第四章 矩阵分析

4.5 矩阵函数的应用

定义1 以变量t的函数为元素的矩阵$A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$称为函数矩阵, 若每个$a_{ij}(t)$在$[a,b]$上是连续, 可微, 可积时, 则称$A(t)$在$[a,b]$上连续, 可微, 可积. 定义

$$A^{'}(t)=\frac{d}{dt}A(t)=(a_{ij}^{'}(t))_{m\times n}$$

$$\int_a^b A(t)\,dt=(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt)_{m\times n}$$

例1 求矩阵函数$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t & t \\ e^{t} & e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & 1 & t^{2}\end{pmatrix}$的导数.

例1 求矩阵函数$A(t)=\begin{pmatrix} \sin t & \cos t & t \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & 1 & t^2 \end{pmatrix}$的导数.

解: $\frac{d}{dt}A(t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 1 \\ e^t & 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$.

命题1 设$A(t), B(t)$为适当阶的可微矩阵, 则

1) $\frac{d}{dt}(A(t)+B(t)) = \frac{d}{dt}A(t) + \frac{d}{dt}B(t)$;

2) $\lambda(t)$为可微函数, $\frac{d}{dt}(\lambda(t)A(t)) = \frac{d\lambda(t)}{dt}A(t) + \lambda(t)\frac{d}{dt}A(t)$;

3) $\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = (\frac{dA(t)}{dt})B(t) + A(t)\frac{d}{dt}B(t)$;

4)$u = f(t)$可微时, $\frac{d}{dt}(A(u)) = f'(t)\frac{d}{du}A(u)$;

命题1 设$A(t), B(t)$为适当阶的可微矩阵, 则

5) 当$A^{-1}(t)$是可微矩阵时, 有

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) =- A^{-1}(t)(\frac{d}{dt}A(t))A^{-1}(t)$$

命题2 设$A \in C^{n \times n}$, 则

1) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A;$

2) $\frac{d}{dt}\sin At = A\cos At = (\cos At)A;$

3) $\frac{d}{dt}\cos At = -A\sin At = -(\sin At)A;$

命题2 设$A \in C^{n\times n}$, 则

1) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$;

2) $\frac{d}{dt}\sin At = A\cos At = (\cos At)A$;

3) $\frac{d}{dt}\cos At = -A\sin At = -(\sin At)A$;

证明: 只证1) , 由$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$得

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} = Ae^{At} = e^{At}A$$

命题3 设$A(t)$, $B(t)$是$[a,b]$上适当阶的可积矩阵, $\lambda \in C$, 则

1) $\int_a^b (A(t)+B(t))\,dt = \int_a^b A(t)\,dt + \int_a^b B(t)\,dt$;

2) $\int_a^b \lambda A(t)\,dt = \lambda \int_a^b A(t)\,dt$;

3) $A(t)$在$[a,b]$连续时, 则$\forall t \in (a,b)$, 有

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t A(\tau)\,d\tau\right) = A(t);$$

4) $A(t)$在$[a,b]$可微时, 有

$$\int_a^b A'(t)dt = A(b) - A(a) (N\text{-}L公式).$$

一、求解一阶线性常系数微分方程组

一、求解一阶线性常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

满足初始条件 $x_i(t_0) = c_i, \ i = 1, \cdots, n$

由微分方程的理论知，上述方程的解是存在的，稳定的，且满足初始条件的解是唯一的.

令$A=(a_{ij})_{n\times n}, c=(c_1,\cdots,c_n)^T$,

$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T, f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$.

则上述方程可写为$\begin{cases}\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)\\ x(t_0)=c\end{cases}$

由$\frac{d(e^{-At}x(t))}{dt}=-Ae^{-At}x(t)+e^{-At}\frac{dx(t)}{dt}=$

$e^{-At}(\frac{dx(t)}{dt}-Ax(t))=e^{-At}f(t)$,

积分得$\int_{t_0}^{t}d(e^{-At}x(t))=\int_{t_0}^{t}e^{-At}f(t)dt$, 即

$e^{-At}x(t)-e^{-At_0}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-At}f(t)dt$, 于是方程组的解为

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}c+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}f(\tau)d\tau$$

特别地, 当$f(x)=0$时, 即齐次线性方程组的解为 $x(t)=e^{A(t-t_0)}c$.

注: 要求方程组的解, 主要是求e^{At}.

例2 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求解$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}$.

其中$x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^T, x_0=(1,0,-1)^T=x(0), f(t)=(1,-t,t)^T$.

例2 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求解$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$.

其中$x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_n(t))^T, x_0=(1,0,-1)^T=x(0), f(t)=(1,-t,t)^T$.

解: 先计算e^{At}，由$\lambda I-A\cong\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda-2&\\&&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}$得

最小多项式$m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

解： 故令$p_t(\lambda)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda$，$g(\lambda t)=e^{\lambda t}$，则

$$\begin{cases} p_t(2)=g(2t)=\alpha_0(t)+2\alpha_1(t)=e^{2t} \\ p_t'(2)=tg'(2t)=\alpha_1(t)=te^{2t} \end{cases},$$

解得$\begin{cases} \alpha_0(t)=(1-2t)e^{2t} \\ \alpha_1(t)=te^{2t} \end{cases}$，从而$g(At)=e^{At}=$

$$p_t(A)=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

所以定解为 $x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$

解： 所以定解为 $x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau=$

$$e^{2t}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ t & 1-t & t\\ t & -t & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+$$

$$\int_0^t e^{2(t-\tau)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ t-\tau & 1-t+\tau & t-\tau\\ t-\tau & -t+\tau & 1+t-\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\tau\\ \tau\end{pmatrix}d\tau=$$

$$e^{2t}\begin{pmatrix}3/2-1/2e^{-2t}\\ 1/2(t^2+t-2)+(-t^2/2+3t/2+1)e^{-2t}\\ (2t^2+t+1/2)e^{-2t}-3/2\end{pmatrix}$$

二、n阶常系数微分方程的求解

二、n阶常系数微分方程的求解

设$a_0, \cdots, a_{n-1}$为常数, $u(t)$为已知函数, 称

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = u(t)$$

为n阶常系数微分方程, $u(t) \neq 0$时为非齐次的, 否则为齐次的.

可将上述方程化为线性方程组来求解:

考虑初始问题$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = u(t) \\ y^{(j)}(0) = y_0^j, j = 0, \cdots, n-1 \end{cases}$

二、n阶常系数微分方程的求解

令$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) = x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) = x_{n-1}'(t) \end{cases}$，

从而$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = -a_{n-1}x_n(t) - \cdots - a_0x_1(t) + u(t) \end{cases}$ ……