第五章 矩阵的直积

5.2 拉直与矩阵方程

定义1（行拉直） 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 并记$\boldsymbol{a}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]^T$, $i=1,2,\cdots,m$. 令

$$\overrightarrow{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$$

则称$\overrightarrow{\mathrm{A}}$为矩阵$A$的**行拉直**（或**按行展成列向量**）.

例1设$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, 则$\vec{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$

性质1(线性性质)设$A, \mathrm{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, k为常数，则

$$\overrightarrow{\mathrm{A}+B} = \vec{\mathrm{A}} + \vec{B}, \quad \overrightarrow{\mathrm{kA}} = \mathrm{k}\vec{\mathrm{A}}.$$

性质2 设$A(\mathrm{t}) = \left(a_{ij}(\mathrm{t})\right) \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则$\overrightarrow{\dfrac{dA(\mathrm{t})}{dt}} = \dfrac{d\overrightarrow{A(\mathrm{t})}}{dt}$

定理1(拉直公式) 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$和$C \in \mathbb{C}^{p\times q}$, 则

$$\overrightarrow{ABC} = (A \otimes C^T)\vec{B}$$

证明： $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $C = (c_{ij})_{p\times q}$,则

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} (\text{按行分块}), \vec{B} = \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_n^T \end{bmatrix}$$

$$ABC=\begin{bmatrix}(a_{11}B_1+\cdots+a_{1\mathrm{n}}B_n)C\\ \vdots\\ (a_{\mathrm{m}1}B_1+\cdots+a_{\mathrm{mn}}B_n)C\end{bmatrix}$$

从而

$$\overrightarrow{ABC}=\begin{bmatrix}C^T(a_{11}\,B_1^T+\cdots+a_{1\mathrm{n}}\,B_n^T)\\ \vdots\\ C^T(a_{\mathrm{m}1}\,B_1^T+\cdots+a_{\mathrm{mn}}\,B_n^T)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}C^T\cdots a_{1\mathrm{n}}C^T\\ \vdots\\ a_{\mathrm{m}1}C^T\cdots a_{\mathrm{mn}}C^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1^T\\ \vdots\\ B_n^T\end{bmatrix}=(A\otimes C^T)\overrightarrow{B}$$

定理1(拉直公式) 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$和$C \in \mathbb{C}^{p\times q}$,则

$$\overrightarrow{ABC} = (A\otimes C^T)\vec{B}$$

推论1： 设$A = (a_{ij})_{m\times m}, X = (x_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$,则

(1)$\overrightarrow{AX} = (A\otimes I_n)\vec{X}$, $\overrightarrow{XB} = (I_{\mathrm{m}}\otimes B^T)\vec{X}$

(2)$\overrightarrow{AX + XB} = (A\otimes I_n + I_{\mathrm{m}}\otimes B^T)\vec{X}$

证明： $AX = AXI_n$,$XB = I_{\mathrm{m}}XB$,由拉直公式可得.

定理2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$和$D \in \mathbb{C}^{p\times q}$,矩阵方程$AXB = D$相容的充分必要条件为

$$\operatorname{rank}\left(A\otimes B^T, \overrightarrow{D}\right) = \operatorname{rank}(A\otimes B^T)$$

分析： 对$AXB = D$两边拉直可得

$$(A\otimes B^T)\overrightarrow{X} = \overrightarrow{D}.$$

注:(1) 矩阵方程$AXB=0$基础解系含有

$$\mathrm{np}-\mathrm{rank}(A\otimes B^T)=\mathrm{np}-\mathrm{rank}(A)\mathrm{rank}(B)$$

个基解.

(2) 一般线性方程

$$A_1XB_1+\cdots+A_sXB_s=D$$

拉直后得

$$\overrightarrow{A_1XB_1+\cdots+A_sXB_s}=\vec{D}$$

即$\left(A_1\otimes {B_1}^T+\cdots+A_s\otimes {B_s}^T\right)\vec{X}=\vec{D}$.所以有如下引理:

引理1 $A_1XB_1+\cdots+A_sXB_s=D$有解$\Leftrightarrow$

$$\left(A_1\otimes {B_1}^T+\cdots+A_s\otimes {B_s}^T\right)\overrightarrow{X}=\overrightarrow{D}\text{有解}$$

Lyapunov矩阵方程： 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$和$D \in \mathbb{C}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$,矩阵方程

$$AX + XB = D$$

称为Lyapunov矩阵方程.对该方程拉直得

$$\left(A\otimes I_{\mathrm{n}} + I_{\mathrm{m}}\otimes B^{T}\right)\vec{X} = \vec{D}.$$

方程有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\left(A\otimes I_{\mathrm{n}} + I_{\mathrm{m}}\otimes B^{T}, \vec{D}\right)$$
$$= \operatorname{rank}\left(A\otimes I_{\mathrm{n}} + I_{\mathrm{m}}\otimes B^{T}\right)$$

定理3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$和$D \in \mathbb{C}^{\mathrm{m}\times \mathrm{n}}$,则

(1)$AX + XB = D$有唯一解$\Leftrightarrow A\otimes I_{\mathrm{n}} + I_{\mathrm{m}}\otimes B^{T}$可逆

$\Leftrightarrow A$与$-B$没有公共特征值.

(2)$AX - XB = D$有唯一解$\Leftrightarrow A\otimes I_{\mathrm{n}} - I_{\mathrm{m}}\otimes B^{T}$可逆

$\Leftrightarrow A$与B没有公共特征值.

例3 设$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,求解矩阵方程$AX+XB=D$.

解： A的特征值是-2,3,B的特征值是1,1,所以方程有唯一解.将方程拉直得$(A\otimes I_{\mathrm{n}}+I_{\mathrm{m}}\otimes B^{T})\vec{X}=\vec{D}$，即

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\vec{X}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

解之得$\vec{X}=(0,-1,\frac{1}{4},\frac{1}{16})^{T}$,所以$X=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1/4 & 1/16\end{bmatrix}$.

例4 设$A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$和$D \in \mathbb{C}^{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$,若$A$与$B$没有相同特征值,证明$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$相似.

例4 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$和$D \in \mathbb{C}^{\mathrm{m}\times \mathrm{n}}$,若$A$与$B$没有相同特征值,证明$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$相似.

证明： 令$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$($X$待定),则$\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$,

且$P\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} A & D + XB - AX \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

由定理3，$D + XB - AX$=0有唯一解X，所以X确定矩阵P，使得$P\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.