第一章 线性代数基础

1.2 基、维数与坐标

定义1（线性组合）设V是数域F上的线性空间，x_1, $x_2, \cdots, x_r \in V$， $k_1, k_2, \cdots, k_r \in F$,其中$r \geq 1$.若向量$x$可以表示称为

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_r x_r$$

则称x可由$x_1, x_2, \cdots, x_r$**线性表示**,或者x是$x_1, x_2 \cdots,$ x_r的**线性组合**.

定义2（线性相关）设V是数域F上的线性空间，x_1, $x_2,\cdots,x_r \in V$,其中$r \geq 1$.如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2,\cdots,k_r \in F$,使得

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_rx_r = 0$$

则称$x_1, x_2,\cdots,x_r$**线性相关**,否则就称$x_1, x_2 \cdots, x_r$的**线性无关**, 即若

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_rx_r = 0$$

必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

注:线性无关组的**任一子集**是线性无关的，线性相关组的**任一扩展集**仍线性相关.

注:线性无关组的**任一子集**是线性无关的，线性相关组的**任一扩展集**仍线性相关.

例1:n次多项式空间

$$P_n(x) = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \middle| a_i \in \mathbb{C}\right\}$$

中$3x^2 - 2x + 1$可以由$1, x, x^2$线性表示.

定义3（维数）线性空间V中线性无关组所含向量最大个数，称为V**的维数**，记为$dimV$．当$dim\,V<\infty$, 称 V为**有限维线性空间**，否则为**无限维线性空间**.

定义4（基底）设V是数域F上的线性空间，$x_1,x_2, \cdots, x_r \in V$,其中$r \geq 1$.如果满足

(1) $x_1,x_2, \cdots, x_r$线性无关；

(2) V中任意向量可由$x_1,x_2, \cdots, x_r$线性表示,

则称$x_1,x_2, \cdots, x_r$是V的一个基或者基底.

定理1 设$dim\,V < \infty$, 则

$$dimV = n \Leftrightarrow V\text{的任一基底的元素个数都是}n$$

由定理1可得下面两个推论：

推论1 n维空间中的任意n个线性无关的向量均为V的一个基底，且任一线性无关组$x_1,x_2,\ \cdots,x_r,(r \le n)$可扩充为一组基.

推论2 设$x_1,x_2,\ \cdots,x_n$是n维空间V的一个基,$\forall y \in V$, y可由$x_1,x_2,\ \cdots,x_n$唯一表示.

定义5（坐标） 设$x_1,x_2, \cdots, x_n$是n维空间V的一个基. $\forall y \in V$, 令$y=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, 称有序数组

$$(a_1,a_2, \cdots, a_n)^T$$

为y在基$x_1,x_2, \cdots, x_n$下的坐标.

定义5（坐标） 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n维空间V的一个基. $\forall y\in V$, 令$y=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$, 称有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

为y在基$x_1,x_2,\cdots,x_n$下的**坐标**. 此时

$$y=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

例2 n次多项式空间

$$P_n(x) = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \middle| a_i \in \mathbb{C}\right\}$$

中$1, x, \cdots, x^n$可作为V的一个基.

例3 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,求$A$的核空间的两组基.

例3 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$,求$A$的核空间的两组基.

解： A的核空间就是$Ax=0$的**解空间,** $Ax=0$的基础解系就是核空间的基. 对A进行初等行变换得:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$的解为$\begin{cases} x_1 =- 2x_3 - x_4 \\ x_2 =- \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$, x_3, x_4是自由变量.

基础解系取$\alpha_1 = (-4, -3,2,0)^T$, $\alpha_2 = (-1, -2,0,1)^T$

或者$\alpha_1 = (-4, -3,2,0)^T$, $\alpha_2 = (-6, -7,2,2)^T$.

例4 在$\mathbb{R}^4$中求向量$\alpha=(1,2,1,1)^T$在基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

下的坐标.

解： 设$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$,则

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

求得

$$k_1=\frac{5}{4},k_2=\frac{1}{4},k_3=-\frac{1}{4},k_4=-\frac{1}{4}.$$

练习 在$\mathbb{R}^{2\times 2}$中求向量$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$在基$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$下的坐标.

答案：$(1,1,0,-1)^T$

定义6（过渡矩阵） 设$x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$是空间$V$的两组基．当$1\le i\le n$时,令

$$y_i=a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+\cdots+a_{ni}x_n=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{bmatrix}$$

引入矩阵表示

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A$$

其中$A=(a_{ij})_{n\times n}$称为由基$x_1,x_2,\cdots,x_n$到基$y_1,y_2,\cdots,y_n$的过渡矩阵（变换矩阵）．

显然过渡矩阵可逆,由基$y_1, y_2, \cdots, y_n$到基$x_1, x_2, \cdots, x_n$的过渡矩阵为A^{-1}.

定义7（坐标变换公式） 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$是空间V的两组基．任取$x\in V$,设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{bmatrix}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}$$

带入 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A$,由唯一性得

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{bmatrix}.$$

例5 在$\mathbb{R}^4$中求由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的过渡矩阵,其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,2,-1,0)^T \\ \alpha_2 = (1,-1,1,1)^T \\ \alpha_3 = (-1,2,1,1)^T \\ \alpha_4 = (-1,-1,0,1)^T \end{cases}, \begin{cases} \beta_1 = (2,1,0,1)^T \\ \beta_2 = (0,1,2,2)^T \\ \beta_3 = (-2,1,1,2)^T \\ \beta_4 = (1,3,1,2)^T \end{cases}$$

解： 将$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]$做初等行变换得

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

所以过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$