第四章 矩阵分析

4.4 矩阵函数及其计算

定义1（矩阵函数） 设幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$的收敛半径为$R$, 且当$|z| < R$ 时, 幂级数收敛于函数$f(z)$, 即

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m, \ |z| < R$$

若$\forall A \in C^{n\times n}$, 满足$\rho(A) < R$. 称收敛的矩阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$的和为**矩阵函数**, 记为$f(A)$.

即$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$, 特别地, 当$R =+ \infty$时,

$\forall A \in C^{n\times n}$, $f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$.

我们熟悉的一些函数有：

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m, R = +\infty,$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}, R = +\infty,$$

对应的**矩阵函数**为：

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m, \forall A = C^{n\times n},$$

$$\sin A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \mathrm{A}^{2m+1}, \forall A = C^{n\times n},$$

我们熟悉的一些函数有：

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}, R =+ \infty ,$$

$$(1-z)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m ,R = 1.$$

对应的**矩阵函数**为：

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \mathrm{A}^{2m}, \forall A = C^{n\times n},$$

$$(I-A)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m ,\rho(A) < 1.$$

称e^A为**矩阵指数函数**, $\sin A$为**矩阵正弦函数**, $\cos A$为**矩阵余弦函数**.

若$f(A)$的变元A换成At,t为参数,则有

$$f(At)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(At)^m, \quad |t|\rho(A)<R.$$

在实际应用中会经常遇到含参数的矩阵函数.

命题1： 设$A \in C^{n\times n}$,则

1)$e^{iA} = \cos A + isin\, A$; 2)$\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$;

3)$\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$; 4)$sin^2 A + \cos^2 A = I$;

5)若$AB = BA$, 则$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$;

6)一般的, $e^A e^B$,$e^B e^A$,e^{A+B}互不相等;

7） $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = I$, 即$(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(**注：** $\forall A, e^A$总是可逆的)

证明： 1)-4)可直接验证, 6)可见书上反例, 7)为5)的推论. 下证5), 只需验证$e^A e^B = e^{A+B}$,

证明： 1)-4)可直接验证, 6)可见书上反例, 7)为5)的推论.下证5), 只需验证$e^A e^B = e^{A+B}$,

$$e^A e^B = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\right)$$

$$= I + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$$

$$= I + (A + B) + \frac{1}{2!}(A + B)^2 + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A + B)^m = e^{A+B}.$$

例1： 设$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, 求$e^{At}$.

例1： 设$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求$e^{At}$.

解： $|\lambda I-A|=\lambda^2+1$，由$Cayley$定理知，$A^2+I=0$，

故$A^2=-I$，$A^3=-A$，$A^4=I$，$A^5=A$，...，有：

$A^{2k}=(-1)^k I$，$A^{2k+1}=(-1)^k A$，$k=1,2,\ldots$，故

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At)^k=\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\ldots\right)I+\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\right)A=(\cos t)I+(\sin t)A$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

例2： 设$A \in C^{n\times n}$, 特征值为$\pi,-\pi,0,0$,求$e^A,\cos A,\sin A$.

例2： 设$A \in C^{n\times n}$, 特征值为$\pi,-\pi,0,0$,求 $e^A,\cos A,\sin A$.

解： 由条件知$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda-\pi)(\lambda+\pi)$

$$= \lambda^4 - \pi^2\lambda^2,$$

由$Cayley$定理知, $A^4 = \pi^2\lambda^2$, 所以

$$\sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \frac{1}{7!}A^7 + \ldots$$

$$= A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{\pi^2}{5!}A^3 - \frac{\pi^4}{7!}A^3 + \ldots$$

$$= A + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{\pi^2}{5!} - \frac{\pi^4}{7!} + \ldots\right)A^3$$

$$= A + \frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}A^3 = A - \pi^{-2}A^3.$$

同理可得：$\cos A = I - \frac{2}{\pi^2}A^2,$

$$e^A = I + A + \frac{p}{\pi^2}A^2 + \frac{e^\pi-\pi-1-p}{\pi^3}A^3,$$

其中$p = \frac{e^\pi+e^{-\pi}}{2} - 1.$

注1： 由特征多项式的零化特点, 可将矩阵函数计算简化, 但一般仍显繁琐.

注2： 由上面两个例子可以看到, 矩阵指数函数和三角函数可表示为一个次数不超过特征多项式次数的矩阵多项式. 对一般矩阵函数, 这个结论也是成立的.

