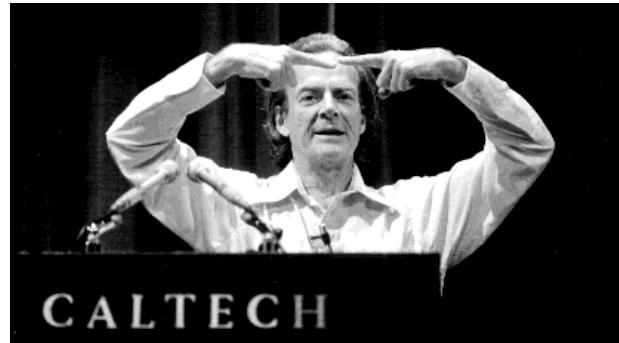


請勿用於
盈利之目的



費曼物理 第二冊

目 录

第1章 电磁学	1	§ 5-1 静电学就是高斯定律加...	50
§ 1-1 电力	1	§ 5-2 静电场中的平衡	50
§ 1-2 电场和磁场	3	§ 5-3 有导体时的平衡	51
§ 1-3 矢量场的特性	4	§ 5-4 原子的稳定性	52
§ 1-4 电磁学定律	6	§ 5-5 线电荷之场	52
§ 1-5 场是什么?	9	§ 5-6 面电荷; 平行板	53
§ 1-6 科学技术中的电磁学	10	§ 5-7 带电球体; 球壳	54
第2章 矢量场的微分运算	12	§ 5-8 点电荷之场是否恰好是 $1/r^2$?	55
§ 2-1 对物理学的理解	12	§ 5-9 孤立导体之场	57
§ 2-2 标量场和矢量场—— T 与 \mathbf{h}	13	§ 5-10 导体空腔里之场	58
§ 2-3 场的微商——陡度	15	第6章 在各种情况下的电场	60
§ 2-4 算符 ∇	17	§ 6-1 静电势方程组	60
§ 2-5 ∇ 的运算	18	§ 6-2 电偶极子	61
§ 2-6 热流的微分方程	20	§ 6-3 矢量方程述评	63
§ 2-7 矢量场的二阶微商	20	§ 6-4 用陡度表示的偶极子势	63
§ 2-8 陷阱	23	§ 6-5 任意电荷分布的偶极子近似	65
第3章 矢量积分运算	24	§ 6-6 带电导体群之场	67
§ 3-1 矢量积分; $\nabla\psi$ 的线积分	24	§ 6-7 镜象法	67
§ 3-2 矢量场的通量	26	§ 6-8 导电平面附近的点电荷	68
§ 3-3 来自小立方体的通量; 高斯定理	28	§ 6-9 导电球体附近的点电荷	69
§ 3-4 热传导; 扩散方程	29	§ 6-10 电容器与平行极板	70
§ 3-5 矢量场的环流	31	§ 6-11 高电压击穿	72
§ 3-6 绕行一个正方形的环流; 斯托克 斯定理	32	§ 6-12 场致发射显微镜	73
§ 3-7 无旋度场与无散度场	34	第7章 在各种情况下的电场(续)	75
§ 3-8 总结	35	§ 7-1 求静电场的各种方法	75
第4章 静电学	37	§ 7-2 二维场; 复变函数	76
§ 4-1 静电和静磁	37	§ 7-3 等离子体振荡	79
§ 4-2 库仑定律; 叠加原理	38	§ 7-4 电解质内的胶态粒子	81
§ 4-3 电势	40	§ 7-5 棚极的静电场	83
§ 4-4 $E = -\nabla\phi$	42	第8章 静电能	85
§ 4-5 E 的通量	43	§ 8-1 电荷的静电能; 均匀带电球	85
§ 4-6 高斯定理; E 的散度	46	§ 8-2 电容器的能量; 施于带电导体上之 力	86
§ 4-7 带电球体之场	47	§ 8-3 离子晶体的静电能	88
§ 4-8 场线; 等势面	47	§ 8-4 核内的静电能	91
第5章 高斯定律的应用	50	§ 8-5 静电场中的能量	94
		§ 8-6 点电荷的能量	94

第 9 章 大氣中的電	98	§ 13-8 迭加原理; 右手法則	156
§ 9-1 大氣的電勢梯度	98		
§ 9-2 大氣中的電流	99	§ 14-1 矢勢	157
§ 9-3 大氣電流的來源	101	§ 14-2 已知電流的矢勢	159
§ 9-4 雷雨	102	§ 14-3 直導線	160
§ 9-5 電荷分離的機制	105	§ 14-4 長螺線管	161
§ 9-6 闪电	108	§ 14-5 一個小回線之場; 磁偶極子	163
第 10 章 電介質	111	§ 14-6 電路的矢勢	165
§ 10-1 介電常數	111	§ 14-7 毕奧-薩伐爾定律	165
§ 10-2 极化矢量 \mathbf{P}	112		
§ 10-3 极化電荷	113		
§ 10-4 有電介質時的靜電方程組	116		
§ 10-5 有電介質時的場和力	117		
第 11 章 在電介質內部	120		
§ 11-1 分子偶極子	120		
§ 11-2 电子极化强度	120		
§ 11-3 有極分子; 取向極化	122		
§ 11-4 電介質空腔里的電場	125		
§ 11-5 液體的介電常數; 克勞修斯-莫索 提方程	126		
§ 11-6 固態電介質	127		
§ 11-7 鐵電現象; BaTiO_3	128		
第 12 章 靜電模擬	132		
§ 12-1 相同的方程組會有相同的解	132		
§ 12-2 热流; 无限大平面边界附近的点 源	133		
§ 12-3 緊繩的薄膜	136		
§ 12-4 中子扩散; 均匀媒質中的均匀球 形源	138		
§ 12-5 无旋的流体流动; 从球旁经过的 流动	140		
§ 12-6 照明; 对平面的均匀照明	142		
§ 12-7 大自然的“基本统一性”	143		
第 13 章 靜磁學	145		
§ 13-1 磁場	145		
§ 13-2 电流; 电荷守恒	145		
§ 13-3 作用于电流上的磁力	146		
§ 13-4 稳恒电流的磁场; 安培定律	147		
§ 13-5 直導線與螺線管的磁場; 原子電 流	149		
§ 13-6 磁場與電場的相對性	151		
§ 13-7 电流与电荷的变换	155		
第 14 章 在各種不同情況下的磁場	157		
§ 14-1 矢勢	157		
§ 14-2 已知電流的矢勢	159		
§ 14-3 直導線	160		
§ 14-4 長螺線管	161		
§ 14-5 一個小回線之場; 磁偶極子	163		
§ 14-6 電路的矢勢	165		
§ 14-7 毕奧-薩伐爾定律	165		
第 15 章 矢勢	167		
§ 15-1 作用于一电流回路上之力; 偶极 子能量	167		
§ 15-2 机械能与电能	169		
§ 15-3 稳恒电流的能量	171		
§ 15-4 B 与 A 的对比	173		
§ 15-5 矢勢与量子力学	174		
§ 15-6 对静态是对的而对动态将是错的	180		
第 16 章 感生电流	183		
§ 16-1 电动机与发电机	183		
§ 16-2 变压器与电感	186		
§ 16-3 作用于感生电流上之力	187		
§ 16-4 电工技术	191		
第 17 章 感應定律	194		
§ 17-1 感应的物理过程	194		
§ 17-2 “通量法则”的一些例外	195		
§ 17-3 感生电场使粒子加速; 电子感应 加速器	196		
§ 17-4 一个伴谬	198		
§ 17-5 交流发电机	199		
§ 17-6 互感	202		
§ 17-7 自感	204		
§ 17-8 电感与磁能	205		
第 18 章 麥克斯韦方程组	209		
§ 18-1 麥克斯韦方程组	209		
§ 18-2 该新项是怎样工作的	211		
§ 18-3 都属于经典物理学	213		
§ 18-4 行移场	213		
§ 18-5 光速	216		
§ 18-6 求解麦克斯韦方程组; 势和波方 程	217		
第 19 章 最小作用原理(专题演讲)	221		

第 20 章 麦克斯韦方程组在自由空间中之解	236	§ 25-3 四维速度.....	314
§ 20-1 自由空间波; 平面波	236	§ 25-4 按四维记法的电动力学.....	317
§ 20-2 三维波.....	243	§ 25-5 运动电荷的四元势.....	318
§ 20-3 科学的梦想.....	244	§ 25-6 电动力学方程组的不变性.....	318
§ 20-4 球面波.....	246		
第 21 章 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解	251	第 26 章 场的洛伦兹变换	321
§ 21-1 光与电磁波.....	251	§ 26-1 运动电荷的四元势.....	321
§ 21-2 由点源产生之球面波.....	252	§ 26-2 恒速点电荷之场.....	322
§ 21-3 麦克斯韦方程组的通解.....	254	§ 26-3 场的相对论变换.....	325
§ 21-4 振荡偶极子之场.....	255	§ 26-4 用相对论记法的运动方程.....	331
§ 21-5 运动电荷之势; 连纳德和韦查特通解.....	259		
§ 21-6 恒速运动电荷之势; 洛伦兹公式	262		
第 22 章 交流电路	265	第 27 章 场能量和场动量	335
§ 22-1 阻抗.....	265	§ 27-1 局域守恒.....	335
§ 22-2 发电机.....	269	§ 27-2 能量守恒与电磁学.....	336
§ 22-3 理想元件网路; 基尔霍夫法则	271	§ 27-3 电磁场中的能量密度和能流.....	337
§ 22-4 等效电路.....	275	§ 27-4 场能的不确定性.....	340
§ 22-5 能量.....	276	§ 27-5 能流实例.....	340
§ 22-6 梯形网路.....	277	§ 27-6 场动量.....	343
§ 22-7 滤波器.....	279		
§ 22-8 其他电路元件.....	282		
第 23 章 空腔谐振器	285	第 28 章 电磁质量	347
§ 23-1 实际电路元件.....	285	§ 28-1 点电荷的场能量.....	347
§ 23-2 在高频上的电容器.....	286	§ 28-2 运动电荷的场动量.....	348
§ 23-3 谐振空腔.....	290	§ 28-3 电磁质量.....	349
§ 23-4 空腔波模.....	293	§ 28-4 电子施于其自身上之力.....	350
§ 23-5 空腔与谐振电路.....	295	§ 28-5 改进麦克斯韦理论的尝试.....	352
第 24 章 波导	297	§ 28-6 核力场.....	358
§ 24-1 传输线.....	297		
§ 24-2 矩形波导.....	300		
§ 24-3 截止频率.....	302	第 29 章 电荷在电场和磁场中的运动	361
§ 24-4 导波的速率.....	303	§ 29-1 在匀强电场或匀强磁场中的运动	361
§ 24-5 导波的检测.....	304	§ 29-2 动量分析.....	361
§ 24-6 波导管.....	305	§ 29-3 静电透镜.....	363
§ 24-7 波导模式.....	307	§ 29-4 磁透镜.....	363
§ 24-8 从另一角度来看导波.....	307	§ 29-5 电子显微镜.....	364
第 25 章 按相对论记法的电动力学	310	§ 29-6 加速器中的导向场.....	365
§ 25-1 四元矢.....	310	§ 29-7 交变陡度聚焦法.....	367
§ 25-2 标积.....	312	§ 29-8 在交叉电磁场中的运动.....	369
		第 30 章 晶体的内禀几何	371
		§ 30-1 晶体的内禀几何.....	371
		§ 30-2 晶体中的化学键.....	372
		§ 30-3 晶体生长.....	373
		§ 30-4 晶体点阵.....	374
		§ 30-5 二维对称性.....	375
		§ 30-6 三维对称性.....	378
		§ 30-7 金属强度.....	379
		§ 30-8 位错与晶体生长.....	380

§ 30-9 布喇格-奈伊模型	381	§ 35-5 绝热去磁冷却法	442
第 31 章 张量	382	§ 35-6 核磁共振	443
§ 31-1 极化张量	382	第 36 章 铁磁性	446
§ 31-2 张量分量的变换	383	§ 36-1 磁化电流	446
§ 31-3 能量椭球	384	§ 36-2 H 场	450
§ 31-4 其他张量; 惯性张量	387	§ 36-3 磁化曲线	452
§ 31-5 叉积	389	§ 36-4 铁芯电感	454
§ 31-6 胁强张量	389	§ 36-5 电磁铁	455
§ 31-7 高阶张量	392	§ 36-6 自发磁化	457
§ 31-8 电磁动量的四元张量	393	第 37 章 磁性材料	463
第 32 章 稠密材料的折射率	396	§ 37-1 已知的铁磁性	463
§ 32-1 物质的极化	396	§ 37-2 热力学性质	466
§ 32-2 在电介质中的麦克斯韦方程组	398	§ 37-3 磁滞回线	467
§ 32-3 电介质中的波	399	§ 37-4 铁磁性材料	472
§ 32-4 复折射率	402	§ 37-5 特殊磁性材料	474
§ 32-5 混合物的折射率	403	第 38 章 弹性学	477
§ 32-6 金属中的波	404	§ 38-1 胡克定律	477
§ 32-7 低频近似与高频近似; 趋肤深度 与等离子体频率	405	§ 38-2 匀胁变	478
第 33 章 表面反射	409	§ 38-3 扭棒; 切变波	482
§ 33-1 光之反射与折射	409	§ 38-4 弯梁	485
§ 33-2 稠密材料中之波	410	§ 38-5 弯折	488
§ 33-3 边界条件	412	第 39 章 弹性材料	490
§ 33-4 反射波与透射波	416	§ 39-1 胁变张量	490
§ 33-5 金属上的反射	419	§ 39-2 弹性张量	493
§ 33-6 全内反射	420	§ 39-3 在弹性体中的运动	495
第 34 章 物质的磁性	423	§ 39-4 非弹性行为	498
§ 34-1 抗磁性和顺磁性	423	§ 39-5 计算弹性常数	500
§ 34-2 磁矩与角动量	424	第 40 章 干水的流动	504
§ 34-3 原子磁体的进动	426	§ 40-1 流体静力学	504
§ 34-4 抗磁性	427	§ 40-2 运动方程	505
§ 34-5 拉莫定理	428	§ 40-3 稳流——伯努利定理	509
§ 34-6 经典物理不会提供抗磁性或顺磁 性	429	§ 40-4 环流	512
§ 34-7 量子力学中的角动量	430	§ 40-5 涡旋线	514
§ 34-8 原子的磁能	432	第 41 章 粘滞流体	517
第 35 章 顺磁性与磁共振	434	§ 41-1 粘滞性	517
§ 35-1 量子化磁态	434	§ 41-2 粘滞流动	520
§ 35-2 斯特恩-革拉赫实验	436	§ 41-3 雷诺数	521
§ 35-3 喇比分子束法	437	§ 41-4 经过一圆柱体的流动	522
§ 35-4 大块材料的顺磁性	439	§ 41-5 零粘滞性极限	525
		§ 41-6 库艾特流动	526

电 磁 学

§ 1-1 电 力

现在来考虑这么一种力。这种力活象引力，也是与距离平方成反比地变化的，但比引力要强约一万亿亿亿倍。另外，还有一点区别，即存在两种我们可称之为正的和负的物质，种类相同的相斥，不同的相吸。这就不象引力，那里只存在吸引。这样，会出现什么情景呢？

一堆正的物质会以巨大之力互相排斥，并向四面八方散开，一堆负的物质亦然。但一堆正和负均匀混合的物质就完全不同了。相反的物质会以巨大的吸引力互相拉挽着，净结果将把那些可怕的力差不多完全抵消了，这是通过形成坚固而又精致的正和负的混合体而达到的，而这样两堆分开着的混合体之间实际上就不再存在任何引力或斥力了。

确实存在这样一种力——电力。世间万物都是由此种巨力互相吸引和排斥着的正质子与负电子所组成的混合物。然而，平衡竟是那么完善，以致当你站在别人旁边时也根本没有任何受力的感觉。这时，即使只有一点点不平衡，你都会觉察到的。例如，要是你站在别人旁边相距只有一臂之远，再假定各自有比本身的质子仅多出百分之一的电子，其排斥力就会大得不得了！多大呢？足以举起那座帝国大厦*？不！举起珠穆朗玛峰？不！这个斥力应足以举起相当于整个地球的“重量”！

了解到在这种致密混合物中这些巨大之力是那么完善地抵消掉，我们就不难于理解：当物质试图保持正与负的电荷最细致的平衡时，它该拥有多大的硬度与强度？例如，帝国大厦在大风之下只会摇摆八英尺左右，因为电力把每一电子与质子多少总保持在其适当位置上。另一方面，如果我们在一个足够小的尺度范围内考察物质，使得只能看到几个原子，那么任一小部分就往往不会有相等数目的正电荷和负电荷，从而会有一些强的剩余电力。即使在相邻两小部分中两种电荷数目相等，也仍有可能拥有巨大的净电力，因为各电荷之间的力是与距离的平方成反比的。如果一部分中的负电荷与另一部分中的正电荷靠得较近，而与负电荷离得较远，则净力就会发生。因此，吸引力可能大于排斥力，从而在两个不带额外电荷的小块中就有一个净吸引力存在。那种把各原子结合在一起之力、把各分子保持在一块的化合力，其实都是电力在电荷的平衡不够完善、或在距离都十分微小的那些区域里才显示出来的作用。

当然，你会知道，原子是由在其核心上的一些正质子和核外的一些负电子所构成的。你也许会问：“如果这种电力那么厉害，为什么质子和电子不会凑到一块来呢？如果它们想要形成一个亲密混合体，为什么不会更亲密些呢？”答案是，这与量子效应有关。要是试图把电子关在一个很接近于质子的区域中，那么按照测不准原理它们就得拥有一个均方动量，而随着我们把它关得越紧，这个均方动量就会变得越大。正是这一种由量子力学规律所支配的运动，才使得电的吸引力不会把两电荷移得更近些。

还有一个问题：“是什么东西把核维持在一起的呢？”原子核中有若干个全都带着正电

* 帝国大厦指美国纽约市第五大街上的一座建筑物，地面上共102层，高448.5米。——译者注

荷的质子。为什么它们不会互相推开呢？事实是，原子核中，除了电力之外还有一种称为核力的非电力，它比电力还要大，因而尽管有电的排斥力存在，仍然能够把那些质子维持在一起。然而，核力是短程力——各核子间的力削弱得比 $1/r^3$ 还要急剧。这就产生了一个重要后果：如果核中所含质子数过多，核就会太大，便不能永远维持在一起。铀就是这么一个例子，它含有 92 个质子。核力主要作用于每个质子（或中子）及其最近邻质子，而电力则作用在较大的距离上，使每个质子与核中所有其他质子之间都具有排斥力。在一个核中质子的数目越多，这电的排斥力就越强，直到如同在铀的情况下，平衡已经那么脆弱，由于排斥性电力的缘故使得核几乎就要飞散了。这么一个核，如果稍为“轻轻敲”一下（就象可以通过送进一个慢中子而做到的那样），就会破裂成各带有正电荷的两片，而这些裂片由于电排斥力而互相飞开。这样释放出来的能量，就是原子弹的能量。这种能量通常称为“核”能，但实际上却是当电力足以克服吸引性核力时所释放出来的“电”能。

最后，我们还可能会问，是什么东西把带负电的电子保持在一起呢？（因为它没有核力）。如果电子全都是由一种物质构成的，那它的每一部分理应排斥其他各部分，但又为什么不会飞散呢？不过，电子是否还含有“各部分”？也许，我们应该说电子只是一个点，而电力只是在不同点电荷之间起作用，以致电子不会作用于其本身。或许是这样吧。电子由什么东西拴住，我们只能说到这里。这个问题曾经对于试图建立一套完整的电磁理论产生过不少困难，而且至今也没有人作出满意的解答。我们将在以后某些章节中对这一课题作些讨论，为我们本身助兴。

正如我们已经见到的那样，应该指望电力与量子力学效应相结合来确定整块材料的细致结构，从而确定它们的特性。有的材料硬，有的材料软。有的是电的“导体”——因为它们中的电子能够自由行动；其他则是“绝缘体”——因为其中电子被牢固地束缚在各个原子之中。这些性质是如何得来的？我们将在以后加以讨论，那是一个十分复杂的课题。因而现在仅就一些简单情况下的电力进行考察。也就是说，现在着手处理电方面——也包括磁方面（那实际上是同一课题的一部分）——的规律。

我们曾经说过，电力正如引力一样，与电荷间距离的平方成反比而减弱的。这一关系叫做库仑定律。但当电荷运动时，这一定律就不完全准确——电力也是以一种复杂的方式依赖于电荷的运动。运动电荷之间的力，有一部分我们称之为磁力。事实上，它是属于电效应的一个方面。这也是为什么要把这一课题叫作“电磁学”的缘故。

存在着这么一个重要的普遍原理，因而有可能以相对简单的方式来处理电磁力。从实验方面得知，作用于某一特定电荷上之力——不管其他电荷的数量和运动方式如何——只取决于该特定电荷的位置、速度以及所带的电荷量。我们可把作用于一个以速度 v 运动着的电荷 q 上的力 \mathbf{F} 写成：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

式中， \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 分别叫做在电荷所处的位置上的电场和磁场。重要的是，宇宙中一切发源于电荷的力都可以仅给出这两个矢量而加以综合。它们的值将取决于这一电荷放在何处，并且可能随时间而改变。此外，如果我们用另一个电荷来代替该电荷，则作用于这一新电荷上之力恰好与其电荷量成正比，只要世界上所有其他电荷都不改变其位置和运动就行了。（当然，在实际情况中，每一电荷总会对于邻近的所有其他电荷都产生力，从而可能引起这些电荷运动，所以在某些情况下，如果我们用另一个电荷来代替该特定电荷的话，那些场是有

可能改变的。)

我们从第一卷已经懂得了怎样去找出一个质点的运动。如果已知道了施于其上之力的话，式(1.1)可以同运动方程相结合而得出：

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mv}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

因此若 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 均为已知，则可以求得运动。现在我们需要弄清楚 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是怎样产生的。

关于电磁场产生的途径有一个最重要的简化原则：假设有若干个以某种方式运动着的电荷本应产生一个场 \mathbf{E}_1 ，而另一些电荷应产生 \mathbf{E}_2 ，而这两组电荷同时被置在各适当位置上（保持与它们过去被认为是分别作用时相同的位置和相同的运动），那么所产生之场恰好是这么一个和：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (1.3)$$

这一个事实称为场的迭加原理，这原理也适用于磁场。

这一原理意味着，如果知道了一个以任意方式运动着的单一电荷所产生的电场和磁场的规律，那么所有电动力学的规律就告齐全了。如果我们想要知道施于电荷 A 上之力，就只须算出由 B 、 C 、 D 等各电荷所产生的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，然后把这些由所有各电荷产生的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都相加起来而求得总场，再从这两个总场求得施于电荷 A 之力。要是事实竟会证明，由一单独电荷产生之场很简单，这就是描写电动力学规律的最简洁方法了。可惜，就我们曾给出的有关这一定律的描述（第一卷第二十八章）看来，那却是相当复杂的。

事实证明，电动力学规律中表现得最为简单的那一种形式，并非是人们所期望的：要把一电荷对另一电荷所产生之力的公式写出，并非那么容易。的确，当电荷静止不动时，库仑定律是十分简单的。但当电荷运动时，由于时间上的延迟和加速度的影响以及其他一些原因，关系就变得复杂了。结果将是，我们并不希望仅仅凭作用于各电荷间的力律来表达电动力学；而发现更方便的是去考虑另一个观点——那才是电动力学规律表现得最易于掌握的一种观点。

§ 1-2 电 场 和 磁 场

首先，我们必须对电和磁矢量，即 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的概念稍微有所扩充。依据一个电荷所感受到之力，我们已对 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 下了定义。现在想要谈论甚至没有电荷存在的某一点上的电场和磁场。实际上，我们要说的是，既然有力“作用在”电荷上，则当电荷移去时也仍有“某种东西”存在那里。如果置于点 (x, y, z) 上的电荷，在 t 时刻感觉到由式(1.1)所给出的力 \mathbf{F} ，则我们便可以把矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 联系到空间该点 (x, y, z) 上去。就是说，把 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 和 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 设想成会给出一个位于 (x, y, z) 点的电荷，在 t 时刻能体验到那个力，这就要求满足这样一个条件：在那里放进该电荷时，不致扰动产生那些场的所有其他电荷的位置或运动。

根据这一概念，我们对于空间的每一点 (x, y, z) 就联系到这两个矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，它们也可能会随时间而变的。因此，电场和磁场就都可视作 x 、 y 、 z 和 t 的矢量函数。既然矢量是由其各分量所规定的，场 \mathbf{E} 和场 \mathbf{B} 就可分别用三个 x 、 y 、 z 和 t 的数学函数来代表了。

正因为 \mathbf{E} （或 \mathbf{B} ）可以在空间每一点上规定下来，它才被称为“场”。所谓“场”，就是在空间不同点上会取不同值的一种物理量。例如，温度就是一种场——在这一情况下是一标

量场, 我们把它写成 $T(x, y, z)$. 温度本来也可随时间变化, 那么我们就应该说温度场是与时间有关的, 从而把它写成 $T(x, y, z, t)$. 另一例则是关于流动液体中的“速度场”, 我们把在空间每一点而在时间 t 上的液体速度书写成 $v(x, y, z, t)$. 那是一个矢量场.

回到电磁场方面来, 虽然它是按复杂公式由电荷所产生的, 但却具有如下重要特性: 在空间一点处的场值与一邻近点处的场值之间存在十分简单的关系. 仅凭几个以微分方程表达的这种关系, 场就能完整地被描述了. 就是用这样的方程式, 电动力学规律才得以最简洁地写出来.

曾有过种种发明, 试图帮助人们形象化地看待场的行动. 其中最正确的也正是其中最抽象的一种是: 把场仅认为是位置与时间的数学函数. 我们可以试图通过在空间的许多点上各画出一些矢量来获得一个关于场的心理图象, 其中每一矢量提供在该点上场的强度和方向. 这一表达方式如图 1-1 所示. 另外, 我们还可以进一步画出处处都与那些矢量相切的一些线来. 好比说, 这些线尾随着那些箭头并跟踪着场的方向. 当我们这样做时, 就已丧失了矢量的长度记录, 但这可通过对于弱场场线排列得较疏, 而对于强场场线排列得较密的办法来记录场的强度. 我们采取这样一个惯例: 垂直于线的每单位面积的线数与场强成正比. 虽然, 这只是一种近似, 一般说来, 有时还需要在某处画出一些新的线才能保证线数达到场强那种程度. 这样, 图 1-1 所示的场就可由图 1-2 所示的场线来表达.

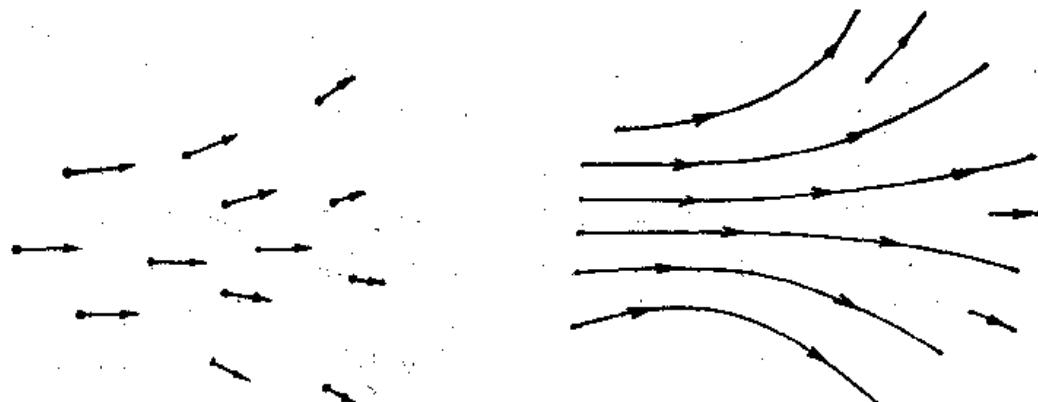


图 1-1 矢量场可用一组箭头来表达. 每支箭头的大小和方向为画出箭头的那一点上的矢量场之值

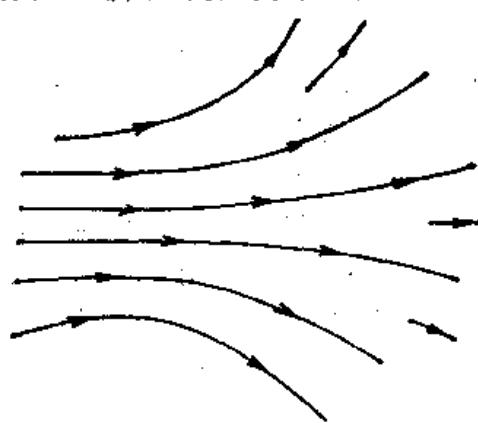


图 1-2 矢量场可用一些线来表达, 这些线与每一点上的矢量场方向相切, 而线的密度则与场矢量的大小成正比

§ 1-3 矢量场的特性

我们将采用矢量场在数学上的两个重要性质, 以便从场的观点来描述电学定律. 设想一个闭合面, 看是否有“某种东西”会从里面失去. 这就是说, 该场有没有一个“流出”的量? 例如, 对于速度场, 我们也许要问, 该面上速度是否总是向外, 或更普遍地问, 是否(每单位时间)流出的流体会超过流入的. 我们把单位时间流经该面的净流体量称为通过该面的“速度通量”. 流经一个面积单元的流量就恰好等于垂直该面积的速度分量乘以该面积. 对于任一个闭合面, 净流出量(或通量)等于速度的垂直向外分量的平均值乘以该闭合面的面积:

$$\text{通量} = (\text{平均法向分量}) \cdot (\text{面的面积}). \quad (1.4)$$

在电场的情况下, 我们可以从数学方面定义一种与流出量相类似的东西, 就称作通量, 当然这并非是任何物质的流量, 因为电场并不是任何东西的速度. 然而, 事实证明, 场的法

向分量的平均值这个数学量仍有其实用意义。因此，我们就要来谈论电通量——这也是由式(1.4)定义出来的。最后，不仅谈论通过一个完全闭合面的通量，而且还谈论通过任一个有边界的面的通量，这也是很有用处的。综上所述，通过这样一个面的通量被定义为矢量的法向分量的平均值乘以该面的面积。这些概念如图 1-3 所示。

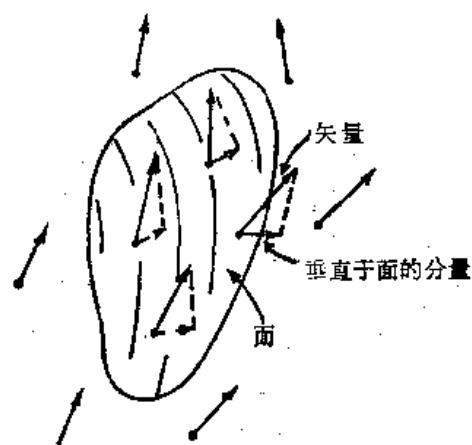


图 1-3 矢量场通过一个面的通量，定义为矢量的法向分量的平均值乘以该面面积

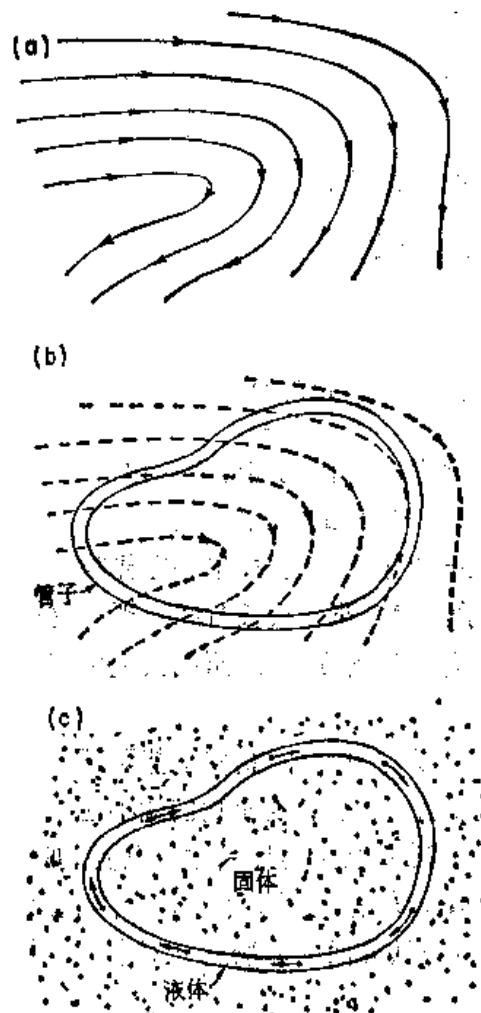


图 1-4 (b) 液体中的速度场；设想有一截面均匀，按照图(b)所示的任一闭合曲线安放着的管子；假如液体只除管内的外，处处都被冻结，那么管里的液体便将按图(c)所示的那样环流

矢量场还有第二个性质，那是与一条曲线而不是与一个面有关的。我们再来看看一下描写液体流动的那种速度场，也许会提出这样一个问题：该液体是否存在环流？这包含的意思是，是否有绕行某一回线的净旋转运动？如图 1-4 所示，除在一条口径均匀的闭合管子里的液体外，液体突然处处都被冻结了。也就是说，管外的液体都停止了流动，但在管内的那一部分液体，由于被禁锢着的动量（这就是说，如果围绕管子朝一方的动量大于朝对方的），液体仍可继续流动。我们定义管里液体的净流速乘以该管周长这个量为环流。我们再把上述概念加以引伸，就可对任一矢量场下个“环流”定义（即使没有任何东西在流动也罢）。对于任一矢量场，绕行任一想象中的闭合曲线的环流可以定义为矢量（沿一致向指）的平均切向分量乘以该回线的周长（图 1-5），即

$$\text{环流} = (\text{平均切向分量}) \cdot (\text{环行距离}) \quad (1.5)$$

你将会看到，这一定义确实给出了一个正比于上述迅速被冻结的管子里的速度环流的数值。

只要有两个概念——通量与环流——我们便能立即描述电学和磁学的所有各种定律。你可能不会一下子就理解其意义，但它们将给你关于电磁方面的物理学的最终描述方式的一些概念。

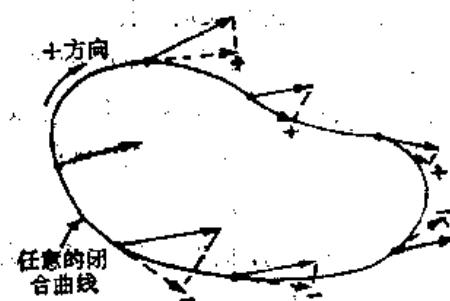


图 1-5 矢量场的环流等于矢量
(沿一致向指)的切向分量平均值
乘以该回线的周长

§ 1-4 电磁学定律

电磁学第一个定律对电场通量是这样描述的：

$$\text{通过任一闭合面的 } \mathbf{E} \text{ 的通量} = \frac{\text{面内净电荷}}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

式中, ϵ_0 是一常数。如果在闭合面内没有电荷, 即使在面外附近存在电荷, \mathbf{E} 的法向分量的平均值仍然等于零, 所以并没有净通量通过该面。为证明这一种表达方式的威力, 我们可以指出式(1.6)与库仑定律是等同的, 只要再加上从单一电荷发生之场是球对称的这么一个概念。对于一个点电荷, 我们作一个围绕着该电荷的球面, 那么, 平均法向分量就恰等于 \mathbf{E} 在任一点上的大小, 因为这个场应是径向的并且在球面的任一点上应有同一强度。现在我们在法则中申述, 在球面上的电场乘以球面面积——也即跑出去的通量——应正比于在球面内的电荷。要是我们使球的半径增大, 面积便按半径的平方增加, 电场的平均法向分量乘以该面积仍应等于球面内的电荷, 因而该场便应跟着距离的平方减弱。这就得到了一个“反平方”场。

在空间如沿一任意曲线量度电场的环流, 那么我们便将发现这一般并不等于零(虽则对于库仑定律是如此)。在电方面, 倒不如说还存在第二条定律, 即对于任一以曲线 C 为边缘的(非闭合)面 S ,

$$\text{环绕着 } C \text{ 的 } \mathbf{E} \text{ 的环流} = \frac{d}{dt} (\text{通过 } S \text{ 的 } \mathbf{B} \text{ 的通量}). \quad (1.7)$$

再写出两个关于磁场 \mathbf{B} 的相应方程, 我们就能完成电磁场的全部规律。

$$\mathbf{B} \text{ 通过任一闭合面的通量} = 0. \quad (1.8)$$

对于边界为曲线 C 的一个面 S ,

$$c^2 (\text{环绕着 } C \text{ 的 } \mathbf{B} \text{ 的环流}) = \frac{d}{dt} (\text{通过 } S \text{ 的 } \mathbf{E} \text{ 的通量}) + \frac{\text{通过 } S \text{ 的电流通量}}{\epsilon_0}. \quad (1.9)$$

式(1.9)上出现的常数 c^2 是光速的平方。它之所以出现是由于磁场实际上是电的一种相对论效应。至于插入常数 ϵ_0 , 则是为了使电流单位能够以一方便的形式出现。

式(1.6)~(1.9)以及式(1.1), 都是电动力学定律*。正如你会记起的, 牛顿定律写起来虽然简单, 但它会引出一大堆复杂的结果, 而你要深入地学习就得花费很长时间。现在这些定律既然写下来就没有那么简单, 那当然意味着其结果将会远为煞费匠心, 而我们也将花更多的时间才能对它一一理解清楚。

通过做一系列小实验(这些实验在定性上表明电场和磁场的关系), 我们就能验证某些电动力学定律。当你梳头发时, 将会对式(1.1)中的第一项有所体会, 因而我们就不想去证明这一项了。式(1.1)中的第二项可以通过给悬挂在一条形磁铁上面的导线输入电流, 如图 1-6 所示的加以演示。当电流接通时, 导线由于受力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 作用而发生了运动; 当存在电流时, 线里的电荷在运动, 所以它们有一速度 v , 而来自磁铁方面的磁场就会对它们施加力, 结果把导线向一旁推开了。

当导线被推向左时, 我们该预料磁铁会感到被推向右。(否则就可将整套设备装在一辆车子上而构成一个动量不守恒的推进器!) 虽然这力过小、不足以使磁铁的运动成为可观的, 但一块支持得比较灵活的磁铁, 比如象磁针那样, 就会表现出运动来的。

* 我们仅须添加关于环流符号某些惯例的注释。

导线为什么会推动磁铁呢？线里的电流会产生它本身的磁场，从而施力于磁铁上。按照式(1.9)中的第二项，电流应有一个 B 的环流——在这一情况下， B 线乃是环绕该导线的回线，如图 1-7 所示。施于磁铁上的力，就是由这 B 产生的。

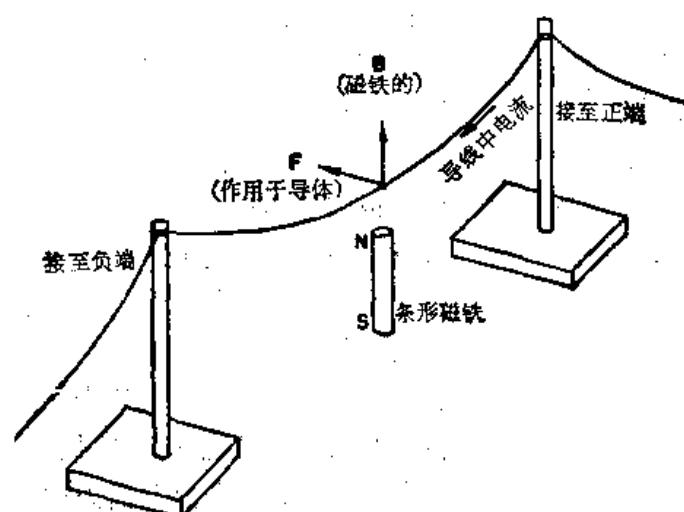


图 1-6 一块条形磁铁提供在导线附近的磁场 B ，当有电流沿导线流动时，该导线由于受力 $F=qv \times B$ 作用而运动

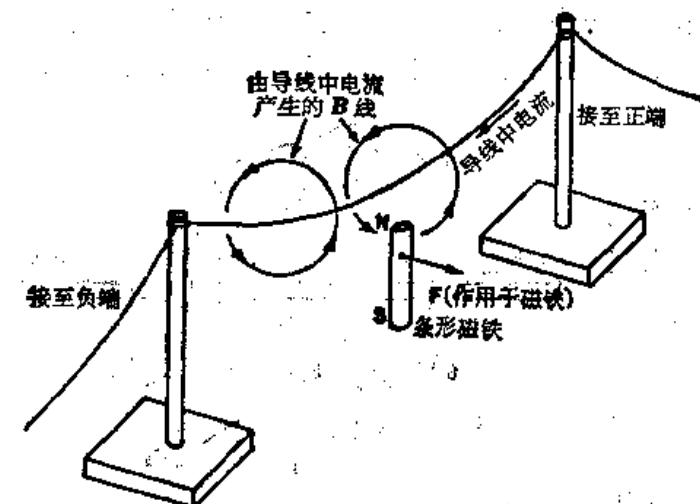


图 1-7 导线的磁场施力于磁铁

成磁场。且慢！试问磁铁究竟是什么？如果磁场是由电荷的运动产生的，那么，来自一块铁的磁场是否有可能也是由于电流的结果呢？看来的确是这样。我们可以将实验中的磁铁用一个线圈来代替，如图 1-9 所示。当电流通过线圈——同时也有电流通过在线圈上面的那根导线——时，我们便会观察到导线的运动恰如以前用磁铁而不用线圈时一样。换言之，线圈里的电流模仿了一块磁铁。因此，看来一块铁的作用就如同它含有一种永恒的环行电流一样。事实上，我们可

以按照式(1.9)中的第二项，电流应有一个 B 的环流——在这一情况下， B 线乃是环绕该导线的回线，如图 1-7 所示。施于磁铁上的力，就是由这 B 产生的。

式(1.9)还告诉我们，对于通过导线的一个固定电流， B 的环流对包围导线的任一曲线都相同。曲线——比方说是一圆周——距离导线越远，则其周长越大，从而 B 的切向分量就应相应地减小。你可以看出，事实上我们该期待来自一条长直导线的 B 应随距离线性地减弱。

现在，我们已经说过，流经导线的电流会产生磁场，而当有磁场存在时就有一力施于通电流的线上。于是我们便也该指望，如果用流经一条导线的电流来产生磁场，则它理应施力于另一条也通有电流的线上。这可由采用如图 1-8 所示的两根挂线来作演示。当两电流同向时，两线相吸；但当电流反向时，它们将相斥。

简言之，电流和磁铁均会造

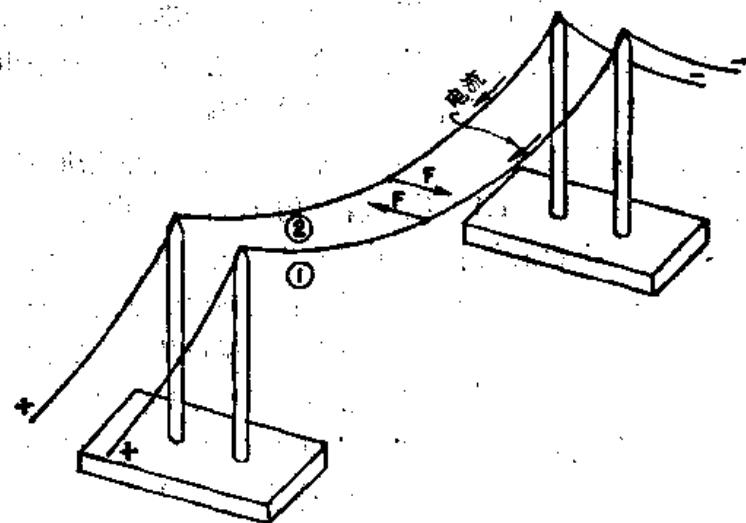


图 1-8 两条通电流的导线互相有力作用着

請勿用於盈利之目的

以用铁原子中的永恒电流来理解磁铁。在图 1-7 中，作用于磁铁上之力就是起因于式(1.1)中的第二项。

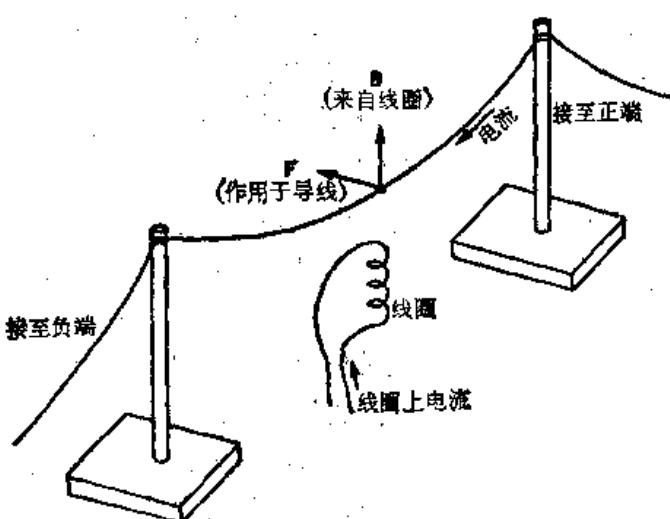


图 1-9 图 1-6 中的磁铁可用一个通电流的线圈来代替，有一相似的力作用于导线上

描述这些事物。) 在大多数物质中，有些电子这样自旋，有些那样自旋，所以磁性互相抵消，可是在铁里——由于某一我们将在以后加以讨论的神秘原因——有许多电子却绕着排列整齐的轴自旋着，这正是磁性的起源。

由于磁场都是来自电流，我们便无需在式(1.8)和(1.9)中引进任何额外的项来照顾磁铁。我们只须取所有各种电流，包括自旋电子的回环电流，那么该定律便就对了。但你应当注意，式(1.8)说明了并没有与出现在式(1.6)右边的电荷相类似的磁“荷”存在，从来都未曾发现过。

式(1.9)右边的第一项是由麦克斯韦从理论上发现的，而且十分重要。它说明一个变化着的电场会产生磁场。事实上，若没有这一项，该方程便说不通。因若无此项，在一非完整的回路中便不会有电流，但这样的电流确实存在，正如我们在下述例子中将见到的。试设想有个由两块平行板构成的电容器，它正在靠流向其中一极板而流出另一极板的电流充电，如图 1-10 所示的那种情形。若我们围绕着其中一条导线画一条曲线 C ，并用一个被该导线所贯穿的面来盖满这条曲线，如图中所示的 S_1 面。按照式(1.9)，绕行着 C 的 B 环流是由导线中的电流(乘以 c^2)所贡献的。可是若我们用另一个看来象个碗、并通过电容器两板间、始终保持在导线外面的一个不同的 S_2 面来盖满，那又将怎样呢？肯定不会有任何电流通过这一个面的。然而，仅仅改变一下想象中的表面位置，总绝不会改变一个实际的磁场的吧！ B 的环流必然要和以前一样。是的，对于 S_1 和 S_2 两个面，式(1.9)右边的第一项并结合着那第二项，确实会给出相同的结果。对于 S_2 来说， B 的环流乃是由电容器两板间 E 的通量的变化率给出的。可以计算证明，正在变化着的 E 与电流间那种关系恰好就是使式(1.9)能够保持正确所必需的形式。麦克斯韦看到了这个必要性，因而成为第一个写出该完整方程式的人。

究竟这些电流是从哪里来的呢？一种可能是从电子环绕其原子轨道的运动而来，实际上，这对于铁来说却是不正确的，虽然对于某些材料来说是正确的。一个电子，除了在原子中环行之外，还有绕其本身之轴的自旋——有点象地球的自转——正是由于自旋所产生的电流才为铁提供了磁场。(我们说“有点象地球的自转”，这是因为这一问题在量子力学中竟是那么奥妙，以致一些经典概念并不能真正恰当地

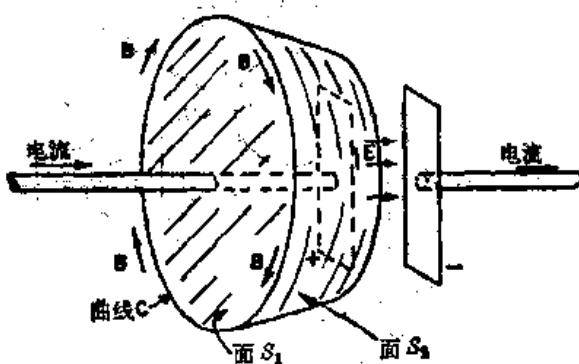


图 1-10 绕曲线 C 的 B 环流，可以由通过面 S_1 的电流给出，也可以由通过面 S_2 的 E 的通量的变化率来给出

采用图 1-6 所示的那种装置，我们还可以对另一个电磁学定律进行演示。我们将挂线两端从电池组上解开而接上一个会告诉我们何时有电流通过该导线的电流计。当我们在磁铁产生的磁场中，向旁推动导线时，便会观察到电流。这样一个效应恰恰是式(1.1)的另一个结果——线里的电子感觉到力 $F = qv \times B$ 。电子之所以具有侧向速度，是因为它们伴随着线在一起运动。这个 v 同来自磁铁的竖向的 B 一道产生了一个施于电子的沿导线方向之力，此力促使电子通过电流计而流动。

然而，假设我们动的不是导线而是磁铁，从相对性来讲，可猜测到这不应当产生任何差别，的确，我们在电流计中观察到一个相似电流。磁场怎么能产生作用于静止电荷上之力呢？按照式(1.1)一定要有一个电场。一块动着的磁铁应该会造成电场。这到底怎样发生，可以由式(1.7)定量地给予解答。这个方程描述了许多具有巨大实际价值的现象，诸如那些出现在发电机和变压器中的现象。

我们的方程组最引人注目的一个结果是，式(1.7)和(1.9)包含着关于越过广大距离的电磁辐射效应的解释。解释大致如下：假设在某处比如由于线里电流突然接通，这就使得磁场增大；于是，根据式(1.7)就应有一个电场环流；当这电场建立起来以产生该环流时，根据式(1.9)又有一磁环流将被引起；可是，这个磁场逐渐建立起来又将产生一个新的电场环流……如此等等。就这样，场在越过空间时，除了在它们的发源处以外，并不需要有电荷或电流。这就是我们都能够互相看得到的关键所在！这一切都存在于电磁场的方程组中。

§ 1-5 场 是 什 么？

现在就我们对这一课题的看法讲几点意见。你也许会说：“所有这一切关于通量和环流的玩意太抽象了。但正是由于在空间每一点上有电场存在，才有这些‘定律’的。但实际发生的情况究竟怎么？为什么你不能用比如有什么东西在电荷之间走动来加以解释呢？”唉呀！这可是由你的偏见所造成的。许多物理学家经常说，在两者之间没有任何东西存在的那种直接作用是不可思议的：（人们怎么会认为某一概念已经加以思议而又认为它是不可思议的呢？）他们会说：“看！我们现在唯一知道的一种力就是一件东西对另一件东西的直接作用。这不是一种无需由媒质来传递的力。”但当我们研究一件东西紧靠着另一件东西的“直接作用”时，真正发生的究竟是什么呢？我们发现，并不是一件东西紧靠着另一件，而是彼此稍为有点分开，并有电力在微小尺寸上作用着。这样，我们就发现，要用电力的图象来对所谓直接接触作用作解释。若事实已经弄清楚，肌肉的推挽力必须用电力来加以说明时，还试图坚持说电力得看成象那种古老的、大家所熟悉的肌肉推挽力，那肯定是不切合实际的！唯一通情达理的问题是，什么才是看待电效应的最方便途径。有些人喜欢把这些效应表达成电荷在一距离上的互作用，从而采用一个复杂定律。另外一些人则喜欢利用场线。他们无时无刻不在画出场线，而感觉写出各个 E 和 B 则是太抽象了。然而，场线只不过是描写场的一种草率办法，要用场线直接给出那些正确而又定量的定律来，那是很困难的。而且，场线概念并不含有电动力学的最深刻原理，即是那迭加原理。即使我们已知道了一组电荷的场线看来像个什么样子，而另一组电荷的场线看来又是如何表现，但当两组电荷同时并存时场线的图样究竟会怎么样，我们就得不到任何概念了。另一方面，从数学的观点看，迭加原理则是很简单的——我们只须把两矢量相加起来。场线对于提供一个生动图象是有某种优点的，可是也有一些缺点。直接相互作用的想法对于静止不动的电荷固然有极大优点，但当

涉及迅速运动着的电荷时就会有一些重大缺点。

最好的办法是采用抽象的场概念。它属于抽象的这一点固然可惜，但却是必须的。企图把电场用某种齿轮的运动、或用线、或用某种材料的张力来表达的尝试曾经耗掉物理学家们的精力，比起直接探索电动力学的正确答案所必需的要多得多。有趣的是，在晶体里光的行为的正确方程本来已由麦卡拉(Mo Cullough)于1843年得出。可是人们却对他说：“是的，但没有任何实际物质的机械性能会满足那些方程的，而且由于光应当是在某种东西中的一种振动，我们便不能相信这个抽象的方程式了。”要是人们稍为虚心一点，他们也许会在早得多的时候就相信有关光的行为的正确方程了。

对于磁场的情况，我们可提出如下论点：假定你最后已能够成功地用某种线或某种在空间运行的齿轮来构成一幅关于磁场的图案。然后，你再去解释两个以同一速率互相平行地在空间运动着的电荷所发生的情况。既然它们在运动，就将如同两电流那样动作，并会有磁场和它们联系在一起(就象图1-8中流经该两导线里的电流那样)。可是，一个跟着这两个电荷奔跑着的观察者看到它们却都是静止不动的，从而应该说那里不应有磁场。当你骑在物体上一道运动时，就连“齿轮”或“线”也都消失不见了！上面我们所做的一切，就发现一个新问题：那些齿轮怎么会不见了呢？那些画出场线来的人们也同样会陷于困难，不仅不能说出到底场线是否会跟着电荷跑——而且在某些参照系中这些场线竟会完全消失不见了。

原来，我们现在是在讲，磁性实际上是一种相对论效应。在我们刚才所考虑的两个作平行运动的电荷的情况下，我们该指望对于它们的运动应当作出相对论修正，即是会出现一个数量级为 v^3/c^3 之项。这些修正就应该相当于磁力。但在我们的实验(图1-8)中，出现于两条线间之力又是怎么一回事呢？那里的力全都是磁力。这看来似乎不象是一种“相对论修正”。而且，倘若我们估计一下线里电子的速度(你们可自行做出来)，就将得到它们沿线的平均速率约为每秒0.01厘米，所以 v^3/c^3 约等于 10^{-25} ，肯定是一个可以忽略的“修正”了。可是不对！尽管在这一情况下，磁力仅等于两运动电荷的“正常”电力的 10^{-25} 倍，但应当记取，由于受到几乎完全的衡消作用——即由于导线里存在相同数目的质子和电子——该“正常”电力就已完全消失不见了。衡消的程度远较 10^{-25} 分之一来得准确，从而那个我们称之为磁力的小小相对论项就是唯一剩下来的项。它变成主要项了。

正是由于电力效应几乎完全抵消，才容许相对论效应(即磁现象)受到注意，而其正确方程组——准确至 v^3/c^3 的——才被发现，虽则当时物理学家还不懂得究竟发生的是什么事情。而这就是为什么，当相对论被发现时，电磁规律并不需要改变。它们——不象力学——已准确至 v^3/c^3 的程度了。

§ 1-6 科学技术中的电磁学

让我们指出下述事件来结束本章。希腊人所研究的许多种现象中有两种是十分奇特的：如果你擦擦琥珀，你就可用它来吸起一些小纸片；又有一种来自麦尼西亚(Magnesia)岛的奇怪石头会吸引铁。想起古希腊人，当时只认识到这两个现象是把电或磁的效应表现得足够明显的，这就令人惊奇了。之所以仅仅出现这两种现象，其原因主要在于上述关于电荷间的非凡准确衡消作用。跟在希腊人之后的科学家通过研究又发现了一个又一个的新现象，而这些实际上都不过是这琥珀和(或)磁石效应的一些景象而已。现在我们认识到，化学

作用以及最终生命本身的现象都得要用电磁学来加以理解。

在对电磁学这一课题的理解正在发展的同时，曾经使人们以往不敢去想象的一些技术可能性出现了，因此，下述这些就都成为可能：在漫长距离之间互通电报；对没有任何接线的千里迢迢处的另一个人说话；以及转动巨大的动力系统——庞大的水轮，其主轮带动另一机器旋转，再用干线接至远隔千里之外——一千千万万条支线——使千家万户工厂和家庭里机械转动的千千万万套电动机。所有这些，都是由于电磁定律的知识而运转起来的。

今天我们还能应用更为精巧细致的效应。电力虽然很巨大，但也可以十分微小，从而能够对之施加控制，而又在许多方面加以利用。我们的仪器竟会那么精致，以致只要某人对千百里外的一根细小金属棒中的电子施以影响，你就能说出他正在干什么。我们所必须做的一切只是用该金属棒作为电视机的天线！

从人类历史的漫长远景来看——即如过一万年之后回头来看——毫无疑问，在十九世纪中发生的最有意义事件将判定是麦克斯韦对电磁定律的发现。与这一重大科学事件相比之下，同一个十年中发生的美国内战^{*}，将会降低为一个地区性琐事而黯然失色。

* 美国内战也叫美国南北战争，1861 年开始至 1865 年结束。——译者注

2

矢量场的微分运算

§ 2-1 对物理学的理解

对物理学家来说，要有从各不同观点去看问题的技巧。因为对实际物理问题的准确分析往往非常复杂，任一特定物理情况都可能因过于复杂，以致不能直接通过解微分方程来进行分析。然而如果人们对于在不同情况下解的特性有某种感触，则对于一个系统的行为仍可以获得十分良好的概念。如场线、电容、电阻以及电感等概念，对此目的来说都是十分有用的。因此，我们将花不少时间来进行分析。通过分析，对于在不同情况下所应当发生的事情我们就会获得一种感觉。另一方面，在比如说场线这类启发式模型中，却没有一种会对所有情况都是真正充分和准确的。只有一种表达定律的准确方式，那就是通过微分方程。因为微分方程具有下述两个优点，它既是基本的，就我们所知又是准确的。如果你已学习过那些微分方程，便可以经常回去复习查对，就不必再重新学习的了。

要了解在各种不同情况下会发生什么事情，这将花费你一些时间。你必须求解那些方程。每次解方程时，就将对解答的性质有所体会。为了把这些解答牢记在心，利用场线及其他概念来研究解答的意义也是有益的。这就是你将确实“理解”方程式的途径。这也是数学和物理学的区别所在。数学家，或者具有十分数学修养的人，在“研究”物理学的过程中往往由于看不见物理学而误入歧途。他们说：“看，这些微分方程——麦克斯韦方程组——就是电动力学的一切；物理学家已经承认，没有什么东西不包含在这些方程式之内了。这些方程尽管复杂，但毕竟不过是一些数学方程式，要是我能在数学上对它们里里外外都理解透，那我对物理学也就理解得透彻了”。可惜，事实却并非如此。大凡抱着这种观点研究物理学的数学家——也确实有不少这样的人——往往很少会对物理学作出什么贡献，而实际上对数学的贡献也很可怜。他们之所以失败，是由于现实世界的实际物理情况竟会那么复杂，以致需要对方程式具有远较为广泛的理解。

确实理解一个方程式——即不仅在严格的数学意义上的理解——意味着什么，狄喇克对此就早有所评述。他说：“如果无需实际解一个方程而对于解答的特性已有一种估计办法，那我就算已懂得了该方程式的意义。”因此，若我们无需实际解那个方程组而对在特定情况下会发生什么便已有一种了解的办法，则我们便算“理解”了应用到这些情况上去的那个方程组了。物理上的理解乃是一种完全非数学性的、不准确的、亦并非严格的东西，但对于一个物理学家来说却是绝对必需的。

照常规说，象这样一种课程是通过物理概念的发展过程——即从简单的情况开始逐渐过渡到越来越复杂的情况——来编排的。这就要求读者要不断忘记以前所学到的——忘记在某些情况下正确，而在一般情况下却不正确的那些东西。例如，电力取决于距离的平方那一条“定律”就不是一贯正确的。而我们在本书中宁可取相反的途径。一开始我们就讨论那些完整定律，然后才回过头来把它们应用于一些简单情况，从而在这些过程中发展物理概念。这就是我们将要做的事情。

我们所采取的途径与历史的途径完全相反，人们在后一途径中是用从中获得知识的各种实验来发展这一过程的。但物理学这一学科在过去约二百年中是由一些十分有发明天才的人们发展开来的，而如果我们仅以有限时间就要获得我们的知识，那就不可能包括他们曾经做过的一切事情。可惜的是，在这些讲课中我们很可能会丢失的东西之一就是这个历史的、实验的发展方面。希望在实验室中这个缺陷能够得到某些弥补。你也可以通过阅读《大英百科全书》来补充我们所不得不割爱的东西，那里载有一些卓越的历史性专题，涉及电学及物理学其他部分。你也可以在有关电磁学的许多教科书中找到一些历史知识。

§ 2-2 标量场和矢量场—— T 与 \mathbf{h}

现在我们要从电磁理论的那种抽象的、数学的观点开始。目的是为了解释第一章中所给出的那些定律的意义。而要做到这一点，我们必须首先对一种将要用到的崭新而又特殊的记法加以解释。所以就让我们暂时忘却电磁学而转过来讨论矢量场的数学。这不但对于电磁学而且对于所有各种物理情况都是十分重要的。正如通常微积分学对于所有各物理部门都那么重要一样，矢量的微分学也是如此。现在我们就转到这么一个课题上来吧。

下面列举一些来自矢量代数的若干项事实，并假定你们都已经学过了。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{标量} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{矢量} \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_x B_y - A_y B_x$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_z B_x - A_x B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.6)$$

我们也要用到从微分学方面得来的下列两个等式：

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (2.8)$$

这里，第一个等式(2.7)当然只有当 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 都趋于零时才正确。

最可能简单的一种物理场是标量场。你应当记起，我们所说的场是指取决于空间位置的一个量。所谓标量场，是指每点仅由一个单独数量——一个标量——所标志的那种场。当然这个数量还可随时间而变，但眼前我们还无需为此操心。我们将只谈论在某一特定时刻，场看来是个什么样子。作为标量场的一个例子，试考虑一块固体材料，其中某些地方受热而另一些地方受冷，使得该物体的温度以一种复杂方式逐点改变。于是温度将是从某一直角坐标系上量得的代表空间每一位置 (x, y, z) 的函数。可见温度是一标量场。

考虑标量场的一种办法是去设想一些“恒值面”，即将所有具有相同场量的点都连接起来而成的一些想象中的面，正如在地图上那些由等高点连成的等高线一样。对于一个温度场来说，这些恒值面被称为“等温面”或等温线。图 2-1 表示一温度场，并表明在 $z=0$ 处 T

請勿用於
盈利用之目的

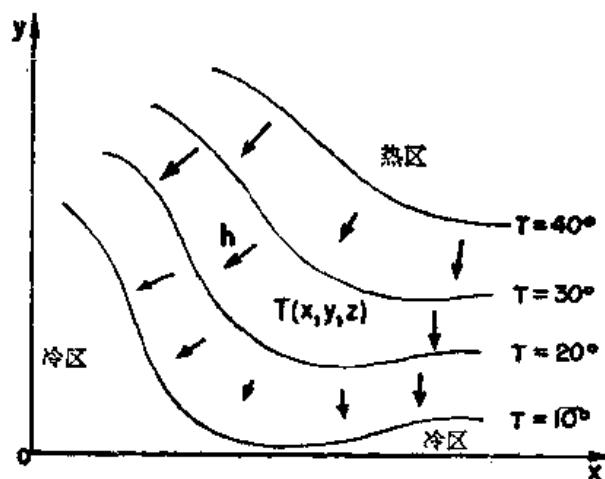


图 2-1 温度 T 是标量场的一个例子。与空间每一点 (x, y, z) 相联系的有一个数量 $T(x, y, z)$ 。所有处于标记着 $T=20^\circ$ 的那个面(图中所示为 $z=0$ 处的一条曲线)上之点都有相同温度。箭头是热流矢量 h 的一些标本

对于 x 和 y 的依赖性。在该图上画出了几条等温线。

还有一种场叫作矢量场。意义也十分简单。就是在空间的每一点给出一个矢量。这个矢量逐点变化。作为一个例子，可考虑一个旋转物体。在每点上物体中物质的速度便是位置函数的矢量(图 2-2)。作为第二个例子，考虑在一块材料里的热流。如果某处的温度高于另一处的，热量就会从较热处流至较冷处。在材料中的不同位置热量将朝不同的方向流动。这一热流就是一个有向量，而我们将称之为 h 。它的大小是表明有若干热量在流动的一种量度。关于热流矢量的范例也示如图 2-1 上。

让我们对 h 下一个更准确的定义：在一点上这个热流矢量的大小就是单位时间单位面积流经一个垂直于流动方向的无限小面积元的热能量。这个矢量朝着热量流动的方向(见图 2-3)。符号表示为：若 ΔJ 代表每单位时间流经面积元 Δa 的热能，则

$$h = \frac{\Delta J}{\Delta a} e_f, \quad (2.9)$$

式中 e_f 是沿流动方向的单位矢量。

矢量 h 也可按另一种方式——用它的分量——来下定义。我们试问，到底有多少热量会流经一个相对于流动方向成任意角度的小面积。在图 2-4 中，

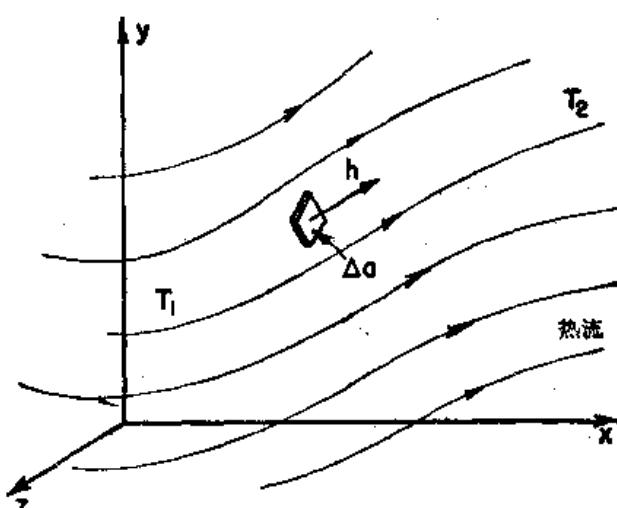


图 2-3 热流是一种矢量场。矢量 h 指向热量流动的方向。它的大小则是每单位时间流过某一垂直于流动方向的面积元的能量除以该面积元的面积

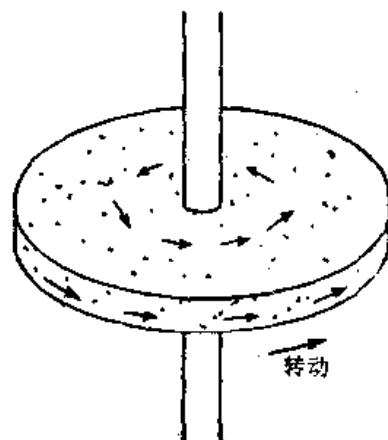


图 2-2 旋转物体中原子速度是矢量场的一个例子

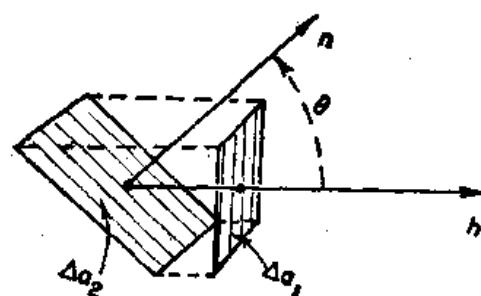


图 2-4 流经 Δa_1 的热量与流经 Δa_2 的相同

我们所表示的一个小面积 Δa_2 与垂直于热流的另一个小面积 Δa_1 作成某一角度。单位矢量 n 与面积 Δa_2 垂直。 n 与 h 之间的角度就等于该两面积间的角度(因为 h 垂直于 Δa_1)。那么，每单位面积流经 Δa_2 的热量有多少呢？流经 Δa_2 的热量就等于流经 Δa_1 的，只不过面积不同罢了。事实上， $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos \theta$ 。因此，流经 Δa_2 的热流就是

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1} \cos \theta = h \cdot n. \quad (2.10)$$

我们就此式加以注解：流经任何垂直于单位法线 n 的面积的热流(单位时间、单位面积)为 $h \cdot n$ 。同样，我们也可以说：垂直于面积元 Δa_2 的热流分量为 $h \cdot n$ 。如果我们愿意，也可以认为这些说法定义了 h 。我们也将把这些相同概念应用于其他矢量场。

§ 2-3 场的微商——陡度

当场随时间变化时，可通过给出场对时间的微商来加以描述。我们希望也按同样办法来描述场对空间的变化，因为对于例如在一点上的温度与在某一邻近点上的温度间的关系，我们是感兴趣的。怎样求得温度对位置的微商呢？是否应该对 x 求温度的微商？还是对 y ，或是对 z ？

有用的物理定律应当不依赖于坐标系的取向。因此，它们应被写成两边都是标量或两边都是矢量的一种形式。一个标量场的微商，比如说 $\partial T / \partial x$ ，究竟是什么呢？是标量，还是矢量，或还是其他什么东西？它并不是标量，也不是矢量，因为正如你能容易领会的，假如取另一条 x 轴，肯定 $\partial T / \partial x$ 就会改变。可是要注意，微商可能有三个： $\partial T / \partial x$ 、 $\partial T / \partial y$ 和 $\partial T / \partial z$ 。由于有这三种微商，而我们又知道要形成一矢量需要三个数量，也许这三个微商就是一个矢量的分量吧：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) ? \text{ 矢量.} \quad (2.11)$$

当然，一般并非任何三个数量都能构成一矢量的。只有当我们旋转坐标系，矢量的各个分量按照正确的方式变换时，这才成立。所以需要分析坐标系旋转时，这些微商究竟是如何变换的。我们将证明(2.11)确实是一个矢量。当坐标系转动了某一角度，这些微商的确会按正确的方式变换。

我们可以从几方面看到这一点。一个途径是，提问的答案是一个与坐标系无关的问题，而试图用“不变量”的方式来表达这一答案。例如，若 $S = A \cdot B$ ，而且若 A 和 B 都是矢量，则我们知道——因为我们已在第一卷第十一章中加以证明—— S 就是一个标量。不须去审查是否会随坐标系改变而改变，我们就已知道了 S 是一个标量。改变是不可能的，因为它是两个矢量的标积。与此相仿，如果我们知道 A 是一矢量，而我们又有三个数 B_1 、 B_2 、 B_3 ，并且找出

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S, \quad (2.12)$$

式中 S 是对于任何坐标系都相同的数值。那么，这三个数 B_1 、 B_2 、 B_3 就应该是某一矢量 B 的分量 B_x 、 B_y 、 B_z 了。

现在让我们想一想温度场。假设取 P_1 和 P_2 两点，它们之间有一微小距离 ΔR 。在 P_1 上的温度为 T_1 而在 P_2 上的为 T_2 ，彼此间的差值 $\Delta T = T_2 - T_1$ 。在这些实际的物理点上温度肯定不会与为量度其坐标而选取的各条轴有关。具体地说， ΔT 是一个与坐标系无关的数

值。它是一个标量。

如果我们选取一组方便的坐标轴，该可以写出 $T_1 = T(x, y, z)$ 和 $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ，其中 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 是矢量 $\Delta \mathbf{R}$ 的分量(图 2-5)。记住式(2.7)，我们便能写出：

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.13)$$

式(2.13)的左边是一个标量。右边是各含有 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz ——一个矢量的分量——的三个积之和。这样我们得出结论，这三个数值

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

图 2-5 矢量 $\Delta \mathbf{R}$ ，其分量为 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 也应是一矢量的 x, y 和 z 分量。我们用符号 ∇T 来写出这个新的矢量。这个符号 ∇ 是 Δ 的颠倒，这点会使我们回忆起微分来的。人们用各种不同方法来读出 ∇T ：“del-T”，或“ T 的陡度”，或“grad T ”；

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^*. \quad (2.14)$$

利用这一记法，可以把式(2.13)写成一个更简洁形式：

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta \mathbf{R}. \quad (2.15)$$

用文字表达为：这个式子申明，在两邻近点间的温度差等于 T 的陡度与两点间的矢量位移之点积。式(2.15)的形式也清楚地说明了上面我们关于 ∇T 确是一个矢量的证明。

也许你还未必相信吧！让我们用另一种办法来证明它。（虽然如果你仔细加以考察，你可能会看到这实际上是兜一个更大的圈子的同种证法。）我们将证明， ∇T 的分量会按照与 \mathbf{R} 的分量完全相同的方式变换。如果它们的确是这样，则按照第一卷第十一章里我们关于矢量的原来定义， ∇T 就应该是一矢量了。试采取一个新坐标系 x', y', z' ，并在这一新系统上算出 $\partial T / \partial x', \partial T / \partial y'$ 和 $\partial T / \partial z'$ 。为了使事情稍为简单些，我们令 $z = z'$ ，以便可以忘记 z 坐标。（你尽可以自己核对那个更普遍的情况。）

我们取一个相对于 xy 系已转过一个角度 θ 的 $x'y'$ 系，如图 2-6(a)所示的那种情况。对于某点 (x, y) ，在加上了撇的系统上其坐标为：

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; \quad (2.16)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (2.17)$$

或者，解出 x 和 y ，则得：

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta; \quad (2.18)$$

* 在我们的记法中， (a, b, c) 这个表式代表一个其分量各为 a, b 和 c 的矢量。如果你喜欢用单位矢量 i, j 和 k ，那

你便可以写出：

$$\nabla T = i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

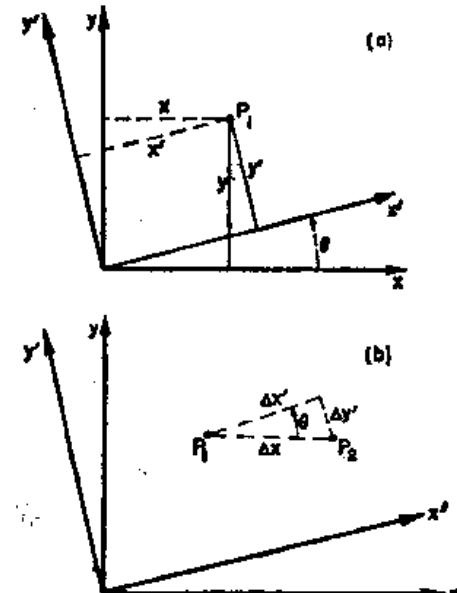


图 2-6 (a) 变换到一个已转动了的坐标系上去；(b) 与 x 轴平行的间距 $\Delta \mathbf{R}$ 的一个特殊情况

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \quad (2.19)$$

如果任何一对数字在用这些方程进行变换时，其方式与 x 和 y 的变换方式一样，那么它们便是一个矢量的分量。

现在让我们来看看如图 2-6(b) 所选取的那两个邻近点 P_1 和 P_2 上的温度差。若我们按 x 和 y 的坐标计算，该可以写成

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (2.20)$$

因为 Δy 等于零。

在那个加撇的系统上进行计算，应该得出个什么呢？我们必须写出

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (2.21)$$

看一看图 2-6(b)，即可见

$$\Delta x' = \Delta x \cos \theta \quad (2.22)$$

和

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \theta, \quad (2.23)$$

因为当 Δx 为正时 $\Delta y'$ 为负。把这些代入式(2.21)中去，得：

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \theta \quad (2.24)$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \right) \Delta x. \quad (2.25)$$

比较式(2.25)和(2.20)，我们得到

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.26)$$

这个式说明： $\partial T / \partial x$ 可从 $\partial T / \partial x'$ 和 $\partial T / \partial y'$ 获得，正如同式(2.18)中的 x 可以从 x' 和 y' 获得那样。因此 $\partial T / \partial x$ 就是一个矢量的 x 分量。同样的论据也该可以证明， $\partial T / \partial y$ 和 $\partial T / \partial z$ 分别为它的 y 和 z 分量。所以 ∇T 肯定就是一个矢量。它是从标量场 T 导出来的一个矢量场。

§ 2-4 算 符 ∇

现在我们就能够做出一件非常有趣而又巧妙的事情——并且是使数学绚丽多采的一些事物的标志。上面对 T 的陡度或 ∇T 是一个矢量的论证，并未与我们究竟是在对哪一个标量场进行微分有关。假若 T 是由任一种标量场来代替，所有论证也该同样进行。既然不管我们对之进行微分的是什么，那些变换公式都相同，那就满可以略去 T 而由一个算符方程式来代替式(2.26)：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.27)$$

正如琼斯(Jeans)曾经说过的那样，我们留给算符去“忙于对某一件东西取微分”。

由于这些微分算符本身就已如同一个矢量的分量应该变换的那样进行变换，我们便可以称之为一个矢量算符的分量，即可以写成：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.28)$$

那当然就是意味着

請勿用於盈利之目的

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.29)$$

已经把 T 除去而抽象出陡度来了——这是一个绝妙的主意。

当然，你必须始终记住 ∇ 是个算符。它单独没有什么意义。如果 ∇ 本身没有什么意义，那么要是我们乘以一标量——比如 T ——那乘积 $T\nabla$ 又会有什么意义呢？（我们总可以对一矢量乘以一标量。）它仍然不具有什么意义。它的 x 分量是

$$T \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.30)$$

它并非一个数值，而仍然是某种算符。然而，按照矢量代数，我们仍可以把 $T\nabla$ 叫作一个矢量。

现在让我们在 ∇ 的另一边乘以一标量，使之形成乘积 (∇T)。在一般代数中

$$TA = AT, \quad (2.31)$$

但我们得要记住，算符代数稍有别于一般的矢量代数。用算符时，我们必须时刻保持正确顺序，以便使算符能够构成适当意义。如果你只是记住算符 ∇ 会服从与微商记法相同的惯例，那你就不会有任何困难。凡想要微分的东西一定要放在 ∇ 的右边。这里，先后次序是重要的。

牢记这个次序问题，我们就懂得了 $T\nabla$ 是一个算符，但 ∇T 却不再是一个饥饿的算符，该算符已完全满足了。并且它确实是一个具有意义的物理矢量。它代表了 T 的空间变率。 ∇T 的 x 分量，就是在 x 方向上 T 变化得多快。究竟矢量 ∇T 的方向指向哪里呢？我们知道，在任一方向上， T 的变率等于 ∇T 在该方向的分量（见式 2.15）。由此可以推知， ∇T 的方向应该是那个具有尽可能大的分量的方向——换句话说，其中 T 变化得最快的方向。 T 的陡度具有（在 T 上的）最陡峭的斜率的方向。

§ 2-5 ∇ 的运算

矢量算符 ∇ ，能否作其他方面的代数运算？如把它同一个矢量连结起来。可以通过点乘来连结两个矢量，这可构成这样两种点积：

$$(\text{矢量}) \cdot \nabla; \quad \text{或} \quad \nabla \cdot (\text{矢量}).$$

这第一个还没有什么意义，因为它仍然是一个算符。最终的含意取决于它所运算的对象如何。那第二个乘积则是一个标量场。（ $A \cdot B$ 总是一个标量。）

让我们就用一个熟悉的矢量场、比如 \mathbf{h} ，来试试它与 ∇ 的点积吧。把它写成分量式：

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \quad (2.32)$$

或

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (2.33)$$

这个和式在坐标变换之下是不变的。假如我们选择一个不同的坐标系（通过加撇来表明），则我们会有*

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x'}{\partial x'} + \frac{\partial h_y'}{\partial y'} + \frac{\partial h_z'}{\partial z'}, \quad (2.34)$$

这个值应该与从式 (2.33) 所得的相同，虽则看起来是不同的。这就是说，对于在空间每一点，

* 我们把 \mathbf{h} 设想成一个取决于空间位置的物理量，而不是把它设想成一个严格的含有三个自变量的数学函数。当 \mathbf{h} 对于 x, y, z 或对于 x', y', z' 取微分时， \mathbf{h} 的数学表式就必须先表达为各该自变量组的函数。

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (2.35)$$

因此, $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 确是一个标量场, 它必须代表某一物理量。你应当体会到, 在 $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 中, 各微商的结合方式相当特殊。此外, 还有许多象 $\partial h_y / \partial x$ 的其他各种结合, 那既不是标量, 也不是矢量的分量。

标量 $\nabla \cdot (\text{矢量})$ 在物理学中非常有用。它的名称叫做散度。例如,

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \operatorname{div} \mathbf{h} = “\mathbf{h} \text{ 的散度}”。 \quad (2.36)$$

就象在上面我们对 ∇T 所做的, 也可以赋予 $\nabla \cdot \mathbf{h}$ 一个物理意义。然而, 我们将把这项工作推迟到以后。

首先, 我们愿意来看看, 是否还有别的东西可以由矢量算符 ∇ 得到的? 我们应当指望会有这么一种东西:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{一个矢量}, \quad (2.37)$$

它是一个矢量, 其分量可按照有关叉积的通常规则(见式 2.2)来写出:

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (2.38)$$

同理,

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}, \quad (2.39)$$

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (2.40)$$

$\nabla \times \mathbf{h}$ 这个结合式叫做“ \mathbf{h} 的旋度”。其定名原因及其物理意义都将在以后讨论。

综合起来, 同 ∇ 的结合总共有三种:

$$\nabla T = \operatorname{grad} T = \text{矢量};$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \operatorname{div} \mathbf{h} = \text{标量};$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \operatorname{curl} \mathbf{h} = \text{矢量}.$$

利用这些结合, 就可以按照一种方便方式——一种并不依赖于任一特定坐标轴组的普遍方式——来写出关于场的空间变化。

作为对矢量微分算符 ∇ 应用的一个例子, 不妨写出曾在第一章中用语言表达的那些电磁定律内容相同的一组矢量方程。它们称为麦克斯韦方程组。

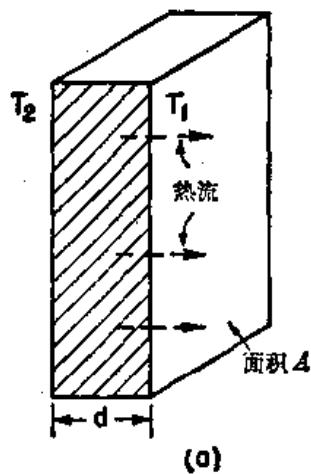
麦克斯韦方程组:

- (1) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$
- (2) $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.41)$
- (3) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$
- (4) $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$

式中, ρ 代表“电荷密度”, 即每单位体积的电量; \mathbf{j} 代表“电流密度”, 即每秒流经单位面积的电荷流率。这四个方程式包含电磁场的全部经典理论。我们将看到, 采用这一套新的记法, 将会得到多么优美而又简洁的形式!

