第三章 矩阵的广义逆

3.4 广义逆与线性方程组

考察非齐次线性方程组

$$Ax = b \qquad (1)$$

其中$A \in C^{m\times n}$, $b \in C^m$给定, $x \in C^n$待定.

若存在$x \in C^n$使(1)式成立，则称此方程组**相容**，否则称为**不相容或矛盾**.

关于方程组(1)的几个问题：

1.方程组(1)相容的条件是什么？相容时，如何求其通解？

2.方程组相容时，如何求其通解中极小范数解?即解x_0满足$\|x_0\| = \min_{Ax=b} \|x\|$,其中, $\|\cdot\|$为C^n中内积诱导的范数.

关于方程组(1)的几个问题：

3.方程组不相容时，需要求出这样的x_0,满足$\|Ax_0-b\|=\min_{x\in C^n}\|Ax-b\|$,这时,称$x_0$为方程组的最小二乘解.

4.一般,矛盾的方程组的最小二乘解并不唯一，需要求出具有极小范数的向量x_0 ,即x_0使$\|x_0\|=\min_{\min\|Ax-b\|}\|x\|$?这时可证明$x_0$是唯一的，称为极小范数最小二乘解.

一、线性方程组的相容性，通解与$A\{1\}$

在(1)中,若A可逆,则$x = A^{-1}b$为其唯一解，当A不可逆，或不是方阵，怎么办?

定理1（Penrose定理）$A \in C^{m\times n}, B \in C^{p\times q}, C \in C^{m\times q}$,则矩阵方程$AXB = D$相容的充要条件是

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D,$$

其中$A^{(1)} \in A\{1\}, B^{(1)} \in B\{1\}$此时方程组的通解为

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \qquad (2)$$

其中$Y \in C^{n\times p}$为任意.

证明： $\Leftarrow$:若$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D$,令$X = A^{(1)}DB^{(1)}$则满足$AXB = D$.

$\Rightarrow$:若$AXB = D$有解则

$D = AXB = AA^{(1)}AXBB^{(1)}\mathrm{B} = \mathrm{A}A^{(1)}\mathrm{D}B^{(1)}\mathrm{B}.$

下证通解:首先易证(2)满足$AXB = D$,

其次,若X是$AXB = D$的任意解,则X可表为

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + X - A^{(1)}AXBB^{(1)}$$

故X为(2)的形式，从而(2)为$AXB = D$的通解.

推论1： 设$A \in C^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$.则

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)} | Z \in C^{n\times m}\text{任意}\}.$$

推论1： 设$A \in C^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$.则

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)} | Z \in C^{n\times m}\text{任意}\}.$$

证明： 定理1中，取$B = D = A$，即得$AXA = A$的通解为$X = A^{(1)}AA^{(1)} + Y - A^{(1)}AYAA^{(1)}, Y \in C^{n\times m}$. 令$Y = A^{(1)} + Z$即得.

注： 这里只是给出了$A\{1\}$的一个构造性描述,在使用上并不直接，因为还要求出一个$A^{(1)}$.

推论2：方程组(1)相容的充要条件是$AA^{(1)}b=b$,
且其通解为$x=A^{(1)}b+(I-A^{(1)}A)y, y\in C^n$任意.

推论2： 方程组(1)相容的充要条件是$AA^{(1)}b=b$，且其通解为$x=A^{(1)}b+(I-A^{(1)}A)y, y\in C^n$任意.

证明： 定理1中，取$D=b\in C^m, B=1$即得.

注1： 因为$A^{+}\in A\{1\}$,故$Ax=b$相容时，通解为
$x=A^{+}b+(I-A^{+}A)y,\ y\in C^n$.

由此可断言：

相容方程组$Ax = b$的**解唯一**$\Leftrightarrow A$**列满秩**.

由此可断言：

相容方程组$Ax = b$的解**唯一**$\Leftrightarrow$ A**列满秩**.

证明： $\Leftarrow$:若A列满秩，则$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,所以$A^+ A = I_n$,带入上式中，$x = A^+ b$为唯一解.

$\Rightarrow$:若解唯一,则必有$A^+ A = I_n$,所以

$$r(A^+ A) = n \le r(A) \le n.$$

得$r(A) = n$,列满秩.

