第一章 线性代数基础

1.10 正交投影

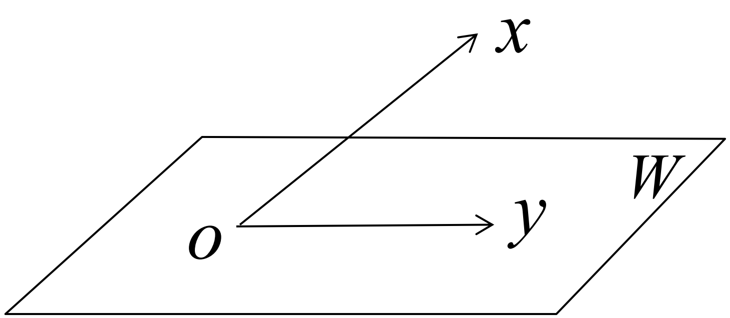
定义1(正交投影)设W是酉空间V的子空间, 且$W \oplus W^{\perp} = V$.设$x \in V$, 如果存在$y \in W, z \in W^{\perp}$使得$x = y + z$, 则称y是x在W上的正交投影.

定理1(投影定理)设W是酉空间V的有限维子空间. $\forall x \in V$, x在W上的正交投影存在且唯一.

注： W的正交补$W^{\perp}$存在且唯一.

定义2(最佳逼近)设W是酉空间V的非空子集.设$x \in V$, 如果存在$y \in W$ 使得$\|x-y\| = \inf_{z \in W} \|x-z\| = d(x, W)$, 则称$y$是$x$ 在W上的最佳逼近.

定理2设W是酉空间V的子空间, 设$x \in V$, 则$y \in W$是x在W上的最佳逼近充分必要条件是$x - y \perp W$.



定理2设W是酉空间V的子空间, 设$x \in V$, 则$y \in W$是x在W上的最佳逼近充分必要条件是$x - y \perp W$.

证明：必要性,采用反正法. 设$y \in W$是x在W上的最佳逼近, 但是$x - y \perp W$不成立, 则存在非零向量$z \in W$(不妨假设$\|z\| = 1$)使得$(x - y, z) = t(\neq 0)$.

令$\mathrm{u} = y + tz$, 则$\mathrm{u} \in W$, 且

$\|x - u\|^2 = (x - y - tz, x - y - tz) = \|x - y\|^2 - |t|^2$. 这与$y$是$x$在$W$上的最佳逼近矛盾, 所以$x - y \perp W$成立.

定理2设W是酉空间V的子空间, 设$x \in V$, 则$y \in W$是x在W上的最佳逼近充分必要条件是$x - y \perp W$.

证明：充分性. 设$y \in W$, 且$x - y \perp W$. 则$\forall z \in W$, 有

$$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

定理3设W是酉空间V的有限维子空间. $\forall x \in V$, x在W上都有唯一的最佳逼近，且x在W上的最佳逼近是x在W上的正交投影.

定理3设W是酉空间V的有限维子空间. $\forall x \in V$, x在W上都有唯一的最佳逼近，且x在W上的最佳逼近是x在W上的正交投影.

证明： 由投影定理知，$\forall x \in V$，x可唯一的表示为

$$x = y + z, \text{其中} y \in W, z \in W^{\perp}.$$

即y是x在W上的正交投影. 因为$x - y \perp W$, 由定理2知y是x在W上的最佳逼近, 又因为x在W上的正交投影y是唯一的, 所以x在W上的最佳逼近y是唯一的.证毕.

设$e_1, \ldots, e_r$是子空间W一组基, 对$y \in W$,

$$y = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_r e_r$$

由定理2, y是V中向量x在W上的最佳逼近充分必要条件是$x - y \perp W$, 即$x - y \perp e_i$, $(1 \leq i \leq r)$. 此时对于$1 \leq i \leq r$,

$$(x - y, e_i) = (x, e_i) - \sum_{j=1}^{r} k_j (e_j, e_i) = 0$$

我们得到方程组

$$Ax = b \qquad （1）$$

其中A是度量矩阵$\left((e_j, e_i)\right)_{r\times r}$, $x = (k_1, \ldots, k_r)^T$,

$b=((x,e_1),\ldots,(x,e_r))^T$. 因为度量矩阵$A$一定可逆，所以方程组（1）有唯一的解，也就是$x$ 在W上都有唯一的最佳逼近$y=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r$.

