第四章 矩阵分析

4.1 向量与矩阵范数

定义1（向量范数）设V是数域F(实数或复数域)上的线性空间，若$\forall x \in V$，均对应一个数，记为$\|x\|$，满足以下三条性质：

1) 正定性：$\|x\| \geq 0$，且$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$；

2) 齐次性：$\forall k \in F, x \in V, \|kx\| = |k|\|x\|$；

3) 三角不等式：$\forall x, y \in V$，有$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$，

则称V是**赋范线性空间**，$\|x\|$是x范数.

注： 上面三条性质称为范数的三条公理，即只要满足范数公理的实值函数均为向量的范数.

定理1 1) $x \neq \theta$时，$\frac{x}{\|x\|}$是范数为一的向量（单位化）；

2) $\|-x\| = \|x\|$；

3) $\forall x, y \in V$，有$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

定理1 1) $x \neq \theta$时，$\frac{x}{\|x\|}$是范数为一的向量（单位化）；

2) $\|-x\| = \|x\|$；

3) $\forall x, y \in V$，有$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

证明： 只证3)

我们有$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$和

$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$,

所以$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$，也就是

$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

例1 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$, 定义

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|,\ \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|\xi_i|,$$

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则$\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$及$\|x\|_2$均是C^n中的范数.

例1 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$, 定义$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$, $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|\xi_i|$, $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 则$\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$及$\|x\|_2$均是C^n中的范数.

证明: 不难验证$\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$均是范数, 对于$\|x\|_2$, 正定性和齐次性显然满足. 下证满足三角不定式:

设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T\in C^n$. 注意到$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^Hx}=\sqrt{(x,x)}$, 即$\|x\|_2$是酉空间$C^n$中内积诱导的范数，由Cauchy不等式得

$$\|x+y\|_2^2=(x+y,x+y)$$
$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$$
$$=\|x\|_2^2+2Re(x,y)+\|y\|_2^2$$
$$\le\|x\|_2^2+2|(x,y)|+\|y\|_2^2$$
$$\le\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2=(\|x\|_2+\|y\|_2)^2$$

所以$\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$.

例2 **设**$1 \le p < \infty$, $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T \in C^n$, 定义

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 则$\|x\|_p$是$C^n$中的范数. 称为

p–范数.

$p = 1$时, 为1–范数；$p = 2$时, 为2–范数；

令$p \to \infty$, 得∞–范数. 这三种范数为常见范数.

命题： 设$A \in \mathbb{C}_n^{m\times n}$, $\|\cdot\|_\alpha$是$\mathbb{C}^m$中的一个向量范数, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, 定义：

$$\|x\|_\beta = \|Ax\|_\alpha,$$

则$\|x\|_\beta$是$\mathbb{C}^m$中的一个向量范数.

例 设A是n阶Hermite矩阵, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, 定义:

$$\|x\|_A = \sqrt{x^H A x},$$

则$\|x\|_A$是一个向量范数, 称为加权范数或者椭圆范数.

定义2 设V是有限维线性空间，$\|x\|_\alpha$，$\|x\|_\beta$是V中任意两种范数，若存在正数k_1及k_2，使得$\forall x \in V$，都有：

$$k_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le k_2\|x\|_\beta,$$

称$\|x\|_\alpha$与$\|x\|_\beta$是等价的.

定义3（极限） 设$x_1,\cdots,x_m,\cdots$是线性空间V中元素序列，若$x\in V$，使得：

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m-x\|_\alpha=0,$$

称序列$\{x_m\}$按α–范数收敛于x，记为$\lim_{m\to\infty}x_m\overset{\alpha}{=}x.$

线性空间可定义多种范数收敛，如1–范数收敛，2–范数收敛，它们之间有什么关系呢？

定理2 设V是有限维线性空间，则

1) 序列$\{x_m\}$按某种范数收敛于x_0, 则$\{x_m\}$按任何范数收敛于x_0, 即有限维线性空间按范数收敛是等价的.

2) $\{x_m\}$按范数收敛于$x_0 \Leftrightarrow$按坐标收敛于x_0.

定理2 设V是有限维线性空间，则

1) 序列$\{x_m\}$按某种范数收敛于x_0, 则$\{x_m\}$按任何范数收敛于x_0, 即有限维线性空间按范数收敛是等价的.

2) $\{x_m\}$按范数收敛于$x_0 \Leftrightarrow$按坐标收敛于x_0.

证明： 1) 设$\|x\|_\alpha$, $\|x\|_\beta$是V中任意两种范数, 则存在正数k_1及k_2, 使得$\forall x \in V$, 都有：$k_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq k_2\|x\|_\beta$.