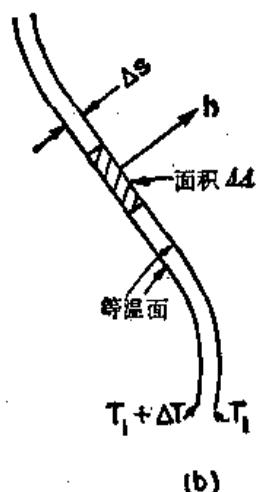
§ 2-6 热流的微分方程

让我们举一用矢量来描写的物理定律的另一个例子。这一定律并不十分精确，但对于金属和若干种能导热的其他物质来说还是很准确的。你知道，如果取一片材料，将其一面加热至温度 T_2 ，而另一面冷却至温度 T_1 ，那么热量便将经材料从 T_2 流向 T_1 [图 2-7(a)]。热流将与板的面积成正比，也与温差成正比，而与板的厚度 d 成反比。（对于某一给定温差，板越薄热流就越大。）令 J 为单位时间通过那块板的热能，我们便可以写成



比例常数 κ 称为热导率。

在一较复杂的情况下将会发生什么呢？比方说，在一块奇形怪状的材料中，温度以某种特定的方式变化。假设我们正在注意该整体中的一小部分，并设想有一块在微小尺寸上看来象图 2-7(a)那样的薄片。把这薄片旋转至与等温面平行的方向，象在图 2-7(b)中的情形，使得式(2.42)对于这一小片是正确的。



设这一薄片的面积为 ΔA ，则每单位时间所流过的热量为

$$\Delta J = \kappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \quad (2.43)$$

式中 Δs 是该薄片的厚度。原来我们已在上面把 $\Delta J / \Delta A$ 定义为 \mathbf{h} 的大小，其方向则为热流方向。热量将从 $T_1 + \Delta T$ 流向 T_1 ，所以热流就应当垂直于如图 2-7(b) 所画出的那些等温面。并且， $\Delta T / \Delta s$ 恰好就是 T 对位置的变率。又由于位置变化乃垂直于等温面，这个 $\Delta T / \Delta s$ 便是极大变率。因此，它恰好就是 ∇T 的大小。现在既然 ∇T 与 \mathbf{h} 反向，便可以将(2.43)写成一个矢量方程式：

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T. \quad (2.44)$$

(负号是必需的，因为热量在温度中会往“下坡”流。)式(2.44)是大块材料中关于热传导的微分方程。你该会看到，这是一个恰当的矢量方程。如果 κ 仅仅是一个数值，式子两边就都是一个矢量。这是由矩形板的特殊关系(式 2.42)推广至一任意情况的普遍化过程。我们以后还应该学习把所有象式(2.42)那样的基本物理关系用更为雄辩的矢量符号来记录。这种记法之所以有用，不仅是由于它会使方程看起来比较简单，而且它也能在无需参考任何一个随意选取的坐标系的情况下最清楚地表明方程的物理内容。

§ 2-7 矢量场的二阶微商

迄今我们只有场的一阶微商。为什么就没有二阶微商呢？我们本来应可以有下列几种结合式：

- (a) $\nabla \cdot (\nabla T)$;
 (b) $\nabla \times (\nabla T)$;
 (c) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$;
 (d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h})$;
 (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$. (2.45)

你可以核实一下，这些是所有的各种可能结合。

让我们首先看一看那第二个式(b). 它与下式有相同形状：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A}T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A})T = 0,$$

因为 $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ 总是等于零。因此，我们就应该有：

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \quad (2.46)$$

如果用分量来计算一遍，便可以看出这个式是怎样产生的：

$$[\nabla \times (\nabla T)]_x = -\nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad (2.47)$$

这会等于零（根据式 2.8）。对于其他分量也是如此。因此，在任何一种温度分布中（实际上，对于任何一个标量函数），始终是 $\nabla \times (\nabla T) = 0$ 。

现在让我们来取另一个例。试看能否找到另一个零。一个矢量与一个其中含有该矢量的矢积点乘的结果为零，即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.48)$$

因为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 垂直于 \mathbf{A} ，所以在 \mathbf{A} 方向上就没有 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的分量。与此相同的一种结合出现在式(2.45)(d)上，因而我们有：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{h}) = 0. \quad (2.49)$$

再次用分量进行运算来证明上式为零并不困难。

现在我们将不加证明地陈述两个数学定理。它们是物理学家亟待了解的十分有趣而又有用的定理。

在一个物理问题中，我们经常会发现某一个量——比如矢量场 \mathbf{A} ——的旋度为零。如果我们由式(2.46)就看到，一个陡度的旋度为零，这是很容易记住的，因为矢量的特性就是这样。于是，肯定有可能 \mathbf{A} 本来就是某一个量的陡度，这样它的旋度才必然等于零。这个有趣的定理说明，如果 $\operatorname{curl} \mathbf{A}$ 等于零，则 \mathbf{A} 总是某种东西的陡度——始终会存在某一标量场 ψ 使得 \mathbf{A} 等于 $\operatorname{grad} \psi$ 。换句话说，我们有这样一个

定理：

如果 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$,
 就有一个 ψ
 使得 $\mathbf{A} = \nabla \psi. \quad (2.50)$

当 \mathbf{A} 的散度为零时，还有一个相似定理。从式(2.49)我们看到，某种东西的旋度之散度总是零。如果你遇到 $\operatorname{div} \mathbf{D}$ 为零的一个矢量场 \mathbf{D} ，那你就可以下结论说， \mathbf{D} 是某一矢量场 \mathbf{C} 的旋度。

定理：

如果 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$,
 就有一个 \mathbf{C}

$$\text{使得 } \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}. \quad (2.51)$$

在检查由两个 ∇ 算符的可能结合中，我们已经找出了其中有两种结合总是等于零的。现在要来看看那些不等于零的结合。考虑表上所列的第一个结合， $\nabla \cdot (\nabla T)$ 。我们把它写成分量式：

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T).$$

于是

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_y(\nabla_y T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.52)$$

上式一般应给出某一数值。它是一个标量场。

你会看到，式中无需保留那个括号，因而可以在不会引起混乱的情况下写成：

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (2.53)$$

这里我们把 ∇^2 看成一个新的算符。这是一个标量算符。由于经常出现在物理学中，因而它被赋予一个专用名称，即拉普拉斯算符。

$$\text{拉普拉斯算符} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.54)$$

由于拉普拉斯算符是一个标量算符，就可以用它来对一矢量进行运算——这意味着对在直角坐标系的每一个分量进行同一种运算：

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

让我们再来看另一个可能性： $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$ ，那是表上的第(c)个。原来如果我们应用矢量等式(2.6)，

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.55)$$

便可以把一个旋度的旋度写成另一种不同形式。为了使用这一公式，我们应当把其中的 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 都代以算符 ∇ ，并令 $\mathbf{C} = \mathbf{h}$ 。若我们这样做，就可以得到：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla) \cdots ???.$$

但请等一等！有点不对头了。前两项不错，那都是矢量（算符都给满足了），可是末项就不知会产生出什么名堂来。它仍然是一个算符。麻烦乃在于，我们曾经不够小心以保持各项的次序正确。然而，若你再看一看式(2.55)，就会见到我们本来也尽可以写成：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (2.56)$$

这几项的次序看来要好些。现在就把上述各种符号代入式(2.56)中，便得：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h}. \quad (2.57)$$

这个形式看来不错。事实上，它是正确的，正如你能够通过分量运算以对它核实的那样。末项就是拉普拉斯算符，因而我们也同样可以写成：

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (2.58)$$

除了第(c)个 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$ 以外，我们对列于表上的双 ∇ 的结合都已多少谈过了。它可能是一个矢量场，但对它却没有什么特殊情况可说的。那不过是偶尔会出现的一种矢量场罢了。

把我们的结论都列成一表将很方便：

- (a) $\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{标量场};$
 - (b) $\nabla \times (\nabla T) = 0;$
 - (c) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \text{矢量场};$
 - (d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0;$
- (2.59)

$$(e) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}.$$

$$(f) (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} = \text{矢量场}.$$

你可能会注意到，我们从未试图发明一个新的矢量算符 ($\nabla \times \nabla$)。这点你能看得出个所以然来吗？

§ 2-8 陷 阱

我们刚才正在把关于一般矢量代数的知识应用到算符 ∇ 的代数上来。可是还必须当心，因为有可能会误入歧途的。存在两个即将提到的陷阱，虽然它们并不会出现于本课程中。对于含有两个标量函数 ψ 和 ϕ 的下列表式：

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \phi),$$

你该说些什么呢？你也许会说：它必然等于零，因为它恰好象

$$(Aa) \times (Ab)$$

那样等于零的，因为两个相同矢量的叉积始终是零。但是在我们的例子中那两个算符 ∇ 却并不相同^{*}！前一个算符运算于函数 ψ 上；而另一个则运算于一个不同的函数 ϕ 上。所以尽管我们所用的是同一个符号 ∇ ，但它们仍应被认为是不同的算符。很明显， $\nabla \psi$ 的方向取决于函数 ψ ，因而它不大可能平行于 $\nabla \phi$ 。因此，

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \phi) \neq 0 \quad (\text{一般地}).$$

幸而，我们今后无需用到这些表式。（刚才所说的不会改变这么一个事实，即对于任一标量场 ψ ， $\nabla \times \nabla \psi = 0$ ，因为这里两个 ∇ 都是对同一函数运算的。）

第二号陷阱（这也是我们在这一门课程中不必要掉进去的）是这样：当上述法则用于直角坐标系时既简单而又美妙。比方，若我们有了 $\nabla^2 \mathbf{h}$ ，而希望获得它的 z 分量，那便是

$$(\nabla^2 \mathbf{h})_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_z = \nabla^2 h_z. \quad (2.60)$$

但如果我们要求的是 $\nabla^2 \mathbf{h}$ 的径向分量，这同一表式则不行了。 $\nabla^2 \mathbf{h}$ 的径向分量并不等于 $\nabla^2 h_r$ 。原因是，如果我们同矢量代数打交道，矢量的方向就都是十分明确的。但当我们与矢量场打交道时，它们的方向则处处不同。如果我们试图用比如说极坐标来描述一个矢量场，则所称为“径向”的那个方向便会逐点不同。因此，当我们开始对它的分量进行微分时，就会陷入一大堆麻烦之中。例如，甚至对一恒定不变的矢量场，它的径向分量仍然会逐点变化的。

仅仅坚持用直角坐标系从而避免困难，往往是最保险而又最简单的做法，但有一个例外值得一提：由于拉普拉斯算符 ∇^2 是一个标量，便可以把它写成在随心所欲的任一个坐标系上（比如说在一个极坐标系上）。但由于它是一个微分算符，就应该把它只用到其分量各保持在固定方向上——即在直角坐标上——的那些矢量。因此，当我们要用分量来写出矢量微分方程时，就必须把所有的矢量场都用它们的 x 、 y 、 z 分量来表达。

* 两个算符虽然都是 ∇ ，但对不同函数运算的结果则可以不同。这样的说法似乎较妥当些。——译者注

3

矢量积分运算

§ 3-1 矢量积分; $\nabla\psi$ 的线积分

在第二章中, 我们曾找出对场取微商的各种方法: 结果有的得出矢量场; 有的得出标量场。虽然我们曾导出许多不同公式, 但从第二章所得的一切中可以归纳成一个法则: 算符 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 和 $\partial/\partial z$ 就是一个矢量算符 ∇ 的三个分量。现在我们希望对场的微商的意义获得某种理解。然后我们才会对矢量场方程的意思有更深的体会。

我们已讨论过陡度运算 (∇ 作用于一标量上) 的意义, 现在将转到散度和旋度运算的意义上来。对于这些量的解释最好是用某些矢量积分及与这些积分有关的方程来进行。可惜这些方程并不能通过某种简单的代入法从矢量代数中获得, 因而只得将其当作新的事物来学习。在这些积分公式中, 有一个实际上是无关紧要的, 但其他两个则不是这样, 我们将把它们导出并解释其涵义。下面将要研究的方程其实都不过是数学定理。它们不但对于解释散度与旋度的意义及其内容将会有用, 而且对作一般的物理理论工作也同样有用。这些数学定理对于场论的作用, 正如能量守恒定理对于质点力学一样。象这一类的普遍定理对更深刻地理解物理学是很重要的。然而, 你将会明白, 它们对于解答问题——除去那些最简单情况——用处并不大。但令人高兴的是, 在我们这一课程的开头, 就有许多简单问题可用我们即将打算处理的三个积分公式来解决。可是, 我们也将见到, 当问题变得越发复杂时, 便不能再用这些简单方法了。

首先着手处理涉及陡度的一个积分公式。这个关系式含有一个十分简单的概念。既然陡度代表一个场量的变化率, 则如果我们对这一变化率进行积分, 应该获得其总变化。假设有一标量场 $\psi(x, y, z)$, 在任意两点(1)和(2)上, 函数 ψ 将分别取值 $\psi(1)$ 和 $\psi(2)$ 。[我们采用一种方便的记法, 用(2)代表 (x_2, y_2, z_2) , 即 $\psi(2)$ 的意义就和 $\psi(x_2, y_2, z_2)$ 的意义相同。]如果 Γ 是连接(1)和(2)两点间的任一曲线, 如图 3-1 所示的那样, 则下述关系就是正确的。

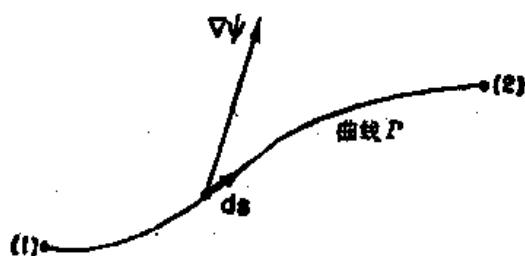


图 3-1 式(3.1)中的各项。矢量 $\nabla\psi$ 是在线元 ds 处计算出来的

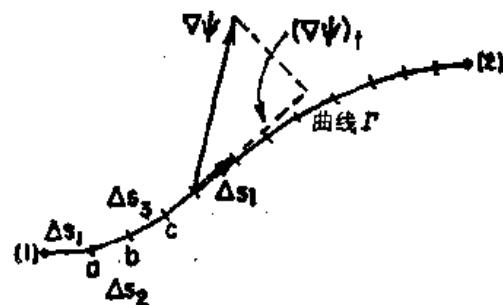


图 3-2 线积分是和的极限

定理 1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot ds. \quad (3.1)$$

这积分是一线积分, 它是对矢量 $\nabla\psi$ 和另一个代表沿曲线 Γ 一个无限小线元的矢量 ds [从

点(1)指向点(2)]两者的点积, 即沿着由点(1)至点(2)的曲线 Γ 而进行积分的.

首先, 我们应该复习一下所谓线积分的含义是什么. 试考虑一个标量函数 $f(x, y, z)$ 和一条连结(1)和(2)两点间的曲线 Γ . 在曲线上划分出许多点, 再用直线段连接这些点, 如图 3-2 所示. 每段具有长度 Δs_i , 其中 i 是依次取 1, 2, 3, … 等值的下角标. 所谓线积分

$$\int_{(1)}^{(2)} f \, ds,$$

是指这么一个和:

$$\sum f_i \Delta s_i,$$

其中 f_i 是在第 i 段上的函数值. 极限值就是当所分节段无限增加时(说得明显些, 就是使得其中连最大的都是 $\Delta s_i \rightarrow 0$)这个和所趋近的数值.

在上述定理中的积分, 即式(3.1), 也是指这一种东西, 虽然看起来稍为有点不同. 这里并非 f , 而是另一个标量, 即 $\nabla\psi$ 在 Δs 方向上的分量. 如果我们把这一分量写成 $(\nabla\psi)_i$, 则很清楚,

$$(\nabla\psi)_i \Delta s = (\nabla\psi) \cdot \Delta s. \quad (3.2)$$

式(3.1)中的积分就意味着对这一类的项求和.

现在让我们看看为什么式(3.1)是正确的. 在第一章中, 我们曾经证明, 沿一小位移 dR 的 $\nabla\psi$ 分量乃是在 dR 方向上 ψ 的变率. 考虑图 3-2 上由点(1)至点(a)间的线段 Δs_1 . 按照我们的定义,

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1. \quad (3.3)$$

同样, 我们也有

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.4)$$

当然, 上式中的 $(\nabla\psi)_1$ 是指在线段 Δs_1 上计算出来的陡度, 而 $(\nabla\psi)_2$ 则是在 Δs_2 上计算出来的陡度. 如果我们把(3.3)和(3.4)两式相加, 便得:

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.5)$$

你可以看到, 若继续加进这样的项, 就能获得这一结果:

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum (\nabla\psi)_i \cdot \Delta s_i. \quad (3.6)$$

左边并不与我们所选取的间隔有关——如果(1)和(2)两点始终保持固定不变的话——所以我们就可以取右边的极限. 这样, 我们就已经证明了式(3.1).

你可从上述的证明中看到, 正如该等式并不依赖于那些点 a, b, c, \dots 的选取方式那样, 它也不依赖于我们所选取的用以连接(1)和(2)间的曲线 Γ 究竟如何. 对于任一由点(1)至点(2)间的曲线, 我们的定理都是正确的.

关于记法方面的一点注释: 你将会看到, 如果为了方便起见, 可写成

$$(\nabla\psi) \cdot ds = \nabla\psi \cdot ds, \quad (3.7)$$

将不致引起任何混乱. 利用这一记法, 上述定理就是

定理 1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.8)$$

沿任一由(1)
至(2)的曲线

§ 3-2 矢量场的通量

在讨论下一个积分定理——关于散度方面的定理——之前，我们想学习一下物理意义较明显的关于热流的某种概念。我们曾定义过矢量 \mathbf{h} ，它代表单位时间内流经单位面积的热量。假设在一块材料内部，有一个包围着体积 V 的某闭合面 S （图 3-3）。我们希望找出从这一个体里流出去的热量有多少。当然，我们可以由计算通过表面 S 而流出去的总热量来求得它的值。

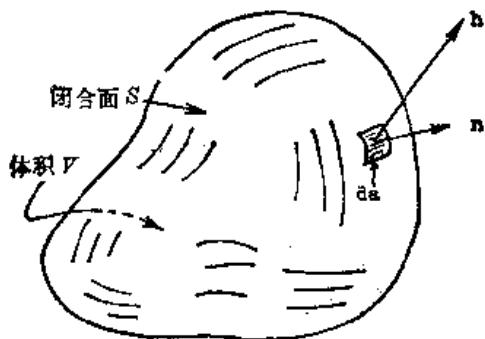


图 3-3 闭合面 S 规定了体积 V ，单位矢量 n 是面积元 da 的向外法线，而 \mathbf{h} 则是该面积元处的热流矢量

我们用 da 来代表一个面积元的面积。这符号代表一个二维微分。比方，若该面积碰巧是在 xy 面上，则应有

$$da = dx dy.$$

以后还将有对体积进行的积分，为此，考虑一个小立方体的微分体积将很方便。这样，当我们写出 dV 时，指的就是

$$dV = dx dy dz.$$

有些人不喜欢写成 da ，而喜欢写成 d^2a 以提醒人们注意那是一个二维量。他们也不想用 dV 而却要用 d^3V 。我们则将采用那种较简单的记法，并假定你确能记住一个面积总具有二维，而体积总是具有三维。

流经面积元 da 的热量等于该面积乘以垂直于 da 的 \mathbf{h} 分量。我们已把 n 定义为从该面积以直角指向外的单位矢量（图 3-3）。希望得到的 \mathbf{h} 分量为：

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.9)$$

这样，流经 da 的热量就是

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.10)$$

要求得流经任一面积的总热量，应对来自所有各面积元的贡献都加起来。换句话说，将遍及整个表面对（3.10）式取积分：

$$\text{向外流经 } S \text{ 的总热量} = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.11)$$

我们将把这个面积分称为“ \mathbf{h} 通过该表面的通量”。通量这个词的原有意义是流量，因而面积分就只意味着 \mathbf{h} 通过该表面的流量。可以这么设想： \mathbf{h} 是关于热量流动的“热流密度”，而它的面积分则是指向表面之外的总热流，也就是每单位时间流出的热能（每秒焦耳数）。

我们希望把这一概念推广到矢量并非代表任何流动东西的那种情况。例如，它或许是电场。如果我们乐意的话，肯定也能对电场的法向分量沿一个面积积分。尽管这并不是任何东西的流动，但我们仍称之为“通量”。我们说，

$$\mathbf{E} \text{ 通过 } S \text{ 面的通量} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.12)$$

这就把“通量”这一词推广到指一矢量的“法向分量的面积分”了。即使所考虑的表面不是闭合的情况，我们也将运用这同一定义，就象这里讨论闭合面时那样。

再来谈论热流，让我们来看那种热量守恒的特殊情况。比方，设想有某件材料加热以后就再没有热量产生或吸收了。此后，如有净热量从一个闭合面流出去，该体积内的热容量就一定会减少。由于热量应该守恒，因此我们便说：

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.13)$$

式中 Q 是表面 S 内的热量。从 S 面流出来的热通量等于 S 面内总热量 Q 相对于时间的负变率。这一种解释是可行的，因为我们正在谈论热流，而且也因为我们已假定了热量守恒。当然，假如热量继续产生，则无从谈论在该体积内的总热量了。

现在我们要来指出一个关于任一矢量的通量的有意义的事实。你如果愿意，可以想象这矢量即是热流矢量，但我们所要讲的是对任一矢量场 \mathbf{C} 都将适用的。设想有一包围体积 V 的闭合面 S ，再通过某种如图 3-4 所示的那种“剖面”将体积分成两部分。这样，我们就有两个闭合面和体积了。体积 V_1 被 S_1 面包围，由原来表面的一部分 S_a 和剖面 S_{ab} 构成的。体积 V_2 被 S_2 面包围，由原来表面的其余部分 S_b 再加上剖面 S_{ab} 构成的。现在考虑下述问题：假设要计算通过 S_1 面的向外通量，再加上通过 S_2 面的向外通量。这个总和是否会等于通过我们开始时那个完整表面的通量呢？答案是肯定的。通过 S_1 和 S_2 所共有的 S_{ab} 面那部分面积的通量恰好互相抵消。关于矢量 \mathbf{C} 从 V_1 流出的通量，我们可以写成：

$$\text{通过 } S_1 \text{ 的通量} = \int_{S_a} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da. \quad (3.14)$$

而从 V_2 流出的通量，则是：

$$\text{通过 } S_2 \text{ 的通量} = \int_{S_b} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.15)$$

注意！在第二个积分中， \mathbf{n}_1 是代表当 S_{ab} 属于 S_1 时它的向外法线，而 \mathbf{n}_2 则代表当 S_{ab} 属于 S_2 时它的向外法线，分别如图 3-4 所示。显然， $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ ，因而

$$\int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.16)$$

现在若(3.14)和(3.15)两式相加，则通过 S_1 和 S_2 两通量之和恰好等于那两个积分之和，而这两个积分合在一起，就是通过那个原来的 $S = S_a + S_b$ 面的通量。

我们看到，通过整个外表面 S 的通量，总可以认为是该体积分成两部分后通过它们的两通量之和。还可以照样再分割下去——比如把 V_1 再分成两部分。你会看到同一些论据仍然适用。因此，不管将原来体积按何种方式分割，普遍正确的结果应该是：代表那原来积分的通过外表面的通量，等于出自所有内部各小部分的各通量之和。

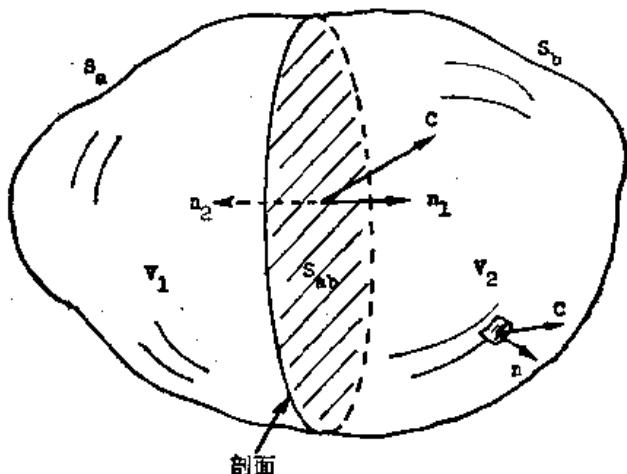


图 3-4 包围在 S 面内的体积 V 被一“剖面” S_{ab} 分成两半。现在我们就有了包围在 $S_1=S_a+S_{ab}$ 面内的体积 V_1 和包围在 $S_2=S_b+S_{ab}$ 面内的体积 V_2

§ 3-3 来自小立方体的通量; 高斯定理

现在考虑一个小立方体^{*}的特殊情况，并将找出来源于它的通量的一个重要公式。设想各边都与坐标轴平行如图 3-5 所示的一个立方体。假设最接近于原点的那一角落的坐标为

x, y, z 。令 Δx 为该立方体在 x 方向上的长度， Δy 为 y 上的长度，而 Δz 即为在 z 上的长度。我们是希望求出矢量场 C 通过该立方体表面的通量。这将分别算出每个面的通量再求出六个面之和而获得。首先，考虑在图上标明为 1 的那个面。在这一个面上，向外通量等于 C 的 x 分量的负值遍及该面的积分。这一通量是

$$-\int C_x dy dz.$$

图 3-5 来自一小立方体的通量的计算

既然我们考虑的是一个小立方体，便可用该面中心——我们称之为点(1)——的 C_x 值乘以该面面积 $\Delta y \Delta z$ 来对这一积分作一近似：

$$\text{出自面 1 的通量} = -C_x(1) \Delta y \Delta z.$$

同理，出自面 2 的通量，也可以表达为：

$$\text{出自面 2 的通量} = C_x(2) \Delta y \Delta z.$$

以上两式中的 $C_x(1)$ 和 $C_x(2)$ ，一般说来，是有点差别的。但如果 Δx 足够小，则可以写成：

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

当然，还有更多的项，不过它们将涉及 $(\Delta x)^2$ 和更高次项，因而如果只考虑微小 Δx 的极限，那便都可以忽略。因此，通过面 2 的通量就是：

$$\text{出自面 2 的通量} = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z.$$

把通过面 1 和面 2 的通量相加，得：

$$\text{出自 1 和 2 两个面的通量} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

上式中的微商，确切的应是在面 1 的中心处，也即在点 $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$ 处计算。但对于一个无限小的立方体来说，即使是在角点 (x, y, z) 上算出它，所造成的误差也是可以忽略的。

依此类推，对其他每一对面，我们也会得到：

$$\text{出自面 3 与面 4 的通量} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z,$$

$$\text{出自面 5 与面 6 的通量} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

而通过所有表面的总通量则是这些项之和。我们得出：

$$\int_{\text{立方体}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

* 下面的推导也同样适用于任一个直角平行六面体。

这些微商之和恰好就是 $\nabla \cdot \mathbf{C}$ 。并且， $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ ，即该立方体的体积。所以对于一个无限小立方体，我们可以讲

$$\int_{\text{表面}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \quad (3.17)$$

这就证明了，一小立方体表面向外的通量等于该矢量的散度乘以立方体的体积。现在我们已经看到了一个矢量的散度的“意义”。在 P 点处一个矢量的散度就是从在 P 点附近每单位体积的通量—— \mathbf{C} 的向外“流量”。

我们已把 \mathbf{C} 的散度与 \mathbf{C} 从每一无限小体积向外流出的通量联系起来了。对于任一有限体积来说，我们可引用上面已经证明过的事——从某一体积出来的总通量等于从其中每一部分出来的各通量之和。这就是说，我们可遍及整个体积对散度进行积分。它向我们提供了这样一个定理：对于任一矢量的法向分量的遍及任一闭合面的积分，也可以写成该矢量的散度遍及由该面积所包围的体积的积分。这个定理以高斯(Gauss)命名。

高斯定理：

$$\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} dV, \quad (3.18)$$

式中 S 是任一闭合面而 V 是这个面内的体积。

§ 3-4 热传导；扩散方程

仅仅为了熟悉高斯定理，让我们利用上述定理来考虑一个实例。仍然例举金属中的热流，假定其中所有热量都已预先输入，而此刻正在冷却的那种简单情况。这里没有任何热源，所以热量是守恒的。那么，在任一时刻存在于某一特定体积里的热到底有多少呢？它所减少的量必须恰好等于从该体积流出来的量。如果我们的体积是一个小立方体，则根据式(3.17)就应该写成：

$$\text{流出的热量} = \int_{\text{立方体}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \int \nabla \cdot \mathbf{h} dV. \quad (3.19)$$

这必然要等于立方体内部热量的损失率。设 q 为每单位体积内的热量，则在该立方体内的热量为 $q \Delta V$ ，其损失率则为：

$$-\frac{d}{dt} (q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (3.20)$$

比较(3.19)和(3.20)两式，我们见到：

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

仔细注意一下这一方程的形式，它是物理学中经常出现的形式，即表达了一个守恒定律——这里则是热量守恒。我们曾经在式(3.18)中以另一种方式表达过这同一物理事实。这里是守恒方程的微分形式，而式(3.18)则是一种积分形式。

已经通过把式(3.18)应用于一无限小立方体而获得了式(3.21)。我们也可反过来做。对于一个由 S 面包围着的大体积 V ，高斯定理表达为：

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{h} dV. \quad (3.22)$$

应用式(3.21)，得出右边的积分恰是 $-dQ/dt$ ，因而我们又一次得到了式(3.18)。

现在让我们考虑一个不同的情况。想象在一大块材料中有一个很小的洞，里面正在进

行某种会释出热量的化学反应。我们也可以这样设想，用导线连接一个小小的电阻器，然后通电使之发热。我们并假定热量实际上是在一点上产生的，并令 W 代表在该点处每秒释放出来的能量。我们还假定在体积的其余部分热量始终守恒，而且该项热量的产生也已持续了足够长的时间——使得现在任何一处的温度都不再发生变化了。问题是：金属里各处的热流矢量 \mathbf{h} 是什么样子？在每一点上有多少热量流过？

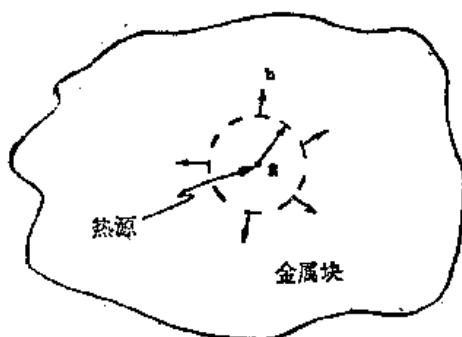


图 3-6 在接近一个点热源的区域中，
热流沿径向朝外

我们知道，如果对 \mathbf{h} 的法向分量遍及包围着该热源的闭合面进行积分，则始终会得到 W 。所有在该点源上陆续产生之热都必须通过该表面流出，因为我们已假定其流动是稳定的。这里有一个困难问题，即要找出一个矢量场，这矢量场在遍及任一表面取积分之后总要得到同一个结果 W 。然而，我们可以取一个稍微有点特殊的表面而使场相当易于找出。比如取一个半径为 R 而其中心在源处的球面，并假定热流是沿径向的（图 3-6）。直觉告诉我们，如果该块材料足够大，而我们又不至于太接近边缘，则 \mathbf{h} 应该是径向的，而且，球面上所有一切点的值大小均应相同。你看，我们正在加入某种分量的猜测工作——常被称为“物理直觉”——于数学方面，以便获得答案。

当 \mathbf{h} 沿着径向而又具有球对称性时，对 \mathbf{h} 的法向分量遍及该面积的积分将会十分简单，因为法向分量恰好就是 \mathbf{h} 的大小而且又是不变的。我们积分时所覆盖的面积为 $4\pi R^2$ ，这样就有

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} d\sigma = h \cdot 4\pi R^2 \quad (3.23)$$

（式中 h 是 \mathbf{h} 的大小）。这一积分应该等于 W ，即在源处热量的产生率。因而获得：

$$h = \frac{W}{4\pi R^2},$$

或

$$\mathbf{h} = \frac{W}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r, \quad (3.24)$$

式中 \mathbf{e}_r 照例代表在径向上的单位矢量。我们的结果说明， \mathbf{h} 与 W 成正比而与从源至该点的距离的平方成反比。

刚才所得到的结果，仅适用于点热源附近的热流。现在让我们试试，寻找那种仅在热量守恒的条件下，对最普遍的热流也都能适用的方程式。这样，我们将只与在任何热源或热吸收体之外的那些地方所发生的情况打交道。

关于热传导的微分方程，曾在第二章中推导过了。根据式(2.44)，

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T. \quad (3.25)$$

（应记住这一关系式是近似的，不过对于金属之类材料近似得相当之好。）当然，它只是对于在材料里那些没有热量产生或吸收的区域内才适用。我们也已在上面导出了另一个关系，即式(3.21)，那是在热量守恒情况下适用的。如果把该方程与(3.25)相结合，则可得：

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

若 κ 是一常数，则

$$\frac{dq}{dt} = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T. \quad (3.26)$$

你会记起, q 是每单位体积内的热量, 而 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, 则是拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

如果我们再作一个假设, 便可得到一个十分有趣的方程式。试假定材料中的温度与每单位体积的热容量成正比——即是材料有某一确定的比热。当这一假设有有效时(往往如此), 我们就可以写成:

$$dq = c_v dT,$$

或

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}. \quad (3.27)$$

热量的变率正比于温度的变率。这里的比例常数 c_v 就是每单位体积材料的比热。应用(3.27)和(3.26)两式, 便可以得到:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T. \quad (3.28)$$

我们已找出了, 每一点上 T 的时变率与 T 的拉普拉斯算符—— T 的空间依存性的二阶微商——成正比。这样, 我们就有一个在 x, y, z 和 t 处的关于温度 T 的微分方程。

微分方程(3.28)称为热扩散方程。它经常被写成:

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T, \quad (3.29)$$

式中 D 叫扩散常数, 在这里等于 κ/c_v 。

这个扩散方程在许多物理问题中都会出现——气体扩散、中子扩散以及其他各种扩散, 我们曾在第一卷第四十三章中讨论过这类现象的物理学。现在你就有一个在最可能普遍情况下描述扩散的完整方程。往后某一时候我们还将讲到一些求解该微分方程的方法, 以便找出在特定条件下温度是怎样变化的。现在我们又将回来考虑有关矢量场的其他一些定理。

§ 3-5 矢量场的环流

现在, 我们想用有点类似于对付散度的办法来看待旋度。通过考虑遍及一个表面的积分, 我们已经得到高斯定理, 尽管当初与散度的联系还不太明显。我们当时怎么会知道要假定进行一个遍及面积的积分以便获得散度呢? 根本不清楚会引导出这么一个结果。而现在也同样缺乏明显的保证, 我们将计算矢量的另一件东西从而证明它是与旋度有关的。这回我们所计算的将是所谓矢量场的旋度。如果 C 是任一个矢量场, 我们取其沿一曲线的分量, 并对这一分量绕行一整条回线进行积分。这一积分称为该矢量场绕行该回线的环流。在本章的开头, 我们曾经讨论过关于 $\nabla \psi$ 的线积分。现在我们将对任一种矢量场 C 求线积分。

设曲线 Γ 为空间中任意一条闭合回线——当然是在想象中的。有一个例子如图 3-7 所示。 C 的切向分量绕行该回线的线积分被写成:

$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} C \cdot ds. \quad (3.30)$$

你应该注意, 这积分是绕行一周时取的, 并不象以前那样从一点至另一点。在积分符号上的

那个小圈圈便是为了提醒人们，该积分是指环绕一周的线积分。这一积分叫做该矢量场绕

行曲线 Γ 的环流。这个名称原本是从考虑液体的环流而得的。但这一名字——正如同通量一样——已被推广至即使没有任何物质在“环流”的那些情况。可见对于任何一种场都适用。

如同对待通量那种方法一样，我们现在可以证明，绕行一条回线的环流等于绕行两部分回线的环流之和。假设我们通过在原来曲线上的(1)和(2)两点间用某一示如图 3-8 的割线来连结，这样就可以将图 3-7 上的曲线分成两个回线。现在存在两条回线 Γ_1 和 Γ_2 。 Γ_1 是由处在(1)和(2)左边那部分原有曲线 Γ_a 再加上“捷径” Γ_{ab} 而构成的。 Γ_2 则是由原有曲线的其余部分加上该捷径而构成的。

绕行 Γ_1 的环流等于沿 Γ_a 和沿 Γ_{ab} 两积分之和。同理，绕行 Γ_2 的环流也是两部分之和，其一沿 Γ_b 而另一沿 Γ_{ab} 。对于曲线 Γ_2 来说，沿 Γ_{ab} 的积分具有与对曲线 Γ_1 取同一积分时相反的符号，因为它们的取向相反——必须按同一旋转“指向”来取该两项线积分。

按照我们沿用过的同一种论据，你可以看出，该两个环流之和将恰好给出绕行原有曲线 Γ 的线积分。那来自 Γ_{ab} 的部分互相抵消了。绕行其中一部分的环流再加上绕行第二部分的环流等于绕行整条外线的环流。我们可以重复

这一过程，把原有回线割裂成任一数目的小回线。当将这些小回线的环流都相加起来时，在它们的相邻部分总会互相抵消，从而使其总和相当于绕行那原有单一回线的环流。

现在让我们假设那原有回线就是某一个表面的边缘。当然，会有无限多个面全都以该原有回线为边缘的。然而，我们的结果将与所选取的表面无关。首先，将原有回线分割成若干条全都落在所选取的面上的小回线，如图 3-9 所示。不管该面形状如何，

如果我们选取的小回线足够小，则可以假定每一小回线将包围一个基本上是平坦的面积。并且，我们也能选取那些小回线使得每条都几乎构成正方形。现在就可以通过求绕行所有小回线的环流，再取其和，从而算出绕行该回线 Γ 的环流了。

§ 3-6 绕行一个正方形的环流；斯托克斯定理

我们将怎样得出沿每一小正方形的环流呢？首先就要问，这一正方形在空间中的取向如何？要是它有一个特殊取向，那计算起来就会方便得多。例如，假使它是在一个坐标面上。既然对坐标轴的取向我们还从未假设过什么，那么就可以选取这样的坐标轴，使我们正

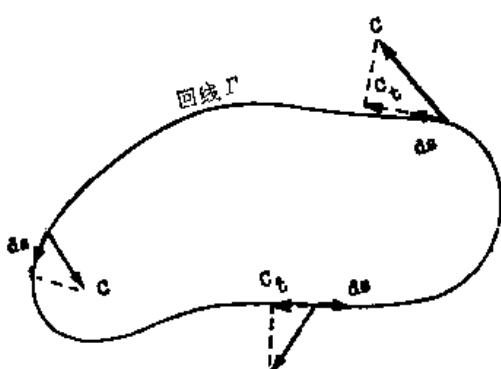


图 3-7 绕行曲线 Γ 的 \mathbf{C} 的环流，即是 C_t （即 \mathbf{C} 的切向分量）的线积分

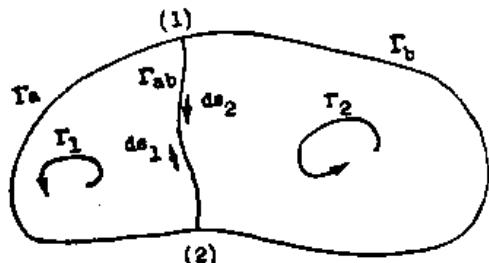


图 3-8 绕行整个回线的环流等于绕行两个回线 ($\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ 和 $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$) 的环流之和

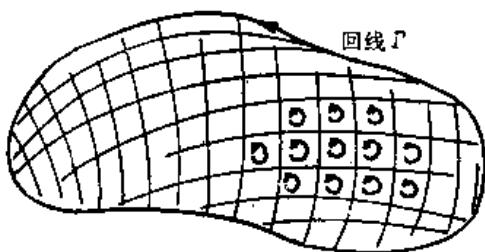


图 3-9 选取某一被回线 Γ 所包围着的表面。这个面被分割成若干个小面积，每个近似于一正方形。绕行 Γ 的环流就等于绕行各小回线的环流之和

在全力注意的那个小正方形正好落在 xy 面上, 如图 3-10 所示。如果我们的结果要用矢量记法来表达, 那就可以说, 不管该面的特殊取向如何, 结果都是一样的。

现在我们希望来找出绕行该小正方形的 \mathbf{C} 场的环流。如果令该正方形足够小, 使得矢量 \mathbf{C} 在沿它的任一边上都不会改变得很多, 这样进行线积分就将十分方便。(正方形越小, 这个假定越好, 而实际所谈的正是无限小的正方形。) 从位于图的左下角那一点 (x, y) 出发, 按照箭头所指的方向环行一周, 沿标明为(1)的那第一条边, 切向分量为 $C_x(1)$ 而距离为 Δx , 该积分的第一部分就是 $C_x(1)\Delta x$ 。沿那第二条边, 我们获得 $C_y(2)\Delta y$ 。沿第三条边, 得 $-C_x(3)\Delta x$, 而沿第四条边, 得 $-C_y(4)\Delta y$ 。这些负号是需要的, 因为这里要求的是沿环行方向的切向分量。因此, 整个线积分就是:

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y. \quad (3.31)$$

现在让我们注意那第一和第三部分。它们合起来就是:

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x. \quad (3.32)$$

你也许会想到, 对我们的近似程度来说这个差值该等于零。这对于第一级近似是对的。然而, 仍可以更为精确一些, 即算进 C_x 的变率。如果我们这样做, 便可以写成:

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y. \quad (3.33)$$

假如把次一级的近似也包括进去, 则会牵涉到 $(\Delta y)^2$ 那一些项, 但既然我们最终将取当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时的极限, 那么象这样的项便可以忽略。将(3.33)和(3.32)两式结合起来, 会得出

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (3.34)$$

在我们的近似程度内, 上式中的微商可以在 (x, y) 点上算出来。

同理, 环流中的其他两项, 也可以写成:

$$C_y(2)\Delta y - C_y(4)\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (3.35)$$

于是, 绕行上述那个小正方形的环流就是:

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (3.36)$$

这很有趣, 因为括号内两项恰好就是旋度的 z 分量。并且, 我们还注意到, $\Delta x \Delta y$ 就是该正方形的面积。因此, 可以将环流(3.36)写成:

$$(\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta a.$$

这个 z 分量实际上就是该表面元的法向分量。因此, 还可以将绕行一个微分正方形的环流写成一种不变的矢量形式:

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_n \Delta a = (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \Delta a. \quad (3.37)$$

我们的结果是: 任一矢量 \mathbf{C} 绕行一个无限小正方形的环流, 等于 \mathbf{C} 的旋度垂直于表面

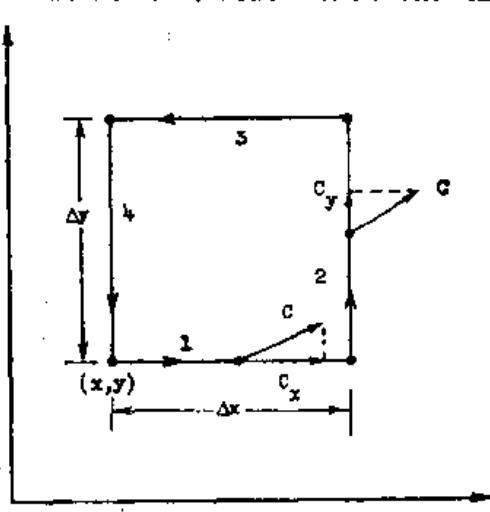


图 3-10 计算绕行一个小正方形的 \mathbf{C} 的环流

的分量乘以该正方形面积.

现在, 绕行任一条回线 Γ 的环流, 便可以轻而易举地同矢量场的旋度联系起来了. 采用

任一个方便的 S 面将回线盖满, 如图 3-11 所示, 并把这个面上的一组无限小正方形的环流都相加起来. 这个总和可以写成一个积分. 结果将是以斯托克斯 (Stokes) 命名 (为纪念斯托克斯先生) 的一个十分有用的定理.

斯托克斯定理:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{C})_n da, \quad (3.38)$$

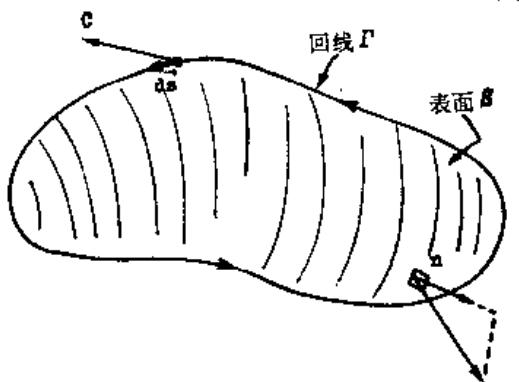


图 3-11 绕行 Γ 的 \mathbf{C} 的环流等于 $\nabla \times \mathbf{C}$ 的法向分量的面积分

式中 S 是以 Γ 为边的任一个面.

现在必须谈谈关于符号的一个惯例. 在图

3-10 中, 如果采用一种“常用”的——也即“右手”的——坐标系统, z 轴便应指向你们. 当按照旋转的“正”指向取线积分时, 我们会找出环流即等于 $\nabla \times \mathbf{C}$ 的 z 分量. 要是我们走的是相反方向, 即该获得一个相反符号. 那么, 一般说来, 我们怎么会知道应选取哪个方向作为 $\nabla \times \mathbf{C}$ 的法向分量的正向呢? 正法线总必须与旋转的指向联系起来, 如图 3-10 所示的. 对于普遍情况, 则如图 3-11 所示.

“右手法则”是记住这个关系的一种办法. 如果你用右手手指将曲线 Γ 围绕起来, 指尖指向 $d\mathbf{s}$ 的正方向, 那么你的大拇指就会指向 S 面的正法线方向.

§ 3-7 无旋度场与无散度场

现在我们要来讨论上述新定理的某些结果. 首先, 考虑旋度处处为零的一种矢量场. 这里由斯托克斯定理说明, 绕行任一回线的环流将等于零.

现在若在一闭合曲线上选取(1)和(2)两点(图 3-12), 则从(1)至(2)的切向分量的线积分将与这两条可能路线中选取哪一条无关. 我们可以断定, 从(1)至(2)的积分只取决于这两点的位置——也就是说, 它只是位置的函数. 这同一种逻辑也曾在第一卷第十四章中使用过, 在那里我们证明了如果某量绕行一闭合同路的积分总是零, 则这种积分可以表达为两端点位置的某一函数之差. 这一事实使我们建立了势的概念. 而且, 我们也证明了该矢量场就是这一势函数的陡度[见第一卷中式(14.13)].

由此可见, 任一旋度为零的矢量场等于某一标量函数的陡度. 这就是说, 如果处处 $\nabla \times \mathbf{C} = 0$, 便会有某一个 ψ , 使得 $\mathbf{C} = \nabla \psi$ ——这是一个有用的概念. 如果我们愿意, 这一特殊类型的矢量场, 可以用一个标量场来描述.

让我们再来证明另一件事. 假设有任一个标量场 ϕ . 如果取它的陡度即 $\nabla \phi$, 那么这个矢量绕行任一闭合回线的积分就必然为零. 从点(1)至点(2)这矢量的线积分则等于 $[\phi(2) - \phi(1)]$. 如果(1)和(2)是同一点, 那么定理 1, 即式(3.8), 就会告诉我们该线积分等于零;

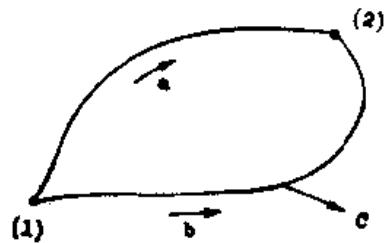


图 3-12 如果 $\nabla \times \mathbf{C} = 0$, 则绕行一闭合曲线 Γ 的环流等于零. 从(1)至(2), $\mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$ 的线积分沿 a 线取与沿 b 线取的结果相同

$$\oint_{\text{闭合}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

应用斯托克斯定理，我们可以断定：遍及任一个面，

$$\int \nabla \times (\nabla \phi) da = 0.$$

但如果遍及任一个面的积分都等于零，则其被积函数一定是零了。所以，

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0,$$

总是如此。我们在§2-7中也曾应用矢量代数证明过这同一结果。

现在让我们有意用一个大面 S 来铺盖一个小回线 Γ ，如图 3-13 所示的那种特殊情况。我们希望看看，当该回线缩小至一点，使得表面的边缘消失不见而成为一闭合面时，究竟会发生什么情况。现在，如果矢量 \mathbf{C} 处处有限大，则当我们缩小该回线时，绕行 Γ 的线积分应该趋于零——该积分大体上正比于 Γ 的周长，而周长已等于零了。按照斯托克斯定理， $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ 的面积分也应等于零。莫明其妙地，当我们把表面关闭时，就会加进一些将已经存在那里的东西抵消掉的贡献。因而我们得到一个新的定理：

$$\int_{\text{任一闭合面}} (\nabla \times \mathbf{C})_n da = 0. \quad (3.39)$$

这看来很有意思，因为我们已经有一个关于矢量场的面积分的定理。按照高斯定理，即式(3.18)，这样的一个面积分等于该矢量的散度的体积分。当运用于 $\nabla \times \mathbf{C}$ 上时，高斯定理就申述：

$$\int_{\text{闭合面}} (\nabla \times \mathbf{C})_n da = \int_{\text{面内体积}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV. \quad (3.40)$$

所以我们断言，第二个积分也应等于零，即

$$\int_{\text{任一体积}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV = 0, \quad (3.41)$$

这对于无论哪一种矢量场 \mathbf{C} 都正确。既然式(3.41)对于任一体积都正确，即在空间每一点上该被积函数为零就必然是正确的了。因此，我们就有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = 0,$$

总是如此。但这是§2-7中我们曾从矢量代数方面得到过的同一结果。现在开始来审查一下，如何把一切东西都互相配合起来。

§3-8 总 结

让我们把从矢量微积分那里得到的结果作个总结。这些结果，实际上就是第二和第三两章的要点：

1. 算符 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ 可以认为是一个矢量算符 ∇ 的三个分量，而把这一算符当作矢量看待，即

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

则从矢量代数方面所获得的那些公式都是正确的。

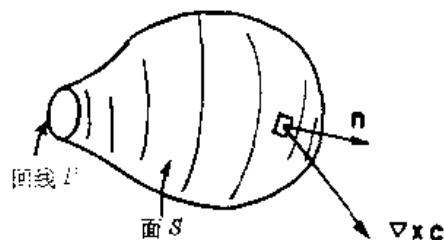


图 3-13 在趋于一个闭合面的极限上，我们找出了 $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ 的面积分应等于零。

2. 标量场中，两点的差值等于该标量的陡度的切向分量沿任一条连结该(1)、(2)两点间的曲线取的线积分：

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(2) \\ \text{任一曲线}}}^{(1)} \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.42)$$

3. 一任意矢量的法向分量遍及一个闭合面的面积分等于该矢量的散度遍及该闭合面内体积的积分：

$$\int_{\text{闭合面}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\text{面内体积}} \nabla \cdot \mathbf{C} dV. \quad (3.43)$$

4. 一任意矢量的切向分量环绕一闭合回线的线积分等于该矢量的旋度的法向分量遍及任一以该回线为边缘的面的面积分：

$$\int_{\text{边缘}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_M (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.44)$$

4

静电学

§ 4-1 静电和静磁

现在我们开始对电磁学理论作详尽的研究，全部电磁学都包含在麦克斯韦方程组中。麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

由这些方程所描述的情况可能十分复杂。我们将首先考虑那些相对简单的情况，以便在从事更复杂的问题以前，学会如何去处理这些简单情况。其中最容易处理的是没有任何东西与时间有关——这叫做静态——的情况。所有各电荷都永远固定在空间里，即使它们确实有运动的话，也只是作为电路中的稳恒流动（使得 ρ 和 \mathbf{j} 都不随时间而变）。在这种情况下，麦克斯韦方程组中所有关于场的时间微商的那些项都等于零。这样，麦克斯韦方程组变成：

静电学

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

静磁学

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}; \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

关于这四个方程，你将会注意到一个有趣情节。这一组方程可以分成两对。电场 \mathbf{E} 仅出现在前两个方程中，而磁场 \mathbf{B} 仅出现在后两个方程中。 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场并不互相关联。这意思是，只要电荷和电流都属于静态，则电和磁就是两个性质不同的现象。直到诸如电容器充电、或移动磁铁时，引起电荷或电流的变化， \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 的相依性仍不会显露出来。只有变化足够迅速，使得麦克斯韦方程组中那些时间微商变得显著时， \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 才会相互依存起来。

现在，如果你注意那些静止情况的方程，你将会看到，学习这两门各称为静电学与静磁学的学科，从弄清楚关于矢量场的数学特性的观点来看，那是最理想的了。因为静电学是矢量场具有零旋度和某一给定散度的一个极佳例子；而静磁学则是矢量场具有零散度和某一给定旋度的极佳例子。更通常的——而可能认为是更满意的——表达电磁学理论的方法是先从静电学出发，从而学习有关散度方面的知识。然后再开始对静磁学和旋度的处理。最后，才把电学和磁学合并起来。我们在前几章已初步介绍了矢量微积分学的完整理论。

现在就把这种矢量微分学理论应用于静电学这种特殊情况，那里的场 \mathbf{E} 是由前一对方程给出的。

我们将从最简单的情况——即所有各电荷的位置都已被规定了的情况——开始。要是只学这样水平的静电学（就象下面两章中所做的那样）就够了，那生活将显得多么简单，简直是平凡得乏味。正如你将会看到的，一切事情都可以从库仑定律和某一积分得出了。但事实并非如此，在许多实际的静电学问题中，开始时并不知道电荷在哪里，只知道它是按照物性所规定的方式来分布的。电荷所占据的位置取决于场 \mathbf{E} ，而这个场反过来又取决于电荷的位置。于是，事情可能变得很复杂。例如，如果把一个带电物体移到一块导体或绝缘体附近，导体或绝缘体中的电子和质子就会到处奔跑。式(4.5)中的电荷密度 ρ ，有一部分可能是我们原先就已知的带上去的电荷，另外一部分则是那些在导体中到处跑动的电荷所引起的。要是所有这些电荷都必须考虑进去的话，将会把人们引入到一些相当微妙而又有趣的问题中去。所以尽管这一章是关于静电学方面的，但它仍将不会包括这一课题中的那些更瑰丽而又更微妙的部分。而只是处理我们能够假定其中一切电荷位置均为已知的那种情况。自然，你应当在试图处理其他问题之前就能解决这一情况。

§ 4-2 库仑定律；迭加原理

(4.5)和(4.6)两式作为我们的起点，照理应该是合乎逻辑的。然而，如从另外的某处出发再回到这些方程式上来，将会容易一些，而所得的结果是彼此相当的。我们就从已谈及的那个被称为库仑定律的定律着手，它申述在两静止不动的电荷间有一个与两电荷之积成正比而与它们间的距离平方成反比的力。这个力沿着从一电荷至另一电荷的直线。

库仑定律

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2. \quad (4.9)$$

\mathbf{F}_1 是作用于电荷 q_1 上之力； \mathbf{e}_{12} 是由 q_2 至 q_1 的方向上的单位矢量；而 r_{12} 则是 q_1 与 q_2 间的距离。作用于 q_2 上之力 \mathbf{F}_2 与 \mathbf{F}_1 等值异号。

基于历史原因，比例常数写成 $1/4\pi\epsilon_0$ 。在我们采用的单位制——米·千克·秒(mks)制——中，它被定义为恰好等于 10^{-7} 倍光速平方。那么，既然光速近似地等于 3×10^8 米每秒，这个常数便近似地为 9×10^9 ，而其单位则可证明为牛顿·米²/库仑²，或者是伏·米/库仑。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7} c^2 \quad (\text{根据定义}) \\ &= 9.0 \times 10^9 \quad (\text{通过实验}) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

单位：牛顿·米²/库仑²，或伏·米/库仑。

当存在两个以上的电荷时——唯一真正有意义的时候——我们就必须用自然界的另一事实来补充库仑定律。这个事实是：施于任一电荷上之力等于其他每一电荷对它所施的库仑力的矢量和。这一事实叫做“迭加原理”。这就是静电学所包含的全部内容了。如果把库仑定律和迭加原理结合起来，就不会再有别的东西了。式(4.5)和(4.6)——静电学方程——恰好包含这些。

应用库仑定律很方便地引进电场的概念。我们说，场 \mathbf{E} (1) 是作用于每单位 q_1 电荷上之力（由其他各电荷所施的）。在除了 q_1 以外只有另一个电荷的情况下，我们对式(4.9)除

以 q_1 , 便得

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (4.11)$$

此外也考虑到, 即使 q_1 不存在, $\mathbf{E}(1)$ 仍给点(1)描绘了某种东西——假设所有其他各电荷都保持其原有位置。我们讲: $\mathbf{E}(1)$ 是在点(1)处的电场。

电场 \mathbf{E} 是一个矢量, 因而式(4.11)实际指的是三个方程式——对于每一分量就有一个方程。把其中的 x 分量明白地写出来, 式(4.11)便意味着

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \quad (4.12)$$

其他分量均与此相仿。

如果有许多电荷, 则在点(1)上的场 \mathbf{E} 就是其他每个电荷的贡献之和。这个总和中的每一项, 看来都象式(4.11)或(4.12)。令 q_j 为第 j 个电荷的大小, 而 \mathbf{r}_{1j} 为从 q_j 至点(1)间的位移, 则可以写出

$$\mathbf{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \mathbf{e}_{1j}. \quad (4.13)$$

当然, 这个式的意思是

$$E_x(x, y, z) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}}, \quad (4.14)$$

等等。

不把电荷看作象电子和质子那样的独立颗粒, 而把它们想象成是铺开的一些连续的涂抹斑迹, 即所谓连续“分布”的那样, 往往会很方便。只要不去追究在尺度过小的范围内所发生的事情, 这便是可行的。这样, 我们便可通过“电荷密度” $\rho(x, y, z)$ 来描述电荷分布。如果处在点(2)的一个小体积 dV_2 内含有电荷 Δq_2 , 则 ρ 便由下式定义:

$$\Delta q_2 = \rho(2) dV_2. \quad (4.15)$$

为了将这种描述法用到库仑定律上去, 我们将式(4.13)、(4.14)中的那些总和, 以遍及一切含有电荷的体积的积分来代替。这样就得到

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}. \quad (4.16)$$

有些人却喜欢写成

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$

式中 \mathbf{r}_{12} 是从(2)至(1)的位移矢量, 如图 4-1 所示。

因此, 对于 \mathbf{E} 的积分就可以写成

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(2) \mathbf{r}_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.17)$$

当我们要用这个积分进行实际计算, 还必须把它明白详尽地写出来。对于式(4.16)或(4.17)的 x 分量, 该写成

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{全部空间}} \frac{(x_1 - x_2) \rho(x_2, y_2, z_2) dx_2 dy_2 dz_2}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.18)$$

这个公式我们并不会经常用。之所以把它写在这里, 目的是为了要强调, 那些所有电荷

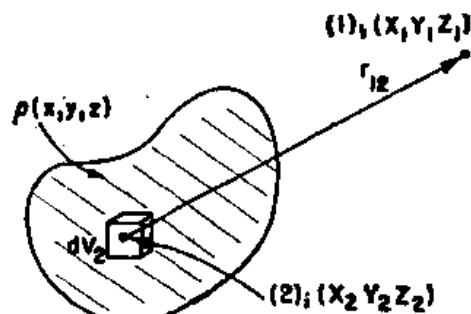


图 4-1 分布电荷在点(1)上产生的电场 \mathbf{E} . 可由遍及该分布的积分求得。点(1)也可以落在该分布区域之内

位置都已知道了的静电学问题均完全为我们所解决了。给出了电荷，场将会怎么样呢？答案：算出这一积分。因此，对于这一课题便再没有什么可说了，那只是一项计算遍及三维的复杂积分的工作——严格说来，是一项计算机的工作！

有了这些积分，我们就能够找出由下述各种东西所产生的场：片电荷、线电荷、球壳电荷或任一特殊分布的电荷。重要的是要知道：当我们去画场线、谈论电势、或算散度时，所有一切答案都已在这里了。问题仅在于，有时凭某些聪颖的猜测工作，比直接计算这个积分还要方便。这种猜测工作要求人们学习各种奇妙的东西。实践中，比较容易做的也许还是忘记追求聪颖，避免小聪明，硬是把那些积分算出来。然而，我们还是要来试点小聪明。下面将继续讨论有关电场的某些其他特点。

§ 4-3 电 势

首先，我们要讲讲电势的概念，这将同电荷从一点移至另一点所作之功联系起来。设有某电荷分布，产生了一电场。我们要问：如把一个小电荷从一处移至另一处需作功多少？沿某一路线抵抗电力移动电荷所作之功，等于这电力在运动方向上的负分量沿着路线而取的积分。如果我们把一电荷从点 a 移至点 b ，则

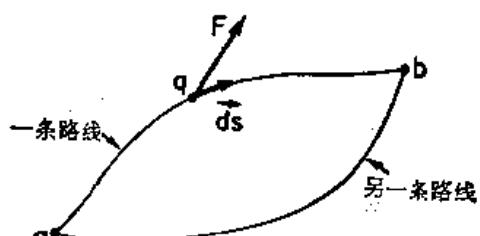


图 4-2 把电荷从 a 移至 b 所作之功，等于

$F \cdot ds$ 沿所取路线进行积分所得的负值。对于我们的目的来说，考虑移动一个单位电荷所作之功会更为有意义。因此，作用于电荷上之力在数值上就等于电场。这一情况下抵抗电力所作之功称为 W （单位电荷），我们写为

$$W(\text{单位电荷}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

一般地说，这一积分所得的结果应该与我们所取的路线有关。可是，假如(4.19)的积分与从 a 至 b 的路线有关的话，那我们就可通过把电荷沿一路线从 a 移至 b ，然后又沿另一路线返回到 a 而从场中获得功。这样，该可以沿 W 较小的那条路线达到 b ，而沿另一条路线返回来，这样所得到的功就会大于我们所付出的。

原则上说，从场得到能量并不是不可能的。事实上，我们将遇到这会成为可能的那些场。有这样一种可能情况：当你移动电荷时，你就对这部“机器”的另一部分施加了力。若这部机器是在抵抗此力而运转的，则它会损失能量，从而保持世界上的总能量不变。然而，对于静电学来说，并没有这样一种“机器”存在。我们对反作用于场源上之力也都很清楚，那就是作用于对该场负责的那些电荷上的库仑力。如果其他电荷都固定在其位置上——这是静电学中我们所作的唯一假设——这些反作用力就不能对各电荷作任何功了。要从它们那里获得能量是没有办法的——当然，只有在能量守恒原理对静电学的情况有效时才如此。我们相信这是有效的，那就让我们从库仑力律出发来证明这一必然性吧！

首先，考虑在一个起源于单一电荷 q 的场中所发生的情况。令点 a 与电荷 q 间的距离为 r_1 ，而点 b 的距离则为 r_2 。现在选择一个大小为 1 个单位、称为“试验”电荷的电荷，从 a 移至 b 。我们开始试用最可能简易的路线来计算。使试验电荷最初沿一圆弧，然后再沿某

一半径移动,如图4-3(a)所示。求在这一条特殊路径所作之功,和小孩作游戏一样简单(否则我们就不会选择这条路线了)。首先,在从a至a'的路线上根本没有作出什么功。场是沿径向的(根据库仑定律),因而它与移动的方向成直角。其次,在从a'至b的路径上,场与移动方向相同,大小随 $1/r^2$ 变化。于是,试验电荷从a移至b时所作之功就应该是

$$\begin{aligned} -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (4.20) \end{aligned}$$

现在,再让我们取另一条简易路线。例如,取图4-3(b)所示的那条路线。它一会儿沿一圆弧,一会儿沿某一半径,然后又沿一圆弧,又沿一半径,等等。每次当我们沿圆周部分移动时,并没有作出任何功。而当沿径向部分移动时,就应该对 $1/r^2$ 积分了。沿第一径向线段,我们从 r_a 积至 $r_{a''}$,然后沿第二径向线段,又从 $r_{a''}$ 积至 $r_{a''''}$,如此等等。所有这些积分之和与直接从 r_a 至 r_b 的单一积分相同。对于这一路线所得答案与上面对第一条路线所得的一样。很清楚,对于任一条可以由任意数目的同种部分构成的路线,我们将会得出相同答案。

若是一条光滑路线又将如何呢?会得出同一答案来吗?在第一卷第十三章中,我们就曾经讨论过这一点。应用与那里所用相同的论据,可以得出结论:把一单位电荷从a移至b所作之功应与所经历的路线无关,则

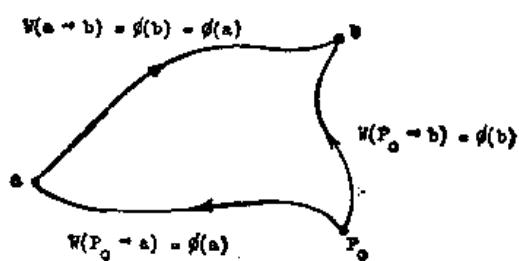


图4-4 沿任一路线从a点至b点所作之功,等于从某一 P_0 点至a点之功的负值加上从 P_0 点至b点之功

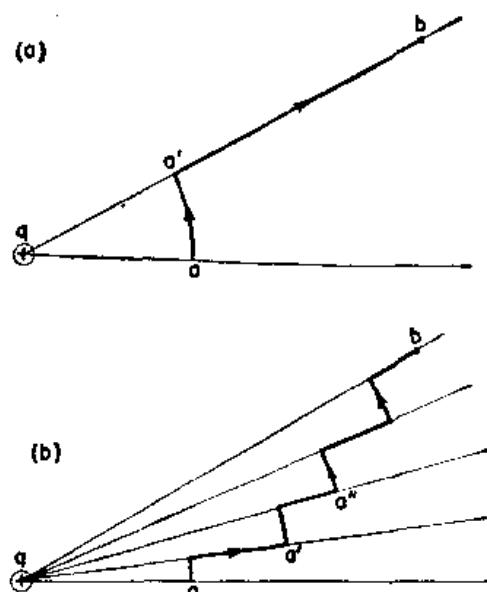


图4-3 把一试验电荷从a移至b时,无论沿哪一条路线所作之功都相等

$$W(\text{单位电荷}) \left. \begin{array}{l} \\ a \rightarrow b \end{array} \right\} = - \int_{\text{任一路线}}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

由于功只与端点有关,它就可以表达为两个数值之差。我们可按下述办法看到这一点。试选定一参考点 P_0 ,并约定用一条总会经过 P_0 点的路线来计算我们的积分。令 $\phi(a)$ 代表从 P_0 点至a点抵抗场力所作之功,并令 $\phi(b)$ 为从 P_0 点至b点所作之功(图4-4)。这样,从a点(在奔往b的路程上)至 P_0 点所作之功就会等于 $\phi(a)$ 的负值,所以我们有

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.21)$$

由于所涉及的总是在两点处的函数 ϕ 之差,我们实在没有必要去规定 P_0 的位置。然而,一旦我们已选定了某一参考点,则对于空间任一点就已确定了一个数目 ϕ 。这样, ϕ 就是一个标量场,它是 x 、 y 、 z 的函数。我们称这标量函数为在任一点的静电势。

静电势

$$\phi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.22)$$

为了方便，我们通常选取无限远处作为参考点。那么，对于放在原点上的一个单独电荷，任一点上的势 ϕ ——应用式(4.20)——就应该是

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (4.23)$$

若干个电荷所产生的电场，则可写为第一个、第二个、第三个等各别电场之和。当对这个总和取积分以求得电势时，我们便得到一些积分之和。每一积分就是其中某一电荷所产生之势*。我们断定，一堆电荷所产生之势等于所有各别电荷所产生之势的总和。应用过去我们曾经对来自一群电荷或来自一个电荷分布的电场所运用过的同一种论据，就可得出被称为点(1)的电势的这些完整公式：

$$\phi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}}, \quad (4.24)$$

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}. \quad (4.25)$$

记住势 ϕ 具有这么一种物理意义：它是一单位电荷从某一参考点被移至指定点时所拥有的势能。

§ 4-4 $E = -\nabla\phi$

谁去理会 ϕ 呢？施于电荷上之力都是由电场 E 所提供的。关键在于， E 可以容易地由 ϕ 求得——事实上，这竟如同取微商那样容易。试考虑这样两点处：其一是在 x 处，另一则在 $(x+dx)$ 处，而这两点都处于共同的 y 和 z 上。试问：把一单位电荷从一点移至另一点时所作之功有多少？该路线沿 x 至 $x+dx$ 的一条水平线，所作之功就等于在该两点处的电势之差：

$$\Delta W = \phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx.$$

而沿同一条路线，抵抗场力所作之功为

$$\Delta W = - \int E \cdot d\mathbf{s} = -E_x dx.$$

由此，我们可得

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}. \quad (4.26)$$

同理， $E_y = -\partial\phi/\partial y$, $E_z = -\partial\phi/\partial z$. 或者，用矢量分析的记法来把它们综合起来，则

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (4.27)$$

这个方程是式(4.22)的微分形式。任一给定电荷的问题，都可以通过式(4.24)或(4.25)算出电势，再用式(4.27)求得场来加以解决。式(4.27)与我们从矢量微积分学方面所曾找到的结果相同，即对于任一标量场 ϕ ，

$$\int_a^b \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.28)$$

根据式(4.25)，虽然标量势 ϕ 是由一个三维积分给出的，但同我们以往对于 E 的那个积分是相似的。算 ϕ 而不算出 E ，是不是有某种优点呢？有的！对于 ϕ 来说，只用到一个积分，而对于 E 则有三个积分——因为它是一个矢量，而且，含有 $1/r$ 的积分往往比 x/r^3 稍

* 这是假定每一个电荷实际上是一个电荷分布而说的那种较普遍情况。——译者注

为方便，事实是，在许多实际情况下，先算出 ϕ ，然后取其梯度以求得电场，比起计算 E 的三个积分总会容易一些。当然这仅仅是一个实际问题。

ϕ 这个势还有一点更深刻的物理意义。我们已经证明，当 ϕ 是由式(4.22)所给出时，库仑力中的 E 可以由 $E = -\nabla\phi$ 获得。但如果 E 等于一个标量场的梯度，那么，从矢量微积分学方面我们知道 E 的旋度必定等于零：

$$\nabla \times E = 0. \quad (4.29)$$

这恰好就是静电学中第二个基本方程，即式(4.6)。我们已经证明，由库仑定律会给出一个满足该条件的 E 场。到目前为止，事事都很顺利。

我们早在给电势下定义之前，就已经实际上证明了 $\nabla \times E = 0$ 。我们曾经指出，绕行一闭合路线所作之功为零。这就是说，对于任一路线，

$$\oint E \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

在第三章中，我们曾经见到在任何这一类的场中， $\nabla \times E$ 总必须处处为零。静电学中的电场乃是属于无旋度场的一个例子。

你可以用另一种方法——对由式(4.11)所给出的、关于一个点电荷的场，计算出 $\nabla \times E$ 的分量——来证明 $\nabla \times E$ 等于零，借以练习你们的矢量微积分学。如果你得到零，迭加原理就会申述，对于任一种电荷分布的场你也应该得到零。

应当指出这一项重要事实：对于任一径向力所作之功，均与路线无关，也就是存在着一个势。如果你想到这一点，上面为证明功之积分与路线无关的全部论据，仅有赖于来自单一电荷之力是径向的，而且是球对称的这么一个事实。它并不依赖于与距离存在 $1/r^2$ 关系的那另一项事实——本来尽可以有任一种对 r 的依存性的。势的存在以及 E 的旋度等于零这回事，实际上都是由于静电力具有方向及其对称性。基于此，式(4.28)——或式(4.29)——就只是包含了电学规律的一部分。

§ 4-5 E 的通量

我们现在要来导出一个场方程式，那是明确而又直接地有赖于距离的反平方力律的。场会随距离的反平方变化，对于一些人来说，似乎是“理所当然的”，因为“那是事情发展下去的方式”。试考虑，正从一个光源发射出的光，通过一个尖端位于源处的锥体所割出的面上光量，不管这个面所在处的半径大小如何，总会相等。只要光能守恒，这就是必然的。每单位面积的光量——光强——应与由锥体所割出的面积成反比。也就是说，与光源的距离的平方成反比。电场肯定由于同一理由，象反比于光源距离的平方那样！可是，这里并没有“同一理由”这样的东西。没有任何人能够讲，电场就象光那样，是某种守恒的东西流动的量度。假如有一个电场“模型”，其电场矢量似乎代表飞跑出去的小“子弹”的运动方向和速率，而且如果模型要求这些子弹守恒，即一旦被射出去就没有一颗子弹会丢失，那么也许我们能够“看到”该反平方律是必需的。另一方面，要求有某种能够表达这一物理概念的数学方式。假如电场象一些守恒的子弹那样发射出去，那么它就应该跟距离的平方成反比而变化，而我们也该能用一个方程——那是一种纯粹的数学形式——来描写那种行为了。照理这种想法是无碍的，只要我们并未曾说出电场是由子弹所构成，但要认识到，我们是在用一个模型来协助求得正确的数学答案。

請勿用於盈利之目的

我们暂时想象电场确会代表某种守恒的东西在流动——在除了电荷本身所在处之外的一切地方(电场总得从某一处开始产生!)。我们设想，不管那是什么东西，总是从电荷流进周围空间的。如果 E 就是这么一种流动(正如热流动中的 \mathbf{h})，那么它便该在点源附近有一个 $1/r^2$ 的依存性。现在，我们要用这个模型来找一种更深刻的或更抽象的办法来陈述这一反平方定律，而不仅仅是说出“反平方”。(你也许觉得奇怪，为什么要避免对这么一个简单定律的直接陈述，却要用另一种方式隐蔽地包含同一内容。但请忍耐一点！将会证明确实很有用。)

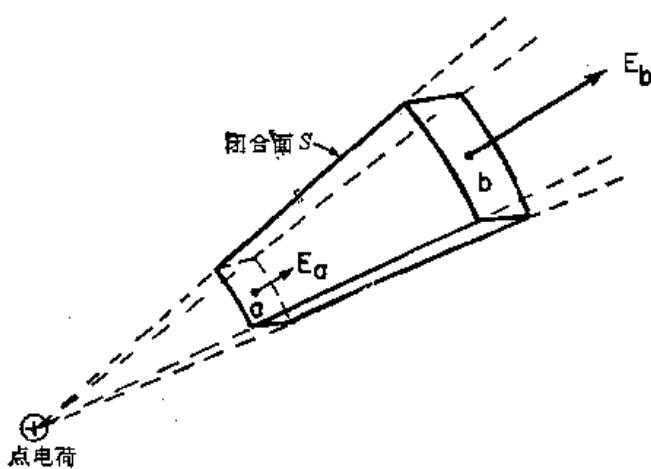


图 4-5 从 S 面出来的 E 的通量为零

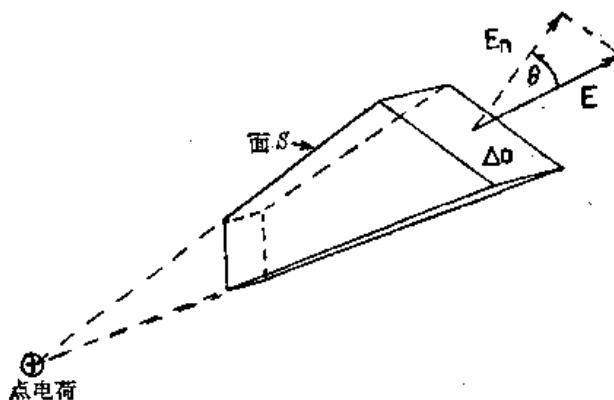


图 4-6 从 S 面出来的 E 的通量为零

其次，我们将证明两个端面可以相对于径线倾斜而不会改变该积分(4.30)。尽管这是普遍正确的，但对于我们的目的来说，却只须证明当两个端面很小、使得它们在源处仅仅对向一个小角度——实际上是一个无限小角度——时，这是对的。在图 4-6 上，我们画出了一个其“侧面”沿径向而其“端面”倾斜着的 S 面。在这图上的端面不小，但你得想象一种端面非常小的情况。因此，布满在面上的场 E 就将足够均匀，以致我们可以仅用其中点上的值。当我们把表面倾斜一个角度 θ 时，它的面积会增大一个因数 $1/\cos\theta$ ，但 E 的垂直于该表面的分量 E_n 则削减一个因数 $\cos\theta$ ，乘积 $E_n \Delta a$ 将保持不变。这样，从整个 S 面出来的通量仍会等于零。

到此我们不难看出，从任一个 S 面包围着的体

我们要问：从点电荷附近的任一个闭合面跑出来的 E “流”该是怎样的？首先，让我们取一个简易闭合面——如图 4-5 所示的那样。如果 E 场好象一种流动，从这一个箱子里跑出来的净流就应该等于零。那是我们应该得到的，只要从这一个面跑出去的所谓“流量”指的是 E 的法向分量的面积分——即 E 的通量的话。在那些径向面上，法向分量为零。而在那些球面上，法向分量 E_n 恰好就是 E 的大小——对于那个较小的面为负，而对于那个较大的面为正。 E 的大小随 $1/r^2$ 而减少，但表面积却正比于 r^2 ，因而两者之积就与 r 无关了。进入 a 面的 E 的通量恰好给跑出 b 面的那个通量所抵消。从 S 出来的总流量为零，也就是说，对于这么一个面，

$$\int_S E_n da = 0. \quad (4.30)$$

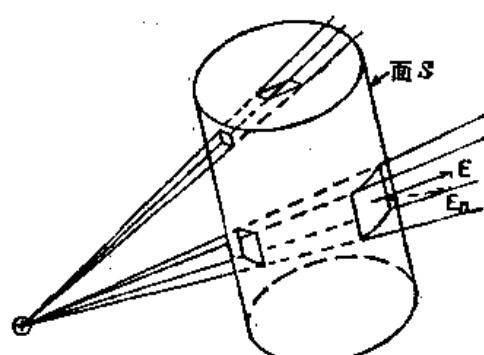


图 4-7 任一个体积都可想象成完全由无限多个削去了两头的椎体构成的。从每一椎体断面一端的 E 的通量与从另一端的通量相等而相反。因此，从 S 面出来的总通量就是零

积中出来的通量为零。任何一个体积都可想象成是由如图 4-6 所示的单元构成的。整个体积的表面可分割成一对一对的端面，而由于进出这些端面的通量成对地互相抵消，所以从整个 S 面出来的总通量就等于零。这个意思示如图 4-7。这样，我们就有了一个普遍的结果。那就是，在一个点电荷的场中，从任一个 S 面出来的通量均为零。

可是要注意！上述证明只是在 S 面并不包围任何电荷时才有效。假如有一个点电荷存在于该面之内，那将会怎样呢？我们仍可将该面分割成由通过电荷 q 的各径向线所构成的各成对面积，如图 4-8 所示。通过那两个面的通量仍旧相等——根据与上面同样的论点——只是现在该两通量有了相同符号。从包围一个电荷之面跑出来的通量并不会等于零。那么，它等于什么呢？我们可用一点小小技巧来把它求出。假想一个完全在原来 S 面之内的小面 S' 包围该电荷，再将此电荷“移出”“内部”区域之外，如图 4-9 所示。这样，在由 S 和 S' 两个面之间所包围的体积内就没有电荷了。应用与上面所给出的相同的论据，从这一个体积出来的总通量（包括通过 S' 的）就是零。这些论据实际上告诉我们，通过 S' 面而进入该体积的通量与通过 S 面而跑出去的通量彼此相等。

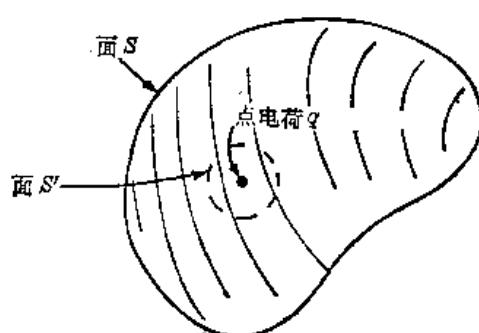


图 4-9 穿过 S 面的通量与穿过 S' 面的通量相同

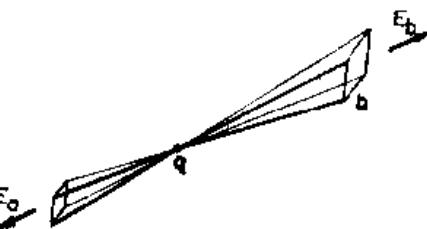


图 4-8 如果有一个电荷存在于面之内，出来的通量则不会等于零

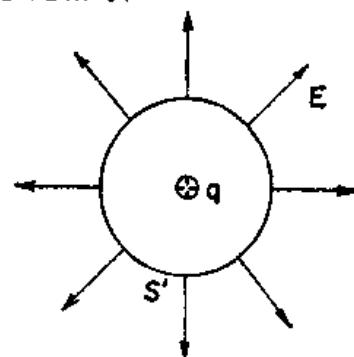


图 4-10 通过一个含有点电荷 q 的球面的通量为 q/ϵ_0

我们可以随心所欲地选取任何形状的 S' 面，那就让我们使它成为一个以该电荷为中心的、如图 4-10 所示的那种球面吧。这样，便可以很容易地算出通过这个面的通量来。如果该小球面的半径为 r ，则在球面上的 E 值处处都是

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

其方向始终垂直于面。如果把这个 E 的法向分量乘以该面面积，则可以找出通过 S' 面的总通量：

$$\text{通过 } S' \text{ 面的通量} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (4.31)$$

这竟是一个与球面半径无关的数值！因此，我们便知道：通过 S 面出来的通量也等于 q/ϵ_0 ——一个与 S 的形状无关的量，只要电荷 q 处在该面之内。

可以把此结论写为：

$$\int_{\text{任一个面 } S} E_n da = \begin{cases} 0, & q \text{ 在 } S \text{ 之外;} \\ \frac{q}{\epsilon_0}, & q \text{ 在 } S \text{ 之内.} \end{cases} \quad (4.32)$$

让我们回到“子弹”的比拟上来，并看看这是否具有意义。上述定理申述：如果闭合面内不含有那支会射出子弹的枪，则射穿该面的净子弹流就将是零；但若枪已包括在面之内，则无论该面的大小及形状如何，那些穿出去的子弹数目总会相同——由枪的子弹产生率给出。对于守恒的子弹来说，所有这一切都似乎很合理。我们通过这个模型，是否除了简单写出式(4.32)外，还能得到更多的东西呢？迄今还没有谁能成功地使这些“子弹”除了产生该唯一定律以外，还能完成其他任务。此后，它们就只会产生错误。这就是今天我们倾向于完全抽象地去表达电磁场的原因。

§ 4-6 高斯定理； E 的散度

我们的这个优美结果——式(4.32)，是为一单独电荷而证明的。现在，如果有两个电荷，其中电荷 q_1 放在一点，而电荷 q_2 放在另一点上。这一问题看来比较困难。为了求得通量，我们要对电场的法向分量取积分，而这电场是发源于该两电荷。这就是说，如果 \mathbf{E}_1 仅代表由 q_1 产生的电场，而 \mathbf{E}_2 仅代表由 q_2 产生的电场，总场则为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 。通过任一闭合面 S 的通量就是

$$\int_S (\mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{2n}) da = \int_S \mathbf{E}_{1n} da + \int_S \mathbf{E}_{2n} da. \quad (4.33)$$

当有两个电荷存在时，通量就是起因于一个单独电荷的通量再加上起因于另一电荷的通量。如果两电荷都在 S 面之外，通过 S 面的通量则为零。如果 q_1 在 S 面内而 q_2 在 S 面外，则第一个积分为 q_1/ϵ_0 ，而第二个积分为零。如果两电荷都包括在该面之内，则每一电荷都将各自提供其贡献，而终将获得通量 $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$ 。普遍的法则显然是，从一个闭合面出来的通量等于在该面内的总电荷除以 ϵ_0 。

我们的结果对于静电场来说，是一条重要的普适定律，称为高斯定律。

高斯定律

$$\int_{\text{任一闭合面 } S} E_n da = \frac{\text{在面内电荷的总和}}{\epsilon_0}, \quad (4.34)$$

或

$$\int_{\text{任一闭合面 } S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0}, \quad (4.35)$$

式中

$$Q_{\text{内}} = \sum_{\text{在 } S \text{ 内}} q_i. \quad (4.36)$$

如果用电荷密度 ρ 来描述电荷的分布位置，则可认为每一无限小体积 dV 内含有“点”电荷 ρdV 。这样，对各电荷求和，就是这么一个积分

$$Q_{\text{内}} = \int_{S \text{ 内体积}} \rho dV. \quad (4.37)$$

从上述的推导你可以看出，高斯定律乃起因于库仑力中的幂指数恰好等于二这一事实。一个 $n \neq 2$ 的 $1/r^n$ 场，就不可能得出高斯定律。因此，高斯定律只不过是用一种不同形式来表述两电荷间的库仑力律而已。事实上，如果倒过来，你将会从高斯定律导出库仑定律。这两定律完全等价，只要我们记住电荷之间的作用力是径向的。

现在，我们想用微商来写出高斯定律。为此，把高斯定律应用于一个无限小的立方体表面上去。在第三章中，我们曾经证明过，从这样一个立方体表面出来的 E 的通量仍等于

請勿用於盈利之目的

$\nabla \cdot E$ 乘以该立方的体积 dV . 按照 ρ 的定义, 在 dV 内的电荷等于 ρdV , 所以高斯定律给出

$$\nabla \cdot E dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0},$$

或

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

高斯定律的这个微分形式, 就是我们关于静电学的第一个基本场方程式(4.5). 现在我们已经证明, 静电学的两个方程(4.5)和(4.6)与库仑定律等价. 下面将要讨论关于高斯定律应用的一个例子. (以后还将碰到更多的例子.)