注2:当$b = 0$时,齐次方程$Ax = 0$总有解，通解为
$x = (I - A^{+}A)y, y \in C^{n}$任意.

下面给出$A\{1\}$的一个初等解法:

定理2： 设$A \in C^{m\times n}$,P,Q分别是m阶和n阶可逆阵，使$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,则$A\{1\}=\{Q\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P|$其中$X_{ij}$为适当阶数的任意矩阵}.

注1:特别A为n阶可逆阵时，$PAQ = I_n$,此时$A\{1\} = \{QI_nP\} = \{QP\} = \{A^{-1}\}$,即$A\{1\}$中只有$A^{-1}$(唯一的).

注2:由定理2知

$$\begin{pmatrix} A & I_m \\ I_n & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} PAQ & P \\ Q & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & P \\ 0 & 0 & \\ Q & & \end{pmatrix}$$

例1： 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,求$A\{1\}$.

例1： 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$,求$A\{1\}$.

解：由$\begin{pmatrix}A & I_3\\ I_4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}I_2 & 0 & P\\ 0 & 0 & \\ Q & & 0\end{pmatrix}$,这里

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所以$PAQ=\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 因此

$$A\{1\}=\{Q\begin{pmatrix} I_2 & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P|X_{ij}\text{为适当阶数的任意矩阵}\}.$$

取X_{ij}为零矩阵,得到A的一个{1}逆,

$$A^{(1)}=Q\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in A\{1\}.$$

例2： 求解$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ -x_2+2x_3=2 \end{cases}$.

例2： 求解$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

解： 方程组$Ax = b, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

而$r(A) = r(A, b) = 2,$相容. 所以通解为

$$x = A^+b + (I - A^+A)y, y \in C^3.$$

因为A行满秩,所以

$$A^{+}=A^{H}(AA^{H})^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

此时通解为

$$x = A^+b + (I - A^+A)y$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}13\\10\\19\end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix}9 & -6 & -3\\-6 & 4 & 2\\-3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

其中, c_i为任意常数.

或由$\begin{pmatrix} A & I_2 \\ I_3 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_2 & 0 & I_2 \\ Q & & 0 \end{pmatrix}$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = I_2,$$

可取$A^{(1)} = Q\begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,易验证

$$AA^{(1)}b = b.$$

通解为

$$x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

其中, c_i为任意常数.

这里得到两个通解的形式不同,但代表相同的集合.

后面看到$A^{+}b$将更具有特殊含义.

二、相容线性方程组的极小范数解与$A\{1,4\}$

我们先来确定集合$A\{1,4\}$:

引理1: 设$A \in C^{m\times n}$,则$A\{1,4\} = \{X \in C^{m\times n} | XA = A^{(1,4)}A\}$,即$A\{1,4\}$是由矩阵方程$XA = A^{(1,4)}A$的所有解构成,其中$A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$.

证明： 设X满足方程$XA=A^{(1,4)}A$则$AXA=AA^{(1,4)}A=A,(XA)^H=\left(A^{(1,4)}A\right)^H=A^{(1,4)}A=XA,$所以$X\in A\{1,4\}.$

反之,若$X\in A\{1,4\}$,则$A^{(1,4)}A=A^{(1,4)}(AXA)=\left(A^{(1,4)}A\right)^H(\mathrm{XA})^{\mathrm{H}}=\mathrm{A}^H\left(A^{(1,4)}\right)^H\mathrm{A}^H X^H=\left(AA^{(1,4)}A\right)^{\mathrm{H}}X^H=\mathrm{A}^H X^H=(XA)^H=XA.$

由引理1和上节定理1可得$A\{1,4\}$的通式:

定理3： 设$A \in C^{m\times n}, A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$,则$A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Z(I - AA^{(1,4)}) | Z \in C^{n\times m}\}$.

定理3： 设$A \in C^{m\times n}, A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$,则$A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Z(I - AA^{(1,4)})|Z \in C^{n\times m}\}$.

证明： 定理1中，取$D = A^{(1,4)}A, B = A, A = I$,则方程$XA = A^{(1,4)}A$的通解为$X = A^{(1,4)}AA^{(1,4)} + Y - YAA^{(1,4)}, Y \in C^{m\times n}$,令$Y = A^{(1,4)} + Z$即可.

