北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩阵理论

张继龙

jlzhang@buaa.edu.cn

教材与参考书

课程教材:

矩阵论教程(第二版), 张绍飞, 赵迪, 机械工业出版社，2016.

参考书:

[1] 矩阵分析, 史荣昌等，北理工出版社，2010

[2] 矩阵分析与应用（第二版）张贤达编著, 清华大学出版社, 2013.

第一章 线性代数基础

1.1 线 性 空 间

例1 定义集合V是所有$m \times n$实矩阵构成的集合,即

$$V = \left\{ (a_{ij})_{m\times n} | \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

任选三个矩阵$A, B, C \in V$,满足:

(1)加法交换律 $A + B = B + A$

(2)加法结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3)存在零矩阵“0” $A + 0 = A$

(4)存在负矩阵−A: $A + (-A) = 0$

定义1（加群）在非空集合V上定义一种代数运算，称之为**加法**（记为“+”），使得$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$都有$V$中唯一元素$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$与之对应，该元素称为$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的和，且满足如下性质：

（1）交换律：$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$;

（2）结合律：$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$；

（3）存在零元素$\boldsymbol{\theta} \in V$使得$\forall \boldsymbol{u} \in V, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{u}$;

（4）$\forall \boldsymbol{u} \in V$，存在负元素$-\boldsymbol{u}$使得$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\theta}$;

称V在加法运算下构成一个**加群**，记为$(V, +)$.

例如:在数的加法运算下,整数集,有理数集,实数集,复数集分别构成加群，记作$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$,$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$.

在数的乘法运算下, 非零有理数集构成加群$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$,同样$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$也构成加群;而$(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$不构成加群.

定义2（数域） 设F是非空数集, 若F中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集，即**对四则运算封闭**, 称该数集F为一个数域.

定义2（数域）设F是非空数集, 若F中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集，即**对四则运算封闭**, 称该数集F为一个数域.

注：实数集$\mathbb{R}$、复数集$\mathbb{C}$、有理数集$\mathbb{Q}$是数域；而自然数集$\mathbb{N}$、整数集$\mathbb{Z}$不是数域.

定义2（数域） 设F是非空数集，若F中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集，即对四则运算封闭，称该数集F为一个数域.

注: 实数集$\mathbb{R}$、复数集$\mathbb{C}$、有理数集$\mathbb{Q}$是数域；而自然数集$\mathbb{N}$、整数集$\mathbb{Z}$不是数域. 有理数域是最小的数域.

思考: 集合$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$是数域吗？其中$i$是虚数单位.

例2 设集合V是所有$m \times n$实矩阵构成的集合,即

$$V = \left\{(a_{ij})_{m\times n} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{R}\right\}.$$

任选矩阵$A, B \in V, k, l \in \mathbb{R}$满足:

(1)$k(A+B) = kA + kB$

(2)$(k+l)A = kA + lA$

(3) $k(lA) = (kl)A$

(4) $1 \cdot A = A$

定义3（线性空间） 设$(V,+)$是一个加群, F是一个数域. 定义了F中的数与V中元素的一种代数运算, 称为**数乘**, 使得$\forall \lambda \in F, \boldsymbol{u} \in V$, 有$V$中唯一元素$\lambda\boldsymbol{u}$与之对应, $\lambda\boldsymbol{u}$称为λ与$\boldsymbol{u}$的积, 且满足以下性质：

（1）$\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$, 数乘对加法分配律

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$, 数乘对数的加法分配律

（3）$\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u}$, 数乘结合律

（4）$1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$, 1与任何向量的积等于该向量

此时, V称为数域F上的线性空间, 记为$(V,+,\cdot)$, V中元素称为**向量**, F中元素称为**标量**.

注：当$F=\mathbb{R}$时，称为实线性空间；当$F=\mathbb{C}$时，称为复线性空间.

简单性质：设V是数域F上的线性空间，有

（1）零向量是唯一的;

（2）任一向量的负向量是唯一的;

（3）对任意$k\in F$和$\boldsymbol{\alpha}\in V$,

$$0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\ (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},\ k\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta};$$

（4）若$k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$，则$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

例3 几何空间,

$$\mathbb{R}^n = \{x|(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$$

在通常向量的加法与数乘运算下构成$\mathbb{R}$上的线性空间，称为n维实向量空间.类似可定义$\mathbb{C}^n$.

例4 集合V是所有$m \times n$复矩阵构成的集合,即

$$V = \{(a_{ij})_{m \times n} | \alpha_{ij} \in \mathbb{C}\}$$

V在矩阵的加法与数乘运算下构成$\mathbb{C}$上的线性空间,称为复矩阵空间,记作$\mathbb{C}^{m \times n}$.类似可定义实矩阵空间$\mathbb{R}^{m \times n}$.

例5 取定$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,令$W=\{x\in\mathbb{C}^n|Ax=0\}$, 不难验证$W$是$\mathbb{C}$上的线性空间,称为矩阵$A$的核空间,记作$\mathrm{N}(A)$.

例6 设$\mathbb{R}^+$表示所有正实数集合, 在$\mathbb{R}^+$中定义加法与数乘为

$$a \oplus b = ab,\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$k \odot a = a^k,\ \ \forall a \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}$$

证明$(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$是实线性空间.

例6 设$\mathbb{R}^+$表示所有正实数集合, 在$\mathbb{R}^+$中定义加法与数乘为

$$a \oplus b = ab,\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$k \odot a = a^k,\ \ \forall a \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}$$

证明$(\mathbb{R}^+,\ \oplus, \odot)$是实线性空间.

分析：首先$\mathbb{R}^+$对于上述加法与数乘是封闭的；

其次$\mathbb{R}^+$对于上述加法与数乘满足线性空间定义的八条性质:其中零向量是$\mathbb{R}^+$中的向量1, 任意向量a的负元素是a^{-1}.