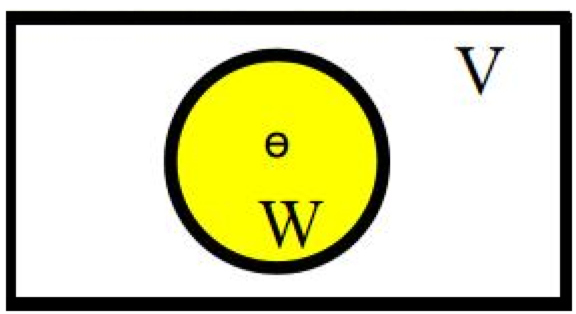
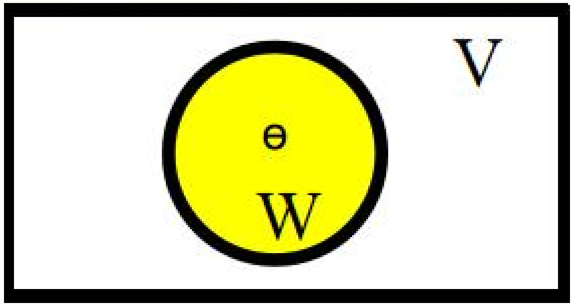
第一章 线性代数基础

1.3 线性子空间

定义1（子空间）设V是数域F上的线性空间，W是V的非空子集，如果W关于V上的加法和数乘也构成F上的线性空间,则称W 是V的**线性子空间**或**子空间**.



定义1（子空间）设V是数域F上的线性空间，W是V的非空子集，如果W关于V上的加法和数乘也构成F上的线性空间,则称W 是V的**线性子空间**或**子空间**.



注：任何空间V都有两个平凡子空间V与$\{\theta\}$.

定理1设V是数域F上的线性空间，W 是V的非空子集. 以下三个结论等价:

(1) W 是V的子空间;

(2) 如果$x, y \in W$, 则$x + y \in W$,如果$x \in W$, $k \in F$, 则$kx \in W$;

(3) 如果$x, y \in W$, $k, l \in F$则$kx + ly \in W$.

定理1设V是数域F上的线性空间，W 是V的非空子集. 以下三个结论等价:

(1) W 是V的子空间;

(2) 如果$x, y \in W$, 则$x + y \in W$,如果$x \in W$, $k \in F$, 则$kx \in W$;

(3) 如果$x, y \in W$, $k, l \in F$则$kx + ly \in W$.

注：向量的加法与数乘运算统称线性运算，由定理1知，子空间对线性运算封闭.

注: (1)线性子空间是线性空间，也有基, 维数, 坐标等概念.

(2) $dimW \leq dimV$.

(3)零子空间不含有线性无关的向量，维数是零.

注: (1)线性子空间是线性空间，也有基, 维数, 坐标等概念.

(2) $dimW \leq dimV$.

(3)零子空间不含有线性无关的向量，维数是零.

例如：设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,则$A$的核空间$\mathrm{N}(A)$是$\mathbb{R}^n$的子空间,当$A$可逆时, $\mathrm{N}(A)$是零子空间.

定义2（列空间）设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\alpha_1,\alpha_2$，$\cdots,\alpha_n$是$A$的$n$个列，称子空间$span\{\alpha_1,\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$为$A$的**像空间**或**列空间**.记作

$$\mathrm{R}(A) = span\{\alpha_1,\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$$

显然有$\mathrm{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m, \mathrm{dim}\mathrm{R}(A) = rank\mathrm{A}$.

注：任何空间V都有两个平凡子空间V与$\{\theta\}$.

定义2（列空间）设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\alpha_1,\alpha_2$，$\cdots$, α_n 是A的n个列，称子空间$span\{\alpha_1,\alpha_2，\cdots，\alpha_n\}$ 为A的**像空间**或**列空间**.记作

$$\mathrm{R}(A) = span\{\alpha_1,\alpha_2，\cdots，\alpha_n\}$$

显然有$\mathrm{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\dim\mathrm{R}(A) = rank\mathrm{A}$.

注：由定义$\mathrm{R}(A) = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = (\alpha_1,\alpha_2，\cdots，\alpha_n)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

注：由定义 $\mathrm{R}(A)=\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i=(\alpha_1,\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

$$=Ax$$

所以 $\mathrm{R}(A)=\{Ax\mid x\in\mathbb{R}^n\}$.同理可以定义 A^T 的值域(A **的行空间**): $\mathrm{R}(A^T)=\{A^Tx\mid x\in\mathbb{R}^m\}\subseteq\mathbb{R}^n$.并且有

$$\dim\mathrm{R}(A^T)=rank\mathrm{A}=\dim\mathrm{R}(A)$$

定义3（子空间的交与和） 设W_1, W_2是线性空间V的两个子空间. 令

$$W_1 \cap W_2 = \{x | x \in W_1 \text{且} x \in W_2\},$$

可以验证$W_1 \cap W_2$是V的子空间,称为W_1与W_2的交空间,令

$$W_1 + W_2 = \{x + y | x \in W_1, y \in W_2\},$$

可以验证$W_1 + W_2$是V的子空间,称为W_1与W_2的和空间.

