第四章 矩阵分析

4.3 矩阵级数

在数学分析中，我们以数列极限来讨论级数理论，现在我们以矩阵序列理论为基础来引入矩阵级数.

在4.1节中我们知道：

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A_0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(0)},$$

$$\forall 1 \le j \le n, 1 \le i \le m$$

定义1： 设$\{A_k\}$, $A_k \in \mathbb{C}^{m\times n}$，称$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$为矩阵级数.

令$S_N = \sum_{k=1}^{N} A_k$，若矩阵序列$\{S_N\}$收敛且有极限

S, 即$\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$, 则**级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$收敛且有和$S$**, 记

为 $S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k$

注： 不收敛的级数我们称为**发散级数**.

注： 由定义知,

$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛 $\Leftrightarrow$ mn个数值级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ 收敛

而$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 发散$\Leftrightarrow$ mn个数值级数中至少有一个发散

定义2：若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 所对应的

mn个数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ 都**绝对收敛**, 则称$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **绝对收敛**

显然有以下**性质**：

1) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **绝对收敛** $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛

2) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **绝对收敛** $\Leftrightarrow$ 对任一(向量)范数$\|\cdot\|$,

$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ 收敛

2) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **绝对收敛** $\Leftrightarrow$ 对任一(向量)范数$\|\cdot\|$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| \text{ 收敛}$$

证明：(2)充分性“ $\Leftarrow$ ”

设$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|_1$ 收敛, 此处$\|A_k\|_1 = \sum_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \left|a_{ij}^{(k)}\right|$, 而

$\left|a_{ij}^{(k)}\right| < \|A_k\|_1$, 由比较原理知,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{ij}^{(k)}\right| (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\text{收敛},$$

即$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **绝对收敛.**

2) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **绝对收敛** $\Leftrightarrow$ 对任一(向量)范数$\|\cdot\|$,

$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛

证明：(2)必要性“ $\Rightarrow$ ”

由条件$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ 收敛,

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\left|a_{ij}^{(k)}\right|\right)$收敛, 即 $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|_1$ 收敛. 而任一范数(矩阵的向量范数)是等价的, 所以由比较原理知, 结论成立.

性质 3) 对于任取常矩阵 P, Q, $P \in \mathbb{C}^{p\times m}$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times q}$.若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$收敛(绝对收敛), 则矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ$ 收敛(绝对收敛).

证明： $\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} PA_kQ =$

$\lim\limits_{N\to\infty} P(\sum_{k=1}^{N} A_k)Q = P(\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k)\,Q =$

$P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k)\,Q$ (若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$收敛)

若$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$绝对收敛, 由性质2知, $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$收敛.

而$\|PA_kQ\| \le \|P\|\|A_k\|\|Q\| = k\|A_k\|$(取相容的矩阵范数即可). 则由比较原理知 $\sum_{k=1}^{\infty} \|PA_kQ\|$收敛.

再由性质2, $\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ$绝对收敛.

定义3：(幂级数)

设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 称$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$ 为幂级数.

定理1： 设复变量幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$的收敛半径为$R$,

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, **谱半径**为$\rho(A)$, 则

1) 当$\rho(A) < R$时, $\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$绝对收敛.(Abel 型定理)

2) 当$\rho(A) > R$时, $\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$发散

推论: $\sum_{m=0}^{\infty} A^m$收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$ (Neumann), 此时和为$(I - A)^{-1}$

1) 当$\rho(A) < R$时, $\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$绝对收敛.(Abel 定理)

证明 1): 因为$\rho(A) < R$, $\exists \varepsilon > 0$, 使$\rho(A) + \varepsilon < R$. 由Able定理知$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|(\rho(A) + \varepsilon)^m$ 收敛. 由4.1节定理10可知存在矩阵范数$\|\cdot\|$使$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$, 所以$\|c_m A^m\| = |c_m|\|A^m\| \leq |c_m|\|A\|^m$

$$\leq |c_m|(\rho(A) + \varepsilon)^m$$

由比较原理知,

$\sum_{m=0}^{\infty} \|c_m A^m\|$ 收敛, 从而$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$ 绝对收敛.

2) 当$\rho(A) > R$时, $\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$发散

证明 2): 若$\rho(A) > R$, 设$\rho(A) = |\lambda_k|$. 设$Ax = \lambda_k x$,

则$A\frac{x}{\|x\|} = \lambda_k \frac{x}{\|x\|}$, 令 $y = \frac{x}{\|x\|}$, 则 $\|y\| = 1$, 且$Ay = \lambda_k y$.