若 $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m-x_0\|_\alpha=0$, 则有

$0\le\|x_m-x_0\|_\beta\le\frac{1}{k_1}\|x_m-x_0\|_\alpha$, 所以 $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m-x_0\|_\beta=0$, 即$\{x_m\}$按$\beta$–范数收敛于$x_0$. 反之亦然.

2) 取V的一组基底$e_1,\cdots,e_n$, 令

$$x_m=\xi_1^{(m)}e_1+\cdots+\xi_n^{(m)}e_n,\ m=1,2,\cdots,$$

$$x_0=\xi_1^{(0)}e_1+\cdots+\xi_n^{(0)}e_n.$$

我们回忆2–范数的定义 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$, $\|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

由1) 知道, 按范数收敛是等价的, 所以有:

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m - x_0\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\|x_m - x_0\|_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\xi_i^{(m)} = \xi_i^{(0)}, i = 1,\cdots,n.$$

注: 有限维空间中的元列按任一种范数收敛均等价于按坐标收敛.

任一$m \times n$的矩阵均可看做mn维向量，故可将向量范数直接移植到矩阵上来.

定义4 若$\forall A \in C^{m \times n}$，均对应一个实数，记作$\|A\|$，满足：

1) $\|A\| \geq 0$，且$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$；

2) $\forall \lambda \in C$，$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$；

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$，

则称$\|A\|$是矩阵A的向量范数（广义矩阵范数）.

例3 设$A \in C^{m\times n}$, 则$\|A\|_{V_1} = \sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|$, $\|A\|_{V_\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|$, 以及$\|A\|_{V_p} = \left(\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} (p \geq 1)$均是$A$的范数.

类似前面的讨论，我们有如下定理：

定理3 1) $A \in C^{m\times n}$的任一种范数均是A的元素的连续函数；

2) $C^{m\times n}$的任两种范数均是等价的，即对$\|A\|_\alpha$，$\|B\|_\beta$，存在正数k_1及k_2，使得$k_1\|A\|_\beta \le \|A\|_\alpha \le k_2\|A\|_\beta$，$\forall A \in C^{m\times n}$；

3) 矩阵序列$\{A_k\}$按任一范数收敛于$A_0 \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k = a_{ij}^0, \forall i,j.$

矩阵可以视为拉直的向量，但是矩阵还有乘法运算，在考虑范数时，自然要两者兼顾，为了方便起见，我们只考虑方阵：

定义5若$\forall A \in C^{n\times n}$，均对应一个实数，记为$\|A\|$，满足：

1) $\|A\| \geq 0$，且$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$；

2) $\forall \lambda \in C$，$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$；

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$；

4) 相容性，$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

则称$\|A\|$是矩阵A的矩阵范数（或乘积范数）.

例4 设$A \in C^{n\times n}$, 则$\|A\|_{V_2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(tr(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}$是$A$的矩阵范数.

例4 设$A \in C^{n\times n}$, 则$\|A\|_{V_2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(tr(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}$是$A$的矩阵范数.

证明: 只需验证相容性, 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, 则:

$$
\begin{aligned}
\|AB\|_{V_2}^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left|c_{ij}\right|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\right|^2 \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} (|a_{i1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2)(\left|b_{1j}\right|^2 + \cdots + \left|b_{nj}\right|^2)(\text{柯西不等式}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2) \sum_{j=1}^{n} (\left|b_{1j}\right|^2 + \cdots + \left|b_{nj}\right|^2)(\text{提取公因式}) \\
&= \|A\|_{V_2}^2 \|B\|_{V_2}^2
\end{aligned}
$$

所以$\|AB\|_{V_2}^2 \le \|A\|_{V_2}^2 \ \|B\|_{V_2}^2$. 此范数称为Frobenious范数, 简称F-范数, 常记为$\|A\|_F$, 它有很好的性质.

定理4 1）$A \in C^{n\times n}$, $x \in C^{n}$, 则$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$；
2）U, V为酉矩阵, 有

$$\|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F = \|A\|_F = \left(tr(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理4 1) $A \in C^{n\times n}, x \in C^n$, 则$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2$;

2) U, V为酉矩阵, 有

$$\|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F = \|A\|_F = \left(tr(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明: 记$A = (a_{ij})_{n\times n}$, 第i行为A_i, 即$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, 设

$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, 则: $Ax = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix}$, 由Cauchy不等式有:

$$|A_i x|^2 = |a_{i1}\xi_1 + \cdots + a_{in}\xi_n|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k\right|^2$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 = \left\|A_i^T\right\|_2^2 \|x\|_2^2, i = 1,2,\cdots,n.$$

所以

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|A_i x|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\left\|A_i^T\right\|_2^2 \|x\|_2^2\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|A_i^T\right\|_2^2\right)\|x\|_2^2 = (\|A\|_F\|x\|_2)^2.$$

因此$\|Ax\|_2^2 \leq (\|A\|_F\|x\|_2)^2$.

