第三章 广义逆矩阵

3.1 基 本 概 念

定义1（广义逆矩阵）设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，若$X\in\mathbb{C}^{n\times m}$满足以下四个Penrose方程：

（1）$AXA=A$

（2）$XAX=X$

（3）$(AX)^H=AX$

（4）$(XA)^H=XA$

的全部或者一部分，则称矩阵X是矩阵A的**广义逆矩阵**.

注1： 满足**定义1**中一个、两个、三个或四个Penrose方程的广义逆矩阵**共计15种**. 若矩阵G是满足第i个Penrose方程的广义逆矩阵, 则记为

$$G = A^{(i)},\ i = 1,2,3,4$$

若矩阵G是满足第i和第j个Penrose方程的广义逆矩阵, 则记为

$$G = A^{(i,j)},\ i,j = 1,2,3,4\text{且}i \neq j$$

若矩阵G是满足第i、第j个和第k个Penrose方程的广义逆矩阵, 则记为

$$G = A^{(i,j,k)},\ i,j,k = 1,2,3,4\text{且}i,j,k\text{互不相等}$$

若矩阵G满足全部四个Penrose方程, 则记为

$$G = A^{(1,2,3,4)}\text{或}A^{+}$$

并将其称之为**加号逆**或**伪逆**, 或**Moore-Penrose广义逆**.

常见的广义逆有$A^{(1)}$, $A^{(1,3)}$, $A^{(1,4)}$和A^{+}, 其中$A^{(1)}$称为**减号逆**, 记为A^{-}；$A^{(1,3)}$称为**最小二乘广义逆**, 记为A_{l}^{-}；$A^{(1,4)}$为**极小范数广义逆**, 记为A_{m}^{-}.