(反证法)若$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$收敛, 由性质3) 知

$$y^H\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m\right)y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m y^H A^m y =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m y^H {\lambda_k}^m y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m {\lambda_k}^m y^H y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m {\lambda_k}^m$$

也收敛, 与Abel定理矛盾,故当$\rho(A) > R$时,

$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$发散.

注： 定理1实际上定义了一种映射 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, $|z| < R$(收敛半径), $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\rho(A) < R$, $f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$收敛, 所以对应一个矩阵, 称$f(A)$为矩阵函数.

定理2:

若对矩阵A的某一种范数$\|A\| < 1$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

定理2：

若对矩阵A的某一种范数$\|A\| < 1$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

证明： 由$\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$, 即可证得.

定理3： 已知矩阵序列$A,\ A^2,\ \cdots,\ A^k,\cdots,$ 则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$的充分必要条件是$\rho(A) < 1.$

定理3： 已知矩阵序列$A,\ A^2,\ \cdots,\ A^k,\cdots,$ 则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k=0$ 的充分必要条件是$\rho(A)<1.$

证明： 证明过程需要用到下面的公式：设Jordan块

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1\\ & & \lambda_i\end{pmatrix},\ 则 J^k=\begin{pmatrix}{\lambda_i}^k & k{\lambda_i}^{k-1} & C_k^2{\lambda_i}^{k-2}\\ & {\lambda_i}^k & k{\lambda_i}^{k-1}\\ & & {\lambda_i}^k\end{pmatrix}$$

例1： 判断矩阵序列A^k的敛散性.

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}0.9 & 1\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & 1\\ 0 & 0 & 0.9\end{bmatrix}$

(4) $A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.8\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　　(2) $A=\begin{bmatrix}0.9 & 1\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}$

解:

(1) $A^k=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 故$\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ 发散.

(2) $\rho(A)=0.9<1$, 故$\lim\limits_{k\to\infty} A^k=0$.

$$(3) A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & 1\\ 0 & 0 & 0.9\end{bmatrix} \qquad (4)\ A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.8\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$$

解：

$$(3)\ A^k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.9^k & k0.9^{k-1}\\ 0 & 0 & 0.9^k\end{bmatrix},\ \text{故}\lim_{k\to\infty}A^k=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$(4)\ \|A\|_1=0.9<1,\ \text{故}A^k\text{收敛},\ \text{且}\lim_{k\to\infty}A^k=0\,.$$

例2： 判断矩阵序列A^k的敛散性.$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

例2： 判断矩阵序列A^k的敛散性.$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

解： A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1, \rho(A)=1$, 设$J$是$A$的Jordan标准型, 由于 $A^k=PJ^kP^{-1}$, 所以只需要判别J^k的敛散性即可.

通过计算得出$J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$, 则$J^k=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & k\\ & & 1\end{bmatrix}$,

故A^k发散.

例3： 判断矩阵序列A^k的敛散性.$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

例3： 判断矩阵序列A^k的敛散性.$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

解： A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=3,\ \rho(A)=3>1,$

所以A^k发散.

例4：判断矩阵幂级数的敛散性.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^k$　　(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}^k$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}^k$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}^k$

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^k$

解： $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\end{bmatrix}$$

故级数发散.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}^k$

解： $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}^k=$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}(-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & (-1)^k\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{bmatrix}$，故级数发散.

$$(3)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^k$$

解:原式

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}(-1)^k & k(-1)^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}(-1)^{k-2}\\ 0 & (-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)(-1)^{k-2}}{2k}\\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{bmatrix},$$

所以级数发散

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k$

解：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} & 0 & 0\\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{bmatrix}$$，级数条件收敛.

例5： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且$\rho(A) < 1$，求$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$.

例5： 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且$\rho(A) < 1$，求 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$

解： 考虑复变幂级数$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$，因为 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1 \Rightarrow$ 收敛半径为1.因为 $\rho(A) < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$收敛.

$$设\ f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k,\ |z| < 1.$$

令 $f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{k-1}$，则$f(z) = z f_1(z)$.

当$|z| < 1$时，$\int_0^z f_1(z)dz = \int_0^z \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{k-1}\right) dz =$

解： 当$|z| < 1$时, $\int_0^z f_1(z)dz =$

$\int_0^z (\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{k-1})\, dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z k^2 z^{k-1} dz =$

$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = z\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}$.

而$\int_0^z (\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1})dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z kz^{k-1}dz = \sum_{k=1}^{\infty} z^k$

$= \frac{z}{1-z} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$.

所以 $f(z) = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$, $|z| < 1$

$\Rightarrow f(A) = A(I + A)(I - A)^{-3}, \rho(A) < 1.$