下证2)： 显然有

$$\|UA\|_F^2 = tr\big((UA)^H(UA)\big) = tr(A^HU^HUA) = tr(A^HA) = \|A\|_F^2.$$

所以$\|UA\|_F = \|A\|_F$. 注意到$\|A\|_F = \|A^H\|_F$, V^{H}为酉矩阵, 我们有

$$\|A\mathrm{V}\|_F = \|(A\mathrm{V})^H\|_F = \|\mathrm{V}^H A^H\|_F = \|A^H\|_F = \|A\|_F,$$

$$\|A\mathrm{V}\|_F = \|UA\mathrm{V}\|_F = \|A\|_F.$$

向量范数与矩阵范数在运算中会同时出现, 故建立它们之间的关系. 因此我们引入定义:

定义6 若$\forall A \in C^{n\times n}$, $x \in C^n$, 向量范数$\|x\|_V$与矩阵范数$\|\mathrm{A}\|_m$, 满足不等式: $\|Ax\|_V \le \|A\|_m \|x\|_V$

则称向量范数$\|x\|_V$与矩阵范数$\|A\|_m$相容.

我们知道任何两种矩阵范数是等价的，任何两种向量范数也等价，故我们要问：给定矩阵范数，是否有与之相容的向量范数？反之，给定向量范数，又如何确定一个与之相容的矩阵范数？回答是肯定的.

定理5 设$\|A\|$是$C^{n\times n}$上的一个矩阵范数，则必存在C^n上与之相容的向量范数.

定理5 设$\|A\|$是$C^{n\times n}$上的一个矩阵范数，则必存在C^n上与之相容的向量范数.

证明： 取定$a(\neq 0)\in C^n$, 则$\forall x\in C^n$, 定义$\|x\|_V=\|xa^T\|$, 则不难验证, 它是一种向量范数, 且与给定的矩阵范数相容.

正定性： 当$x\neq 0$时, 一定有xa^T是非零矩阵, 所以$\|xa^T\|>0$

齐次性： $\|kx\|_V=\|kxa^T\|=|k|\|xa^T\|=|k|\|x\|_V$

三角不等式： $\|x+y\|_V=\|(x+y)a^T\|\leq\|xa^T\|+\|ya^T\|=\|x\|_V+\|y\|_V$

相容性： $\|Ax\|_V=\|Axa^T\|\leq\|A\|\|xa^T\|=\|A\|\|x\|_V$

给定向量范数，如何确定一个与之相容的矩阵范数？我们有如下定理.

定理6 若设$\|x\|_V$是C^n上的一个向量范数，则$\forall A \in C^{n\times n}$，定义$\|A\| = \max\limits_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V$，则$\|A\|$是一个与$\|x\|_V$相容的矩阵范数，称此矩阵范数为从属于向量范数$\|x\|_V$的算子范数.

注： 因为$\|Ax\|_V$是x各分量的连续函数, 故在有界闭集上可取到最大值，因此上述定义是有意义的. 即存在x_0使得$\max\limits_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V=\|Ax_0\|_V,(\|x_0\|=1)$.

证明： 1) 正定性：若$A \neq 0$, 则存在$x_1 \neq 0$, 使得$Ax_1 \neq 0$, 令$x_0 = \frac{x_1}{\|x_1\|_V}$, 则$\|x_0\|_V = 1$, 故$\|Ax_0\|_V = \frac{1}{\|x_1\|_V}\|Ax_1\|_V > 0$, 所以$\|A\| = \max\limits_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V > 0$；

2) 齐次性：$\forall \lambda \in C$, 有

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|_V=1} \|\lambda Ax\|_V = \lambda \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V = \lambda\|A\|;$$

3) 三角不等式：$\forall A, B \in C^{n\times n}$, $\exists x_0 \in C^n$, $(\|x_0\|_V = 1)$使$\|A+B\| = \|(A+B)x_0\|_V \leq \|Ax_0\|_V + \|Bx_0\|_V$

$$\leq \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V + \max_{\|x\|_V=1} \|Bx\|_V = \|A\| + \|B\|;$$

4) **相容性：** $\exists y_0 \in C^n, (\|y_0\|_V = 1)$使

$$\|AB\| = \|(AB)y_0\|_V = \|A(By_0)\|_V =$$

$$\left\|A\left(\frac{By_0}{\|By_0\|_V}\right)\right\|_V \|By_0\|_V \le \|A\|\|By_0\|_V \le \|A\|\|B\|;$$

所以$\|A\|$矩阵范数.