§ 4-7 带电球体之场

过去我们学习引力理论时, 遇到的困难问题之一就是要证明: 在一个由物质构成的固态球体的球面上所产生的力, 正如同所有物质都集中在其中心一样. 牛顿经过了许多年都未曾把他的引力理论公诸于世, 就是因为他当时还不敢肯定这一定理是正确的. 我们在第一卷第十三章中, 曾经通过算出势的积分再用其陡度以求得引力来证明这一定理. 现在, 我们能够用最简单的方式来证明它. 只是这回将要证明的对应定理是关于一个均匀带电球体的. (由于静电学定律与引力定律相同, 所以这一证法本来也可应用于引力场.)

我们要问, 在一个充满均匀分布电荷的球体外面任一点 P 上的电场 E 如何? 既然不存在任一“特殊”方向, 我们便可以假定 E 处处都是由球心向外指的. 考虑一个与该带电球体同心的、并通过 P 点的球面(图 4-11). 对于这个面, 向外通量为

$$\int E_n da = E \cdot 4\pi R^2.$$

高斯定律告诉我们, 这一通量应等于该带电球体的总电荷 Q (除以 ϵ_0):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

或

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}. \quad (4.39)$$

这是对一个点电荷 Q 我们应该有的那一公式. 这就比求积分更为方便地证明了牛顿问题. 当然, 那是一种误解的方便——你已花了相当多的时间才能理解那个高斯定律, 所以你也可以认为确实没有节省任何时间. 但是当你越来越多地应用这一定理以后, 便会开始有所收获. 这是一个效率问题.

§ 4-8 场线; 等势面

现在, 让我们给出静电场的一种几何描述. 静电学的两定律, 其一说明通量正比于内部电荷, 另一则申述电场是势的陡度, 都可以用几何方法来表达. 下面将借两个例子来作演示.

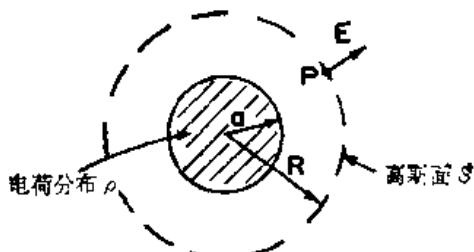


图 4-11 应用高斯定律以求得一个均匀带电球体的场

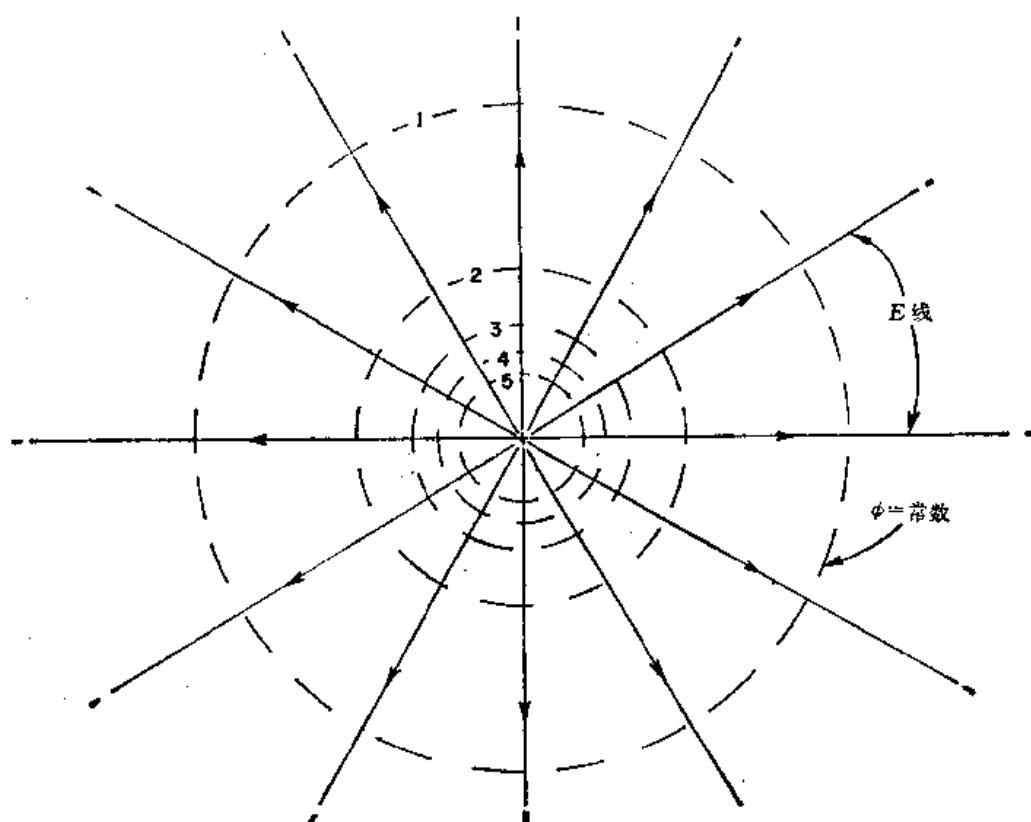


图 4-12 一个正点电荷的场线和等势面

首先，我们取一个点电荷的场为例。画出沿场方向的线——总是切于场的线，如图 4-12 所示。这些线称为场线。它们处处都指明电矢量的方向。但我们还希望表达出该矢量的大小。可以定这样一条规则：电场强度由线的“密度”来表达。所谓线的密度，我们是指通过与线垂直的单位面积上的线数。应用这两条规则就可以得出一幅电场图象。对于一个点电荷来说，线的密度一定会按 $1/r^2$ 减少，但与线垂直而在任一个半径 r 上的球面面积却会随 r^2 增大，所以如果在对电荷的一切距离上都保持同一线数，密度就将保持与场的大小成正比。若坚持所画出来的线都要连续——即一旦线已从某一电荷发出，便不会中途停顿——那么，我们就能保证在每一距离上线数都相同。用场线来申述高斯定律，这些线只应从正电荷出发而终止于负电荷。离开电荷 q 的线数一定要等于 q/ϵ_0 。

现在，对于势 ϕ 来说，我们也能找到一个相似的几何图象。表达势的最方便方法是画出 ϕ 为常数的那些面。这种面称为等势面——在其上势都相等。那么，等势面与场线间的几何关系又是如何呢？电场是势的陡度，因而陡度就是沿势变化得最迅速的那个方向，也就垂直于等势面。假如 E 并非垂直于这种面，那么它该有一个沿面分量。此时，势在面上正在发生变化，就不会是等势面了。这么一来，等势面必然会处处正交于电场线。

对于一个孤立的点电荷来说，等势面是以该电荷为中心的球面。我们已在图 4-12 中显示出这些球面与一个通过该电荷的平面间的交线。

作为第二个例子，我们考虑在两个大小相等而符号相反的电荷附近的场。要获得这个场挺容易。总场是由该两电荷各自的场所迭加而成。因此，就可以将两幅如 4-12 那样的图迭加起来——不可能！因为我们就会有互相交叉的场线了，而这是不可能的，因为 E 不能在同一点上有两个方向。场线图形的缺点现在就显而易见了。根据几何论据不可能用十分简单的方法去分析那些新场线的去向。从两个独立图象我们不能获得一个综合图象。

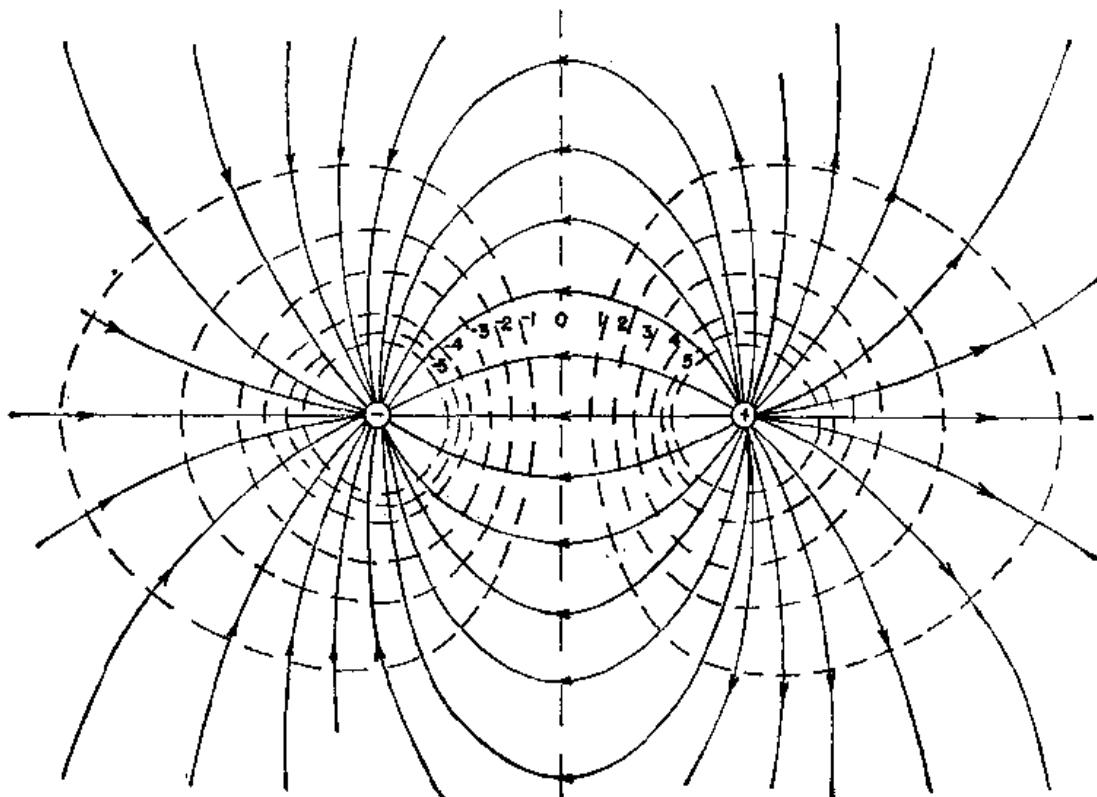


图 4-13 两个相等而相反的点电荷的场线和等势面

迭加原理固然是关于静电场的一个简单而又深刻的原则，但在场线的图象中，还没有一个容易的表达方式。

关于单位的备忘录

<u>量</u>	<u>单位</u>	<u>量</u>	<u>单位</u>
F	牛顿	$1/\epsilon_0 \sim FL^2/Q^2$	牛顿·米 ² /库仑 ²
Q	库仑	$E \sim F/Q$	牛顿/库仑
L	米	$\phi \sim W/Q$	焦耳/库仑=伏
W	焦耳	$E \sim \phi/L$	伏/米
$\rho \sim Q/L^3$	库仑/米 ³	$1/\epsilon_0 \sim EL^2/Q$	伏·米/库仑

然而，场线图形毕竟有它的用途，所以对于一对相等（而相反的）电荷我们也许仍乐于去画出其图象来。若我们由式(4.13)算出场，又由式(4.23)算出势，那么，便可描绘出场线和等势面来。图 4-13 显示这个结果。但我们得先从数学上去解决这个问题！

5

高斯定律的应用

§ 5-1 静电学就是高斯定律加…

静电学有两条定律：从某一体积出来的通量正比于其中的电荷——高斯定律；电场的环流等于零—— E 是一个强度。所有静电学的预言都可以从这两个定律推出，但从数学方面申述这些事情是一回事；而熟练地、巧妙地应用这些定律，却是另一回事。在本章中，我们将完成若干项可以直接由高斯定律得出的计算。我们将证明一些——特别是在导体中——可以很容易从高斯定律方面理解的定理，并描述一些效应。（高斯定律本身不能对任何一个问题提供答案，因为还有另一条定律必须遵守）因此，当我们应用高斯定律解决某些特定问题时，还得加上其他一点东西。例如，必须预先假定场看来会怎样的一些概念——基于诸如对称性的论据。不然的话，我们可能就不得不明确地引入场是势的强度这么一个概念了。

§ 5-2 静电场中的平衡

首先，考虑下述问题：一个处于其他电荷的电场中的点电荷怎样才能达到稳定的力学平衡呢？作为一个例子，试设想在一水平面上有一个等边三角形，在每个角上各放置一负电荷。一个置于该三角形中点处的正电荷是否将永远保持在那里？（如果暂时略去重力，问题就会简单些，尽管把它包括进去也不会改变所得结果。）施于该正电荷上之力为零，但究竟这个平衡会不会稳定呢？要是给该电荷稍为移动一下，它会回到平衡位置上来吗？答案是否定的。

在任一个静电场中都不会有稳定的平衡点——除非这一点恰好与另一个电荷相合，应用高斯定律，很容易看出这个道理来。首先，要使电荷在任一特定 P_0 点上处于平衡，场就必须等于零。其次，如果平衡是一稳定平衡，则还要求若把电荷沿任一方向移开 P_0 点，便应有一个与位移反向的恢复力。在一切邻近点上电场都必须指向内——即指向 P_0 点。但如果

在 P_0 点上并没有电荷存在，那就会违反高斯定律，这点我们是很容易看得出来的。



图 5-1 如 P_0 对于一个正电荷来说是一个稳定平衡点，那么在其附近每一处的电场就都应指向 P_0 点

考虑一个包围着 P_0 点的小想象面，如图 5-1 所示。若在 P_0 点附近的电场处处都指向它，则对场的法向分量的面积积分就肯定不会等于零。在上图所示的情况下，通过该面的通量必然是一负值。但高斯定律却申述，通过任一个面的电场通量正比于在该面内的总电荷。如果在 P_0 点处并没有电荷，则

我们所已想象出来的场便违反了高斯定律。不可能在一个空洞的空间里——在一个不存在任何负电荷的点上——使一个正电荷处于平衡。如果是处于某一分布的负电荷中间，它可以达到平衡。当然，那些负电荷的分布就必须由电力以外的力来维持在其各自位置上！

上述结果是对于一个点电荷而推得的。这同一结论是否也适用于被固定——比如用棍子来固定——在相对位置上分布复杂的电荷组呢？我们考虑两个固定于一条棍子上的相等

电荷。这个组合是否能在某一静电场中得到平衡呢？答案再次是否定的。作用于棍子上的总力不可能在每一方向上对于位移都具有恢复作用。

设施于处在棍子上任一位置的总力为 \mathbf{F} ——因此， \mathbf{F} 就是一个矢量场。根据上面所用的论据，我们断定：在一个稳定的平衡位置上， \mathbf{F} 的散度必定是一个负值。但作用于棍子上的总力则等于第一个电荷乘以在该位置上的电场，加上第二个电荷乘以在其位置上的电场：

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{E}_2. \quad (5.1)$$

\mathbf{F} 之散度为 $\nabla \cdot \mathbf{F} = q_1 (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) + q_2 (\nabla \cdot \mathbf{E}_2)$ 。

倘若 q_1 和 q_2 两电荷之中每一个都处在自由空间里，则 $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{E}_2$ 两者均等于零，因而 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 也就等于零——不是负值，如同对于平衡所要求的。你可以看到，这论据的引伸还会证明：在自由空间的静电场中，由任何数目的电荷固结在一起的组合都不可能有一个稳定的平衡位置。

我们并没有证明过，即使有一些支点或其他力学约束，平衡仍然是不可能的。作为一个例子，考虑一根其中有一电荷可以自由往复移动，但却不能向旁移动的空心管。现在，若要设计出这么一个电场是很容易的：在管两端处场都指向内，只要容许在管中心附近场可能会从管侧指向外。我们只是将正电荷置于管的两端，如图 5-2 所示。眼下虽然 \mathbf{E} 的散度仍等于零，但却有一个平衡点了。当然，假如不是由于从管壁所施的“非电性”力，则该电荷对于侧向运动来说还是不会处于稳定平衡的。

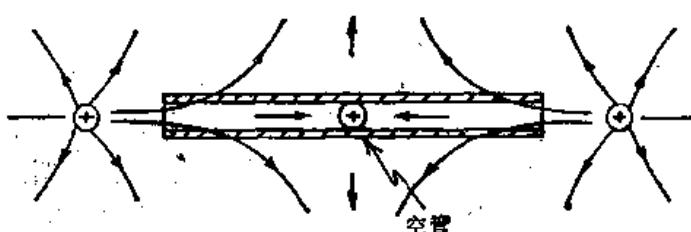


图 5-2 如果有一些机械约束，电荷便可处于平衡

§ 5-3 有导体时的平衡

由固定电荷系统所产生的场中并没有一个稳定点。那么，对于若干带电导体的系统又会怎样呢？由各带电导体组成的系统，能否产生出对于一个点电荷来说会有一稳定平衡点的那种场呢？（当然，我们所指的仍是在导体表面外的点。）你知道，导体具有其中电荷能够自由活动的那种性质。也许当该点电荷稍为移动一下时，其他位于各导体上的电荷就会以一种能够给予该点电荷以一恢复力的方式移动？答案仍然是否定的——尽管刚才所给出的那种证法仍未对此有所证明。在这种情况下证明是比较困难的，我们将仅仅指出证明的方法。

首先，我们注意到：当电荷在导体上进行再分布时，只有在电荷的运动会减少其总势能的情况下才能进行。（当电荷在导体中移动时，有些能量损失于发热。）现在我们已经证明了：如果那些产生场的电荷都是固定不动的，则在场中任一个零点 P_0 附近，就会有某一方向，沿该方向要把一个点电荷移离 P_0 点会降低系统的能量（因为力从 P_0 指向外）。导体上任何电荷的再调整都只能更多地降低势能，从而（按照虚功原理）它们的运动就只能在该特定方向上增大那一离开 P_0 点之力，而不是将该力逆转。

我们的结论并非意味着，没有可能用电力来平衡一个电荷了。只要人们愿意采取适当措施，控制那些作为支撑的其他电荷的位置或大小，那便是可能的。你知道，竖立在引力场中的一根棍子是不会稳定的，但这并未证明它就不能在手指尖上得到平衡。同理，一个电荷

可能会被一些电场固定在一点上，如果那些场是可变的话。但决不会为一个被动的——也即是静止不动的——系统所固定。

§ 5-4 原子的稳定性

如果电荷不能够稳定地保持在它们的位置上，那么把物质想象成是由受静电学定律支配的静止点电荷(电子和质子)所构成，肯定是不合适的。诸如这样的静止组态不可能存在，它是会坍塌的！

有人曾经建议过，原子的正电荷可以均匀地分布在一个球体中，而负电荷(各电子)则可静止地处于该正电荷之中，如图 5-3 所示。这是第一个原子模型，由汤姆孙(Thompson)所倡议。但卢瑟福(Rutherford)却从盖革(Geiger)和马尔登(Marden)的实验中得出结论：正电荷是很集中的，集中于他所称之为核的地方。汤姆孙的静止模型就不得不放弃了。于是卢瑟福和玻尔建议平衡可能是动力式的，电子在轨道上环行着，就象图 5-4 所示的那种情况。通过轨道运动，电子可以保持不致跌落到核里去。对于这样一种图象我们已知道至少有一点困难。电子这样运动就会有加速度(由于圆周运动)，从而会辐射出能量。它们将丧失所需以维持在轨道上的动能，从而会螺旋式地钻进核里去，再度出现不稳定！

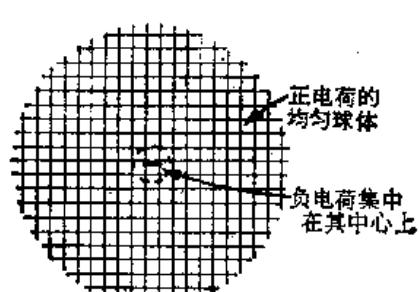


图 5-3 原子的汤姆孙模型

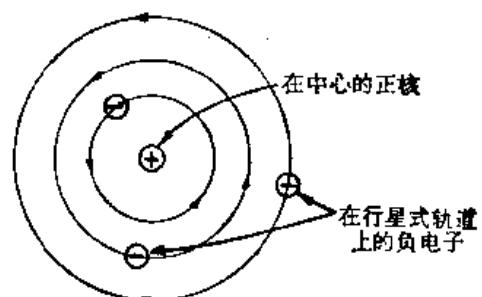


图 5-4 原子的卢瑟福-玻尔模型

原子的稳定性现在可由量子力学给予解释。静电力把电子尽可能拉近于核，但电子却被迫要在空间中伸展一定距离，那是由测不准原理规定的。假如它被禁锢在一个太小的空间里，它便有一个大的动量不准确性。但这意味着它会拥有高的期待能量——将被用来避开电的引力。净结果将是一种不太异于汤姆孙所设想的电的平衡——只是现在伸展开来的却是负电荷(因为电子质量比起质子质量要小得多)。

§ 5-5 线电荷之场

高斯定律可以用来解决其中包括某种特殊对称性——通常是球形、圆柱形、或平面形的对称性——的静电场问题。在本章的剩下部分，我们将用高斯定律来处理几个这一类的问题。其解决的容易程度可能会引起一种错误印象，以为这种方法十分厉害，人们应该能够继续用它去对付其他许多问题。可惜情况并非如此。人们很快就搜索尽能够用高斯定律容易加以解决的问题的清单。在以后几章中，我们将发展一些研究静电场的更强有力的方法。

作为第一个例子，我们考虑一个具有圆柱形对称性的系统。假设有一根十分长而又均匀带电的棒。对此，我们指的是电荷沿一条无限长直线均匀地分布着，每单位长度所带的电荷为 λ 。我们希望知道电场。当然，问题可以通过对来自线的每一部分的场的贡献进行积分而加以解决。但我们却要不通过积分，而通过应用高斯定律以及某种推测来做。首先，推测

该电场会从直线径向地向外发出。这是因为，从线中某一段上的电荷所发出的轴向场分量，应该伴随着线的他端另一段发出的相等而相反的轴向场分量。结果就只能有径向场了。在与直线等距离的所有各点上，场均应有同一大小，这似乎也是合理的。而且很明显。（可能不容易证明，但如果空间是对称的——正如我们所确信的那样——那便是真实的。）

我们可按上述方式来应用高斯定律。考虑一个与该线同轴的圆柱面作为想象面，如图 5-5 所示。按照高斯定律，从这一个面出来的 E 之总通量等于其内部电荷除以 ϵ_0 。既然场假定是垂直于该面的，则其垂直分量也就是场的大小。让我们把它叫作 E 。并且，令该柱面的半径为 r ，而其长度为了方便起见取为一单位。通过该柱面的通量等于 E 乘以该面面积（即 $2\pi r$ ）。通过两个端面的通量等于零，因为电场与之相切。在该面之内总电荷恰好是 λ ，因为在其中的线长为一单位。于是高斯定律给出

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi r &= \lambda / \epsilon_0, \\ E &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

一根线电荷的电场与从线至该处的距离的一次幂成反比。

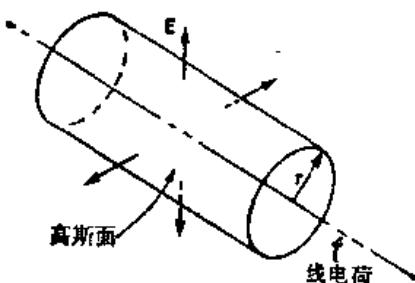


图 5-5 与线电荷同轴的一个圆柱形高斯面

§ 5-6 面电荷；平行板

作为另一个例子，我们现在来计算均匀面电荷所产生的场。假设该面延伸至无限远，而且每单位面积的电荷为 σ 。我们要作一种推测：关于对称性方面的考虑会引导我们相信场的方向处处与该平面垂直，而倘若没有来自世界上任何其他电荷的场，则两边的场（大小）应相等。此次我们选取的高斯面是一个割过该片平面的四方盒子，如图 5-6 所示。平行于该片的两表面面积相等，比如说 A 。场垂直于此两面，而与其他的四个面平行。总通量等于 E 乘以第一个面的面积，加上 E 乘以其对面的面积——其他四个面都没有作任何贡献。包含在该盒子里的总电荷为 σA 。令通量等于其内部电荷，我们便有

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

由此得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (5.3)$$

这是一个简单而又重要的结果。

你可能会记起，这同一结果曾在前面一章中通过对整个面进行积分而获得。在这一例子中，高斯定律更为迅速地给出了答案（虽则它并不如以前的方法那么普遍适用）。

必须强调，这一结果仅适用于来自该面上的电荷的场。如果在面电荷附近还有别的电荷，则靠近该面的场就应等于式(5.3)与其他电荷的场之和。此时，高斯定律只会告诉我们：

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.4)$$

式中 E_1 和 E_2 分别代表从该面每侧指向外之场。

請勿用於盈利之目的

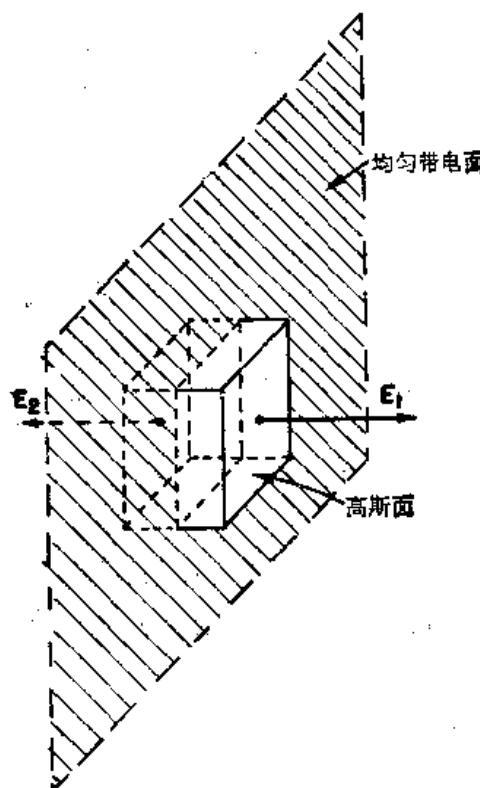


图 5-6 在一均匀带电面附近的电场, 可通过应用高斯定律于一个想象的盒子而求得

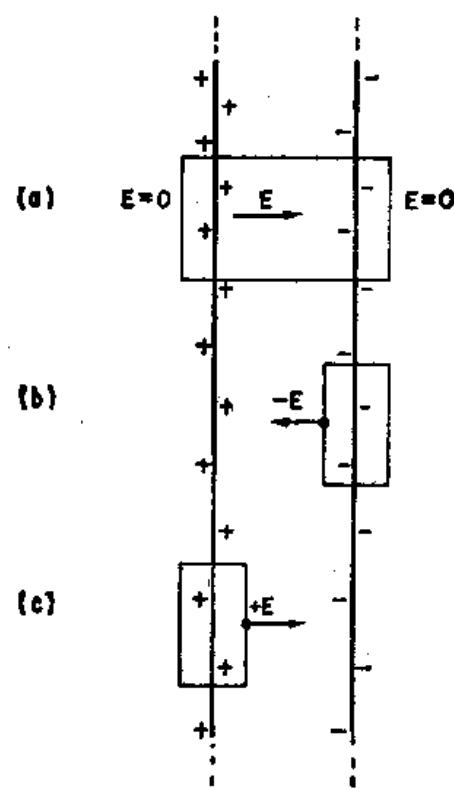


图 5-7 两块带电板之间的场为 σ/ϵ_0

带有相等相反电荷(密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$)的两平行板问题也一样简单, 如果我们再次假定其外部世界是对称的话。通过对由单独板所得的两结果迭加, 或者通过构成一个包括两板在内的高斯盒, 都不难见到, 在该两板之外的电场为零[图 5-7(a)]。由考虑一个只包括这块或那块板在内之盒, 如图(b)或(c)所示的那样, 则能看出两板间的场应两倍于单独一块板的场。结果是:

$$E(\text{在两板之间}) = \sigma/\epsilon_0; \quad (5.5)$$

$$E(\text{在两板之外}) = 0. \quad (5.6)$$

§ 5-7 带电球体; 球壳

我们曾(在第四章中)应用了高斯定律以求得一个均匀带电球体外之场。用这一方法也能给出球内各点之场。例如, 这种计算法可用来对原子核内部之场得到一个良好近似。尽管核里的质子互相排斥, 但由于强大核力的作用, 它们还是几乎均匀地分布在核体内的。

假设有一个半径为 R 并均匀地充满着电荷的球, 令 ρ 为每单位体积的电荷。再利用对称性的那些论点假定场是径向的、并且在与球心等距的一切点上这个场的大小都相等。要求得在与球心的距离为 r 处的场, 我们取一个半径为 r ($r < R$) 的球形高斯面, 如图 5-8 所示。从这个面出来的通量为

$$4\pi r^2 E.$$

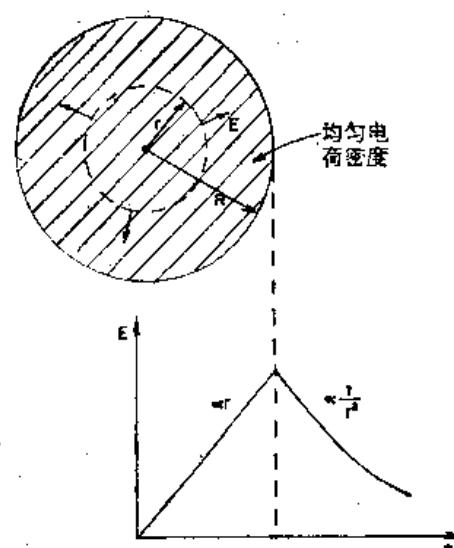


图 5-8 高斯定律可用来求一个均匀带电球体内的场

在我们的高斯面内的电荷等于体积乘 ρ , 或

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

应用高斯定律, 可以推得场的大小由下式给出:

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} (r < R). \quad (5.7)$$

你可以看到, 这一公式对于 $r=R$ 也会给出恰当的结果。电场与半径成正比, 并沿径向指向外。

刚才对于一个均匀带电球体所提供的论据, 也可应用于一个带电薄球壳上。假定场是处处径向的并且具有球对称性, 那便可以立即从高斯定律获得在球壳外的场是与一个点电荷的场相似, 而在球壳内的场则处处为零。(在球壳内的高斯面将不会含有电荷。)

§ 5-8 点电荷之场是否恰好是 $1/r^2$?

如果对球壳内的场为何会等于零这一点更详细地审查一下, 我们就能更加清楚地看出, 高斯定律之所以成立只是由于库仑力恰好依赖于距离的平方。考虑一个均匀带电球壳里面的任一点 P 。想象出一个以 P 为顶点的小锥形伸展至该球面上, 在那里它割出了一个小面积 Δa_1 , 如图 5-9 所示。一个从 P 的对面发散出去的完全对称锥形, 将会从球面割出一个面积 Δa_2 。如果从 P 至这两个小面积元的距离分别为 r_1 和 r_2 , 那么它们的面积比率便是

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

(对于在球面内的任一点 P , 你可以用几何学来证明这一点。)

如果球面是均匀带电的, 则在每一面元上的电荷 Δq 就应正比于各面积, 因而

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

于是库仑定律申述, 由这两面元在 P 点上所产生的场其大小应形成比率:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2} = 1.$$

这两个场恰好互相抵消。由于面上所有各部分都可按此办法配成对, 因此, 在 P 点的总场就应等于零。但你还可以看出, 假如在库仑定律中 r 的幂数不刚好等于 2, 那就不会这样了。

高斯定律的正确性取决于库仑的反平方定律。若该定律不刚好是平方, 则在一个均匀带电球面内部的场恰恰等于零这一说法就不正确了。例如, 要是力变化得迅速一些, 比如象 r 的反立方, 那么较接近于球内某一点的那部分面积将产生一个比起那较远部分面积所产生的更大的场, 结果就会形成一个对于正的面电荷来说是径向的、且是指向内的场。这些结论提示了一个检验反平方定律是否正确的优越办法。这就是, 仅仅需要去确定在一个均匀带电球壳里的场是否恰恰是零。

幸而这样一种方法确实存在。通常要量度一个物理量至高准确度是很困难的——要求

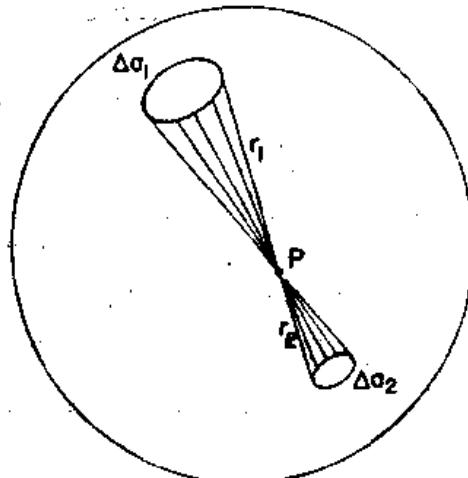


图 5-9 在带电球壳内的任一点 P 处, 场都等于零

請勿用於盈利之目的

准确度达百分之一可能不太困难,但比如要量度库仑定律达到十亿分之一的准确度,那又该怎么着手呢?用目前所能达到的最优良技术以量度两带电物体间的库仑力,要达到这样的准确度几乎肯定是不可能的。但通过测定在一个带电球面内部的电场会小于某一数值,我

们却能对高斯定律的正确性作出一个高度准确的测量,而这也是对库仑定律的反平方依存关系的测量。实际上,人们所做的就是将具体力律与一理想的反平方力律作比较,对于彼此相等或几乎相等的两事件的这种比较,往往是最精密的物理测量的基础。

我们将怎样来观察一个带电球面内的场呢?一种方法是,拿一物体与一球形导体的内部接触而试图使之带电。你知道,如果用一个小金属球接触到一个带电物体,然后将它同一静电计接触,该静电计就会带电,其指针将离开零点,如图 5-10(a)所示。小球捡了一些电荷是由于在该带电球壳外面存在电场,而这电场又会驱使电荷跑至(或跑出)小球。你如果将小球接触该带电球壳内部来做这同一实验,则将发现并没有什么电荷会被带至静电计上。用这样一个实验,你就

图 5-10 在一个闭合的导体壳内电场为零

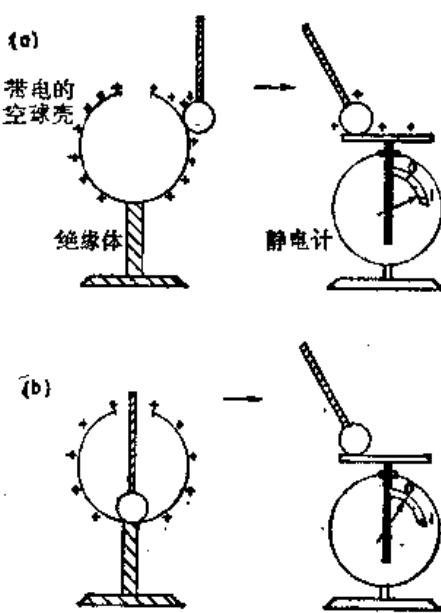
可以容易证明:在内部的场至多是外场的百分之几,因而高斯定律至少是近似地正确。

似乎是本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin)最早注意到导体壳之内场为零的。他对这一结果似乎觉得奇怪。当他把观察结果报告给普里斯特雷(Priestley)时,后者建议可能与反平方规律有关,因为当时已知道一个物质球壳不会在其内部产生引力场。但一直到了十八年后,库仑才测量出那个反平方的依存关系,而高斯定律出现就更晚了。

高斯定律曾被这样小心地加以检查,即安放一静电计于一个大球壳中,观察当用高压使球壳带电时静电计是否会发生偏转。但结果总是否定的。若知道该仪器的几何尺寸以及静电计的灵敏度,便可算出能被观察到的最小的场。从这一个数字就可以对幕数与 2 的距离求得一个上限。如果把静电力写成依赖于 $r^{-2+\epsilon}$, 则我们便能置一上限于 ϵ 上。通过这一办法,麦克斯韦曾测定了 ϵ 小于 $1/10,000$ 。这个实验于 1936 年由普林普顿(Plimpton)和劳顿(Laughton)两人重新做过并加以改进。他们找出该库仑幕数与 2 的差异小于十亿分之一。

现在,由此又可提出一个有趣问题:在各种不同情况下,我们是否知道这库仑定律有多准确呢?刚才所描述的实验量度了在几十厘米的距离上关于场对距离的依存关系。但对于原子内部的距离——比如在氢原子中,我们相信那里的电子受核的吸引也是按这同一反平方定律的——又究竟如何呢?诚然,关于电子行为的力学部分必须运用量子力学,但力依然是寻常的电力。在此问题用公式来表示时,我们必须懂得电子的势能为它与核距离的函数,而库仑定律就会给出与距离的一次幕成反比的势能。对于这么小的距离来说,这幕数会准确到什么程度呢?作为 1947 年由兰姆(Lamb)和卢索福(Rutherford)对氢的能级的相对位置进行极为仔细的测量的结果,我们知道:在这种原子尺度上——也即在一埃(10^{-8} 厘米)数量级的距离上——该幕指数也准确到十亿分之一。

兰姆-卢索福这一测量的准确性所以成为可能,又是由于一次物理“偶发事件”。氢原子的两个态被指望具有几乎相等的能量,只要势能是严格随 $1/r$ 而变化的。这个十分微小的



能量差别是通过测量从一态至另一态的跃迁时所发射或吸收的光子的频率 ω , 应用能差 $\Delta E = \hbar\omega$, 测出来的。计算的结果表明: 假如在力律 $1/r^2$ 中的 2 会有十亿分之一那么大的误差, 则 ΔE 会显著地与观察到的结果不同。

这同一幕指数对更短的距离是否仍然正确? 从核物理中的测量发现: 在典型的核距离——约 10^{-13} 厘米——上电力仍然存在, 而这种电力仍近似地与距离的平方成反比。将在以后某一章中看到一些例证。我们知道, 在 10^{-13} 厘米距离的数量级上, 库仑定律至少在某种程度上仍然是有效的。

对于 10^{-14} 厘米的距离又如何呢? 这一范围可以通过用十分高能的电子对质子碰撞而加以研究, 并观察电子是如何被散射的。迄今所得到的结果似乎指出, 该定律在这种距离上失败了。电力在短于 10^{-14} 厘米的距离上, 似乎显得比预期的要弱十倍。现在, 可能有两种解释。其一, 是库仑定律在这样小的距离上已失效; 另一种可能解释, 则是我们的客体——电子和质子——并不是点电荷。也许电子或质子, 或两者, 都是一片涂斑。大多数物理学家倾向于认为质子的电荷是涂斑式的。我们知道, 质子与介子反应十分强烈。这暗示一个质子时时会作为一个中子被一个 π^+ 介子所包围而存在。象这样一个组态就该——在平均上——表现如同一个带正电的小球。我们知道, 起因于一个荷电球体之场并非按 $1/r^2$ 一直变化至球心的。质子的电荷很可能就是涂斑式的。但关于介子的理论仍然很不完整, 所以库仑定律在极小距离上失效也有可能。这一问题仍然未确定。

还有一点: 反平方定律在象一米和 10^{-10} 米的距离上都有效; 但系数 $1/4\pi\epsilon_0$ 是否也都相同呢? 答案是肯定的; 至少达到兆分之十五的准确度。

现在, 我们回到在上面谈及对高斯定律的验证时曾被忽视的一件重要事情上来。你可能还不晓得麦克斯韦或普林普顿和劳顿的实验怎么会得到那么准确的结果, 除非他们所用的球形导体是一个十分完美的球壳。十亿分之一准确度的成果确实是个辉煌成就, 而你也许要问他们能否做成那么精密的一个球壳。任何一个实际球体都肯定会有一些微小的不规则性, 而如果有了不规则性, 还不会在球内产生出一些场来吗? 现在我们想要证明, 并不需要有一个完美的球壳。事实上也能够证明, 在任何形状的一个闭合导体壳中都不会有场存在。换句话说, 实验有赖于 $1/r^2$, 而与面是球面却没有什么关系(用球面的原因是, 假如库仑定律有错, 球面容易算出场该会怎么样)。所以我们现在就来处理这一课题。要证明这一点, 必须知道某些有关导电体的性质。

§ 5-9 孤立导体之场

导电体是含有许多“自由”电子的固体。电子能够在材料中自由地跑来跑去, 但却不能离开其表面。在一块金属中会有那么多自由电子, 使得任一电场都能使它们大量进行运动。这样所建立的电子电流必须由外界能源来不断维持运动, 或者由于这些电子对那个曾产生了初始电场之源放了电, 终于不再有更多的电子发射出来, 因而运动就停止了。在“静电”情况下, 我们并不考虑连续性电流源(以后学习静磁学时才将考虑到), 所以电子仅仅继续运动到它们自己安排使得在导体内部处处都产生零场时为止。(这通常是在一秒的小分數里发生的。) 假如还有任何场存在的话, 这个场则应该会推动更多的电子运动, 唯一的静电解答就是场在导体内部处处都等于零。

现在考虑一个带电导体的内部。(所谓“内部”我们指的就是金属本身。) 由于金属是导

体，其内部的场就应为零，即势的陡度为零。这意思是说， ϕ 并不会逐点变化。每一导体是一个等势区，而它的表面是一个等势面。既然在一导电性材料中电场处处为零，则 E 的散度也为零，并根据高斯定律在导体内部的电荷密度也一定会等于零。

如果在一导体中不可能有电荷，那它怎么还能够带电呢？当我们说某一导体“带电”时，到底是指什么呢？电荷又该存在哪里？答案是：它们会落脚在导体的表面上，那里有强大之力把它们保持住而不致离开——它们并非完全“自由”的。今后，当我们学习固体物理时将会懂得，在任一导体上的超额电荷平均都位于表面的一、二个原子层内。对于我们眼前的目的来说，这样说就已经足够准确，即如果任何电荷被放上或放进导体之内，它将聚集在表面上；在导体内部完全没有电荷。

我们也注意到，刚刚在导体表面外的电场应当与表面垂直，不可能有切向分量。假如有

一个切向分量，电子就会沿表面运动，没有任何力来阻止它们。按另一种方式讲，我们知道，电场线总应当以直角落在等势面上。

利用高斯定律，我们又可把刚好在导体外面的电场同表面的局部电荷密度联系起来。作为高斯面，我们取半在面内、半在面外的一个小柱形盒，如图 5-11 所示。对于 E 的总通量的贡献就只有来自导体外的那半边盒。于是，贴近导体表面外的场就是

在导体外

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.8)$$

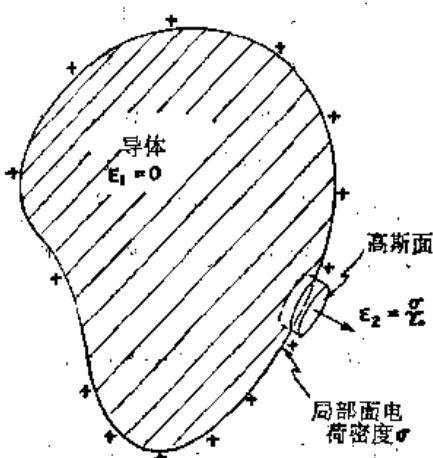
图 5-11 紧贴导体表面的电场与局部面电荷密度成正比。

式中 σ 是局部面电荷密度。

为什么在导体表面上的一片电荷所产生的场会不同于仅仅是一片电荷所产生的呢？换句话说，为什么式(5.8)会两倍大于式(5.3)呢？原因当然是，对于该导体我们并未曾说过附近没有“其他”电荷！事实上，应该会有一些电荷在促使导体里面的 $E=0$ 。在表面 P 点附近的电荷的确会给出 $E_{局部} = \sigma_{局部}/2\epsilon_0$ 这样一个场于面内和面外的。但在导体表面上的所有其他电荷却“共同密谋”以产生一个在 P 点上大小等于 $E_{局部}$ 的附加场，使得在内部的总场变成零而外部的场则变成 $2E_{局部} = \sigma/\epsilon_0$ 。

§ 5-10 导体空腔里之场

现在，我们转到一个中空容器——导体内留有空腔——的问题。在金属中既不存在场，则在其中空腔里又是怎样的呢？我们将证明：如果该空腔真是空的，那就不管导体或该空腔的形状如何——比方说如图 5-12 所示的那种形状——在其中总不会有场存在。考虑一个高斯面，象图 5-12 中的 S ，它包围着该空腔，但还处处落在导电材料之内。在 S 上的任一处场均为零，所以并没有通量会通过 S 面，因而在 S 面内的总电荷就应该等于零了。对于一个球壳来说，人们本可以从对称性方面论证在其内部不应该有电荷的。但对于一般情况，我们就只能说在导体的内表面上正电荷与负电荷是等量的，即可能其中一部分存在正的面电荷而另一部分则存在负的面电荷，如图 5-12 所指出的那样。高斯定律并不能排除这种情况。



当然，实际发生的情形就是这样：任何在内表面上出现的异号等量电荷都必然会溜来溜去以便互相聚会，从而完全抵消掉。我们可通过应用 E 之环流始终等于零那一（静电学）定律来证明，它们应该完完全全地抵消。假设在内表面的某些部分上存在电荷，则我们知道，在其他地方就该有与之数目相等而符号相反的电荷。那么任何 E 线就应从那些正电荷出发而终止于那些负电荷上（因为我们所考虑的只是在空腔里并没有自由电荷的那种情况）。现在设想有这么一条回线 Γ ，它沿一条从某一正电荷至某一负电荷的力线跨越该空腔，并经由导体回到原来的出发点（如图 5-12 所示）。沿这么一条力线从正电荷至负电荷所取的积分该不会等于零。而经过金属里的积分则为零，因为 $E=0$ 。因此，我们就应该有

$$\oint E \cdot ds \neq 0 ???$$

但在静电场中，绕行任一闭合回线的 E 之线积分总是等于零的。因此，在空腔里就不会有任何场，而在内表面上也不会有任何电荷。

应当仔细地注意我们所已作出的一个重要限制条件。上面我们总是说在一个“空洞的腔穴里”。但如果有某些电荷被置于腔里的某些固定位置上——诸如被置在一个绝缘体上或一个与该主导体绝缘了的小导体上——那么腔里就可以有场。但此时这个腔已经不是“空”的了。

我们已经证明了：如果一个空腔被导体完全包围住，则任何外部的静止电荷分布都不可能在其内部产生出任何场。这说明了通过将电学设备放在一个金属盒内就能把它们“屏蔽”起来的原理。这同一些论据也可用来证明，在一导体闭合面内部的任何静电荷分布都不会在其外部产生出任何场。屏蔽对双方都有效！在静电学中——但并非在变化着的场中——一个闭合导体壳两边的场都完全互相独立。

现在你就明白，为什么以往在核对库仑定律时能够达到那么高的精密度。所用空壳的形状是无关重要的。并不需要有一个球形，立方的也满可以！如果高斯定律严格正确，则里面的场始终为零。现在你也明白，为什么坐在那百万伏范德格喇夫（van de Graaff）起电机的高压端之内可以安全无恙，并不必担心会受到电击——这是由于高斯定律。

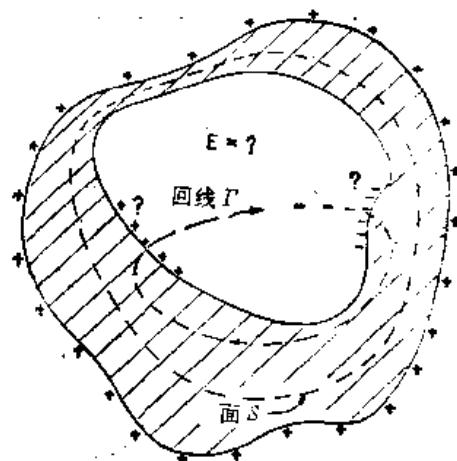


图 5-12 在一个任意形状的导体
空腔里其电场如何？

6

在各种情况下的电场

§ 6-1 静电势方程组

本章将描述在几种不同情况下电场的行为。它将向我们提供有关电场表现方式的一些经验，并将描述求解这种电场的某些数学方法。

首先我们要指出，全部数学问题在于解静电学的两个麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.2)$$

实际上，上述两方程也可合并成一个方程。从第二个方程我们立即知道场是可以当作一个标量的陡度来描述的（见 § 3-7）：

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (6.3)$$

如果我们乐意，就可以用势 ϕ 来完整地描写任一个特定电场。将式(6.3)代入式(6.1)中，便可得到 ϕ 所应服从的微分方程

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

ϕ 陡度的散度与用 ∇^2 对 ϕ 进行运算的结果相同，则

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (6.5)$$

因此，我们便可将式(6.4)写成

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

算符 ∇^2 称为拉普拉斯算符，而式(6.6)则称为泊松方程。从数学的观点看，静电学整个课题只不过是学习这一方程(6.6)的解。一旦 ϕ 已由解方程(6.6)而得出，便可立即由式(6.3)求得 \mathbf{E} 。

我们将首先提出其中 ρ 为已知的 x 、 y 、 z 函数的那种特殊类型问题。在这种情况下问题几乎是琐碎肤浅的，因为我们已知道式(6.6)的一般解了。以前就曾证明过：若 ρ 在每点上均为已知，则在点(1)处的势就是

$$\phi(1) = \int \frac{\rho(2)dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (6.7)$$

式中 $\rho(2)$ 和 dV_2 分别代表点(2)上的电荷密度和体积元，而 r_{12} 则为(1)与(2)两点间的距离。微分方程(6.6)的解已简化成一个遍及空间的积分了。式(6.7)这种解应加以特别注意，因为物理学中就有许多情况都会引导到如

$$\nabla^2(\text{某件东西}) = (\text{另一件东西})$$

这样一种方程，而式(6.7)便是这类问题解的典型。

这样，当所有电荷的位置都预先知道时，静电场问题的解就完全是直截了当的。让我们

在下述几个例子中看看这是怎么回事吧！

§ 6-2 电偶极子

首先，取两个相距为 d 的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 。令这两电荷的连线为 z 轴，并选取原点在其中间，如图 6-1 所示。于是，应用式(4.24)，则来自这两电荷之势就是

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (6.8)$$

我们不打算把电场的公式写出，因一旦已有了势，就总可以把场算出来的。因此，我们已解决了两电荷的问题。

存在两电荷靠得非常近的一种重要特殊情况

——即是说，我们所感兴趣的仅仅是在与该两电荷的距离远比它们本身的间距为大的那些地方之场。我们称这样的一对相互靠近的电荷为偶极子。偶极子是十分常见的。

例如，“偶极”天线常用互相分开一小段距离的两电荷来作近似——如果我们不去过问太接近于天线地方的场的话。（我们经常对于在天线里运动的电荷感兴趣，但这里静电学方程组实际上已不适用了。对于某些目的来说，那还是足够近似的。）

也许更重要的还是原子偶极子。在任何材料中，如果有一电场存在，则电子和质子将感觉到方向相反之力并作相对移动。你会记起，导体中有些电子会移到表面上去，使其中的场变为零。在绝缘体中，电子不能够移得很远，它们将被核吸引回来。然而，它们的确会移动一点点的。因此，尽管一个原子或分子在一外加电场中仍然保持中性，但它的正电荷和负电荷间总会出现一个十分微小间距，从而成为一个微观的电偶极子。如果我们所感兴趣的乃是关于这些原子偶极子在寻常大小的物体附近之场，那么，我们便是在与比起那些电荷对的间距大得多的距离，正常地打交道了。

在某些分子中，即使没有外电场存在，电荷也还是有点分开，这是由于分子的形状所致。例如，在一水分子中，氧原子所在处有净负电荷，而两个氢原子所在处则有净正电荷，它们并非对称地排列着，而是如图 6-2 所示的那样。尽管整个分子的电荷为零，但却形成这样一种分布：在一方有稍为多一点的负电荷而在另一方则有稍为多一点的正电荷。这种排列肯定不会象两个点电荷那么简单，但从远处看时，这个系统就象一个偶极子那样动作了。正如稍后我们便将见到的，在远距离处之场对于一些细节并不敏感。

那么，就让我们来看看，在一个小间距 d 上两异号电荷所产生的场吧！如果 d 变为零，两电荷互相重迭，两势则互相抵消，因而也就没有场了。但如果它们并不恰好互相重迭，那就可通过将式(6.8)中各项（应用二项式展开法）展开成微小量 d 的一个幂级数，从而得到势的一个优良近似。若仅仅保留到 d 的第一次幂，便可以写成

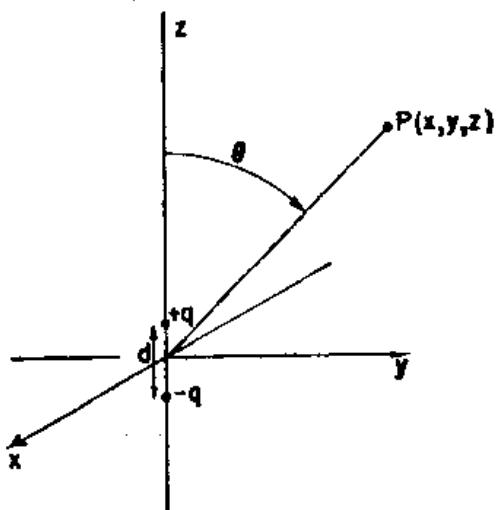


图 6-1 偶极子： $+q$ 和 $-q$ 两电荷相距为 d

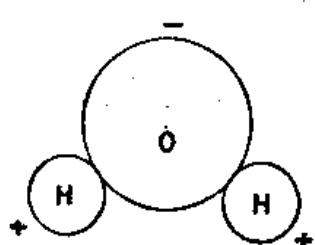


图 6-2 水分子 H_2O 。两个氢原子各拥有稍为低于其份额的电子云；氧原子则稍为多些

請勿用於盈利之目的

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

按如下写法很方便, 即

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

因此 $\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$,

和 $\frac{1}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1 - (zd/r^2)]}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}$.

对于 $[1 - (zd/r^2)]^{-1/2}$, 可再应用二项展开——并丢掉高于 d 的第一次幕的那些高次幕项——我们便得

$$\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

同理,

$$\frac{1}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

这两项之差就给出了势

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} qd. \quad (6.9)$$

得到这个势, 也就有了电场(那是势的微商), 它们都会正比于 qd , 即电荷与间距的乘积. 这个积被定义为该两电荷的偶极矩, 我们用符号 p (切勿与动量混淆!) 表示, 即

$$p = qd. \quad (6.10)$$

式(6.9)也可写成

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}, \quad (6.11)$$

因为 $z/r = \cos\theta$, 其中 θ 是偶极子轴与指向 (x, y, z) 点的矢径间所成之角——见图 6-1. 在与轴作成某一角度的方向上, 偶极子之势按 $1/r^2$ 下降(但对于一个点电荷, 则是按 $1/r$ 下降的). 于是偶极子的电场 E 便会按 $1/r^3$ 减弱.

如果定义一个大小为 p 、方向是沿偶极子轴从 q_- 指向 q_+ 的矢量为 p , 我们可把上式写成矢量形式. 这样,

$$\cos\theta = p \cdot e_r / p, \quad (6.12)$$

式中 e_r 为单位径向矢量(图 6-3). 我们也可用 r 来代表 (x, y, z) 点. 那么就有

偶极子势

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot e_r}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}. \quad (6.13)$$

这一公式对于具有任何指向和位置的偶极子都适用, 如果 r 代表从偶极子至感兴趣之点的矢量的话.

若想要得到电偶极子的电场, 便可通过取 ϕ 的陡度而获得. 例如, 场的 z 分量为 $-\partial\phi/\partial z$. 对于一个沿 z 轴指向的电偶极子, 我们可以引用式(6.9),

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right),$$

或

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}. \quad (6.14)$$

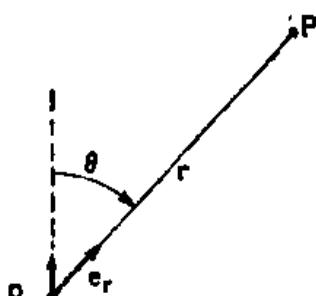


图 6-3 电偶极子的矢量记法

x 分量和 y 分量则分别为：

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}; \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}.$$

这两分量还可合成一个垂直于 z 轴的分量，我们将称之为横向分量 E_{\perp} ：

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

或

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos\theta\sin\theta}{r^3}. \quad (6.15)$$

这横向分量 E_{\perp} 落在 xy 平面上，而且又是从偶极子轴起直指向外的。总场当然是

$$\mathbf{E} = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

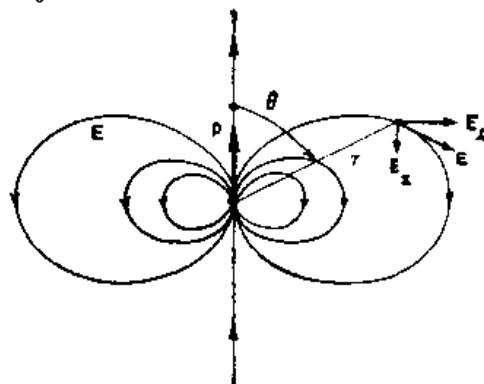


图 6-4 偶极子的电场

偶极子场与距离的立方成反比。在轴上，即当 $\theta=0$ 时，它比在 $\theta=90^\circ$ 处要强两倍。在这两个特殊角度上电场仅有 z 分量，但在这两处场的符号却相反(图 6-4)。

§ 6-3 矢量方程述评

到此我们来对矢量分析作个一般性评价挺合适。那些基本证明，可用一些具有普遍形式的优美方程式来表达。但在进行各种计算和分析时，以某种方便方式去选择坐标轴，总是个好主意。这里要注意，刚才在找出偶极子之势时，我们曾选择了 z 轴沿着偶极子方向，而不是在某一任意角度上。这使工作容易做得多。可是后来我们却又把方程写成矢量形式，以便使其不再依赖于任何一个特定的坐标系。此后，就可以随心所欲地选择任意一个坐标系了，因为已知道该关系式是普遍正确的。对于某一特定问题，当能够选取一个简洁的坐标系时——只要最后结果还能表达成一个矢量方程——还去烦神用一个在某一复杂角度上的任意坐标系，显然毫无意义。因此，务必利用矢量方程式与任一坐标系无关的这一事实。

另一方面，如果你正在试图算出一个矢量的散度，而不仅是对 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 望一望就猜测它是什么，那便不要忘记它总是可以展开成下式的：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

这时，你若能算出电场的 x 、 y 和 z 各分量并对之微分，那你就会得到一个散度了。往往似乎有这样一种感觉：若将各分量写出，就会存在某种不太优美的——牵涉到某种失败——的东西；不管怎样，一切事情都总会有办法用矢量算符做出。但这种想法往往没有什么好处。当初次碰到一个特殊问题时，写出分量以便保证对过程的了解，那是有帮助的。把数字代入方程之内并不见得不优美，而用微商代替某些悦目符号也未必不文雅。实际上，具体写出分量来这一件事情就往往是一种智慧。当然，当你在专业杂志上刊登文章时，如果你能把一切东西都写成矢量形式，那将会美观些——而也更易于理解。此外，还节省了一些篇幅。

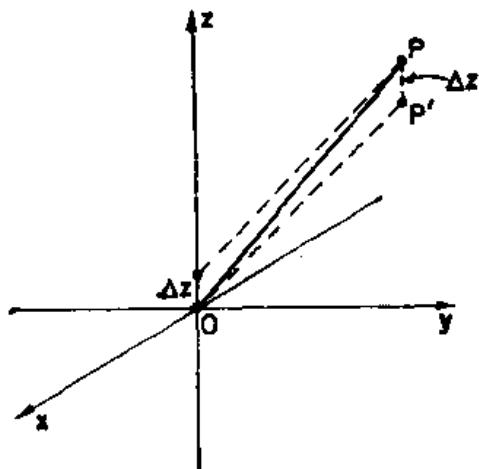
§ 6-4 用陡度表示的偶极子势

关于偶极子公式(6.13)，我们愿意指出一件相当愉快的事情。该势也可写成

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.16)$$

如果你算出 $1/r$ 的陡度, 你便可以得到

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2},$$



而式(6.16)与(6.13)就彼此相同了.

怎么会想到这一点呢? 我们刚刚记起, e_r/r^2 出现在有关点电荷的场公式中, 而场又是那具有 $1/r$ 依存关系的势的陡度.

之所以能够将偶极子势写成式(6.16)的那种形式, 有其物理原因. 假设有一个位于原点处的点电荷 q , 则在 $P(x, y, z)$ 点上的势为

$$\phi_0 = \frac{q}{r}.$$

(让我们在作这些论证时丢下 $1/4\pi\epsilon_0$, 最后还是可以再插进去的.) 现在若把电荷 $+q$ 向上移一个距离 Δz , 那么在 P 点上之势就将改变一点点, 比如说 $\Delta\phi_+$. 这 $\Delta\phi_+$ 有多大呢? 哎呀! 这恰好就是: 假如让电荷留在原点上不动, 而将 P 向下移过同一距离 Δz , 电势该会改变的数量(图 6-5). 也就是说,

$$\Delta\phi_+ = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z} \Delta z,$$

式中 Δz 指的是与 $d/2$ 相同的间距. 因此, 引用 $\phi_0 = q/r$, 我们就有该正电荷之势

$$\phi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)\frac{d}{2}. \quad (6.17)$$

对于该负电荷, 应用同种推理可写出

$$\phi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-q}{r}\right)\frac{d}{2}. \quad (6.18)$$

总电势等于(6.17)与(6.18)两式之和:

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)d = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)qd. \quad (6.19)$$

对于其他指向的偶极子, 可以将正电荷的位移表达为 $\Delta\mathbf{r}_+$. 然后, 我们应该把式(6.17)写成

$$\Delta\phi_+ = -\nabla\phi_0 \cdot \Delta\mathbf{r}_+,$$

式中 $\Delta\mathbf{r}_+$ 以后又要用 $d/2$ 代替. 和上面一样, 在完成了推导过程之后, 式(6.19)就应该变成

$$\phi = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot q\mathbf{d},$$

这与式(6.16)正好相同, 如果我们代入 $qd = p$, 并插进 $1/4\pi\epsilon_0$ 的话. 按另一种方式来看, 我们见到偶极子之势, 即式(6.13), 可以解释为

$$\phi = -\mathbf{p} \cdot \nabla\Phi_0, \quad (6.20)$$

其中 $\Phi_0 = 1/4\pi\epsilon_0 r$ 仍是一单位点电荷之势.

尽管对一已知的电荷分布, 我们总能够通过积分以求得势, 但有时却可运用一点聪明才

智来获得答案，以便节省时间。例如，我们经常可利用迭加原理。如果有这样一个电荷分布，它是由两个各已知道了电势的电荷分布构成的，那么只要将所知的两个势相加起来就能很容易地找到所需之势。这方面的一个例子是关于式(6.20)的推导，另一个例子则如下述。

假定有一个球面，其表面电荷的分布随极角的余弦而变化。对这么一个分布的积分是相当麻烦的。可是令人惊奇，这样的一个分布却可通过迭加原理来加以分析。试设想有一个带着均匀正电荷体密度的球体，而另一个球体则带有相等的均匀体密度的负电荷，它们原来就是互相迭合，形成一个中性——也就是不带电——的球体。然后，若该带正电球体相对于那带负电的球体稍为移位，则不带电的那部分球体仍将保持中性，但有一小量正电荷会出现在一边，而一小量负电荷则出现在另一边，如图 6-6 所示。若两球的相对位移很小，则净电荷相当于(在一个球面上的)面电荷，而该面电荷密度又将与极角的余弦成正比。

现在，如果我们要得到来自这一个分布之势，则不必去做出积分。因为我们已懂得了来自每一个荷电球体之势——对于在球外之点——与来自一个点电荷之势相同。该两个经过了移位后之球与两个点电荷相似；其势恰好就是一个电偶极子之势。

用这样的方法，你可以证明：在一个半径为 a 的球面上具有面电荷密度为

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

的那一种电荷分布，将会在球外产生一个恰好是偶极矩为

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}$$

的那一个偶极子之场。也能够证明：在该球面内之电场仍是一常数，其值为

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

若 θ 代表从正 z 轴量起之角，则在球内的电场都会沿负 z 方向。我们刚才所考虑的这个例子并不象它表面看来那么带人为性。以后将在电介质理论中再次碰到它。

§ 6-5 任意电荷分布的偶极子近似

偶极子场还出现在另一个既有趣而又重要的场合中。假设有一个带着复杂电荷分布的物体——象水分子(图 6-2)那样——而我们仅仅对在远处的场感兴趣。即将证明，对于比起物体尺寸要大的距离有可能找到一个恰当的关于场的相对简单表达式。

我们可将该物体设想成是在某一有限区域里的一群点电荷 q_i ，如图 6-7 所示。(以后若我们愿意，还可以用 ρdV 来代替 q_i 。) 令每一电荷 q_i 被置在距离原点(选取在该群电荷中间的某处)的位移为 \mathbf{d}_i 的地方。在一个位于距离为 R 、而 R 远大于最大的 d_i 值的 P 点处之势究竟如何呢？来自整个电荷群之势由下式给出：

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (6.21)$$

式中 r_i 是从 P 点至电荷 q_i 的距离(即矢量 $\mathbf{R} - \mathbf{d}_i$ 的长度)。现在，如果这些电荷至观察点

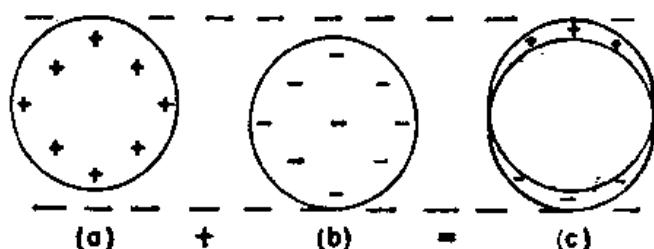


图 6-6 两个均匀带电球体互相迭加，彼此间有一微小位移，便相当于表面电荷的非均匀分布

請勿用於
盈利之目的

P 的距离很大，则每个 r_i 都可以用 R 来作近似。每一项就都变成 q_i/R ，从而可将 $1/R$ 取出

作为在求和符号前的一个因数。这将向我们提供一个简便的结果

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}. \quad (6.22)$$

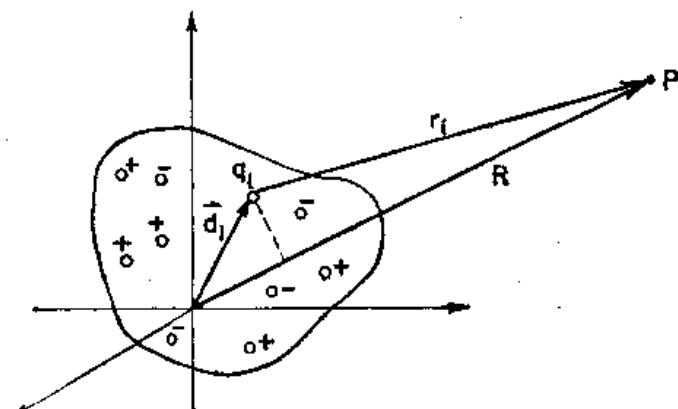


图 6-7 一群点电荷在一遥远点 P 处产生之势的计算

式中， Q 恰好就是整个物体的总电荷。这样，我们就找出了：对距任一堆电荷足够远的各点上来看，该堆电荷就象一个点电荷似的。这一结果并不太令人惊异。

但若有等量的正电荷和负电荷又该怎么样呢？此时物体的总电荷 Q 为零。这并不是一种罕见的情况。事实上，正如你们所知道的，物体往往具有电中性。水分子就是电中性的，但其中诸电荷并非完全落在同一点上，因而若站得足够近，就应能见到那些分开着的电荷的某些效应。对于来自电中性物体中一个任意电荷分布之势，我们需要一个比起式(6.22)来还要好的近似式。式(6.21)仍然是准确的，不过不能再只是令 $r_i=R$ 。我们需要一个更准确的 r_i 表达式。如果 P 点是在遥远距离上， r_i 与 R 的差异可以通过 d_i 在 \mathbf{R} 上的投影而得到一个良好近似，正如从图 6-7 就可以看得出来的。（你应该设想，实际上 P 比图上所示的还要遥远得多。）换句话说，若 \mathbf{e}_r 是在 \mathbf{R} 方向上的单位矢量，则我们对于 r_i 的第二次近似便是

$$\mathbf{r}_i \approx \mathbf{R} - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r. \quad (6.23)$$

我们所真正需要的乃是 $1/r_i$ ，由于 $d_i \ll R$ ，对我们的近似程度来说， $1/r_i$ 就可写成

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R} \right). \quad (6.24)$$

以此代入式(6.21)中，便可得到势

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \sum q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R^2} + \dots \right). \quad (6.25)$$

上式中最后三点代表我们已略去的有关 d_i/R 的较高次项。这些项，再加上已获得的那些，就是 $1/r_i$ 在 $1/R$ 附近以 d_i/R 的幂展开的泰勒级数中的相继的项。

式(6.25)中的第一项，就是我们曾在上面获得了的；如果物体具有电中性，这一项则取消了。第二项依赖于 $1/R^2$ ，正如偶极子那种情况。事实上，如果我们定义

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{d}_i \quad (6.26)$$

作为该电荷分布的一种特性，那么势(6.25)的第二项便是

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{R^2}. \quad (6.27)$$

这恰好就是一个偶极子势。 \mathbf{p} 这个量称为该分布的电偶极矩。它是对我们以前的定义的推广，而在两个点电荷的特殊情况下，它才简化成以前那样。

上述结果是：若距离整体是电中性的任一堆电荷足够远，势就是一偶极子势。它随着 $1/R^2$ 递降，并跟着 $\cos\theta$ 变化——而其强度还有赖于该电荷分布的偶极矩。正是由于这些缘故，偶极子场才那么重要，因为一对点电荷的那种简单情况是极为罕见的。

例如，水分子就有相当强的偶极矩。由于这偶极矩而产生的电场导致了水的某些重要性质。在许多种分子，诸如 CO_2 中，由于分子结构的对称性使得其偶极矩为零。因此，对于这些我们理应展开得更为准确些，得到在势中那个随 $1/r^3$ 递降之项，而这称为四极子势。对于这些情况我们将在以后讨论。

§ 6-6 带电导体群之场

我们利用上述一些实例，现在就已完成了我们希望涉及的从一开始就知道了电荷分布的那些情况。那是一种不太复杂的问题，至多只牵涉到某些积分。现在，我们将转到一类全新的问题，即对带电导体附近之场的确定。

假设有总电荷 Q 置于一任意导体之上。在这种情况下，将不能够确切地指明电荷的位置分布。它们将以某种方式分散在该导体表面上。我们怎能知道电荷是如何分布于其上的呢？它们必须把自己分布得使该表面之势是一常数。假如该面不是一个等势面，则在导体里面便会有电场，而电荷就不得不继续走动直到电场变为零。这一类普遍问题可以按上述的方法得到解决。我们先猜测有某一电荷分布而算出了势。若所算出之势在该表面上处处是常数，则问题便算了结。如果该表面不是一个等势面，那就说明我们对电荷分布所作的猜测有误。应该再进行猜测——希望得到一个有所改善的猜测！这一过程可以不断地继续下去，除非我们对逐步猜测已经足够明智了。

对于如何对分布作出猜测的问题在数学上相当困难。当然，大自然自有其完成此事的时间。电荷推来挽去直到它们互相平衡为止。然而，当我们试图求解该问题时，要作出一次尝试就得花那么长的时间，使得这办法十分繁冗。若有任意一群导体和任意电荷，这一问题可能变得十分复杂。一般说来，如果没有一套苦心经营的数字方法就无从加以解决。目前，这一类的数字计算是由计算机来完成的，它能为我们代劳，只要先告诉它怎样去进行计算就行。

另一方面，有许多琐碎的实用情况，如果只凭某种更直接方法——不必为计算机编出程序——就能够找到答案，那该多么美妙。幸而，有若干种场合，其答案可以利用这个或那个巧计从大自然中逼挤出来而获得。我们将要描述的第一个巧计就是涉及利用一些解答，这些解答是我们以前曾对各电荷的位置都已被规定了的那些情况获得的。

§ 6-7 镜象法

比方说，我们以前就曾经解决过两个点电荷之场。图 6-8 显示第五章中通过计算而获得的某些场线和等势面。现在考虑标明为 A 的那个等势面。假设我们造成一个其形状恰巧与这个面吻合的金属薄片。若把它准确地安放在该面上并调整其势至该恰当数值，那就没有谁能够知道它是放在那里了，因为一切都不会改变。

可是要注意！实际上我们已经解决了一个新的问题。我们有这么一种情况：一块给定了势的曲面导体放在一个点电荷附近。如果将其放置在该等势面上的金属片最终能自行闭合（或实际上伸展得足够远），那么就有一种在 § 5-10 中曾考虑过的那样情况，其中空间被分隔成两个区，其一是在闭合导体壳之内，另一则在其外。我们在那里已经查明了这两个区域里之场是互为独立的。因而不管里面是怎么样，在导体外面我们该有同一种场。我们甚至可以用导电材料来填充整个内部。因此，就已找到了图 6-9 那种布置之场。在导体外

請勿用於盈利之目的

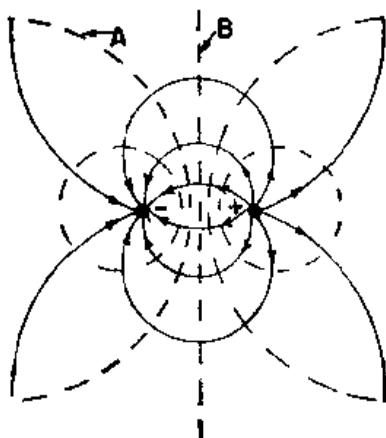


图 6-8 两个点电荷的场线和等势面

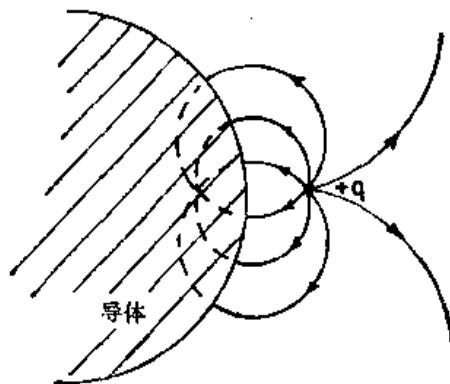


图 6-9 在一个形状象图 6-8 中的等势面 A 的导体之外的电场

部的空间里，场同图 6-8 中所示的两个点电荷之场一样。在导体内部，场等于零，并且——正该如此——刚好在导体外侧的电场会与该面正交。

这样，我们便能通过计算 q 以及在适当位置上一个想象的点电荷 $-q$ 所产生之场来算出图 6-9 中之场了。那个我们“想象”其存在于导体后面点电荷称为象电荷。

从书中你可以找到有关双曲面形导体，以及其他形状复杂的东西的各种解答的长长表列，因而会觉得奇怪，怎么有人竟解决了这些可怕形状。原来他们是倒过来解决的！有人对某些给定电荷的一个简单问题解决了。然后，他看到有某一个等势面表现出新的形状，于是就写出一篇论文，指明在该特定面形之外的场可以按某一方式来加以描述。

§ 6-8 导电平面附近的点电荷

作为这种方法最简单的应用之一，让我们利用图 6-8 中的等势面 B 。有了它，便能解决在一块导电板面前放置一个电荷的那种问题。我们只须勾消该图左边的一半。有关这一解答之场示如图 6-10。注意该平面，由于是在两电荷之间，所以具有零势。这样，我们就解决了在一接地的导电板附近有一个正电荷的问题。

