第二章 矩阵的分解

2.3 满秩分解

满秩分解是矩阵的一种基本分解

记号$A \in C_r^{m\times n}$表示秩$r(A) = r, A \in C^{m\times n}$.

定理1: 设$A \in C_r^{m\times n}$, 则存在$B \in C_r^{m\times r}, C \in C_r^{r\times n}$, 满足: $A = BC$.

证明: 设A的前r个列向量线性无关, 对矩阵A作初等行变换变为$\begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即存在$P \in C_m^{m\times m}$, 满足:

$PA = \begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$或

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}(I_r, D) = BC,$$

其中$B = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in C_r^{m\times r}$, $C = (I_r, D) \in C_r^{r\times n}$. 下设$A$的前$r$个列向量线性相关, 只需先做列变换, 变成线性无关,

因此存在$P \in C_m^{m\times m}$, $Q \in C_n^{n\times n}$, 满足$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$或

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}(I_r, D)Q^{-1} = BC,$$

其中$B = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in C_r^{m\times r}$, $C = (I_r, D)Q^{-1} \in C_r^{r\times n}$.

证毕.

注：满秩分解不唯一，因为P, Q不唯一.

或设$A = BC, D = C_r^{r\times r}, B_1 = BD, C_1 = D^{-1}C$，所以$A = B_1C_1$.

推论: 设$A \in C_1^{m\times n}$, 则存在列向量α与行向量β, 满足: $A = \alpha\beta$.

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1, -1,3).$

例: 求$A=\begin{pmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{pmatrix}$的满秩分解.

解: $\begin{pmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1-2i & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 1/2 & 0 & 1-2i & -i/2\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1/2 & 0 & 1-2i & -i/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\ 取B=$$

$$\begin{pmatrix}2i & 0\\ 0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1/2 & 0 & 1-2i & -i/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = BC.$$

满秩分解方法:

1)只做行变换, 将A变成书上Hermite标准型;

2)令C为前r行(非0行);

3)取A中对应Hermite标准型中1对应的列, 组成B.

Hermite标准型: 前r行为非零行, 每一行第一个非零元素为1, 1所在的列其他元素是零.

例: 求$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7\\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11\end{pmatrix}$的满秩分解.

例: 求$A=\begin{pmatrix}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\\3&9&3&1&11\end{pmatrix}$的满秩分解.

解: $A\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&2&1&4\\0&0&-3&-2&-1\\0&0&-3&-2&-1\end{pmatrix}\rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1&3&0&-1/3&10/3\\0&0&1&2/3&1/3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

令$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -1/3 & 10/3\\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$或

令$B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1/3 & 1 & 0 & -1/9 & 10/9\\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$,

易证$A=BC$.

满秩分解不唯一, 但有:

定理2: 若$A=BC=B_1C_1$均为A的满秩分解, 则存在$D\in C_r^{r\times r}$, 使$B=B_1D,\ C=D^{-1}C_1$.

证明: 由$BC=B_1C_1$得$BCC^H=B_1C_1C^H$, 注意到$r(CC^H)=r(C)=r\Rightarrow B=B_1C_1C^H(CC^H)^{-1}\coloneqq B_1\theta_1$.

同理由$BC=B_1C_1$得$B^HBC=B^HB_1C_1\Rightarrow C=(B^HB)^{-1}B^HB_1C_1\coloneqq\theta_2C_1$. 上两式带入$BC=B_1C_1$, 得$BC=B_1C_1\Longrightarrow B_1\theta_1\theta_2C_1=B_1C_1$.

$$\Longrightarrow B_1^H B_1 \theta_1 \theta_2 C_1 C_1^H = B_1^H B_1 C_1 C_1^H \Longrightarrow \theta_1 \theta_2 = I.$$

单选题 1分

设置

满秩分解是否唯一?

A 唯一

B 不唯一

提交