最后, $\forall x(\neq 0) \in C^n$, 我们有

$$\|Ax\|_V = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_V \|x\|_V \le \left(\max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V\right)\|x\|_V$$

$$\le \|A\|\|x\|_V.$$

我们常见的向量范数有$\|x\|_1, \|x\|_2$及$\|x\|_\infty$, 则从属于它们的算子范数记为$\|A\|_1, \|A\|_2$及$\|A\|_\infty$. 我们有:

定理7 设$A \in C^{n\times n}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $x \in C^n$, 则从属于向量范数$\|x\|_1, \|x\|_2$及$\|x\|_\infty$的算子范数为:

1) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$ (列范数);

2) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_1}$为$A^H A$的最大特征值(谱范数);

3) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$ (行范数).

注：1) $\|A\|_1$及$\|A\|_\infty$计算方便.

2) 由定理4知, $\|A\|_F$与$\|x\|_2$是相容的, 而$\|A\|_2$作为从属于$\|x\|_2$的算子范数自然是相容的, 但与$\|A\|_F$不同, 事实上$\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.

3) 若存在常数M, 使得$\forall x \in C^n$, 有$\|Ax\|_a \leq M\|x\|_a$, 则$\|A\|_a \leq M$, 即从属于范数$\|x\|_a$的算子范数$\|A\|_a$是使上述不等式成立的最小常数.

今后我们遇到矩阵与向量同时出现时, 总是假设其范数相容.

定理8 设$A\in C^{n\times n}$, $\|A\|$是矩阵范数, 若$\|A\|<1$, 则$I-A$非奇异, 且$\|(I-A)^{-1}\|\leq\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$.

定理8 设$\|A\| \in C^{n\times n}$, $\|A\|$是矩阵范数, 若$\|A\| < 1$, 则$I-A$非奇异, 且$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{\|I\|}{1-\|A\|}$.

证明: 若$I-A$奇异, 则$(I-A)x=0$存在非零解$x_0 \neq 0$,

故有$Ax_0 = Ix_0 = x_0$, 从而

$\|x_0\| = \|Ax_0\| \le \|A\|\|x_0\|, (\|x_0\| > 0) \Rightarrow \|A\| \ge 1$,

矛盾, 所以$I-A$非奇异.

令 $B=(I-A)^{-1}, B(I-A)=I$，有 $B=I+BA$，

所以 $\|B\|=\|I+BA\|\leq\|I\|+\|BA\|$,

故 $\|B\|\leq\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$.

特别的，若$\|A\|$是**算子范数**，则

$$\|I\|=\max_{\|x\|=1}\|Ix\|=1$$

此时有 $\|(I-A)^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|A\|}$

定义7（谱半径） 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 称$A$的$n$个特征值的模的最大者为$A$的**谱半径**，记为$\rho(A)$, 即

$$\rho(A)=\max_{i}\{|\lambda_i|\,|\,\lambda_i\text{为}A\text{的特征值}\}.$$

定理9 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\rho(A)$不大于$A$的任何一种**矩阵范数**, 即 $\rho(A)\le\|A\|$.

定理9 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\rho(A)$不大于$A$的任何一种**矩阵范数**, 即 $\rho(A)\le\|A\|$.

证明： 任取A的特征值λ, 有非零向量x, 使 $Ax=\lambda x$,则 $|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$, 所以 $|\lambda|\le\|A\|$, 故$\rho(A)\le\|A\|$.

定理10 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在某种**矩阵范数** $\|\cdot\|$, 使得 $\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$.

定理10 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在某种**矩阵范数** $\|\cdot\|$, 使得 $\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$.

证明： 由Schur定理存在P使得

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{22} \end{pmatrix}$$

其中对角线上元素为特征值.

令 $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t^{n-1}\end{pmatrix}$, 其中

$$t=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{(n-1)\beta}\right\},\ \beta=\max\{|b_{ij}|\}$$

则 $D^{-1}BD=\begin{pmatrix} b_{11} & tb_{12} & \cdots & t^{n-1}b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & t^{n-2}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$,

此时行范数 $\|D^{-1}BD\|_\infty \le \max\{|b_{kk}|\}+(n-1)t\beta$

$$\le \rho(A)+\frac{\varepsilon}{(n-1)\beta}(n-1)\beta$$

$$\le \rho(A)+\varepsilon$$

令 $Q = PD$, 则 $Q^{-1} = D^{-1}P^{-1} \Longrightarrow$

$$Q^{-1}AQ = D^{-1}P^{-1}APD = D^{-1}BD$$

引入新范数 $\|X\|_* = \|Q^{-1}XQ\|_\infty$，$X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

则 $\|A\|_* = \|Q^{-1}AQ\|_\infty = \|D^{-1}BD\|_\infty \le \rho(A) + \varepsilon$