整个电场至今已告解决，但那些应对场负责的真实电荷究竟是怎样的呢？除了这个正号点电荷之外，还会受到该正电荷（在老远处）所吸引而出现于导电板上的那些感生负电荷。现在，假定由于某种技术原因——或出自好奇心——你想知道那些负电荷在该表面上是怎样分布的。那你可以通过利用我们在 § 5-6 中由高斯定律所算出的结果来找出该面电荷密度。贴近导体外面的电场法向分量就等于面电荷密度 σ 除以 ϵ_0 。可以通过由在表面上的电场法向分量倒过来计算，以获得在表面任一点上的电荷密度。我们总会把它弄清楚的，因为已知道了到处之场。

考虑板面上这么一点，它与正对着正电荷的那一点距离为 ρ （图 6-10）。在这一点上的电场会垂直指向该表面。来自该正电荷之场其法向分量为

$$E_{\perp} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.28)$$

对此还必须加上由那个负的象电荷而来的电场。这不过使该法向分量加倍（并抵消了所有其他之场），因而在该表面任一点上的电荷密度 σ 就是

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.29)$$

請勿用於盈利之目的

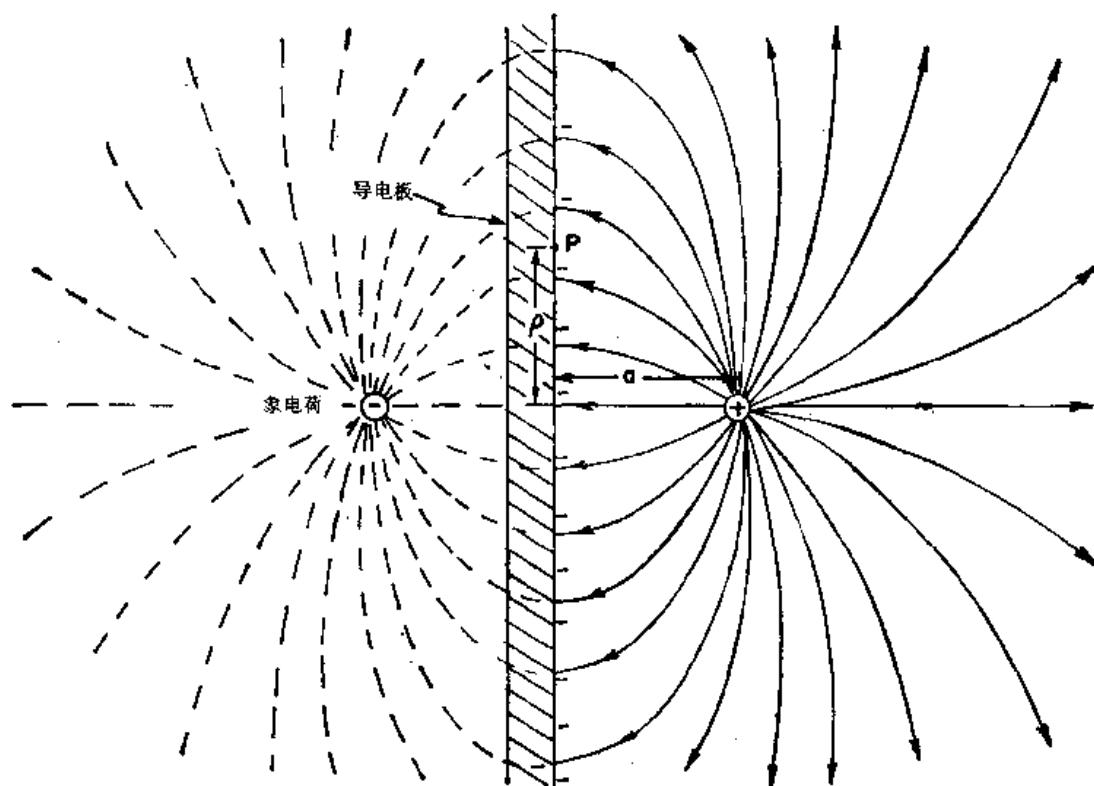


图 6-10 由镜像法求得的在一导电平面附近的一个电荷之场

对上述结果的一种有趣核对，仍是遍及整个面对 σ 进行积分，终于会找出总感生电荷为 $-q$ ，理应如此。

还有另一个问题：是否有力作用于该点电荷？有的，因为有来自板上的感生负电荷的吸引力。现在我们已知道面电荷的分布（式 6.29），本来就可通过积分算出对该正点电荷所作用之力。但我们也知道，施于该正电荷上之力应该与用一负象电荷来代替那块平板所作用之力恰好相同，因为在正电荷附近之场在这两种情况下都相同。该点电荷会感到一个指向板面而其大小为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2a)^2} \quad (6.30)$$

之力。这样，比起遍及所有负电荷取积分而找到力，要容易得多。

§ 6-9 导电球体附近的点电荷

除了平面以外，还有哪些面会有简单解的呢？第二种最简单的形状是球。如图 6-11 所示，在一金属球附近有一个点电荷 q ，让我们来找出在该球体周围之场。现在，一定要寻找一个会给出球面作为其等势面的那种简单物理情况。如果遍寻人们已经解决了的那些问题，就会发现，有人已曾注意到两个不相等的电荷之场会有一个球形的等势面。啊哈！如果选择那个象电荷的位置——并拿出一个适量的电荷来——那么也许就能使一个等势面符合我们的球面，事实上，的确可以用下述方法来做到这一点。

假设你所希望有的是这样一个等势面：半径为 a 而其中心与电荷 q 相距为 b 的球面。试放置一个大小为 $q' = -q(a/b)$ 的象电荷于该真实电荷与球心的连线上，与球心的距离为 a^2/b 。这样，球面就将会有零势。

数学方面的理由仍在于：球面是与两固定点的距离始终保持一不变比率的所有各点的轨迹。参考图 6-11，在 P 点上由 q 与 q' 所产生之势正比于

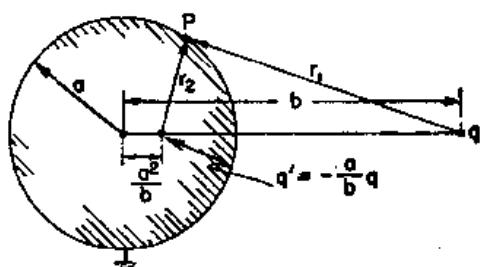


图 6-11 点电荷 q 在一个接地的导电球体上感生了电荷，这些电荷之场就是被置在图中所示那一点上的一个象电荷 q' 所产生的

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}.$$

于是，此势就将在下述一切点上为零：

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \quad \text{或} \quad \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$

如果我们把 q' 置于距离球心为 a^2/b 的一点上，那么比率 r_2/r_1 就有一常数值 a/b 。因此，若

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}, \quad (6.31)$$

球面便是一等势面了。事实上，它的势为零。

如果我们感兴趣的倒是一个不处于零势的球，情况又会怎么样呢？原来只有在其总电荷碰巧等于 q' 时才会有零势。当然，如果球是接地的，则在其上面所感生的电荷就恰好是那样。但如果它是被绝缘的，并且不带任何电荷，那又会怎么样呢？或者就只有一个不指定等于零的势呢？所有这些问题都是易于解决的。我们总可以加一个点电荷 q'' 于球心上。通过迭加，该球面就仍保持为一等势面，只是势的大小将会改变罢了。

比方，若有一个原来并没有带电而且与其他任何东西都绝了缘的导电球，并将一个正的点电荷 q 带至其附近，那么球的总电荷仍将保持为零。如前，解将通过用一个象电荷 q' 而找到，但除此之外还应加上一个电荷 q'' 于球心上，选取

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}q. \quad (6.32)$$

在球外每一处之场由 q 、 q' 与 q'' 诸电荷之场的总和给出。问题就这样解决了。

现在我们能够看到，将有一吸引力存在于球与点电荷 q 之间。尽管在中性球上没有电荷，力仍不会等于零的。这吸引力来自何处呢？当你把一正电荷带到一导电球外面时，该正电荷会把负电荷吸引到较近于其本身的一边而留下正电荷在较远的另一边。受负电荷吸引之力会大于受正电荷排斥之力；因而就有一净吸引力了。可以通过计算算出在 q' 和 q'' 所产生之场中作用于 q 上之力，而找出该吸引力有多大。总力等于这两者之和： q 与置在 $b - (a^2/b)$ 距离上的电荷 $q' = -(a/b)q$ 之间的吸引力，以及 q 与置在 b 距离上的电荷 $q'' = +(a/b)q$ 之间的排斥力。

那些曾在童年时代对一个发酵粉盒上的商标里画上一个发酵粉盒，而在此盒的商标里又画上另一个发酵粉盒……感到爽心悦目的人可能对下述问题感兴趣。两个相等的球，一个带有总电荷 $+Q$ ，而另一个带有总电荷 $-Q$ ，被置在某一距离上。它们间的互作用力有多大呢？这问题可以用无限个象电荷来解决。最初人们用在每一球心上的电荷来作近似。这些电荷将在另一个球中有其象电荷。这些象电荷又有其象电荷，如此等等。这个解就很象那发酵粉盒上的图画似的——收敛得相当快。

§ 6-10 电容器与平行极板

现在，我们提出另一类牵涉到导体的问题。考虑两块大的金属板，彼此互相平行并相隔一个比每块宽度小得多的距离。而且，假定各带有等量异号电荷。这样，每一板上的电荷将

被另一板上的电荷所吸引，而这些电荷都将均匀地散布于板内侧表面上。两板将分别拥有电荷密度 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ ，如图6-12所示。从第五章我们知道：两板间之场为 σ/ϵ_0 ，而在两板外面之场则为零。两板将有不同之势 ϕ_1 和 ϕ_2 。为了方便起见，我们将称这差值为 V ，它常叫作“电压”

$$\phi_1 - \phi_2 = V.$$

(你将会知道，有时人们要用 V 当作电势，但我们对于电势却选用了 ϕ 。)

势差 V 乃是单位电荷从一极板移至另一极板之功，因而

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q, \quad (6.33)$$

式中 $\pm Q$ 为每板上的电荷， A 为板的面积，而 d 为两板间距。

我们发现电压与电荷成正比。象这种 V 与 Q 之间的正比性，对于在空间中，一个带正电而另一个带等量负电的任何两个导体都是正确的。它们间的势差——也就是电压——将与电荷成正比。(我们假定没有其他电荷在其周围。)

为什么会有这一种正比性呢？这只不过是迭加原理在起作用。假定已知道对某一组电荷之解，然后又把这样的两个解迭加起来。电荷已是双倍，场也是双倍了，因此，将单位电荷从一点移至另一点所作之功也是双倍。因此，在任何两点之间的势差就会正比于电荷。特别是，在该两导体之间的势差，会正比于存在其上的电荷。当初有人把这个正比性倒过来写。也就是说，他们写成

$$Q = CV,$$

式中 C 是一常数。这个比例常数叫做电容，而这一种两导体系统则叫做电容器*。对于我们平行板电容器来说，

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ (平行板).} \quad (6.34)$$

这个公式并非严格准确，因为场在两板之间不是真正处处均匀，如上面所假定那样的。并非刚好在边缘处场就突然消失，而实际上仍更象图6-13所示的那种情形。总电荷不象我们所假定的为 σA ——而是对于边缘效应有一个小小修正。要求得这修正，我们得更准确地算出场并找出在边缘处究竟发生了什么。然而，这是一个复杂的数学问题，只能用我们现在还不便加以描述的技巧来加以解决。这种计算的结果表明，接近两极板边缘处电荷密度会比

图6-13 在两平行板边缘附近的电场

中间稍为高些。[对于电容的一个很好近似是这样获得的：若我们采用式(6.34)，则对于其中之 A 应该采用如同两板各已人为地延伸 $3/8$ 倍板间距离那样所该有的。]

我们仅仅谈及了关于两导体的电容。有时人们会谈到一个单独物体的电容。比方，他

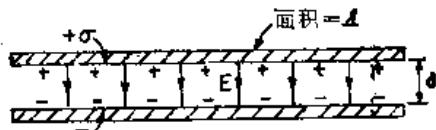


图6-12 平行板电容器

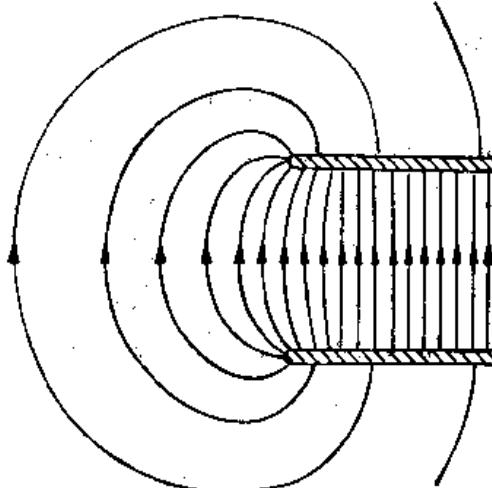


图6-13 在两平行板边缘附近的电场

* 有人认为电容“capacitance”和电容器“capacitor”这两个较新名词应分别代替电容“capacity”和电容器“condenser”这两个词。我们决定采用那较古老的一套名称，因为在物理实验室中——即使不是在书本里——这套旧名称仍较普遍听到。

们会说，一个半径为 a 的球体有 $4\pi\epsilon_0 a$ 的电容。他们把另一极设想为是一个半径无限大的球——即当有一电荷 $+Q$ 放在球面上时，相反的电荷 $-Q$ 则在一个无限大的球面上。人们也可以谈论当有三个或更多个导体时的电容，然而关于这方面的讨论我们将要推迟。

假设我们希望有一个电容很大的电容器。那就可以通过取极大面积但间距极小而获得。我们尽可以将浸过蜡的纸片夹在铝质薄膜之间而卷起来。（如果把它密封在一个塑料盒中，那就会形成一个典型的无线电方面用的电容器了。）它有什么好处呢？好处在于能贮存电荷。比方，若我们试图把电荷贮存在一个球面上，则当它充电时电势会升高得很快。这电势甚至可能高达使电荷开始通过火花而向空气逃逸出去的那种程度。可是，若我们把等量电荷放在一个电容十分大的电容器上，则跨越电容器间所形成的电压仍相当小。

在电路的许多种应用中，凡能吸收或释放大量电荷而又不会怎样改变其电势的东西都是有用的。而这正是电容器的特长。在电子学仪器以及计算机中，电容器还有许多种应用。其中，有的被用来响应电荷的某一特定变化，从而得到在电压上的一种特殊变化。在第一卷第二十三章中我们曾在描述共振电路特性上见到一种相似应用。

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ 法拉/米}$$

从 C 的定义可以看出，它的单位是库仑/伏。这个单位也叫法拉。考察式(6.34)，我们见到 ϵ_0 的单位可表达为法拉/米，这是最常用的单位。电容器的典型容量约由一皮法拉至一毫法拉为度。几个皮法拉的那种小电容器常用于高频调谐电路中，而高达百、千个微法拉的电容器则在动力供应站的滤波器中可以找到。一对面积为一平方厘米而间距为一毫米的平行极板具有约等于一皮法拉的电容。

§ 6-11 高电压击穿

现在，我们想定性地讨论在导体周围场的某些特性。若我们对之充电的不是一个球，而是在其上面有一小点或尖端，如图 6-14 所勾画出来的那种导体，那么围绕尖端的场比起其他区域的场就会高出许多。从定性方面讲，原因是电荷企图尽可能广阔地铺开在导体表面上，而尖端上的尖头就是与大部分表面相离得尽可能远的地方。板面上有些电荷被一直推至该尖头，在尖头上相对小量电荷仍能提供一个大的面密度；而一个高的电荷密度也就意味着刚好在外面处的一个强电场。

要看出导体上那些曲率半径最小的地方场会最高的一种办法，是去考虑一个大球与一个小球被导线连结在一起的那种组合，如图 6-15 所示。它多少是如图 6-14 所示的那个导体的一种理想副本。导线对于处在球外之场影响甚小；它在这里的作用只是维持两球在同一个势上。现在，究竟哪一个球在表面上会有较大的场呢？如果左边的球半径为 a 并带有电荷 Q ，则它的势约为

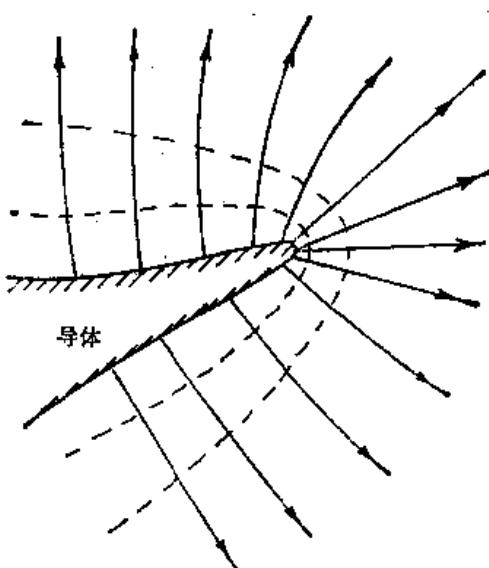


图 6-14 在导体上接近尖端处的电场十分强

$$\phi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}$$

(当然一个球的存在总会改变另一个球上的电荷分布, 因而无论哪个球上的电荷都不是真正对称的。但若我们感兴趣的只是对场的一种估计, 那就可采用一个球形电荷之势。) 若那个半径为 b 的小球带有电荷 q , 则它的势约等于

$$\phi_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}$$

但 $\phi_1 = \phi_2$, 因而

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}$$

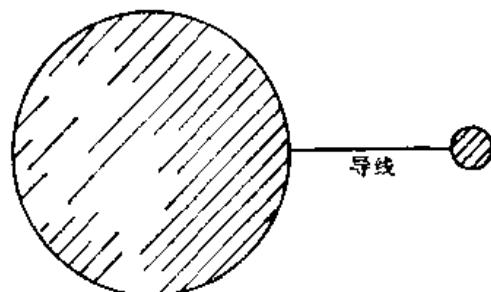


图 6-15 一个尖锐物体之场可以由两个在同一势上之球来作近似

另一方面, 在表面上的场与面电荷密度成正比(见式 5.8), 这里又正比于电荷除以半径平方。我们便得

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a} \quad (6.35)$$

因此, 在那个小球面上之场是较高的, 场与半径成反比。

这一结果在技术上很重要, 因为若电场太大, 空气会被击穿。所发生的情况是: 一个在空气中某处的自由电荷(电子或离子)被场所加速, 倘若场很大, 则该电荷会在打击另一个原子之前就获得了足够高速以致能够从该原子中打出一个电子来。结果是, 更多更多的离子产生了。它们的运动构成一次放电或火花。如果你要对一物体充电至一高电压而又不让它通过空气中的火花将它本身放电, 那你就必须保证该表面是平滑的, 从而不会在任何一处出现异常强的电场。

§ 6-12 场致发射显微镜

在一带电导体上任何尖锐突出部分的周围那种非常高的电场, 有一很有意义的应用。场致发射显微镜的操作就有赖于在一金属尖端上所产生的高场*。它是按如下方式制成的。一根十分细小的针, 其尖端的直径约为 1000 埃, 被置在一个抽成真空的玻璃球泡的中心(图 6-16)。球的内面敷上一层十分薄的由荧光材料制成的导电膜, 而在这荧光敷层与针之间加上一个非常高的电压。

让我们首先考虑, 当针相对于荧光敷层是负时所发生的情况。场线在尖端处高度集中。电场可以高达四千万伏每厘米。在这样强的场中, 电子会从针的表面被拉出去而在针和荧光敷层之间的势差中被加速。当电子到达敷层时就会引起发光, 正如电视显象管中的情况一样。

那些到达荧光面某特定点上的电子, 在很高的近似程度上, 可以看作是发源于径向场线的另一端, 因为电子将沿着场线从该点跑至面上来。这样, 我们就看到了针的尖端的某种象。更严格地说, 是看到了针表面的发射率图象——也就是电子离开金属尖头表面的难易程度。如分辨率足够高, 人们还可以指望能够分辨出在针的尖端处个别原子的位置。利用

* 参阅 E. W. Mueller, "The field-ion microscope," *Advances in Electronics and Electron Physics*, 13, 83~179 (1960), Academic Press, New York.

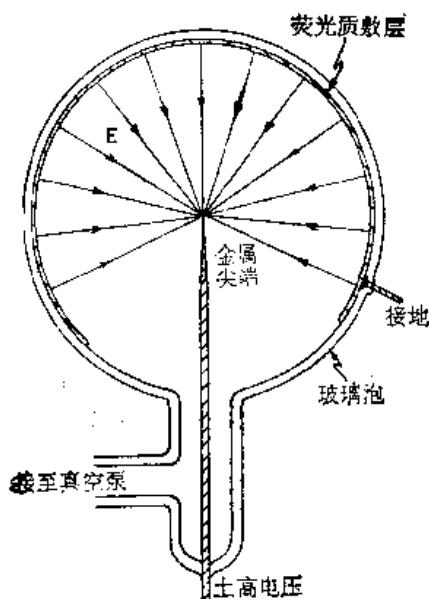


图 6-16 场致发射显微镜

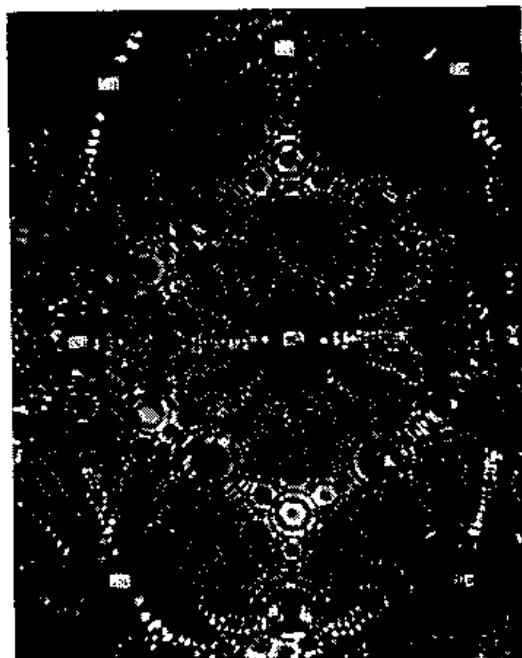


图 6-17 由一架场致发射显微镜所产生之象 [蒙宾西弗尼亞州立大学物理学研究教授埃尔温 W. 穆勒提供]

电子,由于下述一些原因,这样的分辨率无法达到。首先,电子波带有一种量子力学性的衍射,它能使象模糊。其次,由于电子在金属中的内在运动,它们在离开针面时会有一个小小的侧向初速,而这一种速度的无规横向分量就会引起象的一定模糊程度。这两种效应合在一起迫使分辨率限于约为 25 埃之间。

然而,如果我们颠倒电极方向,并引进少量氮气于玻泡中,那就可能得到高得多的分辨率。当一个氮原子与针尖碰撞时,那里的强电场会把该氮原子中一个电子剥开,剩下的原子就带上了正电。然后,这个氮离子就会沿着场线向外加速奔跑直至到达荧光屏。由于氮原子比起电子笨重得那么多,其量子力学波长也就会小很多。如果温度不太高,则热速度效应也比电子的情况小。在象上就有了较少的模糊程度,一个清楚得多的有关尖端的图象就可以得到。用这种正离子的场致发射显微镜,有可能获得高达 2,000,000 倍的放大率——比起用一架最佳的电子显微镜所能获得的还要高出十倍的放大率。

图 6-17 是由一台利用钨针的场致发射显微镜所获得的结果的例子。一个钨原子中心对氮原子的离化,比起在诸钨原子之间的空隙有稍为不同的时率。在荧光屏上的斑点图样就会显示出钨针尖端的各别原子的排列。斑点之所以表现为环形的原因,可以通过注视一个大箱子里用以代表金属里原子的、被堆积成矩形阵列的小球而得到理解。如果你从该箱子里割出一个粗略的球形的部分,你便可以看到原子结构的环状图样特性。场致发射显微镜第一次为人类提供了观察原子的工具。鉴于该仪器的简单性,这是一项了不起的成就。

在各种情况下的电场(续)

§ 7-1 求静电场的各种方法

本章将继续讨论各种特殊情况下电场的特性。首先，要来描述一些解决导体问题的更精确的方法。并不期望读者对这些较高级的方法能够在这个时候就熟练掌握。但对利用可能在较高级课程中学到的技巧就能解决的那些类型问题得到某种概念，仍然可能具有意义。然后，我们还将提出电荷分布既非固定、也非由导体所携带、而是要由其他某种物理规律来确定的两个例子。

正如在第六章我们曾经发现的那样，如果电荷分布已确定，静电场问题就基本上很简单，则只要求算出一个积分。然而，当有导体存在时，由于导体上的电荷分布原先不知道，复杂性便产生了；电荷必须这样分布于导体表面上，使得该导体能成为一个等势体。对于这种问题的解答既非直接也不简单。

我们曾注意到有一个解决这类问题的间接方法，在此方法中对某种特定电荷分布求得一些等势面，并用一个导电面去代替其中的一个。按这种办法我们就能制成一份关于球面、平面等形状导体的特殊解的目录。在第六章中所描述的有关镜象法的应用，就是间接法的一个例子。我们将在本章中描述另一个例子。

如果所要求解的问题并不属于能够用间接法以造成解的那一类问题，则不得不采用较直接的方法来解决该问题。直接方法的数学问题是在服从某些边界——各导体表面——上 ϕ 分别为一些恰当常数的条件下，求拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \quad (7.1)$$

的解。凡属牵涉到求解一个微分方程，并受某些边界条件所制约的问题都叫做边界值问题。这种问题在数学上曾受到相当认真的研究。在具有复杂形状的导体的情况下，并没有普遍的解析方法。甚至象一个带电的两端都封闭着的金属柱体罐——比如啤酒罐——都会遇到可怕的数学困难。它只能用数值计算法来近似地给予解决。求解的唯一普遍方法就是数值计算法。

方程(7.1)对于若干问题是可直接求解的。例如，具有旋转椭球面形状的带电导体的问题，可以用一些已知的特殊函数来严格解出。对于一个薄盘的解，可通过用一个无限扁平的椭球来得出。同样，关于一根针的解，则可用一个无限长的椭球而获得。然而必须强调，唯一具有一般适应性的直接方法乃是数值计算技术。

边界值问题也可通过对一个物理类似体的测量而解出。拉普拉斯方程产生于许多不同的物理情况下：稳定热流、无旋液流、在一广延媒质中的电流、以及一张弹性膜的挠曲。这些往往能够建立起一个类似于所要求解的电学问题的物理模型。通过对在该模型上一个适当类似量的观测，有关问题之解就可以确定了。模拟技术的一个例子是用电解槽来解二维的静电学问题。这个办法之所以有效，乃是由于均匀导电媒质中的势之微分方程与在真空中的相同。

有许多物理情况，在一个方向上物理场的变化为零，或者是与另外两个方向上的变化比较，这个变化可以忽略。这样的问题叫做二维的，则场仅取决于两个坐标。由于在一个二维问题中， $\partial/\partial z = 0$ ，在自由空间里关于 ϕ 的方程就是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

既然这个二维方程相对简单，就会有一个广阔的条件范围，它可以得到解析式的解答。事实上，一个强有力间接数学技巧依赖于复变函数的一个数学定理。现在，我们就将予以描述。

§ 7-2 二维场；复变函数

复变数 z 被定义为

$$z = x + iy.$$

(切莫把这里的 z 与 z 坐标混淆，在下面的讨论中我们将不涉及 z 坐标，因为已假定场与 z 没有依存关系了。) 于是在 x 和 y 的每一点就对应于一个复数 z ，可以把 z 写成一单独(复)变数，并用它来写出寻常类型的数学函数 $F(z)$ 。例如，

$$F(z) = z^2,$$

或

$$F(z) = 1/z^2,$$

或

$$F(z) = z \log z,$$

等等。

若给出任一特定函数 $F(z)$ ，便可以代入 $z = x + iy$ ，这就可得到一个 x 和 y 的函数——包括实的和虚的两部分。例如，

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

任一函数 $F(z)$ 都可以写成一纯粹实部与一纯粹虚部之和，而每部分都是 x 和 y 的函数

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

式中 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 都是实函数。于是，从任一个复变函数 $F(z)$ 中总可以导出两个新的函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 来。例如， $F(z) = z^2$ 会给出这么两个函数

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad (7.5)$$

和

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

现在我们来谈一个不可思议的数学定理，那是多么令人喜悦，以致想把它留给你们在数学的一门课程中去作证明。(不应将所有的数学奥妙都透露出来，否则题材就未免太枯燥无味了。) 这个定理是这样：对于任一“寻常复变函数”(数学家将把它定义得更好些)，上述 U 和 V 两函数会自动地满足下列关系：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.8)$$

由此可立即推出，每一个 U 和 V 函数都各满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

这两方程对于式(7.5)和(7.6)那种函数显然是正确的。

这样，从任一个普通的函数出发，我们便能得到两个函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ ，它们都是二维的拉普拉斯方程之解，并各代表一种可能的静电势。我们可以捡起任一函数 $F(z)$ ，它就应当代表某一个电场问题——事实上是两个，因为 U 和 V 每个都可各自代表一个答案。我们可以随心所欲地写出尽可能多的解答——只要编造出各种函数——然后又只要找出与每一解答相符合的问题。这听起来似乎有点本末倒置，但毕竟是一种可能途径。

作为一个例子，让我们看一看函数 $F(z) = z^2$ 会提供什么样的物理内容。从这一函数我们获得了两个势函数(7.5)和(7.6)。要看出函数 U 属于哪一种问题，可令 $U = A$ ，即一常数，而解出一组等势面来：

$$x^2 - y^2 = A.$$

这是一个直角双曲线方程。对各种不同 A 值，我们会得到如图 7-1 所示的那些双曲线。

当 $A=0$ 时，所得到的是通过原点的两条交叉直线的那个特殊情况。

象这样的一组等势面相当于几种可能的物理情况。首先，它代表两个相同点电荷在其中点附近场的详细情况。其次，它代表导体内一个直角角隅处之场。如果我们具备与图 7-2 所示形状相类似的两个各保持不同电势的电极，那么靠近标明为 C 的那个角隅之场看来就会象图 7-1 所示的原点处那种场。图中实线组是等势面，而与之成直角的虚线组则相当于 E 线。在尖端或突出部分处电场总趋于高，而在凹陷处或坑谷里之场则会趋于低。

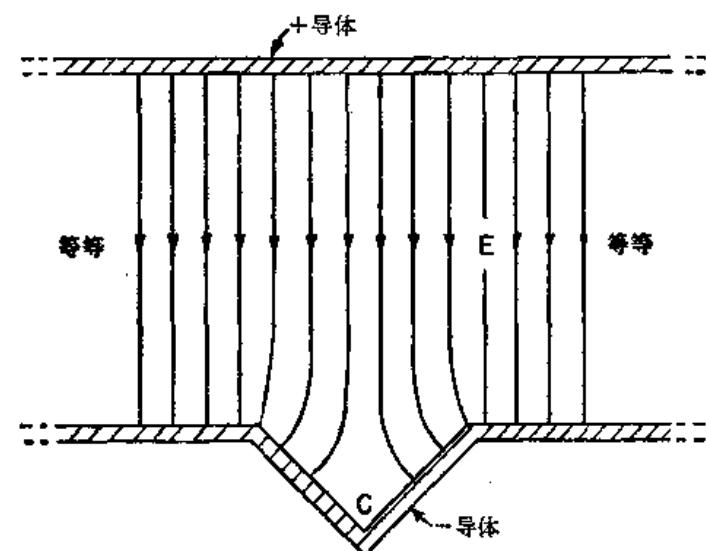


图 7-2 在 C 点附近之场与在图 7-1 所示的相同

我们所已找到之解也相当于一个双曲线形电极放在一个直角角隅附近，或两个各具有适当电势的双曲线形电极之解。你将会注意到，图 7-1 所示之场具有一种有意义的性质。

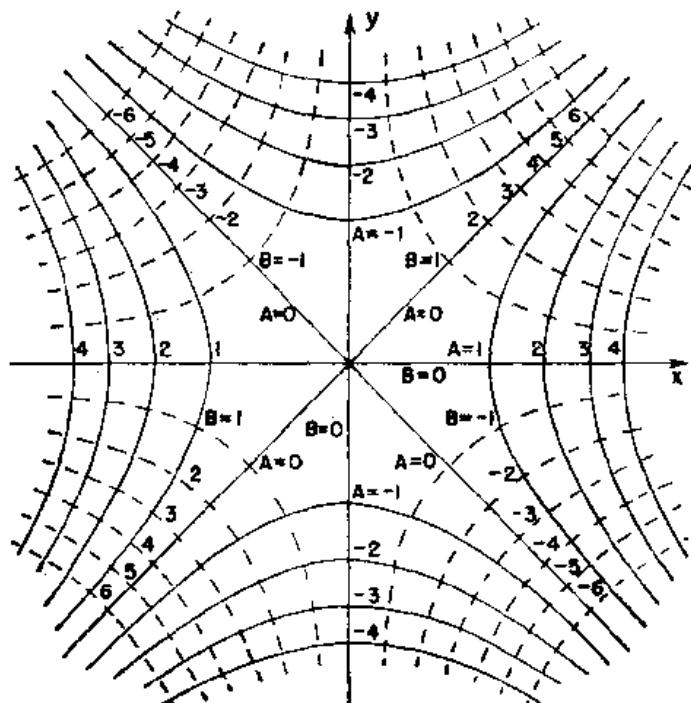


图 7-1 两组正交曲线，它们各可代表一个二维静电场中的等势面

請勿用於
盈利用目的

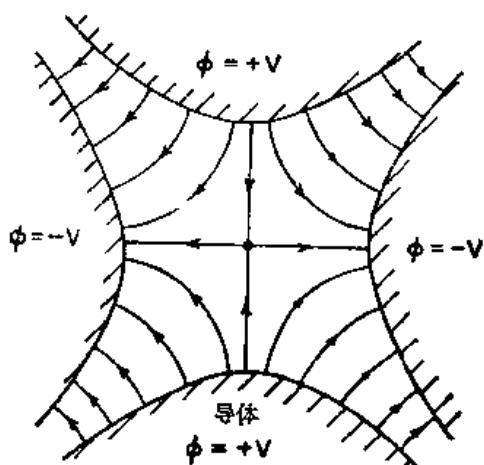


图 7-3 在一个四极透镜中的电场

函数 $F(z)$ 时, 总会从 U 和 V 分别得到等势面和场线。而你将会记住, 我们已解决了两问题中的任一个, 到底是哪一个则取决于哪一组曲线将被称为等势面。

作为第二个例子, 考虑函数

$$F(z) = \sqrt{z} \quad (7.11)$$

若我们写出

其中

而

那么

$$F(z) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

由此可得

$$F(z) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$

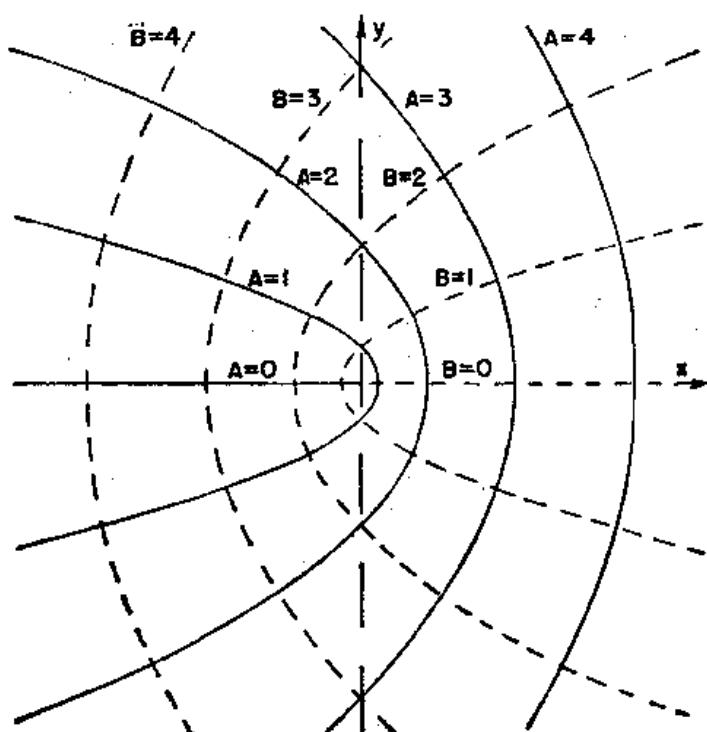


图 7-4 由式(7.12)所得的 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$
各等于常数的两组曲线

电场的 x 分量 E_x 为

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x,$$

即电场与离轴心的距离成正比。利用这一事实, 可造成一种(称为四极透镜的)装置, 这对于使粒子束聚焦很有用(参阅 § 29-7)。所需之场往往通过使用四个如图 7-3 所示的那种双曲线形电极而获得。对于图 7-3 中的电场, 我们只是按照图 7-1 中那一组代表 $V = \text{常数}$ 的虚线抄下来的。我们赢得了红利! 由于式(7.7)和(7.8), 就使得 $V = \text{常数}$ 的那些曲线会与 $U = \text{常数}$ 的那些曲线正交。每当我们选取一个

函数 $F(z)$ 时, 总会从 U 和 V 分别得到等势面和场线。而你将会记住, 我们已解决了两问题中的任一个, 到底是哪一个则取决于哪一组曲线将被称为等势面。

利用来自式(7.12)的 U 和 V , 对于 $U(x, y) = A$ 和 $V(x, y) = B$ 的两组曲线被描画在图 7-4 上。还有许多可能情况也可用这些场来描述。其中最有趣的一种是靠近一张薄板边缘之场。如果让 $B = 0$ 之线——在 y 轴右侧的那条线——代表

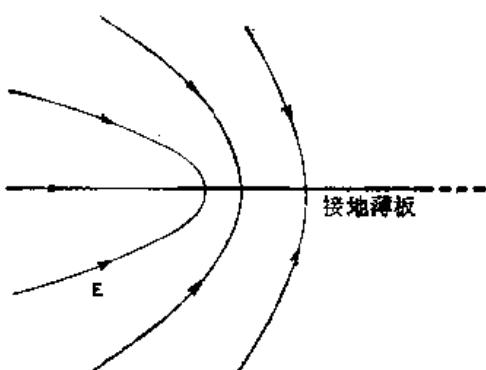


图 7-5 在一块接地薄板的
边缘附近之场

一块带电薄板，那么在它附近的场线就是由 A 等于各种不同值的一组曲线给出的。物理情况如图 7-5 所示。

其他的例子还有：

$$F(z) = z^{3/2}, \quad (7.13)$$

这会给出一个直角角隅外面之场；

$$F(z) = \log z, \quad (7.14)$$

给出一根线电荷之场；而

$$F(z) = 1/z, \quad (7.15)$$

则会给出电偶极子的二维类似物之场，也就是两条互相靠近而带有异号电荷的平行线之场。

本课程中对上述课题将不再追寻下去。但仍必须强调，尽管这些复变函数技巧经常表现得强而有力，但始终局限于二维问题，而且还是一种间接方法。

§ 7-3 等离子体振荡

现在我们将考虑的电场，既不是由固定电荷也不是由导体表面上的电荷所确定，而是由两种物理现象的组合所确定的某些物理情况。换句话说，场将同时由两组方程支配着：(1) 来自静电学方面的方程组，把电场与电荷的分布联系起来；以及(2)，来自物理学另一分支的一个方程，确定了在场存在时电荷的位置或运动。

我们将要考慮的第一种情况，是其电荷运动仍由牛顿定律所支配的动力型例子。这种情况的一个简单范例发生在等离子体中，这是一种分布于某一空间区域里的含有离子和自由电子的电离气体。电离层——大气的较高一层——就是这种等离子体的一个例子。来自太阳的紫外线把空气分子内的一些电子撞击出来，从而产生了电子和离子。在这样的等离子体中，正离子比电子重得多，因而同电子的运动比较，就可以略去离子的运动。

令 n_0 为在不受干扰的平衡状态下电子的密度。这必须也是正离子的密度，因为等离子体(在不受干扰时)是电中性的。现在假定不知什么缘故电子离开了平衡状态而运动，试问将会发生什么情况？如果在一个区域里，电子的密度增大，它们便将互相排斥而趋向于返回其平衡位置。当电子朝着原来位置运动时，将会获得动能，但不会在其平衡位置上就停顿下来，而总是对目标走过了头。它们将来回振动。这种情况与在声波中发生的情况相似，那里的恢复力是气体压强。在等离子体中，恢复力则是作用于电子上的电力。

为了使讨论简单化，我们只是关心一维(比如在 x 轴)运动。让我们假定原来位于 x 处的诸电子，在 t 时刻从它们的平衡位置上移开了一小段距离 $s(x, t)$ 。既然电子已经移了位，它们的密度一般就将改变。密度的改变是容易算出的。参照图 7-6，原来包含在 a 与 b 两平面间的电子，已经移动，现在则包含在 a' 与 b' 两个平面之间了。过去位于 a 与 b 间的电子数目正比于 $n_0 \Delta x$ ；这同一数目现在则位于其宽度为 $\Delta x + \Delta s$ 的空间中。密度已经变成

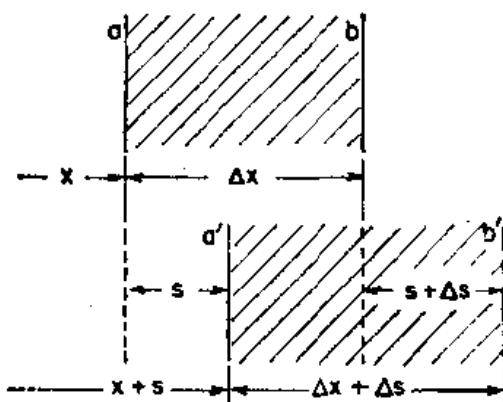


图 7-6 等离子体中波的运动。在 a 平面处的电子移动至 a' ，而在 b 处的电子则移动至 b'

請勿用於盈利之目的

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \quad (7.16)$$

如果密度的变化很小，便可以写成[利用对 $(1+\epsilon)^{-1}$ 的二项展开式]

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}\right). \quad (7.17)$$

假定正离子不发生显著移动(由于其大得多的惯性)，因而它们的密度仍保持为 n_0 。每一电子所带的电荷为 $-q_e$ ，因而在任一点上的平均电荷密度就由下式给出：

$$\rho = -(n - n_0) q_e,$$

或

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx}. \quad (7.18)$$

(式中，我们已用微分形式代替了 $\Delta s / \Delta x$ 。)

电荷密度与电场的关系是通过麦克斯韦方程组，特别是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.19)$$

这个方程确定下来的。如果问题是属于一维的(并且倘若除来自电子位移之场外别无其他场)，那么电场 E 便只有一个分量 E_x 。式(7.19)连同(7.18)会给出

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7.20)$$

对此式积分之后可得到

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \quad (7.21)$$

既然当 $s=0$ 时， $E_x=0$ ，积分常数 K 就是零了。

施于已移了位的电子上之力为

$$F_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s, \quad (7.22)$$

这是一个正比于电子位移 s 的恢复力。它将会导致电子作谐振动。一个移了位的电子其运动方程为

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.23)$$

我们找出 s 将作谐变化。 s 的时间变化将按照 $\cos \omega_p t$ ，或——应用第一卷的指数函数记法——按照

$$e^{i\omega_p t}. \quad (7.24)$$

这振动频率 ω_p 要由方程(7.23)确定，即

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad (7.25)$$

ω_p 称为等离子体频率。它是等离子体的一个特征数值。

在同电子打交道时，许多人喜欢用一个被定义为

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2.3068 \times 10^{-28} \text{ 牛顿}\cdot\text{米}^2 \quad (7.26)$$

的量 e^2 来表达答案。

如果按照这一惯律，式(7.25)便变成

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}, \quad (7.27)$$

这是你们在多数书本中会见到的一种形式。

这样，我们就已找到了等离子体的扰动，将建立一种电子在其平衡位置附近以固有频率 ω_p 而作的自由振荡。这固有频率与电子密度的平方根成正比。等离子体中电子群的行动很象一个比如在第一卷第二十三章中所描述过的那种共振系统。

等离子体的这种固有共振会导致一些有意义的效应。例如，如果有人试图把无线电波通过电离层而传播出去，他就会发现只有在其频率高于这个等离子体频率时才能穿透，否则信号将被反射回来。若我们希望同一颗空间卫星通信，就必须采用高频率。反之，若想同地平线外的一个无线电台通信，则必须利用比等离子体频率为低的频率，以便信号能够通过反射而折回地面。

等离子体振荡的另一个有趣例子发生于金属中。金属里有由正离子与自由电子构成的被包围住的等离子体。这里密度 n_0 十分高，因而 ω_p 也是这样。但仍应能观察到其中电子的振动。原来，按照量子力学，凡具有固有频率为 ω_p 的谐振子，总会有被能增量 $\hbar\omega_p$ 分开的一些能级。因此，如果把一束电子射进比如一张铝箔，而在箔的另一面十分仔细地对电子能量进行测量，那么或许就可指望找到有时电子会将能量 $\hbar\omega_p$ 丢给那等离子体振荡。这件事情的确会发生。1936年最初从实验上观测到：拥有几百至几千电子伏能量的电子从一薄金属膜散射或穿透出来时，会以跳跃的姿态损失能量。这一效应从未得到解释，直到1953年玻姆(Bohm)和派因斯(Pines)*才证明这些观测结果可用金属中等离子体振动的量子激发来作解释。

§ 7-4 电解质内的胶态粒子

现在，我们转到各电荷位置部分地受这些电荷本身产生之势所控制着的另一种现象。这样产生的效应对胶体的行为有着重要影响。胶体溶液含有许多带电小悬溶物，这些小带电体尽管还是微观的，但从原子的观点看却已十分巨大。要是这些粒子不带电，它们将有凝聚成一大块的倾向。但由于带电，就将互相排斥，并保持在悬溶态上。

现在，如果有某一盐类也溶解于水中，则它将分解成正负离子。(象这样的离子溶液称为电解质。)那些负离子会被胶质微粒所吸引(假定微粒带的是正电)，而正离子则被推开。我们要确定围绕着胶质粒子的那些离子在空间是怎样分布的。

为保持概念简单，我们还是仅仅求解一维情况。如果把胶质粒子看成一个具有十分巨大的半径的球——在原子尺度上！——那么，便可以把它的一小部分看成平面。(每当试图理解一新现象时，取一个稍微过于简化的模型总是一个好主意。然后，在弄通了这个模型的问题之后，才能更好地进行较准确的计算。)

假定那些离子的分布会产生一个电荷密度 $\rho(x)$ 和一个电势 ϕ ，这两者的关系遵守静电力学定律 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ ，或者，对于仅在一维中变化着的场，则遵守

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.28)$$

现在假定已有这么一个势 $\phi(x)$ ，那么离子将怎样把它们本身分布在其中呢？这可以通

* 关于这方面的新近工作和文献摘要可参考 C. J. Powell and J. B. Swann, Phys. Rev. 115, 369(1959)。

过统计力学的原理来确定。这么一来，我们的问题就是要确定 ϕ ，使得从统计力学方面所获得的电荷密度也能满足式(7.28)。

按照统计力学(参阅第一卷第四十章)，在一个力场中建立了热平衡的粒子是这样分布的，即在 x 位置上的粒子密度 n 由下式给出

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \quad (7.29)$$

式中 $U(x)$ 为势能， k 为玻耳兹曼常数，而 T 为绝对温度。

假定每一离子带有一正的或负的电子电荷。在离胶质粒子的表面为 x 的地方，一个正离子将有势能 $q_e\phi(x)$ ，因而

$$U(x) = q_e\phi(x).$$

这样，在该处的正离子密度就是

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_e\phi(x)/kT}.$$

同理，负离子密度则为

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_e\phi(x)/kT}.$$

总的电荷密度为

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_-,$$

即

$$\rho = q_e n_0 (e^{-q_e\phi/kT} - e^{+q_e\phi/kT}). \quad (7.30)$$

把上式与式(7.28)相结合，我们便发现势 ϕ 应满足

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q_e n_0}{\epsilon_0} (e^{-q_e\phi/kT} - e^{+q_e\phi/kT}). \quad (7.31)$$

这一微分方程可立即得到一个通解[两边各乘以 $2(d\phi/dx)$ ，并对 x 积分]，但为了尽可能保持问题简单，我们在这里将仅考虑电势 ϕ 很小或温度 T 很高的那种极限情况。 ϕ 小的情况下

相当于稀溶液。在这种情况下，该指数很小，因而可作如下近似：

$$e^{\pm q_e\phi/kT} = 1 \pm \frac{q_e\phi}{kT}. \quad (7.32)$$

于是，式(7.31)给出

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = +\frac{2n_0 q_e^2}{\epsilon_0 k T} \phi(x). \quad (7.33)$$

注意！这时式右边的符号已经是正的了。 ϕ 的解就不再是振动式的，而是指数式的。

方程(7.33)的通解为

$$\phi = A e^{-x/D} + B e^{+x/D}, \quad (7.34)$$

式中

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 k T}{2n_0 q_e^2}. \quad (7.35)$$

A 和 B 两常数必须由问题的条件确定。

在上述情况下， B 应为零，否则对于大的 x 值电势将趋于无限大。因此，我们有

$$\phi = A e^{-x/D}, \quad (7.36)$$

式中 A 是在 $x=0$ 处，也即在胶质粒子表面处的电势。

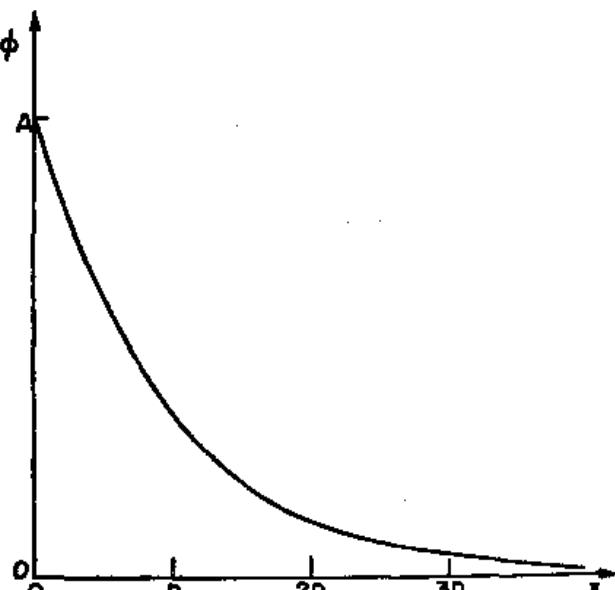


图 7-7 在一胶质粒子表面附近电势的变化情形。 D 为德拜长度

每当距离增大 D 时, 势就降低一个因数 $1/e$, 如图 7-7 的曲线所示. 数值 D 称为德拜长度, 是对在电解质中包围一个巨大带电粒子的离子鞘套厚度的一种量度. 式(7.36)申述, 当离子浓度 n_0 增加或当温度降低时, 这鞘套就将变薄.

如果已知胶质粒子的表面电荷密度 σ , 那么式(7.36)中的常数 A 就可以容易获得. 我们知道

$$E_s = E_s(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.37)$$

但 E 也是 ϕ 的陡度

$$E_s(0) = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_0 = +\frac{A}{D}, \quad (7.38)$$

由此得出

$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.39)$$

把这一结果应用于式(7.36)中, 便得到(通过取 $x=0$)该胶质粒子的电势为

$$\phi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.40)$$

你会注意到, 这一个势同带有面电荷密度 σ 而两极板间相距为 D 的电容器中的电势差相同.

我们已经讲过, 胶质粒子受它们之间电方面的排斥力的作用而得以保持分离. 但现在我们见到, 稍为离开胶质粒子表面之场会由于聚集在它周围的离子鞘套而被削弱. 如果这些鞘套变得薄些, 粒子便有较大机会去互相撞击. 于是它们将彼此粘住, 而胶质便将凝聚在一起并从液体中沉淀出来. 从我们的分析中理解到, 为何对一胶质溶液加进足够的盐类就会引起沉淀. 这一过程称为“加盐萃取胶质”.

另一个有趣例子则是盐溶液对于蛋白质分子的影响. 一个蛋白质分子乃一条复杂的既长而又可挠曲的氨基酸的链. 在这一个分子里面存在各种电荷, 而有时碰巧有一些净电荷——比如说负电荷——会沿该链条分布着. 由于各负电荷的相互排斥, 这个蛋白质链便会保持伸直姿态. 并且, 若溶液中还有其他相似的链存在, 则由于同一排斥效应, 它们将保持彼此分开. 因此, 在一液体中可以有链式分子的悬溶体. 但如果我们将盐加于该溶液中, 则会改变悬溶液的特性. 当盐加进溶液中时, 德拜长度会缩短, 链式分子能够互相靠近, 并卷缩起来. 如果加进溶液中的盐足够多, 链式分子便可以从溶液中沉淀出来. 有许多属于这一类的化学效应可以用电力来加以理解.

§ 7-5 楼极的静电场

作为最后一个例子, 我们要来描述电场的另一个有趣特性. 这是应用于电学仪器设计、真空管构造、以及其他许多目的的一种特性. 也就是由带电导线构成的格子附近的电场特性. 为了使问题尽可能简单, 让我们考虑一个由无限长导线间隔均匀地在一平面上平行排列着的线阵.

若我们从在导线栅面的顶上远处俯视电场, 便将见到一个恒定场, 正如电荷被均匀分布于面上一样. 当接近导线格子时, 场开始呈现出与从远处见到的均匀场有所不同. 我们想要来估计到底要靠得多近才能见到明显的势的变化. 图 7-8 展现出在与格子不同距离上的

等势面的粗略草图。越接近格子，变化就越大。当我们平行于格子运动时，会观察到一种周期性起伏之场。

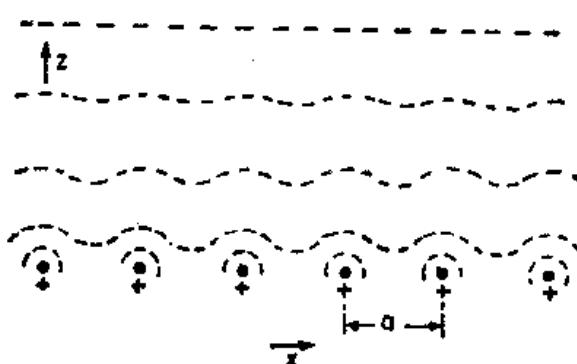


图 7-8 在一个由带电导线构成的均匀格子上面的一些等势面

(化。)一个通解该包括 $n=1, 2, 3 \dots$ 这样一些项之和。

如果这是一个正确之势，则它应在导线上面的空间(那里没有电荷)中满足拉普拉斯方程。即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

用式(7.41)中的 ϕ 对上式进行尝试，我们得出

$$\frac{-4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi n x}{a} = 0, \quad (7.42)$$

或者说， $F_n(z)$ 应当满足

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n. \quad (7.43)$$

因此，我们就必须有

$$F_n = A_n e^{-z/z_0}, \quad (7.44)$$

式中

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n}. \quad (7.45)$$

我们已找出了：如果有一个属于 n 次谐和场的傅里叶组元，则这一组元将按照那特征距离 $z_0 = a/2\pi n$ 指数式地下降。对于第一谐波($n=1$)来说，每当我们增大 z 一个格子间隔 a 时，波幅将下降一个因数 $e^{-2\pi}$ (是一个大的降落)。其他的谐波在我们离开格子时将下降得更快。我们看到，如果仅仅离开格子几个 a 的距离，场就会十分接近于恒定不变。也就是说，那些起落项将会十分小。当然，为了给出在大 z 上的那个均匀场，始终就该存在一个“零级谐”场

$$\phi_0 = -E_0 z.$$

对于通解来说，我们应当把这一项与由式(7.44)得到了 F_n 的诸如式(7.41)那些项之和结合起来。系数 A_n 应当这样调整，使得整个总和在经过了微分之后，会给出配合到格子导线上的电荷密度 λ 的那种电场。

我们刚才所发展的方法可以用来解释，为什么采用一个栅屏作为静电屏蔽物往往与用一块坚实金属板同样优良。除非在与屏相距仅几倍于屏导线间距的距离以内，在一闭合屏内的电场总是等于零的。我们见到，为什么一个铜线屏——比起铜片来又轻又便宜——常被用来为灵敏的电学设备屏蔽掉那些出现在围屏外面的干扰电场。

前面我们已(从第一卷第五十章中)了解到任何一种周期性量都可以表达为一些正弦波之和(傅里叶定理)。让我们就来看看能否找到一种满足场方程式的适当谐和函数。

如果导线都处在 xy 平面上，并且平行于 y 轴排列着，我们或许想要试试下列这样的项

$$\phi(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a}, \quad (7.41)$$

其中 a 为导线间距，而 n 为谐和数。(我们已假定各导线都很长，从而就不应跟着 y 变化。)一个通解该包括 $n=1, 2, 3 \dots$ 这样一些项之和。

8

静电能

§ 8-1 电荷的静电能; 均匀带电球

在关于力学的研究中, 最有意义而又最有用的要数能量守恒定律的发现。有了力学系统的动能和势能表达式, 我们就无需去考察两态间事态发生的细节情况, 而能找出在不同时刻出现的两态间的关系来。现在我们要来考虑静电系统的能量。在电学中, 能量守恒原理也将为发现一系列有意义的东西发挥它的作用。

在静电学中, 关于相互作用的能量定律十分简单。实际上, 这个问题我们已经讨论过。假设两个电荷 q_1 和 q_2 , 相距为 r_{12} 。在这一系统中, 就存在有一定能量, 因为要把两电荷移到一起总必须作出某一定量的功。我们已计算过将远距的两电荷移到一起来所作的功, 那就是

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (8.1)$$

从迭加原理我们也知道, 如果存在许多个电荷, 作用于任一电荷上之总力, 则应等于其他各电荷作用于其上之力的总和。因此, 这就可以断定: 由若干个电荷构成的系统的总能量, 等于来自每一对电荷间的相互作用的各项之和。若 q_i 和 q_j 是任一对相距为 r_{ij} 的电荷(图 8-1), 则这一特定电荷对的能量为:

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.2)$$

总静电能 U 等于一切可能的电荷对之间的能量的总和:

$$U = \sum_{\text{所有的对}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.3)$$

如果有一个密度为 ρ 的电荷分布, 上式(8.3)这个和就必然要用一个积分来代替。

我们所关注的是有关能量的两方面: 一是把能量概念应用于静电学问题; 二是运用各种不同的方法, 计算能量。对某些特殊情况, 有时算出所作之功比起按式(8.3)求和或计算相应的积分要来得容易。作为一个例子, 让我们来计算把电荷集中到一个球体中, 并要具有均匀的电荷密度时所需之能量。这一能量恰等于把那些电荷从无限远处聚拢起来所作之功。

设想该球体是由一连串无限薄的球壳所构成, 在这个过程的每一阶段, 我们把一小量电荷置于从 r 至 $r+dr$ 的薄层中。继续这一过程, 一直达到最后的半径 a 为止(图 8-2)。设 Q_r 为已建立至半径为 r 的球体上的电荷, 那么要把电荷 dQ 移到这个球体上面所作之功就是

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.4)$$

若球体中的电荷密度为 ρ , 则这电荷 Q_r 便是

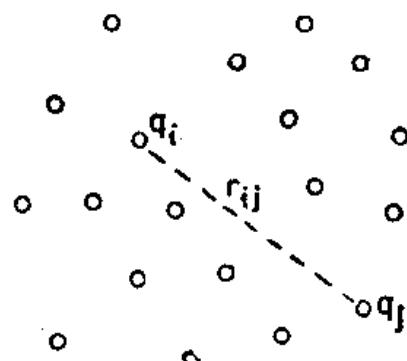


图 8-1 一个粒子系统的静电能等于每对粒子之静电能的总和

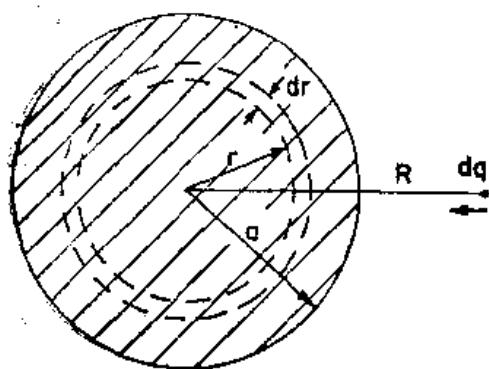


图 8-2 一个均匀带电球体的能量。可将它设想为由逐层衔接的球壳构成的而计算出来

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3,$$

而电荷 dQ 则是

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

因此, 式(8.4)变成:

$$dU = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

要把电荷聚集到整个球体, 所需的总能量则等于从 $r=0$ 至 $r=a$ 对 dU 的积分, 即

$$U = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

若希望把结果用球体的总电荷 Q 来表示, 则为:

$$U = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.7)$$

可见, 能量与总电荷的平方成正比而与球的半径成反比。我们也可以将式(8.7)理解为: 在球体里的所有各对点上, $(1/r_{ij})$ 这个量的平均值为 $3/(5a)$ 。

§ 8-2 电容器的能量; 施于带电导体上之力

现在我们来考虑电容器充电时所需的能量。如果电荷 Q 已从电容器的一个导体移至另一导体, 则它们之间的势差为:

$$V = \frac{Q}{C}, \quad (8.8)$$

式中 C 为该电容器的电容。电容器充电时须作多少功呢? 按照上面对球体的做法, 我们设想电容器是逐步把小增量 dQ 从它的一板移至另一板而进行充电的。转移电荷 dQ 必须作之功为:

$$dU = V dQ.$$

将式(8.8)中的 V 代入, 便可以写成:

$$dU = \frac{Q dQ}{C}.$$

或者, 取由零电荷达到最后电荷量 Q 的积分, 便有:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (8.9)$$

这一能量也可写成:

$$U = \frac{1}{2} C V^2. \quad (8.10)$$

若记起一个导电球体(相对于无限远处)的电容为

$$C_{\text{球体}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

则可立即由式(8.9)得出一个带电球的能量:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.11)$$

这当然也是一个带有总电荷 Q 的薄球壳的能量, 而且恰好就是式(8.7)所给出的一个均匀带电球体的能量之 $5/6$ 。

现在, 我们来讨论静电能量这一概念的应用。试考虑下述问题: 施于电容器两板间之力如何? 或者, 作用于一带电导体相对于另一带异号电荷的导体绕轴转动时的转矩有多大? 象这一类问题, 应用上述电容器的静电能式(8.9), 再加上虚功原理(第一卷第四、十三和十四章), 就容易得到解答。

让我们运用这一方法来求作用于平行板电容器两板间之力吧。若我们设想将两板的间距增大一小量 Δz , 那么外界对于移动这两板所作之功就应该是

$$\Delta W = F \Delta z, \quad (8.12)$$

式中 F 为两板间之力。这功必须等于电容器的静电能量的变化。

根据式(8.9), 原来电容器的能量为:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

这能量的变化(如果不让电荷量变化的话)为:

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.13)$$

令(8.12)和(8.13)两式相等, 便有

$$F \Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.14)$$

这也可以写成:

$$F \Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.15)$$

这个力, 当然来自两极板上的电荷之间的吸引力。但我们知道, 并不须担心电荷如何分布的具体细节, 我们所需要的一切都由电容 C 照应到了。

显而易见, 这一概念可以推广到任何形状的电容器, 以及关于力的其他分量。在式(8.14)中, 我们可用所要寻求的那个力分量来代替 F , 并用在其相对应方向上的小位移来代替 Δz 。或者, 若有一个配有支枢的电极, 而希望知道该转矩 τ , 则可将所作虚功写成:

$$\Delta W = \tau \Delta \theta,$$

式中 $\Delta \theta$ 是一个小角位移。当然, $\Delta(1/C)$ 必须是与 $\Delta \theta$ 相对应的 $1/C$ 的变化。按照这一办法, 我们该能够找出如图 8-3 所示的那种可变电容器中施于可动片上的转矩。

再回到平行板电容器的特殊情况上来, 我们可引用第六章中已导出过的有关电容的公式:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A}, \quad (8.16)$$

式中 A 是每块板的面积。如果两板间距增大 Δz , 则

$$\Delta \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}.$$

由式(8.14)可以得到作用于两板间之力为:

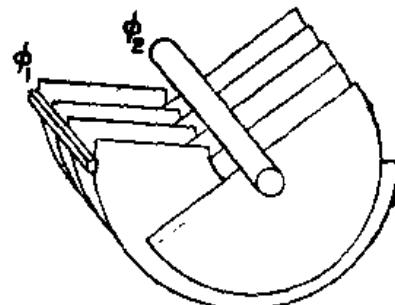


图 8-3 作用于一可变电容器
上的转矩有多大?

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}. \quad (8.17)$$

让我们对式(8.17)更仔细地考察一下，并看看能否说出力是怎样来的。若把其中一板上的电荷写成

$$Q = \sigma A,$$

式(8.17)便可以重新写成

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

或者，既然在两板间的电场为

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

则

$$F = \frac{1}{2} QE_0. \quad (8.18)$$

人们该会立即估计到，作用于板上之力，应等于该板上的电荷 Q 乘以作用于这一电荷上之场。但我们却有一个令人惊奇的因数 $\frac{1}{2}$ 。原因是， E_0 并非作用于电荷上之场。如果设想在板面上的电荷会占据一个薄层，如图 8-4 所示的那样，则场将从这一层的内边界上的零值变化至在板外空间里的 E_0 值。作用于面电荷上的平均场乃是 $E_0/2$ 。这就是式(8.18)

中为什么出现因数 $\frac{1}{2}$ 的原因。

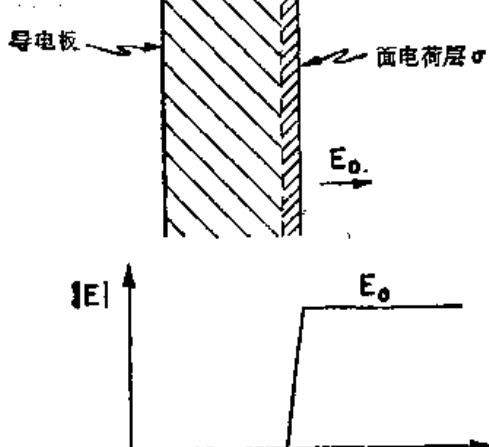


图 8-4 导体表面上的电场。当穿过该表面的电荷层时，会由零变至 $E_0 = \sigma/\epsilon_0$

你应当注意到，在计算虚功时，我们曾假定在电容器上的电荷保持不变——也就是，在电的方面电容器不与其他东西连接，从而总电荷就不会改变。

要是设想当电容器作虚位移时，其电势差保持不变，那么就应当取

$$U = \frac{1}{2} CV^2,$$

而且代替式(8.15)的是

$$F \Delta z = \frac{1}{2} V^2 \Delta C.$$

这会给出一个大小等于式(8.15)的力（因为 $V = Q/C$ ），但却带有一个相反的符号！当我们把电容器和充电源切断时，作用于两板间的那个力肯定不会改变符号的。并且，我们还知道，带有异号电荷的两板一定会互相吸引的。在这第二种情况下，虚功原理已被误用——我们还未把充电时对电源所作的虚功计算在内。这就是说，当电容变化时，要保持电势始终在 V 上不变，电荷 $V \Delta C$ 就必然要由电荷源来提供。但这一电荷是在势 V 上提供的，因而保证电势不变的那个电源系统所作之功就是 $V^2 \Delta C$ 。机械功 $F \Delta z$ 加上这一电功 $V^2 \Delta C$ ，才共同构成该电容器总能量的变化 $\frac{1}{2} V^2 \Delta C$ 。因此，如同上面一样， $F \Delta z$ 仍然是 $-\frac{1}{2} V^2 \Delta C$ 。

§ 8-3 离子晶体的静电能

现在，我们来考虑静电能概念在原子物理中的一种应用。作用于原子间之力，一般不易

测量，但人们对两种原子间不同排列的能量差——比如说，化学反应的能量——却经常感兴趣。既然原子力基本上是电力，化学能则大体上都不过是静电能。

例如，让我们考虑一离子点阵的静电能。象 NaCl 那种离子晶体，它所含有的正离子和负离子都可以设想成球体。它们彼此之间开始由于电力方面的作用而吸引，直至互相接触；然后，出现一种排斥力。这时，若是试图将它们推挤得更加紧密些，这种排斥力就会显著增大。

因此，我们在第一次近似时，设想用一组刚性球体来代表食盐晶体里的各原子。其点阵结构，曾用 X 射线衍射测定过。那是一个立方点阵——就象一个三维的跳棋盘似的。图 8-5 所示为其一个截面图象。离子间的间隔为 2.81 埃 ($= 2.81 \times 10^{-8}$ 厘米)。

这一系统的图象如是正确的，那我们就可以通过提出如下问题而加以核对：要把这些离子完全拉开——也就是，把晶体完全分开成各离子——究竟需要多少能量呢？这一能量应等于 NaCl 的汽化热加上使分子分解成离子所需的能量。这个会把 NaCl 分解成离子的总能量，通过实验已经测得为每分子 7.92 电子伏。应用换算率：

$$1 \text{ 电子伏} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ 焦耳},$$

以及代表一克分子中的分子数的阿伏伽德罗 (Avogadro) 数

$$N_0 = 6.02 \times 10^{23},$$

得出的汽化能即为如下值：

$$W = 7.64 \times 10^5 \text{ 焦耳/克分子}.$$

物理化学家喜欢用千卡作为能量单位，每千卡等于 4190 焦耳，所以每一分子 1 电子伏就是每克分子 23 千卡。于是，化学家便会说出 NaCl 的离解能为

$$W = 183 \text{ 千卡/克分子}.$$

我们能否通过算出将晶体撕开所需的功，从而在理论上得到这个化学能呢？按照我们的理论，这个功就是所有离子对的势能和。计算这个和的最容易办法，是先拣出一个特定离子，再算出它与其他的每个离子之间的势能。这将给出两倍于每一离子的能量，因为这能量是属于那些电荷对的。而我们所要的乃是属于某一特定离子的能量，所以应取这个和的一半。但我们真正要的却是每一分子的能量，而每一分子含有两个离子，因而这样算出来的和就将直接给出每一分子的能量。

两个彼此最靠近的离子的能量为 e^2/a ，其中 $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$ ，而 a 为两贴近离子的中心间的间隔。（这里，所考虑的是单价离子。）这一能量为 5.12 电子伏。我们已看出，这里提供了一个具有正确数量级的结果，但距我们所需的无限多个项之和，还有一段很长的距离。

首先，我们对那些在直线上的离子的各项求和。如图 8-5 中标明为 Na 的那个离子是我们考虑的特定离子。现在将首先注意与之排成水平直线的那些离子，即有两个 Cl 离子靠得最近，各带一负电荷，其距离均为 a ；随后有两个在 $2a$ 距离上的正离子；依此类推。把这个

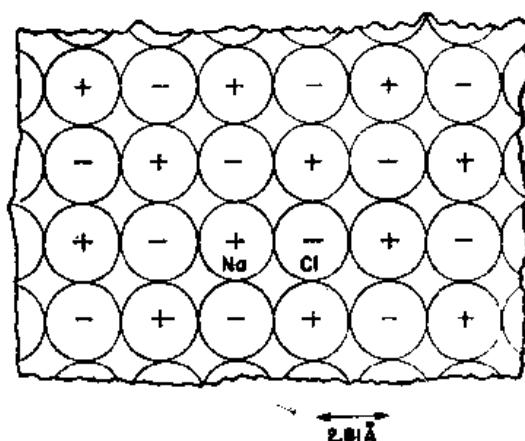


图 8-5 在原子尺度上的食盐晶体的截面。Na 和 Cl 两种离子跳棋盘式的排列着，与此垂直的两个横截面上情况也一样（参考第一卷，图 1-7）

和的能量叫做 U_1 , 就可以写出:

$$U_1 = \frac{e^2}{a} \left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \dots \right) = -\frac{2e^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right). \quad (8.19)$$

这一级数收敛得很慢, 因而不容易用数字算出, 可是已经知道它正好等于 $\ln 2$. 因此,

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1.386 \frac{e^2}{a}. \quad (8.20)$$

现在再来考虑位于上面的那条次近邻离子线, 最靠近的一个是负离子, 距离为 a ; 随后又有两个正离子在 $\sqrt{2}a$ 距离上; 下一对在距离 $\sqrt{5}a$ 上, 再下一对则是在 $\sqrt{10}a$ 上; 依此类推. 所以, 对于这一整条线便可得到一个级数:

$$\frac{e^2}{a} \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \dots \right). \quad (8.21)$$

这样的线总共有四条: 在上面、下面、前面和后面. 然后, 又有四条在对角线上的最靠近的线, 如此等等.

如果你耐心地算出所有这些线的值, 然后取其和, 则将获得一个总和:

$$U = 1.747 \frac{e^2}{a},$$

这比起上面对第一条线所得的结果(8.20)仅稍为大一点. 利用 $e^2/a=5.12$ 电子伏, 我们得到:

$$U = 8.94 \text{ 电子伏}.$$

这答案比起实验上的观察值要高 10%. 这表明关于整个点阵是由库仑电力维持在一起的那种观点基本上是正确的. 这是我们第一次从原子物理的知识中获得有关宏观物质的一种特殊性质. 往后还要处理更多的问题. 试图用原子行为的定律来了解大块物质行为的那一门学科叫做固态物理学.

计算上的误差怎么会出现的呢? 为什么得不到完全正确的结果? 那是由于离子在近距离上的排斥力. 它们并非完美的刚性球, 因而当互相靠近时, 将部分地被挤压. 它们也并非很柔软, 因而仅被挤压了一点点. 可是, 有些能量就是这样用于使离子变形, 而当离子被拉开时, 这能量又将被释放出来. 实际上, 须用以拉开离子的能量比起我们上面所算出的要稍为少一点. 这种排斥力有助于克服那静电的吸引力.

有没有办法对这一项贡献作出估计呢? 假如我们知道有关排斥力方面的定律, 这本来是可能的. 但目前我们还未作好准备来对这一排斥机制的细节进行分析, 那就只能从某些宏观规模的测量结果方面获得有关它的特性的某种概念. 对整块晶体的压缩率的测量结果, 就有可能得到有关离子间互斥力定律的定量概念, 从而获得它对能量方面的贡献. 就这样, 已经找出了这项贡献应等于来自静电吸引力的贡献的 $1/9.4$, 当然符号是相反的. 如果从纯粹的静电能量减掉这一贡献, 便可得出每一分子的离解能为 7.99 电子伏. 这比 7.92 电子伏的那一观测结果已较为接近了, 但仍未完全相符. 还有另一件我们没有算进去的东西, 那就是对于晶体振动的动能还未作出估计. 若对这一效应也作出修正, 就可获得与实验值符合得很好的结果. 因此, 上述这些概念全都正确, NaCl 这样一类晶体的能量的主要贡献乃来自静电方面的.