定理2 设$W_1 = span\{\alpha_1,\alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$,

$W_2 = span\{\beta_1,\beta_2, \cdots, \beta_m\}$, 则

$W_1 + W_2 = span\{\alpha_1,\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1,\beta_2, \cdots, \beta_m\}$,

例1 设$\alpha_1=(2,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-3,1)^T,\beta_1=(4,5,3,-1)^T,\beta_2=(1,5,-3,1)^T,V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$. 求

（1）V_1+V_2的基与维数；

（2）$V_1\cap V_2$的基与维数.

解:(1) 由定理2知$V_1+V_2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$, 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$的最大无关组,所以它是$V_1+V_2$的一组基, $\dim\{V_1+V_2\}=3$.

例1 设$\alpha_1 = (2,1,3,1)^T, \alpha_2 = (-1,1,-3,1)^T, \beta_1 = (4,5,3,-1)^T, \beta_2 = (1,5,-3,1)^T, V_1 = span\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $V_2 = span\{\beta_1,\beta_2\}$. 求

（1）$V_1 + V_2$的基与维数；

（2）$V_1 \cap V_2$的基与维数.

解:(2) 设$x \in V_1 \cap V_2$, 则$x \in V_1$且$x \in V_2$,所以

$$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\beta_1 + k_4\beta_2$$

带入向量计算得$k_1 = 0, k_2 = \frac{5}{3}k_4, k_3 = -\frac{2}{3}k_4$

解:(2) 设$x \in V_1 \cap V_2$, 则$x \in V_1$且$x \in V_2$,所以

$$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\beta_1 + k_4\beta_2$$

带入向量计算得$k_1 = 0, k_2 = \frac{5}{3}k_4, k_3 = -\frac{2}{3}k_4$.

所以$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_4(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -5, \frac{5}{3})^T$.

$V_1 \cap V_2$的基是$(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -5, \frac{5}{3})^T$,维数是1.

定理3（维数定理）设W_1, W_2是线性空间V的两个子空间, 则

$$\dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

定义4（直和） 设W_1, W_2是线性空间V的两个子空间. 如果$W_1 \cap W_2 = \{0\}$, W_1与W_2的和空间$W_1 + W_2$是直和,记作$W_1 \oplus W_2$.

定义4（直和） 设W_1, W_2是线性空间V的两个子空间. 如果和空间W_1+W_2中的任一向量可以唯一的表示成W_1中的一个向量与W_2中的一个向量之和, 则称和空间W_1+W_2是直和,记作$W_1 \oplus W_2$.

例如三维、二维坐标系都是直和.

定理3（直和等价定理） 设W_1, W_2是线性空间V的两个子空间. 则下面命题等价：

(1) $W_1 + W_2$是直和,

(2)零元素表示法唯一,

(3)$W_1 \cap W_2 = \{0\}$,

(4) $\dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2$

定理4设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$W_1$的一组基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$W_2$线性空间$V$的两个子空间. 则$W_1+W_2$是直和当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$W_1+W_2$的一组基.

定理4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$W_1$的一组基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$W_2$线性空间$V$的两个子空间. 则$W_1+W_2$是直和当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$W_1+W_2$的一组基.

证明: 由定理2得

$$W_1+W_2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$$

如果W_1+W_2是直和,由定理3第4条得上式右端是一个线性无关向量组,所以是一组基,必要性得证.

以上过程可逆，可得充分性证明.

例2 设$V=\mathbb{R}^{n\times n}, W_1=\{A\in V|A^T=A\}, W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$,验证$V=W_1\oplus W_2$.

例2 设$V=\mathbb{R}^{n\times n}, W_1=\{A\in V|A^T=A\}, W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$,验证$V=W_1\oplus W_2$.

分析：首先不难验证W_1与W_2是V的子空间.

任取$A\in V$, $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$,其中$\frac{A+A^T}{2}\in W_1$, $\frac{A-A^T}{2}\in W_2$,所以$V=W_1+W_2$.

例2 设$V=\mathbb{R}^{n\times n}, W_1=\{A\in V|A^T=A\}, W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$,验证$V=W_1\oplus W_2$.

分析：首先不难验证W_1与W_2是V的子空间.

任取$A\in V$, $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$,其中$\frac{A+A^T}{2}\in W_1$, $\frac{A-A^T}{2}\in W_2$,所以$V=W_1+W_2$.

其次设$B\in W_1\cap W_2\Rightarrow B^T=B=-B\Rightarrow B=0$,得证.

例2 设$V=\mathbb{R}^{n\times n}, W_1=\{A\in V|A^T=A\}, W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$,验证$V=W_1\oplus W_2$.

分析：另外因为

$$\mathrm{d}imW_1=1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\mathrm{d}imW_2=1+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所以$\dim V=dimW_1+dimW_2\Rightarrow V=W_1\oplus W_2$.