下面我们将建立方程组$Ax = b$的极小范数解与$A^{(1,4)}$的关系.

定理4： 设$A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$,则$A^{(1,4)}b$都是相容方程组$Ax = b$的极小范数解，且$Ax = b$的极小范数解是唯一的.

证明： 线性方程组$Ax=b$的任意解x可表为

$$x = A^{(1,4)}b + (I - A^{(1,4)}A)y.$$

令$b=Ax$(总存在这样的x_0, 因为$Ax=b$有解）,则

$$\left(\left(I - A^{(1,4)}A\right)y, A^{(1,4)}b\right)$$
$$= \left(A^{(1,4)}b\right)^H\left(I \ - A^{(1,4)}A\right)y$$
$$= \left(A^{(1,4)}Ax_0\right)^H\left(I - A^{(1,4)}A\right)y$$
$$= x_0^H\left(A^{(1,4)}A\right)^H\left(I - A^{(1,4)}A\right)y$$
$$= x_0^H(A^{(1,4)}A(I - A^{(1,4)}A)y$$
$$= x_0^H\left(A^{(1,4)}A - A^{(1,4)}AA^{(1,4)}A\right)y$$
$$= x_0^H(A^{(1,4)}A - A^{(1,4)}A)y \ = 0,$$

所以$A^{(1,4)}b \perp \left(I - A^{(1,4)}A\right)y$,因此

$$\|x\|^2 = \left\|A^{(1,4)}b\right\|^2 + \left\|\left(I - A^{(1,4)}A\right)y\right\|^2 \geq \left\|A^{(1,4)}b\right\|^2$$

从而$A^{(1,4)}b$为$Ax = b$的极小范数解.

下证唯一性:

设x_1也是$Ax = b$的极小范数解，即有

$$\|x_1\|^2 = \left\|A^{(1,4)}b\right\|^2,$$

由通解定义可知,存在y_1使得

$$x_1 = A^{(1,4)}\, b + \left(I - A^{(1,4)}A\right)y_1,$$

由上可知$\|x_1\|^2 = \left\|A^{(1,4)}b\right\|^2 + \left\|\left(I - A^{(1,4)}A\right)y_1\right\|^2$,

故有$\left(I - A^{(1,4)}A\right)y_1 = 0$,所以$\mathrm{x}_1 = A^{(1,4)}b$

注： 此结论说明，对相容方程$Ax = b, A\{1,4\}$可能有无穷多个，但其中任一$A^{(1,4)}$, $A^{(1,4)}b$总是不变的，且为$Ax = b$的唯一极小范数解.

定理5： 设$X \in C^{n\times m}$,对任意的$b \in C^{m}$, Xb都为相容方程组$Ax = b$的极小范数解，则必有$X \in A\{1,4\}$.

定理5：设$X \in C^{n\times m}$,对任意的$b \in C^m$, Xb都为相容方程组$Ax = b$的极小范数解，则必有$X \in A\{1,4\}$.

证明：由定理4证明知, $Xb = A^{(1,4)}b$, $\forall b \in C^m$,取为A的各列，得$XA = A^{(1,4)}A$，由引理1知,

$$X \in A\{1,4\}.$$

例3：求$Ax = b$的极小范数解,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

例3： 求$Ax=b$的极小范数解,其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

解： 由$r(A)=r(A,\ b)=2$知方程组相容.由例2

知,$A^+=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$,从而极小范数解为

$$x=A^+b=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}13\\10\\19\end{pmatrix}.$$

三、不相容线性方程组的最小二乘解与A{1,3}

当$Ax=b$不相容时,即没有通常意义下的解，此时我们需要求出x使$\|Ax-b\|$为极小，称满足此要求的x为不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解我们将看到此类解与$A\{1,3\}$有密切关系，我们先介绍一个引理:

引理2： 设$A\in C^{m\times n}$,$A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$,则$A\{1,3\}=\{X\in C^{n\times m}|AX=AA^{(1,3)}\}$,即$A\{1,3\}$由矩阵方程$AX=AA^{(1,3)}$的所有解构成.