§ 8-4 核内的静电能

现在我们将考虑原子物理中另一个有关静电能的例子，也就是原子核中的电能。但在此之前，还得对核中把质子与中子维持在一起的主要力（叫核力）的某些特性加以讨论。在发现核——以及构成核的中子和质子——的初期，人们曾希望，对于比如质子与质子间的非电部分的强作用力，应该有某一简单定律，如同电方面的反平方定律那样。因为一旦人们确定了这一力学定律，以及相应的有关质子与中子间、中子与中子间的力学定律，对这些粒子在核中的整个行为也就应该能在理论上给予描述了。因此，对于质子散射研究的宏大计划就随之而制定，希望借此获得质子之间作用着的力学定律。但经过了三十年的努力，还没有任何简单的结果出现过。有关质子与质子间作用着的力的知识已经积累了不少，但却发现，这种力可能有多么复杂就有多么复杂。

所谓“可能有多么复杂就有多么复杂”，我们指的是该力取决于应有尽有的许多东西。

首先，核力并非两质子间距离的简单函数。在大距离上它是吸引力，而在较小距离上则是排斥力。这种与距离的依存关系，仍然是一个未能完全确知的复杂函数。

其次，核力依赖于质子自旋的指向。凡是质子都有自旋，而任两个相互作用着的质子都可能以同向或反向的角动量而自旋。当两自旋互成平行与当其反平行时，如图 8-6(a) 和 (b) 所示的那两种情况，两者的作用力是不同的。这差别很大，并不是一个微小效应。

第三，当两质子间的距离平行于它们的自旋方向，如图 8-6(c) 和 (d) 时，与当距离垂直于自旋方向，如图中的 (a) 和 (b) 时，力的差别也相当大。

第四，如同磁现象一样，核力依赖于质子的速度，只是这依存关系比起磁方面的情况更强大罢了。而且，这一依赖于速度之力并不是一种相对论效应。即使在速率远小于光速时，它仍然相当强。此外，这一部分力还有赖于除了速度大小以外的其他东西。例如，当一质子靠近另一质子运动，在其轨道运动与自旋的转动同向，如图 8-6(e) 所示的作用力，与在其轨道与自旋反向，如图 (f) 所示的作用力，就不相同。这叫做核力的“自旋-轨道”部分。

在质子与中子间、中子与中子间作用之力也同样复杂。迄今为止，我们还未曾懂得这些力后面的机制——也就是任何理解它们的简单途径。

可是，在一个重要方面，核力比其可能有的性质却较为简单。这就是，介乎两中子间的核力与介乎质子与中子间的核力彼此相同，而这又无异于介乎两质子之间的！如果在任一种核作用的情况下，我们用一个中子去代替质子（或者相反），核的互作用将不会改变。这个彼此相等的“基本原因”还不清楚，但它是一个也可以推广到其他强相互作用粒子——诸如 π 介子及“奇异”粒子——去的重要原理的例子。

这一事实，可在类似的核中各能级的位置上漂亮地显示出来。考虑一个象 B^{11} (图 11)

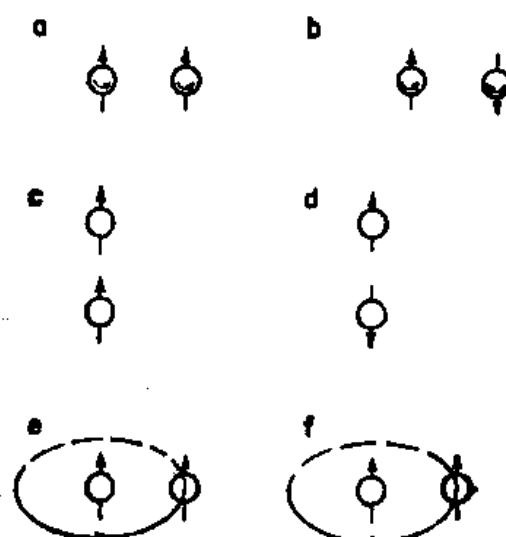


图 8-6 作用于两质子间之力
取决于每一可能参数

的核，它是由五个质子和六个中子构成的。在这个核中这十一个粒子以最复杂的舞蹈方式彼此互相作用。原来，在所有一切互作用中会有一个具有最低能量的组态；那就是核的常态，称为基态。如果核被扰动（比方说受一高能质子或其他粒子所撞击），它便将被迁移到其他各种组态中的某一组态上去，此即称为受激态，每一激态各有一高于基态的特征能量。在核物理研究中，象在利用范德格喇夫起电机[例如在加州工学院的克洛（Kellogg）和斯荃

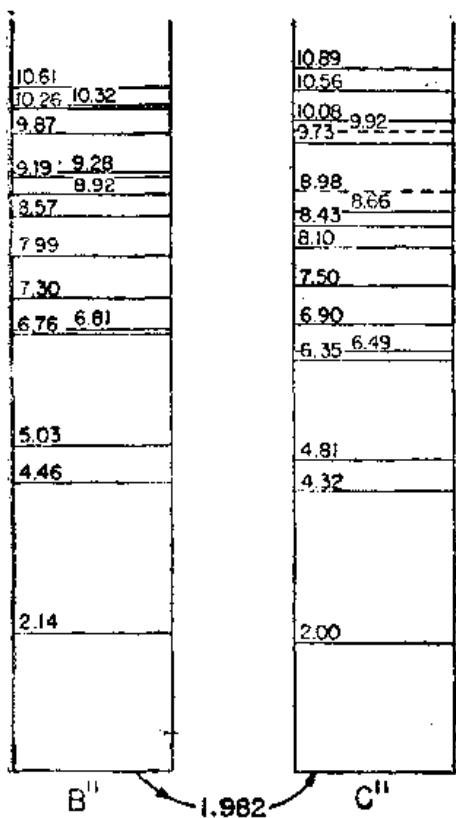


图 8-7 B^{11} 和 C^{11} 的能级(以兆电子伏数计)。 C^{11} 的基态比 B^{11} 的要高出 1.982 兆电子伏

(Sloan) 两实验室] 所做的研究中, 这些激态的能量以及其他性质都可以由实验加以测定。关于 B^{11} 的 15 个已知的最低激态的能量示如图 8-7 左半的一维图表上。那最低的水平线代表基态。第一个激态拥有高于基态 2.14 兆电子伏的能量, 次一个激态则有比基态高出 4.46 兆电子伏的能量, 如此等等。核物理研究试图对这一相当复杂的能量图案找到解释; 然而, 直到如今, 关于这种核能级的完整普遍理论却还未找到。

如果把 B^{11} 中的一个中子换成质子，则会得到一个碳同位素 C^{11} 的核。这 C^{11} 的最低 16 个激态的能量也已测量出来；它们被描画于图 8-7 中的右半。（虚线表示那些实验结果尚属可疑的能级。）

看看图 8-7, 我们便见到, 在这两种核的能级图案之间存在着惊人的相似性。第一个激态位于基态之上约 2 兆电子伏处。在到达第二个激态之前有一个大小约为 2.3 兆电子伏的能隙, 然后仅以一个大小为 0.5 兆电子伏的小跳跃就到达那第三个激态。在第四至第五个能级之间又再有一个大的跳跃; 可是在第五与第六两个能级之间则只有 0.1 兆电子伏的小间隔了, 如此等等。在约第十个能级之后, 这种对应性似乎消失, 但

若用其他的规定特性——诸如角动量以及凡足以使其额外能量遭到损失的东西——来给能级标明的话，则那对应性就仍可以见到。

在 B^{11} 和 C^{11} 的能级图案间的惊人相似性肯定不仅仅是个偶合。它必然揭露了某一物理规律。事实上，它显示出：即使在核里的复杂情况下，用质子去代替中子仅会造成十分微小的变化。这只能意味着中子与中子、质子与质子间之力一定几乎全同。只有这样，我们才应该期望，拥有五个质子与六个中子的核同拥有六个质子与五个中子的核彼此相同。

注意，这两种核的特性还未能告诉我们有关中子与质子间之力；这两种核中的中子与质子的组合数目相同。但若比较另外两个核，比如那拥有六个质子与八个中子的 C^{14} ，同那拥有质子与中子各七个的 N^{14} ，我们又会找到在能级上的相似对应性。因此，可以断定： $p-p$ 、 $n-n$ 与 $p-n$ 这三种力在所有一切复杂性上都彼此全同。关于核力定律竟存在这么一个意想不到的原理。纵然在核粒子每一对间的力可能十分复杂，但介乎这三种可能不同之对间的力却彼此相同。

但某种小差别仍然是存在的。那些能级并不恰恰对应；并且， O^{11} 的基态有一个高于 B^{11} 的基态 1.982 兆电子伏的绝对能量（它的质量）。所有其他能级在绝对能量上也会高出这么

多。因此，这两方面之力并不完全相等。可是我们全都熟悉，就所有各种力来说是不会完全相等的；由于每一质子带有正电荷，两质子之间就存在着电力，而这种电力在中子之间是不会存在的。是否我们或许能够通过 B^{11} 和 C^{11} 这两种情况中质子间的电相互作用不同这一事实来解释它们间的差别？或许甚至在能级上其余的小差别也是由这一电效应所引起的？既然核力比电力强得那么多，电效应对各能级上的能量就该只有微小的干扰影响。

为了核对这一概念，或毋宁说是要找出这一概念的后果如何，我们首先考虑这两种核的基本能级间的差别。为选取一个十分简单的模型，我们假定核是含有 Z 个质子的、半径为 r （待定）的球体。如果认为核是一个具有均匀电荷密度的球体，那么便应该[由式(8.7)]指望其静电能为

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8.22)$$

式中 q_e 为质子的基本电荷。由于在 B^{11} 中 Z 为五，而在 C^{11} 中 Z 为六，它们的电能就该是不同的。

然而，对于具有这么小数目的质子，式(8.22)并不十分正确。如果假定各质子是几乎均匀地分布在球体中的各点，并计算所有这些质子对间的电能，则将发现，式(8.22)中 Z^2 那个量应由 $Z(Z-1)$ 顶替，因而能量就是

$$U = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \quad (8.23)$$

若已知半径 r ，本来就可以利用式(8.23)来找出 B^{11} 与 C^{11} 间的静电能差的。但我们却要反过来试试；即引用所观测到的能差来算出半径，假定这能差全都起源于静电方面。

可是，这并不完全正确。在 B^{11} 与 C^{11} 的基态间的能差 1.982 兆电子伏还包括了所有各粒子的静能——即能量 mc^2 ——在内。在从 B^{11} 转变成 C^{11} 之间，我们是用一个质量较小的质子来替换中子的。因而能差中的一部分就是一个中子与一个质子的静能之差，那恰好等于 0.784 兆电子伏。于是应计入静电能中的差别比 1.982 兆电子伏还要多；即

$$1.982 + 0.784 = 2.766 \text{ 兆电子伏}.$$

把这一能量数值代入式(8.23)中，便可找出 B^{11} 或 C^{11} 的半径为

$$r = 3.12 \times 10^{-13} \text{ 厘米}. \quad (8.24)$$

这个数值到底是否具有任何意义？要弄清楚这一点，就必须拿它来同对这些核半径的其他某种测量结果作个比较。例如，可以通过观察核是如何把快速粒子散射出去而对于它的半径作另一种测量。事实上，从这样的测量已经找出了所有各种核中的物质密度都几乎相同，也就是说，它们的体积与其所含有的粒子数成正比。若令 A 为在一个核中质子和中子的总数（这是一个接近正比于其质量的数目），那么就已经找出了半径可由下式给出：

$$r = A^{1/3} r_0, \quad (8.25)$$

其中

$$r_0 = 1.2 \times 10^{-13} \text{ 厘米}. \quad (8.26)$$

从这些测量结果我们会找到一个 B^{11} （或一个 C^{11} ）核的半径应该指望为

$$r = (1.2 \times 10^{-13}) (11)^{1/3} = 2.7 \times 10^{-13} \text{ 厘米}.$$

把这一结果与式(8.24)作比较，就可见 B^{11} 与 C^{11} 的能量差乃起因于静电方面的那种假设是相当良好的；差异只有约 15%（作为我们的第一次核计算来说，这结果并不算坏！）。

产生差异的原因可能是这样。按照对核的流行理解，一个偶数的核粒子——在 B^{11} 中

是五个中子与五个质子——会形成一个核心；当另一个粒子加入到这个核心时，它会在该核心外面环行以形成一个新的球形核，而不是被吸收到里面去。如果是这样，我们便应对于这一个加入的质子取另一不同的静电能。对于 O^{11} 比 B^{11} 超过的能量，我们应该仅仅取 $\frac{Z_B q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，这是在该核心之外再添加一个质子所需的能量。这个数值只不过是式(8.23)所预期的数值的 $5/6$ ，所以对半径的新的预期值就只有式(8.24)的数值的 $5/6$ ，这就更接近于直接从测量所得之值了。

从结果彼此相符这一事实就可以得出两个结论。其一是，电方面的力律在小至 10^{-13} 厘米的范围内看来仍然适用；另一是，我们已经证实了质子与质子间、中子与中子间、以及质子与中子间之力的非电部分全都相等这一引人注目的一致。

§ 8-5 静电场中的能量

现在来考虑计算静电能的其他方法。这些方法都可以从有关每一电荷对的互作用能遍及所有一切电荷对之和那一基本关系式(8.3)推导出来。首先，我们要对某一电荷分布的能量写出一个表达式。按照常规，考虑每一体积元 dV 含有电荷元 ρdV 。于是式(8.3)便应写成

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{全空间}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (8.27)$$

注意：之所以要引入因数 $\frac{1}{2}$ ，是因为在遍及 dV_1 和 dV_2 的双重积分中，我们已把所有电荷元之对都计算了两遍。（没有任何方便办法可以写出一个能跟踪电荷对，以使每对仅算进一次的积分式。）其次，我们也注意到，式(8.27)中遍及 dV_2 的积分不过代表在点(1)上之势。即是

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 = \phi(1),$$

因而，(8.27)便可以写成

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(1) \phi(1) dV_1.$$

或者，由于点(2)已不再出现了，便可以简单地写成

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV. \quad (8.28)$$

这一方程可作如下理解。电荷 ρdV 的势能等于这电荷与其所在处之势的乘积。因此，总能量就是对于 ρdV 的积分。但又有那么一个因数 $\frac{1}{2}$ 。这仍然是需要的，因为我们把能量计算了两次。两电荷间的互作用能等于其中一个电荷乘以在该点由于另一电荷所产生之势。或者，这也可认为是第二个电荷乘以在该点由于第一个电荷所产生之势。于是对于两个点电荷来说，我们写成

$$U = q_1 \phi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

或

$$U = q_2 \phi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

注意，我们本来也可以写成

$$U = \frac{1}{2} [q_1\phi(1) + q_2\phi(2)]. \quad (8.29)$$

式(8.28)中的积分对应于(8.29)中括弧内的两项。这就是为什么我们需要那个因数 $\frac{1}{2}$ 的道理。

一个有趣的问题：这静电能究竟位于何处？或许我们也会问：谁管它呢？提出这样一个问题会有什么意义？如果有一对相互作用着的电荷，该组合就有某一能量。我们是否有必要说出该能量是定位于其中某一电荷处，或另一电荷处，或彼此两个电荷处，或是位于两电荷之间？这些问题可能不具有任何意义，因为我们的的确仅仅知道总能量是守恒的。能量定位在某一处的概念并不需要。

然而，一般说来，假设能说出能量位于某一处，确实具有意义；如同热能一般。那么，我们就该对于能量守恒原理用如下的概念加以推广，即如果在某一体积内的能量变化了，我们便应能够通过流进或流出该体积的能量来对该变化加以解释。你该体会到，如果某些能量从一处消失而在另一遥远之处呈现，在其间的空间里并没有任何一种东西正在通过（也就是说，没有任何特殊的现象发生），则我们先前关于能量守恒原理的提法仍然完全正确。因此，目前我们是在讨论关于能量守恒这一概念的推广。也许可以称之为局域性能量守恒原理。这样的一个原理该申明：在某一特定体积内能量的变化仅有通过流进或流出该体积之量来实现。确实有可能能量是按照这一方式在区域里守恒的。如果事情果然是这样，我们便该有一个比起总能量守恒的那种简单提法远较为详尽的规律。实际情况是，在自然界中能量是局域守恒的。我们能够找出能量定域在哪里以及它如何从一处跑到另一处。

为何能够说出能量定域在哪里乃是头等重要的事情，还有一个物理上的原因。按照引力理论，所有质量都是引力之源。我们也知道，通过式 $E=mc^2$ ，质量与能量彼此等价。因此，所有能量就都是引力之源。要是我们不能够定域能量，也就不能够定域质量。我们不可能导出引力场之源究竟位于何处。引力理论也就不够完整了。

若把我们限制在静电力学的范围里，确实无法说出能量是定域在哪里的。属于电动力学的完整麦克斯韦方程会向我们提供多得多的知识（尽管此时答案严格说来仍不是唯一的）。因此，我们将在后面一章中再详细讨论这个问题。现在仅仅给出在静电力学的特殊情况下的那种结果。能量乃定域在电场所在的空间里。这似乎很合理，因为我们知道，当电荷加速时它们会辐射出电场来的。我们愿意这么说，即当光或无线电波从一处跑至另一处时，它们会带着能量一同跑。但是在这些波中却没有电荷。因此就宁愿把能量定域在电磁场所在的地方，而不是在其发源的电荷那里。于是我们不用电荷而是用由电荷所产生之场来描述能量。事实上，能够证明式(8.28)在数值上等于

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.30)$$

然后，可把此式理解为在申述：当电场存在时，在该空间里就定域了有如下密度（每单位体积能量）的能量：

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (8.31)$$

这一概念示如图 8-8。

为要证明式(8.30)与静电学定律一致,我们现在就来引入曾在第六章中得到的有关 ρ 与 ϕ 的关系

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

于式(8.28)中,因而得到

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \nabla^2 \phi dV. \quad (8.32)$$

把被积函数的各个分量都写出来,可见到

$$\begin{aligned} \phi \nabla^2 \phi &= \phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ &= \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi). \end{aligned} \quad (8.33)$$

于是我们的能量积分就是

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV.$$

可以利用高斯定理把第二个积分变成一个面积分:

$$\int_{\text{体积}} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = \int_{\text{面积}} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} da. \quad (8.34)$$

我们要在所有电荷都被置在某一有限距离之内的假定下,对面积伸展至无限远处(从而使体积分变成遍及全部空间的积分)的那种情况计算该面积分。积分的简单办法乃是取一个具有巨大半径而其中心位于坐标系原点的那种球面。我们知道,当对所有电荷都距离得很远时, ϕ 会按 $1/R$ 变化,而 $\nabla \phi$ 则按 $1/R^2$ 变化。(如果在分布中净电荷为零,则这两项均将随 R 下降得更快。)由于该巨大球面的面积随 R^2 增大,我们就会见到,当球面的半径增大时,那面积分将按照 $(1/R)(1/R^2)R^2 = (1/R)$ 而下降。因此,如果把全部空间都包括在我们的积分之内($R \rightarrow \infty$),则该面积分便将趋于零,而结果得出:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全部空间}} (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全部空间}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.35)$$

由此可见,对于任一电荷分布,我们总能将其能量表达为对场中能量密度的积分。

§ 8-6 点电荷的能量

我们的新关系式(8.35)说明了甚至一个孤立电荷也将有某一静电能量。在这一情况下,电场是由下式给出的:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

因此,在离电荷为 r 远处的能量密度为

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

可以取一个厚度为 dr 而面积为 $4\pi r^2$ 的球壳作为我们的体积元，总能量便是

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (8.36)$$

现在对于在 $r=\infty$ 的上限毫无困难，但对于一个点电荷来说，我们本应从下限 $r=0$ 积起的，而这会给出一个无限大的数值。式(8.35)申述：在一个点电荷的场中会有无限大的能量，尽管我们过去是从仅有在点电荷之间才有能量那种观点出发的。在我们原来关于一组点电荷的能量公式(8.3)中，并未曾把电荷对于其本身的任何互作用能包括在内。实际发生的情况乃是：当我们转变到电荷的连续分布，即式(8.27)时，就曾计入了每一无限小电荷与其他所有各无限小电荷之间的互作用能。同一种帐目也包括在式(8.35)之内，因而当将其应用于一有限大的点电荷时，我们便已将所需以从无限小部分电荷聚拢起来的那种能量也包括了进去。事实上，我们将注意到：若应用有关一个带电球体的能量表式(8.11)，并让其中半径趋于零，则我们也会获得式(8.36)中的那种结果。

必须断言，把能量定域在场中的那种概念同存在点电荷的假设是彼此不相容的。一种开脱困难的办法应该是去申明，象电子那样的基本电荷并不是一些点，而实际上是电荷的微小分布。或者，本来我们也可以这样讲：在十分微小的距离上，电学理论已有点错误，或局部能量守恒的概念有点不对头了。对于这两种观点中的任一个观点都存在困难，这些困难从未得到克服；一直遗留到今天。此后在某一时候，当我们已讨论过电磁场中的动量那样一些附加概念之后，就将对在理解大自然时所碰到的这些基本困难给予更全面的估量。

9

大气中的电

§ 9-1 大气的电势陡度

在寻常的日子里，平坦的旷野或海洋上，当从地面垂直指向上时，电势将每米增加约 100 伏。这样，在空气中就有一个竖直的 100 伏/米的电场。这电场的符号对应于地面上带有负电。这意思是说，在室外，在你鼻子的高度上就有高于你脚下 200 伏的电势差！你也许会问：“为什么我们不在外面空气中的一米距离上，插上一对电极就可利用这 100 伏来开动我们的电灯？”或者你也许会觉得奇怪：“是否真的在我的鼻子和脚底之间就会存在 200 伏的电势差，那为什么当我走上街时不会受到电击？”

我们先来回答第二个问题。你的身体是一个相当好的导电体。当你与地面接触时，你和地面将趋于形成一个等势面。寻常等势面是平行于地面的，如图 9-1(a) 所示，但当你站在那里时，这些等势面就会变形，而场看来会象图 9-1(b) 所示的那个样子。因此，你仍将在你的头与脚之间有十分接近于零的电势差。有一些电荷会从地面走向你的头部，从而改变了电场。它们有些会被已积累在空气中的离子放了电，但由这些而形成的电流十分微小，因为空气是一种不良导体。

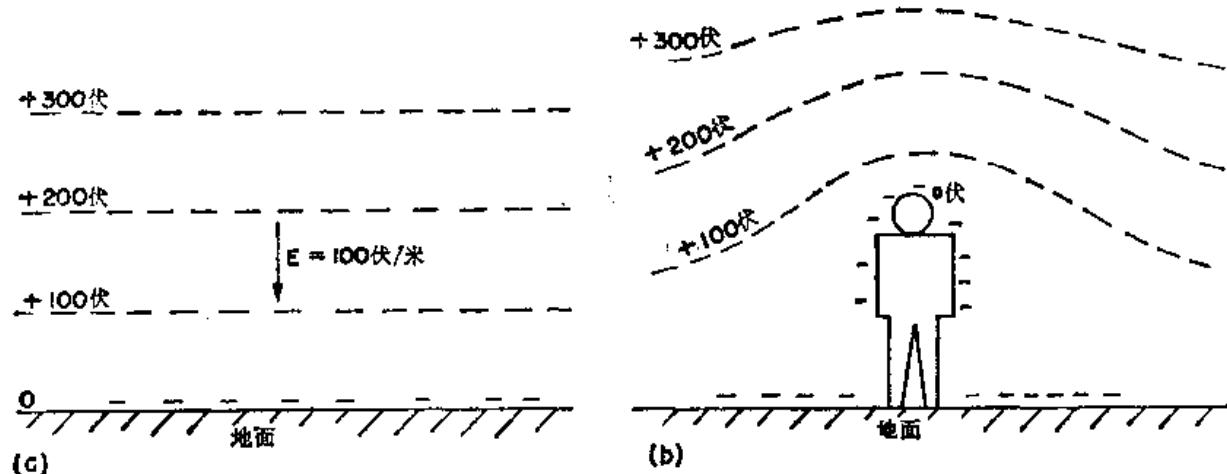


图 9-1 (a) 在地面上的电势分布；(b) 在室外平坦地方人身附近的电势分布

如果把某件东西放在那里就会改变电场，那怎么还能测量这样的电场呢？一个办法是，把一个绝缘导体置于高出地面某一距离处，并让它留在那里一直到它的电势与空气的电势相等时为止。如果让它在那里停留得足够久，则空气里的微小导电性会让电荷漏出（或渗入）该导体，直到它取得在该水平上之势为止。然后，再把它带回到地面上，并测量当这样做时势的改变。一种较快捷的做法是令该导体为一个稍有点儿漏泄的水桶。当水滴滴下时，会携带着任何超额电荷，因而该水桶便将趋向于与空气相同之势了。（正如你所知道的，电荷乃分布于表面上，当水滴离去时，“表面各部分”就会拆散。）我们可用一个静电计来测量水桶的电势。

还有另一种直接测量电势陡度的方法。由于存在电场，所以在地面上就会有面电荷($\sigma = \epsilon_0 E$)。如果放置一块平坦金属板在地面上并把它接地，负电荷就会在它上面出现(图 9-2a)，现在若又对这块板盖上另一块接地的导体 B ，则电荷将会出现在这一块遮盖板上，而原来那块板 A 却没有电荷了。若当我们把 B 盖上时，量度从 A 流向地面的电流(比方用一个连接于接地导线上的电流计)，我们便能找出原来在那里的电荷密度，从而也就找出了电场。

在提示了如何能在大气中测量电场之后，我们现在就继续来对它作描述。首先，测量的结果表明：这个场沿竖向持续存在，但当我们升至高空时它就会逐渐减弱。在约五十公里的高度上，这电场变得十分微弱，因而大部分的势差(对 E 的积分)都发生在较小高度上。从地面起一直到大气顶部总势差约为 400,000 伏。

§ 9-2 大气中的电流

除了电势陡度以外，另一个可以测量的东西就是大气中的电流。这电流密度很小——越过与地面平行的每平方米面积约有 10 皮安。空气显然不是完美的绝缘体，而由于这一导电性，一个微小电流——由刚才所描述的那种电场所引起的——就会从天空流向大地。

为什么大气会有导电性？原因是，这里或那里的空气分子中存在个别离子——比如已获得了一个额外电子的，或也许已丧失了一个电子的氧分子。这些离子并不保持作为单独分子；它们由于带有电场就经常会把几个其他分子聚集在其周围。于是每一离子就成为一小团块，与其他团块一起，在电场中到处漂移——缓慢地移上移下——这就形成了所观察到的电流。这些离子究竟从哪里来的呢？最初人们猜测这些离子该是由地球的放射性产生的。(已经知道，从放射性材料发出的辐射会把空气分子电离而使空气导电。)象 β 射线那样的粒子，从原子核出来之后会跑得那样快以致从空气里的原子中扯去了电子，从而留下离子。当然，这就暗示着：要是我们升至较大高度，便应该找到较少的电离作用，因为放射性全

都藏在地面的尘土之中——在镭、铀、钾等的痕量中。

为了检验这一理论，有些物理学家带着测量空气电离度的仪器在气球中作过具体测量[赫斯(Hess)，于 1912 年]，但发现的情况倒是相反的——每单位体积里的电离度随高度而增加！(仪器有如图 9-3 上所示的，两块金属板周期性地被充电至一电势 V 。由于空气的导电性，这两块板将慢慢地放电；这放电率将由一静电计测量出来。)这是一个最神秘的结果——在整个关于大气电研究的历史中最为戏剧性的结果。事实上，竟会有那么大的戏剧性以致一门全新学科——宇宙射线学——有必要分支出来。大气电本身仍保留它的不太戏剧性的地位。电离作用显然是从地球以外的某种东

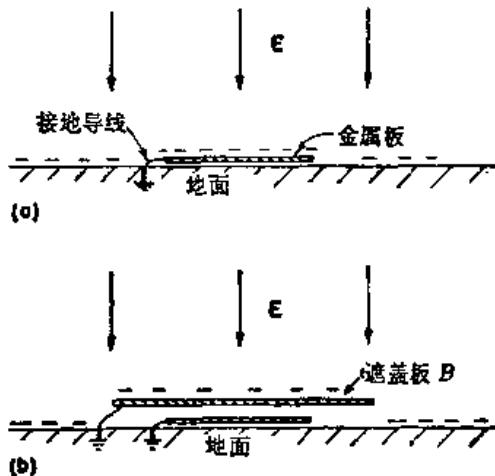


图 9-2 (a)一块接地金属板与地面带有相同的面电荷；(b)如果这块板又给另一块接地的导体遮盖着，则它便不会有电荷。

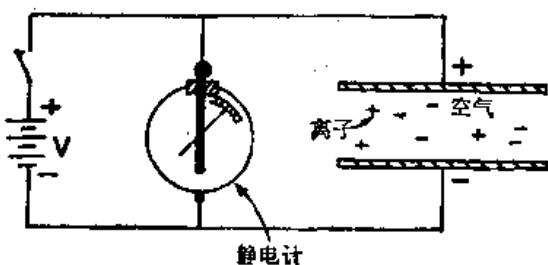


图 9-3 测量由于离子运动所引起的空气导电性

西产生的。对于这一来源的研究，就导致了宇宙线的发现。我们现在将不讨论宇宙线这一学科，只是说明宇宙线会维持离子的供应。尽管离子经常会被清除掉，但新的离子却总会通过从外面来的宇宙射线粒子创造出来。

为准确起见，我们必须说，除了由分子形成的离子外，还有其他种类的离子。小小的灰尘，象十分细微的尘埃小颗粒那样，会漂浮于空气中而带了电。它们有时被称为“核”。例如，在海面上当一个波浪破碎时，小小的浪花就会飞溅到空中。当一颗这样的水滴蒸发时，它将留下一个无限小的 NaCl 晶体浮荡于空气中。此后，这些小晶体可能会拾取电荷而成为离子；它们被称为“大离子”。

那些小离子——由宇宙线形成的——最易于移动。由于它们那么小，就会在空气中运动得相当快——在 100 伏/米（或 1 伏/厘米）的场中其速率约为 1 厘米/秒。那些大得多而又笨重得多的离子，运动起来就会缓慢得多。事实是，倘若空中有许多个“核”，它们会从那些小离子上拾得电荷。此时，由于“大离子”在场中运动得那么慢，总电导率就降低了。因此，空气的电导率是很容易变化的，因为它对于在空气里存在的灰尘份量很敏感。在陆地上这样的灰尘比在水面上多得多，因为风会刮起尘埃，或是那里人类会把各种污染抛入空气之中。这并不奇怪，日复一日，时复一时，从此地到彼地，靠近地面的电导率变化得很厉害。在地面某一特定地点上所观测到的电压陡度也变化得很大，因为从高空流下来的电流大致处处相同，而只是由于在靠近地面处的多变的电导率才引起电压陡度的差异。

起因于离子漂移的空气电导率也随着高度增大得很快——这是由于两个原因。首先，由宇宙线引起的电离作用跟着高度增加；其次，当空气密度降低时，离子的平均自由程增大，从而在电场中，它们能够在发生一次碰撞之前就跑得较远——结果使电导率随高度增加得很快。

虽然空气中的电流密度只有每平方米几皮安，但由于大地表面有许许多多的平方米，以致在任何时刻流至地面的总电流很接近于 1800 安这一常数。当然，这个电流是“正”的——它把正电荷带到地面上来。因此，我们就有 400,000 伏的电压供应，并有 1800 安的电流——功率达 7 亿瓦！

既然有这么大的电流流下来，在地面上的负电荷不久就应该放完了电。事实上，只消约半个钟头就可以把整个大地都放了电。但大气电场自从它被发现以来总已经历了比半个钟头更长的时间吧！它到底是怎样得到维持的呢？什么东西在维持着电压？这电压存在于地

球与什么东西之间？问题多得不胜枚举。

地球是负的，而空气中的电势是正的。如果你升得够高，那里的电导率会大得使水平方向上不致存在电压变化的机会。对于我们所谈及的时间尺度来说，空气实际上已变成了导体。这发生在 50 公里左右的高空上。这一高度还没有所谓“电离层”那么高，在电离层中有由日光的光电效应所产生的大量离子。尽管如此，对我们关于大气电的讨论，在约 50 公里的高空上，空气已变成足够导电，以致可以想象在这一高度上实际存在一张完美的导电面，从那里电流流了下来。这种情况的图象如图 9-4 所示。

问题是：正电荷怎样会维持在那里？它怎样给泵回去的？既然它已降落到地面上，总得想个办法把它泵回去才行。这就是困惑了人们相当一段时间的有关大气电的最大难题之一。

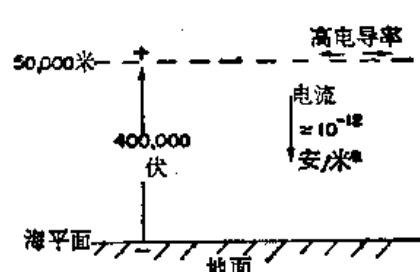


图 9-4 在晴朗大气中的典型电状态
于大气电的讨论，在约 50 公里的高空上，空气已变成足够导电，以致可以想象在这一高度上实际存在一张完美的导电面，从那里电流流了下来。这种情况的图象如图 9-4 所示。问题是：正电荷怎样会维持在那里？它怎样给泵回去的？既然它已降落到地面上，总得想个办法把它泵回去才行。这就是困惑了人们相当一段时间的有关大气电的最大难题之一。

我们能够得到的每一份知识都应该提供一条线索，或至少会告诉你关于它的某些情况。这里就是一个有趣现象：比方，若在海面上测量电流（这比起电势陡度来更为稳定），或者在严格条件下进行测量，并十分小心地对结果加以平均，以便避免不规则的起伏，那么我们就会发现，仍然有一种逐日变化。对在洋面上许多测量结果的平均，显示出一种约略示如图 9-5 的那种跟着时间的变化。电流约有±15% 的变化，而在伦敦每天下午七时达到最大。事情的奇怪方面是：不论你在哪里测量电流——是在大西洋、太平洋、或北冰洋上——总是当伦敦的钟在下午敲 7 点时电流就达到它的峰值！遍及全世界，电流总是在伦敦时间下午 7 时达到极大，而在伦敦时间上午 4 时则达到极小。换句话说，它取决于地球的绝对时间，而不是取决于进行观测地点的当地时间。从一个方面说，这并不见得神秘；它与我们的下述观点一致，即在大气顶层有极高的横向电导率，因为这会使从地面至顶层间的电势差不可能按地域而变。任何电势变化都应该是全球性的，而事实确是如此。因此，我们现在所知道的就是，在“顶”面的电势随地球的绝对时间起落百分之十五。

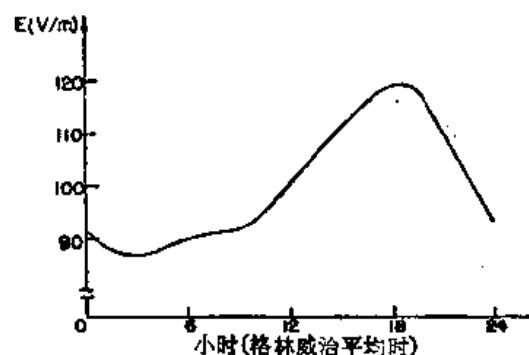


图 9-5 在晴朗的日子里，在大洋上关于大气的电压陡度的平均逐日变化(参照格林威治时间)

§ 9-3 大气电流的来源

其次，我们必须谈谈关于从“顶”层流至地面持续把地球充负电的那种巨大负电流的来源，承担这一任务的电池组究竟放在哪里？这电池组示如图 9-6。充电是通过雷雨和闪电

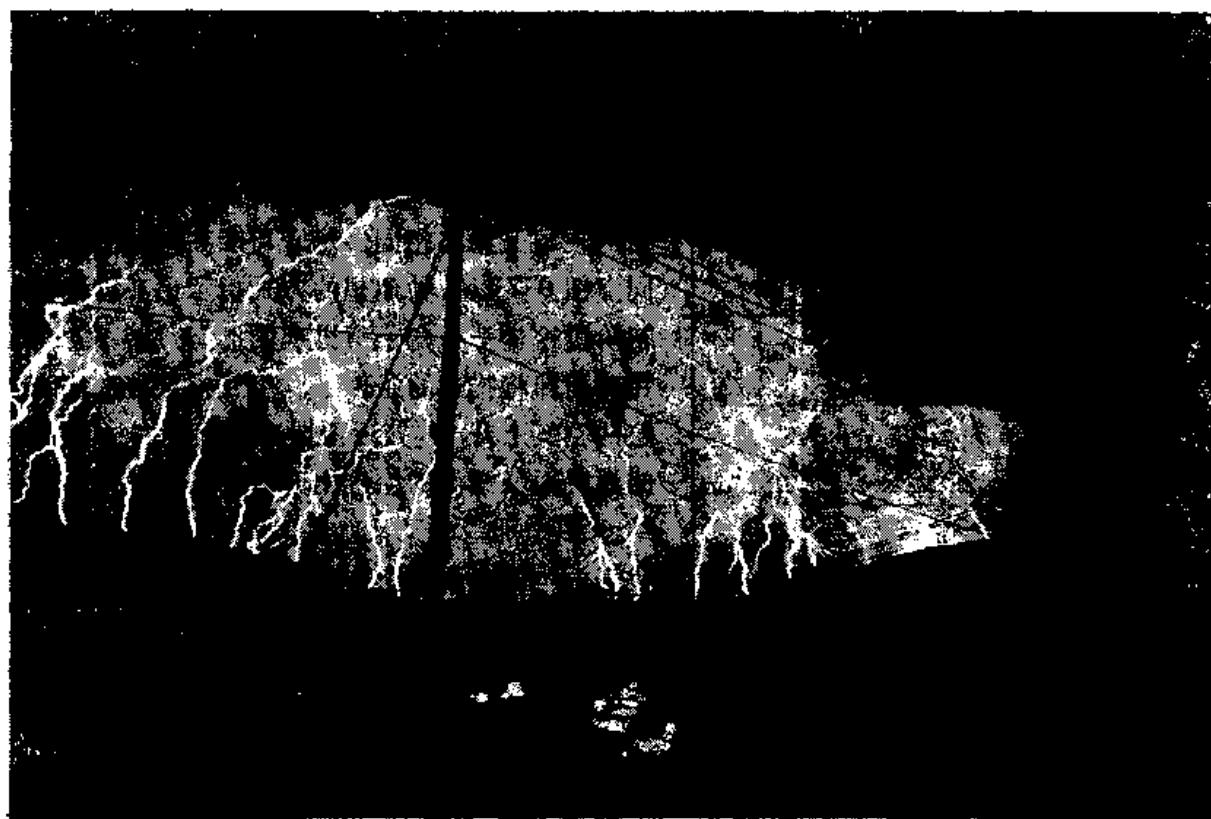


图 9-6 产生大气电场的机制[由 William L. Widmayer 拍的照片]

来实现的。事实证明，那些闪电电光并不会使我们刚才谈及的电势“放了电”（起初你或许会这样猜测的）。雷电把负电荷带至地球上。每当一次闪电发生时，十之八九会把大量负电荷带下来给地球。正是全世界的这些雷电经常以平均 1800 安培的电流把地球充起电来，然后才在天气好的那些地区把它逐渐放了电。

整个地面每天约有 300 次雷电，而我们可将其想象成会把电荷泵至上层以保持其电势差的电池组。然后计入地面的地理因素——在巴西每天下午总有雷电，在非洲的热带雷雨等等。人们已经对在任何时候全世界发生若干次雷电作了估计，不用说他们的估计多少总会同电势差方面的测量结果相符：在整个地面上雷电活动的总量在伦敦时间下午 7 时达到最高。然而，关于雷电的估计十分难于作出，而只是在人们知道了必须发生那种变化之后才作出该估计的。这些事情十分困难，因为我们无论在海洋上或在全世界所有各地区上，都没有做过足够多的观察以准确地弄清楚雷电发生的次数。但那些认为他们“做得对”的人都曾得到这么一个结果，即在格林威治平均时间下午 7 点钟雷电活动达到顶峰。

为了了解这些电池组是怎样工作的，我们将详细地考察一次雷电。在雷电过程中到底发生了什么？打算就迄今所已知道的给予描述。当我们进入实际自然界——而不是涉及一些理想的完美导电球体存在于我们所能够那么漂亮地加以解决的其他球面之内——这种令人惊奇的现象时，我们就发现所知道的并不多。任何曾经经历过雷电的人都会感到一种享受，或吃了一惊，或至少也发生过某种情绪吧。而在自然界中那些会引起情绪的地方，我们一般总会找到关于它的相应复杂性和神秘性的。目前并不可能对雷电的行为作出准确描述，因为我们懂得的仍然不太多。但我们愿意尝试，对所发生的事情稍为描述一下。

§ 9-4 雷雨

首先，一场寻常的雷雨是由若干个彼此相当靠近却又几乎互为独立的“盒形区域”构成的。

所以，最好是每次仅仅分析其中的一个盒。所谓“盒形区”指的是一个在水平方向上占据有限面积的区域，而全部基本过程都会在此中发生。往往会有几个盒子互相靠近，而在每一个中所发生的现象又约略相同，尽管可能在时间上有所不同。图 9-7 以一种理想的方式指示出在雷雨的最初阶段这样一个盒子会出现的形态。结果表明：在我们即将描述的条件下，空气中某处会出现普遍的空气上升，越接近顶层速度就越大。当底层的温暖而又潮湿的空气上升时，它会被冷却而凝结。图中那些小叉叉就是代表雪花，而小点点则代表雨，但由于向上冲的气流足够强而这些点滴又足够小，因而在这一阶段雪和雨都不会落下来。这是开始阶段，还不是真正的雷雨——即在地面上还未发生过任何变化这样的一种意义上说的。同时当暖空气上升时，还会把旁边的空气也吸引过来——这是许多年来一直被忽略的一个要点。于是，不仅下面的空气会升上来，而且还有

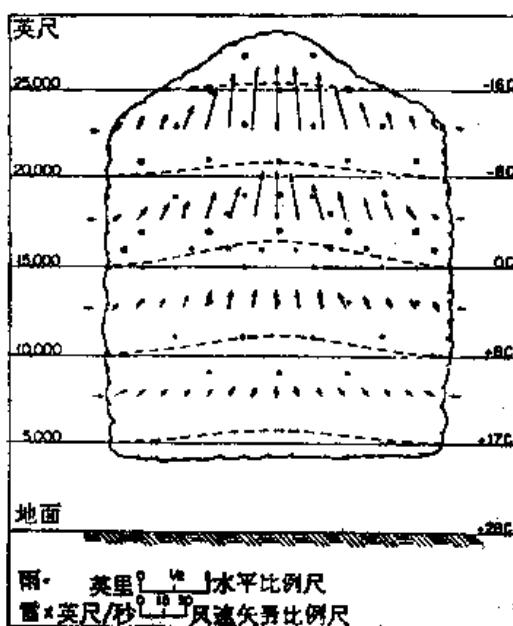


图 9-7 在最初发展阶段中的一个雷雨盒 [转载自美国商业部气候局报告，1949 年六月]

过来——这是许多年来一直被忽略的一个要点。于是，不仅下面的空气会升上来，而且还有

从侧面来的一定份量的空气。

为什么空气会象这样升上去呢？正如你们所知道的，高度越大空气就越冷。地面受太阳晒热了，而这些热量之再辐射至天空中则要依靠大气高层中的水蒸气；因此，高空上的空气是冷的——十分寒冷——而在下层才较温暖。你可能会说，“那么事情很简单，暖空气比冷空气较轻；因而这个组合在力学上是不稳定的，这样暖空气便会上升。”当然，如果在不同高度上空气的温度不同，那它在热力学上就是不稳定的。要是让空气本身呆无限久，全部将会达到同一温度。可是，并非能让它独自呆在那里的；太阳（在白天）总会向它照射。因此，问题确实不是一种热力平衡，而是一种力学平衡。假设我们——象在图9-8所示的那样——把空气温度对应于地面上的高度作一曲线，在寻常情况下，该会得到沿一条象(a)那样的曲线下降；当高度增大时温度下降了。大气怎样能够得到稳定呢？为什么下层的暖空气不会简单地上升到冷空气中去？答案是这样的：假如空气上升，压强就会下降，而要是考虑一特定区域里的空气正在上升，则它该作绝热膨胀。（没有任何热量会进出该区，因为在我们这里所考虑的那么大的尺寸，将不会有时间让大批热量流动。）于是这个区域里的空气当升高时就会变冷。象这样的绝热过程该会给出一条如图9-8曲线(b)那样的温度与高度关系。任何从下面升上来的空气比它进入的环境温度要低。这样就没有理由让下层的热空气升上来；假如真的会升起的话，它该比原来已在该处的空气为冷，便要比那里的空气重些，因而刚好一升上来就要再降落下去了。在一个美好、晴朗的日子里湿度很低，此时大气中存在某一个温度下降率，这一般比之由曲线(b)所表示的那“极大稳定陡度”要低些。空气是处在一个稳定的力学平衡状态中。

另一方面，要是我们想起一个里面含有许多水汽的空气区域正在上升，那么它的绝热冷却曲线就将不同。当它膨胀而冷却时，其中的水蒸气将会凝结，而这些正在凝结的水会释放出热量。因此，潮湿空气并不象干燥空气冷却得那么厉害。所以如果比平均湿度为高的那种空气开始上升，则其温度将按图9-8(c)那样的曲线下降。它毕竟将会多少变冷，但仍然比在同一高度上的周围空气要暖和些，并将继续升高直到升达很高之处为止。这就是使雷雨盒中的空气升高的机制。

多年来，关于雷雨盒的解释就只是这样。但此后的测量结果表明，云层里不同高度上的温度并不会象曲线(c)所示的那样高。原因是：当湿空气的“气泡”上升时，它会从其周围捕捉到一些空气，并受这些空气所冷却。温度对高度的曲线看来就更象曲线(d)，那与原来的曲线(a)比与曲线(c)还要接近得多。

当上述对流发生了之后，雷雨盒的截面看来就象图9-9那样。我们已有了所谓“成熟”的雷雨了。在这个阶段，向上冲的气流非常迅猛，一直到达了约10,000~15,000米——有时比此还要高。具有凝结特点的雷雨盒顶部会一直向上爬至高出一般云端之外，由一股通常约每小时60英里的向上猛风来完成。当水汽被带上去而凝结时，它形成了一些迅速被冷却至零度以下的小水点。它们本应该凝固，但并不立即凝固——它们已经是“过冷”了的

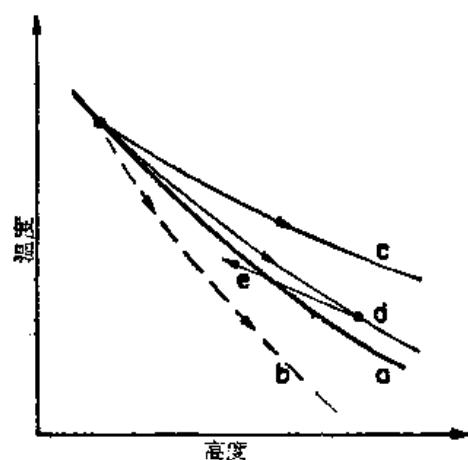


图9-8 大气温度。(a)静态大气；(b)干燥空气的绝热冷却；(c)潮湿空气的绝热冷却；(d)潮湿空气与一些周围空气混合

水点，水及其他液体往往会在凝固之前冷却至完全在凝固点之下，要是没有足以使凝固过程开始的一些“核”存在的话。只有当某一小点物质、比如一小块 NaCl 晶体存在时，水点才会凝成一小冰块。此后平衡是这样建立的，即水点蒸发而冰晶生长。于是，在某一时刻水会迅速消失，而冰迅速形成。并且，在水点与冰粒之间也有可能直接相撞——那些过冷之水便粘上冰粒，从而使它突然结晶。所以在云体膨胀的某一时刻会有大块冰粒迅速累积起来。

当这些冰粒足够重时，它们开始在上升的空气中降落——它们变得太重，以致那向上的猛风支持不住。当冰粒落下来时，会连同一点儿空气也带下来，因而就开始了一股向下刮的风。而足够奇怪的是，很容易看出当这种下刮之风一旦开始了之后，便将继续保持。现在空气正在猛冲下来！

注意，图 9-8 中那条代表云里实际温度分布情况的曲线(d)，要比适用于潮湿空气的曲线(c)稍为陡些*。所以，如果有湿空气落下来，则它的温度将按曲线(c)的陡度降落，只要跑得够远，它的温度便会低于其周围的温度，如图中曲线(e)所指出的。当它一旦那样做时，它的密度便会比周围的空气大，因而将继续迅速下降。

你会说，“那是一种永动。起初你曾争辩说空气应该上升，而当你确已把它升到那里时，却又同样巧妙地争辩说它应该下降”。但那并不是永动。当情况不稳定而暖空气必须上升时，此时显然就得有某种东西来代替该暖空气。同样确实的是，下降的冷空气该有力地代替那暖空气，但你也认识到，那落下来的并不是原来的空气。早期的论据认为有某种特别的云，它并不会拉进旁边的空气而能在上升了之后就又降落下来，这确有某种令人迷惑不解之处。这种论点需要雨来维持那下刮的风——是一个难以置信的论据。一旦我们已认识了有不少原来空气会混杂于那上升的空气之中，则热力学论据就足以表明原本处于某一高处的冷空气会降落下来。这就解释了作于图 9-9 的草图上的那种活跃的雷雨形象。

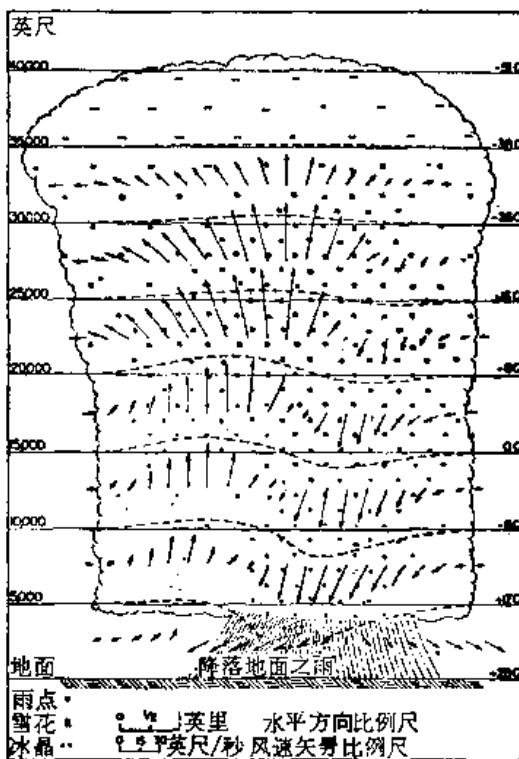


图 9-9 成熟的雷雨盒[转载自美国商业部气候局报告，1949 年 6 月]

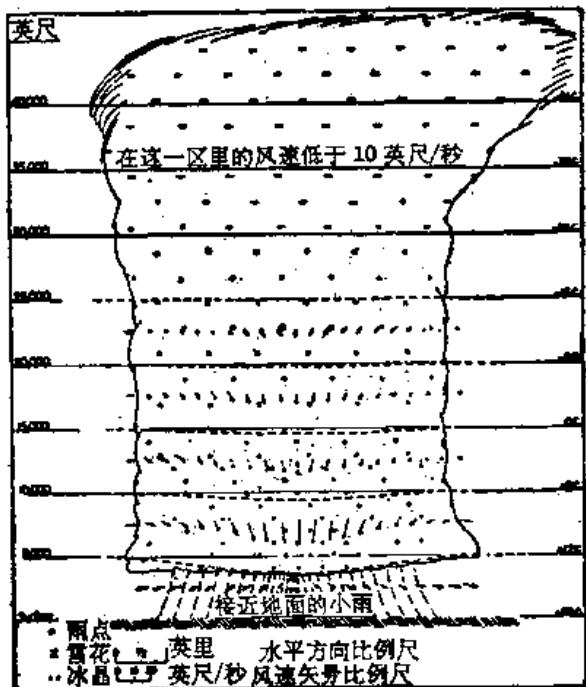


图 9-10 雷雨盒的后一阶段形势[转载自美国商业部气候局报告，1949 年 6 月]

* 这里按原文是“没有那么陡”，似乎有误，所以我们把它改了。——译者注

当空气冲下来时，雨开始从雷雨盒的底层落下。而且，当那相对寒冷的空气降落到地面上时，还会向周围扩散。所以恰好在雨尚未落下之前，就有一小股冷风给我们以大风雨即将来临的预兆。在暴风雨本身中，会有猛烈而又无规的阵风，而在云层里则有巨大的湍流，如此等等。但基本上是先有一股向上猛风，然后才有一股猛风向下——一般说来，这是一个十分复杂的过程。

降雨过程开始的时刻也就是强劲的下刮风开始的时刻，实际上，也是电现象发生的时刻。然而，在对闪电进行描述以前，我们可以通过考察在半个钟头至一个钟头以内，雷雨盒中发生的情况来结束这个故事。此时，该盒看来就象图 9-10 所示的那样。向上刮的风停止了，因为已不再有足够的暖空气来维持它。降雨再继续一阵子，最后连一些小水滴都落了下来，情况逐渐变得平静——尽管还有一些小冰晶残留在高空上。由于在极大高度上风会吹向四面八方，云端通常就会伸展成一块铁砧形。雷雨盒到了生命的尽头。

§ 9-5 电荷分离的机制

现在我们要来讨论对我们的目的来说最关紧要的方面——即关于电荷的发展情况。各种实验——包括飞机穿过雷雨区（干这一件事的飞行员真是好汉！）——都告诉我们，在雷雨盒里的电荷分布有点象图 9-11 所示的那样。在顶部有正电荷，而在底部则有负电荷——只除了在云脚处还局部带有正电荷，这对任何人都曾引起不少烦恼。似乎还没有谁懂得为什么它会存在那里，到底它有什么重要性——是该正电荷雨降落时的次级效应，还是机制中的基本部分。假使它不存在，事情该会简单得多。不管怎样，在底部占优势的负电荷与在顶部占优势的正电荷对于促使地面带负电所必需的电池组就有了正确符号。正电荷存在于 6 或 7 公里高的大气中，那里温度约为 -20°C ，而负电荷则在 3 至 4 公里高处，那里温度在零与 -10°C 之间。

聚集在云底的电荷大到足以使在云与地面之间产生一个 20 或 30、甚至达到 100 兆伏的电势差——比起在晴朗大气中从“天空”至地面的 0.4 兆伏要高得多。这样高的电压会把空气击穿，并产生大规模的放电现象。当击穿发生时，在雷雨区底部的负电荷就会在闪电中被带到了地面。

现在我们将比较详细地来描述闪电的特性。首先，附近应有一些大的电势差，才能把空气击穿。闪电会发生在一朵云的两部分之间，或在云与云之间，或在云与地面之间。在每一次独立发生的电光闪耀——就是你所见到的那种闪电——中大约有 20 至 30 库仑的电荷被带到地面。一个问题 是：云要再生这些被闪电所带走的 20 或 30 库仑电荷需要多少时间？这可以通过测量在离云很远的地方由云的电偶极矩所产生的电场而得到。在这样的测量中你可以见到，在闪电那一瞬间电场

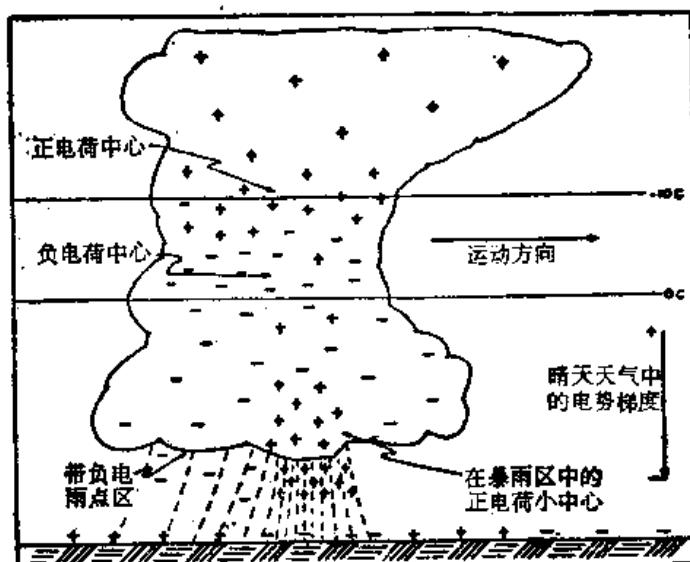


图 9-11 在一个成熟的雷雨盒中的电荷分布 [转载自美国商业部气候局报告, 1949 年 6 月]

会突然降低，然后又有一个返回到原值的指数式变化，这个指数函数的时间常数对不同情况稍为不同，但约略在5秒左右。每次发生闪电之后，雷雨只消5秒钟就能再度建立起它的电荷。这并非意味着另一次闪电一定要恰恰在5秒钟之后发生，因为地理位置当然已经改变，等等。闪电或多或少是无规发生的，但重要之点乃是，大约需要5秒钟才能再生那原来条件。这样在雷雨的起电机中会流经约4安培的电流。这意味着，任何为解释风暴如何能产生它的电荷的模型总一定是富有活力的——它必须是一部庞大而又迅速运转着的装置。

在继续作深入论述之前，我们将考虑一件几乎肯定是完全不相干的、但却是饶有趣味的事情，因为那的确表明电场对水滴的效应。我们之所以说它可能与雷电无关，是因为它联系到的是我们能用一束喷注在实验室里做的、表明电场对水滴影响相当强的实验，而在雷雨中却没有水的喷注；那里只有由凝冰和水点所形成之云。因此，关于在雷雨中起作用的机制问题，可能根本就与你能够在我们即将描述的简单实验中所见到的现象毫无关系。要是你取

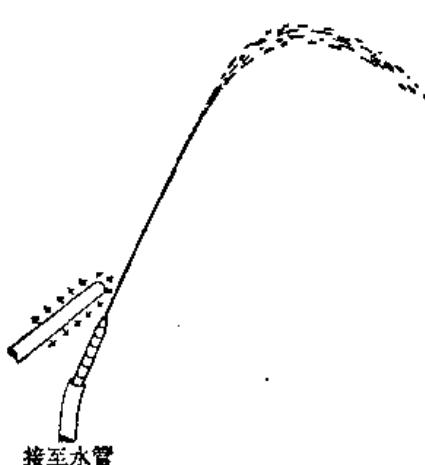


图 9-12 有电场存在于喷嘴附近的一条喷注

一个小喷嘴接至水龙头上，并以陡峭的角度朝上安放，如图 9-12 所示，那么水便将以一小喷注的形式射出来并最后碎裂成一串由微小水点组成的雾。如果你现在把一横穿该水注的电场安置在喷嘴附近（比如把一根带电棍棒移近来），那么该喷注的形状就将改变。若电场很弱，你将发现水注会破裂成数目较少的一些大水滴。但若所提供的是一个较强电场，则水注将碎裂成许许多多的微小水点——比以前的要小得多*。采用弱电场时，有一种会妨碍喷注碎裂成水点的倾向。可是，若用较强电场则拆开成水滴的倾向就增加。

有关这些效应的解释可能是这样。如果有一条从喷嘴射出来的水注而又让一小电场横穿过它，则它的一边会稍为带正电而另一边稍为带负电。此时，当水注破裂时，一边的水滴便可能带正电而另一边的水滴带负电。它们将彼此互相吸引并将比以前更加倾向于粘着在一起——水注不会那么容易破裂了。反之，如果电场较强，则存在于每一水滴上的电荷比较多，因而电荷本身就会通过其中的互斥作用而协助把那些水滴分裂。每一水滴将碎裂成许多更小的各带有电荷的水滴，因而它们将互相排斥而迅速向外扩散。所以当我们增强电场时，喷注便将分裂成更微细的水珠。我们想要提出的唯一之点乃是，在某些条件下电场能够对水滴发生相当大的影响。有关雷雨中事态发生的精确机制，一点也还未弄清楚，而这机制完全无需与刚才所描述的现象联系在一起。我们之所以把它包括进来只是为了使你们认识到可能会起作用的那些复杂性。事实上，还没有谁曾经提出过以这种概念作为基础而适用于云朵的理论。

我们要来描述两种曾经发明借以解释雷雨中电荷被分离的理论。所有的理论都会包含这样一个概念，即在凝成的粒子上带有某些电荷，而在空气中则有另一些不同电荷。于是通过这些凝成粒子——水滴或冰粒——在空气中的运动，电荷便分离了。唯一的问题是：这些粒子开始是怎样带电的？较古老的一种理论被称为“水滴破裂”论。有人曾经发现，如果气流中有一水滴破裂为二，则正电荷会留在水滴里而负电荷跑到空气中。这种水滴破裂理论存在几方面的缺点，其中最严重的是符号弄错了。其次，在大量会出现闪电的那种温度带

* 一种方便的用以观察水滴大小的办法是，让喷注落在一大块金属薄板上。较粗的水滴会造成较响的声音。

式雷雨盒中，高空里的凝结效应乃是形成冰，而不是形成水。

从刚才所说的，我们注意到，若能够想出一种在水滴顶部与底部各带有不同电荷，而又能看出为什么在一个高速空气流中水滴会破裂成大小两部分——出于水滴穿过空气的运动，或其他原因使其分裂成在前面的大滴和在后面的小滴——那么我们便该有一套理论了。（这与任何已有的理论有所不同！）此后，在空气阻力的影响下，小滴在空中降落总不如大滴那样快，因而取得了电荷分离的效果。你看，是有可能协调各种可能性的。

一种更巧妙的、在许多方面比那水滴破裂理论更为满意的理论，是由威尔逊（C. T. R. Wilson）提出的。我们将按照威尔逊的办法用水滴来描述它，尽管这同一现象也适用于冰。假设有一水滴正在每米约 100 伏的电场中朝着带负电的地面降落，这水滴将有一个感生电偶极矩——水滴的底部带正电而顶部带负电，这示如图 9-13。原来在空气中会有如上面所曾提及到的“核”——那些粗大而运动迟缓的离子。（高速度的离子在这里没有重要影响。）假设当这水滴降落时，会接近这么一个大离子。若这个大离子带的是正电，它会被水滴底部的正电荷所推开。因而，它就不会粘着在该水滴上。可是，假若该离子是从上面接近水滴的，则它也许会粘在那带负电的顶部。但由于水滴正在降落，会有一股相对于水滴向上冲的气流，这气流将把离子带走，如果各离子在空气中运动得足够缓慢的话。于是正离子也就不会粘在水滴上了。你看，这只适用于大而行动缓慢的离子。即这一种类型的正离子将不会粘在一顆降落的水滴前面或后面。反之，当一水滴接近一些粗大而行动缓慢的负离子时，它们便将被吸引而终于粘了上去。水滴将获得负电荷——这个电荷符号已被整个地球上的原来电势差所确定——而我们便将得到一个正确符号了。负电荷将由这些水滴带到了云的底部，而剩下来的正电荷则将被各种向上气流吹刮至云顶。这一套理论看来相当好，至少会提供正确符号，并且它也不依赖于要有液态水滴。当我们以后学习到电介质的极化时将会见到，小冰块也同样会这样干的。当它们处于电场中时，在其两端处也将出现电荷。

然而，即便这一理论也还有一些问题。首先，在雷雨中所牵涉到的总电荷会十分多。过了一段短时间之后，那些大离子的供应将告枯竭。因此威尔逊和其他人就得建议还有其他的大离子来源。一旦这种电荷的分开开始，巨大的电场便将形成，而在这些大电场中某些地方的空气就可能发生电离。如果有一个尖端强烈带电，或有任何象水滴那样的小物体，则它可能将场集中到足够强以致造成“刷形放电”。当有一个足够强的电场时——让我们说它是正的吧——电子们便将跌进场中并在两次碰撞之间拾取了巨大速率。它们的速率将足以在碰到另一个原子时把其中的一些电子拉出来，而让正电荷丢在后头。这些新的电子又将拾取速率而与更多的电子碰撞。因此，就将有一种链式反应或雪崩现象发生，从而离子会迅速聚集起来。那些正电荷被遗留在原来的位置附近，因而净效应就是把原来在某一点上的正电荷分散成围绕着该点的一个区域。此时，当然就不再有强电场了，而这一过程便停止。这就是刷形放点的特点。有可能在云里的电场会变成足够强，以致形成一个小小的刷形放电；也可能还有其他别的机制，在一旦发动了之后就能产生大量离子。但还没有谁会确切知道它

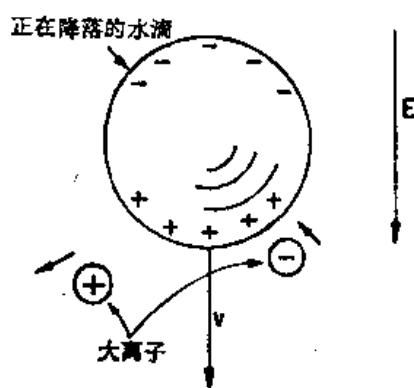


图 9-13 有关雷雨中电荷分离的
C. T. R. 威尔逊理论

是如何动作的。因此，关于闪电的基本原因实际上就还未完全明白。我们仅知道它是来源于雷雨。(而且我们当然也知道，雷声发自闪电——是由闪电释出的热能引起的。)

至少我们已能部分地理解大气电的起源。通过气流、离子、以及雷雨中的水滴或冰粒，正、负电荷被分开了。正电荷被向上带至云顶(见图 9-11)，而负电荷则在电击时倾倒到地面上。那些正电荷还会离开云顶，进入具有更高电导率的高层大气中，并将伸展至全球。在气候晴朗的地区，这一高空层里的正电荷会通过空气中存在着的离子——由宇宙线，从海上、并由人类活动所形成的一—缓慢地输送至地面。大气是一部忙碌工作着的电机！

§ 9-6 闪电

作为闪电中所发生情况的证据的第一张照片是这样获得的，快门打开着的一部照相机由人们提着前后移动——同时指向闪电所预期发生的地方。那些按这样获得的早期照片清楚地表明，闪电往往是由沿相同路线的一连串放电构成的。后来，一种配有 180° 差别的两镜头安装在一个迅速旋转着的盘上的“柏伊斯”(Boys)牌照相机问世了。由每一镜头所形成之象横越胶片走动——图象就按时间而被拉开了。比方，若闪电重复着，就会有并排着的两个象。通过对由这两个镜头所形成之象作比较，人们就能计算出有关闪电发生的前后时间

序列。图 9-14 表示由“柏伊斯”牌照相机拍摄的一张照片。



图 9-14 由一部“柏伊斯”牌照相机所拍得的一张闪电照片 [转载自 Schonland, Malan, and Collens, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 152 (1935)]

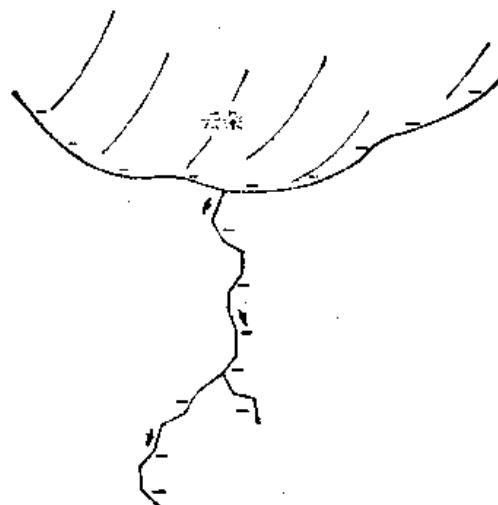


图 9-15 “梯式指引线”的形成

现在我们要来描写闪电。对它的动作也仍未确切理解。仅将对它的外表形象给予定性描述，但对于它为什么会这样表现则不作详细谈论。我们将仅仅描述在平坦旷野上面云底带有负电荷的那种寻常情况。这朵云的负电势比起下面的地球的负电势来还要低得多，因而负电荷便将被加速而奔向地面。发生的情况确实是这样。全都从一种所谓“梯式指引线”开始，这并没有象闪电那么光亮。在照片上人们可以看到，初时一小点亮斑会从云朵那里开始出现，随即迅速地冲下来——以六分之一的光速进行！它只跑过 50 米左右便停下来，约歇息 50 微秒之后，重又开始第一步。再歇息一会就又跨出第三步，如此等等。通过一连串

步伐而跑向地面，沿着象图 9-15 所示的那条路线。在这条指引线路径里就有来自云朵的负电荷；整根柱里充满着负电荷。并且，空气已被那些产生了该指引线的迅动电荷所电离，因而沿电荷走过的这条路线空气已变成导体。在指引线接触到地面的那一瞬间，便有向上直通云朵的充满着负电荷的一根“导线”。现在，云里的负电荷能够最后干脆逃脱而跑了出来。处在指引线底部的那些电子最早体会到这一点；它们倾倒了出来，剩下正电荷在后头，那又再从指引线的较高处吸引着更多的负电荷，而这又再倾倒下来，如此等等。所以最后云朵里的全部负电荷将沿着这根柱以迅速而有力的方式奔跑出来。因此你所见到的闪电乃是从地面跑上去的，如图 9-16 所示。实际上，这一主要闪电——是其中最明亮的部分——称为回路闪电。这就是能够产生十分明亮的光的那种东西，而其热量使空气迅速膨胀从而发生霹雳一声雷响。

在一次闪电中，电流的峰值达到约 10,000 安培，由它带下来的电荷约为 20 库仑。

但至此事态仍未结束。可能在约莫百分之几秒后，当这个回路闪电消失时，另一条梯式指引线又冲了下来。但这一次在中间并不再歇息。这回被称为“暗指引线”，一直奔跑下来——猛然一扑就从顶到底。它开足了马力沿着旧道前进，因为那里还有足够多的余烬使它成为一条最易通过的路线。这一条新的指引线又再充满着负电荷。当它接触到地面的一刻——噃的一声！——沿着该路线就有一个回路闪电一直往上冲击。所以你会看到闪电一再发生。有时仅闪击一、二次，有时五或十次——有一次在同一条路线上竟有多达 42 次的闪电被观察到——但总是迅速地相继发生的。

有时事情甚至还更加复杂。例如，在其中一次歇息之后，该指引线可能通过踏出两步——都是朝下指向地面的，但在不同的角度上——而发展成一种分支，示如图 9-15。此后会发生什么情况，将取决于是否其中有一条支路肯定更早地到达地面。如果真的是这样，则那明亮的（把负电荷倾卸到地面上的）回路闪电便会沿这条直达地面的支路往上冲，而在其通往云朵的路程中经过该分叉点时，就有一条明亮的闪电沿另一条支路往下跑。为什么？因为负电荷正在倾倒而出，而这便点燃了闪电。这电荷开始在那个次级分叉点的顶端运动，把该支路中那些较长的相继部分倾倒掉，因而该明亮闪电便显示出是在沿该支路奔跑下来，同时闪电也朝着云朵伸展上去。然而，倘若这些额外的指引线支路恰巧几乎已在同时与那原来的指引线到达地面了，则有时可以有那第二次闪电的暗指引线选取这第二条支路。于是，我们便见到第一次主闪电发生在一处，而第二次闪电则发生在另一处。这又是那原来概念的一种转化了。

再者，对于十分靠近地面的区域，我们上面的描述就过于简化了。当该梯式指引线离地面仅有一百米左右时，有证据表明从地面发生了放电来迎接它。大概电场已强至足以使一刷形放电产生。例如，设有一尖锐物体，诸如装配有尖屋顶的一座建筑物，那么当指引线落下至该屋顶附近时，电场将会达到那么强大以致放电得以从尖端出发而向上伸展至该指引

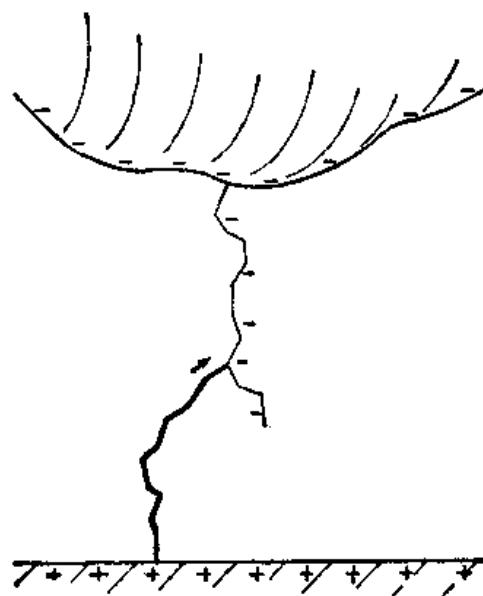


图 9-16 回路闪电沿着指引线所开辟的道路往回头跑上去

线。闪电倾向于击在这样的一点上。

显然久已明白，高耸的东西常易受电击。波斯王哲息斯(Xerxes)的顾问阿塔班尼斯(Artabanis)曾有一句名言，那是当哲息斯企图把整个已知世界都归由波斯人管辖而出征时，他给予他的主子关于对希腊的一次预谋攻击的忠告。阿塔班尼斯说：“看上帝怎样利用他的闪电来毁灭那些大野兽，他不能容忍它们逐渐变成傲慢，而那些小动物却从未惹怒过他。同样，他又如何使他的电击总是落在高屋和高树上”。然后，他才解释理由：“因此，十分明白，他喜欢把任何灾难都降落在那些自高自大的东西上面”。

你是否会认为——现在你已经懂得了闪电总要打击高大树木的真正原因——比2300年前的阿塔班尼斯对国王有关军事上的忠告更加高明些？不要自高自大，做起来只会比他更缺乏诗意。

10

电介质

§ 10-1 介电常数

这里，我们开始讨论在电场的影响下物质的另一种特殊性质。上一章我们曾考虑过导体的行为，其中电荷由于响应了电场而自由地移至这么一些点上，使得在导体内部不再残留电场。现在我们将讨论绝缘体，即那种不能导电的材料。也许人们起初会认为不应该有任何效应。然而，利用一个简单验电器和一个平行板电容器，法拉第就发现事实并非如此。他的实验表明，在这么一个电容器的两板间塞进一块绝缘体时，其电容会增加。若绝缘体完全充满两板的间隙，电容会增大 κ 倍，而 κ 的大小仅取决于该绝缘材料的性质。绝缘材料也叫作电介质。这样，该因数 κ 就代表电介质的一种特性，因而被称为介电常数。当然，真空的介电常数为1。

现在我们的问题在于解释：如果绝缘体确实是绝缘的而不能导电，那为什么还会有某些电效应呢？我们从电容增大了 κ 倍这一实验事实出发，试来分析也许会发生的事情。考虑一个平行板电容器，在其两导体表面上带有一些电荷，让我们假定顶板带着负电而底板带着正电，两板的间隔为 d ，而每块板的面积为 A 。正如以前我们曾经证明过的，这样一个电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad (10.1)$$

而在其上面的电荷与电压则有这么一个关系

$$Q = CV. \quad (10.2)$$

现在有这样的实验事实：若把一块留西特（一种人造荧光树脂）玻璃那样的绝缘材料塞进两极板之间，则我们会发现电容增大了。当然，这意味着，对于同一电荷来说电压则是降低了。可是电压或电势差等于电场越过电容器的积分，因而我们就必须断定，即便两板上的电荷保持不变，电容器里的电场还是会减弱的。

怎么会这样呢？有一个由高斯创立的定律申述，电场通量正比于所包围的电荷。考虑图10-1那个由虚线表示的高斯面 S 。由于有电介质存在时电场已被削弱，我们便可断定，在该面内的净电荷应低于在没有该材料存在时的电荷量。只有一个可能的结论，那就是在电介质表面上必然会有正电荷。既然场被削弱而不是降低至零，我们便应期待这正电荷仍比在导体表面上的负电荷少。因此，只要能够以某种方式理解，当介电材料被置在一电场中时会有正电荷感生于其一面而负电荷感生于另一面，这一现象便可以得到解释。

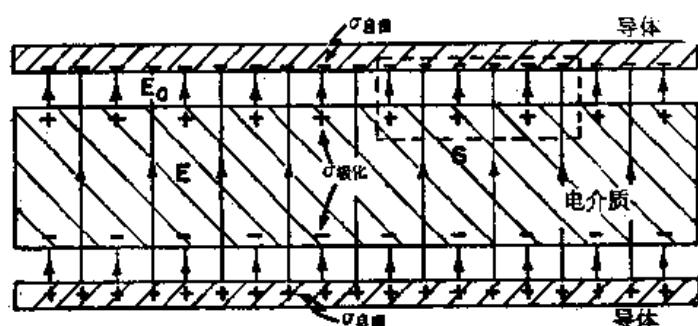


图10-1 含有电介质的一个平行板电容器。图中表示出 E 线

我们应该指望,对于导体来说,这同一现象也会发生。比方,假设有一个板距为 d 的电容器,而我们将一块厚度为 b 的电中性导体塞进两板之间,如图 10-2 所示。电场在顶面会感生正电荷,而在底面感生负电荷,因而在导体内部就没有电场了。但在其他空间里的场,则犹如未放进该导体时一样,因为那是等于面电荷密度除以 ϵ_0 。可是,为取积分以获得电压

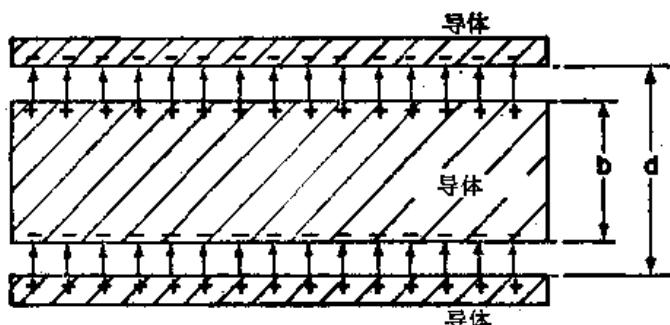


图 10-2 若把一块导电板放进一个平行板电容器的空隙里,那些感生电荷就会使导体内之场减少至零

(电势差)所必须跨过的距离却已经缩短了。该电压现在是

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - b).$$

关于电容的最终公式与式 (10.1) 相似,即

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d [1 - (b/d)]}. \quad (10.3)$$

只要用 $(d - b)$ 来代替 d 罢了。

电容按一定因数增大,而这个因数取决于 (b/d) ,即是被导体所占领的体积与原来空间体积的比例。

上述实验结果为我们提供了一个关于电介质到底是怎么回事的形象化模型——在材料之内有许多会导电的小片层。这么一个模型的困难在于它具有某一特定轴,即那些片层的法线,而大多数电介质却没有这么一种轴。然而,若我们假定所有介电材料都含有一些由绝缘质分开的小导电球体,如图 10-3 所示的那样,这一困难则可以消除的。介电常数现象可以通过感生于每个球上的电荷的效应来加以解释。这是用来解释被观察到的法拉第现象的最早有关电介质的物理模型之一。更具体地说,曾经假定材料里每一原子是一完美导体,但彼此互相绝缘。介电常数 κ 应该取决于由这些导电小球体所占空间的比例。然而,这并不是目前流行的模型。

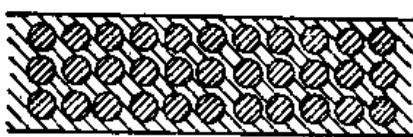


图 10-3 关于电介质的一个模型。小导电球体被埋在一块理想绝缘体之中

§ 10-2 极化矢量 P

如果我们更深入地审查上面的分析,便会发现,关于理想导体与理想绝缘体的概念并不是非有不可的。每一个小球的作用就象一个偶极子,而这一偶极子的矩则是由外电场所感生的。对于理解电介质所唯一不可缺少的东西,是在该材料里感生了许许多多个偶极子。是否由于具备一些小导电球体或由于其他原因才会感生那些偶极子,却是无关紧要的。

如果原子不是一个导电球体,那为什么还会受电场所影响而感生一个偶极矩呢?这一课题将留在下一章中作较详尽的讨论,内容会涉及介电材料的内部机制。然而,我们在这里要举出一个例子以显示一种可能的机制。一个原子具有在其核心上的正电荷,而在其周围则有一些负电子。当处于电场中时,核会被吸引至一方,而电子至另一方。电子的轨道或波形(或用任何一种量子力学图象)将在某种程度上变了形,如图 10-4 所示,负电荷的重心将会移动而不再与核上的正电荷相一致了。这样的一种电荷分布我们曾讨论过,若从远处了望这么一个电中性位形,则在第一次近似上它相当于一个小偶极子。

这样说似乎合理：若场不太强，则所感生的偶极矩将与场成正比，这就是说，弱电场将把电荷稍为移动一点点，而强电场则把它们移动得多些——总是与场成正比——除非位移已变得太大了。在这一章的其余部分，我们将假定电偶极矩总是严格地与场成正比的。

现在我们将假定，在每一原子中存在间隔为 δ 的两电荷 q ，因而 $q\delta$ 就是每一原子的偶极矩。（我们采用 δ ，因为已把 d 用于两极板的间隔了。）设每单位体积中含有 N 个原子，则每单位体积的偶极矩便等于 $Nq\delta$ 。这个单位体积偶极矩将用矢量 \mathbf{P} 来代表。不用说，那是朝着各别电偶极矩的方向，也就是朝电荷位移 δ 的方向：

$$\mathbf{P} = Nq\delta. \quad (10.4)$$

一般说来，在电介质里面 \mathbf{P} 将随位置而改变。可是，在材料的任一点上， \mathbf{P} 与电场 \mathbf{E} 始终成正比。这个取决于电子移位的容易程度的比例常数，将与构成该材料的原子种类有关。

实际上是什么东西在确定这个比例常数的表现如何，对十分强大之场这个常数保持不变会准确至什么程度，以及在不同材料内部会有哪一种事态发生，关于这些我们都将在以后讨论。眼下，我们仅须简单地假定，存在一种能与电场成正比感生一电偶极矩的机制。

§ 10-3 极化电荷

现在让我们来看看，这一模型对于含有电介质的电容器的理论会提供些什么？首先，考虑其中每单位体积含有若干个电偶极矩的一片材料。平均说来，是否会有由此而产生的任何电荷密度？如果 \mathbf{P} 是均匀的，那就不会有。即如果被相对移了位的正电荷和负电荷都有彼此相同的平均密度，那么它们被移了位这一事实就不会在该体积里产生任何净电荷。反之，要是 \mathbf{P} 在某一地方较大而在另一地方较小，那就会意味着较多的电荷被移进，较少的电荷被移出某一区域。因此，我们就会期待得到一个体电荷密度。对于平行板电容器来说，我们曾经假定 \mathbf{P} 是均匀的，因而就只须考虑表面所发生的情况。在一个表面上，负电荷即电子，被有效地赶出一段距离 δ ；在另一个表面上，它们却向里面移动，因而有效地丢下正电荷使之突出一个距离 δ 。如图 10-5 所示，我们将有一个称为面极化电荷的面电荷密度。

面极化电荷可以这样计算。设 A 为板的面积，则出现在板面上的电子数目应等于 A 与 N （即每单位体积的电子数）、又与位移 δ ——这

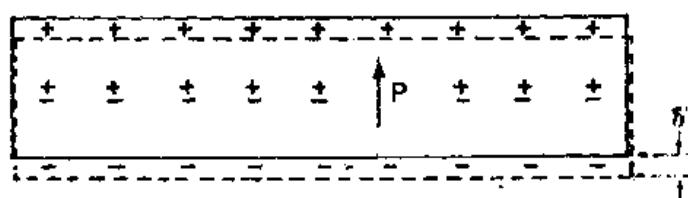


图 10-5 在均匀电场中的一片电介质。正电荷相对于负电荷被移置了一个距离 δ

里假定它与板面垂直——三者的乘积。表面电荷可由此再乘上电子电荷 q_e 而获得。要得到感生于表面上的极化电荷密度，则我们除以 A 。因此，表面电荷密度的大小为

$$\sigma_{\text{表}} = Nq_e\delta.$$

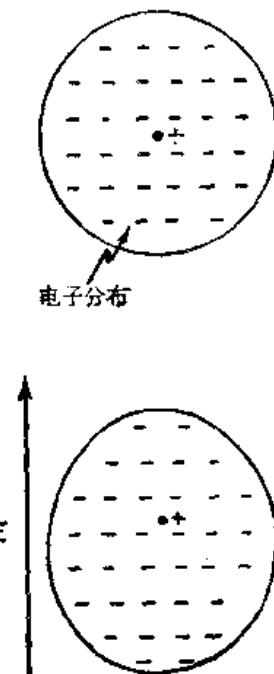


图 10-4 处于电场中的原子，其中电子分布相对于核来说已有了移动

但这恰好等于式(10.4)中极化矢量 \mathbf{P} 的量值:

$$\sigma_{\text{极化}} = P. \quad (10.5)$$

电荷的面密度就等于材料里的极化强度。当然，这面电荷在一个面上是正的，而在另一个面上则是负的。

现在让我们假定，上述那块板就是存在于平行板电容器中的电介质。构成电容器的那两块金属板也带有面电荷，这我们将称之为 $\sigma_{\text{自由}}$ ，因为这些电荷可以在导体上任何一处“自由”移动。当然，这就是对电容器充电时我们放进去的电荷。必须强调， $\sigma_{\text{极化}}$ 之所以存在只是由于有了 $\sigma_{\text{自由}}$ 。如果通过使电容器放电而将 $\sigma_{\text{自由}}$ 移去，则 $\sigma_{\text{极化}}$ 便将消失，但它没有沿放电导线跑开，而是缩回材料里面去了——由于材料内部极化过程的松弛。

现在，我们可以将高斯定律用于图 10-1 的那个高斯面 S 。电介质里的电场 E 等于总的面电荷密度除以 ϵ_0 。很明显， $\sigma_{\text{极化}}$ 与 $\sigma_{\text{自由}}$ 具有相反符号，因而

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}} - \sigma_{\text{极化}}}{\epsilon_0}. \quad (10.6)$$

注意！金属板与电介质表面间的电场 E_0 要比 E 大一些，它仅对应于 $\sigma_{\text{自由}}$ 。但这里我们所关心的却是电介质内部的场，如果电介质几乎充满了两板间的缝隙，那么它就是遍及几乎整个体积的场。利用式(10.5)，我们可以写出

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}} - P}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

这个式并不会告诉我们关于电场的样子，除非已知道 P 是什么。然而，这里我们已假定 P 依赖于 E ——实际上是正比于 E 。这个比例式通常写成

$$P = \chi \epsilon_0 E. \quad (10.8)$$

常数 χ 称为该电介质的电化率。

于是，式(10.7)变成

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \frac{1}{(1+\chi)}, \quad (10.9)$$

这向我们提供关于场被削弱的因数 $1/(1+\chi)$ 。

两板间的电压等于对电场的积分。既然场是均匀的，积分就不过是 E 与两板间距 d 的乘积。我们有

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{自由}} d}{\epsilon_0 (1+\chi)}.$$

在电容器上的总电荷为 $\sigma_{\text{自由}} A$ ，以致由式(10.2)所定义下来的电容变成

$$C = \frac{\epsilon_0 A (1+\chi)}{d} = \frac{\chi \epsilon_0 A}{d}. \quad (10.10)$$

我们已解释了所观察到的事实。当一平行板电容器充满了电介质时，其电容就增大这么一个倍数

$$\chi = 1 + \chi, \quad (10.11)$$

它代表该材料的一种特性。当然，我们的解释还不够完全，要等到已能解释——这将在以后来做——原子极化是怎样产生时为止。

现在，让我们来考虑一种稍为复杂的东西——极化强度 \mathbf{P} 不是处处相同的情况。正如上面曾经提到的，如果极化不是常数，一般就该预期会找到在体积里的电荷密度，因为

进入一个小体积一边的电荷比起离开另一边的电荷也许会多一些。我们怎样来找出到底有若干电荷为一个小体积所获得或丧失了的呢？

首先，让我们计算当材料被极化时有多少电荷会通过任一个想象的表面。越过一个表面的电荷量恰好就等于 P 乘以该面积，倘若极化是垂直于该表面的话。当然，要是极化切于该表面，那便不会有任何电荷移过去了。

按照我们曾经用过的同一些论据，很容易看出，越过任一面积元的电荷将与垂直于该面积的 P 的分量成正比。试比较图 10-6 和 10-5。我们见到在一般情况下，式(10.5)应该改写成

$$\sigma_{\text{极化}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad (10.12)$$