特别的，如果$e_1,\ldots,e_r$是W的一组标准正交基，则度量矩阵A是单位矩阵，此时x 在W上都有唯一的最佳逼近

$$y=(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2+\cdots+(x,e_r)e_r.$$

定理4 设W是酉空间V的一个闭凸集. $\forall x \in V$, x在W上都有唯一的最佳逼近.

证略.

例1（最小二乘问题）在许多观测数据中，如果已知y与$x_1, ..., x_n$满足线性关系

$$y = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n,$$

但是不知道系数$k_1, \cdots, k_n$. 为了确定这些系数，通过做$m \geq n$次试验得到m组观测数据：

1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$\cdots$	$x_n^{(1)}$	$y^{(1)}$
2	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$\cdots$	$x_n^{(2)}$	$y^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$\cdots$	$x_n^{(m)}$	$y^{(m)}$

按如下意义确定系数：求$k_1, k_2, \cdots, k_n$使得

$$\min_{l_i \in \mathbb{C}} \sum_{j=1}^{m} \left\| y^{(j)} - \sum_{i=1}^{n} l_i x_i^{(j)} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left\| y^{(j)} - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^{(j)} \right\|^2.$$

记$\boldsymbol{a_i} = \left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \cdots, x_i^{(m)}\right)^{\boldsymbol{T}}$，$\mathrm{b} = \left(y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(m)}\right)^T$，

$l = (l_1, l_2, \cdots, l_n)^T$，$k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^T$，上式化为

$$\min_{l \in \mathbb{C}} \left\| b - \sum_{i=1}^{n} l_i a_i \right\|^2 = \left\| b - \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \right\|^2$$

可以看成是求$\mathbb{C}^n$中向量b在$\mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$上的最佳逼近.

令$A=(a_1,\cdots,a_n)$, 由定理2知$k_1,k_2,\cdots,k_n$满足：

$$A^HAk=A^Hb$$

例2 已知发动机涡轮叶片的不合格率y与某种材料成分x有关，下表是观测值

类别	观测值						
y(%)	1.00	0.9	0.9	0.81	0.60	0.56	0.35
x(%)	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2

可以认为y与x是线性关系：即

$$y = ax + b$$

如何确定这里的系数a与b？

解： 将a与b看成未知数x_1与x_2，得到下面的方程组：

$$\begin{cases} 3.6x_1+x_2=1 \\ 3.7x_1+x_2=0.9 \\ 3.8x_1+x_2=0.9 \\ 3.9x_1+x_2=0.81 \\ 4.0x_1+x_2=0.6 \\ 4.1x_1+x_2=0.56 \\ 4.2x_1+x_2=0.35 \end{cases}$$

令$A=\begin{bmatrix} 3.6 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 3.8 & 1 \\ 3.9 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 4.1 & 1 \\ 4.2 & 1 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.81 \\ 0.6 \\ 0.56 \\ 0.35 \end{bmatrix}$

则

$$A^T A x = A^T b, \textbf{其中} x = (x_1, x_2)^T$$

解得：$x_1 = -1.05$，$x_2 = 4.81$

线性方程为

$$y = ax + b = -1.05x + 4.81$$

例3：（函数的最佳逼近问题） 设$f(x) \in \boldsymbol{C}[a,b]$, $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是$\boldsymbol{C}[a,b]$上的线性无关函数组，求系数$k_1,k_2,\cdots,k_n$使函数$P(x)=\sum_{i=1}^{n} k_i\varphi_n(x)$逼近$f(x)$时$\int_a^b (f(x)-P(x))^2dx$最小.

解： 设$f,\ g \in C\,[a,b]$,定义内积

$$(f,\ g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$$

则$C\,[a,b]$是一个欧式空间. 令

$$\mathrm{W}=\mathrm{span}\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

$$W=\mathrm{span}\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

W是$\boldsymbol{C}[a,b]$的一个n维子空间,且

$$\|f-P\|^2=\int_a^b(f(x)-P(x))^2dx$$

于是问题转化为求$\boldsymbol{C}[a,b]$中向量$f(x)$在W上的最佳逼近$P(x)$.由定理3和定理4知，这个问题的解存在且唯一,且$k_1,k_2,\cdots,k_n$是如下方程组的解：

第一章 线性代数基础——正交投影

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_1) \\ (f,\varphi_2) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

习题：求下列方程的最小二乘解（取三位有效数字）

$$\begin{cases} 0.39x - 1.89y = 1 \\ 0.61x - 1.80y = 1 \\ 0.93x - 1.68y = 1 \\ 1.35x - 1.50y = 1 \end{cases}$$

答案：$x = 0.148$，$y =- 0.512$