# 第五章 矩阵的直积

## 5.1 直积的定义与性质

**定义1（Kronecker积）** 设$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{p\times q}$, 称如下分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{mp\times nq}$$

为$A$与$B$的**Kronecker积**（或**直积**, **张量积**），简记为$A\otimes B=\left(a_{ij}B\right)$.

**例1** 计算$A\otimes B$和$B\otimes A$, 其中

$$A=\begin{bmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**解：** $A\otimes B=\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3a & 3b \\ 2c & 2d \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$, $\quad B\otimes A=\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \\ 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$.

由此例看出，尽管$A\otimes B$和$B\otimes A$是同阶矩阵，但一般来说$A\otimes B\neq B\otimes A$，即**Kronecker积不满足交换律**.

**定理1** 由Kronecker积定义可证：

（1）两个上三角矩阵的直积也是上三角矩阵；

（2）两个对角矩阵的直积也是对角矩阵；

（3）$I_n \otimes I_m = I_m \otimes I_n = I_{mn}$.

**命题1** 矩阵直积**分块运算规律**：

（1）$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \otimes F = \begin{bmatrix} A\otimes F & B\otimes F \\ C\otimes F & D\otimes F \end{bmatrix}$；

（2）设$\alpha$是列向量，且$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$则

$$\alpha\otimes B=(\alpha\otimes\beta_1,\alpha\otimes\beta_2,\cdots,\alpha\otimes\beta_s);$$

（3）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)_{n\times t}$,$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)_{p\times s}$,

则 $A\otimes B=$

$$(\alpha_1\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_1\otimes\beta_s,\cdots,\alpha_t\otimes\beta_s,\cdots,\alpha_t\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_t\otimes\beta_s).$$

注：由(1)与(2)可证(3),这里只证明(1)与(2).

**命题1** (1) $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \otimes F = \begin{bmatrix} A\otimes F & B\otimes F \\ C\otimes F & D\otimes F \end{bmatrix}$.

**证明：**

**(1) 由定义**

$$\begin{bmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{bmatrix} \otimes F = \begin{bmatrix} (a_{ij}F) & (b_{ij}F) \\ (c_{ij}F) & (d_{ij}F) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes F & B\otimes F \\ C\otimes F & D\otimes F \end{bmatrix}$$

**命题1** (2) 设$\alpha$是列向量，且$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$则

$$\alpha\otimes B=(\alpha\otimes\beta_1,\alpha\otimes\beta_2,\cdots,\alpha\otimes\beta_s)；.$$

**证明：** (2) 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$

$$\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\otimes B=\begin{bmatrix}a_1B\\ \vdots\\ a_nB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\\ \vdots\\ a_n(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix}a_1\beta_1\\ \vdots\\ a_n\beta_1\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad\begin{bmatrix}a_1\beta_s\\ \vdots\\ a_n\beta_s\end{bmatrix}\right]=\left[\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\otimes\beta_1,\quad\cdots,\quad\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\otimes\beta_s\right]$$

$$=(\alpha\otimes\beta_1,\alpha\otimes\beta_2,\cdots,\alpha\otimes\beta_s).$$

**命题2（直积的性质）**矩阵的直积具有以下性质：

（1）对任意复数$k$, $(kA)\otimes B = A\otimes(kB) = k(A\otimes B)$；

（2）$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$；

（3）$A\otimes(B + C) = A\otimes B + A\otimes C$；

（4）$(A\otimes B)^H = A^H\otimes B^H$；

（5）若矩阵$A$和$C$, 矩阵$B$和$D$均可相乘, 则$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$；

（6）$\mathrm{rank}(A\otimes B) = \mathrm{rank}(A)\mathrm{rank}(B)$；

（7）$(A\otimes B)^+ = A^+\otimes B^+$.

（8）设$A$、$B$分别是$m$、$n$阶可逆矩阵, 则 $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$