若我们想到在电介质里的一个想象的面元，那么式(10.12)便会给出移过该面积的电荷，但不会形成一个净电荷，因为由在该面两侧的电介质所贡献的仍是等量异号电荷。

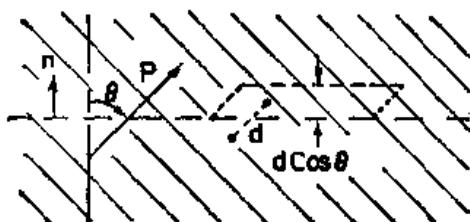


图 10-6 在电介质里移过一个想象的面积元的电荷与垂直于该面积的 P 的分量成正比

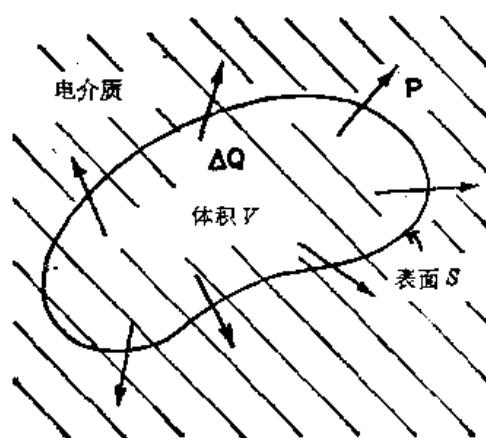


图 10-7 非均匀的极化强度 P 会在电介质内部形成一净电荷

然而，电荷的位移的确能形成一个体积电荷密度。从任一体积 V 由于极化而向外移出的总电荷会等于 P 的向外垂直分量遍及包围该体积的 S 面的积分（见图 10-7）。一个相等而异号的超额电荷则被遗留在后头。我们把在体积 V 内的净电荷记作 $\Delta Q_{\text{极化}}$ ，就可以写出

$$\Delta Q_{\text{极化}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da. \quad (10.13)$$

还可将这 $\Delta Q_{\text{极化}}$ 归因于具有密度为 $\rho_{\text{极化}}$ 的体积电荷分布，因而

$$\Delta Q_{\text{极化}} = \int_V \rho_{\text{极化}} dV. \quad (10.14)$$

将这两式结合起来，便得

$$\int_V \rho_{\text{极化}} dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da. \quad (10.15)$$

我们已有一种把来自极化材料的电荷密度与极化矢量 P 相联系起来的高斯定理。可以看到，这与上面在平行板电容器中的电介质表面上的极化电荷所获得的结果相符。应用式(10.15)于图 10-1 中的那个高斯面上，该面积分便会给出 $P \Delta A$ ，而在里面的电荷则为 $\sigma_{\text{极化}} \Delta A$ ，所以我们又再度获得 $\sigma = P$ 。

正如以前我们对静电学的高斯定律所做的那样，可以将式(10.15)转变成一个微分形式——利用高斯的数学定理：

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV.$$

我们便得:

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.16)$$

若是非均匀极化, 它的散度便将提供出现在该材料里的净电荷密度。我们必须强调, 这是一种完全真实的电荷密度。之所以叫它做“极化电荷”, 只是为了要提醒我们自己, 它是如何得来的。

§ 10-4 有电介质时的静电方程组

现在, 让我们把上述结果同静电学理论结合起来。静电学的基本方程是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10.17)$$

这里 ρ 指一切电荷的密度。由于极化电荷不容易显示出来, 因而把 ρ 分开成两部分, 倒是很方便的。我们再把由非均匀极化所引起的电荷叫作 $\rho_{\text{极化}}$, 而把所有其他的叫作 $\rho_{\text{自由}}$ 。通常 $\rho_{\text{自由}}$ 指我们放在导体上面的或是置于空间某些特定位置上的电荷。于是, 式(10.17)便变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{极化}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{自由}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

或

$$\nabla \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (10.18)$$

当然, 关于 \mathbf{E} 的旋度的那个方程却没有改变:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.19)$$

由式(10.8)取 \mathbf{P} , 我们便得到一个较简单的方程:

$$\nabla \cdot [(1+\chi)\mathbf{E}] = \nabla \cdot (\chi\mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (10.20)$$

这些就是当有电介质时的静电学方程组。当然, 它们并没有陈述任何新的东西, 但对于其中 $\rho_{\text{自由}}$ 为已知而极化强度 \mathbf{P} 又是正比于 \mathbf{E} 的那些情况, 则在计算上它们仍不失为较方便的一种形式。

请注意! 我们并没有把介电“常数” χ 提到散度之外。那是因为它不一定会处处相同。如果它的值处处相同, 则可以把它提出来, 因而方程组就不过是那些用 χ 来除电荷密度 $\rho_{\text{自由}}$ 的静电方程组了。我们所给出的那种形式的方程组仍适用于一般情况, 即其中存在于不同地点上的可能是一些不同电介质。这样, 该方程组就可能很不容易求解了。

有一件具有某种历史重要性的事情应在这里提出。在电学的早期, 对极化的原子机制还未了解, 而 $\rho_{\text{极化}}$ 的存在也未被觉察到。当时 $\rho_{\text{自由}}$ 被认为是全部电荷密度。为了把麦克斯韦方程组写成一简单形式, 一个新的矢量 \mathbf{D} 被定义为 \mathbf{E} 与 \mathbf{P} 的线性组合:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (10.21)$$

结果, 式(10.18)和(10.19)就曾被写成表面上看来十分简单的形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.22)$$

人们能否解出这组方程? 只有在关于 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系的第三个方程已给出时才能做到。当式(10.8)成立时, 这个关系就是

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1+\chi) \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.23)$$

上述方程往往被写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (10.24)$$

其中 ϵ 仍然是另一个用以描述材料的介电特性的常数。它被称为“电容率”。(现在你就明白,为什么我们在方程组中会有 ϵ_0 , 它是“真空的电容率”。)显然,

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 = (1 + \chi) \epsilon_0. \quad (10.25)$$

今天我们从另一个观点来看待这些事情,那就是,在真空中方程组较为简单,而倘若在每一情况下不管其来源如何我们把一切电荷都揭示出来,则该方程组总是正确的。如果为了方便我们将其中某些电荷分离开来,或由于我们不愿意详细讨论正在发生的事态,则可以把方程组改写成任一种可能方便的形式,倘若我们乐意的话。

还有另一点应该强调的,一个象 $D = \epsilon E$ 的方程是为着要尝试描写物质的一种特性。可是物质非常复杂,而这样一个方程事实上是不正确的。例如,若 E 变得太大,那么 D 便不再正比于 E 。对于某些物质来说,甚至在相对弱的电场下这个比例关系就已经垮台了。并且,这比例“常数”还可能依赖于 E 随时间变化有多快。因此这一种方程,象胡克定律一样,是一种近似。它不可能是一个深入而又基本的方程。反之,我们关于 E 的基本方程组,(10.17)和(10.19),却代表对静电学方面的最深刻而又最完整的理解。

§ 10-5 有电介质时的场和力

现在,我们将证明在电介质存在的情况下,关于静电学的一些普遍定理。我们已经看到,电容器的两平行板之间若充满了一种电介质,则电容会增大某一定因数。还可以证明,这对于任何形状的电容器都是正确的,只要在两块导体附近的整个区域里都充满一种均匀的线性电介质就行。在没有电介质时,待解的方程组为:

$$\nabla \cdot E_0 = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times E_0 = 0.$$

当有电介质时,前一个式子给修改了。因而,我们代之而有:

$$\nabla \cdot (\kappa E) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times E = 0. \quad (10.26)$$

现在,由于我们认为 κ 处处相等,这最后两方程还可以写成:

$$\nabla \cdot (\kappa E) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times (\kappa E) = 0. \quad (10.27)$$

因此,对于 κE 和对于 E_0 就有相同的方程组,它们具备 $\kappa E = E_0$ 的解。换句话说,比起没有电介质时的情况,场处处都削弱了一个因数 $1/\kappa$ 。既然电压是电场的线积分,所以电压也被降低了这同一因数。由于电容器电极上的电荷在两种情况下都被认为是相同的,式(10.2)就告诉我们,在一个处处都充满着均匀电介质的情况下,电容增大了 κ 倍。

现在我们要问,在有电介质时两块导体之间力该如何?考虑一种处处均匀的液态电介质。我们早已看到,一种求力的方法是把能量相对于一适当距离取微分。如果两导体上的电荷等量异号,能量就是 $U = Q^2/2C$, 其中 C 为它们的电容。利用虚功原理,任何一个分力都要由微分给出。例如,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (10.28)$$

既然电介质会给电容增大一个因数 κ , 所有力就将减少这同一因数。

必须强调,我们上面所说的只有对于液态电介质才正确。嵌在固态电介质里的导体的

任何移动都会改变电介质的机械应力条件并改变其电学特性，以及引起电介质里某种机械能量的变化。在液体中移动导体，则不会使液体发生变化。液体会移至一个新的地方，但它的电学特性却没有改变。

许多较古老的电学书中，往往从这样一个“基本”定律出发，即两电荷间之力为

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \kappa r^2}, \quad (10.29)$$

这种观点完全不能令人满意。其一是，它并非普遍正确，只有对于一个充满了某种液体的世界才正确。其次，它有赖于 κ 是常数这么一个事实，那对于大多数实际材料来说这只是近似地正确。从电荷处于真空中的库仑定律出发会好得多，那永远是正确的（对于静止电荷来说）。

在固体中究竟会发生什么呢？这是一个十分困难的问题，至今还未得到解决，因为在某种意义上它是不确定的。如果你把电荷放进一固态电介质里面去，将产生各种压强和胁变。这就不能同虚功原理打交道，假如不把所需以压缩该固体的机械能量也包括进去的话，而一般说来，要对起因于固体本身的电力和机械力作出一种唯一区别那是相当困难的。幸而还没有人曾经切实需要弄清楚刚才所提的那个问题的答案。他可能有时想要知道在一固体中将会有多少胁强存在。尽管这是能够算出的，但比起我们对于液体所已获得的那种简单结果就要复杂得多了。

在电介质理论中有一个非常复杂的问题：为什么一个带电物体会拾起一些小块电介质？如果你在一个干燥的日子里梳一下头发，那梳子会立即吸起一些小纸片来。如果你无意中想起这件事，你很可能会假定梳子上有一种电荷而纸片上则有与之异号的电荷。但纸片开始时是电中性的。它并没有任何净电荷，但不管怎样它终于被吸引过来了。真的！有时纸片会来到梳子上，然后又飞开，在它接触到梳子之后就立刻被排斥了。这其中原因当然在于：纸片接触到梳子时，拾得了一些负电荷，此后同号电荷便互相排斥了。但这并没有解答那原来的问题。首先，为什么纸片会朝着梳子跑来呢？

答案与电介质放在电场中时会被极化有关。两种符号的极化电荷都存在，它们分别被

梳子所吸引和排斥。然而，会有一个净吸引力，因为靠近梳子一边的电场比远离梳子那一边的电场为强——梳子并非一个无限大板块。它的电荷是局域性的。一块电中性纸片在一个平行板电容器里将不会被哪一块板所吸引。电场的变化才是这个吸引机制中绝对不可缺少的部分。

如图 10-8 上所示的，一块电介质总是从一弱场区被吸引至较强场区。事实上，人们能够证明，对于小件物体这个力正比于场强平方的陡度。为什么会长取决于场的平方呢？因为那些感生电荷既与电场成正比，而对于已给定的电荷则力又正比于场。然而，

正如刚才我们所指出的，只有当场的平方从一处变至另一处时才会有一个净力。所以力就正比于场的平方之陡度了。比例常数除含有其他东西之外，还包括物体的介电常数，并依赖于物体的大小和形状。

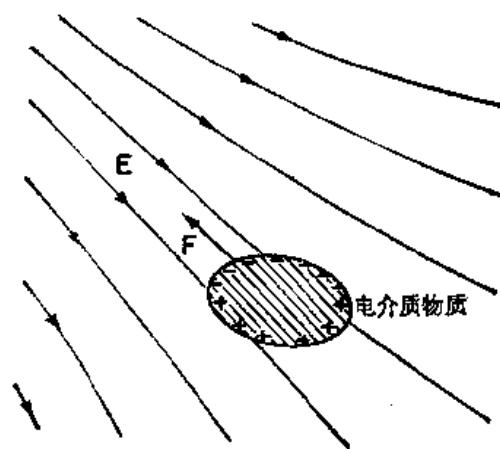


图 10-8 电介质物体在非均匀场中会感到一个指向场强较高的区域之力

有一个与此相关的问题，其中施于电介质上之力可以很准确地算出。如果在平行板电容器中有一片电介质只部分地插入，如图 10-9 所示，则将有一个力要把它拉进去。对这个力的详细审查是十分复杂的；它同该片电介质的边缘附近与两板间之场的非均匀性有关。然而，若我们不考察这些细节，而只是引用能量守恒原理，便能轻易地算出这个力来。我们可从以前所导出的公式求得这个力。式(10.28)相当于

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10.30)$$

仅仅需要找出电容是如何随该块电介质的位置而变化的。

让我们假设板的总长为 L ，宽为 W ，两板间距和电介质厚度都是 d ，而该片电介质插入的距离则为 x ，电容等于板上的总自由电荷除以两板间的电压。我们在上面已经见到，对于某一已知电压 V ，那自由电荷的面密度为 $\kappa\epsilon_0 V/d$ 。因而在板上的总电荷就是

$$Q = \frac{\kappa\epsilon_0 V}{d} \cdot xW + \frac{\epsilon_0 V}{d} (L-x)W,$$

由此可以得到电容：

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa x + L - x). \quad (10.31)$$

应用式(10.30)，便有

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa - 1). \quad (10.32)$$

原来这个式子并没有什么特别用途，除非你碰巧需要知道在这种情况下之力。我们只希望表明在求施于电介质材料上之力时能量理论往往能避免一大堆复杂性——正如在目前情况下本来就应该有的那些复杂性。

上面关于电介质理论的讨论我们只限于这样的与电现象打交道，即承认材料具有与电场成正比的极化强度。为什么会有这样一个正比性，也许对物理学更有重大意义。一旦我们从原子的观点理解了介电常数的起源，我们便能运用在各种不同环境下对介电常数的电学测量结果以获得有关原子或分子结构的详细知识。这方面的部分问题将在下一章加以讨论。

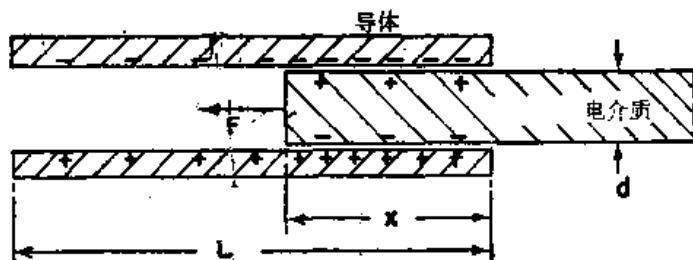


图 10-9 作用置于一平行板电容器中的一片电介质
上之力可通过应用能量守恒原理而算出

11

在电介质内部

§ 11-1 分子偶极子

在本章中我们将讨论为什么某些材料会是电介质。我们曾于上一章中说过：一旦领会了当施一电场于电介质上时，场将在原子中感生一偶极子，那我们对于那些含有电介质在内的带电系统的性质本来就应有所理解了。确切地说，若电场 E 在每单位体积里感生了一个平均偶极矩 P ，则介电常数 κ 是由下式给出的：

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}. \quad (11.1)$$

我们已经讨论过这个方程如何应用。现在要来谈论当材料内部存在电场时，极化发生的机制。将从最可能简单的例子——气体的极化——谈起。但即使是气体，也已有一定的复杂性，它就存在两种类型。某些气体，比如氧气，其中每一分子含有一对对称的原子，因而不会存在内禀偶极矩。但其他分子，如水蒸气（含有氢和氧两种原子的非对称排列）那样，则有一永偶极矩。正如在第六和第七章中我们曾经指出的，水汽分子中的那些氢原子带有一平均正电荷而氧原子则带有一负电荷。既然负电荷的重心与正电荷的重心不一致，该分子的总电荷分布就会形成一个偶极矩。象这样的分子叫做有极分子。在氧中，由于分子的对称性，正电荷重心与负电荷重心重合，因而氧分子就是一个无极分子。然而，当氧被置在电场中时，它仍然会变成一个偶极子。这两种类型的分子形状示如图 11-1。

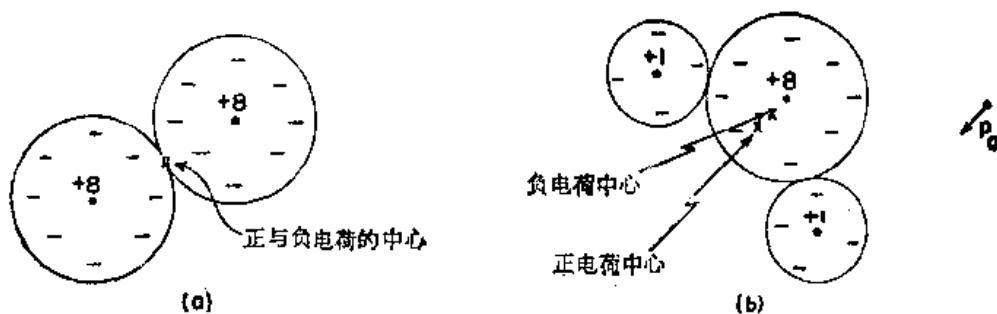


图 11-1 (a) 氧分子具有零偶极矩；(b) 水分子则拥有一永偶极矩 P_0

§ 11-2 电子极化强度

我们将首先讨论无极分子的极化，可以从最简单的单原子气体（例如，氦）开始。当这样一种气体的原子处在电场中时，电子会被场拉向一边而核则被拉向另一边，如图 10-4 所示。尽管相对于我们在实验上所能施加的电力来说原子是十分坚硬的，但仍会有一个微小的电荷中心转移，从而感生了一个偶极矩。对于弱场来说，这位移量，也就是偶极矩，会与电场成正比。产生这种感生偶极矩的电子分布的位移称为电子极化强度。

过去与折射率理论打交道时，我们曾在第一卷第三十一章中讨论过电场对一原子的影响。如果你稍为思考一下，便将看到，现在我们所应该做的就正如那时所曾做过的一样。但

现在需要关心的却只是那种不随时间变化之场，而以前折射率则是取决于随时间变化之场。

在第一卷第三十一章中我们曾经假定，当一原子置于一振动的电场中时，原子里电子的电荷中心会遵循下列方程而运动：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = q_e E. \quad (11.2)$$

式中，第一项为电子质量乘以其加速度；第二项为恢复力；而右边那一项则代表来自外电场之力。若电场以频率 ω 变化，则方程(11.2)会有这么一个解：

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (11.3)$$

这表明，当 $\omega = \omega_0$ 时，会发生共振。以前当得到这个解时，我们曾把它理解成在于申明 ω_0 是光（到底是在可见光区还是在紫外光区，则取决于该原子）被吸收的频率。然而，现在我们感兴趣的却只是属于恒定场的那种情况，也就是，只对于 $\omega = 0$ 有兴趣，因而可以将(11.2)中的加速度项略去，并得出电荷的位移为

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}. \quad (11.4)$$

由此可见，一个单独原子的偶极矩为

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \quad (11.5)$$

在上述这种理论上，偶极矩 p 确与电场成正比。

人们经常把上式写成：

$$p = \alpha \epsilon_0 E. \quad (11.6)$$

(ϵ_0 又一次由于历史原因而被放了进去。)其中常数 α 称为原子的极化率，并具有 L^3 的量纲。它是对于用电场在一个原子中感生一个偶极矩有多么容易的一种量度。将(11.5)和(11.6)两式比较，我们这一简单的理论申述

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.7)$$

设单位体积中共有 N 个原子，则每单位体积的极化强度 P 就是

$$P = Np = N\alpha \epsilon_0 E. \quad (11.8)$$

把(11.1)和(11.8)两式拼合在一起，我们便得

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = N\alpha, \quad (11.9)$$

或者，利用式(11.7)，可得

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi Ne^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.10)$$

从上式我们该预料到不同气体的介电常数 κ 应取决于该气体的密度及其对于光的吸收频率。

当然，上述公式只是一种近似，因为在式(11.2)中我们选择了一个略去量子力学复杂性的模型。例如，我们曾经假定每一原子仅有一个共振频率，而实际上却有许多个。要适当地计算原子的极化率 α ，我们就必须引用那完整的量子力学理论，但上面的经典概念却已为我们提供了一个合理的估计。

让我们来看看，是否能对某种物质的介电常数得到一个正确的数量级。假设是在对氢作尝试。过去(在第一卷第三十八章中)就曾估计过电离一个氢原子所需的能量应约为

$$E \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad (11.11)$$

为了对那个固有频率 ω_0 作出估计，可以令这一能量等于 $\hbar\omega_0$ ——即固有频率为 ω_0 的那种原子振子的能量。这样我们就得到：

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3}.$$

若现在应用这一 ω_0 值于式(11.7)中，则对于电子极化率可以得到：

$$\alpha \approx 16\pi \left[\frac{\hbar^2}{me^2} \right]^3. \quad (11.12)$$

(\hbar^2/me^2)这个量是玻尔原子的基态轨道半径(见第一卷第三十八章)，等于 0.528 埃。凡处于标准压强和标准温度(1 大气压、0°C)之下的气体总会有 2.69×10^{19} 个原子/厘米³，因而式(11.9)就给出：

$$\kappa = 1 + (2.69 \times 10^{19}) 16\pi (0.528 \times 10^{-8})^3 = 1.00020. \quad (11.13)$$

氢气的介电常数已测定为

$$\kappa_{\text{实测}} = 1.00026.$$

由此可见，我们的理论已差不多对头了。不应该期望会比此更佳的了，因为测量当然是用正常氢气进行的，那所含的是双原子分子，而不是单原子。如果分子中各原子的极化与彼此分开了的原子极化不大相同，那应不足为怪。可是，实际上分子效应却不会那么大。对于氢原子的 α 进行严格的量子力学计算会给出一个比式(11.12)约大 12% 的结果(即将 16π 改变成 18π)，因而预言一个更接近于观察值的介电常数。不管怎样，我们认为对于电介质的模型显然已相当之好。

对上述理论的另一个考验，是将式(11.12)试用于具有更高激发频率的那些原子。例如，需要有 24.5 伏才能将氮原子中的电子拉出来，这可与电离氢所需的 13.5 伏作比较。因此，我们会期待，氮的吸收频率 ω_0 比氢应约大一倍，从而 α 就应只有四分之一大了。期待值为

$$\kappa_{\text{氮}} \approx 1.000050.$$

从实验上则得到

$$\kappa_{\text{氮}} = 1.000068.$$

所以你可以看到，我们的粗糙估计方向是对头的。至此，我们就已理解了无极气体的介电常数，然而那不过是定性的，因为我们还未用到有关原子中电子运动的那种正确原子理论。

§ 11-3 有极分子；取向极化

其次，我们将考虑那种带有永偶极矩 p_0 ——如水分子那样——的分子。在没有电场时，个别偶极子将指向无规方向，从而使每单位体积内的净矩为零。但加上了电场之后会发生两件事。首先，由于场对电子施加了力，就有一额外偶极矩被感生，这部分恰好给出一个与上面对无极分子所找到的相同的电子极化率。当然，对十分精密的工作，这一效应是应该包括进去的，但目前我们却暂时要加以忽略。(在最后总是可以加上去的。)其次，电场倾向于将各个偶极子排列起来使在每单位体积中产生一个净矩。假使气体中所有偶极矩都整齐地

排列起来了，那就该有很大的极化强度，但这种现象却从未发生过。在寻常温度和电场的作用下，分子在热运动中的相互碰撞会使它们不能排列得太整齐，但总会有某种净取向的，因而也就有某种极化强度（见图 11-2），这里出现的极化强度可以通过第一卷第四十一章中所描述的那种统计力学方法来加以计算。

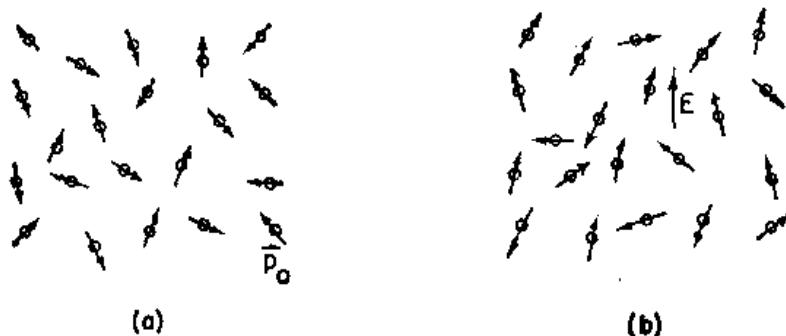


图 11-2 (a) 在有极分子的气体中，各别偶极矩无规取向，在一小体积里的平均矩为零；
(b) 当有电场时，分子们就有某种平均取向了

要运用这种方法必须了解偶极子在电场中的能量。考虑一个电偶极矩 \mathbf{p}_0 处在电场之中，如图 11-3 所示。正电荷的能量为 $q\phi(1)$ ，而负电荷的能量为 $-q\phi(2)$ 。于是偶极子的能量就是

$$U = q\phi(1) - q\phi(2) = q\mathbf{d} \cdot \nabla\phi,$$

或

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos\theta, \quad (11.14)$$

其中 θ 是 \mathbf{p}_0 与 \mathbf{E} 所成之角。正如我们该预料到的，当偶极矩跟着电场方向排列时其能量就最低。

现在，我们利用统计力学方法来找出会有多少取向排列发生。从第一卷、第四十章中就已知道，在一热平衡态上拥有势能 U 的那种分子其相对数目正比于

$$e^{-U/kT}, \quad (11.15)$$

式中 $U(x, y, z)$ 乃作为位置函数的势能。这同一种论据也应该说明：若采用式(11.14)作为角度函数的势能，则在角度 θ 每单位立体角的分子数目应正比于 $e^{-U/kT}$ 。

令 $n(\theta)$ 为在角度 θ 每单位立体角的分子数目，我们便有

$$n(\theta) = n_0 e^{+p_0 E \cos\theta/kT}. \quad (11.16)$$

对正常的温度和电场来说，这指数值很小，因此通过对指数函数展开而取其近似式

$$n(\theta) = n_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right). \quad (11.17)$$

如果就式(11.17)遍及所有角度积分，我们便可找到 n_0 。积分结果应恰好等于 N ，即每单位体积的分子数目。 $\cos\theta$ 遍及所有角度的平均值为零，因而这一积分就刚好等于 n_0 乘以总立体角 4π ，我们得到：

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \quad (11.18)$$

由式(11.17)可以看出，沿场向 ($\cos\theta=1$) 的分子比逆场向 ($\cos\theta=-1$) 的分子会多些。因而在任一含有许多个分子的小体积里就将有一个每单位体积的净偶极矩——也即极化强

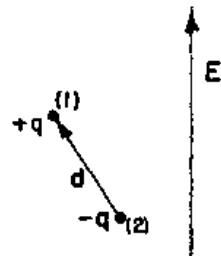


图 11-3 在场 E 中一个偶极子 \mathbf{p}_0 的能量为 $-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$

度 P . 要算出 P , 必须得到单位体积内一切分子偶极矩的矢量和. 既然知道这结果将会沿 E 方向, 我们便仅仅对在这一方向上的分量求和(垂直于 E 的那个分量则将有零值之和):

$$P = \sum_{\text{单位体积}} p_0 \cos \theta_i.$$

可以通过遍及整个角分布的积分而算出这个和. 在 θ 上的微立体角为 $2\pi \sin \theta d\theta$, 因而

$$P = \int_0^\pi n(\theta) p_0 \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (11.19)$$

把有关 $n(\theta)$ 的式(11.17)代入, 我们便有

$$P = -\frac{N}{2} \int_0^\pi \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) p_0 \cos \theta d(\cos \theta),$$

这结果很容易积分出来:

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \quad (11.20)$$

极化强度与场 E 成正比, 因而呈现为正常的电介质. 并且, 正如我们所预期的, 极化强度与温度成反比, 因为在较高温度上由于碰撞而失去了整齐排列的那些分子就多起来. 这个 $1/T$ 依存关系叫作居里(Curie)定律. 永偶极矩 p_0 之所以出现平方有下述原因: 在一给定电场中促使排列整齐之力与 p_0 成正比; 而由于排列好的从而产生的平均矩又与 p_0 成正比, 于是平均感生矩就会正比于 p_0^2 .

现在应该看看式(11.20)与实验符合的程度怎样? 让我们考察水蒸气的情况. 既然还

不知道 p_0 是什么, 就不能直接算出 P 来, 但式(11.20)确实预言 $\varepsilon - 1$ 应与温度成反比, 这点我们是该加以核对的.

由式(11.20)得到

$$\varepsilon - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (11.21)$$

因而 $\varepsilon - 1$ 应正比于密度 N , 而反比于绝对温度. 介电常数曾在几个不同压强和温度上测量过, 对那些压强和温度的适当选取可使每单位体积里的分子数能保持固定不变*. [注意! 假如测量都在恒压下进行, 则每单位体积里的分子数该线性地随温度的升高而减少, $\varepsilon - 1$ 就应该按 T^{-2} 变化, 而不是按 T^{-1} 变化.] 在图 11-4 中, 我们把从实验观测到的 $\varepsilon - 1$ 作为 $1/T$ 的函数而图示出来. 由式(11.21)所预期的那种依存关系遵循得很好.

有极分子的介电常数还有另一种特性——随外加电场的频率不同而起变化. 由于分子具有转动惯量, 要使那些笨重分子朝着场的方向转动就需要相当时间. 因此, 若所加的电场频率落在微波区或者还更高, 则对于介电常数中的有极贡献便会开始减退, 因为分子跟不上那样高的频率. 与此相反, 电子极化率即使高至光频也仍保持一样, 这是由于电子惯性较小的缘故.

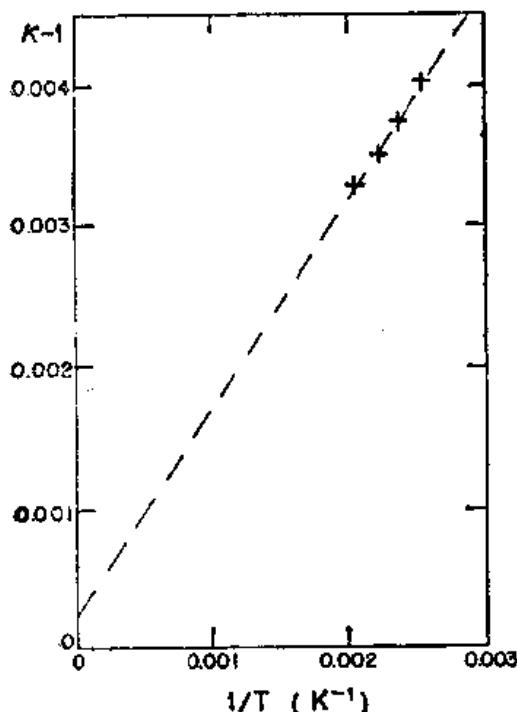


图 11-4 在不同温度上对水汽的介电常数的实验测量结果

* 参考: Sänger, Steiger, and Gächter, *Helvetica Physica Acta* 5, 200 (1932).

§ 11-4 电介质空腔里的电场

现在将要转到一个有趣而又复杂的问题——致密材料中的介电常数问题。假设我们选取液态氦或液态氩，或其他某种无极材料。我们仍将期待会有电子极化。可是在致密材料中， P 可以很大，从而使作用于个别原子上之场会被其近邻原子的极化所影响。问题在于，作用于个别原子上的电场究竟如何？

设想有一液体置于一电容器的两极之间。若板上带电，则这些电荷在液体里产生一个电场。但在个别原子中也还有电荷，因而总场 E 便是这两种效应之和。这一真正电场在液体里从一点至另一点变化得十分迅速。这电场在原子里面很强——特别是刚好在核附近——而在原子与原子之间就相对弱了。两板间的电势差是对这一总场的线积分。若略去一切微小尺度上的变化，便可以想出一个平均电场 E 来，而那恰好就是 V/d 。（这是上一章中我们所曾采用过的场。）应该把这个场想象成在一个含有许多个原子的体积里的平均值。

现在你也许认为，一个处在“平均”位置上的“平均”原子该感觉到这一个平均场。可是事情却并不那么简单，正如通过考虑若想象电介质中不同形状的空腔里所发生的情况就可证明的那样。比方，假设在一块被极化了的电介质里挖出一个槽来，该槽的取向与电场平行，如图 11-5(a) 所示。由于我们已知道 $\nabla \times E = 0$ ，故在环绕图(b) 那条曲线 L 而取的线积分就应等于零。槽中之场所提供的贡献应该恰好抵消来自槽外之场的贡献。因此，实际上在一条狭长槽的中心处之场 E_0 就恰好等于在电介质里所已找到的那种平均电场。

现在考虑那大侧面是与 E 垂直的另一种槽，如图 11-5(c) 所示。在这种情况下，槽里的场 E_0 就不同于 E ，因为极化电荷出现在槽面上了。如果我们应用高斯定律于图(d) 中所画出来的那个 S 面，则可以找出槽里的场 E_0 是由下式给出的：

$$E_0 = E + \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (11.22)$$

式中， E 再次代表电介质里之场。（该高斯面中含有面极化电荷 $\sigma_{\text{极化}} = P$ 。）我们曾在第十章中提及， $\epsilon_0 E + P$ 这个量常称为 D ，因而 $\epsilon_0 E_0 - D_0$ 就等于在电介质里的 D 。

在物理学较早期的历史中，当人们认为每个量都要直接由实验来下定义是非常之重要时，发现不必在原子之间电场高低不平之处爬来爬去，就能够给我们所理解到的电介质里的 E 和 D 下定义，感到十分喜悦。平均场 E 在数值上就等于在一个平行于场的槽中所量得的场 E_0 。而场 D 则可通过找到在一个垂直于场而挖出来的槽中的 E_0 而给量度出来。但毕竟从没有谁曾经按照这种办法将其量度出来的，因而那不过是一种哲学上的玩意而已。

对于结构不太复杂的大多数液体来说，我们可以期待：一个原子平均地说受其他原子所

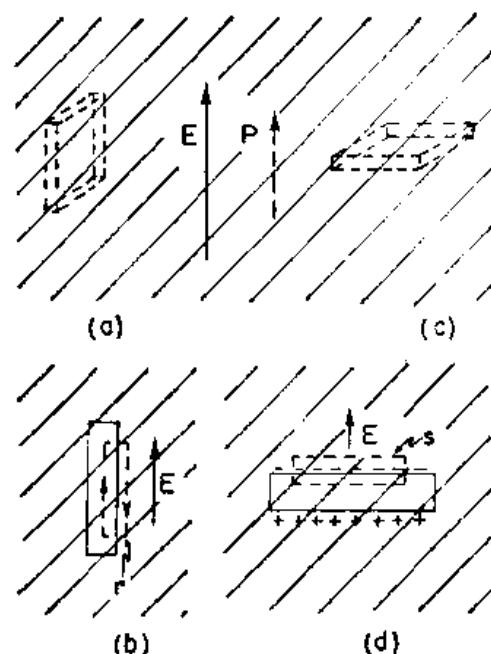


图 11-5 从电介质里割出一个槽来，槽中的场取决于该槽的形状及取向

請勿用於盈利之目的

包围，这非常近似于被局限在一个球形的空腔之中。因此，我们就应该问：“在一个球形空腔之中场到底是怎样？”注意！若在一块均匀极化材料中，设想挖出一个球形空腔，那不外是把极化材料中的一个球体移开出去罢了，这样就可将腔里之场找出来。（我们必须想象，在挖出该空腔之前极化已被“冻结”了。）然而，根据迭加原理，在未挖出该球体之前，电介质内部之场应等于由球体体积外所有一切电荷之场再加上由该球体内部的电荷所产生之场。这就是说，若我们把在均匀电介质里的场叫作 E ，则可以写成

$$E = E_{\text{空腔}} + E_{\text{塞子}}. \quad (11.23)$$

式中， $E_{\text{空腔}}$ 指在该腔里之场，而 $E_{\text{塞子}}$ 则为一个均匀极化球体里之场（见图 11-6）。由一个均匀极化球体所产生之场，如图 11-7 所示。在这个球体之内，场是均匀的，其值为

$$E_{\text{塞子}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.24)$$

应用式(11.23)，我们得到

$$E_{\text{空腔}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.25)$$

在一个球形空腔里之场比平均场要大 $P/3\epsilon_0$ 。（这个 $1/3$ 系数表明，球形空腔里之场在一个与场平行的槽里之场和一个与场垂直的槽里之场之间。）

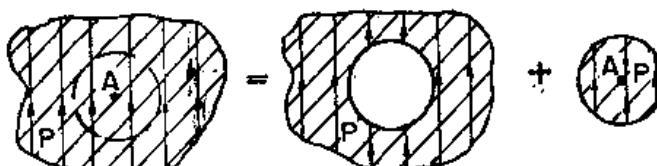


图 11-6 电介质中任一点 A 上之场，可认为是在一个球形空腔里之场与由一个球形塞子所产生的场的总和

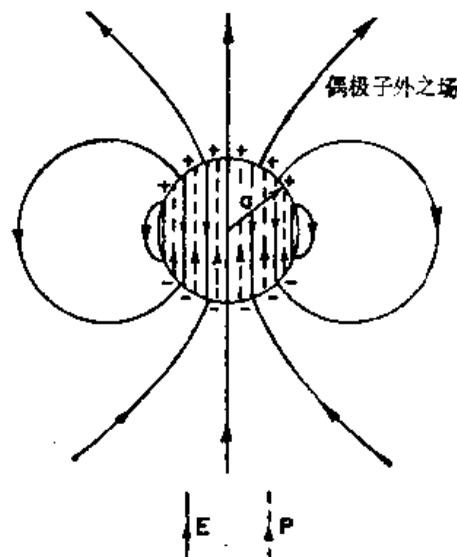


图 11-7 一个均匀极化球体的电场

§ 11-5 液体的介电常数；克劳修斯-莫索提方程

在液体中，我们期待对个别原子起极化作用之场类似 $E_{\text{空腔}}$ ，而不是 E 。如果把式(11.25)的 $E_{\text{空腔}}$ 用作式(11.6)中的极化场，则式(11.8)变成

$$P = N\alpha\epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right), \quad (11.26)$$

或

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E. \quad (11.27)$$

回忆一下， $\alpha - 1$ 正好是 $P/\epsilon_0 E$ ，因而便有

$$\alpha - 1 = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}. \quad (11.28)$$

这为我们提供了一个以原子极化率 α 来表达的液体介电常数。式(11.28)所示那种关系称为克劳修斯-莫索提(Clausius-Mossotti)方程。

每当 $N\alpha$ 十分小时，如在气体那种情况（因为密度 N 很小），该 $N\alpha/3$ 项比起 1 来则可以忽略，而我们也就得到那个以往的结果，即式(11.9)，

$$\kappa - 1 = N\alpha \quad (11.29)$$

让我们拿式(11.28)同一些实验结果作一比较吧。首先，必须寻找能用 κ 的测量值通过式(11.29)算出 α 来的那些气体。例如，对于在摄氏零度的二硫化碳来说，介电常数为 1.0029，所以 $N\alpha$ 就是 0.0029。气体的密度一般是容易算出的，而液体的密度则可从手册中找到。在 20°C 上，液态 CS₂ 的密度比在 0°C 上该气体的密度要高 381 倍，因而——倘若我们近似地认为二硫化碳凝成液体时，其基本原子极化率并不会发生变化——在液体中的 $N\alpha$ 便将是 0.0029 的 381 倍，即 1.11。注意该项 $N\alpha/3$ 接近 0.4，所以就显得极为重要。引用这些数字可以预料会得出一个等于 2.76 的介电常数，而这与 2.64 的观测值符合得相当之好。

在表 11-1 中，我们列出了几种不同材料的一些实验数据（从《化学与物理学手册》中得来的），以及按刚才所述的方法由式(11.28)计算而得的介电常数。对于氩和氧，观测值与理论值间的符合程度甚至比 CS₂ 还要好——而对于四氯化碳就不那么好了。大体上，所得结果都表明式(11.28)十分良好。

表 11-1 由气体的介电常数算出液体的介电常数

物 质	气 体			液 体				
	κ (实验值)	$N\alpha$	密 度	密 度	比 值*	$N\alpha$	κ (预料值)	κ (实验值)
CS ₂	1.0029	0.0029	0.00339	1.293	381	1.11	2.76	2.64
O ₂	1.000523	0.000523	0.00143	1.19	832	0.435	1.509	1.507
CCl ₄	1.0030	0.0030	0.00489	1.59	325	0.977	2.45	1.24
A	1.000545	0.000545	0.00178	1.44	810	0.441	1.517	1.54

* 比值 = 液体密度 / 气体密度。

我们关于式(11.28)的推导仅适用于液体中的电子极化。对于 H₂O 那样的有极分子来说，这个式子就不正确了。如果对水也作同样计算，便会得出 $N\alpha$ 等于 13.2，那意味着在该液体中介电常数竟会变成负值，但 κ 的观测值却是 80。这一问题牵涉到要对永偶极矩作正确处理，而翁沙噶(Onsager)就曾指出过正确的方向。现在我们没有时间来谈论这一情况，但若你有兴趣的话，在克特耳(Kittel)所著的《固体物理导论》中是有所论述的。

§ 11-6 固态电介质

现在我们转来谈固体。关于固体的第一个有意义的事实是，可能会有嵌进去的永恒极化——即使没有外加电场，极化也依然存在。例如，蜡这样一种材料，它含有带永偶极矩的长形分子。要是你熔解了一些蜡，并当它在液态时就加上一强电场，使得那些偶极矩部分地排列起来，那么当液体凝固时它们便将保留原样，当场移去之后，这固体材料仍将具有那遗留下来的永恒极化。象这样的固体叫永电体。

在永电体的表面上会有永恒的极化电荷。它是永磁体的类似物。然而却并不怎么有用，因为来自空气中的自由电荷会被吸引至其表面上，终于抵消了那些极化电荷。永电体被“放了电”，因而便没有可见的外电场了。

在某些结晶物质中，也可以找到自然发生的内部永极化强度 P 。在这类晶体中，点阵的每一晶胞有一个彼此全同的永偶极矩，如图 11-8 所示。即使没有外加电场，所有的偶极子仍会指向同一方向。事实上，许多复杂晶体就都有这么一种极化现象。但我们平常并没有

注意到它，因为出现于晶体外面之场已被放了电，正如那永电体一样。

然而，如果晶体中这些内在偶极矩发生变化，那么一些外电场将终于会出现。因为此时

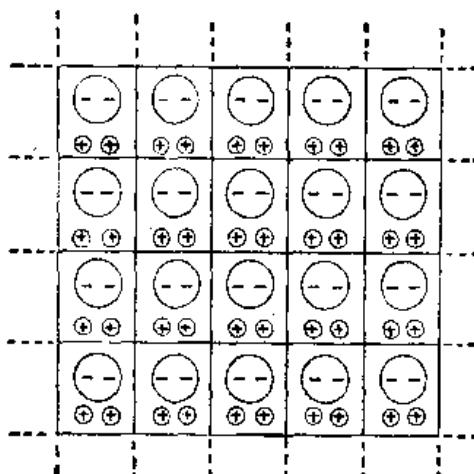


图 11-8 复杂的晶体点阵可以
有一永恒的内禀极化强度 \mathbf{P}

还来不及给那些杂散电荷聚集起来以便抵消这些极化电荷。如果电介质是在电容器里，那么自由电荷将会感生在极板上。例如，当电介质加热时，其中的电偶极矩可能由于晶体受热膨胀而发生变化。这一效应称为热电效应。同样地，如果我们改变晶体中的胁强——如把晶体搞弯——偶极矩也会稍为改变，因而称为压电效应的那种微小电效应也可以探测出来。

对于那些不具有永电矩的晶体来说，我们可以搞出一种涉及原子中电子极化的介电常数理论来。这跟液体的情况差不多。有些晶体内部还存在可转动的偶极子，而这些偶极子的转动也将对 ϵ 有所贡献。

在诸如 NaCl 那种离子晶体中也还有离子极化率。这种晶体含有由正、负离子排列而成的跳棋盘，在电场中正离子会被拉向一边而负离子拉向另一边；正电荷和负电荷之间有一个净相对运动，因而也就有一种体积极化强度了。本来我们是能够从食盐晶体的硬度知识来估计这离子极化率的，但这里不打算讨论这一课题。

§ 11-7 铁电现象; BaTiO_3

现在要来描述几乎是由于偶然性才具有嵌入式永电矩的那一种特殊晶体。情况竟是那么接近边缘，以致若稍微升高一点温度，该晶体便将完全丧失那永电矩。反之，若晶体结构接近于立方，以致其中矩都可以任凭转向，则可以在改变外电场时探测到一个巨大的电矩变动。所有的矩都翻转过来了，因而得到了一个大的效应。凡拥有这种永电矩的物质都称为铁电体，这是模仿了首先在铁中发现的那个相应铁磁效应。

我们愿意通过对铁电材料的一个特殊例子的描述，来解释铁电现象是如何产生的？有几种不同途径会产生铁电特性。但我们将仅仅讨论其中一种神秘情况——钛酸钡 BaTiO_3 。这种材料的基胞具有如草图 11-9 的那种晶体点阵。事实证明，在某一温度，具体地说即在 118°C 以上，钛酸钡是一种寻常电介质，具有巨大的介电常数。然而，在这一温度以下，则它会突然取得一个永电矩。

在计算固态材料的极化时，我们必须先求得每一晶胞处的局部电场。同时还应该将来自极化的场也计算在内，如同上面处理液体情况时那样。但晶体并非均匀液体，因而不能采用在一个球形空腔里所该获得的那种场。如果你对该晶体进行计算，就会发现在式(11.24)中的那个因数

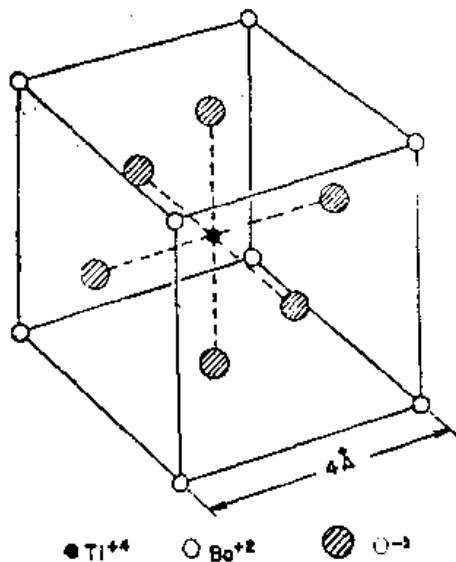


图 11-9 BaTiO_3 的一个晶胞，原子实际上填充了大部分空间，但为了看起来清楚起见，仅表达出它们的中心位置

$1/3$ 已稍为发生了变化，但与 $1/3$ 仍相距不远。（对于简单立方晶体来说，就恰好是 $1/3$ 。）因此，在这里的初步讨论中，我们将假定在 BaTiO_3 中这一因数为 $1/3$ 。

原来当我们在上面写出式(11.28)时你可能就已怀疑，要是 $N\alpha$ 变成大于 3 那该会怎么样呢？似乎显出 α 应变成无限大。但这肯定是不对的。让我们来看看，要是在一特定晶体中 α 逐渐增大会出现什么情况。当 α 变大时，极化跟着增加，从而形成了一个较强的局部电场。可是一个较大的局部电场却将使每一原子的极化增强，从而又进一步提高了局部电场。假如原子的“屈从”程度足够大，则这一过程会继续下去；这里有一种反馈作用，引起了极化的无限度增长——假定每一原子的极化始终会正比于场而增长。这“脱缰”条件发生在 $N\alpha = 3$ 时。当然，极化仍然不会变成无限大，因为感生矩与电场之间的正比关系在强场中就会垮下来，从而使上述的一些公式不再正确。真正发生的情况，是在点阵中已“锁住”了一个自生自长的高度内部极化。

在 BaTiO_3 的例子中，除了电子极化之外，还有相当大的离子极化。这可假定是由于钛离子在立方晶体中会稍为移动一点点。不过点阵是会抵抗大的运动的，因而当钛离子已移过了一个小距离之后，它就被堵住而不再动。但这时晶胞却已遗留下一个永偶极矩了。

在大多数晶体中，这就是在各种温度上能够获得的实际情况。关于钛酸钡的十分有趣事态，是在于存在这么一个微妙条件，即如果 $N\alpha$ 只减少一点点就不会粘住了。既然 N 是随温度升高而减少的——由于热膨胀的缘故——我们便能够通过改变温度来调整 $N\alpha$ 。在那临界温度之下它恰好才被粘住，因而——通过加上电场——就很容易把极化转移而使其被锁住于另一个方向上了。

让我们来看看能否更详细地对所发生的事态进行分析。就把 $N\alpha$ 刚好等于 3 的那个温度叫做临界温度 T_c 。当温度升高时，由于点阵膨胀， N 就稍为减少一些。既然这一膨胀很小，我们便可以说，在临界温度附近，

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_c). \quad (11.30)$$

式中 β 是一个小常数，与热膨胀系数同一数量级，或者约等于 10^{-6} 至 $10^{-5}/^\circ\text{C}$ 。现在，若我们将这一关系代入式(11.8)中，便可以得到

$$\alpha - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

既然已假定 $\beta(T - T_c)$ 比起 1 来很小，也就可以将此式近似地化成

$$\alpha - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_c)}. \quad (11.31)$$

当然，这个关系式仅在 $T > T_c$ 时才是对的。我们看到，恰好就在临界温度以上， α 非常大。由于 $N\alpha$ 那么靠近于 3，因此就有一个巨大的放大效应，使介电常数可以轻易地达到 50,000 至 100,000。这对温度也非常敏感，当温度升高时，介电常数与温度成反比而降低，可是，不同于偶极性气体，那里的 $\alpha - 1$ 与绝对温度成反比，而对于铁电体则反比于绝对温度与临界温度两者之差[这一定律称为居里-外斯(Curie-Weiss)定律]。

当我们把温度降至临界温度时，会发生什么情况呢？如果设想一个象图 11-9 所示的那种晶胞点阵，便会见到有可能沿竖直线拣出一串离子来。在这些串链中，存在一种含有彼此相间的氧离子和钛离子。还有其他一些线则分别由钡离子或氧离子构成的，但沿这些线上的间隔要大些。通过想象出如图 11-10(a)所示的那一串串离子我们便可以作出一个简单

模型来模拟这一情况。沿着一种我们所称之为主链的，其中离子间隔为 a ，等于点阵常数的一半；在彼此全同之串链间，其横向距离则为 $2a$ 。在这些主链之间还有一些不那么致密的链，我们暂且不予考虑。为使分析稍为简单些，我们也将假定在各条主链上的所有离子都全同。（这不是一种极粗略的简化，因为所有一切重要效应仍将出现。这是理论物理中的一条技巧。先做出另一个问题，因为那是人们首次较容易加以估计的——然后，在已经理解了事情怎样进行之后，才将一切复杂情况都放进去。）

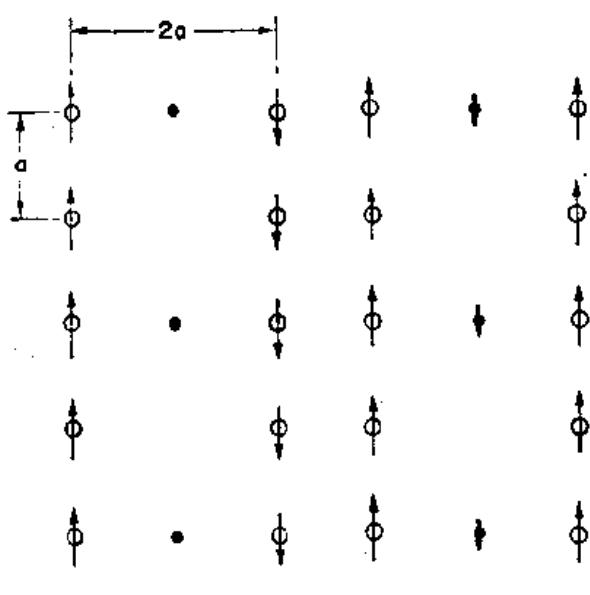


图 11-10 关于铁电体的模型。(a)相当于反铁电体；(b)相当于正常铁电体

现在，让我们试找出按照上述模型该会发生的事情。我们假定每一原子的偶极矩为 p ，并希望算出在那条串链中作用于每一原子上之场，必须找出来自其他各原子之场的总和。我们将首先算出仅来自一条竖直链中各偶极子之场；其他的链我们将在以后再谈。沿偶极子轴向并与其相距为 r 的场由下式给出：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (11.32)$$

作用于任一个特定原子上的，由那上、下两个等距偶极子所提供之场，方向总是相同，因而对于整条链来说，我们就得到：

$$E_{\text{总}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \cdot \left(2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} + \dots \right) = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{0.383}{a^3}. \quad (11.33)$$

不太难证明：要是我们的模型象一块完整的立方晶体——也就是说，若近旁一些全同之链只是离开 a 那么远——则数值 0.383 便应改成 $1/3$ 。换句话说，要是近旁一些链位于距离 a 上，这些链对整个和的贡献也不过是 -0.050 个单位。然而，我们正在考虑的近旁一条主链却在 $2a$ 距离上，而正如你可回忆第七章那里所讲的，来自一个周期性结构之场乃是随距离作指数函数式衰减的。因此，这些线的贡献将远比 -0.050 为小，从而我们便可以略去所有其他之链了。

现在，应当找出要使脱缰过程能够进行必须有多大的极化率 α 。假定链中每一原子的感生矩 p 正比于外加之场，如式(11.6)所示。利用式(11.33)，就可从 $E_{\text{总}}$ 获得作用于原子上的起极化场。因而便有下列两式：

$$p = \alpha\epsilon_0 E_{\text{总}}$$

和

$$E_{\text{总}} = \frac{0.383}{a^3} \frac{p}{\epsilon_0}.$$

上面这一对方程有两个解： E 和 p 均为零；或

$$\alpha = \frac{a^3}{0.383},$$

保持 E 和 p 都有限大。于是，若 α 有 $a^3/0.383$ 那么大，则由它本身之场所维持的永极化便将开始。这一临界等式对于钛酸钡来说，必须恰在温度 T_c 上达到。（注意，假如对于弱场 α

会高于那临界值，则在强场中 α 该会降低，而在平衡态上我们所已找到的那同一等式就仍将有效。)

在 BaTiO_3 中，间距 a 为 2×10^{-8} 厘米，因而应该指望 $\alpha = 21.8 \times 10^{-24}$ 厘米³。可以拿个别原子的已知极化率来作比较。对于氧， $\alpha = 30.2 \times 10^{-24}$ 厘米³，看来我们已踏上正轨了！但对于钛， $\alpha = 2.4 \times 10^{-24}$ 厘米³，那就相当之小。为了运用上述模型，可能应当采取它们的平均值。（本来也可再度就相间原子的那种链进行计算，但结果却几乎相同。）因此， α （平均） $= 16.3 \times 10^{-24}$ ，仍未达到足以提供永极化的程度。

但请等一等！迄今为止我们仅对电子极化率相加。此外，还有由于钛离子移动而引起的一些离子性极化。我们全部所需的是一个等于 9.2×10^{-24} 厘米³ 的离子极化率*。（采用相间原子所进行的更精密计算表明实际上需要有 11.9×10^{-24} 。）要理解 BaTiO_3 的特性，我们就得假定有这么一种离子极化率存在。

在钛酸钡中，为什么钛离子会有那么大的离子极化率，还不清楚。此外，在较低温度上，它在沿体对角线和在沿面对角线上的极化程度为什么会相同，也不明白。如果在图 11-9 中把各种球体的大小都计算上，并问在由钛的近邻氧离子所构成的箱子中钛离子是否会有点儿松动——那是我们所期望的，以便使它较易于移动——你却会找到完全相反的结果。它被塞得很紧。那些钡原子就有点儿松，但要是你仅让它们运动，则不能得到那种结果。因此，你会看出，这一课题实际上还没有百分之百弄清楚，仍然存在一些需要去探索的神秘的东西。

回到图 11-10(a) 那种简单的模型上来，我们看到了来自一条链之场有使其邻近的链接相反方向极化的倾向，这意味着尽管每一条链会被锁住，但每单位体积里却不会有净矩！（这样，虽然不应有外部的电效应，但仍会有一些热效应人们本可以观测到的。）象这样的系统确实存在，并称为反铁电体。因此，我们刚才所解释的实际上乃是反铁电体。然而，钛酸钡确会排列得如图 11-10(b) 那样。所有的氧钛链都在同一个方向上极化，因为它们之间还有一些中间链存在。尽管这些链中的分子并非极易于极化，也并非十分致密，但仍将在与氧钛链相反的方向上多少有所极化。这极化作用在近旁一条氧钛链上所产生的弱场就会促使它处于与第一条链相平行的方向。因此， BaTiO_3 的确是属于铁电性的，这是由于在链与链之间还存在一些原子。你或许会觉得奇怪：“在两条 O-Ti 链之间的直接影响又该会怎么样呢？”然而，应当记住，那直接效应是按指数函数随距离而减弱的。强偶极子之链在 $2a$ 距离上的效应可能还小于弱偶极子之链在 a 距离上的效应。

这一个目前我们对于气体、液体和固体的介电常数的理解的相当详尽报告就此结束。

* 按照上述的简单平均法计算，这个数字似乎应是 11.0×10^{-24} 厘米³。——译者注

12

静电模拟

§ 12-1 相同的方程组会有相同的解

自科学兴起以来，对于物理世界所获得的知识总数非常繁多，任何人要懂得其中的一个相当部分都似乎是不可的。但实际上一个物理学家仍很有可能掌握有关物理世界的广泛知识，而不致成为某一狭窄范围内的专家。这里面有三重原因：第一，有一些重大原理可以应用到一切不同种类的现象上去——诸如能量以及角动量的守恒原理。对这些原理的透彻理解会马上导致对许多东西的理解。其次，有这么一个事实，即许多复杂现象，诸如固体在受压缩时的行为，实际上基本取决于电力和量子力学方面的力，所以如果人们理解了电和量子力学的基本规律，至少对发生于复杂情况下的许多现象就有理解的可能。最后，还有一个最引人注目的符合：对于多种不同物理情况的方程，都具有完全相同的形式。当然，符号可能不同——一个字母代替了另一个字母——但方程的数学形式却彼此相同。这意味着，已经学习了一个学科，我们便立即拥有大量的直接而又精确的关于另一门学科的方程之解的知识。

现在，我们已结束了静电学这一课题，不久便将进入磁学和电动力学。但在这样做之前，我们愿意先来证明，在学习静电学的同时就已经学习了许多其他学科。我们将发现，关于静电学的方程组会出现在物理学的其他几个场合。通过对解答的直接转译（当然同一数学方程组应当具有相同的解），就有可能按与在静电学中同等容易——或同等困难——程度去解决在其他方面存在的问题。

我们知道，静电学方程组是：

$$\nabla \cdot (\kappa E) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}, \quad (12.1)$$

$$\nabla \times E = 0. \quad (12.2)$$

（这里选取了具有电介质的那种静电学方程组，以便得到最普遍的情况。）同样的物理内容也可以表达为另外一种数学形式：

$$E = -\nabla \phi; \quad (12.3)$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = -\frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (12.4)$$

现在问题的要点在于，有许多物理问题其数学方程都具有相同形式。有一个势(ϕ)其梯度乘以一标量函数(κ)，在取其散度时就会等于另一标量函数($-\rho/\epsilon_0$)。

我们对静电学所知道的任何东西，都可以立即转移到其他学科上去，反过来也是如此。（当然，这是一种双行道——如果在其他学科中某些特定性质为已知，则我们也可把这种知识应用到对应的静电学问题上来。）我们要来从不同学科中考虑一系列能够产生这种形式的方程组的例子。

§ 12-2 热流; 无限大平面边界附近的点源

以前(在§3-4中),我们就曾讨论过一个例子——热流。设想有一块材料,它无需均匀,也可以是在不同地方含有不同材料,而其温度是逐点变化的。这些温度变化的结果便产生一股热流,由矢量 \mathbf{h} 表示,这代表每秒流经垂直于流向的单位面积的热量。 \mathbf{h} 的散度表示热量从每单位体积离开该区域的时率。

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{热量从每单位体积的流出率}.$$

(当然,本来也可以将此式写成一积分形式——正如我们以前曾在静电学中用高斯定律处理问题一样——那就会说明:通过一个面的通量等于材料内部热能的变化率。我们不准备自找麻烦,在微分与积分形式之间把方程组变来变去,因为这种变换同静电学的变换一模一样。)

在各个地方热的产生率或吸收率当然依问题的不同而异。例如,假设在材料内部有一个热源(也许是一个放射源,或是由电流加热的电阻器)。让我们把由这个源在每秒每单位体积中所产生的热能叫做 s 。也可能还有转变成体积内其他类型的内能而引起的热能损失(或获得)。设 u 为单位体积的内能,则 $-du/dt$ 也将是热能的一个“源”。于是我们便有

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt}. \quad (12.5)$$

眼下并不想去讨论其中事态随时间变化的那个完整方程,因为我们正在做静电模拟,那里并没有什么东西会与时间有关。我们将仅仅考虑稳恒热流问题,其中有些恒定源已产生了一个平衡态。在这些场合下,

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \quad (12.6)$$

当然,还必须用另一个方程来描述在各不同地方热是如何流动的。在许多种材料中,热流近似地正比于温度对位置的变率:温差越大,热流越强,正如我们曾经见到的,热流这个矢量与温度陡度成正比。其中比例常数 K 代表该材料的一种性质,这种性质称为热导率。

$$\mathbf{h} = -K \nabla T. \quad (12.7)$$

如果材料的导热性能是随处变的,那么 $K = K(x, y, z)$ 就是一个位置函数。[式(12.7)并没有象表达热能守恒的式(12.5)那么基本,因为前者是依赖于物质的一种特性的。]现在若我们把式(12.7)代入(12.6)中,便有

$$\nabla \cdot (K \nabla T) = -s, \quad (12.8)$$

这与式(12.4)在形式上完全相同。稳恒热流问题与静电学问题相同。热流矢量 \mathbf{h} 对应于 E ,而温度 T 则对应于 ϕ 。我们已经注意到,一个热源会产生一个按 $1/r$ 变化的温度场和一个按 $1/r^2$ 变化的热流。这不过是从静电学方面来的一种转译,即一个点电荷会产生一个按 $1/r$ 变化的势,和一个按 $1/r^2$ 变化的电场。一般说来,我们能够跟解决静电学问题那样,容易地去解决稳恒热流问题。

考虑一个简单例子。假设有一个半径为 a 、温度为 T_1 的圆筒,该温度是由筒内所发生之热维持着的。(这可能是一根载电流的导线,或一条其中有蒸汽正在凝结的管道。)这个筒外面覆盖着一层绝缘材料的同心护套,这种材料的热导率为 K 。比方说,这绝缘套的半径为 b ,套外的温度为 T_2 (图 12-1a)。我们要找出该导线,或蒸汽管、或在其轴心上的任何东西的热量损失率。设由长度为 L 的一段管道每秒所损失的总热量为 G ——这就是我们想

請勿用於盈利之目的

要尝试去求的。

如何解答这一问题呢？我们已有了上述微分方程，而这些方程又和静电学的相同，实际上就已解决了该数学问题。类似的电学问题是：

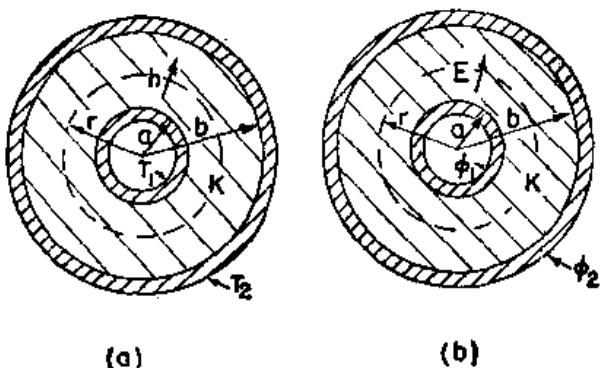


图 12-1 (a) 在一个圆筒状几何形体中的热流；(b) 相应的电学问题

一个半径为 a 的圆筒形导体处于势 ϕ_1 上，与处于势 ϕ_2 上而半径为 b 的另一个圆筒形导体分别隔离着，中间填充了一个同轴层的电介质材料，如图 12-1(b) 所示，现在既然热流 h 对应于电场 E ，我们所要寻求的量 G 就是对应于出自长度 L 的电场通量(换句话说，对应于在长度 L^* 上的电荷除以 ϵ_0)。我们已运用高斯定律解答了该静电学问题。对于热流来说，也将按照这同一步骤。

由对称性可知， h 仅取决于与筒之轴心间的距离 r 。根据高斯定律，我们知道，热流 h 乘以该表面的面积 $2\pi r L$ 便应等于其内部所产生的总热量，这就是我们所称为 G 的：

$$2\pi r L h = G \quad \text{或} \quad h = \frac{G}{2\pi r L}. \quad (12.9)$$

热流与温度陡度成正比：

$$h = -K \nabla T,$$

或者在这一情况下， h 的大小为

$$h = -K \frac{dT}{dr}.$$

上式，连同式(12.9)，会给出

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi K L r}. \quad (12.10)$$

从 $r=a$ 至 $r=b$ 进行积分，便得

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi K L} \ln \frac{b}{a}. \quad (12.11)$$

解出 G ，得

$$G = \frac{2\pi K L (T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \quad (12.12)$$

这一结果恰好对应于在一筒形电容器上的电荷

$$Q = \frac{2\pi \epsilon_0 K L (\phi_1 - \phi_2)}{\ln(b/a)}.$$

问题相同，因而有相同的解。根据静电学知识，也懂得了由一根绝缘管道损失了多少热量。

现在来讨论另一个热流例子。假设我们要知道埋藏于地下离地表不远处、或在一大块金属表面附近的一个点热源周围的热流。这个定域热源也许是一个在地下爆炸了的原子弹所留下来的一个强烈热源，或许相当于在一块铁中的一个小小放射源——总之会有种种可能性。

我们将处理这样一个理想问题，即一个强度为 G 的点热源置于一块无限大均匀材料

* 这里两处“长度 L ”，在原书中都作“单位长度”，我们作了改正。——译者注

——其热导率为 K ——的表面下距离为 a 处，我们将忽略材料外面空气的热导率，而希望求得在这块板的表面上温度的分布，包括恰好在热源上面的那一点，以及在板面的其他各处的温度。

怎样解决这个问题呢？它很象静电学中在一平面边界两侧存在介电常数不同的两种材料。唉呀！或许这就是在电介质与导体间的边界附近有一个点电荷或其他某种相似的东西的一个类似情况。让我们来看看，该表面附近的情况如何。这表面的物理条件是， \mathbf{h} 的法向分量为零，因为我们已假定并没有热量会流出板外，我们应该这样提问：在哪一种静电学问题上会有这样的条件，即在表面上电场 \mathbf{E} （这类似于 \mathbf{h} ）的法向分量为零。不会有这种情况！

这是一件务必当心的事情。为了一些物理原因，可能在某一门学科中对数学条件产生了某些限制。因此，若我们仅仅对某几种有限情况的微分方程进行分析，便可能会丢失在其他物理情况下能够发生的某些解答的种类。例如，没有一种材料的介电常数为零，而真空的热导率却确实等于零。所以对于完美的热绝缘体，竟找不出一种电的类似物来，然而，我们还是可以采用同样的方法。不妨试行想象，假如介电常数真的会等于零，将发生什么情况。（当然，在任一种实际情况中，介电常数总不会等于零的。但也许会有这么一种情况，即其中有一种材料其介电常数非常高，使得我们可以略去外面空气的介电常数。）

如何去找出缺乏正交于表面的分量的那种电场呢？这就是说，电场总是切于表面上。你将会注意到，我们的问题与在一平面导体附近放置一个点电荷的问题刚好相反。那里曾要求有一个垂直于表面之场，因为该导体全都在同一个势上，在电的问题中，我们通过设想在导电板后面有一个点电荷而发明了一种解法。可再引用那同一概念。试挑选一个“象源”，那将会自动地使在表面上场的法向分量为零。这种解法如图 12-2 所示。一个同号而又等强的象源被置在该表面之上距离为 a 处，将使场始终切于材料表面上。这两个源的法向分量互相抵消了。

这样，我们的热流问题就得到了解决。通过直接对比，在任一处的温度与来自两个相等点电荷之势相同。放在无限大媒质中一个单独点源 G ，在距离为 r 处所产生的温度为

$$T = \frac{G}{4\pi K r}. \quad (12.13)$$

（当然，这只是 $\phi = q/4\pi\epsilon_0 r$ 的模拟。）对于一个点源来说，若加上它的象源，所产生之温度就是

$$T = \frac{G}{4\pi K r_1} + \frac{G}{4\pi K r_2}. \quad (12.14)$$

上式给出在该块热导体内任一点的温度。图 12-2 中表示出几个等温面，同时也显示出一些 \mathbf{h} 线，那是可以由 $\mathbf{h} = -K\nabla T$ 获得的。

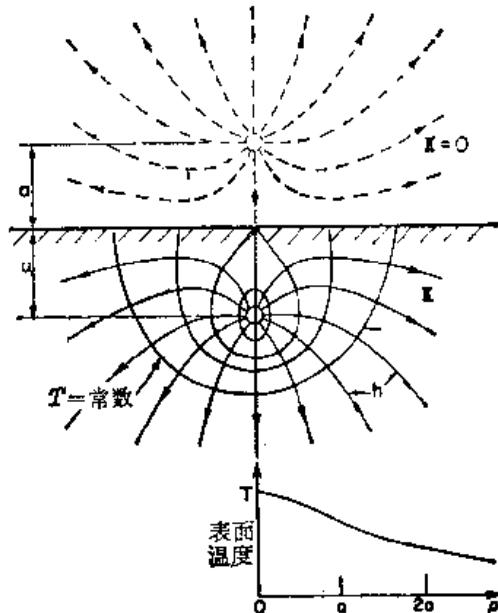


图 12-2 在一良热导体表面之下距离为 a 处有一个点热源，在其周围附近所产生的热流和等温面。显示于材料外面的是一个象源

我们原来是要找出在该表面上的温度分布。对于表面离轴心为 ρ 的一点，即 $r_1=r_2=\sqrt{\rho^2+a^2}$ 处，就会有

$$T(\text{表面}) = \frac{1}{4\pi K} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2+a^2}}. \quad (12.15)$$

这一函数在图上也表示了出来。刚好在热源正上方一点上的温度自然会高于其他较远的点。这是地球物理学家们经常需要加以解决的那类问题。我们现在看到，这也是电方面已经解决了的同样事情。

§ 12-3 绷紧的薄膜

现在让我们来考虑一种完全不同的物理情况，不过还是会给出同一些方程。设有一张橡胶薄片——一张膜——铺在一个大的水平构架上面被拉紧（如一张鼓膜）。现在假设这张膜的一处被顶上，而在另一处被压下，如图 12-3 所示。对于这个表面的形状我们能够加以描述吗？即将表明，当膜的挠曲程度不太大时，这一问题将是如何解决的。

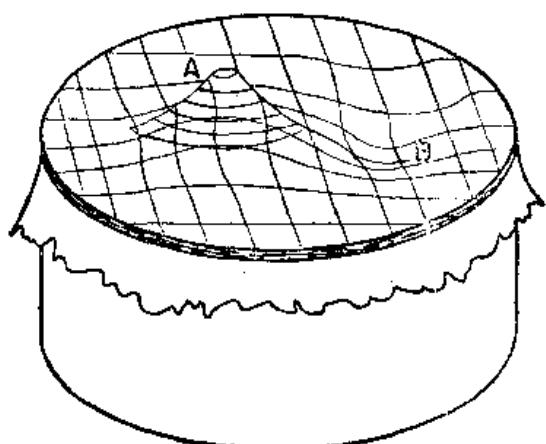


图 12-3 一张薄橡胶片铺在一个筒形构架上而被拉紧（如一张鼓膜），如果在该片 A 处被顶上，而在 B 处被压下，这个表面的形状如何？

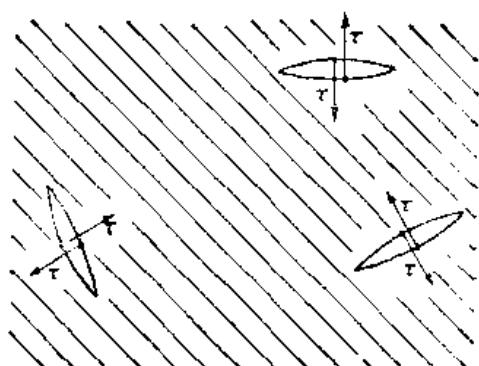


图 12-4 一张绷紧了的橡胶片，其中表面张力 τ 为横越一条线上每单位长度之力

既然膜被拉紧就会有力存在，所以要在任一处造成一条小裂缝，则在裂缝两边就会彼此

互相拉开（见图 12-4）。可见在片里是有一种表面张力，如同一条拉紧的弦线中那种一维张力似的。对于如图 12-4 所示的那样一条裂缝，两侧刚刚能够拉紧在一起的每单位长度之力，我们定义为表面张力的大小 τ 。

现在就来考察膜的一个竖直截面。它将表现为一条曲线，如图 12-5 所示。设 u 为膜离开其正常位置的竖向位移，而 x 和 y 则分别代表水平面上的两坐标。（图上所表示的截面平行于 x 轴。）

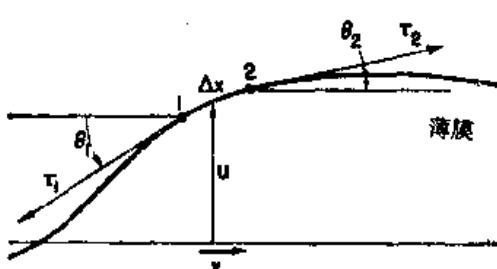


图 12-5 被挠曲了的膜片的横截面

试考虑长度为 Δx 而宽度为 Δy 的一小块表面。将会有由于表面张力所引起的施于该小片上沿每一边的力。沿图上边缘 1 之力将是 $\tau_1 \Delta y$ ，其方向切于该表面——也就是与水平线成 θ_1 角。沿边缘 2 之力将是在 θ_2 角上的 $\tau_2 \Delta y$ 。（还有作用于该片其他两边缘上的相似之力，但这些我们暂不予以理会。）从 1 与 2 两边缘作用于该小片上的向上净力为

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1.$$

我们将把考察限制在膜的小畸变上，也就是限制在小斜率范围内。于是， $\sin \theta$ 便可用 $\tan \theta$ 来代替，而 $\tan \theta$ 又可写成 $\partial u / \partial x$ ，因而力就是

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y.$$

在方括号内之量也尽可以写成（对于小 Δx 而言）

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x.$$

于是

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y.$$

其他两边缘对于力 ΔF 也将有另一贡献，总力显然是

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (12.16)$$

该鼓膜之挠曲是由外力引起的。让我们设 f 为由外力作用于膜上每单位面积的向上之力（一种“压强”）。当该膜处于平衡状态（静止情况）时，这力必须由刚才所算出的内力，即式 (12.16) 来抵消。也就是说，

$$f = -\frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}.$$

于是式 (12.16) 便可以写成

$$f = -\nabla \cdot (\tau \nabla u). \quad (12.17)$$

其中， ∇ 目前所指的当然是二维的陡度算符 ($\partial / \partial x, \partial / \partial y$)。我们就有—个把 $u(x, y)$ 和所施力 $f(x, y)$ 以及表面张力 $\tau(x, y)$ ——一般来说，膜中的 τ 是可以逐点改变的——都联系在一起的微分方程。（一个三维弹性体的畸变也由一组相似的方程管辖着，但我们将坚守于二维上。）我们将仅仅关心表面张力 τ 在全张膜中总是常数的那一种情况。此时，可以将式 (12.17) 写成

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau}. \quad (12.18)$$

这样就有另一个与静电学相同的方程了！——只是这次限制在二维上，位移 u 对应于 ϕ ，而 f/τ 对应于 ρ/ϵ_0 。所以无论是对于无限大的平面带电板、或两平行长导线、或带电的圆筒形导体，我们所已做的一切工作，均可直接应用于一张绷紧的薄膜上。

假设我们在膜的某些点上将膜顶到一定高度——也就是说，在某些点上把 u 值固定下来。这就是在电的情况下，在各对应地方有一个特定势的一种模拟。因此，比如我们可以用一个与筒形导体对应的截面形状的物体把膜顶上去，因而形成一个正“势”。例如，若我们用一根圆棒把膜顶上去，该表面便将如图 12-6 所示的那种形状。高度 u 与一带电圆棒的静电势 ϕ 相同。它是按 $\ln(1/r)$ 下降的。（其斜率，对应于电场 E ，将按 $1/r$ 下降。）

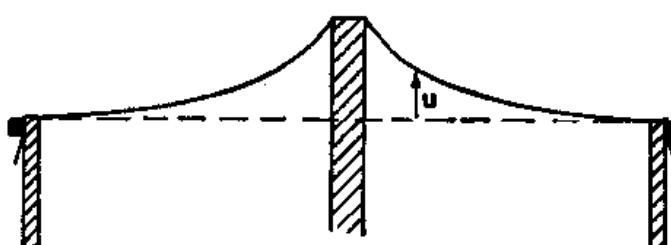


图 12-6 一张绷紧的橡胶片用一根圆棒顶上去时的横截面。函数 $u(x, y)$ 与在一很长的带电棒附近的电势 $\phi(x, y)$ 相同

一张绷紧的橡胶片，往往用来作为一种从实验上解决复杂的电学问题的途径。这里，比拟是倒过来用了！各种不同的棒和杆被用来把膜顶至对应于一组电极的势的高度。此后，对高度的测量就能给出在电情况下之电势。这一种比拟甚至被发展得更远。如果将一些小球放在膜上面，它们的运动会近似地对应于电子在相应电场中的运动。人们能够实际上注视到“电子”在其轨道上运动。这一方法曾被用来对许多光电倍增管[诸如那些用在闪烁计数器上的，以及那些用于控制卡底腊斯(Cadillacs)牌汽车的车前灯光的]的复杂几何图形进行设计。这一方法目前仍被采用，但其准确度却是有限的。对于最准确的工作，更好的是通过数值计算法，即利用大型电子计算机把场求出来。

§ 12-4 中子扩散；均匀媒质中的均匀球形源

我们取另一个会给出同种方程的例子，这回要同扩散打交道了，在第一卷第四十三章中，我们曾经考虑过离子在纯气体中的扩散，以及一种气体在另一种气体中的扩散。这一次让我们选取一个不同的例子——中子在一种诸如石墨那样的材料中的扩散。之所以着重提出石墨（碳的一种纯净形式），是因为碳并不会吸收慢中子。在碳中，中子能够自由地到处奔跑。它们在被核散射而偏转至一个新的方向之前，能够平均沿直线跑过几厘米。所以如果我们有一大块石墨——每边有许多米长——那么原本在某一处的中子就会扩散至其他地方。我们想要找出能对它们的平均行为——也就是，对它们的平均流动——作的一种描述。

令 $N(x, y, z) \Delta V$ 代表点 (x, y, z) 所在一个体积元 ΔV 中的中子数。由于运动，就有些中子会离开 ΔV ，而其他一些则将进入。若在一个区域里有比其邻区更多的中子，则从第一个区进入第二个区中的中子比起转回头来的将会多些，这表明将有一个净流。按照第一卷第四十三章中的论据，我们用一个流矢 \mathbf{J} 来描述该流动。它的 x 分量 J_x 就是单位时间通过垂直于 x 方向的单位面积的净中子数。我们曾经找出过

$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (12.19)$$

式中扩散系数 D ，由平均速度 v 和在接连两次散射间的平均自由程 l 表达的关系式为

$$D = \frac{1}{3} lv.$$

因而有关 \mathbf{J} 的矢量方程便是

$$\mathbf{J} = -D \nabla N. \quad (12.20)$$

中子流经任一个表面元 da 的时率为 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$ (\mathbf{n} 照常指单位法向矢量)。于是，从一体积元流出的净流（根据寻常的高斯论据）为 $\nabla \cdot \mathbf{J} dV$ 。这一流动应该导致在 ΔV 内的数目随时间而减少，除非有些中子正在 ΔV 中产生出来（通过某一种核过程）。若在该体积内存在能够在单位时间单位体积中产生出 S 个中子源，则流出 ΔV 的净流将等于 $(S - \partial N / \partial t) \Delta V$ 。这时我们就有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.21)$$

把 (12.21) 和 (12.20) 两式结合，便得到中子的扩散方程：

$$\nabla \cdot (-D \nabla N) = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.22)$$

在静止——即其中 $\partial N / \partial t = 0$ ——情况下，我们再度得到式 (12.4)！可以利用关于静电

学的知识来解决中子的扩散问题。因此，就让我们来解答这个问题。（你可能会觉得奇怪：为什么还要再来求解一个问题，如果已在静电学中解答了一切问题的话？原因是，这回我们能够较快地获得解答，因为静电学的问题已经解决了！）

