

第一章 线性代数基础

1.5 特征值与特征向量

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定义1（特征值与特征向量） 设 V 是 F 上的线性空间, $T \in L(V)$, 若存在 $\lambda \in F$ 及 V 的非零向量 ξ , 使得 $T\xi = \lambda\xi$, 则称 λ 为 T 的一个特征值, 而 ξ 为 T 的属于特征值 λ 的一个特征向量.

注：特征向量在线性变换作用下保持方位不变
(在同一直线上).

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, T 在这组基下的矩阵为 $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$, 即

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A$$

设 λ_0 是 T 的一个特征值, ξ 为 T 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量, 且 $\xi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X$, $X \in F^n$, 则

$$T\xi = \lambda_0\xi \Rightarrow T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X = \lambda_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X$$

即: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)AX = \lambda_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X \Rightarrow AX = \lambda_0X$
 $\Rightarrow (A - \lambda_0 I)X = 0$ (X 非零向量)

所以行列式 $|A - \lambda_0 I| = 0$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定义2（特征多项式） 设 $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$, λ 是一个参量, 矩阵 $\lambda I - A$ 称为 A 的**特征矩阵**. 行列式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的**特征多项式**. 展开式是一个 **n 次多项式**, 其根为 A 的特征值, 而相应于 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的非零解向量 X 称为 A 的属于 λ 的特征向量.



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

注： (1) λ_0 是 T 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda_0$ 是 A 的特征值.

(2) ξ 是 T 的特征向量 $\Leftrightarrow X$ 是 A 的特征向量，这里，
 $\xi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X$.

(3) A 的属于 λ_0 的全部特征向量再添上零向量就构成了 F^n 的一个线性子空间，称为 A 的一个**特征子空间**，记为 $E(\lambda_0)$ ，它就是齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的解空间.

求矩阵A的全部特征值及特征向量的步骤：

- 1) 计算行列式 $|\lambda I - A|$;
- 2) 求出多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 在数域 F 中的全部根（即 A 的特征值）；
- 3) 对 A 的每个特征值 λ ，解齐次线性方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ ，求出它的一组基础解系 X_1, \dots, X_t ，则 A 的属于 λ 的全部特征向量为 $k_1X_1 + \dots + k_tX_t$, k_i 不全为零.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

4) T 的属于 λ 的特征向量为 $\xi_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X_i, (1 \leq i \leq t)$, 从属于 λ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1 + \dots + k_t\xi_t, k_i$ 不全为零.



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

注：(1) 特征值与特征向量是否存在依赖于 V 所在的

数域 F , 比如 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$

(2) 当 $\dim V = n$ 很大时, 上述求法太繁琐, 可借助于计算机.

(3) $E(\lambda_i) = \{X \in F^n \mid (\lambda_i I - A)X = 0\} = N(\lambda_i I - A)$
(解空间). 由亏加秩定理有 $r(\lambda_i I - A) + \dim N(\lambda_i I - A) = n$, 所以 $E(\lambda_i)$ 的维数为 $\dim E(\lambda_i) = n - r(\lambda_i I - A)$ 称为 λ_i 的几何重数.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

例1 设 $T \in L(R^3)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \text{求} T \text{的全部特征值与全部特征向量.}$$

解 : $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 3)^2(\lambda + 6)$, 解得

$$\lambda_1 = 3, (\text{二重}) \lambda_2 = -6.$$

对于 $\lambda_1 = 3$, 求解齐次方程组 $(3I - A)X = 0$ 得基础解系 $X_1 = (-2, 1, 0)^T, X_2 = (2, 0, 1)^T$. 所以 T 的属于 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量为 $\xi_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

$\xi_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X_2 = 2\alpha_1 + \alpha_3$. 所以 T 的属于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, k_i 不同时为零.

对于 $\lambda_2 = -6$, 求解齐次方程组 $(-6I - A)X = 0$ 得基础解系 $X_3 = (1, 2, -2)^T$. 所以 T 的属于 $\lambda_2 = -6$ 的特征向量为 $\xi_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$, 所以 T 的属于 $\lambda_2 = -6$ 的全部特征向量为 $k_3\xi_3$, k_3 不为零.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理3 相似矩阵有相同的特征多项式及特征值，反之不然.

证明： 设 $P^{-1}AP = B$ ，则

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |\lambda I - A|. \end{aligned}$$

反例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, A 与 I_2 的特征多项式均为 $(\lambda - 1)^2$ ，但它们不相似.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

注：定理表明，线性变换的矩阵的特征多项式与基的选取无关，而直接由线性变换决定，故可称之为线性变换的特征多项式。

A的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是一个首1的多项式，其 $n - 1$ 次系数是 $-(\sum_{i=1}^n \lambda_i) = -\sum_i^n a_{ii} = -\text{tr}A$ (A的迹);常数项为 $-1^n |A| = -1^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理4 设 $A = (a_{ij}) \in F^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in F^{n \times m}$,

则 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

证明: 令 $AB = (c_{ij}) \in F^{m \times m}$, $BA = (d_{ij}) \in F^{n \times n}$.

