1.6 不变子空间

定义1（不变子空间）设V是数域F上的线性空间, W是V的一个子空间, $T \in L(V)$. 如果$\forall x \in W$,都有$T(x) \in W$,称W是T的一个不变子空间.

定义1（不变子空间）设V是数域F上的线性空间, W是V的一个子空间, $T \in L(V)$. 如果$\forall x \in W$,都有$T(x) \in W$,称W是T的一个不变子空间.

例如(1)线性空间V的任意一个子空间都是数乘变换的不变子空间.

(2) $\forall T \in L(V)$, 整个空间V和零子空间$\{\theta\}$都是T的不变子空间,称为平凡不变子空间.

(3)不变子空间的交与和也是不变子空间.

例1 设V是数域F上的线性空间，$T \in L(V)$. $\mathrm{R}(T)$与$\mathrm{N}(T)$是T的不变子空间.

证明：设$\alpha \in \mathrm{R}(T)$,显然有$T\alpha \in \mathrm{R}(T)$,所以$\mathrm{R}(T)$是$T$的不变子空间.

设$\beta \in \mathrm{N}(T)$,则$T\beta = 0 \in \mathrm{N}(T)$,所以$\mathrm{N}(T)$是$T$的不变子空间.

例2 设V是数域F上的线性空间，$T \in L(V)$. T的特征子空间是T的不变子空间.

定理1 设V是数域F上的线性空间，$T \in L(V)$. 则V可以分解成T的不变子空间的直和

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

的充分必要条件是T在某组基下的矩阵是准对角阵$diag\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$.其中$A_i$是$T|_{W_i}$在对应基下的矩阵.

注：定理表明可以使用不变子空间简化线性变换的矩阵.