姓名：　　　　　　　　　　学号：

1. （42 分）填空

（1）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+k\alpha_1$ 也线性无关，则 k 满足__________.

（2）全体正实数的集合 R^+，对加法和数乘 $a\oplus b=ab$，$k\circ a=a^k$ 构成一个实线性空间，此空间的零向量是______，$a\in R^+$ 的负向量是______.

（3）设 V_1,V_2,V_3 是 n 维线性空间 V 的子空间，且 $V=V_1+V_2+V_3$，$V_i\cap V_j=\{0\},i\neq j$，则 $V=V_1+V_2+V_3$ 是直和. _______（ 填 √ 或者×）

（4）$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -7\end{pmatrix}$，则 A 的全部盖尔圆为________________________________, A 的实特征值的个数是______.

（5）设 3 维线性空间 V 的一组基是$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，线性变换 T 在$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的矩阵是$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，则 T 在基$\{\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1\}$在的矩阵是__________________.

（6）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{6}A^k$_______.（填收敛或者发散）

（7）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 J=________________.

（8）设 $A=\begin{pmatrix}i & i & i\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 A^+=________________.

（9）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & 2\\ -i & 2 & 5\end{pmatrix}$，则$\|A\|_1=$ ______, $\|A\|_2=$ ______, $\|A\|_F=$ ______.

2.（15 分） 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，证明 A 是正规矩阵，并求 A 的谱分解.

3．（10 分）设向量 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T, b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是两个正交的非零向量，令 A=ab^T,证明求 A^2，并求 A 的特征值与特征向量.

4.（18 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$.（1）求 A 的满秩分解，并用满秩分解求 A^{+}.（2）判断方程组 Ax = b 是否有解.（3）求 Ax = b 的极小范数解或极小最小二乘解.

5.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，求 e^{At}.