2020—2021 学年第 1 学期

考试答题册

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成绩								
阅卷人签字								
校对人签字								

考试课程___矩阵理论______

学　　号________________

姓　　名____________**成 绩**________________

任课教师____________

2021 年 1 月 11 日

试卷说明：以下 A\B 试卷任选一套

A 卷　　　　学号________　　　　姓名_________

一.判断与选择**(30 分)**

(1) 若 B 是列满秩(高阵)，C 是行满秩，则 $B^{+}=(B^{H}B)^{-1}B^{H}$ 且 $C^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}$ （　）

(2)若矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩 $rank(A)=1$，则 $A^{+}=(\sum|a_{ij}|^{2})^{-1}A^{H}$ （　）

(3)已知正奇值分解：$A=P\Delta Q^{H}$，$P^{H}P=I=Q^{H}Q$，则 $A^{+}=Q\Delta^{+}P^{H}$ （　）

(4) 列向量 X 的模长 $|X|$ 满足公式 $X^{H}X=|X|^{2}$，且 $X^{H}A^{H}AX=|AX|^{2}$.（　）

(5)若 $A^{H}AX=0$，则有可能 $AX\neq 0$ （　　）

(6)设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 则有迹公式：$tr(A^{H}A)=tr(AA^{H})=\sum|a_{ij}|^{2}$ （　）

(7)若 $Ax=b$ 无解**(不相容)，则** $A^{H}Ax=A^{H}b$ **也**无解**(不相容)** （　　）

(8)方阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 满足 $|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|_{1}$，且 $[\rho(A)]^{3}=\rho(A^{3})$ （　）

(9)设 $A=A_{n\times p},B=B_{p\times n}$，则 AB **,** BA **有相同的非 0 特征根，且** $tr(BA)=tr(AB)$ （　　）

(10) $\|\bullet\|$ 是相容的矩阵范数，I 是单位阵，则可能有 $\|I\|<1$ （　）

(11) 正确的张量积公式为______ (a) $(A\otimes B)^{H}=A^{H}\otimes B^{H}$；(b) $(A\otimes B)^{H}=B^{H}\otimes A^{H}$

(12) 正确的公式为 ______ (a) $(A\otimes B)^{+}=B^{+}\otimes A^{+}$；(b) $(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$

(13)若 $x_{0}=A^{+}b$，**则** $A^{H}Ax_{0}=A^{H}b$ ______ ，(a) 不成立；(b) 一定成立

(14)若 $A=A_{m,n}$ 是列满秩(高阵)，**则** ______ ， **(a)** $A^{+}A=I$； **(b)** $AA^{+}=I$

(15)齐次方程 $AX=0$ 通解公式为: **(a)** $X=(I-A^{-}A)Y$；(b) $X=(I-AA^{-})Y$

二.**填空(10 分)**

(1) B 是列满秩(高阵)，C 是行满秩，则 $B^{+}B-I=$________，$CC^{+}=$_______

(2)若 $A=BC$ 是满秩分解(高低分解)，则 $A^{+}=C^{+}B^{+}$，也即 $(BC)^{+}-C^{+}B^{+}=$_______

(3)若 2 阶方阵 A 的特征多项式 $=x^{2}+x+1$，则 $A^{2}+A+I=$_______

(4) A 是 n 阶方阵，则行列式 $\det(e^{A})=e^{tr(A)}$,且 $e^{-A}e^{A}=$ _______

A 卷

(5)已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $e^{tA}=e^{\begin{pmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$, 则 $e^{2tA}=$ ____________

三. 化简与计算(**10 分**)

1. 设 A 为方阵，且 $\|A\|_1<1$. 化简 $(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)^2=?$

2.设 A 的 QR 分解是 $A=QR$，其中 $Q^HQ=I$，求 $R-Q^HA$

3.设 $A=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}_{4\times4}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, **求 A^+**

4. 设 $A=\begin{pmatrix}D & -iD\\ D & -iD\end{pmatrix}$, $(i^2=-1)$，$D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(1) **用**张量积公式求 A^+ **；**(2)求全体**特征根** $\lambda(A)$ **.**

四.计算(15 分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, **求 $Ax=\beta$ 的最佳极小二乘解.**

2. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 $(A+I)^2$； 求 $e^{t(A+I)}$ 与 e^{tA}

3. **设**正规阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求 $f(A)=\sqrt{A}$

五. 计算(**10 分**)

1. $A=\begin{pmatrix}6i & 0 & -1\\ 1 & 6 & 0\\ i & 1 & 10\end{pmatrix}$, $(i^2=-1)$. (1)画出 A 的盖尔圆盘; (2)估计谱半径 $\rho(A)$ 的范围.