**结合律** (2) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.

**证明：** (2) 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,由直积定义:

$$(A\otimes B)\otimes C=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B\otimes C & \cdots & a_{1n}B\otimes C \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B\otimes C & \cdots & a_{mn}B\otimes C \end{bmatrix}$$

$$=A\otimes(B\otimes C).$$

**共轭转置** (4) $(A\otimes B)^H = A^H\otimes B^H$.

**证明：** (4) 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,由直积与共轭转置定义:

$$(A\otimes B)^H = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}^H$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}B^H & \cdots & \bar{a}_{m1}B^H \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n}B^H & \cdots & \bar{a}_{mn}B^H \end{bmatrix}$$

$$= A^H\otimes B^H.$$

**吸收率** (5) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

**证明：** (5) 设$A = (a_{ij})_{m \times n}$,由直积定义:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \left(a_{ij}B\right)\left(c_{ij}D\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1s}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{ns}D \end{bmatrix}$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik}Bc_{kj}D \right) = \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}BD \right)$$

$$=(AC) \otimes (BD).$$

**注** 设$A$是$m$阶方阵, $B$是$n$阶方阵, 则.

(1) $(A\otimes B)^k = A^k\otimes B^k$, $k = 1,2,\ldots$

(2) $(A\otimes I_n)(I_m\otimes B) = (I_m\otimes B)(A\otimes I_n) = A\otimes B$,即$(A\otimes I_n)$与$(I_m\otimes B)$可交换.

**吸收率可推广为:**

(3) $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)\cdots(A_k\otimes B_k) = (A_1A_2\cdots A_k)(B_1B_2\cdots B_k)$

(4) $(A_1\otimes A_2\cdots\otimes A_k)(B_1\otimes B_2\cdots\otimes B_k) = (A_1B_1)\otimes(A_2B_2)\cdots(A_kB_k)$

**例2** 设$A$是$m$阶方阵, $B$是$n$阶方阵, 证明

$$e^{A\otimes I_n}=e^A\otimes I_n,\ e^{I_m\otimes B}=I_m\otimes e^B.$$

**证明:** 由注(1)得

$$e^{A\otimes I_n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A\otimes I_n)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A^k\otimes I_n^k)=$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)\otimes I_n=e^A\otimes I_n.$$

**注:** 同理可证$e^{(A\otimes I_n)(I_m\otimes B)}=e^A\otimes e^B$.

(6) $\operatorname{rank}(A \otimes B) = \operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B)$

**证明：** (6) 设$A = A_{m \times n}, B = B_{p \times q}, \operatorname{rank}(A) = r$ , $\operatorname{rank}(B) = s$.

则存在可逆矩阵$P_i, Q_i\,(i = 1,2)$使得

$$P_1 A Q_1 = A_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 B Q_2 = B_1 = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而$A_1 \otimes B_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes B_1 = \begin{bmatrix} I_r \otimes B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

易得$\operatorname{rank}(A_1 \otimes B_1) = \mathrm{rs}$.

(6) $\mathrm{rank}(A\otimes B)=\mathrm{rank}(A)\mathrm{rank}(B)$

**证明：** 易得$\mathrm{rank}(A_1\otimes B_1)=rs.$

由吸收率的注(3)得

$$(P_1\otimes P_2)(A\otimes B)(Q_1\otimes Q_2)=(P_1AQ_1)\otimes(P_2BQ_2)$$
$$=A_1\otimes B_1$$

所以$\mathrm{rank}(A\otimes B)=\mathrm{rank}(A_1\otimes B_1)=rs.$

结论得证.

(7) $(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$

**证明：** 直接验证四个Penrose方程：

Penrose方程(1)

$$(A\otimes B)(A^{+}\otimes B^{+})(A\otimes B)=(AA^{+}A)\otimes(BB^{+}B)$$
$$=A\otimes B$$

Penrose方程(3)

$$(A\otimes B)(A^{+}\otimes B^{+})=(AA^{+})\otimes(BB^{+})$$

再由性质(4),容易验证上式右端取共轭转置不变.

(8) **设**$A$、$B$分别是$m$、$n$阶可逆矩阵, 则 $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$.

**证明：由吸收率得：**

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1}) = (AA^{-1})\otimes(BB^{-1})$$
$$= I_m\otimes I_n.$$

**推论1：设**$A$、$B$是酉矩阵, 则$A\otimes B$是酉矩阵.

**证明：**$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1} = A^{\mathrm{H}}\otimes B^{\mathrm{H}} = (A\otimes B)^{\mathrm{H}}.$

**性质(9)：** 设$A=(a_{ij})_{m\times m}, B=B_{n\times n}$,则

(1)$tr(A\otimes B)=trA\cdot trB$ ,

(2)$\det(A\otimes B)=det(A)^n det(B)^m$.

**证明：** (1) $tr(A\otimes B)=tr(a_{11}B)+tr(a_{22}B)+\cdots+tr(a_{mm}B)=a_{11}tr(B)+a_{22}tr(B)+\cdots+a_{mm}tr(B)$
$=trA\cdot trB.$

(2)证略.