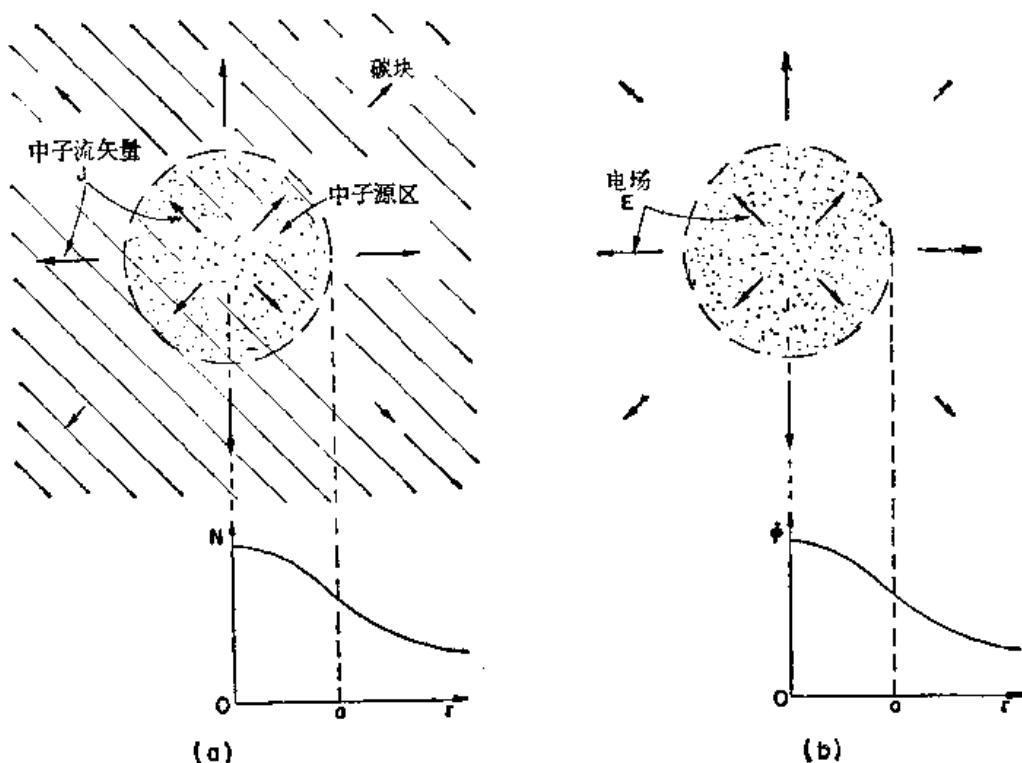


图 12-7 (a) 在一大块石墨中，中子在一个半径为 a 的球体里均匀地产生并向外扩散。中子密度 N 被发现为从源心量起的距离 r 之函数。(b) 类似的静电情况：一个均匀带电球体，其中 N 对应于 ϕ ，而 J 对应于 E

假设有一大块材料，其中中子——比如是通过铀裂变——正在从一个半径为 a 的球形区域里朝各方向均匀地产生出来（图 12-7）。我们想要弄清楚：每一处的中子密度如何？在产生中子的区域里中子的密度究竟会多么均匀？在源中心处的中子密度与在源区表面上的中子密度其比率如何？要找出这些答案挺容易。这里，源密度 S 代替了电荷密度 ρ ，因而我们的问题与具有均匀电荷密度的球体问题相似。要找出 N ，正如同要找出势 ϕ 那样。以前曾算出过一个均匀带电球体的内场和外场，对这些场取积分就可以获得势。在球外，电势为 $Q/4\pi\epsilon_0 r$ ，其总电荷 Q 是由 $4\pi a^3 \rho / 3$ 给出的。因此

$$\phi_{\text{外}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (12.23)$$

对于球内各点，那里的电场仅仅来自半径为 r 的球体内的电荷 $Q(r)$ ，亦即 $Q(r) = 4\pi r^3 \rho / 3$ ，因而

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (12.24)$$

这个场随着 r 增大线性地增大。对 E 取积分便可得到 ϕ ，于是我们有

$$\phi_{\text{内}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{常数}.$$

在半径 a 处， $\phi_{\text{内}}$ 与 $\phi_{\text{外}}$ 应该彼此相等，因而该常数就应当是 $\rho a^3 / 2\epsilon_0$ 。（假定离源很远的地方

ϕ 等于零, 这就相当于那里的中子数 N 为零.) 因此,

$$\phi_{\text{in}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.25)$$

我们立即就知道另一个问题中的中子密度。答案是

$$N_s = \frac{Sa^3}{3Dr} \quad (12.26)$$

和

$$N_n = \frac{S}{3D} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.27)$$

N 作为 r 的函数示如图 12-7。

那么, 源心与边缘的密度比率又如何呢? 在源心 ($r=0$) 处, 密度正比于 $3a^2/2$; 在边缘 ($r=a$) 处, 密度正比于 $2a^2/2$; 因而, 两密度的比率为 $3/2$. 一个均匀源并不会产生均匀的中子密度。你看! 静电学的知识给我们提供了关于核反应堆物理学的一个良好开端。

有许多物理情况, 其中扩散会起着重大作用。例如, 离子在液体中的运动, 或电子在半导体中的运动, 都遵守同一方程。我们一次又一次地和这一相同的方程式打交道。

§ 12-5 无旋的流体流动; 从球旁经过的流动

现在让我们考虑一个并非十分完美的例子, 因为我们将要用的方程式不能确实十分普遍地代表该主题, 而只是代表一种人为的理想情况。将要讨论的是水流问题。上面对于绷紧的薄膜, 我们的方程乃是一种近似, 只有在挠曲程度微小时才正确。在有关水流的讨论中, 将不作这种近似, 而必须作出一些与实际的水有很大出入的限制条件。我们将仅仅处理一种不可压缩的、无粘滞性的、而又无环流的液体的稳定流动的情况。然后, 就将速度作为位置 r 的函数 $v(r)$ 来表达该流动。若流动是稳定的(唯一具有静电学类似的一种情况), 则 v 与时间无关。如果用 ρ 代表该流体密度, 则 ρv 便是单位时间通过单位面积的质量。根据物质守恒律, ρv 的散度一般将是单位体积内材料质量的变率。我们将假定, 并没有任何能不断创造或消灭物质的过程。于是物质守恒就要求有 $\nabla \cdot \rho v = 0$ 。(一般说来, 这应当等于 $-\partial \rho / \partial t$, 但由于我们的流体是不可压缩的, ρ 便不能发生变化了。)既然 ρ 处处相同, 故可将其分离出来, 因而上述方程就不过是

$$\nabla \cdot v = 0.$$

好! 我们又回到静电学(不存在任何电荷的空间)上来了。上式恰好就象 $\nabla \cdot E = 0$ 。然而, 情况并非那样简单! 静电学并不仅仅是 $\nabla \cdot E = 0$, 而是包括一对方程。单一个方程不能告诉我们足够多的东西, 还需要另一个方程。为了同静电学协调起来, 我们还必须也要有 v 的旋度为零。但这对于实际液体来说, 并非普遍正确。大多数液体往往会产生一些环流。所以我们就被限制在其中并没有液体环流的那一种情况。这样的流动叫做无旋的。不管怎样, 若我们作出了所有这些假定, 便可以想象出类似于静电学的一种流体流动情况。因而采取

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (12.28)$$

和

$$\nabla \times v = 0. \quad (12.29)$$

我们要强调, 遵循这些方程的液体流动只是特殊而远非普遍的情况。这种特殊情况必须是表面张力、可压缩性和粘滞性都可以忽略, 而又可以假定该流动是无旋的那么一些情

况。这些假定对于真实的水的适用性竟是如此之少，以致数学家约翰·冯·诺埃曼 (John von Neumann) 曾经说过，凡对式(12.28)和(12.29)进行过分析的人们乃是在研究“干水”！（我们将在第四十和四十一章中对流体流动的问题进行更详细的讨论。）

由于 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ，“干水”的速度就可以写成某一种势的陡度：

$$\mathbf{v} = -\nabla\psi. \quad (12.30)$$

这个量的物理意义如何？它并不含有任何一种十分有用的意义。速度可以写成为势之陡度，仅仅是因为该流动是无旋的。而根据与静电学的比拟， ψ 就称为速度势，但它不象 ϕ 那样，而是与势能毫无关系的。既然 \mathbf{v} 的散度为零，我们便有

$$\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi = 0. \quad (12.31)$$

这速度势 ψ 和在自由空间 ($\rho=0$) 里的静电势一样，均服从同一个微分方程。

让我们举一个属于无旋流动的问题，并看看能否通过所已学得的方法来解决它。考虑一个穿过液体而降落下来的球体的问题。如果它降落得太慢，我们所忽略的粘滞力就将十分重要。如果它落得太快，则会有一些小漩涡（湍流）出现在其尾部，而在水里就会有一些环流。但若该球体运动得既不太慢又不太快，则水流将大体上符合于我们的那些假设，这样才能通过那些简单方程式描述水的运动。

在一个固定于球体的参照系中来描述所发生的事情很方便。在这个参照系上，我们提出这样一个问题：若在离球很远的地方水的流动均匀，当其流经静止球体时，运动情况将如何呢？这就是说，在离球很远的地方，流动处处相同。但在球体附近的流动则示如图 12-8 的那些流线。这些线，始终平行于 \mathbf{v} ，而与电场线相对应。我们希望得到有关这一速度场的定量描述，即在任一点上关于速度的表式。

可以从 ψ 之陡度找到速度，因而首先就要算出势来。我们需要处处都满足式(12.31)的那一种势，而这个势也应满足两个限制条件：(1) 球内区域不存在流动；(2) 在远距离处流动是恒定的。为了满足条件(1)，垂直于球面的 \mathbf{v} 分量就应等于零。这意味着，在 $r=a$ 处， $\partial\psi/\partial r$ 为零。为了满足条件(2)，则在 $r \gg a$ 的所有点上，必须有 $\partial\psi/\partial z = v_0$ 。严格说来，并没有一种静电情况会恰恰对应于我们的问题。实际上它是对应于把一个介电常数为零的球体放置在一个均匀电场中。要是已算出了介电常数为 κ 的球体放在一均匀场中的问题之解，那么代入 $\kappa=0$ ，我们便该立即获得有关这一问题的解答。

实际上，并未详细算过这个特定的静电学问题，那现在就让我们来做吧。（本来也可以直接用 \mathbf{v} 和 ψ 来解决流体问题的，但仍将采用 \mathbf{E} 和 ϕ ，因为那是我们所熟悉的。）

问题是：找出 $\nabla^2\phi=0$ 的一个解，使得在大 r 值处 $\mathbf{E}=-\nabla\phi$ 为一常数，比方说 \mathbf{E}_0 ，而又使得在 $r=a$ 处 \mathbf{E} 的径向分量为零，即

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.32)$$

我们的问题牵涉到一种新的边界条件，这里并不要求表面上的 ϕ 为一常数，而是要求 $\partial\phi/\partial r$ 为一常数。这样一来，情况就有所不同了。不容易立即找到答案的。首先，当该球体

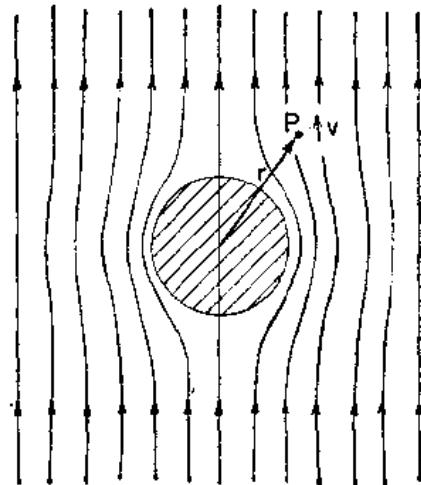


图 12-8 流体从球旁流过的那种无旋流动的速度场

不存在时, ϕ 应当是 $-E_0 z$. 这时 E 应该处处指向 z 轴, 并具有一个不变的大小 E_0 . 原来我们曾经分析过在其内部具有均匀极化的一个电介质球的情况, 而我们也已找出了在这么一个均匀极化球内部之场乃是一个均匀场, 在其外部之场则与一置在球心处的点偶极子之场相同. 因此, 让我们猜测所希望得到之解为一个均匀场和一个偶极子场的迭加. 偶极子之势(第六章)为 $pz/4\pi\epsilon_0 r^3$. 于是我们假定

$$\phi = -E_0 z + \frac{p z}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (12.33)$$

既然偶极子场是按 $1/r^3$ 降落的, 所以在大距离上我们便恰好仅仅拥有场 E_0 . 我们的猜测自动地满足了上面的条件(2). 但该偶极子强度 p 的值又如何呢? 为求得这个值, 我们可利用关于 ϕ 的另一条件, 即式(12.32). 应该取 ϕ 对 r 的微分, 但这当然要求在一个固定的角度上进行, 因而首先就得用 r 和 θ 来表达 ϕ , 而不是用 z 和 r , 使得工作上更方便. 既然 $z = r \cos \theta$, 便得:

$$\phi = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.34)$$

E 的径向分量为

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = +E_0 \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.35)$$

上式必须对于在 $r=a$ 处的所有各 θ 均为零. 若 p 取下述之值

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0, \quad (12.36)$$

那就确实如此.

要小心注意! 如果式(12.35)中并非两项都具有同一种 θ 依存关系, 则没有可能拣得 p 而使式(12.35)对所有一切角度在 $r=a$ 处都变为零. 实际已经把问题解决这一事实表明, 在写出式(12.33)时, 我们所作的猜测就已经足够高明了. 当然, 在做出该猜测时, 我们是在向前看的. 明知将需要另一项, 它将会: (a) 满足 $\nabla^2 \phi = 0$ (任何真实的场都该如此); (b) 依赖于 $\cos \theta$; (c) 并在大 r 处降低至零. 偶极子场就是唯一能满足上述这三个条件之场.

利用式(12.36), 我们的势就是

$$\phi = -E_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.37)$$

关于流体流动问题之解可以简单地写成:

$$\psi = -v_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.38)$$

从这个势去找出 v 很直截了当. 我们就不再对此事追踪下去了.

§ 12-6 照明; 对平面的均匀照明

在这一节中, 我们将转到一个完全不同的物理问题上去——旨在显示各种不同的可能性. 此次, 我们将做某种能导致静电学中曾经见过的那同一种积分的事情.(如果我们有一个数学问题会给出某一积分, 而它就是以前曾与另一问题打过交道时的同一积分, 那么我们对于该积分的性质便会知道一些.) 现在就从照明工程中选取一个例子. 假设有一光源放在一平面上距离为 a 处. 该面上的照明情况究竟如何呢? 这就是说, 每单位时间到达单位面积表面上的辐射能量有多少? (见图 12-9) 假定光源是球对称的, 即使得从一切方向辐射出来的光都相等. 这时, 与光流垂直的单位面积的辐射能量与距离的平方成反比. 显然, 在

垂直于光流的表面上，光的强度与点电荷源的电场具有相同的公式。若光线与表面的法线成一角度 θ 投射到表面上时，那么 I ，即到达单位面积表面上的能量，就仅有 $\cos \theta$ 那么大了，因为同一能量此时会落在比前次大了 $1/\cos \theta$ 倍的面积上。如果我们称光源的强度为 S ，则在一个面上的照度 I_n 便是

$$I_n = \frac{S}{r^2} e_r \cdot n. \quad (12.39)$$

式中， e_r 是从光源向外指出的单位矢量；而 n 则是该面积的单位法线。照度 I_n 相当于从一强度为 $4\pi\epsilon_0 S$ 的点电荷所产

生的电场。明白了这一点，我们便可看到，对于任一种光源分布，都能够通过求解对应的静电学问题而获得答案。在计算电荷分布所产生的电场在一平面上的竖向分量时，我们就是按照这种求光源*对一平面的照度的方法来做的。试考虑下述例子。为了某种特定实验条件，我们希望使台面上有一个十分均匀的照明。这里，可选用的是一些辐射性能沿管的长度处处都均匀的长荧光管。这可以在距台面为 z 处的天花板上安置一整排荧光管对我们的台子照明。如果我们要求台面照度均匀，比方说在千分之一的起伏范围内，则所选用的管与管间的最大间隔 b 应该如何？答案：（1）求每条导线都均匀带电的一排相隔为 b 的导线的电场；（2）计算电场的竖向分量；（3）找出 b 应有多大才能使场的起伏不会超过千分之一。

在第七章中我们曾见过，一排带电导线的电场可用许多项之和来表达，其中每项会给出一种周期为 b/n 的正弦式变化，这里 n 是一整数。任何一项之幅度都是由式(7.44)给出的：

$$F_n = A_n e^{-2\pi n z / b}.$$

要是所待求的场是在不太靠近那一排导线的地方，我们便仅须考虑 $n=1$ 。对于一个全解来说，本来还须确定那整套系数 A_n 的，这我们还未曾做（尽管是简单的计算）。既然我们只要求 A_1 ，就可以估计出它的大小应约略与平均场相同。于是该指数因子就会直接提供关于场强变化的相对幅度。如果希望这个因数等于 10^{-3} ，则将得出 b 应为 $0.91z$ 。若令荧光管间的间隔等于至天花板距离的 $3/4$ ，则该指数因子为 $1/4000$ ，而我们便有一个安全系数 4，从而相当肯定地会使照明在千分之一的范围内保持恒定不变。（准确的计算表明， A_1 实际上两倍于平均场，因而严格的答案就是 $b=0.8z$ 。）为了这么一个均匀照明，所容许的管间距离竟会如此之大，多少有点令人惊奇。

§ 12-7 大自然的“基本统一性”

在这一章中，我们本希望能够证明，在学习静电学时就已学习了怎样去处理物理学中的其他许多课题。而正是由于这一点，我们才有可能在有限的年月里学习几乎全部物理。

可是，当这样的讨论结束时这样一个问题肯定会浮现出来：为什么从不同现象所得到的

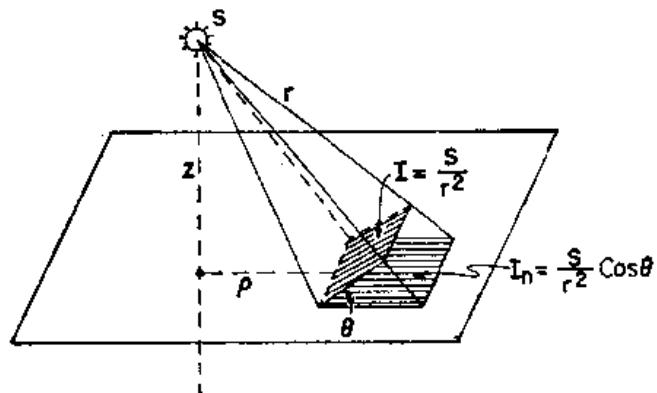


图 12-9 面上的照度 I_n 代表单位时间
到达单位面积表面上的辐射能

* 由于我们所谈的是关于非相干光源，它们的强度就总是线性地相加，因此类似的电荷将始终带有相同符号。并且，我们的模拟仅适用于到达一块不透明面上的光能，因而就必须只将照射于该面上的光源计算在我们的积分之内（自然不包括那些在该面下面的任何其他光源）。

微分方程竟会如此相似呢？我们也许会说：“那是大自然的基本统一性”。但这指的是什么呢？这样一个命题本来能具有什么意义？简而言之，它意味着不同现象有着彼此相似的方程组，当然这时我们还未给出任何解释。“基本统一性”也许指的是，任何东西都由同一种材料构成，因而便应服从同样的方程。这听起来是一个完满的解释，但让我们来想一想，静电势、中子扩散、热流——是否确实在与同一种材料打交道？我们能否真的想象出那静电势在物理上全同于温度，或全同于粒子密度？肯定的是， ϕ 不会恰好与粒子的热能相同；鼓膜的位移肯定不会象温度那样。这么一来，为什么还会有“一种基本统一性”呢？

事实上，对各种不同题目的物理学加以更密切的考察就会证实，那些方程式并非真的全同。对于中子扩散所找到的方程只是一种近似。当我们看到的距离比起自由程大时，以上近似才算有效。如果更细致地进行观察，便会看到个别中子正在跑来跑去，一个特定中子的运动，肯定完全不同于我们从解出该微分方程而得的那种连续光滑的变化。该微分方程只是一种近似，因为我们曾经假定中子是连续地分布于空间的。

是否这就是关键所在？是否一切现象所共有的东西就是空间，即借以建立物理学的一种构架？只要东西在空间里相当平滑，那么所牵涉到的重要事情就将是某些量在空间中相对于位置的变率。这就是为什么我们总是获得一个有陡度存在的方程。微商必须以陡度或散度的形式出现；由于物理定律与方向无关，它们就应该可以用矢量的形式表达。静电学方程组就是人们所能获得的仅含有各个量的空间微商的最简单矢量方程。任一其他简单问题——或对一复杂问题的简化——都应当表现得象静电学那样。对所有一切问题的共同点是：它们全都牵涉到空间，而我们面对一实际的复杂问题则总是用一简单的微分方程来给予模仿。

由此引导到另一个有趣问题。是否这一说法对静电学方程组也可能是对的呢？它是否也只有作为实际上复杂得多的微观世界的一种理想化的模仿，它们才是对的呢？是否客观（物质）世界可能含有一些仅在极微小距离上才能看得见的 X 子呢？而在测量过程中我们总是对那么大的规模进行观察，以致不能见到这些小 X 子，这才是所以会得到那些微分方程的根由？

一般最为完整的电动力学理论，的确会在十分短的距离上碰到困难。因此，在原则上这些方程可能是经过理想化的一种素描。它们一直在小至约 10^{-14} 厘米的距离上仍显示正确，但此后就开始不对头了。可能会有某种迄今还未被发现的内部“机制”，而这种内部复杂性的一些细节被表面上看来理想的那些方程隐藏起来了——正如在那种“理想”的中子扩散现象中一样。但却还没有谁曾经按照那种方式建立起一套成功的理论。

相当奇怪的是：事实表明（基于我们完全不清楚的原因），相对论和量子力学按照我们所知的方式结合起来，似乎已不允许有一个基本上不同于式(12.4)的方程，而同时又不会引起某种矛盾的那种发明。不仅仅是与实验不符合，而且还是一种内部矛盾。例如：对所有可能发生的各种情况的几率之和不等于 1，或能量有时可能会出现为复数的那种预言，或其他与此类似的某种荒谬设想。迄今还没有人能够创立一种电学理论，使得在其中 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 被理解成对深一层机制的一种理想化近似，而又不会最终引导到某一种谬论上去的。然而，还必须补充说明：若假定 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 在所有不论多么小的距离上都正确，则会导致它本身的荒唐（一个电子的电能为无限大）——即迄今还没有谁能懂得怎样去避开这一些谬论。

§ 13-1 磁 场

作用于一电荷上之力不仅取决于它的位置，而且还取决于它运动的速度。空间每一点可由两个能确定作用于电荷上之力的矢量来作标志。首先，电力提供了与电荷运动无关的一部分力，我们用电场 E 来描述它；其次，另一部分力，称为磁力，那是有赖于电荷的速度的。磁力还具有一种奇怪的方向特性：在空间任一特定点上，这力的方向和大小均取决于该粒子的运动方向。在任一时刻，这力总是垂直于速度矢量；并在任一特定点上，这力又总是与空间中某一固定方向成直角（见图 13-1）；而且，力的大小是与垂直于这一规定方向的速度分量成正比的。所有这一切行为都能由一个定义为磁场矢量的 B 来加以描述。这个矢量会在空间规定出唯一方向，并规定力与速度成正比的那个比例常数，从而写出磁力为 $qv \times B$ 。于是，施于电荷上的总电磁力就可以写成

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (13.1)$$

这称为洛伦兹力。

磁力可用一根磁棒靠近一阴极射线管而轻易地加以演示。电子束的偏转，表明磁铁的存在产生了一个作用于电子而与其运动方向成直角之力，如同在第一卷第十二章中我们曾描述过的那样。

磁场 B 的单位显然是 1 牛顿·秒每库仑·米。这同一单位也是 1 伏·秒每平方米。它也称为 1 韦伯每平方米。

§ 13-2 电流; 电荷守恒

我们首先考虑怎样来理解磁力对载流导线的作用。为此，我们先给所谓电流密度下个定义。电流是电子或其他电荷的净漂移或净流动所形成的运动。我们可用一个矢量来表达这一种电荷流动，这矢量会给出每单位时间通过垂直于流动的单位面积表面的电荷量（正如我们对于热流所曾做过的那样）。我们称之为电流密度，并用矢量 j 来表示。它是沿电荷运动指向的。如果在材料中某处取一小面积 ΔS ，则单位时间流经该面积的电荷量便是

$$j \cdot n \Delta S, \quad (13.2)$$

式中 n 是垂直于 ΔS 的单位矢量。

这电流密度与电荷的平均流动速度有关。假设有一个电荷分布，它的平均运动就是一个速度为 v 的漂动。

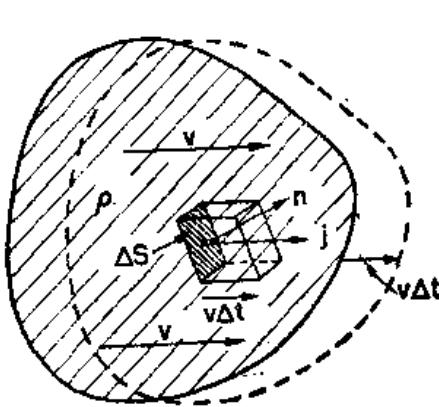


图 13-2 如果具有密度为 ρ 的电荷分布是以速度 v 移动，则每单位时间流经 ΔS 的电荷就是 $\rho v \cdot n \Delta S$

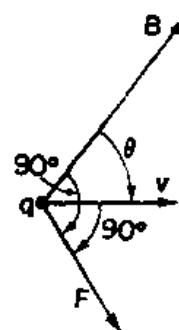


图 13-1 作用于一运动电荷上的依赖于速度的那一部分力，与 v 及 B 的方向都成直角。它也与垂直于 B 的 v 之分量（即 $v \sin \theta$ ）成正比

当这一分布通过一面积元 ΔS 时，在 Δt 时间内流经该面积元的电荷 Δq 等于包含在一个底面为 ΔS 而其高度为 $v\Delta t$ 的平行六面体内的电荷，如图 13-2 所示。这个平行六面体的体积就是 ΔS 在垂直于 \mathbf{v} 方向上的投影乘以 $v\Delta t$ ，若再乘以电荷密度 ρ ，就将给出 Δq 。这样，

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t.$$

于是每单位时间通过的电荷量就是 $\rho v \cdot n \Delta S$ ，由此可得

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (13.3)$$

如果该电荷分布含有许多个别电荷，比方说电子，其中每个又各具有电荷量 q ，并以平均速度 \mathbf{v} 运动，那么这电流密度便是

$$\mathbf{j} = N q \mathbf{v}, \quad (13.4)$$

式中 N 为每单位体积的电荷数目。

单位时间通过任一个 S 面的总电荷称为电流 I 。它等于通过该面的所有面积元的电荷流动的法向分量的积分

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13.5)$$

(见图 13-3)。

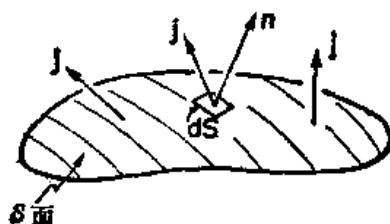


图 13-3 流过 S 面的电流
 I 为 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$

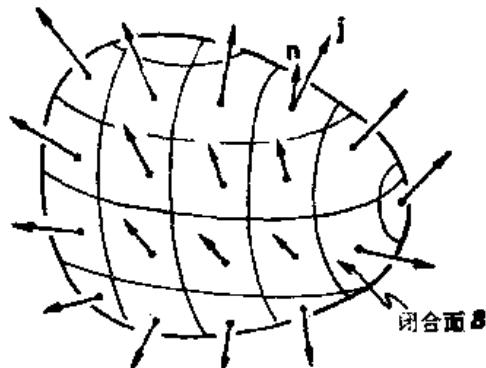


图 13-4 对 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ 遍及整个闭合面的积分，
等于内部总电荷 Q 的变率

从一个闭合面 S 流出来的电流 I 代表电荷从 S 所包围的体积 V 内离开的时率。物理学中，有一个基本定律申述：电荷是破坏不了的；它从未损失也从未被创造出来，电荷能够从一处移至另一处，但却从未出现过无中生有的情况。我们说电荷是守恒的。如果有净电流从一个闭合面流出，则其内部的电荷就应相应地减少(图 13-4)。因此，我们能够将电荷守恒律写成

$$\int_{\text{任一闭合面}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{d}{dt} (Q_n). \quad (13.6)$$

内部电荷则可以写成是电荷密度的一个体积积分：

$$Q_n = \int_{\text{在 } S \text{ 内之 } V} \rho dV. \quad (13.7)$$

如果应用式(13.6)于一个小体积 ΔV 上，那么我们便知道左边的积分为 $\nabla \cdot \mathbf{j} \Delta V$ ，其中的电荷为 $\rho \Delta V$ ，因而电荷守恒律也可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.8)$$

(再一次是高斯数学！)。

§ 13-3 作用于电流上的磁力

现在我们就准备来求磁场施于一载流导线上之力了。电流包含以速度 \mathbf{v} 沿导线运动

着的一些带电粒子。每一电荷会感觉到一个横向力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

[图 13-5(a)]。如果每单位体积共有 N 个这样的电荷，则在线里一个小体积 ΔV 内就会有 $N\Delta V$ 个。作用于 ΔV 上的总磁力 ΔF 等于作用在各电荷上之力的总和，即是，

$$\Delta F = (N\Delta V)(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

但 Nqv 恰好就是 j ，因而

$$\Delta F = j \times B \Delta V \quad (13.9)$$

[图 13-5(b)]。作用于每单位体积之力为 $j \times B$ 。

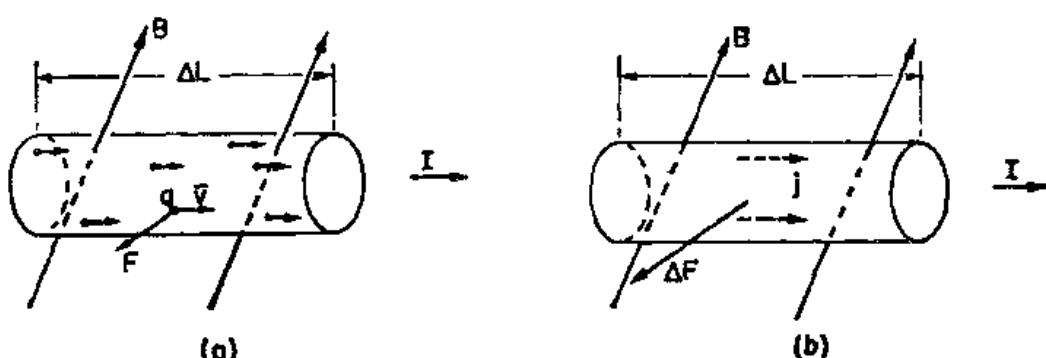


图 13-5 施于一载流导线上的磁力等于对个别运动电荷作用之力的总和

如果在一根截面为 A 的导线中，流经导线的电流是均匀的，则可取截面为 A 而长度为 ΔL 的一段柱体作为该体积元。这么一来，

$$\Delta F = j \times B A \Delta L, \quad (13.10)$$

现在就可以把 ja 叫作导线中的电流 I 。（它的大小为导线中的电流，而其方向则是沿着导线。）这样，

$$\Delta F = I \times B \Delta L. \quad (13.11)$$

施于每单位长度导线上之力就是 $I \times B$ 。

上式显示了一个重要结果，即由于电荷运动而作用于导线上之磁力，仅取决于总电流，而与其中每一粒子所带的电荷量——甚至连符号！——都无关。在一磁铁附近作用于导线上之力，可观察接通电流时线的偏转，容易地加以演示，正如在第一章中所曾描述过的那样（见图 1-6）。

§ 13-4 稳恒电流的磁场；安培定律

我们已经看到，诸如在由一磁铁所产生的磁场的情况下，就有作用于导线上之力。从作用等于反作用这一原理出发，我们也许会期望，当导线中有电流通过时应当有一个力作用于磁场之源，也即作用于磁铁上*。确实有这样的力存在，这可由一根置于载流导线附近的磁针的偏转而见到。原来我们知道，磁铁会感到来自其他磁铁之力，因而这就意味着，当导线中载有电流时，这导线本身就会产生磁场。于是，运动电荷确实会产生磁场。现在我们愿意来尝试找出确定这种磁场如何产生的规律。问题是：已知电流，它能形成什么样的磁场？对这一问题的解答曾由安培所作的三个决定性实验和在理论上所作的辉煌论证而确定了下来。我们将绕过这一有趣的历史进程，而只是申明大量实验事实已经证实了麦克斯韦方程

* 然而，我们不久将见到，这样的假定对于电磁力一般是不正确的。

组的有效性。我们将取之作为起点。若在这些方程中丢下含有时间微商的那些项，则可得到关于静磁学的方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.12)$$

和

$$\epsilon_0^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (13.13)$$

这些方程仅在一切电荷密度都恒定、一切电流都稳恒，使得电场和磁场都不随时间而变——一切场都呈现“静止”状态——时才正确。

应当指出，认为有象静磁情况这么一种东西是相当危险的，因为毕竟总得有电流才能获得磁场——而电流则只能来自运动着的电荷。因此，“静磁”只是一种近似。它指的是拥有大量运动电荷，而我们又可将其近似成稳流的一种特殊的动力情况。只有这样才能谈论一种不随时间而变的电流密度 \mathbf{j} 。这一题目应当更准确地称为关于稳流的研究。假设所有之场都恒定，我们从那完整的麦克斯韦方程组(2.41)中丢掉了一切含有 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 和 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 之项后，便可获得上面的式(13.12)和(13.13)两式。并注意：由于任何矢量之旋度的散度均必须等于零，式(13.13)便要求 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 。根据式(13.8)，这只有在 $\partial \rho / \partial t$ 为零时才正确。但如果 \mathbf{E} 不随时间而变，这便是必然的了，因而我们的一些假设都是彼此一致的。

$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 这一要求的含意是，只能容许在首尾相连的路线中有流动着的电荷。例如，它们可以在构成一个完整回路——称为线路——的导线中流动。当然，这种线路可以含有用以维持电荷流动的发电机或电池组。但不容许包括正在被充电或放电的电容器。（当然，我们以后还将推广到包括那些动态场，但目前打算先讨论较简单的稳流情况。）

现在，让我们来看看式(13.12)和(13.13)的含意如何。第一个式说明 \mathbf{B} 之散度为零。拿它来同静电学中的类似方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 作比较，就可以断定，不会有电荷的磁类似物，即没有能从中产生出 \mathbf{B} 线的磁荷。如果我们对矢量场 \mathbf{B} 用“线”的概念来设想，则这些线将绝无始点，也绝无终点。那么，它们是从哪里来的呢？在有电流的地方磁场才会“出现”；它们有一个正比于电流密度的旋度。无论哪一处有电流，总会有构成回线的磁力线环绕着该电流。由于 \mathbf{B} 线无始无终，这些线便经常能够兜绕回来以形成闭合回线。但也有 \mathbf{B} 线不是简单闭合回线的那些复杂情况。可是，无论它们的情况如何，总不会有从一些点上散发出去的。

迄今为止，还没有发现过任何磁荷，因而 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。这一结果，不仅对于静磁场正确，甚至对于动态场也始终正确。

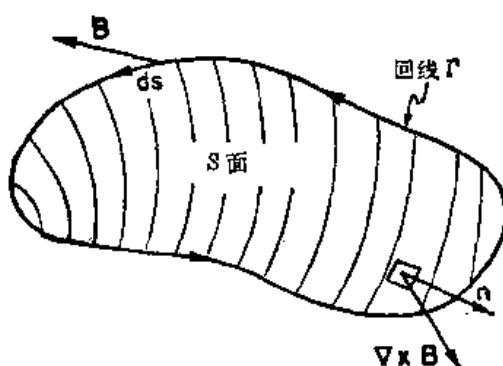
\mathbf{B} 场与电流的关系包含在式(13.13)中。这里有一个新的情况与静电学大不相同，在那里我们曾有过 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。这个方程意味着 \mathbf{E} 环绕着任一闭合路线的线积分为零：

$$\oint_{\text{闭合}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

图 13-6 \mathbf{B} 之初向分量的线积分等于 $\nabla \times \mathbf{B}$ 之法向分量的面积分

这一结果是由斯托克斯定理得到的，该定理申述：

任一个矢量场沿任一闭合曲线的线积分，总会等于该矢量的旋度的法向分量的面积分（遍及任一个以该闭合回线为其边缘的表面而积出来的）。把这一定理应用于磁场矢量并利用在图 13-6 上所示的那些符号，则可得



$$\oint_r \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_s (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.14)$$

由式(13.13)取 \mathbf{B} 之旋度, 便有

$$\oint_r \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_s \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.15)$$

根据式(13.5), 就 \mathbf{j} 求得的积分即是通过 S 面的总电流 I . 既然对于稳流来说, 通过 S 面的电流与该面的形状无关, 则仅仅要求该面仍由 I 曲线所包围, 因而人们往往说成是“穿过 I 回线的电流”. 这样, 我们就有一个普遍定律: 绕行任一闭合曲线的 \mathbf{B} 之环流, 等于穿过该回线的电流 I 除以 $\epsilon_0 c^2$:

$$\oint_r \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{回线}}}{\epsilon_0 c^2}. \quad \text{图 13-7}$$

这一定律——叫安培定律——在静磁学中的作用与高斯定律在静电学中的作用一样. 但只有安培定律仍不能由电流确定 \mathbf{B} . 一般说来, 还必须用到 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. 但是, 正如我们将在下一节中见到的, 在具有某些简单对称性的特殊情况下它仍可以用来求得磁场.

§ 13-5 直导线与螺线管的磁场; 原子电流

通过找出在一根导线附近的磁场, 我们能够演示安培定律的应用. 我们要问: 在一条圆形截面的长直导线外面之场如何? 我们将假定某种可能不十分明显、但无论如何却是真的东西: 即 \mathbf{B} 的场线以闭合圆周环绕着该导线. 如果我们作出这一假定, 那么安培定律, 即式(13.16), 便会告诉我们场有多强. 根据这一问题的对称性, 在导线的一个同心圆上的所有各点, \mathbf{B} 就具有同一大小(见图 13-7). 于是, 我们能够很容易地算出 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ 的线积分来, 只不过是 B 乘以该圆周罢了. 设 r 为圆周半径, 则

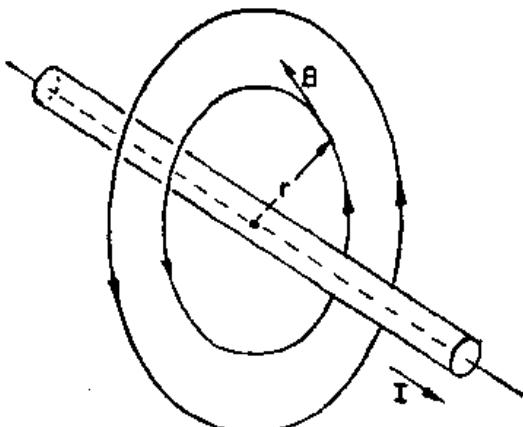
$$\oint_r \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r.$$

穿过该回线的总电流就是导线中的电流 I , 因而

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

或

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}. \quad (13.17) \quad \text{图 13-7 在载有电流 } I \text{ 的一根长直导线外面的磁场}$$



磁场的强度反比于 r 而逐渐减弱, r 是与导线轴心的距离. 倘若我们乐意, 也可把式(13.17)写成矢量形式. 记住 \mathbf{B} 是与 \mathbf{I} 和 \mathbf{r} 两者都垂直, 因而有

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r}. \quad (13.18)$$

我们已将因数 $1/4\pi\epsilon_0 c^2$ 提了出来, 因为它经常会出现. 值得记住的是, 这一因数准确地等于 10^{-7} (在那米·千克·秒制上), 因为一个象式(13.18)那样的方程式是用来定义电流单位安培的. 在距离一安培电流一米远处磁场就是 2×10^{-7} 韦伯每平方米.

既然电流产生了磁场, 它也将施力于附近另一根同样载有电流的导线上. 在第一章中, 我们就曾描述过作用于两载流导线间之力的一个简单演示. 如果两导线互相平行, 每一导

线将垂直于由另一导线所产生的磁场。当两电流均指同一方向时，两线将互相吸引；当电流的方向相反时，则两线互相排斥。

让我们取另一个例子，它也可以用安培定律来加以分析，只要我们加进关于场的某种知识。

假设有一个长线圈绕成紧密螺线管，其两种截面示如图 13-8。这样的线圈称为螺线管，从实验上我们观察到：当一螺线管相对于其直径十分长时，则在管外之场比起在管内之场将十分微小。仅仅利用这一事实，再加上安培定律，便可以找出管内之场的大小。

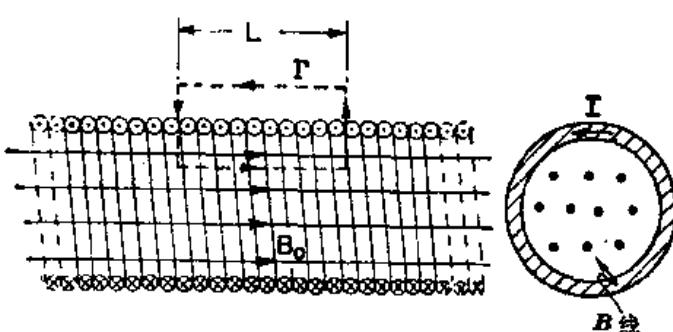


图 13-8 长螺线管的磁场

既然场总是呆在里面（而且散度为零），那么表示它的一些线就必然会平行于管轴，如图 13-8 所示的那样。假定这是事实，便可利用图上所示的那条矩形“曲线” Γ 来运用安培定律。这条回线先在螺线管内沿着那里的场，例如 B_0 ，行了一段距离 L ，然后垂直于场而行，再沿着管外回来，而那里的场则可以忽略。对于这么一条曲线， \mathbf{B} 的线积分不过是 B_0L ，而这应当等于 $1/\epsilon_0 c^2$ 乘以穿过 Γ 的总电流，如果在长度 L 上该螺线管共有 N 匝的话那将是 NI 。这样，我们就有

$$B_0L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}.$$

或者，若令 n 为每单位长度螺线管的匝数（即 $n = N/L$ ），便得

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.19)$$

当到达螺线管一端时， \mathbf{B} 线该会怎么样呢？大概的情形是：它们多少有点散开，并兜回到另一端，再进入螺线管，如图 13-9 所示的那样。象这样的场恰好就是在一条形磁铁外面所观察到的。但磁铁到底是什么东西？我们的方程表明， \mathbf{B} 来自电流，可是我们知道，一条寻常铁棒（既没有电池组也没有发电机）也能产生磁场。你也许会期望，在式(13.12)或(13.13)的右边还应有其他一些项来代表“磁铁密度”或者如此类的量。但是却没有这样的项。我们的理论申述：铁的磁效应乃是来自某些内部电流，而这些电流则已由该 \mathbf{j} 项所照顾到了。

从基本观点上看，物质是十分复杂的——正如我们以前在试图理解电介质时所见到的那样。为了不致扰乱目前的讨论，我们打算以后再来详细处理象铁那样的磁性材料的内部机制。暂时你得接受所有磁性都来自电流，而在永磁体中就有永久性的内部电流存在。对铁来说，这些电流乃是来自绕其本身之轴而自旋的电子。每一电子既带有这样一种自旋，便相当于一个小环行电流。当然，一个电子不会产生多么大的磁场，但在寻常一块物质中就有数以亿亿计的电子。平常它们都在作自旋并各自指向任意方向，因而没有任何净效应发生。奇迹出现在寥寥几种象

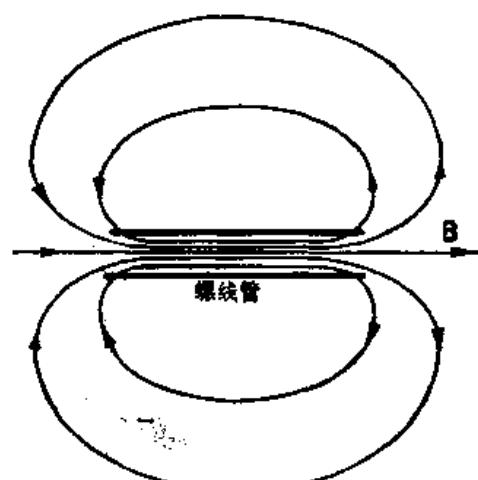


图 13-9 在螺线管外面的磁场

铁那样的物质中，其中有相当大一部分电子会以相同的轴向自旋——对铁来说，每一原子中就有两个电子参加这种合作式运动。在一块条形磁铁中会有许多个电子全都指着同一方向而自旋，因而，正如我们将会见到的，其总效应就相当于环绕该磁棒表面的电流。（这与我们以前对电介质所找到的情况很相似——即一块均匀极化的电介质相当于在其表面上有电荷分布。）因此，一根磁棒与一螺线管等价并不是偶然的。

§ 13-6 磁场与电场的相对性

当我们在上面提及作用于电荷上的磁力与其速度成正比时，你也许会怀疑：“哪一个速度呢？相对于哪个参照系统？”事实上，从本章开头所给出的有关 \mathbf{B} 的定义就已经很清楚，这个矢量究竟如何，取决于我们选取哪一个参照系来规定电荷的速度。但对于磁场的规定来说，我们还未说过哪一个才是合适的参照系。

事实证明，任何一个惯性系都可以。我们也将看到，磁和电并不是互相独立的东西——它们必须永远作为一个完整的电磁场而结合在一起。虽然在静止情况下，麦克斯韦方程组会分成两对，其中一对是关于电方面，而另一对则关于磁方面，在这两种场之间并没有明显联系，然而，在自然本身它们之间却有一个起因于相对性原理的十分密切的关系。从历史上看，相对性原理是在麦克斯韦方程组之后才发现的。事实上，正是对于电和磁的研究才最终导致爱因斯坦对相对性原理的发现。但是让我们且来看看，相对论知识会告诉我们有关磁力的什么东西，如果假定相对性原理可以——的确是可以——应用于电磁学方面的话。

假定我们想一想，一个负电荷以速度 v_0 平行于一根载流导线而运动，如图 13-10 所示的那样，将会发生的情况：我们试图理解在如下两种参照系中正在进行的事态：一个系统相对于导线固定，如图(a)所示；而另一个系统则相对于粒子固定，如图(b)所示。我们将第一个参照系叫作 S ，而第二个参照系叫作 S' 。

在 S 系上，显然有一磁力作用于该粒子上。这力朝向导线，所以若该电荷能自由运动，则应该看到它会向导线方面靠拢。但在 S' 系上，就不会有任何磁力作用于该粒子，因为它的速度为零。因此，它是否将停留在那里呢？在这两个参照系上，我们会看到不同的事态发生吗？相对性原理理应申述，在 S' 系上我们也该看到粒子会向导线方面靠拢过来。必须尝试去理解，为什么会发生这样的事情。

现在我们回过头来对一载流导线中的原子进行描述。在诸如铜一类的通常导体中，电流乃来自某些负电子——称为传导电子——的运动，而正的核电荷以及其余电子则都在材料里保持不动。我们令传导电子的密度为 ρ_- ，在 S 系中它们的速度为 v 。在 S 系中，那些静止不动的电荷密度为 ρ_+ ，这必须等于 ρ_- 的负值，因为我们正在考虑的是一根不带电的导

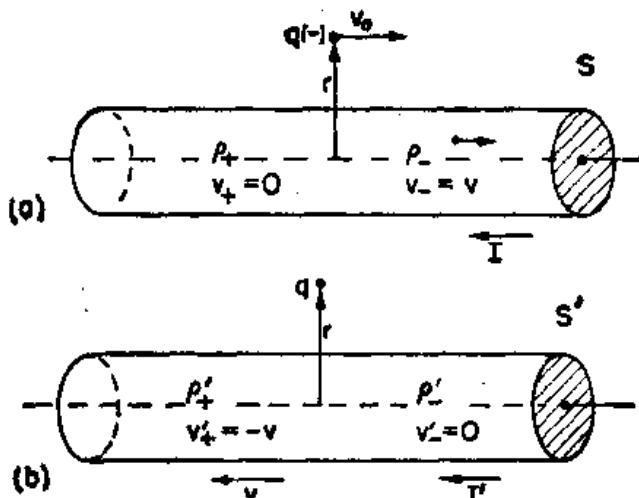


图 13-10 从两个参照系上去看一根载流导线与一个电荷 q 的互作用。(a) 在 S 系上，导线是静止的；(b) 在 S' 系上，电荷是静止的

线。这样在导线之外便不会有电场，因而作用于该运动的粒子上之力便仅仅是

$$\mathbf{F} = qv_0 \times \mathbf{B}.$$

利用上面式(13.18)中我们所找到的结果，即关于在离导线轴心为 r 处的磁场，我们便可以断定，作用于该粒子上之力乃是指向导线而又具有这么一个量值：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2Iqv_0}{r}.$$

利用式(13.4)和(13.5)，电流 I 可以写成 $\rho \cdot v A$ ，其中 A 是导线的横截面积。那么

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2q\rho \cdot Avv_0}{r}. \quad (13.20)$$

本来我们还可以继续处理任意速度 v 和 v_0 的普遍情况，但去检查粒子速度 v_0 与传导电子速度 v 相等的那种特殊情况，也将同样不错。因此，我们就写成 $v_0 = v$ ，而式(13.20)则变成

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot A}{r} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.21)$$

现在我们把注意力转移到在 S' 系中所发生的情况，那里粒子静止不动而导线则以速率 v (朝向图的左方) 从旁跑过。那些跟着导线跑的正电荷将在该粒子上造成某一磁场 B' 。但粒子现在是静止的，因而就没有磁力作用于其上了！如果有任何力作用于该粒子上，它必须来自电场。必然是那根正在运动着的导线已产生了电场。但它能够这样做只有当它表现出带电时——一定是一根载流的中性导线运动时才会表现出带电。

我们必须对此细作检查。应当试从 S 系中所已知的导线里的电荷密度算出在 S' 系中那同一密度。人们起初也许会认为，它们应该彼此相同，可是我们知道，在 S 与 S' 两系之间长度已经改变了(见第一卷、第十五章)，从而体积也将起变化。由于电荷密度有赖于电荷所占的体积，因而密度也将发生变化。

在我们对 S' 系中的电荷密度作出决定以前，就必须知道一群电子正在运动时对于它们的电荷会发生什么情况。我们知道，一个粒子的表观质量会有 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 那么多的变化。是否它的电荷也要作某一相似变化？不！无论动与不动，电荷总是一样。否则我们便不会始终都观测到那总电荷守恒了。

假设我们取一块材料，比方说一块导体，它原本是不带电的。现在我们把它加热。由于电子与质子的质量不同，它们的速度改变数量将会不同。假如粒子的电荷有赖于携带各该电荷的粒子的速率，则在这么一块加了热的导体中，电子和质子的电荷便该不会再平衡了。一块材料当加了热之后就该变成带电的了。正如以前我们曾经见到的，在一块材料中所有电子的电荷若发生微小变化就会引起庞大的电场。这样的效应却从未观测到。

并且，我们还可以指出，在物质中电子的平均速率与其化学成分有关。假如电子的电荷会随速率变化，则在一块材料中的净电荷便将在化学反应中有所变化。通过一种直接计算又能够证明：即使电荷对速率仅有一个十分微小的依存关系，也会从最简单的化学反应中产生出巨大的电场来。但从没有这种效应被观测到，因而我们断定：一个单独粒子的电荷与其运动状态无关。

因此，一个粒子所带的电荷乃是一个不变标量，与参照系无关。这意味着，在任一参照系，由电子分布的电荷密度恰好就正比于每单位体积中的电子数目。我们只须关注这么一个事实：体积可由于距离方面的相对论性收缩而发生改变。

现在，我们把这些概念应用于正在运动的那根导线。如果取长度为 L_0 的一段导线，其中静止电荷具有密度 ρ_0 ，则它将含有总电荷 $Q = \rho_0 L_0 A_0$ 。如果这同一些电荷是在一个以速度 v 运动着的不同参照系上被观测的，则它们均会在一段较短的长度

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (13.22)$$

上被找到。但面积 A_0 却依旧不变（因为对于运动是横向的那种尺度不会改变），参见图 13-11。

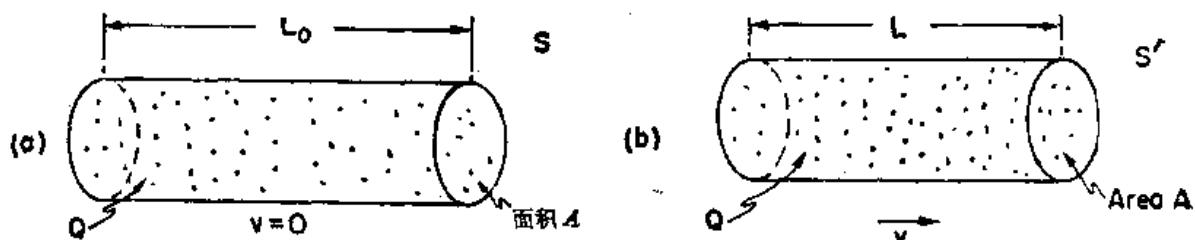


图 13-11 如果一个静止的电荷分布拥有电荷密度 ρ_0 ，则这同一电荷分布从一个以相对速度 v 运动着的参照系上去看，将具有密度 $\rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$

若把电荷在其中运动着的那个参照系上的电荷密度叫做 ρ ，则总电荷 Q 便将是 $\rho L A_0$ 。这也应该等于 $\rho_0 L_0 A_0$ ，因为在任一参照系上电荷总是一样，所以 $\rho L = \rho_0 L_0$ ，或根据式 (13.22)，

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.23)$$

在一个运动着的电荷分布中，其电荷密度的变化情况，就象一粒子的相对性质量那样。

现在我们将这一普遍结果应用于导线中的正电荷。这些电荷在 S 参照系是静止的。然而在 S' 系上，那里导线以速率 v 运动，因而正电荷密度就会变成：

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.24)$$

负电荷在 S' 系上是静止的，因而在这一参照系中它们具有“静密度” ρ_0 ，即在式 (13.23) 中， $\rho_0 = \rho'_-$ 。由于当导线静止时，即在 S 系上，负电荷的速率为 v ，因而它们具有密度 ρ_- 。于是对于传导电子来说，我们便有

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.25)$$

或

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (13.26)$$

现在我们就能够明白，为什么在 S' 系上会有电场——因为在这一参照系上导线里拥有净电荷

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-.$$

利用式 (13.24) 和 (13.26)，便得

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

由于静止导线是中性的， $\rho_- = -\rho_+$ ，因而我们就有

$$\rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.27)$$

由此可见，运动导线是会带正电，并将在线外的一个静止电荷上产生电场 E' 。我们已经解

解决了一个均匀带电柱体的静电学问题。与该柱轴相距为 r 处的电场为

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.28)$$

作用于带负电粒子上之力朝向导线。从这两个观点看，至少我们已有了方向相同之力，在 S' 系的电力与在 S 系的磁力方向相同。

在 S' 参照系，力之大小为

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.29)$$

拿这个结果 F' 与式(13.21)中的结果 F 比较，便可见从这两个观点看来力之大小几乎完全相等。事实上，

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (13.30)$$

所以对于我们所已经考虑过的低速度来说，这两个力彼此相等。至少，我们能够说，对于低速度已经了解到磁和电不过是“观察同一事物的两种方法”而已。

可是事态比此还要好。若我们把从一参照系过渡到另一参照系时力也得要变换这一事实计算在内，便将发现这两种看待事情发生的方式对于任一速度来说都会确实给出同一个物理结果。

要看出这一点的一种办法，是先提出这样一个问题：力作用了一会儿之后，该粒子的横向动量将会怎么样？从第一卷第十六章中我们知道，不论在 S 或 S' 参照系中，一个粒子的横向动量总应该相同。若把这横向坐标叫作 y ，我们就要来比较 Δp_y 和 $\Delta p'_y$ 。利用在相对论上正确的运动方程 $F = dp/dt$ ，我们便会期待在 Δt 时间之后粒子将有一横向动量，这在 S 参照系即是

$$\Delta p_y = F \Delta t. \quad (13.31)$$

而在 S' 系，则这横向动量将为

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'. \quad (13.32)$$

当然，我们必须在互相对应的时间间隔 Δt 与 $\Delta t'$ 中来比较 Δp_y 和 $\Delta p'_y$ 。在第一卷第十五章中我们曾见到，相对于一运动粒子来说，时间间隔显得比在该粒子的静止系统中要长些。由于我们的粒子在 S' 系上是静止的，因而便该期望，对于一小 Δt ，应有

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (13.33)$$

而所有这一切都表现正常。根据式(13.31)和(13.32)，

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F' \Delta t'}{F \Delta t},$$

这恰好等于 1，只要把式(13.30)和(13.33)两式结合起来就行。

我们已发现了：对于沿一导线运动着的粒子，无论是从相对于导线静止的坐标系，还是从相对于粒子静止的坐标系来进行分析，都会得到同一个物理结果。在第一种情况下，该力纯系“磁”力；而在第二种情况下，则力纯系“电”力。这两种观点显示于图 13-12 中（尽管在第二个参照系上仍有一磁场 B' ，但它对于一静止粒子来说将不会产生任何力）。

要是选取另一个坐标系，该会找到另一组不同的 E 和 B 场。电力和磁力都是同一物理现象——粒子间的电磁互作用——中的各部分。把这一互作用分成电的和磁的两部分，在

很大程度上取决于被选用来描述它的参照系。但一套完整的电磁描述是具有不变性的，因

而电和磁合在一起就同爱因斯坦的相对论完全互相协调了。

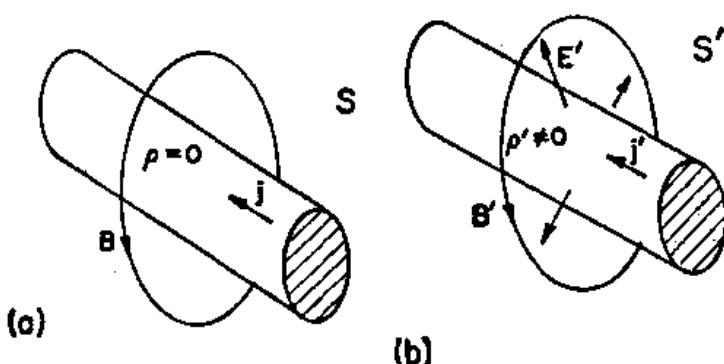


图 13-12 (a) 在 S 参照系, 电荷密度为零而电流密度为 j 。这里仅有一磁场。(b) 在 S' 系, 就有电荷密度 ρ' 和一个不同的电流密度 j' 。磁场 B 已经不同, 并且还有一电场 E'

未发现过这些线“在 S 系上是以速度 v 在我们旁边走过”的。在这个 S 系中根本就没有任何电场! 因此, 作这样的陈述是没有意义的: 当我把一块磁铁移动时, 它会带着它的磁场一起, 因而 B 线也就在移动。一般说来, 从“场线的运动速率”这么一种概念出发, 始终不会构成任何意义。场是我们用来描述在空间里一点所发生的事情的办法。特别是, E 和 B 告诉我们作用于一个运动粒子上之力。问起“由一运动磁场作用于一电荷上之力如何?”根本不含有任何准确意义。力是由在电荷所在处的 E 和 B 值给出的, 而公式(13.1)不会由于 E 或 B 之源正在运动而改变(E 和 B 之值才会由于源的运动而发生改变)。我们的数学描述只是同相对于某一惯性参照系的两种作为 x, y, z 和 t 的场函数打交道。

以后将常提到“行经空间的电场和磁场”, 诸如光波一类。但这与一根弦线上的行波相似。此时, 我们并非指弦线的某部分将会在波的方向上运动, 而是指弦线的位移将首先出现在某处, 继而又出现在另一处。同理, 在一电磁波中, 波在奔跑, 即是场的大小在变化。所以今后当我们——或其他人——谈及一个“运动着”的场时, 你就应该想到它只是一种描述在某些情况下变化着的场的便利而又快捷的途径。

§ 13-7 电流与电荷的变换

对于上面我们对粒子和对导线里的传导电子均取同一速度 v 时所作的那种简化手续, 你可能会感到担心。本来尽可以返回去并对两个不同速度再运算一遍, 但更方便的却是去注意电荷和电流是一个四元矢的分量(见第一卷第十七章)。

我们已经知道, 若在静止参照系上的电荷密度为 ρ_0 , 则在电荷具有速度 v 的参照系上, 其密度为

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

在这同一系上电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.34)$$

原来我们知道, 一个以速度 v 运动着的粒子其能量 U 与动量 \mathbf{p} 分别由下列两式给出:

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

其中 m_0 代表粒子的静质量。我们也知道， U 与 \mathbf{p} 构成一相对论性四元矢。由于 ρ 和 \mathbf{j} 与速度 \mathbf{v} 的关系同 U 和 \mathbf{p} 与速度的关系一样，我们便可以断定， ρ 和 \mathbf{j} 也是一个相对论性四元矢的各分量。这一性质就是对以任一速度运动着的导线之场进行普遍分析的钥匙。如果我们想要对线外粒子速度 v_0 不同于那些传导电子速度的问题再次谋求解决，就需要这一把钥匙。

如果我们希望把 ρ 和 \mathbf{j} 变换成在以沿 x 轴的速度 u 运动着的一个坐标系上，则我们知道，它们应该恰好如同 t 和 (x, y, z) 那样变换（见第一卷第十五章）：

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x - up}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, & j'_y &= j_y, \\ z' &= z, & j'_z &= j_z, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho - uj_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

有了这些方程式，我们就能把两个参照系上的电荷和电流互相联系起来。取其中一种参照系上的电荷和电流，我们便能通过应用麦克斯韦方程组来解出在该参照系上的电磁学问题。不管我们所选取的是哪一个参照系，对于粒子运动所获得的结果将会彼此相同。迟些我们还将回到有关电磁场的相对论变换上来。

§ 13-8 迭加原理；右手法则

我们将通过对静磁学这一课题再作出两个述评来结束这一章。首先在有关磁场的两个基本方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/c^2 \epsilon_0$$

中， \mathbf{B} 和 \mathbf{j} 都是线性的。这意味着，迭加原理也适用于磁场。由两个不同的稳恒电流所产生之场等于每一电流单独作用时的场之和。我们的第二点述评，是关于以前曾遇到过的右手法则（诸如由电流所产生之磁场的那个右手法则）的。我们也都注意到，一块磁铁的磁化被理解成来自该材料里的电子自旋。一个自旋电子的磁场方向也通过那同一右手法则而与其自旋轴线相联系着。由于 \mathbf{B} 是按照“手”式法则——涉及一个叉积或旋度——而制定的，因而被称为轴矢（凡在空间里的方向与按照右手或左手都无关的那些矢量则叫做极矢。例如，位移、速度、力、和 E 都是极矢。）

可是，在电磁学中能够用物理方法加以观测的量却不是右手（或左手）的。电磁互作用对于反射表现出对称（见第一卷第五十二章）。每当计算两组电流间的磁力时，改变手的惯例并不会改变所算出来的结果。与右手惯例无关，我们的方程组总会引导到同向电流相吸而异向电流相斥。（试用“左手法则”来算出力。）吸引或排斥是一种极矢。之所以出现这一结果，是由于在描述任一完整互作用时，我们两次用了右手法则——一次是从电流找出 \mathbf{B} 来；再一次则是找出这个 \mathbf{B} 在另一电流上所产生之力。使用右手法则两次与使用左手法则两次是一样的。假如把惯例改变成一左手系统，则所有的 \mathbf{B} 场都将掉转过来，但所有之力——或更加确切的乃是所观测到的物体的加速度——却仍保持不变。

虽然最近物理学家在深感惊讶之余，发现并非自然界的所有一切定律都总是对镜面反射保持不变，但电磁定律的确具有这样一种基本对称性。

在各种不同情况下的磁场

§ 14-1 矢势

在本章中，我们将继续讨论与稳恒电流有关的磁场——静磁学课题。磁场与电流之间由如下的基本方程互相联系着：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (14.1)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (14.2)$$

现在我们希望以一种普遍方式，即不需要任何特殊对称性或直观猜测，就能在数学上解出这些方程。在静电学中，我们曾找到了当所有电荷的位置均为已知时求出场的一种直接程序。人们仅通过对电荷取积分——比如式(4.25)中的积分——就能算出标势 ϕ 来。然后，如果还想要知道电场，则可对 ϕ 求微商而得到。现在我们要来证明：如果已知所有运动电荷的电流密度 \mathbf{j} ，便会有种找出磁场 \mathbf{B} 的相应手续。

在静电学中，我们曾了解到（由于 \mathbf{E} 的旋度始终是零），有可能把 \mathbf{E} 表达成一个标量场 ϕ 的陡度。现在 \mathbf{B} 的旋度却不常等于零，因而一般说来不可能把它表达成一陡度。然而， \mathbf{B} 的散度却永远为零，这就意味着我们总能把 \mathbf{B} 表达成另一个矢量场的旋度。因为正如我们以前曾在§ 2-7 中见到的，旋度的散度总是等于零。于是，就总能够把 \mathbf{B} 与将被称作 \mathbf{A} 之场互相联系起来：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (14.3)$$

或者通过写成分量，则有

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}; \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

既然写出了 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，就能保证式(14.1)被满足，因为必然有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

\mathbf{A} 这个场被称为矢势。

你将会记起，标势 ϕ 并未由其定义所完全规定。如果你对某一问题已找到了 ϕ ，你还总能通过加上一常数而找到另一个同样好的势 ϕ' ：

$$\phi' = \phi + C.$$

这个新的势 ϕ' 会给出相同的电场，因为陡度 ∇C 为零。 ϕ' 与 ϕ 表达同一物理现象。

同样，我们也可以有能力给出同一磁场的矢势 \mathbf{A} 。又一次，由于 \mathbf{B} 是对 \mathbf{A} 取微分而获得的，因而，若在 \mathbf{A} 上加一常数总不会改变任何具有物理实质的东西。可是对于 \mathbf{A} 来说，还有更加广阔的活动余地。我们可以对 \mathbf{A} 加进任何等于某一标量场的陡度之场，而不致改变

其物理情况。这可证明如下：假设对某一实际问题已有了一个能正确给出磁场 \mathbf{B} 之 \mathbf{A} ，并质问要在什么情况下某一个新的矢势 \mathbf{A}' 才能在代入式(14.3)中时，会给出同一个 \mathbf{B} 场来。于是， \mathbf{A} 和 \mathbf{A}' 便应有同一旋度：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A}.$$

因此，

$$\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0.$$

但若一矢量的旋度为零，则它必然是某一标量场——比如说 ψ ——的陡度，因而 $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$ 。这就意味着，若 \mathbf{A} 为解决某一问题的圆满矢势，则不论对于任何 ψ ，

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (14.5)$$

仍将是一个同样满意的矢势，因为它引导到同一个 \mathbf{B} 场。

这样做往往很方便，即是任意使 \mathbf{A} 受另一条件限制，因而将其某种“活动范围”扣除出去（正如我们经常选取在无限远处的标势 ϕ 等于零也很方便一样）。例如，可以任意规定 \mathbf{A} 的散度应如何而对 \mathbf{A} 加以限制。我们总能够这样做，而不致影响 \mathbf{B} 。这是因为：虽然 \mathbf{A}' 和 \mathbf{A} 都具有同一旋度，从而给出了相同之 \mathbf{B} ，但它们却不需要具有同一散度。事实上， $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$ ，因而通过选取某一适当的 ψ ，就可以使 $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ 成为我们所希望的任何东西。

到底对于 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 应该如何选取呢？这一选择应为获得最大的数学方便而作出，并将取决于我们所从事计算的问题。对于静磁学来说，我们将作这么一个简单选择：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (14.6)$$

(往后，当考虑电动力学时，便将改变这一选择。)于是，目前我们对 \mathbf{A} 的完整定义*为： $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。

为了对矢势得到一些经验，让我们首先看看对于一匀强磁场 \mathbf{B}_0 来说，它是什么。选取 z 轴作为 \mathbf{B}_0 的方向，我们就应有：

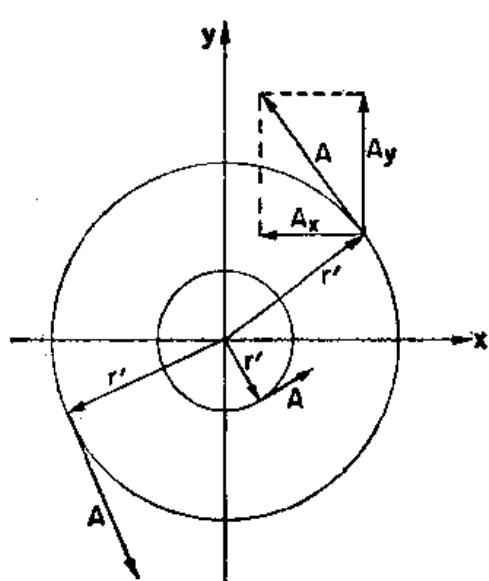


图 14-1 一个沿 z 方向的匀强磁场 \mathbf{B} 对应于绕着 z 轴旋转而又具有大小为 $A = Br'/2$ 的矢势 \mathbf{A} (r' 是从 z 轴出发的位移)

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0;$$

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0; \quad (14.7)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0.$$

通过观察，可知这些方程的一个可能解答是：

$$A_x = xB_0; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0.$$

或者，我们也同样可以取：

$$A_x = -yB_0; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0.$$

还有另一个解答则是上述两者的线性组合：

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0; \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0; \quad A_z = 0. \quad (14.8)$$

很明显，对于任一特定 \mathbf{B} 场来说，该矢势 \mathbf{A} 可有许多种可能性，因而并不是唯一的。

上面第三个解，即式(14.8)，具有一些有趣特性。由于其 x 分量正比于 $-y$ ，而 y 分量正比于 $+x$ ， \mathbf{A} 就必须与从 z 轴出发的矢量成直角。

* 我们的定义并未唯一地确定 \mathbf{A} 。对于一个唯一的规定，我们还应该说明在某一边界上或在巨大距离上 \mathbf{A} 场会如何表现。例如，选取在无限远处场会降低至零，有时是方便的。

这个从 z 轴出发的矢量，我们把它叫作 \mathbf{r}' （之所以加上一撇是为了要提醒我们，并不是从原点出发的一个位移矢量）。并且， \mathbf{A} 的大小仍正比于 $\sqrt{x^2+y^2}$ ，因而也就正比于 \mathbf{r}' 。所以（对于我们的匀强磁场来说） \mathbf{A} 可以简单写成

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}'. \quad (14.9)$$

这矢势 \mathbf{A} 具有大小 $B\mathbf{r}'/2$ 并绕着 z 轴旋转，如图 14-1 所示。例如，若 \mathbf{B} 场为螺线管内的轴向磁场，则这个矢势便和螺线管上的电流沿着同一指向环流。

关于一匀强场的矢势也可由另一种途径获得。 \mathbf{A} 绕任一闭合回线 Γ 的环流与 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的面积分是由斯托克斯定理，即式(3.38)联系着的：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{area}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (14.10)$$

但右边的积分乃等于穿过回线范围内 \mathbf{B} 之通量，因而

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{area}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \quad (14.11)$$

因此，绕行任一回线的 \mathbf{A} 之环流等于穿过该回线范围内的 \mathbf{B} 之通量。如果取一半径为 r' 而落在与该匀强场 \mathbf{B} 垂直的平面上的圆形回线，则所通过的通量就恰恰是

$$\pi r'^2 \mathbf{B}.$$

如果把原点选取在一条对称轴上，因而可以认为 \mathbf{A} 是沿着周边的并且仅仅是 r' 的函数，则 \mathbf{A} 的环流便将是

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

同上面一样，我们得到

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

在刚才所述的例子中，我们已从磁场算出了矢势，这与正常做法恰好相反。在复杂问题中，往往先解决矢势，然后才由它来确定磁场，那就比较容易。现在，我们将来说明如何能做到这一点。

§ 14-2 已知电流的矢势

既然 \mathbf{B} 是由电流确定的，所以 \mathbf{A} 也如此。我们现在要由电流来求 \mathbf{A} 。从基本方程式(14.2)出发：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

当然，这就意味着

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (14.12)$$

这一方程对于静磁学，正如同方程

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14.13)$$

对于静电学一样。

如果我们引用那矢量全等式(2.58)，将 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ 改写成：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (14.14)$$

则关于矢势的式(14.12)看来就更象那个关于 ϕ 的式子。既然我们已决定使 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (而现在就会看出个所以然来了), 式(14.12)便变成

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.15)$$

当然, 这一方程包括下列三个方程:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}; \quad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}; \quad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.16)$$

而这三个方程中的每一个在数学上均与下列方程全同:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (14.17)$$

所有以前曾学习过的由已知 ρ 解出势的方法, 都可用来由已知 \mathbf{j} 解出 \mathbf{A} 的每一分量!