定义2：(矩阵函数的计算法(一))

1.A为单纯矩阵, 则存在可逆矩阵P使

$A=Pdiag\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}P^{-1}$,设$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m$,

$|z|<R$. 则当$\rho(A)<R$时，$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m A^m$,

所以

$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m A^m=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\left(Pdiag\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}P^{-1}\right)^m$$

$$=\mathrm{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_m\,\mathrm{diag}\{\lambda_1{}^m,\ldots,\lambda_n{}^m\}\right)P^{-1}$$

$$= P\left(diag\left\{\sum_{m=0}^{\infty} c_m {\lambda_1}^m, \ldots, \sum_{m=0}^{\infty} c_m {\lambda_n}^m\right\}\right) P^{-1}$$

$$= P(diag\{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\})\ P^{-1}$$

故A为单纯矩阵，$f(A)$仍为单纯矩阵.

A为单纯矩阵,求$f(A)$的步骤:

1.求A的特征值$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, 及可逆矩阵$P$使

$P^{-1}AP = diag\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$,

2.若$\rho(A) < R$, 则

$f(A) = P(diag\{f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n)\})P^{-1}$.

特别地, 有:

$$e^{A}=P(diag\{e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n}\})P^{-1},$$

$$\sin A=P(diag\{\sin\lambda_1,\cdots,\sin\lambda_n\})P^{-1},$$

$$\cos A=P(diag\{\cos\lambda_1,\cdots,\cos\lambda_n\})P^{-1},$$

$$e^{At}=P(diag\{e^{\lambda_1 t},\cdots,e^{\lambda_n t}\})P^{-1},$$

$$\sin At=P(diag\{\sin\lambda_1 t,\cdots,\sin\lambda_n t\})P^{-1},$$

$$\cos At=P(diag\{\cos\lambda_1 t,\cdots,\cos\lambda_n t\})P^{-1},$$

注1： 同理有

$$f(At) = P(diag\{f(\lambda_1 t), \cdots, f(\lambda_n t)\})P^{-1},$$
$$|t|\rho(A) < R.$$

注2： A为单纯矩阵, 有谱分解

$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$为$A$的互异的特征值, 若 $\rho(A) < R$, 则

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i\right)^m$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda_i{}^m\right) E_i = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) E_i$$

例3： 设$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 求$e^{At}$,$\cos A$.

例3： 设$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$, 求$e^{At}$,$\cos A$.

解： $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=-2.$$

对$\lambda_2=-2$, 取特征向量$\eta_1=(-1,1,1)^T$.

对$\lambda_1=1$, 取特征向量$\eta_2=(-2,1,0)^T$, $\eta_3=(0,0,1)^T$.

所以A是单纯矩阵.

令$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{-2t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{t}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{t}-e^{-2t} & 2e^{t}-2e^{-2t} & \\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-e^{t} & \\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-2e^{t} & e^{t}\end{pmatrix}.$$

$$\cos A = P\begin{pmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - \cos 1 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - 2\cos 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

2. A为一般矩阵,则存在可逆矩阵P使

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, 1 \le i \le s.$

设$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m, |z|<R$.则当$\rho(A)<R$时,

$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m A^m,$$

所以$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m A^m=\sum_{m=0}^{\infty}c_m (PJP^{-1})^m$

$$=P\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_m J^m\right)P^{-1}$$

第四章 矩阵分析——矩阵函数及其计算

$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mA^m=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(PJP^{-1})^m$$

$$=P(\sum_{m=0}^{\infty}c_mJ^m)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}\sum_{m=0}^{\infty}c_m{J_1}^m(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{m=0}^{\infty}c_m{J_s}^m(\lambda_s)\end{pmatrix}P^{-1},$$

$$=Pf(J)P^{-1}$$

其中，$J=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_s(\lambda_s)\end{pmatrix}.$

$$J_i{}^m(\lambda_i) =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i{}^m & C_m^1\lambda_i{}^{m-1} & \cdots & & C_m^{n_i-1}\lambda_i{}^{m-n_i+1} \\ & \lambda_i{}^m & C_m^1\lambda_i{}^{m-1} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & C_m^1\lambda_i{}^{m-1} \\ 0 & & & & \lambda_i{}^m \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},$$

$1 \le i \le s, m \ge n_i - 1.$

$$f\left(J_i(\lambda_i)\right)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m {J_i}^m(\lambda_i)=$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{m=0}^{\infty}c_m\,{\lambda_i}^m & \sum_{m=1}^{\infty}c_m\,C_m^1{\lambda_i}^{m-1} & \cdots & \sum_{m=n_i-1}^{\infty}c_m\,C_m^{n_i-1}{\lambda_i}^{m-n_i+1}\\ & \sum_{m=0}^{\infty}c_m\,{\lambda_i}^m & \sum_{m=1}^{\infty}c_m\,C_m^1{\lambda_i}^{m-1} & \vdots\\ & & \ddots \quad \ddots & \\ & & \ddots & \sum_{m=1}^{\infty}c_m\,C_m^1{\lambda_i}^{m-1}\\ 0 & & & \sum_{m=0}^{\infty}c_m\,{\lambda_i}^m\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