**定理2** 设$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}x^i y^j$是变量$x,y$的复二元多项式，对任意矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times m}$和$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，定义矩阵

$$f(A,B)=\sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}(A^i\otimes B^j)\in\mathbb{C}^{mn\times mn}$$

式中，$A^0=I_m$，$B^0=I_n$. 若$A$和$B$的特征值分别为$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$和$\mu_1,\cdots,\mu_n$，则$f(A,B)$的特征值为$f(\lambda_i,\mu_j)$，$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$.

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}x^i y^j$$

$$f(A,B)=\sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}(A^i \otimes B^j)\in \mathbb{C}^{mn\times mn}$$

注：若$f(x,y)=xy$,则 $f(A,B)=A\otimes B$,

若$f(x,y)=xy^0+x^0y$,则 $f(A,B)=A\otimes I_n+I_m\otimes B$,

得下面的推论.

**推论2** 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 其特征值分别为$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$和$\mu_1,\cdots,\mu_n$, 则有

（1）$A\otimes B$的特征值为$\lambda_i\mu_j$, $i = 1,\cdots,m$, $j = 1,\cdots,n$.

（2）$A\otimes I_n \pm I_m\otimes B$的特征值为$\lambda_i\pm\mu_j$, $i = 1,\cdots,m$, $j = 1,\cdots,n$.

**注:**

- 由(1)也可得$\det(A\otimes B) = det(A)^n det(B)^m$,
- $A\otimes I_n \pm I_m\otimes B$可逆$\Leftrightarrow \lambda_i\pm\mu_j \neq 0$,
- $A\otimes I_n \pm I_m\otimes B^T$可逆$\Leftrightarrow \lambda_i\pm\mu_j \neq 0$.

**例3** 设$A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $x\in\mathbb{C}^{m}$是$A$关于特征值$\lambda$的特征向量, $y\in\mathbb{C}^{n}$是$B$关于特征值$\mu$的特征向量,则有

（1）$x\otimes y$是$A\otimes B$关于特征值$\lambda\mu$的特征向量.

（2）$x\otimes y$是$A\otimes I_n+I_m\otimes B$关于特征值$\lambda+\mu$的特征向量.

**证明：** (1)因为$x\neq 0, y\neq 0$,所以$x\otimes y\neq 0$,且

$$(A\otimes B)(x\otimes y)=(A\mathrm{x}\otimes By)=(\lambda\mathrm{x}\otimes\mu y)=\lambda\mu(\mathrm{x}\otimes y).$$

**例3** 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x\in \mathbb{C}^{m}$是$A$关于特征值$\lambda$的特征向量, $y\in \mathbb{C}^{n}$是$B$关于特征值$\mu$的特征向量,则有

（2）$x\otimes y$是$A\otimes I_n + I_m\otimes B$关于特征值$\lambda + \mu$的特征向量.

**证明：** (2)因为

$$(A\otimes I_n)(x\otimes y) = (Ax\otimes I_n y) = \lambda(\mathrm{x}\otimes y),$$
$$(I_m\otimes B)(x\otimes y) = (I_m x\otimes By) = \mu(\mathrm{x}\otimes y),$$

所以

$$\begin{aligned}(A\otimes I_n + I_m\otimes B)(x\otimes y) &= (A\otimes I_n)(x\otimes y) + (I_m\otimes B)(x\otimes y)\\ &= (\lambda + \mu)(\mathrm{x}\otimes y)\end{aligned}$$

**例4** 设$A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$都可对角化，则$A\otimes I_n+I_m\otimes B$也可对角化.

**证明：** 由题设存在可逆矩阵$P$与$Q$使得

$$P^{-1}AP=A_1=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$$
$$Q^{-1}BQ=B_1=diag\{\mu_1,\cdots,\mu_{\mathrm{n}}\}$$

所以

$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes I_n+I_m\otimes B)(P\otimes Q)=(A_1\otimes I_n)+(I_m\otimes B_1)$$
$$=diag\{\lambda_1 I_n+B_1,\lambda_2 I_n+B_1,\cdots,\lambda_m I_n+B_1\}$$

$$=diag\{\lambda_1+\mu_1,\cdots,\lambda_1+\mu_{\mathrm{n}},\lambda_2+\mu_1,\cdots,\lambda_2+\mu_{\mathrm{n}},\cdots,\lambda_m+\mu_{\mathrm{n}}\}.$$

**例5** 设$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$都可对角化，则$A\otimes B$也可对角化.

**证明**同例4,略.