2.求解微分方程 $\frac{dX}{dt}=AX$, $X=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$ 且 $t=0$ 时, $X(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$， $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

A 卷

六. 计算(**10 分**) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，求**正奇值分解**(正 SVD) $A=P\Delta Q^H$，或**奇异值分解.**

七.证明与计算(15 分)

1. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & c\\ a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\end{pmatrix}$ （$a>0,b>0,c>0$）

求 $|\lambda I-A|$ 与特根的模长 $|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|$；**化简许尔估计：** $\sum_j|\lambda_j|^2\le\sum_{i,j=1}^{3}\left|a_{ij}\right|^2$

2. 设 A 为 n 阶 Hermite 阵，证明 A 的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 全为实数

3. 设 B 为 n 阶斜 Hermite 阵 $(B^{\mathrm{H}}=-B)$，证明 $\frac{B}{i}$ 为 Hermite 阵，且有

$$|\det(B+I)|\ge 1$$

B 卷　　　　　　姓名：　　　　　　　　学号：

一．（10 分）判断与选择

1. 若矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩 $r(A)=1$，则 $A^{+}=(\sum_{i,j}|a_{ij}|^{2})^{-1}A^{H}$.　　（　　）

2. $\|\bullet\|$ 是矩阵范数，I 是单位矩阵，则有可能 $\|I\|<1$.　　（　　）

3. 设 $A\in C^{n\times n}$ 满足 $A^2=A$，则 $tr(A)=r(A)$.　　（　　）

4. 若齐次线性方程组 $Ax=0$(其中 $A\in C^{m\times n}, x\in C^{n}$) 有唯一解，则 A^HA 是正定矩阵.

（　　）

5. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,张量积 $A\otimes B$ 的全部特征值是 $2a,3b$.　（　　）

6. 设 A 是 Hermite 幂等矩阵，则 $A^{+}=A$.　　（　　）

7. 若 $A^HAX=0$，则有可能 $AX\neq 0$　　（　　）

8. 若 B 是列满秩(高阵)，C 是行满秩，则 $B^{+}=(B^HB)^{-1}B^H$　且 $C^{+}=C^H(CC^H)^{-1}$　（　　）

9. 正确的张量积公式为_____　(a) $(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$；(b) $(A\otimes B)^H=B^H\otimes A^H$

10. 齐次方程 $AX=0$ 通解公式为:____　(a) $X=(I-A^{-}A)Y$; (b) $X=(I-AA^{-})Y$

二．（39 分）填空

1.若 $A=BC$ 是满秩分解(高低分解)，则 $A^{+}=C^{+}B^{+}$，也即 $(BC)^{+}-C^{+}B^{+}=$________.

2. 若 2 阶方阵 A 的特征多项式 $=x^2+x+1$，则 $A^2+A+I=$______.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，则 $\lim_{k\to\infty}A^k=$_____，矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A^k$ _______.（第二个空填“收敛”或者“发散”）

4. A 是 n 阶方阵，则行列式 $\det(e^{A})=e^{tr(A)}$,且 $e^{-A}e^{A}=$________.

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tA}=e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$，则 $e^{2tA}=$__________________.

B 卷

6. 设 A 为方阵，且 $\|A\|_1 < 1$． 则 $(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)^2 =$ ________.

7. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，O 是 n 阶零矩阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix}$ 的**伪逆**是________.

8. 已知 $(A+I)^2=0$，则 $e^{t(A+I)} = I + t(A+I) + \frac{(t(A+I))^2}{2} + \frac{(t(A+I))^3}{3!} + \cdots =$ ________.

9.设 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty$ = ____, $\|Ax\|_1 =$____，$\rho(A)=$________.

10. $A=\begin{pmatrix} 6i & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ i & 1 & 10 \end{pmatrix}$，$A$ 的盖尔圆盘是 ________________.

三．（10 分） 设 A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，求 A 的奇异值分解或者简化奇异值分解.

四．（10 分）设 A=$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$，(1)求 B 的特征值，(2)说明 A 相似于对角阵，且求 A 的谱分解.

五.（10 分）已知 A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，b = $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.（1）求 A 的满秩分解，并用满秩分解求 A^+.（2）判断 Ax = b 是否有解. （3）求 Ax = b 的极小范数解或极小最小二乘解.

六.（11 分）设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，(1)求 A 的不变因子与初等因子，(2)求 A 的 Jordan 标准形，(3)求 $\sin A$.

B 卷

七．（10 分）证明

1. 设 A 为 n 阶 Hermite 阵，证明 A 的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 全为实数.

2. 若A列满秩，则$A^{(1,3)}=A^{+}$(唯一).