上三角元

$$\sum_{m=l}^{\infty}c_m C_m^l\lambda_i^{m-1}=\frac{1}{l!}\sum_{m=l}^{\infty}c_m m(m-1)\cdots(m-l+1)\lambda_i^{m-1}$$

$$=\frac{1}{l!}f^{(l)}(\lambda_i)\,,\qquad 0\le l\le n_i-1$$

则$f(A) = P\begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix}P^{-1}$, 其中

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ 0 & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i \times n_i},$$

$1 \leq i \leq s.$

*Sylvester*公式

推论1： $A \in C^{n\times n}$, A 的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,

$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$的收敛半径为$R$.当$\rho(A)<R$

时,$f(A)$的特征值为$f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)$.

特别地，$\forall A \in C^{n\times n}$, e^A的特征值为$e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n}$;

$\sin A$的特征值为$\sin\lambda_1,\cdots,\sin\lambda_n$,

$\cos A$的特征值为$\cos\lambda_1,\cdots,\cos\lambda_n$,

上述三个函数收敛半径为∞, 所以对矩阵A没有要求.

推论2： $f(At)=P\begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_s(\lambda_s)t) \end{pmatrix}P^{-1}$,

其中$f(J_i(\lambda_i)t)=$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_i t) & tf'(\lambda_i t) & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\lambda_i t) \\ & f(\lambda_i t) & tf'(\lambda_i t) & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & tf'(\lambda_i t) \\ 0 & & & f(\lambda_i t) \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}, \quad 1\le i\le s.$$

例4： 设$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$,求$e^A$,$\sin At$.

例4： 设$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$,求$e^A$,$\sin At$.

解： 先计算A的初等因子$(\lambda-1)^2$,$(\lambda-2)$

$$\Rightarrow J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

求出变换矩阵$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$使$P^{-1}AP=J$.

$$e^A = P\begin{pmatrix} e & e & \\ & e & \\ & & e^2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -e & 0 & e \\ 3e - e^2 & e^2 & -2e + e^2 \\ -4e & 0 & 3e \end{pmatrix}.$$

设$f(\lambda) = \sin\lambda$, 则

$$\sin At = P\begin{pmatrix} \sin t & t\cos t & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2t \end{pmatrix}P^{-1} = \ldots$$

$$f(J_i(\lambda_i)t)$$

$$=\begin{pmatrix} f(\lambda_i t) & tf'(\lambda_i t) & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\lambda_i t) \\ & f(\lambda_i t) & tf'(\lambda_i t) & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & tf'(\lambda_i t) \\ 0 & & & f(\lambda_i t) \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},$$

$$1 \leq i \leq s.$$

4.4 矩阵函数及其计算二

我们看到,尽管$Sylvester$公式非常漂亮, 当A是非单纯矩阵时, 计算非常繁琐, 所以我们引入下面的谱上的一致多项式.

三、矩阵函数的计算法 (二)

定理1 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $m_A(\lambda)$为A的最小多项式, $\deg m_A(\lambda) = l$, 复函数$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$的收敛半径为$R$. 若$\rho(A) < R$, 则$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$可表为$A$的$l-1$次多项式$p(A)$, 即存在$p(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_{l-1}\lambda^{l-1}$, 使得

$$f(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \cdots + \beta_{l-1}A^{l-1} = p(A)$$

且p(λ)是唯一的.

证明 $m_A(\lambda)$为A的最小多项式，$\deg m_A(\lambda)=l$, 当$m\geq l$时有$\lambda^m=q_m(\lambda)m_A(\lambda)+r_m(\lambda)$,

其中$\deg r_m(\lambda)\leq l-1$.

所以：$A^m=q_m(A)m_A(A)+r_m(A)=r_m(A)$.

因此：$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mA^m=\sum_{m=0}^{l-1}c_mA^m+\sum_{m\geq l}c_mr_m(A)$.

由条件$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$绝对收敛, 任意调整次序仍绝对收敛, 所以

$$f(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \cdots + \beta_{l-1} A^{l-1}$$

其中$\beta_0, \cdots, \beta_{l-1}$均为绝对收敛的数值级数的和.

唯一性：

设还有$p_1(\lambda) = \beta'_0 + \beta'_1\lambda + \cdots + \beta'_{l-1}\lambda^{l-1}(\neq p(\lambda))$,

使得

$$f(A) = \beta'_0 I + \beta'_1 A + \cdots + \beta'_{l-1} A^{l-1} = p_1(A)$$

则$p(A) - p_1(A) = 0$, 而$\deg(p(\lambda) - p_1(\lambda)) \leq l - 1$,

与$m_A(\lambda)$是最小多项式矛盾.