证明:设X满足方程$AX=AA^{(1,3)}$则$AXA=AA^{(1,3)}A=A,(AX)^H=\left(AA^{(1,3)}\right)^H=AA^{(1,3)}=AX,$ 所以$X\in A\{1,3\}$.

反之,若$X\in A\{1,3\}$,则$AA^{(1,3)}=(AXA)A^{(1,3)}=(AX)^H\left(AA^{(1,3)}\right)^H=X^HA^H\left(AA^{(1,3)}\right)^H=X^H\left(AA^{(1,3)}A\right)^H=X^HA^H=(AX)^H=AX.$

定理6： 设$A \in C^{m\times n}$, $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,则$A\{1,3\} =$
$\left\{A^{(1,3)} + \left(I - A^{(1,3)}A\right)Z \middle| Z \in C^{n\times m}\right\}$.

证明： 定理1中，取$D = AA^{(1,3)}, B = I$,则方程$AX = AA^{(1,3)}$的通解为$X = A^{(1,3)}AA^{(1,3)} + Y - A^{(1,3)}AY, Y \in C^{n\times m}$令$Y = A^{(1,3)} + Z$即可.

下面我们将建立不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解与$A^{(1,3)}$的关系.

定理7： 设$A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,则$A^{(1,3)}b$都是不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解.

下面我们将建立不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解与$A^{(1,3)}$的关系.

定理7： 设$A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$,则$A^{(1,3)}b$都是不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解.

证明：

由$Ax-b=(Ax-AA^{(1,3)}b)+(AA^{(1,3)}b-b)$,而

$$\left(Ax-AA^{(1,3)}b, AA^{(1,3)}b-b\right)$$

$$=\left(AA^{(1,3)}b-b\right)^H\left(Ax-AA^{(1,3)}b\right)$$

$$\left(Ax - AA^{(1,3)}b, AA^{(1,3)}b - b\right)$$

$$= \left(AA^{(1,3)}b - b\right)^H \left(Ax - AA^{(1,3)}b\right)$$

$$= \left(b^H \left(AA^{(1,3)}\right)^H - b^H\right) \left(Ax - AA^{(1,3)}b\right)$$

$$= \left(b^H AA^{(1,3)} - b^H\right)\left(Ax - AA^{(1,3)}b\right)$$

$$= b^H AA^{(1,3)}Ax - b^H AA^{(1,3)}AA^{(1,3)}b - b^H Ax$$

$$+ b^H AA^{(1,3)}b$$

$$= b^H Ax - b^H AA^{(1,3)}b - b^H Ax + b^H AA^{(1,3)}b = 0,$$

所以$Ax - AA^{(1,3)}b \perp AA^{(1,3)}b - b$.因此

$$\|Ax-b\|^2 = \left\|Ax - AA^{(1,3)}b\right\|^2 + \left\|AA^{(1,3)}b - b\right\|^2 \geq \left\|AA^{(1,3)}b - b\right\|^2, \forall x \in C^n.$$

从而$A^{(1,3)}b$为不相容方程$Ax = b$的最小二乘解.一般说来,不相容方程$Ax = b$的最小二乘解并不唯一,可进一步证明以下定理:

定理8： $x \in C^n$是不相容方程组$Ax = b$的最小二乘解$\Leftrightarrow$ x是方程组$Ax = AA^{(1,3)}b$的解.

定理8： $x\in C^n$是不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解$\Leftrightarrow$ x是方程组$Ax=AA^{(1,3)}b$的解.

证明： 由定理的证明知

$$\|Ax-b\|^2=\left\|Ax-AA^{(1,3)}b\right\|^2+\left\|AA^{(1,3)}b-b\right\|^2$$

$$\geq\left\|AA^{(1,3)}b-b\right\|^2,\forall x\in C^n.$$

故若x_0是$Ax=b$的最小二乘解，则有

$$\|Ax_0-b\|^2=\left\|AA^{(1,3)}b-b\right\|^2.$$

故若x_0是$Ax=b$的最小二乘解，则有

$$\|Ax_0-b\|^2=\left\|AA^{(1,3)}b-b\right\|^2.$$

从而$\left\|Ax_0-AA^{(1,3)}b\right\|^2=0$,所以$Ax_0=AA^{(1,3)}b$即$x_0$是方程$Ax=AA^{(1,3)}b$的解.从反之亦然.

