第三章 矩阵的广义逆

3.3 A^+的几种求法

一、满秩分解求A^+

定理1 设$A \in C_r^{m\times n}$, 满秩分解为$A = BC$, 其中$B \in C_r^{m\times r}$, $C \in C_r^{r\times n}$, 则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$
$$= C^H(B^HAC^H)^{-1}B^H$$

证明: 因为$r(CC^H)=r(B^HB)=r$, 所以方阵CC^H与B^HB可逆. 只需验证上述A^+满足$Penrose$四个方程：如

$$AXA=AC^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^HA=$$
$$BCC^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^HBC=BC=A.$$

$AX=BCC^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=B(B^HB)^{-1}B^H$,

所以$(AX)^H=AX$. 类似可证其他两个方程.

推论1 设$A \in C_r^{m\times n}$,

1) 当$r = n$时(列满秩), $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,

2) 当$r = m$时(行满秩), $A^+ = A^H (A A^H)^{-1}$.

推论1 设$A \in C_r^{m\times n}$,

1) 当$r = n$时(列满秩), $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,

2) 当$r = m$时(行满秩), $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

证明:

1) 当$r = n$时, $A = AI_n = BC$为A的满秩分解, 由定理可得 $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$;

2) 当$r = m$时, $A = I_m A = BC$……

推论1 设$A \in C_r^{m\times n}$,

1) 当$r = n$时(列满秩), $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,

2) 当$r = m$时(行满秩), $A^+ = A^H (A A^H)^{-1}$.

注: 也可由上节定理2中的8) 证明, 此时$A^+ = (A^H A)^+ A^H = A^H (A A^H)^+$, 因$A$是列 (行) 满秩, 所以$(A^H A)^+$=$(A^H A)^{-1}$ (或$(A A^H)^+ = (A A^H)^{-1}$) .

例1 求伪逆: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 14\\ 4 & 9 & 3 & 24\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$.

例1 求伪逆: $A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\2&5&1&14\\4&9&3&24\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

解: $A\to\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&1&-1&4\\0&1&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&-3\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

令$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\\4&9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&3&-3\\0&1&-1&4\end{pmatrix}$.

例1 求伪逆: $A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\2&5&1&14\\4&9&3&24\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$

解: 则$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{234}\begin{pmatrix}54&-75&33\\32&-43&21\\130&-182&78\\-34&53&-15\end{pmatrix}$

(2) 因B列满秩,

$$B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\left((1\quad 3)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)^{-1}(1\quad 3)=\frac{1}{10}(1\quad 3)$$

二、奇异值分解求A^+

定理2 设$A \in C_r^{m\times n}$, 奇异值分解为$A = U\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$, 其中$S_r = diag\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$, $\sigma_i > 0$, $1 \le i \le r$, 则$A^+ = V\begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H$, 此处$S_r^{-1} = diag\{\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_r^{-1}\}$.

上述定理可简化:

简化奇异值分解求A^+: 设$A \in C_r^{m\times n}$, 则

$$A = U_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} V_1^H$$

其中$U_1 = (y_1, \cdots, y_r)_{m\times r}$, $V_1 = (x_1, \cdots, x_r)_{n\times r}$是列酉阵.

则
$$A^+ = V_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}^{-1} U_1^H$$

定理3 设$A \in C_r^{m \times n}$, A的简化奇异值分解为$A = U_1 S_r V_1^H$,

则$A^+ = V_1 \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^{-1} \end{pmatrix} V_1^H A^H$.

证明: $A = U_1 S_r V_1^H \Rightarrow A^+ = V_1 S_r^{-1} U_1^H$ 且 $A^H =$

$$V_1 S_r U_1^H \Rightarrow V_1 \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^{-1} \end{pmatrix} V_1^H A^H =$$

$$V_1 \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^{-1} \end{pmatrix} V_1^H V_1 S_r U_1^H = V_1 S_r^{-1} U_1^H = A^+$$

利用奇异值分解求A^+的简化步骤:

1) 求出A^HA的r个非零特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$, $\lambda_i>0$;

2) 求出A^HA对应于特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$的标准正交特征向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$. 令$V_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$;

3）则$A^+=V_1\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^{-1}\end{pmatrix}V_1^HA^H$

注: 当$r(A)=1$时, 非零特征值只有1个, 则$A^+=\frac{1}{\lambda_1}A^H$.

此时, 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $r(A^HA)=r(A)=1$, 可知

$$\lambda_1=tr\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}=tr(A^HA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2,$$

于是有秩1公式: 若$r(A)=1$, 则$A^+=\frac{1}{\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2}A^H$

例2 用各种方法求伪逆：$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

例2 用各种方法求伪逆：$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}$.

解: (1)用SVD: $A^HA=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}5&10\\10&20\end{pmatrix}$. $|\lambda I-A^HA|=\lambda(\lambda-25)$. 所以$\lambda_1=25\Rightarrow$

$x_1=(1\quad 2)^T$, $Ax_1=(5\quad 0\quad 10)^T$.

例2 用各种方法求伪逆: $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}$.

解: 单位化得$V_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, $U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\Rightarrow A=$

$U_1(5)V_1^H\Rightarrow A^+=V_1(5)^{-1}U_1^H\Rightarrow A^+=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}$

例2 用各种方法求伪逆：$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}$.

解: (2)用定理3:

$$V_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}, A^+=V_1(25)^{-1}V_1^HA^H=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}$$

例2 用各种方法求伪逆: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

解: (3)用满秩分解: $A=BC=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}(1 \quad 2)$.

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{5}(1 \quad 0 \quad 2).$$

例2 用各种方法求伪逆: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

解: $C=(1 \quad 2)\Rightarrow C^+=C^H(CC^H)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$A^+=C^+B^+=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1 \quad 0 \quad 2)=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

(4) 用秩1公式: $A=\frac{1}{25}A^H=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

例3 求伪逆: $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, 其中$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

例3 求伪逆：$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$，其中$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解: 用秩1公式求$B^+=\frac{1}{10}B^H=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$D^+=D^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow A^+=\begin{pmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & D^+ \end{pmatrix}.$$