将$f(A)$表示为一个矩阵多项式的步骤：

1.求A的互异特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 及最小多项式

$m_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$,

$\deg m_A(\lambda) = l = m_1 + \cdots + m_s$.

2.令$p(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_{l-1} \lambda^{l-1}$, l个系数

$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{l-1}$由$l$个独立条件给出：

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i);$$

$$j = 0, \cdots, m_i - 1; i = 1, \cdots, s.$$

3.$f(A)=p(A)=\beta_0 I+\beta_1 A+\cdots+\beta_{l-1}A^{l-1}$.

称$p(\lambda)$为A的谱上一致多项式.

注1 无论A是否为单纯矩阵, 方法二均适用, 当A的非单纯矩阵时, 方法二简单一些.

注2 以上步骤可作为对矩阵函数的重新定义.

例5 设$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, 求$e^{A}$.

例5 设$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, 求$e^A$.

解 由$|\lambda I-A|=(\lambda-5)(\lambda+2)$

$$\Rightarrow m_A(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda+2).$$

令$P(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda, f(\lambda)=e^\lambda$.则

$$\begin{cases} p(5)=f(5) \\ P(-2)=f(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0+5\beta_1=e^5 \\ \beta_0-2\beta_1=e^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0=\dfrac{1}{7}(2e^5+5e^{-2}) \\ \beta_1=\dfrac{1}{7}(e^5-e^{-2}) \end{cases}$$

所以$f(A)=e^A=p(A)=\beta_0 I+\beta_A$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^5+4e^{-2} & 4e^5-4e^{-2}\\ 3e^5-3e^{-2} & 4e^5+3e^{-2}\end{pmatrix}$$

例6 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\sin A$.

例6 设$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, 求$\sin A$.

解 经计算$\lambda I-A\cong diag\{1,1,(\lambda-2)^2(\lambda-1)\}$

$$\Rightarrow m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

令$p(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2, f(\lambda)=\sin\lambda$.则

$$\begin{cases} p(1) = f(1) \\ p(2) = f(2) \\ p'(2) = f'(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = \sin 1 \\ \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 = \sin 2 \\ \beta_1 + 4\beta_2 = \cos 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = 4\sin 1 - 3\sin 2 + 2\cos 2 \\ \beta_1 = -4\sin 1 + 4\sin 2 - 3\cos 2 \\ \beta_2 = \sin 1 - \sin 2 + \cos 2 \end{cases}$$

所以$\sin A = p(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2 & 12\sin 1 - 12\sin 2 + 13\cos 2 & -4\sin 1 + 4\sin 2 \\ 0 & \sin 2 & 0 \\ 0 & -3\sin 1 + 3\sin 2 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

令$p(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda+\cdots+\beta_{l-1}\lambda^{l-1}$，$l$个系数$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{l-1}$由$l$个独立条件给出：

$$p^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i);j=0,\cdots,m_i-1;i=1,\cdots,s.$$

则$f(A)=p(A)=\beta_0 I+\beta_1 A+\cdots+\beta_{l-1}A^{l-1}$.

令$p_t(\lambda)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda+\cdots+\alpha_{l-1}(t)\lambda^{l-1}$，$l$个系数$\alpha_0(t),\alpha_1(t),\cdots,\alpha_{l-1}(t)$是参数$t$的函数，由$l$个独立条件给出：

$$p_t^{(j)}(\lambda_i)=t^j f^{(j)}(\lambda_i t);j=0,\cdots,m_i-1;i=1,\cdots,s.$$

则$f(At)=\ \alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\cdots+\alpha_{l-1}(t)A^{l-1}$.

例7 设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求$e^{At}$.

例7 设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求$e^{At}$.

解 经计算$\lambda I-A\cong diag\,\{1,1,(\lambda-2)^3\}$

$$\Rightarrow m_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$$

令$p_t(\lambda)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda+\alpha_2(t)\lambda^2, f(\lambda)=e^{\lambda}$则

$$\begin{cases} p_t(2) = f(2t) \\ p'_t(2) = tf'(2t) \\ p''_t(2) = t^2 f''(2t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) + 2\alpha_1(t) + 4\alpha_2(t) = e^{2t} \\ \alpha_1(t) + 4\alpha_2(t) = te^{2t} \\ 2\alpha_2(t) = t^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = e^{2t}(1 - 2t + 2t^2) \\ \alpha_1(t) = e^{2t}(t - 2t^2) \\ \alpha_2(t) = t^2 e^{2t}/2 \end{cases}$$

所以$e^{At}=p_t(A)=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\alpha_2(t)A^2$

$$=e^{2t}((1-2t+2t^2)I+(t-2t^2)A+\frac{t^2}{2}A^2)$$

设$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & i \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 10 \end{pmatrix}$

i是虚数单位，写出A的全部盖尔圆，

并证明A可逆