定理9:不相容方程组$Ax = b$的最小二乘解的通式为$x = A^{(1,3)}b + \left(I - A^{(1,3)}A\right)y, \forall y \in \mathbb{C}^n.$

定理9: 不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解的通式为$x=A^{(1,3)}b+\left(I-A^{(1,3)}A\right)y,\forall y\in\mathbb{C}^n$.

证明: 由定理8知, x是不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解$\Leftrightarrow$ x是方程组$Ax=AA^{(1,3)}b$的解$\Leftrightarrow$ x是方程组$A\left(x-A^{(1,3)}b\right)=0$的解

由定理1的推论2知, 该方程的通解为

$$x-A^{(1,3)}b=\left(I-A^{(1,3)}A\right)y,\text{即}$$

$$x=A^{(1,3)}b+\left(I-A^{(1,3)}A\right)y,\forall y\in\mathbb{C}^n$$

推论:对于不相容方程组$Ax = b$的最小二乘解是唯一的$\Leftrightarrow$ A是列满秩的.

推论:对于不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解是唯一的$\Leftrightarrow A$是列满秩的.

证明:最小二乘解的通解公式为

$$x=A^{(1,3)}b+\left(I-A^{(1,3)}A\right)y,\forall y\in\mathbb{C}^n.$$

当A列满秩时,存在K使$KA=I_n$,

$$\left(\text{可取}K=(A^HA)^{-1}A^H=A^{(1,3)}\right)$$

则有$A^{(1,3)}A=I_n$,所以$x=A^{(1,3)}b$唯一.

推论:对于不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解是唯一的$\Leftrightarrow$ A是列满秩的.

证明:反之,由通式知,若最小二乘解唯一,必有$A^{(1,3)}A=I_n$,故$n=r(A^{(1,3)}A)\leq r(A)\leq n$,所以$r(A)=n$,即$A$列满秩.

注:若A列满秩$A^{(1,3)}=A^{+}$,若A行满秩则$A^{(1,4)}=A^{+}$.

由于A^{+}是唯一的,所以$x=A^{+}b$是唯一最小二乘解.

例4:求不相容方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$的最小二乘解.

例4:求不相容方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$的最小二乘解.

解:设方程组为$Ax=b$,其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$r(A)=2$,$r(A,b)=3$,故不相容.因A是列满秩的,所以

例4:求不相容方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$的最小二乘解.

解:$A^{+}=(A^HA)^{-1}A^H=$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

例4:求不相容方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$的最小二乘解.

解:因此,唯一的最小二乘解为

$$x = A^+ b = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

即$x_1 = \frac{-4}{11}, x_2 = \frac{7}{11}$.

四、不相容方程组的极小范数最小二乘解与A^+

一般的,最小二乘解并不唯一,通常把范数最小的一个称为$Ax=b$的极小范数最小二乘解(最佳逼近解),我们将看到,这样的解不仅唯一,且可由A^+表出.

我们先介绍一个引理:

引理3:设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,则$A^+=A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$. **(***Urguhart***)**

证明:直接验证其满足四个$Penrose$方程.

定理10:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$b \in \mathbb{C}^{n}$,则$x = A^{+}b$是不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解;

反之,设$X \in \mathbb{C}^{n\times m}$,若$\forall b \in \mathbb{C}^{m}$, $x = Xb$为不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解,则$X = A^{+}$.

定理10:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$b \in \mathbb{C}^{n}$,则$x = A^{+}b$是不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解;

反之,设$X \in \mathbb{C}^{n\times m}$,若$\forall b \in \mathbb{C}^{m}$, $x = Xb$为不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解,则$X = A^{+}$.

证明:取$A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,由定理8知$Ax = b$的唯一极小最小二乘解就是$Ax = AA^{(1,3)}b$的极小范数解,从而又由定理4知其唯一的极小范数解为

$$x = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}b = A^{+}b.(\text{引理}3)$$

定理10: 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$b \in \mathbb{C}^{n}$,则$x = A^{+}b$是不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解;

反之,设$X \in \mathbb{C}^{n\times m}$,若$\forall b \in \mathbb{C}^{m}$, $x = Xb$为不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解,则$X = A^{+}$.

