姓名：　　　　　　　　　　　学号：

1. （42 分）填空

（1）已知 $x_1 = (1, 2, 1, 0)^T, x_2 = (-1, 1, 1, 1)^T, y_1 = (2, -1, 0, 1)^T, y_2 = (1, -1, 3, 7)^T$，$V_1 = Span\{x_1, x_2\}, V_2 = Span\{y_1, y_2\}$，则 $V_1 + V_2$ 的维数是__3___，$V_1 \cap V_2$ 的维数是___1___.

（2）λ 矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$ 的 Smith 标准形是_ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$ __.

（3）设 A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ ___收敛____。（填“收敛”或者“发散”）

（4）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 J=____ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ _____。

（5）已知线性方程组 $Ax = b$ 相容，其中 $A \in C^{m\times n}, b \in C^m$ 给定，$x \in C^n$ 是待定向量，则上述线性方程组的通解公式为___ $x = A^+b + (I - A^+A)y, y \in C^n$ ___，解唯一当且仅当 A 是__列满秩__矩阵。

(6) 设 $x = (x_1, x_2)^T, y = (y_1, y_2)^T$ 是 R^2 中的任意两个向量，定义函数 $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$，问 $f(x, y)$ 能否构成 R^2 中的内积. __否_____（填“是”或者“否”）

(7) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 的伪逆是___ $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1} \\ A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix}$ _____。

(8) 三阶实对称矩阵 A 的秩 r(A)=2, 对应于特征值 1 和 2 的特征向量为 $(1, -1, 1)^T$ 和 $(2, b, -1)^T$，则 A=__ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ __.（提示：另外一个特征值是 0，不

同特征值特征向量正交。然后单位化求出正交矩阵 Q，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

(9) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 3 & -5 & 3 & 8\\ 4 & -6 & 7 & 4\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1$ = _15___,$\|A\|_F$ = _$\sqrt{237}$ ___,$\|Ax\|_\infty$=__13_____.

(10)判断题：若 A 是 Hermite 矩阵，则 e^{iA} 是酉矩阵。_______（ 填“√”或者“×”）

2.（15 分） 设 A$=\begin{pmatrix}2 & i\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 求 A 的奇异值分解.

解：$A^H=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $A^HA=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & i\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2i\\ -2i & 1\end{pmatrix}$

$\left|\lambda I-A^HA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2i\\ 2i & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)$， $\lambda_1=5, \lambda_2=0$，

对 $\lambda_1=5$ ，求 $\begin{pmatrix}1 & -2i\\ 2i & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}2i\\ 1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_2=0$ ，求 $\begin{pmatrix}-4 & -2i\\ 2i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}-i\\ 2\end{pmatrix}$

分别单位化为; $\begin{pmatrix}\frac{2i}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ 令 $V=\begin{pmatrix}\frac{2i}{\sqrt5} & \frac{-i}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

而 $A\eta_1=\begin{pmatrix}2 & i\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2i\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5i\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，补充基为 $\begin{pmatrix}5i\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

令 $U=\begin{pmatrix}i & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ 所以 $A=U\begin{pmatrix}\sqrt5 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$

3．（10 分）用盖尔定理证明矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3^2} & 3 & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3^2} & -\frac{1}{3^3} & \cdots & n \end{pmatrix}$相似于对角阵，且 A 的特征值都是实数.

证明： (1)A 的 n 个盖尔圆为$|z-p| \le \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{3^j} < \frac{1}{2}, p=1,\cdots,n$.每个圆都是孤立的，所以 A 有 n 个互异的特征值，即 A 相似于对角阵。

(2)因为 A 是实矩阵，圆心都在实轴上，所以特征值如果是复数只能共轭成对出现，这与圆内只有一个特征值矛盾，所以只能是实数。.

4．（18 分）已知 A$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，b$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.（1）求 A 的满秩分解，并用满秩分解求 A^+.（2）判断方程组 Ax = b 是否有解.（3）求 Ax = b 的极小范数解或极小最小二乘解.

解：（1） $A \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = FG$$

（2）

$$A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}3 & 1 & 5 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -5 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（3） $AA^{+}b=b$,故$Ax=b$有解.

（4） 极小范数解 $A^{+}\mathrm{b}=(1，0,-1,0)^{T}$，

5.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$，用谱上一致多项式方法求$\sin A$.

解： $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{pmatrix}$，所以最小多项式为

$(\lambda-2)^2$，

设$P(\lambda)=a+b\lambda,f(\lambda)=\sin\lambda$.有：

$$\begin{cases}f(2)=P(2)\\ f'(2)=P'(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin 2=a+2b\\ \cos 2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sin 2-2\cos 2\\ b=\cos 2\end{cases}$$

$$\sin A=aI+bA=\begin{bmatrix}\sin 2 & 0 & 0\\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2\\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2\end{bmatrix}$$