所以 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $d_{ij} = \sum_{l=1}^m b_{il} a_{lj}$.

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m c_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{jl} a_{lj} =$$

$$\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n a_{lj} b_{jl}. \text{ 结论成立.}$$

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理5 相似的矩阵有相同的迹.



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

例2（换位公式） 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$,
则 $\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$.



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

例2（换位公式） 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$,

则 $\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$.

证明：任意验证

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

因为 $\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ 可逆, 所以 $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$ 相似.

故 $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$ 特征多项式相等.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

$$\text{则: } \left| \lambda I_{m+n} - \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \lambda I_{m+n} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} \right|,$$

$$\text{即: } \left| \begin{array}{cc} \lambda I_m - AB & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \lambda I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n - BA \end{array} \right|$$

$$\text{从而 } \lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|.$$

注：例题表明 AB 与 BA 有相同的非零特征值,故
 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理5(Schur引理) 任意的 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 都相似于一个上三角阵, 即存在满秩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为上三角阵, 其对角上元为 A 的全部特征值.

推论: 设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\varphi(x)$ 为任一多项式, 则矩阵多项式 $\varphi(x)$ 的 n 个特征值为 $\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)$,

特别的, kA 的特征值为 $k\lambda_1, \dots, k\lambda_n$, A^m 特征值为 $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$.



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理6(Hamilton-Cayley) 任意的 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$, 则必有 $f(A) = 0$ (零矩阵).

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理6(Hamilton-Cayley) 任意的 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,其特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$, 则必有 $f(A) = 0$ (**零矩阵**).

证明: 设 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$,以及,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = A_1(\text{上三角}).$$

则 $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = (A_1 - \lambda_1 I) \cdots (A_1 - \lambda_n I) = 0$,故 $f(A) = 0$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

注：(1) 由于 $L(V, V) \cong F^{n \times n}$ ，故对于线性变换 T 有平行的结果： $T \in L(V, V)$ ，且 $f(\lambda)$ 为 T 的特征多项式，则 $f(T)$ 为零变换。

(2)： Cayley定理对于一般数域 F 的矩阵也成立。

由 **Hamilton-Cayley定理** 可知，任取矩阵 A ，必有可使其零化的多项式，引入：

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定义3(最小多项式) 设 $A \in F^{n \times n}$, 使 A 零化的最小次数的首1多项式称为 A 的最小多项式, 记为 $m_A(\lambda)$.

注: $m_A(\lambda)$ 是唯一的, 且可整除任一 A 的零化多项式特别地, 有 $m_A(\lambda) | f(\lambda)$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理7 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m_A(\lambda)$ 有相同的根(不计重数).

证明: 由 $m_A(\lambda)|f(\lambda)$ 知最小多项式 $m_A(\lambda)$ 的根是 $f(\lambda)$ 的特征根.

反之, 若 $f(\lambda_0) = 0$, 设 ξ 是属于 λ_0 的特征向量, 即 $A\xi = \lambda_0\xi$, 从而 $0 = m_A(A)\xi = m_A(\lambda_0)\xi$, 因 $\xi \neq 0$, 故 $m_A(\lambda_0) = 0$.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

例3 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ 的最小多项式.



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

例3 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ 的最小多项式.

解: $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 12),$

由定理7, $m_A(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 有相同的根, 所以

$m_A(\lambda) = f(\lambda)$ 或 $m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 12),$

经验证 $(A - 3I)(A - 12I) = 0$, 所以

$m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 12).$

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

定理8 矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

证明： 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 A 的 k 个互异特征值, ξ_1, \dots, ξ_k 为它们对应的特征向量, 即 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i, (\xi_i \neq 0)$. 令

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_k\xi_k = 0,$$

将 A 左乘 $k-1$ 次, 得

$$\begin{cases} c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_k\xi_k = 0 \\ \lambda_1 c_1\xi_1 + \lambda_2 c_2\xi_2 + \dots + \lambda_k c_k\xi_k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{k-1} c_1\xi_1 + \lambda_2^{k-1} c_2\xi_2 + \dots + \lambda_k^{k-1} c_k\xi_k = 0 \end{cases}$$



第一章 线性代数基础——特征值与特征向量

把 $c_i \xi_i$ 看成未知变量，系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$$

所以方程组只有零解 $c_i \xi_i = 0$, 而 $\xi_i \neq 0 \Rightarrow c_i = 0$, 其中 $1 \leq i \leq k$.

