xi=T(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

坐标变换公式:设$dimV = n, T \in L(V)$,T在基$\alpha_1, \dots, \alpha_n$下的矩阵为$A$.

设$\xi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, 且$T\xi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$T\xi = T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

例8: 在$\mathbb{R}^3$中，线性映射T把基$\alpha_1=(1,1,-1)^T$，$\alpha_2=(0,2,-1)^T$，$\alpha_3=(1,\ 0,-1)^T$变为$T\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$T\alpha_2=(0,1,-1)^T$，$T\alpha_3=(0,\ 3,-2)^T$，求(1) T在基$\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$下的矩阵表示$A$；

(2)向量$\xi=(1,2,3)^T$及$T\xi$在$\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$下的坐标；

(3)向量ξ及$T\xi$在基$T\alpha_1,T\alpha_2,\ T\alpha_3$下的坐标.

例8: 在$\mathbb{R}^3$中, 线性映射T把基$\alpha_1=(1,1,-1)^T$, $\alpha_2=(0,2,-1)^T$, $\alpha_3=(1,\ 0,-1)^T$变为$T\alpha_1=(1,-1,0)^T$, $T\alpha_2=(0,1,-1)^T$, $T\alpha_3=(0,\ 3,-2)^T$, 求(1) T在基$\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$下的矩阵表示$A$;

解: (1)通过计算$T\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2$

$$T\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

$$T\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$$

T在基$\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$下的矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(2)设$\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$

带入$\xi = (1,2,3)^T$以及基坐标求得$k_1 = 10$, $k_2 = -4$, $k_3 = -9$,

由坐标变换公式$T\xi$在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -32 \\ -13 \end{bmatrix}$$

(3)已知$(T\alpha_1, T\alpha_2, T\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, A实际上是这两组基的过渡矩阵,

向量ξ在基$T\alpha_1, T\alpha_2, T\alpha_3$下的坐标为

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$T\xi$在基$T\alpha_1, T\alpha_2, T\alpha_3$下的坐标为

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 23 \\ -32 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ -32 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}$$