第一章 线性代数基础

1.7 可对角化矩阵

定义1（可对角化矩阵）n阶方阵A若相似于一个对角阵，则称A为可对角化矩阵(或称单纯矩阵).

注:(1)对角阵的和，积，逆（若存在）仍是对角阵，其对角线的元就是它的特征值.

(2)若线性变换T的矩阵为可对角化矩阵，等价于T在某组基下的矩阵为对角阵.

定理1（可对角化矩阵）设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A的全部互异特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$,则以下命题等价：

1）A可对角化；

2）A有n个线性无关的特征向量；

3) $\sum_{i=1}^{m} dimE(\lambda_i) = n$.

定理1（可对角化矩阵）设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A的全部互异特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$,则以下命题等价：

1) A可对角化；

2) A有n个线性无关的特征向量；

3) $\sum_{i=1}^{m} dimE(\lambda_i) = n.$

证明:1)⇔2)，设可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = diag\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$$

令$P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,则有

$$A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)diag\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$$

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\delta_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \delta_n\end{bmatrix}$$

即$A\alpha_i=\delta_i\alpha_i,(i=1,\cdots,n)$,$\alpha_i$是属于特征值$\delta_i$的特征向量，因为$P$可逆，故$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关.

以上过程可逆.

1)⇒3),设

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{d_m},$$

其中d_i是λ_i的**代数重数**,显然$d_1+\cdots+d_m=n$.不妨设

$$P^{-1}AP=diag\left\{\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{d_1},\cdots,\underbrace{\lambda_m,\cdots,\lambda_m}_{d_m}\right\}:=D$$

$$E(\lambda_i)=\{x\in\mathbb{C}^n|Ax=\lambda_i x\}$$
$$=\{x\in\mathbb{C}^n|(A-\lambda_i I)x=0\}$$

由亏加秩定理得

第一章 线性代数基础——可对角化矩阵

$$P^{-1}AP = diag\left\{\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{d_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{d_m}\right\} := D$$

$\dim E(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I) = n - r(P^{-1}(A - \lambda_i I)P) = n - r(D - \lambda_i I) = n - (n - d_i) = d_i.$

$$P^{-1}AP = diag\left\{\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{d_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{d_m}\right\} := D$$

$\mathrm{d}imE(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I) = n - r(P^{-1}(A - \lambda_i I)P) = n - r(D - \lambda_i I) = n - (n - d_i) = d_i$.

3)$\Rightarrow$ 1)在$E(\lambda_i)(1 \le i \le m)$中各取一组基，合起来有$n$个向量，这$n$个向量线性无关，故$A$可对角化.

注： 称$\dim E(\lambda)$为λ的几何重数，由定理证明知：

A可对角化$\Leftrightarrow$ A的每个特征值λ的代数重数等于λ的几何重数.

推论： 若n阶方阵A恰有n个互异特征值，则它必可对角化.反之不然.

例1 设$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, 求$A^{100}$.

解: $|A-\lambda I|=(\lambda-1)(\lambda-4), \lambda_1=1, \lambda_2=4.$

它们对应的特征向量为$\alpha_1=(1,-1)^T, \alpha_2=(1,2)^T$.

$$P=(\alpha_1,\ \alpha_2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix},$$

则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} \Longrightarrow A=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}P^{-1}$,

$$A^{100}=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4^{100}\end{bmatrix}P^{-1}$$

例2 设$T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

问：1）T可否对角化；

2）若T可对角化，试求满秩阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵

例2 设$T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

问：1）T可否对角化；

2）若T可对角化，试求满秩阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵

解: 我们只需要看A可否对角化.

$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda - 5), \lambda_1 = 0, (二重) \lambda_2 = 5.$

对$\lambda_1 = 0$,解方程$(0I - A)X = 0$,取两个线性无关特征向量为$\eta_1 = (2,0,1)^T, \eta_2 = (0,1,0)^T$.

对$\lambda_2 = 5$,解方程$(5I - A)X = 0$,取特征向量$\eta_3 = (1,0,-2)^T$.所以A有三个线性无关特征向量, A可对角化.令

$$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

则$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$.

定理2 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A可对角化当且仅当A的最小多项式没有重根.

证略.

例3 设$A \in F^{n\times n}$满足$A^2 = A$(幂等阵), 则A可对角化.

证明:设$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$,则$\varphi(A) = 0$. A的最小多项式可以整除$\varphi(\lambda)$，故A的最小多项式没有重根,结论成立.