证明: 反之,若$\forall b \in \mathbb{C}^{m}$, $x = Xb$为不相容方程组$Ax = b$的唯一极小最小二乘解,由唯一性知$Xb = A^{+}b$.取$b_i = \varepsilon_i$,$(1\le i \le m)$则$X\varepsilon_i = A^{+}\varepsilon_i$,所以$X = A^{+}$.

由于$A^+ \in A\{1\}$,$A^+ \in A\{1,3\}$, $A^+ \in A\{1,4\}$,故总结有下表:

$Ax = b$相容	$Ax = b$不相容
$AA^+b = b$	$AA^+b \neq b$
解唯一$\Leftrightarrow$ A列满秩	最小二乘解唯一$\Leftrightarrow$ A列满秩
解的通式 $x = A^+b + (I - A^+A)y$	最小二乘解的通式 $x = A^+b + (I - A^+A)y$
唯一的极小范数解 $x = A^+b$	唯一的极小最小二乘解 $x = A^+b$

关于$x = A^+b$的唯一性有表:

$Ax = b$	相容	不相容
A列满秩	唯一解	唯一最小二乘解
A非列满秩	唯一极小范数解	唯一极小最小二乘解

注:给定方程$Ax = b$,只要计算A^+,则A^+b便给出方程的各种意义下的解.

例5:设$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}.$

1)用广义逆矩阵方法判断方程组$Ax=b$是否相容,

2)求$Ax=b$的极小范数解或极小最小二乘解.

解:A的满秩分解为$A=BC=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$,

故

$$A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}5&2&-1\\1&1&1\\-4&-1&2\\6&3&0\end{pmatrix}.$$

解:由于$AA^+b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \neq b$,所以$Ax = b$不相容,因

此它的极小最小二乘解为$x_0 = A^+b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

回顾：

引理1:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,则$A\{1,4\} = \left\{X \in \mathbb{C}^{n\times m} \middle| XA = A^{(1,4)}A\right\}$,即$A\{1,4\}$是由矩阵方程$XA = A^{(1,4)}A$的所有解构成,其中$A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$.

引理2:设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,则$A\{1,3\} = \left\{X \in \mathbb{C}^{n\times m} \middle| AX = AA^{(1,3)}\right\}$,即$A\{1,3\}$由矩阵方程$AX = AA^{(1,3)}$的所有解构成.

例6:求证(1) $AX = AA^+ \Leftrightarrow A^H AX = A^H$,

(2) $XA = A^+ A \Leftrightarrow XAA^H = A^H$

例6:求证(1) $AX=AA^+ \Leftrightarrow A^HAX=A^H$,

(2) $XA=A^+A \Leftrightarrow XAA^H=A^H$

证明: (1)由$AX=AA^+ \Rightarrow A^HAX=A^HAA^+=$
$A^H(AA^+)^H=(AA^+A)^H=A^H$.

再由$A^HAX=A^H \Rightarrow AX=AA^+AX=(AA^+)^HAX=$
$A^{+H}A^HAX=A^{+H}A^H=(AA^+)^H=AA^+$

同理可证(2)

例7: (1)若A列满秩,则$A^{(1,3)} = A^{+}$ (唯一).

(2)若A行满秩,则$A^{(1,4)} = A^{+}$ (唯一).

例7: (1)若A列满秩,则$A^{(1,3)} = A^+$ (唯一).

(2)若A行满秩,则$A^{(1,4)} = A^+$ (唯一).

证明: (1)由A列满秩$\Rightarrow A^+A = I$,(因为$A^+ = (A^HA)^{-1}A^H$)设 $X \in A\{1,3\} \Rightarrow AXA = A \Rightarrow A^+(AXA) = A^+A$,

因为$A^+A = I \Rightarrow XA = I \Rightarrow (XA)^H = XA$,且$XAX = X$,所以X满足四个$Penrose$方程,即$X = A^+$.

例7: (1)若A列满秩,则$A^{(1,3)} = A^{+}$ (唯一).

(2)若A行满秩,则$A^{(1,4)} = A^{+}$ (唯一).

证明: (2)由A行满秩$\Rightarrow AA^{+} = I$,(因为$A^{+} = A^{H}(AA^{H})^{-1}$)

设$X \in A\{1,4\} \Rightarrow AXA = A \Rightarrow (AXA)A^{+} = AA^{+}$

因为$AA^{+} = I \Rightarrow AX = I \Rightarrow (AX)^{H} = AX$,且$XAX = X$,所以X满足四个$Penrose$方程,即$X = A^{+}$.

例8: (1) $X=(A^HA)^-A^H\in A\{1,3\}$,

(2) $X=A^H(AA^H)^-\in A\{1,4\}$.

例8: (1) $X=(A^HA)^-A^H\in A\{1,3\}$,

(2) $X=A^H(AA^H)^-\in A\{1,4\}$

证明: (1)因为

$$A\{1,3\}=\{X|A^HAX=A^H\}$$

且$A^HAX=A^H$相容(因为A^+是特解)

$\Rightarrow$必存在特解$X=(A^HA)^-A^H$使得$A^HAX=A^H$

$\Rightarrow X=(A^HA)^-A^H\in\{X|A^HAX=A^H\}=A\{1,3\}$.

回顾定理:(*Penrose*定理) $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{p\times q}, D \in \mathbb{C}^{m\times q}$,则矩阵方程$AXB = D$相容的充要条件是$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D$,其中$A^{(1)} \in A\{1\}, B^{(1)} \in B\{1\}$,此时方程组的通解为

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + \mathrm{Y} - A^{(1)}AYBB^{(1)}.(2)$$

其中$Y \in \mathbb{C}^{n\times q}$为任意.

同理可证(2)

例9:若值域$R(A)=R(B)$,则存在P,Q使得

$B=AP$,$A=BQ$.

例9:若值域$R(A)=R(B)$,则存在P,Q使得$B=AP,A=BQ.$

证明: (法1)由条件知B中各列都可被A中的列表出$\Rightarrow B=AP$,同理$A=BQ.$

(法2) $R(A)=\{AX|X\in\mathbb{C}^n\}, R(B)=\{BX|X\in\mathbb{C}^n\}$

因为 $R(A)=R(B)$,所以$X\in\mathbb{C}^n$,存在$y\in\mathbb{C}^n$使得$AX=By$.取X为$\mathbb{C}^n$中的标准正交基$e_1,\cdots,e_n$,存在$y_1,\cdots,y_n$使得$Ae_k=By_k\Rightarrow A(e_1,\cdots,e_n)=B(y_1,\cdots,y_n)\Rightarrow AI=BQ.$

例9:若值域$R(A)=R(B)$,则存在P,Q使得

$B=AP,A=BQ.$

注:若核空间$N(A)=N(B)$,则存在P,Q使得

$B=PA,A=QB.$

注: (1)$r(A^+) = r(A) = r(A^+A) = r(AA^+)$.

注: (1)$r(A^+) = r(A) = r(A^+A) = r(AA^+)$.

证明: 因为$A = AA^+A$,所以$r(A) = r(AA^+A) \le r(A^+A) \le r(A)$.

注: (2) $R(A) = R(AA^{+}), R(A^{+}) = R(A^{+}A)$

注: (2) $R(A) = R(AA^+)$, $R(A^+) = R(A^+A)$

证明:显然有$R(A) \supseteq R(AA^+)$.

又因为$r(A) = r(AA^+)$,所以$R(A) = R(AA^+)$.

类似的, $R(A^+) = R(A^+A)$.

例10: $A^+ = A \Leftrightarrow (A^2)^H = A^2, (A^2)^2 = A^2$

且$r(A^2) = r(A)$.

例10: $A^{+} = A \Leftrightarrow (A^2)^H = A^2, (A^2)^2 = A^2$

且$r(A^2) = r(A)$.

证明:只证明充分性.我们只需证明四个$Penrose$方程成立

由$A^2x = A(Ax) \in R(A) \Rightarrow R(A^2) \subseteq R(A)$.

又因为$r(A^2) = r(A) \Rightarrow R(A^2) = R(A) \Rightarrow A = A^2Q$

由$A^2 = A^4$得$A = A^4Q = A^2(A^2Q) = A^3 \Rightarrow A = AAA$. 由$(A^2)^H = A^2 \Rightarrow$第三、四方程成立.