在第四章中, 我们曾见到, 静电学方程式(14.17)有一个通解:

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}.$$

因而我们就立即知道, 关于 A_x 的通解为

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2)dV_2}{r_{12}}. \quad (14.18)$$

A_y 和 A_z 与此相仿。(图14-2将向你们提醒 r_{12} 和 dV_2 的惯例。)我们可以将这三个解归结为一矢量式:

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2)dV_2}{r_{12}}. \quad (14.19)$$

(如果你乐意, 还可直接对各分量取微分而证实: 关于 \mathbf{A} 的这一积分会满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 只要 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, 而这点我们早已知道对于稳恒电流来说是理所当然的。)

这样, 我们就有一个关于找出稳恒电流的磁场的普遍方法。原则是: 从一电流密度 \mathbf{j} 所产生之矢势的 x 分量与从一等于 j_x/c^2 的电荷密度所该产生之电势 ϕ 相同——而 y 和 z 分量也与此相仿。(这一原则只对在固定方向上的分量才适用。比方, \mathbf{A} 的“径向”分量便不能按这同一种办法从 \mathbf{j} 的“径向”分量算出来。)因此, 从电流密度矢量 \mathbf{j} , 便可以应用式(14.19)来找出 \mathbf{A} ——即通过对分别具有电荷分布为 $\rho_1 = j_x/c^2$, $\rho_2 = j_y/c^2$ 和 $\rho_3 = j_z/c^2$ 的三个想象中的静电学问题作出解答, 从而找出 \mathbf{A} 之每一分量。然后, 又可通过取 \mathbf{A} 之各种微商以算出 $\nabla \times \mathbf{A}$ 来, 结果可获得 \mathbf{B} 。这比静电学稍为复杂一些, 但却是同一种见解。现在, 将通过在几种特殊情况下解出矢势来证明这一理论。

§ 14-3 直 导 线

作为第一个例子, 我们将再次求一直导线之场——这在上一章中已经应用式(14.2)和一些关于对称性的论据而解答过。我们考虑半径为 a 而通有稳恒电流 I 的一根长直导线。与静电学中电荷分布于一导体上的情况不同, 导线中的稳恒电流乃均匀地分布在该线的横截面内。如果选取如图14-3所示的那个坐标系, 则电流密度矢量 \mathbf{j} 便只有一个 z 分量, 其大小在导线内为

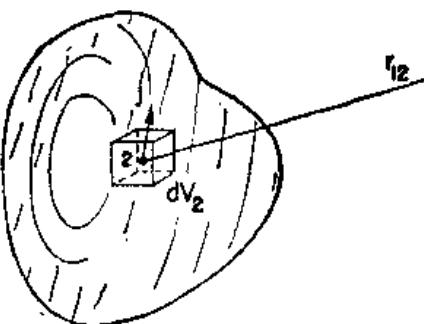


图14-2 点1处的矢势 \mathbf{A} 是对一切点2处的电流元 dI 积分而得出的

請勿用於盈利之目的

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2}, \quad (14.20)$$

而在导线外则为零。

既然 j_x 和 j_y 都是零，我们便立即有

$$A_x = 0, \quad A_y = 0.$$

为求得 A_z ，我们可以利用带有一均匀电荷密度 $\rho = j_z/c^2$ 的导线之电势 ϕ 的那种解答。在一无限长带电柱体之外的各点处其电势为

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

式中 $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，而 λ 则为每单位长度的电荷，即 $\pi a^2 \rho$ 。

所以对于通有均匀电流的长直导线之外的某点， A_z 应该是

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'.$$

由于 $\pi a^2 j_z = I$ ，上式还可以写成

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'. \quad (14.21)$$

现在就可由式(14.4)找出 \mathbf{B} 。这里，在六个微商中只有两个不等于零。因而得出

$$B_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2}; \quad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}; \quad (14.23)$$

$$B_x = 0.$$

我们得到了与以前同样的结果： \mathbf{B} 环绕着导线，其大小由下式确定：

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \quad (14.24)$$

§ 14-4 长螺线管

其次，再来考虑一个无限长螺线管。沿管的表面每单位长度通有 nI 的环行电流（我们设想每单位长度绕有 n 匝通了电流 I 的导线，并略去在绕圈上的微小螺距）。

正如曾经定义过的“面电荷密度” σ 那样，这里我们也定义“面电流密度” \mathbf{J} ，等于在该螺线管表面上每单位长度的电流（这当然恰好就是平均电流密度 j 乘以该薄层线圈的厚度）。 \mathbf{J} 的大小在这里等于 nI 。这一表面电流（见图 14-4）具有如下分量：

$$J_x = -J \sin \theta, \quad J_y = J \cos \theta, \quad J_z = 0.$$

现在我们必须对这样一种电流分布找出 \mathbf{A} 来。

首先，我们愿意找出在螺线管外面各点处的 A_z 。这一结果同在一个带有面电荷密度

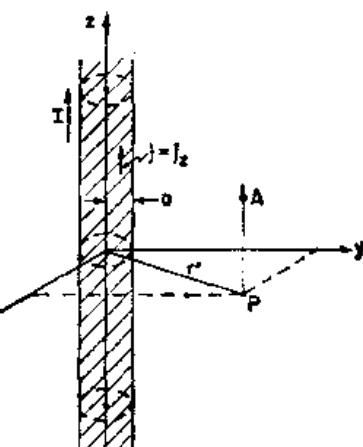


图 14-3 沿着 z 轴而通有均匀电流密度 j 的一根长圆柱形导线

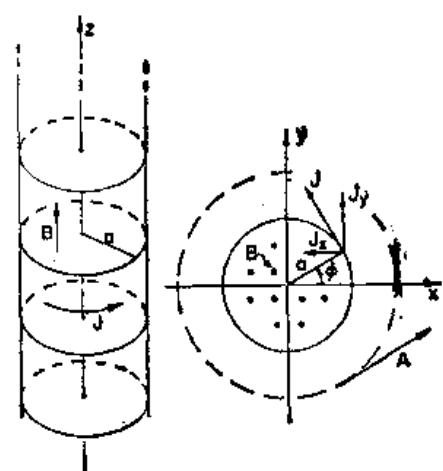


图 14-4 通有面电流密度 J 的长螺线管

$$\sigma = \sigma_0 \sin \phi$$

(其中 $\sigma_0 = J/c^2$) 的柱外电势相同。我们从未解答过这样一种电荷分布，但却做过某种相似的问题。这一电荷分布相当于两根各带正电和负电的实心柱，在 y 方向上它们的轴有了微小的相对位移。这样一对带电柱体之势，与单独一根均匀带电柱体之势对 y 取的微商成正比。这一比例常数是可以算得的，但暂时无需加以考虑。

一根带电柱体之势正比于 $\ln r'$ ，这样该对柱体之势便是

$$\phi \propto \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

因此我们知道

$$A_x = -K \frac{y}{r'^2}, \quad (14.25)$$

式中 K 是某一常数。根据同一论点，我们也会找出

$$A_y = K \frac{x}{r'^2}. \quad (14.26)$$

尽管以前曾经说过在螺线管之外没有磁场，但现在我们却发现有一个 A 场环绕着 z 轴，如图 14-4 所示。问题在于，它的旋度是否等于零？

显然， B_x 和 B_y 都等于零，而

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{x}{r'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{y}{r'^2} \right) = K \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4} \right) = 0.$$

因此，在一个十分长的螺线管外面磁场的确为零，那怕矢势并不等于零也罢。

上述结果我们还可以利用其他已知的东西来核对：围绕螺线管的矢势环流应等于管内 B 之通量（式 14.11）。这环流为 $A \cdot 2\pi r'$ ，或者，既然 $A = K/r'$ ，那便是 $2\pi K$ 。注意！这与 r' 无关。如果在管外不存在 B 的话，这恰好就是

应得的结果，因为通量仅仅是螺线管内 B 之大小乘以 πa^2 。对于半径 $r' > a$ 的所有圆周这通量都相同。在上一章中我们曾经得出管内之场为 $nI/\epsilon_0 c^2$ ，因而便可以确定该常数 K ：

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\epsilon_0 c^2},$$

$$\text{即 } K = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}.$$

因此，管外矢势的大小为：

$$A = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r'}, \quad (14.27)$$

并且总是垂直于矢量 r' 的。

我们刚才考虑的是一个由导线绕成的螺线管，假如是一根旋转着的表面带有静电荷的长柱体，也该产生那相同之场。若有一根半径为 a 而带着面电荷密度 σ 的薄柱壳，则当把它旋转时就

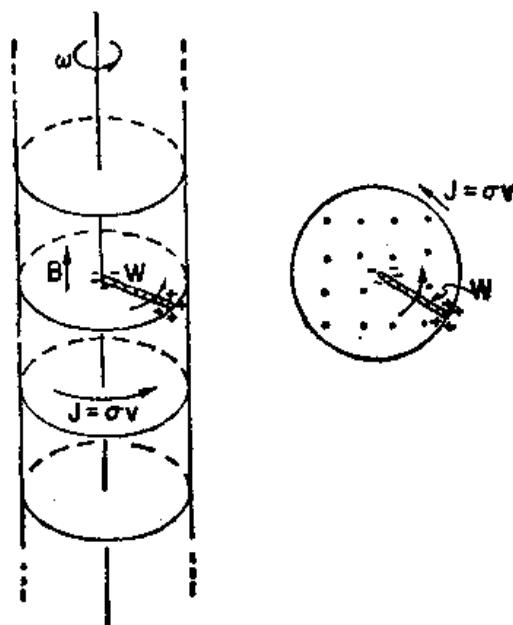


图 14-5 一根旋转着的带电柱壳在柱内会产生一个磁场。陪着该柱旋转的一根径向短导线会有电荷感生于其两端上

会形成一个表面电流 $J = \sigma v$ ，其中 $v = a\omega$ 是面电荷的速度。这样，在该柱内就将有一个 $B = \sigma a \omega / \epsilon_0 c^2$ 的磁场。

现在，可以提出这样一个有趣问题。假设我们用一根短导线 W 安置成垂直于柱轴，从轴心伸出至柱面，并固定于柱面上，以便随柱旋转，如图 14-5 所示。这根导线是在磁场中运动，因而 $v \times B$ 那些力就会引起该导线两端带电（两端将被充电直至由这些电荷所产生的 E 场恰好抵消 $v \times B$ 之力为止）。如果该柱壳带有正电荷，则导线在柱轴那一端便将有负电荷。通过测量这根导线一端的电荷，我们便能测得该系统的旋转速率。这样，也就有一种“角速度计”了！

但你是否还在怀疑：“要是把自己置身于该旋转柱的参照系上又将如何呢？这时不过是一根静止不动的带电柱壳，而我知道那些静电方程总会说明并没有什么电场存在于该柱壳之内，因而也就没有任何力会把电荷推向轴心了。因此一定是出了某种差错”。但却没有发现什么东西是弄错了。原来不存在“转动的相对性”。一个转动系统并不是一个惯性参照系，因而物理规律变得不同了。我们必须确实保证，只有相对于惯性坐标系才能应用电磁学方程组。

要是我们能够运用这么一个带电柱壳来测量地球的绝对转动，那该多么美妙，但可惜该效应过于微小，即使采用目前所能得到的最精密仪器也无法观察出来。

§ 14-5 一个小回线之场；磁偶极子

让我们应用这种先求矢势的方法来找出一个小回线电流之场。所谓“小”者，照例指的只是我们所感兴趣的乃是远比回线尺度大得多的那些距离上之场。结果将得出，任一个小回线就是一个“磁偶极子”。这就是说，它所产生的磁场类似于来自一个电偶极子的电场。

首先考虑一矩形回线，并按照图 14-6 所示那样选择我们的坐标系。沿 z 方向并没有电流，因而 A_z 为零。在长度各等于 a 的两边则都有沿 x 向的电流。每一段中，电流密度（以及电流）都是均匀的。因此关于 A_x 之解就恰好象来自两根带电棒的静电势那样（见图 14-7）。既然这两根棒各带相反电荷，它们在远处的电势就该只是一个偶极子之势（§ 6-5）。在图 14-6 的 P 点上，这势应该是

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}, \quad (14.28)$$

式中 \mathbf{p} 为该电荷分布的偶极矩。在这种情况下，偶极矩等于每根棒上的总电荷乘以两棒间的距离：

$$p = \lambda ab. \quad (14.29)$$

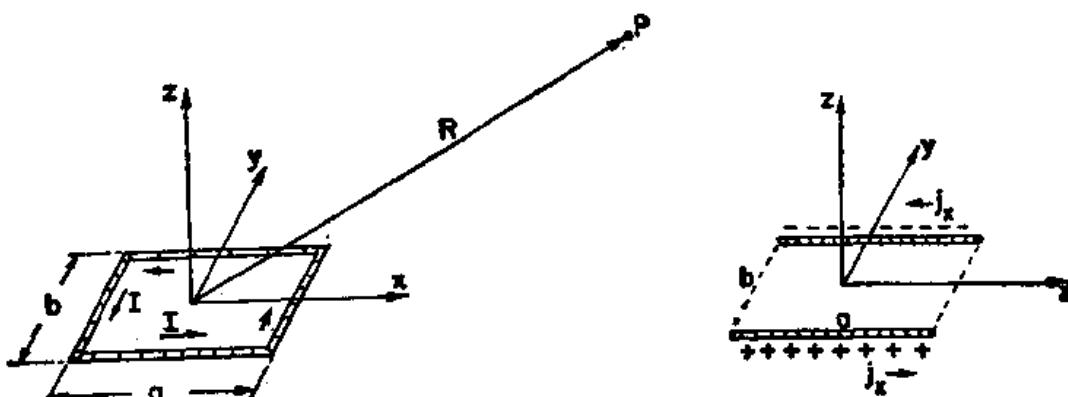


图 14-6 通有电流 I 的一个矩形回线。在 P 点上
的磁场如何？($R \gg a$, 或 b)

图 14-7 在图 14-6 的电流回线
中有关 j_x 方面的分布

这偶极矩指向负 y 方向，因而在 \mathbf{R} 与 \mathbf{p} 间所成之角的余弦就是 $-y/R$ (其中 y 是 P 点的坐标)。这样一来，我们便有

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ab}{R^2} \frac{y}{R}.$$

只须简单地用 I/c^2 代替 λ ，我们就可得到 A_x ：

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3}. \quad (14.30)$$

通过同一推理，可得

$$A_y = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3}. \quad (14.31)$$

A_y 又一次正比于 x ，而 A_x 则正比于 $-y$ ，所以该矢势(在远处)是环绕着 z 轴而旋转的，亦如回线中的电流 I 那样指向，示如图 14-8。

\mathbf{A} 之强度与 Iab 成正比，即是电流乘以该回线的面积。这一乘积称为该回线的磁偶极矩(常简称“磁矩”)。我们用 μ 来表示：

$$\mu = Iab. \quad (14.32)$$

一个具有任何形状(圆、三角、或其他)的平面小回线的矢势也是由式(14.30)和(14.31)给出的，只要我们用下式来代替 Iab ，

$$\mu = I \times (\text{回线面积}). \quad (14.33)$$

这留给读者去证明。

如果把 μ 视作矢量，并将其方向规定为垂直于该回线面，由右手法则给出其正向指(图 14-8)，则可把有关 \mathbf{A} 的方程写成如下的矢量形式：

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mu \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mu \times \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (14.34)$$

现在仍须找出 \mathbf{B} 来。应用式(14.33)和(14.34)，连同式(14.4)，便可得到：

$$B_z = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} = \dots \frac{3xz}{R^5} \quad (14.35)$$

(其中我们用 \dots 来代表 $\mu/4\pi\epsilon_0 c^2$)，

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \frac{3yz}{R^5},$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\dots \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = -\dots \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right). \quad (14.36)$$

可见 \mathbf{B} 场的分量的表现与由一指向 z 轴的电偶极子产生之 \mathbf{E} 场的表现完全一样(见式 6.14 和 6.15；以及图 6-5)，这就是为什么我们把回线叫作磁偶极子的缘故。“偶极子”这个词，当应用于磁场时，是有点令人迷惑不解的，因为并没有与电荷相对应的磁“荷”。磁“偶极子场”不是由两个“荷”所产生的，而是起因于一电流回线元。

然而，事情显得有点奇怪：从完全不同的两定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} = j/\epsilon_0 c^2$ 出发，竟会得出种类相同的场。为什么会这样呢？那是由于偶极子场只出现在与所有电荷或电流都距离得很远时。因此通过大部分有关空间， \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的方程就彼此符合一致：两者各具有零散度和零旋度。这么一来，它们便给出相同的解答了。然而，其位形我们将总结为偶极矩的

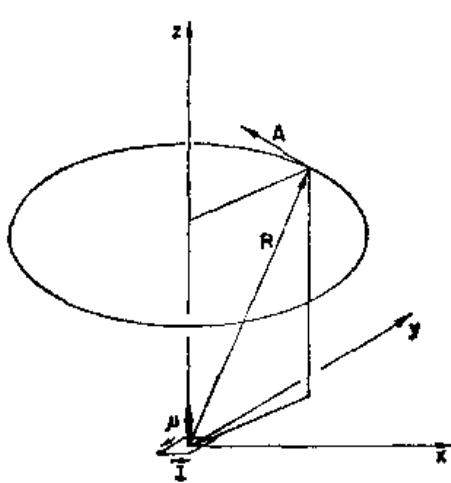


图 14-8 在(xy 平面)的原点处一小回线电流的矢势；一个磁偶极子之场

那些源在物理上却很不相同——对于彼此互相对应之场，在一种情况下源是一环行电流；而在另一种情况下源则是位于该回线平面上与下的一对电荷。

§ 14-6 电路的矢势

我们经常感兴趣的是导线直径比起整个系统的线度远为细小的那种电路所产生的磁场。在这样一种情况下，我们就能简化磁场的方程组。对细小导线来说，我们可以把体积元写成

$$dV = Sds,$$

式中 S 是导线的横截面积，而 ds 则是沿导线的距离元。实际上，由于矢量 ds 与 \mathbf{j} 方向相同，如图 14-9 所示（而且我们也可假定， \mathbf{j} 对横过任一指定截面会保持不变），我们便可写出一个矢量方程：

$$\mathbf{j}dV = jSds. \quad (14.37)$$

但 jS 恰好就是我们所称之为导线中的电流 I 的，因而关于矢势的式(14.19)就变成

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I ds_2}{r_{12}} \quad (14.38)$$

（见图 14-10）。我们假定通过电路的电流处处相同。但若有几条各载有不同电流的支路，则对于每条支路当然就应各自采用适当的 I 。）

我们又一次可由直接对式(14.38)进行积分或由对相应的静电力学问题求解而把场找出来。

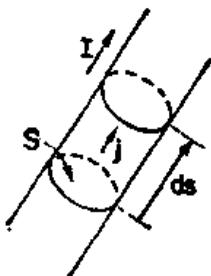


图 14-9 对于一根细小导线来说， $j dV$ 与 $I ds$ 相同

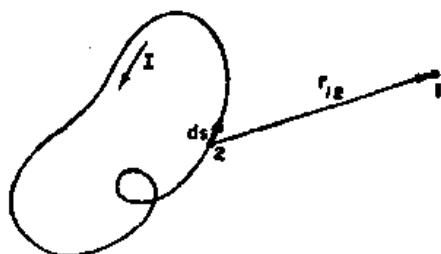


图 14-10 导线的磁场可以通过环绕该电路取积分而获得

§ 14-7 毕奥-萨伐尔定律

在学习静电力学时我们了解到，某一已知电荷分布的电场可直接由积分式(4.16)获得：

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}.$$

正如我们曾经见到的，要算出这一积分——实际上是三个积分，对每一分量各有一个——比起算出势的积分并求出它的陡度来，通常要花费较多工夫。

有一个相似的积分会将磁场同电流联系起来。我们已有一个关于 \mathbf{A} 的积分，即式(14.19)；就可以通过取式两边的旋度而获得一个关于 \mathbf{B} 的积分：

$$\mathbf{B}(1) = \nabla \times \mathbf{A}(1) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}} \right]. \quad (14.39)$$

现在我们必须小心：该旋度算符的含义是取 $\mathbf{A}(1)$ 的旋度，这就是说，它仅对坐标 (x_1, y_1, z_1) 进行运算。如果我们记住， $\nabla \times$ 这个算符只有对附有脚标 1 的那些变量才进行运算，而这显然仅出现于

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \quad (14.40)$$

中, 则可以将该算符移进积分符号之内。对于 \mathbf{B} 的 x 分量来说, 就有

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_x}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right] dV_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] dV_2. \end{aligned} \quad (14.41)$$

方括号内之量恰好就是

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}$$

的 x 分量。对于其他分量, 我们将会找出相应结果, 因而有

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (14.42)$$

这一积分直接由已知的电流给出了 \mathbf{B} 。这里所涉及的几何学与图 14-2 中所示的相同。

若电流仅存在于细小导线的电路中, 则如同上一节, 我们可立即横过导线面加以积分, 即用 $I ds$ 代替 $j dV$, 其中 ds 是导线的长度元。这时, 采用图 14-10 上的符号, 使得:

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I \mathbf{e}_{12} \times ds_2}{r_{12}^2}. \quad (14.43)$$

(负号之所以出现是由于我们颠倒了该叉积的次序。) 这一有关 \mathbf{B} 的方程, 以它的发现者的名字命名, 称为毕奥-萨伐尔定律。它提供一个直接获得载流导线所产生的磁场的公式。

你可能会觉得奇怪: “如果能直接由那个矢量积分找出 \mathbf{B} 来, 则矢势还有什么用处呢? 到底 \mathbf{A} 也同样含有三个积分!”这是因为有关 \mathbf{B} 的积分是一个叉积, 往往较为复杂, 正如由式 (14.41) 便可显然见到的。并且, 既然 \mathbf{A} 的积分同静电学的那些相仿, 则我们可能已经懂得了。最后, 我们还将见到: 在更高一级的理论材料(比如相对论, 力学定律的更高级描述方式, 象以后将要讨论到的最小作用原理, 以及量子力学等)中, 矢势会起一种重要作用。

§ 15-1 作用于一电流回路上之力; 偶极子能量

上一章我们研究了由一矩形小电流回路所产生的磁场。并发现那是一个偶极子场，其偶极矩由

$$\mu = IA \quad (15.1)$$

给出，式中 I 为电流而 A 为回路面积。矩的方向垂直于该回路平面，因而我们也就可以写成

$$\mu = IAn,$$

式中 n 是该面积 A 的法向单位矢量。

一个电流回路——或磁偶极子——不仅会产生磁场，而且在置于其他电流的磁场中时也会感受到力的作用。我们将首先考察在一匀强磁场中作用于一矩形回路上之力。设 z 轴沿磁场方向，而回路平面则被置在通过 y 轴并与 xy 面成 θ 角，如图 15-1 所示。这样该回路之磁矩——垂直于回路平面——就将与磁场成 θ 角。

由于在矩形对边上的电流互相反向，那些力也将反向，从而不会有净力作用于该回路上（当磁场均匀时）。然而，由于有作用于在图上标明为 1 和 2 的两边上之力，就会有一个倾向于把该回路绕着 y 轴旋转的转矩。这两个力 F_1 和 F_2 的大小为

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

它们的矩臂为

$$a \sin \theta,$$

从而这转矩便是

$$\tau = IabB \sin \theta,$$

或者，由于 Iab 是该回路的磁矩，

$$\tau = \mu B \sin \theta.$$

这转矩还可以写成矢量形式：

$$\tau = \mu \times B. \quad (15.2)$$

尽管仅仅在一个相当特殊的情况下证明了转矩是由式(15.2)所给出的，但这一结果对于任何形状的小回路都正确，正如我们将会看到的。你将记起，对施于一电偶极子上的转矩我们过去也曾找到这同一种关系式：

$$\tau = p \times E.$$

现在要来追究这一电流回路的机械能。既然有一转矩，这能量显然依赖于取向。虚功原理申述，转矩等于能量相对于角度的变率，因而我们便可写出

$$dU = -\tau d\theta.$$

令 $\tau = \mu B \sin \theta$ 并积分，则能量可以写成：

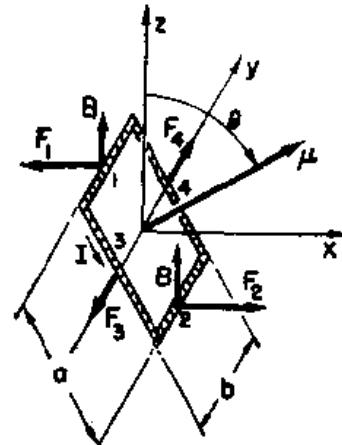


图 15-1 一个通有电流 I 的矩形回路位于一匀强磁场 B (沿 z 方向的) 中。这样作用于该回路上的转矩就是 $\tau = \mu \times B$ ，其中磁矩 $\mu = Iab$

$$U = -\mu B \cos \theta + \text{常数}. \quad (15.3)$$

(符号之所以是负的, 因为该转矩企图把磁矩旋转至与磁场同向; 当 μ 与 B 平行时能量最低。)

由于今后将会讨论到的一些原因, 这一能量并不是该电流回路的总能量。(首先, 我们未曾把回路中维持电流的那种能量计算在内。)因此, 将这一能量称为 $U_{\text{机械}}$, 就是要提醒我们那只是能量的一部分。并且, 既然无论如何我们总已漏掉了某些能量, 便可令式(15.3)中的常数等于零。因而可把该式写成

$$U_{\text{机械}} = -\mu \cdot B. \quad (15.4)$$

这又一次与对电偶极子所曾获得的结果相对应:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.5)$$

原来, 式(15.5)中的静电能是确实的能量, 但式(15.4)中的 $U_{\text{机械}}$ 却不是真实能量。然而, 它仍可用来凭借虚功原理而算出力, 假设回路中的电流——或至少是 μ ——保持不变的话。

我们能够证明: 对于一个矩形回路来说, $U_{\text{机械}}$ 也相当于把该回路拿进场所须作的机械功。只有在一个匀强磁场中施于回路上的总力才等于零; 在非均匀场中, 则始终有一净力作用于通有电流的回路上。在把该回路置于场中时, 我们势必经过其中场并非均匀的一些地

方, 因而就作了功。为使计算简单起见, 我们将设想该回路是以它的矩指着场向而被带进来的。(在到达了指定位置之后, 还可以转至最后位置。)

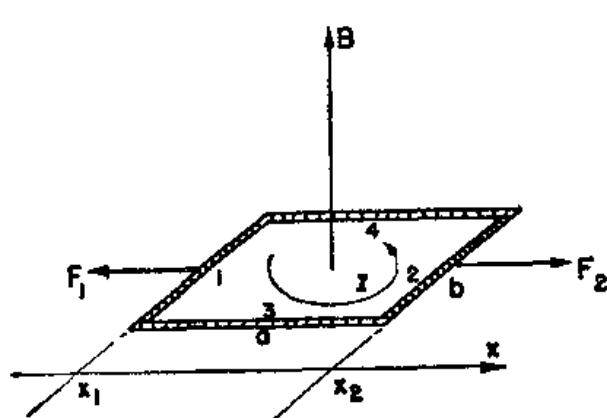


图 15-2 一个回路沿 x 方向通过与 x 轴正交的 B 场被移过来

试设想我们希望把该回路沿 x 方向移动——移至场较强的区域——而该回路是按图 15-2 所示指向的。我们从场等于零的某处出发, 并对回路移进场中时所受之力乘距离进行积分。

首先, 让我们分别计算对每边所作之功, 然后取其和(并非在积分之前就把力加起来)。施于边 3 和边 4 上之力与运动方向垂直, 因而没有作任何功。施于边 2 上之力为 $IbB(x)$, 是在 x 方向上, 因而要获得抵抗磁力所作之功就必须从场为零的某处, 比方说从 $x = -\infty$ 处积至它目前所处的位置,

$$W_2 = - \int_{-\infty}^{x_2} F_2 dx = - Ib \int_{-\infty}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.6)$$

同理, 为抵抗磁力而作于边 1 上之功则是

$$W_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x) dx. \quad (15.7)$$

为求得每一积分, 我们需要知道 $B(x)$ 是怎样依赖于 x 的。但要注意, 边 1 紧跟在边 2 之后, 因而对它的积分就包括作于边 2 上之功的大部分。事实上, 式(15.6)与(15.7)之和恰好就是

$$W = - Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.8)$$

但若在边1与边2两处之场都几乎相等的一个区域里，则我们可将该积分写成

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x) dx = (x_2 - x_1) B = aB,$$

式中 B 是在该回路中心点上之场。我们所加进去的总机械能为

$$U_{\text{kin}} - W = -IabB = -\mu B. \quad (15.9)$$

这一结果同我们在上面取式(15.4)作为能量互相一致。

当然，要是在进行积分以求得功之前先将作用于回路上之力相加起来，我们也该可获得这一结果。如果令 B_1 为在边1上而 B_2 为在边2上之场，则沿 x 向的总力就是

$$F_x = Iab(B_2 - B_1).$$

若该回路很“小”，也就是说，若 B_2 和 B_1 相差不多，则可写出

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a.$$

因而力就是

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (15.10)$$

由外力对该回路所作的总功为

$$-\int_{-\infty}^{\infty} F_x dx = Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = -IabB,$$

这又恰好是 $-\mu B$ 。直到如今我们才看得出为什么施于一小电流回路上之力会与磁场的微商成正比，正如我们从

$$F_x \Delta x = -\Delta U_{\text{kin}} = -\Delta(-\mu \cdot B) \quad (15.11)$$

中预料到的。

上述结果表明：即使 $U_{\text{kin}} = -\mu \cdot B$ 并未包括系统的所有各种能量在内——它是一种冒牌的能量——但仍能同虚功原理一起被用来找出作用于稳恒电流回路上之力。

§ 15-2 机械能与电能

现在我们要来证明，为什么上一节所讨论的能量 U_{kin} 并不是与稳恒电流相关的确实能量——它并未包括世界上的总能量。真的，我们曾经强调过它仍是一种能量，可由虚功原理算出力来，只要在回路中的电流（以及所有其他电流）都维持不变。让我们来看看为什么会有这样。

试设想图 15-2 上的回路正在沿正 x 向运动，并选取 \mathbf{B} 的方向为沿 z 轴，在边2中的传导电子将体验到一个沿线即沿 y 向之力。但由于这些电子的流动——造成电流——就会有一个与此力同向的运动分量。因此，每一电子将得到功率为 $F_y v_y$ 的功，其中 v_y 是电子沿导线的速度分量。我们将称这个作用于电子上之功为电功。现在事实证明：如果该回路是在一匀强场中运动，这总电功则为零，因为正功总会在回路的某些部分作的，而等量的负功则在其它部分作的。但如果该电路是在一非均匀场中运动，那就不正确了——此时将会有一净功作用于电子之上。一般说来，这功该倾向于改变电子的流动，但若电流维持不变，则能量必然会给那些维持电流稳定的电池组或其他电源所吸收或释放出来。上面当我们由式(15.9)计算出 U_{kin} 时，这能量还未包括进去，因为我们的计算仅仅包括施于导线整体上的那些机械力。

你可能在想：但那施于电子上之力要取决于导线运动得多快；若导线运动得足够慢，也

许这一电能便可以略去。真的，电能授给的时率与导线运动的速率成正比，但所授与的总能量却也同这一时率所持续的时间成正比。因此，总电能就正比于速度乘时间，那刚好是所移动过的距离。对于在场中移动某一指定距离，同一电功率会被贡献出。

让我们考虑一段单位长度的导线，其中通有电流 I 并沿与其本身及磁场 \mathbf{B} 均成直角的方向以速率 $v_{\text{导线}}$ 运动。由于通有电流的缘故，导线中那些电子将具有一个沿导线的漂移速度 $v_{\text{漂移}}$ 。对每一电子在漂移方向上所施的磁力为 $q_e v_{\text{漂移}} B$ 。因此作出电功的时率就是 $Fv_{\text{导线}} = (q_e v_{\text{漂移}} B) v_{\text{导线}}$ 。设每一单位长度的导线里共有 N 个传导电子，则作出电功的总时率便是

$$\frac{dU}{dt} = N q_e v_{\text{漂移}} B v_{\text{导线}}.$$

但 $N q_e v_{\text{漂移}} = I$ ，即导线中的电流，因而

$$\frac{dU}{dt} = I v_{\text{导线}} B.$$

现在由于电流保持恒定不变，即是说施于那些传导电子上之力并不会引起它们加速；所以这电能就不是归于电子所有而是归于维持电流不变的那个电源所有了。

但要注意施于导线上之力为 IB ，因而 $IBv_{\text{导线}}$ 也是对导线作机械功的时率，即 $dU_{\text{机械}}/dt = IBv_{\text{导线}}$ 。因此我们断言：对导线所作的机械功恰好等于作于电流源上的电功，因而回路的能量将保持不变！

这并不是偶然的，而是我们所已知的定律的结果。对导线中每一电荷所作用的总力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

而作功的时率则为

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (15.12)$$

如果没有电场，便只有那第二项，而这总是等于零的。以后我们将见到，一个正在变化着的磁场会产生电场，因而我们的论证就只适用于在稳恒磁场中移动着的导线。

怎么虚功原理又会给出正确的答案呢？那是由于我们还未曾把世界的总能量都计算进去。我们未曾把正在产生那假定存在的磁场的电流能量也包括在内。

设想有一个如图 15-3(a) 的那种完整系统，其中我们正在把带有电流 I_1 的回路移进磁场 \mathbf{B} 中去，而这磁场

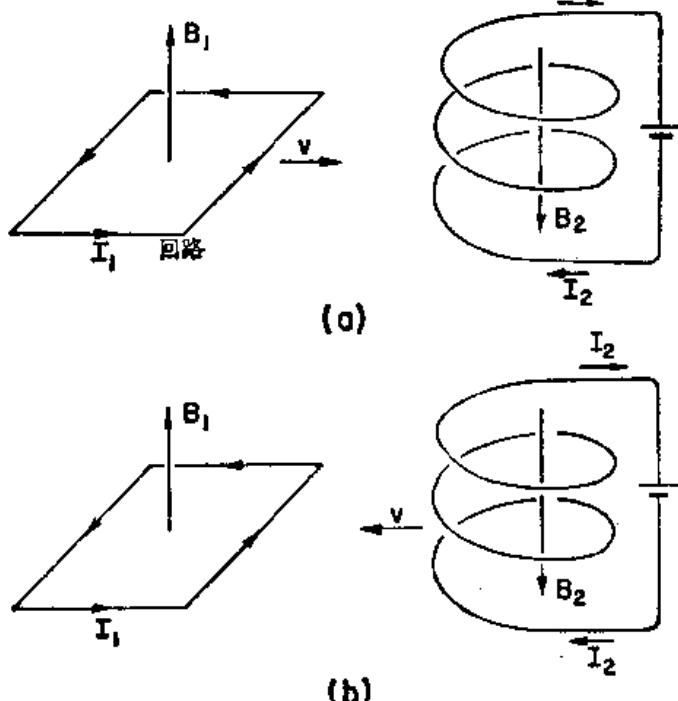


图 15-3 要找出一个小回路在磁场中的能量

则是由线圈中的电流 I_2 产生的。原来回路里的电流 I_1 也将在线圈那里产生某一磁场 B_2 ，如果回路正在移动，则这个场 B_2 将会发生变化。正如我们将在下一章见到的，一个变化着的磁场会产生一个 \mathbf{E} 场；而这一 \mathbf{E} 场则将对导线中的电荷作功。这样一个能量也应包括在我们关于总能量的出纳表中。

我们本来可以等到下一章才来找出这个新的能量项，但若按照下述办法应用相对性原理，则也可见到它将会怎么样。当我们朝那个静止线圈移动回路时，知道回路中的电能恰与所作的机械功相等而符号相反。所以

$$U_{\text{机械}} + U_{\text{电}} = 0.$$

现在假设从一个不同的观点来考察所发生的事情，即在其中回路仍静止不动，而线圈则指向它而运动。这时线圈被移进由回路所产生的场中。同一些论证该会给出

$$U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{线圈}) = 0.$$

在上述两种情况下所作的机械功相同，因为它是来自两电路之间的力的。

这两个方程之和给出

$$2U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{回路}) + U_{\text{电}}(\text{线圈}) = 0.$$

整个系统的总能量，当然就是该两项电能再加上仅取一次的机械能。因此我们有

$$U_{\text{总}} = U_{\text{电}}(\text{回路}) + U_{\text{电}}(\text{线圈}) + U_{\text{机械}} = -U_{\text{机械}}. \quad (15.13)$$

世界上的总能量确实等于 $U_{\text{机械}}$ 的负值。比方，若我们需要磁偶极子的真实能量，则应写出：

$$U_{\text{总}} = +\mu \cdot \mathbf{B}.$$

只有当我们假定一切电流都维持不变的那种条件时才能仅仅用到其中某一部分能量，即 $U_{\text{机械}}$ （这始终等于真实能量的负值），来找出那机械力。在更普遍的问题上，我们就必须细心地把所有一切能量都包括进去。

在静电学中，我们见过一个类似情况。我们曾经证明，一个电容器的能量等于 $Q^2/2C$ 。当我们应用虚功原理以找出作用于电容器两板上之力时，能量的改变等于 $Q^2/2$ 乘以 $1/C$ 的改变，这就是说，

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{4C}{C^2}. \quad (15.14)$$

现在假设要服从一个不同条件、即保持两导体间的电压不变的条件下，算出在移动导体时所作之功。那么若我们作出某一种人为的事情，则也可以从虚功原理获得一个正确答案。既然 $Q = CV$ ，真的能量就是 $\frac{1}{2}CV^2$ 。但若我们定义一个等于 $-\frac{1}{2}CV^2$ 的人为能量，则只要坚持使电压 V 维持不变，并令这一人为能量的变化等于机械功，便可应用虚功原理来找出力。这么一来，就有

$$\Delta U_{\text{人}} = \Delta \left(-\frac{CV^2}{2} \right) = -\frac{V^2}{2} \Delta C, \quad (15.15)$$

上式与 (15.14) 相同。即使我们忽略了为维持电压不变而由电系统所作之功，也仍能获得正确结果。这个电能又刚好两倍于机械能而符号相反。

这样，若不顾电压源必须作功以维持电压不变这么一个事实，而人为地进行计算，还是能够获得正确答案。这与静磁学中的情况完全相似。

§ 15-3 稳恒电流的能量

现在我们可以应用关于 $U_{\text{总}} = -U_{\text{机械}}$ 这一点知识来找出稳恒电流在磁场中的真实能量。可以从一小电流回路的真实能量出发。简单地称 $U_{\text{总}}$ 为 U ，便可写成

$$U = \mu \cdot \mathbf{B}. \quad (15.16)$$

尽管是对一平面矩形回路算出这一能量的，但这同一结果对于任何形状的小平面回路均适用。

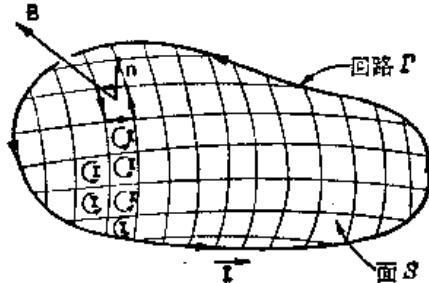


图 15-4 一个大回路在磁场中的能量可以认为等于许多小回路的能量之和

从物理方面看，这个小电流系统与原来的电路是无从辨别的。能量也必然会相同，即刚好是那些小回路的各能量之和。

设每一小回路的面积为 Δa ，它的能量就是 $I \Delta a B_n$ ，其中 B_n 为垂直于 Δa 的分量。总能量为

$$U = \sum I B_n \Delta a.$$

各回路在趋于无限小的极限上，求和变成了积分，即

$$U = I \int B_n da = I \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (15.17)$$

式中 \mathbf{n} 是垂直于 da 的单位矢量。

如果代入 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，便可利用斯托克斯定理而把一个面积分联系到一个线积分上去：

$$I \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da = I \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.18)$$

式中 $d\mathbf{s}$ 是沿 Γ 的线元。因此我们就有了对于任意形状的电路的能量：

$$U = I \oint_{\text{电路}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.19)$$

在这一个表达式中， \mathbf{A} 当然是指产生了导线所在处之 \mathbf{B} 场的那些电流（而不是该导线中的电流 I ）的矢势。

现在，稳恒电流的任何分布都可以设想成由平行于电流线的一些丝状线所构成。对于每一对这样的电路，能量由式(15.19)给出，式中的积分是环绕其中一个电路取的，同时应用那来自另一个电路的矢势 \mathbf{A} 。为求得总能量，我们需要所有各对之和。如果不记住那些对，而把全部电流丝都相加起来，则将算进能量两次（以前在静电学中也曾见过一个类似效应），因而总能量就应可写成

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (15.20)$$

这一公式相当于我们以前对静电能所曾找到的结果：

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV. \quad (15.21)$$

因此，如果我们愿意，便可将 \mathbf{A} 看成是在静磁学中电流的一种势能。可惜，这一概念不大有用，因为它只适用于静场。实际上，当场随时间变化时，则无论式(15.20)或(15.21)，均不会给出正确的能量。

§ 15-4 B 与 A 的对比

在这一节中我们愿意来谈论下述问题：矢势是否只是一种用来作计算的工具——如同在静电学中的标势那样——或者矢势是一个“真实”的场？难道磁场，由于对施于一个运动粒子上之力负责，就是一个“真实”的场吗？首先，我们应该说“一个真实的场”这一短语并不太有意义。其一，无论如何你可能不会感觉到磁场十分“真实”，因为甚至整个有关场的概念都相当之抽象。你不能伸出手来感受磁场。而且，磁场之值并不十分确定；例如，通过选用一适当的运动坐标系，你可以使在某一指定地点上的磁场消失不见。

我们这里所谓“真实”的场指的是这样：一个真实的场就是被用来避免超距作用那种概念的一个数学函数。如果有一个带电粒子位于位置 P 上，它会受到放在与 P 点有某些距离的位置上的其他各电荷的影响。一种描述这相互作用的方法是去申述其他电荷会在 P 点周围形成某种“条件”——不管它是什么条件。倘若知道了该条件，即通过给出电场和磁场来加以描述，则我们便能完全确定该粒子的行为——不须进一步去追问那些条件原来是怎样产生的。

换句话说，若其他电荷多少已有所改变，但由电场和磁场所描述的那些在 P 点上的条件却仍依然未变，则该电荷的运动还将保持一样。这么一来，一个真实的场就是一组数字，被用来做出这么一种规定，即在某点上所发生的无论什么事情都仅取决于在该点上的这些数字。我们并不须再去弄清楚其他地方正在发生什么事情。正是在这一种意义上我们将要来讨论矢势是否是一种“真实”的场。

你可能会怀疑这么一个事实，即矢势并不是单值的——它可以通过加上任一标量的陡度而改变，但仍丝毫不改变施于粒子上之力。然而，这却与我们现在所谈的这种意义上的实在性问题毫不相干。比方，在某种意义上磁场(E 和 A 场也都如此)可以通过相对性变换而改变。但我们却不会去操心，如果场可以这样改变的话该会发生什么事情。这实际上并不会造成任何差别；与矢势是否是一种用来描述磁场的适当的“真实”场或只是一个有用的数学工具的问题毫无关系。

关于矢势 A 的用处我们也应作出一些评论。我们已见到，利用它并通过正常手续即可以算出已知电流的磁场，正如 ϕ 可用来找出电场似的。在静电学中我们曾经见过， ϕ 是由一个标量积分所给出的：

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2. \quad (15.22)$$

通过三次微分运算，便可从 ϕ 获得 E 的三个分量。这手续通常要比在下列矢量式中算出三个积分较易于掌握：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)e_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.23)$$

这里首先就有三个积分；另外，每个积分一般又较难于运算。

对静磁学来说，优点远没有那么明显。 A 的积分就已经是一个矢量积分：

$$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2)dV_2}{r_{12}}, \quad (15.24)$$

这当然即是三个积分。并且，当我们取 A 之旋度以获得 B 时，不得不求出六个微商并要一对一对地结合。在大多数问题中，这一手续是否确实比起直接从下式算出 B 来较为容易，

那就一下子看不大清楚：

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.25)$$

对于简单问题，应用矢势往往较为困难，那是由于下述原因。假设我们只对在一点上的磁场 \mathbf{B} 感兴趣，而问题又具有某种优美的对称性——比如说，我们要求出在一环形电流的中轴上某一点之场。由于对称性，我们可容易由算出式(15.25)的积分而获得 \mathbf{B} 。然而，假如我们先求出 \mathbf{A} ，便还得从 \mathbf{A} 的微商才能算出 \mathbf{B} ，因而就一定要知道在该感兴趣之点附近所有一切点上之 \mathbf{A} 值如何。而大多数这种点是落在该对称轴之外的，从而使 \mathbf{A} 的积分变得复杂。例如，在那圆环问题中，我们不得不用到椭圆积分。在这样的问题中， \mathbf{A} 显然不十分有用。但对于许多复杂问题，用 \mathbf{A} 来计算比较容易，那却是真的。不过若要争辩技术上这么一点方便就足以证明使你多学习一种矢量场属之正当，那就有点困难了。

我们引进了 \mathbf{A} 是因为它的的确具有重要的物理意义。它不仅与电流的能量有关，如在上节中我们曾经见到的，而且它还是在上述意义上的一种“真实”物理场。在经典力学中，很清楚，我们可把作用于一粒子上之力写成下式：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (15.26)$$

因而若已给出了力，关于运动的一切便都确定了。在一其中 $\mathbf{B} = 0$ 那怕 \mathbf{A} 不是零的区域里，诸如在一螺线管外面，那里并没有可觉察到的 \mathbf{A} 之效应。因此在一个长时期内人们总认为 \mathbf{A} 不是一个“真实”的场。然而，事实却证明有某些牵涉到量子力学的现象表明， \mathbf{A} 场实际上就是在我们曾对之下过定义的那种意义上的“真实”的场。在下一节中我们将向你们说明那是怎么回事。

§ 15-5 矢势与量子力学

当我们从经典力学过渡到量子力学时，什么概念才算是重要的有了很大改变。我们曾在第一卷中谈过其中的一些，特别是，力的概念逐渐消失，而能量和动量的概念却成为重要的了。你应当会记起，人们与之打交道的乃是在空间和时间里变化着的几率波，而不是粒子的运动了。在这些波中，既有与动量相联系的波长，又有与能量相联系的频率。因此，那些能确定各波函数之位相的动量和能量就成了量子力学中重要的量了。我们与之打交道的乃是互作用如何改变波的波长，而不是力。力的概念已变成十分次要的了——如果它到底还是存在的话。比方，当人们谈论核力时，他们所经常加以分析和计算的乃是两核子间的互作用能，而不是它们间之力。从没有人会对能量取微分来找出力是个什么样子。在这一节中我们要描述矢势和标势是怎样进入量子力学的。实际上，正因为动量和能量在量子力学中起了中心作用，才使得 \mathbf{A} 和 ϕ 会提供一个把磁效应引进量子描述中去的最直接途径。

我们必须稍为复习一下量子力学的工作原理。让我们再一次考虑那个在第一卷第三十七章中曾经描述过的理想实验，在其中电子受两个狭缝所衍射。这个装置再一次示如图 15-5 上。能量几乎相同的电子离开了源而朝向一面刻有两条狭缝的障壁前进。在障壁之外安置“捕手”，在其上配备一个可移动的探测器。这个探测器是用来测量电子到达距离该对称轴为 x 远而落在捕手的一个小区域中的时率，我们称之为 I 。这时率正比于个别电子在离开了源之后到达该捕手区的几率。这几率具有如图所示的那种复杂形状的分布，我们认为这是由于两个波——每个从一个狭缝发出——的互相干涉所致。这两个波的干涉结果

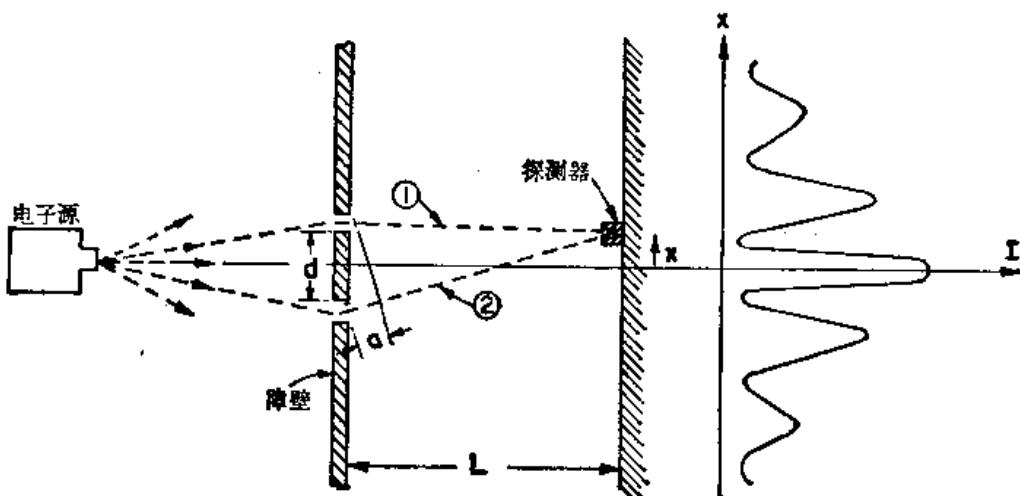


图 15-5 用电子做的一个干涉实验(同时参阅第一卷第三十七章)

取决于它们间的位相差。也就是说，若幅度分别为 $C_1 e^{i\Phi_1}$ 和 $C_2 e^{i\Phi_2}$ ，则该相差 $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ 就确定了干涉图样 [见第一卷，式(29.12)]。设屏与狭缝之间的距离为 L ，又若通过两狭缝的电子所走过的程差为 a ，如图所示，则该两波的相差为

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \quad (15.27)$$

照例，我们令 $\chi = \lambda/2\pi$ ，其中 λ 就是几率波的空间变化波长。为简单起见，将只考虑那些远小于 L 的 x 值；这样便可令

$$a = \frac{x}{L} d$$

和

$$\delta = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda}. \quad (15.28)$$

当 x 等于零时， δ 为零，两波同相，因而几率有一个极大值。当 δ 等于 π 时，两波异相，它们就会相互抵消，而几率成为极小。因此，我们将得到有关电子强度的那种波形函数。

现在我们想要来陈述用以代替力律 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的量子力学规律。这将是用来确定具有量子力学性质的粒子在电磁场中的行为的那种定律。既然凡发生无论什么事件都要由几率来确定，所以这一定律就必然告诉我们关于磁的影响如何会改变该波；我们不再与粒子的加速度打交道了。这定律是这样的：通过任一轨道的波，其位相受磁场作用而改变之量等于矢势沿整个轨道积分乘以该粒子的电荷再给普朗克常数除。也就是，

$$\text{磁方面所引起的位相变化} = -\frac{q}{\hbar} \int_{\text{轨道}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.29)$$

要是没有磁场，波到达时就有某一定的位相。但若某处存在磁场，则到达之波的位相将会增加式(15.29)的积分那么多。

尽管对于目前的讨论仍未用得上，但我们还是要提出静电场的效应乃在于产生一个等于标势 ϕ 的时间积分的负值的相变：

$$\text{电方面所引起的位相变化} = -\frac{q}{\hbar} \int \phi dt.$$

上述两式不仅对于静场正确，而且合起来对于无论静的或动的任何一种电磁场也都正确。这就是用来代替 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的定律。然而，现在我们只要考虑静磁场。

假设在那个双狭缝实验中有磁场存在。我们要问，通过该两狭缝的两波在到达屏上时其位相如何。两波的干涉会确定几率的极大值将出现在何处。我们可把沿轨道(1)的波之位相叫作 Φ_1 。若 $\Phi_1(B=0)$ 为在没有磁场时之位相，则当加上磁场时这个相便将是

$$\Phi_1 = \Phi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.30)$$

同理，关于轨道(2)的周相为

$$\Phi_2 = \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.31)$$

这两个波在探测器上的干涉取决于其相差：

$$\delta = \Phi_1(B=0) - \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.32)$$

该无场相差我们将称之为 $\delta(B=0)$ ；那恰好就是在上面式(15.28)中曾经算出来的那个相差。并且，我们注意到，这两个积分还可以写成一个沿轨道(1)向前进并沿轨道(2)返回来的积分；这我们称之为闭合路线(1-2)。因而有

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (15.33)$$

上式告诉我们，电子的运动如何被磁场所改变；有了这一个式，我们便能找出在捕捉区上强度为极大和极小的那些新位置。

可是，在做这件事之前，我们要提出下面一个有趣而又重要之点。你会记起，矢势函数是有某种任意性的。两个彼此不同的而其差别仅在于某一标量函数之陡度 $\nabla\psi$ 的两个矢势函数 \mathbf{A} 和 \mathbf{A}' ，都会代表同一个磁场，因为陡度之旋度为零。因此，它们将给出同一个经典力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。如果在量子力学中效应乃取决于矢势，则在许多种可能的 \mathbf{A} 函数中究竟哪一个是正确的呢？

答案是， \mathbf{A} 的任意性在量子力学中也依然存在。如果我们把式(15.33)中的 \mathbf{A} 改变成 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ ，则对于 \mathbf{A} 的积分会变成

$$\oint_{(1-2)} \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \int_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{(1-2)} \nabla\psi \cdot d\mathbf{s}.$$

$\nabla\psi$ 的积分仍环绕该闭合路线(1-2)，但根据斯托克斯定理，陡度的切向分量沿一闭合路线的积分总会等于零。因此， \mathbf{A} 和 \mathbf{A}' 两者就都给出同一个相差和同一个量子力学干涉效应。在经典和量子力学的两种理论中只有 \mathbf{A} 之旋度才算得上；任何对 \mathbf{A} 函数的选择，凡是能给出正确旋度的在物理上就都是正确的。

如果我们引用 § 14-1 节的那些结果，则这一结论也很明显。那里我们曾找出沿一闭合路线的 \mathbf{A} 之线积分为穿过该路线的 \mathbf{B} 之通量，在这里也即穿过路线(1)与(2)之间的通量。如果我们愿意，式(15.33)便可以写成：

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} [\text{在(1)与(2)两路线之间 } \mathbf{B} \text{ 的通量}], \quad (15.34)$$

式中 \mathbf{B} 的通量照常指 \mathbf{B} 的法向分量的面积分。这结果仅取决于 \mathbf{B} ，从而也仅取决于 \mathbf{A} 之旋度。

既然我们用 \mathbf{B} 或用 \mathbf{A} 都能写出结果，现在你也许倾向于认为 \mathbf{B} 保持它本身作为“真实”的场，而 \mathbf{A} 仍可视作一种人为的结构。但我们原本建议的关于“真实场”的定义则是建筑在真实场不该对一粒子作超距作用的那种概念之上的。然而，我们能够举出一个例子，其

中在任一有某种机会找到粒子的地方 B 都等于零——或至少任意地小——因而不可能设想磁场会直接作用于粒子上。

你应当记起，对于通有电流的长螺线管，管内有 B 场而管外全无，但却有许多 A 环绕在管的外面，如图 15-6 所示。若我们安排一种情况使得其中的电子只出现在螺线管之外——即在那个只有 A 的地方——则按照式(15.33)也仍将对运动产生影响。从经典方面看，这是不可能的。按经典的看法是，力乃取决于 B ；故若要知道该螺线管通有电流，总必须使粒子穿过它。但从量子力学方面看，你却可以通过围绕着管子外面——从未曾靠近它——就能找出有磁场存在于螺线管之内了！

假设我们把一个直径很小的长螺线管恰好放在障壁后面的两缝之间，如图 15-7 所示。螺线管直径要比两狭缝间的距离 d 远为细小。在这种情况下，电子在狭缝上的衍射不会提供使电子接近该螺线管的可观几率。这对我们的干涉实验将会发生什么影响呢？

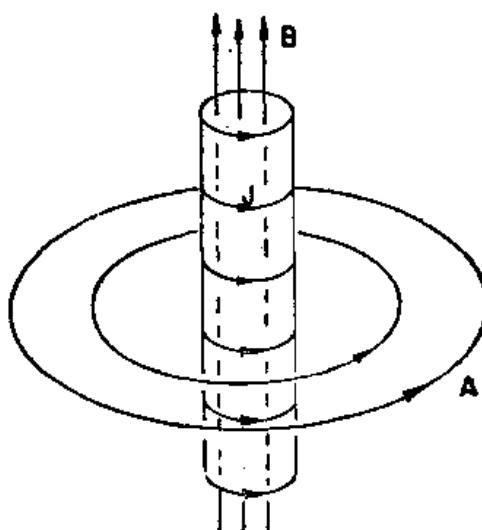


图 15-6 一个长螺线管的磁场和矢势

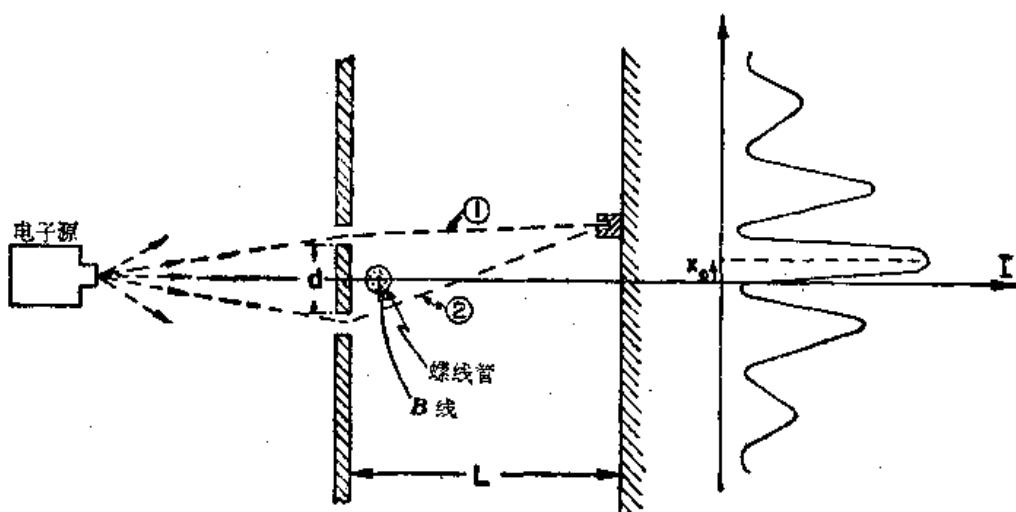


图 15-7 磁场能够影响电子的运动，哪怕是场仅存在于要找到电子只有一任意微小几率的那些区域里

试比较电流有否流经该螺线管时的两种情况。若没有电流，我们便不会有 B 或 A ，因而就得到在捕捉区电子强度的那个原来图样。但若通电流于螺线管并在管内建立了磁场 B ，则在管外便将有 A 。于是将产生一个正比于在管外 A 之环流的位相差移动，这意味着整个极大和极小的图样会被移至一个新的位置上。事实上，由于对任一对路线穿过其中的 B 之通量乃是一常数，因而 A 之环流也是如此。这对于每一到达之点将会引起相同相变；也就是相当于使整个图样在 x 方向上移动一个常数，比方说 x_0 ，那是容易算出的。极大强度将出现在两波的相差为零的地方。应用关于 δ 的式(15.32)或(15.33)以及关于 $\delta(B=0)$ 的(15.28)，我们便有

$$x_0 = -\frac{L}{d} \nabla \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} A \cdot ds, \quad (15.35)$$

或

$$x_0 = -\frac{L}{d} \pi \frac{q}{\hbar} [\text{在(1)与(2)两路线间的 } \mathbf{B} \text{ 之通量}], \quad (15.36)$$

在有螺线管存在时的图样看来*应如图 15-7 所示的那种情况。至少，这是量子力学方面的预言。

正是这一实验最近已经做出来了。它是一个十分难做的实验。由于电子的波长很短，该仪器就必须放在微小尺度上才能观察到干涉现象。两狭缝必须互相紧靠，这意味着需要有一个非常小的螺线管。事实证明，在某些场合下，铁晶体将会生长成十分长而又只在显微镜下才能看得到的细丝，即所谓晶须。当这些铁晶须已被磁化时，就很象一个小螺线管，因而除了靠近两端的地方以外就没有任何磁场留在须外。关于电子相干的实验，即是以这么一条晶须放在两狭缝之间而做出来的实验，已对所预言的那种电子图样移动观测到了。

那么，在我们的意义上 \mathbf{A} 场已是“真实”的了，你可能会说：“但那里本来就有磁场的”。本来就有，不过要记住我们那个原来的概念——所谓场是“真实”的就必须是在粒子所在的位置上被规定下来以得到该运动。在晶须里的 \mathbf{B} 场却起着超距作用，如果我们不愿意用超距作用来描写它的影响，则非得用矢势不可了。

这一课题曾有过一段饶有意义的历史。我们所描述的理论从 1926 年量子力学问世时就给人们知道了。矢势之出现在量子力学的波动方程(薛定谔方程)式这一事实，从该方程最初被写出来的那一天起就已经明显了。它不可能以一轻易方式由磁场来顶替，这已由企图作此种尝试的人们陆续注意到了。从我们对电子在没有磁场的区域里运动而多少总会受到影响的这个例子来看，那也是清楚的。但由于在经典力学中 \mathbf{A} 并未曾显示出任何直接的重要性，并且由于它可以通过加上一陡度而改变，人们便不断地说矢势不具有直接的物理意义——即使在量子力学中也只有磁场和电场才是“对”的。在进行回顾时似乎觉得奇怪，为什么从没有人想要讨论这一实验，一直到了 1956 年才由玻姆和阿哈朗诺夫(Aharanov)最初对此提出建议并从而使整个问题明朗化。这一涵义任何时候都始终存在，但就是没有人曾注意到。于是，当这一事情被提起时许多人都颇受震动。这就是为什么会有想到值得去做出实验来证实它确实是对的，尽管在许多个年头中已被人们确信了的量子力学曾经给出过一个毫不含糊的答案。有趣的是，象这样一件事情竟搁置达三十年之久，只是由于对某件东西有意义而另一件没有意义的某些偏见就一直被忽视。

现在我们希望作稍为进一步的分析。要来证明量子力学公式与经典公式间的关系——即证明为什么如果对事态在一足够大的尺度上来考察，就将表现好象粒子是受了等于 $qv \times (\mathbf{A}$ 的旋度)之力所作用似的。要从量子力学得到经典力学，需要考虑其中所有波长比起如场那样的外加条件能够作出可观变化的距离来都远为微小的那些情况。我们将不在最普遍的场合下证明这一结果，而只是在一个十分简单的例子中阐明它的来龙去脉。我们又一次考虑那同一个狭缝实验。但不再把所有磁场都局限在两狭缝间的一个十分微小的区域里，而是设想有处于狭缝后面延伸至较广阔区域中的一个磁场，如图 15-8 所示。我们将考虑一种理想情况，其中磁场在被认为比 L 小的宽度 w 的狭窄长条中是均匀的。(那很容易安排；捕手可以放在随心所欲的某一远处。)为要算出位相移动有多大，必须算出沿轨道(1)和(2)的两个积分。正如我们曾经见到的，它们间的差值恰好就是在两路线间 \mathbf{B} 之通量。符合我们的近似程度，这通量乃是 Bwd 。这样，该两路线的相差就是

* 如果 \mathbf{B} 是从图面上伸出来的，则根据我们所曾对其下了定义的通量会取负号，而 x_0 就会取正号。

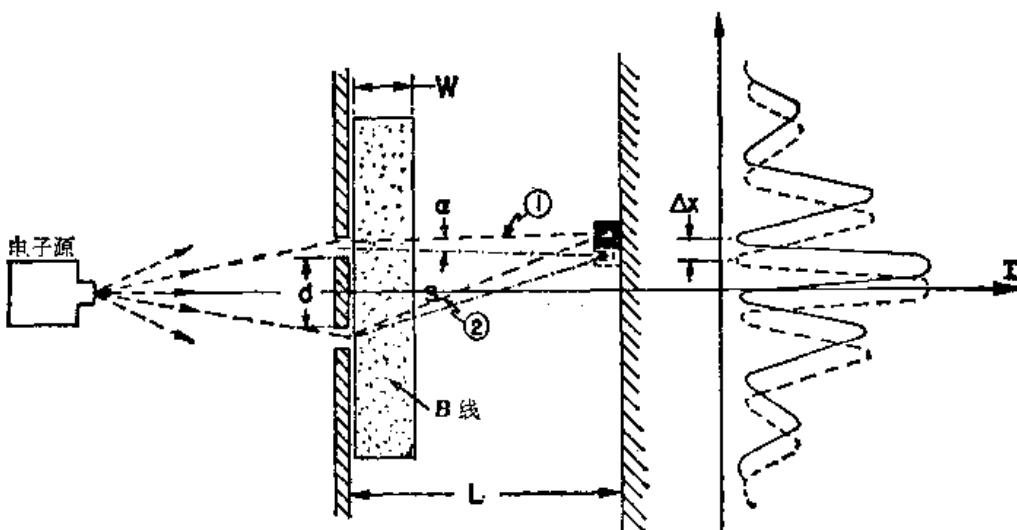


图 15-8 由一长片磁场所引起的干涉图样的移动

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} B w d. \quad (15.37)$$

我们注意到，在所取的近似程度上，这一位相移动与角度无关。因此，这一效应又把整个图样向上移动一个距离 Δx 。利用式(15.28)，

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} \Delta \delta = \frac{L\lambda}{d} [\delta - \delta(B=0)].$$

对于 $\delta - \delta(B=0)$ ，则可引用式(15.37)，因而得

$$\Delta x = L\lambda \frac{q}{\hbar} B w. \quad (15.38)$$

这样的移动相当于把所有轨道都偏转了一个角度 α (见图 15-8)，这角度是

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{\hbar} q B w. \quad (15.39)$$

原来按照经典方面来说，我们也该期待一薄片磁场会把所有轨道都偏转某一个小角度，比如说 α' ，情形示如图 15-9(a)。当电子通过磁场时，将感觉到一个持续了 w/v 时间之久的横向力 $qv \times B$ ，对横向动量的改变就恰好等于这一冲量，因此

$$\Delta p_x = qwB. \quad (15.40)$$

角偏转[图 15-9(b)]等于这一横向动量对总动量 p 的比率，我们得到

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{qwB}{p}. \quad (15.41)$$

可以把这一结果同从量子力学方面算出来的同一个量作比较。但经典力学与量子力学之间的关系则是这样：一个具有动量 p 的粒子相当于以波长 $\hbar = \lambda/p$ 变化着的一个量子波。应用这个等式， α 和 α' 就彼此全等；经典的与量

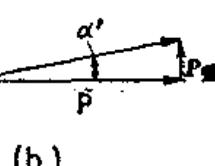
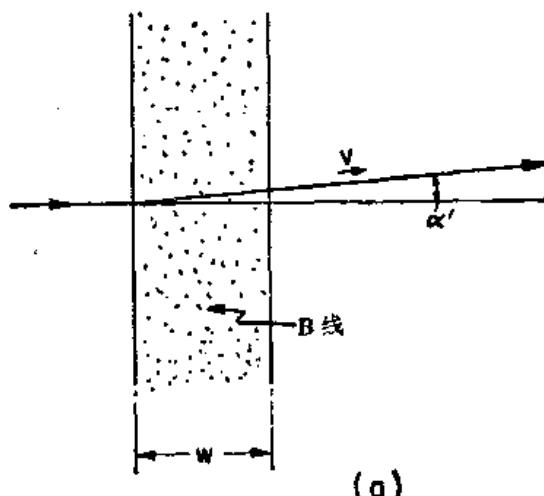


图 15-9 粒子通过一薄片磁场时被偏转

子的两种计算竟会给出相同结果。

从这一分析我们看到，在量子力学中以明显方式出现的矢势怎样会产生一个仅取决于其微商的经典力。在量子力学中有重大关系的乃是在互相靠拢的路线之间的相干作用；事实往往变成，效应仅取决于 \mathbf{A} 场从一点至另一点间变化了多少，因而就仅取决于 \mathbf{A} 之微商而并不取决于 \mathbf{A} 本身之值。虽然如此，矢势 \mathbf{A} (以及与之凑在一起的标势 ϕ) 仍表明能够提供对这部分物理学的最直接描述。当我们更深入到量子理论中去时这一点就更加清楚了。在量子电动力学的普遍理论中，人们每取矢势和标势作为一组用来代替麦克斯韦方程组的方程中的基本量： \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 逐渐从物理规律的现代化表式中消失；它们给 \mathbf{A} 和 ϕ 所代替了。

§ 15-6 对静态是对的而对动态将是错的

我们现在处于探索静场这一主题的末尾了。在这一章中，我们曾经险而接近必须对付场随时间变化时所发生的情况。我们过去在处理磁场能量时，仅仅依靠钻入相对性论证的避难所那儿才能逃避了它。即使如此，我们对能量问题的处理还是多少带着人为性和也许是神秘性，因为曾经忽略了实际上运动着的线圈一定会产生变化着的场的这么一件事实。现在正是时候，要来从事于对随时间变化的场的处理——电动力学这一门学科。我们将在下一章中做这件事。然而，首先将要强调下面几点。

尽管在这一课程中，我们是从一组完整而又正确的电动力学方程的表达方式开始的，但我们立刻就从某些不完整的部分出发——因为那是比较容易的。从静场的简单理论出发，并只在后来才逐步进入包括动场在内的那些更复杂的理论，是有很大优越性的。让你开头就要全都学习的那些新材料比较少，因而也就有时间给你去发展智力，以便准备应付更加艰巨的工作。

但在这一过程中会存在这样的危险性，即在读完整个故事之前，我们在中途上学习过的那些不完整真理可能会成了根深蒂固的而误认为是全部真理了——把那些总是对的与那些只有时才是对的互相混淆了。因此，我们在表 15-1 上就将提供一个关于我们已曾接触过的重要公式的总结，把那些普遍正确的与那些只有对静态才正确而在动态则是错误的区别开来。这个总结表也部分地表达出我们今后的动向，因为在今后处理动态时就将详细地发展此刻我们应仅仅提出来而没有加以证明的那些东西。

对这张表作一些说明可能会有用处。首先，你应该注意到，我们最初写出来的那些方程都是正确方程——在那里并没有带错了你。电动力(常称为洛伦兹力) $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 是正确的。只有库仑定律才是错误的，它仅适用于静态。关于 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的四个麦克斯韦方程也是正确的。当然，那些我们对静态取的方程则是错的，因为已删去了所有含有时间微商的项了。

高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ 依然正确，但一般 \mathbf{E} 之旋度并不等于零。所以 \mathbf{E} 不能总是等于一个标量——静电势——的陡度。我们将看到一个标势依然保存，但它却是一个随时间变化着的量了，必须与矢势一起配合才能用作对电场的完整描述。那些用来控制这一新的标势的方程也必然都是新的了。

我们也必须把在导体里 \mathbf{E} 等于零的概念丢掉。当场正在变化时，导体里的电荷一般没有足够时间以将它们重新安排使得电场为零。它们被促使运动，但却永远达不到平衡。唯

一普遍的说法是：导体里的电场产生了电流，所以当处于正在改变的场中时导体并不是一个等势体。由此可知，电容器的概念已不再准确了。

表 15-1

一般是错的(只有对静态才正确)

总是对的

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (库仑定律)	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (洛伦兹力)
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (高斯定律)
$\mathbf{E} = -\nabla\phi$	$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (法拉第定律)
$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$ 对于导体， $\mathbf{E}=0$, $\phi=\text{常数}$, $Q=CV$	$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 在导体中, \mathbf{E} 造成电流
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}$ (安培定律)	$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (不存在磁荷) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	$\rightarrow c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (泊松方程)	$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ 和 $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}$ 用 $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$
$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2$	$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t')}{r_{12}} dV_2$ 和 $\mathbf{A}(1, t) = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2, t')}{r_{12}} dV_2$ 用 $t' = t - \frac{r_{12}}{c}$
$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int \nabla \phi dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV$	$\mathbf{U} = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV$

那些用箭头(\rightarrow)标明的都是麦克斯韦方程。

既然不存在磁荷， \mathbf{B} 之散度就永远为零。因此， \mathbf{B} 总可以写成等于 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。（没有什么东西改变！）但 \mathbf{B} 之产生却不仅来自电流： $\nabla \times \mathbf{B}$ 正比于电流密度加上一个新的项 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 。这意味着， \mathbf{A} 由一个新的方程同电流联系上了。而且也同 ϕ 有牵连。如果利用为了我们自身的方便而能对 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 进行选择的那种自由，则关于 \mathbf{A} 或 ϕ 的方程还可以安排出一种简单而又优美的形式。因此，建立 $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial \phi / \partial t$ 这样一个条件，就能使有关 \mathbf{A} 或 ϕ 的微分方程表现出如表上所列的那样。

\mathbf{A} 和 ϕ 这两种势仍可通过对电流和电荷的积分而求得，但已不同于那些静态积分。然而，最令人惊异的是，真正的积分很象那些静态的，只不过有一个小小的诉诸于物理方面的

請勿用於盈利之目的

修改。当我们计算积分以便求得在某一点、比如在图 15-10 中的点(1)之势时，就必须用到在一个较早时刻 $t' = t - r_{12}/c$ 位于点(2)上的 \mathbf{j} 和 ρ 值。正如你所期望的，从点(2)发出去的影响以速率 c 传播至点(1)。用这一点小改变，人们就能对正在变化着的电流和电荷之场求得解答，因为一旦我们知道了 \mathbf{A} 和 ϕ ，就能依旧从 $\nabla \times \mathbf{A}$ 得到 \mathbf{B} ，而又从 $-\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ 得到 \mathbf{E} 。

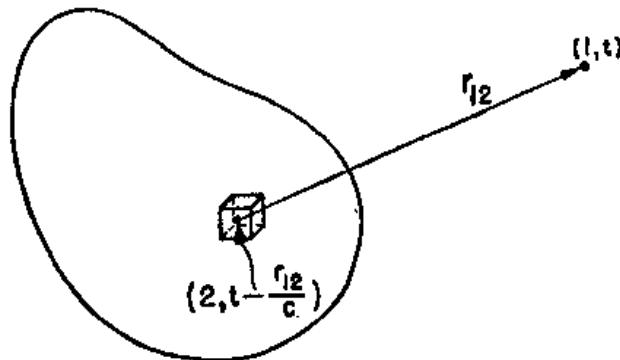


图 15-10 通过把在源的走动点(2)上的每一体积元的贡献相加起来，利用在一较早时刻 $t - r_{12}/c$ 的电流和电荷，而给出在 t 时刻点(1)上之势

上述所有这些情况，但注意这个总结表，也许有助于使你弄清楚哪些可以忘记，哪些应作为永远正确的东西而牢牢记住。

最后，你将会注意到，有些结果——比如，在电场中的能量密度为 $\epsilon_0 E^2/2$ ——对于电动力学与对于静电磁学一样都是正确的。你应当不会被哄骗以致误认为这反正十分“自然”。在静态中导出的任一公式的正确性都必须在动态情况下再度加以论证。一个相反的例子是：由 $\rho\phi$ 的体积分所表达的有关静电能的表式。这一结果只有对于静态才正确。

在适当的时候我们将更加详细地考虑

感生电流

§ 16-1 电动机与发电机

1820年对电和磁的密切关系的发现曾令人十分兴奋——在那以前，电和磁这两个课题一直被认为是完全互相独立的。首先发现的是载流导线会产生磁场；接着于同一年中，又发现载流导线在磁场中会受到力的作用。

其中最令人兴奋的一件事是，每当机械力存在时，便有利用它在机器中作功的可能。当上述现象刚被发现之后，几乎立即就有人开始利用这些施于载流导线上之力来设计电动机了。这种电磁式发动机的原理如图16-1的裸露轮廓所示。用一块永磁铁——通常配合一些软铁部分——在上下两槽里来产生磁场。横跨每一个槽就有如图所示的南北两极。以一个铜制矩形线圈的每边置于每一槽中。当电流通过线圈时，在两槽处的电流互相反向，因而力也反向，这样便产生一个环绕轴线的转矩。如果线圈安装在枢轴上以便转动，则可与滑轮或齿轮互相配合而作功了。

同一个设想也可用来制作电学测量上的灵敏仪器。自从该力律被发现之后，电学测量的精确度就大大提高了。首先，可以使电流绕行许多匝而不仅仅是一匝，以促使这种电动机中的转矩大大增加。然后，这个线圈又可以装配得使一个小小转矩便能够令它转动——或者把它的转轴装在一个十分精致的宝石轴承上，或者用十分细小的线或石英丝来悬挂该线圈。于是一个极小电流便能使线圈转动，而对于小角度来说这转动之量将与电流成正比。把一指针粘紧在该线圈上，或对于最精密的仪器，则通过安装在线圈上的一个小镜子来观察标尺的象的移动，这转动之量便可以测到了。这样的仪器叫做电流计。至于伏特计和安培计，也是在这同一原理上工作的。

这一概念也可用来制作规模巨大的能提供机械动力的大型电动机。利用安装在轴心上的一组触点可使线圈每转半周接法就变换一次，这样，线圈便能不断旋转，于是转矩将始终朝同一方向。小型直流电动机就是这样制成的。较大型的电动机，无论是直流的或交流的，往往利用一个由发电机提供能量的电磁铁来代替那永磁铁。

在认识了电流能够形成磁场之后，人们便立即提出，也许总可以想点办法来使磁铁也能形成电场吧。各种实验都尝试过。例如，将两根导线平行排列，当电流通过其中之一时就希望能在另一根导线中也找到电流。当时的看法是：或许磁场总可以在第二根导线中牵挽着电子前进，给出诸如“同类总喜欢跟着一同跑”的这样一种规律。结果是否定的，尽管已利用

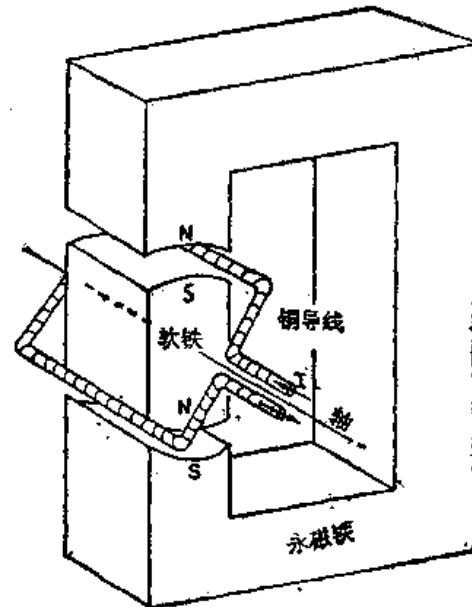


图 16-1 一部简单电磁式发
动机的示意轮廓

了当时可资用的最大电流，以及为探测电流用的最灵敏电流计。把大块磁铁置于导线旁边也产生不出可观测到的效应。最后，法拉第于 1840 年才发现有个最重要之点给漏掉了——电效应仅存在于有某种东西正在变动时。如果两导线之一中有一正在变化着的电流，那就会有电流感生于另一根导线中，或者如果一块磁铁在一电路附近运动，也会有电流通过。我们讲，这些电流是给感生出来了。这就是法拉第所发现的电磁感应效应。它把相当沉闷的静场课题转变成包括大量令人惊异的现象的十分激动人心的动场课题。本章专为其中某些现象作出定性描述。正如以后将会见到的，人们很快就将进入难以详细作出定量分析的一些相当复杂情况。但不要紧，这一章的主要目的首先在于使你熟悉所牵涉到的现象。我们将在以后才作详细分析。

从我们所学过的知识就可以容易理解磁感应现象的一个方面，尽管在法拉第时代对此还未曾懂得。那是来自作用于在磁场中运动的电荷并正比于其速度的 $v \times B$ 这种力的。假设有一根导线在一块磁铁附近经过，如图 16-2 所示，并将这根导线的两端连接至一电流计。如果移动导线使其通过磁铁的一端，电流计的指针就会摆动。磁铁产生了某一竖向磁场，而

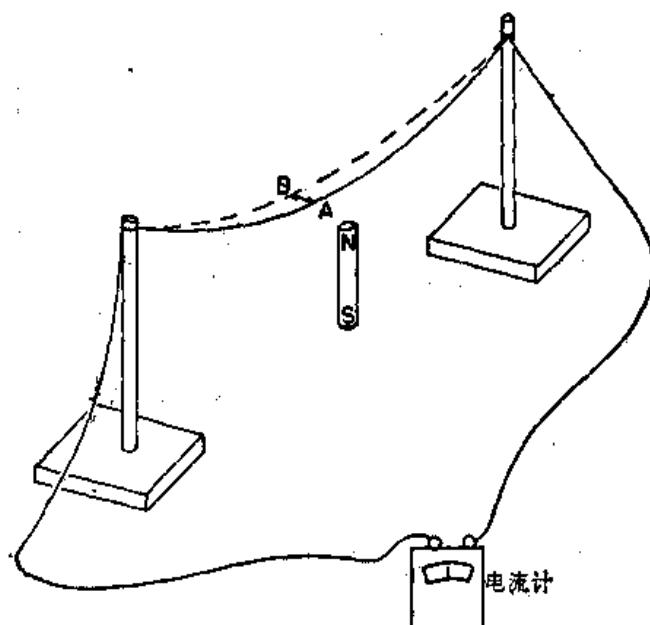


图 16-2 一根导线在磁场中运动会产
生电流，并由电流计显示出来

当我们将导线推过该磁场时，导线里的电子便会感觉到一个侧向力——既垂直于场也垂直于运动。这力把电子沿着导线方向推动。但为什么会使电流计摆动呢？它与那个力相距有那么远？这是由于当那些感到了磁力的电子试图运动时，它们——通过电的排斥——推动了导线里的附近电子；这些移动了的电子又再推动更远一些的，如此这般地在一个长距离上反复不已地推进。简直令人吃惊。

对于高斯和韦伯——最早制电流计的人——来说他们竟感到如此惊异，以致试图去弄清楚这些力到底会传到多远。他们把导线跨越整个市区。在一端，高斯先生将导线接至电池组（电池在发电机之前就为人们所熟悉），而韦伯先生则在另一端观察电流计的摆动。于是他们有了一种在长距离上通讯的办法——这就是电报的起源！当然，这并非直接与感应有关——有关的只是导线载流的那种方式，不管电流是不是由感应推动的。

现在假设在图 16-2 的装备中，我们让导线静止不动而令磁铁运动。这样，仍然会看到在电流计上的效应。正如法拉第当时所发现的，把磁铁在导线下面朝某一方向移动会发生与将导线在磁铁上面朝反向移动相同的效应。但当磁铁被移动时，就不再有作用于导线内部电子上的任何 $v \times B$ 之力了。这是法拉第找出的一个新的效应。今天，我们也许希望从相对性论证中来理解它。

我们已经了解到一块磁铁的磁场是来自它的内部电流。所以如果不图 16-2 上的那块磁铁，而是用一个载有电流的线圈，我们也该期望会观察到同一效应。如果拿着导线在线

圈附近移动，便将有电流流经该电流计，或如果把线圈移过导线，情形也是如此。但现在就有一个更动人的事态发生了：若我们变更线圈的磁场，不是通过运动，而是通过变更其中的电流，那么在电流计中又再度会发生效应。例如，设有一导线回路放在一线圈附近，如图 16-3 所示，此时若保持回路与线圈两者都不动，只是断开线圈中的电流，就会有一电流脉冲通过该电流计。当我们再对线圈通上电流时，电流计则将向相反的方向摆动。

每当在诸如图 16-2 或图 16-3 所示情况下，电流计有电流通过时，导线里的电子总会受到沿着导线某一向指的一个净推力。在不同位置可能有不同方向的推力，但沿某一方向的推力总是大于其他方向的。这里算得上的乃是沿整个电路对这推力的积分。这个净积分推力叫做该电路的电动势。更准确地说，电动势被定义为导线中每单位电荷所受的沿线切向力对整个电路环绕一匝的路程积分。法拉第的整个发现是，在导线中的电势可以由三种不同途径产生：通过使导线运动，通过使磁铁在导线附近运动，或通过变更附近一条导线中的电流。

让我们再考虑图 16-1 的那部简单机器，只是现在不再输入电流于导线中以使之转动，而是由一外力，比如是用手或水轮机的带动来使该回路旋转。当线圈转动时，它的导线在磁场中运动，而我们便将在该线圈电路中发现一电动势。电动机变成了发电机。

发电机的线圈由于运动就有了一个感生电动势。这电动势之量由法拉第所发现的一个简单法则给出。（目前将仅陈述这一法则，等待以后才详细加以审查。）法则是这样的：当穿过回路的磁通量（这通量就是 B 之法向分量遍及回路所包围面积的面积分）随时间变化时，电动势等于这通量之变率。我们将称这一法则为“通量法则”。你看到当图 16-1 上的线圈转动时，穿过它的通量改变了。开始时有某一通量以一种方式穿过；然后当线圈转过了 180° 时同一通量又沿相反的方向穿过。如果我们继续转动线圈，该通量首先是正，然后是负，再又是正，如此等等。通量之变率必然也是正负交变着的了。因而在该线圈中就有一个交变电动势。如果将这线圈的两端通过某种滑动接触——称为汇电环的——（只有这样导线才可不至于扭绕起来）以连接至外面导线，则我们具备一部交流发电机了。

或者，也可以作这样安排：通过某些滑动接触，使在每转动半匝之后线圈端点与外导线之间的连接便反转过来，因而当电动势反转时，连接方式也反转了。因而电动势的脉冲在外电路中将始终把电子推向同一方向。这样，我们就有一部所谓直流发电机。

图 16-1 上的那部机器既是电动机也是发电机。利用两部结构全同的永磁式直流“电动机”，在它们的线圈间用两根铜线相连，则关于电动机与发电机之间的可逆性就可以漂亮地显示出来。当其中一线圈之轴作机械旋转时，它便成为一部发电机而推动另一部作为电动机。如果将第二部的轴旋转，则它变成发电机而对第一部当成电动机推动。因此，这里是一个新型的有关自然界等效的有趣例子：电动机与发电机彼此等效。事实上，这种定量的等效

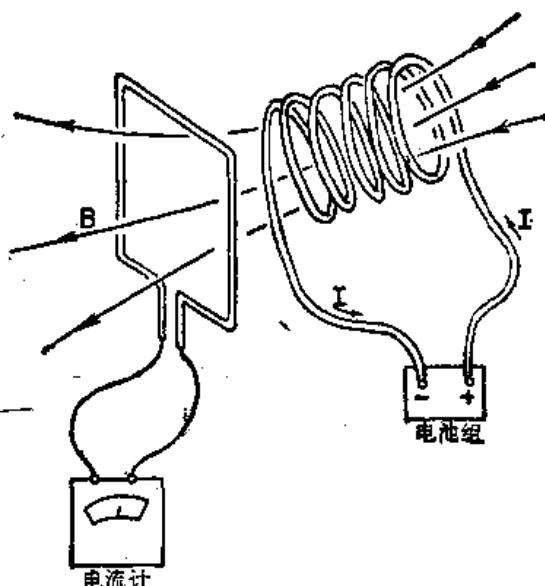


图 16-3 一个载流线圈会在第二个线圈中产生电流，如果移动第一个线圈或将其中的电流变化的话

性并非完全出于偶然，它是与能量守恒律密切相关的。

另一种既可产生电动势又可响应电动势而动作的装置例子，是一部标准电话机——即“听筒”。贝尔(Bell)原来的电话机包括这样的两个听筒用两根长导线连接起来，其基本原

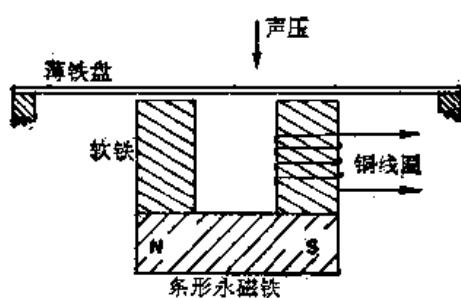


图 16-4 电话收发机

理示如图 16-4。一块永磁铁在由软铁制成的两块“轭铁”中以及在一薄铁片中产生了磁场，该薄片则由声压引起运动。当这膜片运动时，它改变了轭铁中的磁场强度。因此，当声波冲击膜片时，在环绕其中一块轭铁的线圈中所穿过的磁通量就改变了。因而在该线圈中就有一电动势。如果线圈的两端接至一电路，则一种以电的方式表达声音的电流就会建立起来。

如果图 16-4 的线圈两端用两根导线连接至另一个相同的机件，则那变化着的电流便会在第二个线圈中流动。这些电流将产生一个变化着的磁场，并将造成对该薄铁片的一个变化着的吸引。这膜片将上下振动而造成声波，这些声波大体上与原来使膜片振动起来的那些声波相似。这就是说，利用几块铜铁就能使人们的声音在导线上传递出去！

(现代的家用电话其收话机与上述的相似，而其发话机改进了，它利用了一种新发明以获得较强大的功率。那就是“炭粒传声器”，它是利用声压以改变来自电池组的电流。)

§ 16-2 变压器与电感

法拉第发现的最有趣的特点之一，不是存在于一运动线圈中的电动势——那是可以用磁力 $qv \times B$ 来理解的——而是在一个线圈中电流的变化会在另一个线圈中产生电动势。而十分令人惊奇的是，在第二个线圈中所感生的电动势其大小也由同一个“通量法则”给出：电动势等于穿过线圈中的磁通量之变率。假设我们有两个线圈，各绕在彼此分开的一迭铁片上（这些铁片起着使磁场增强的作用），示如图 16-5。现在把其中一个线圈——线圈(a)——连接至一交流发电机上。那不断变化着的电流会产生一个不断变化着的磁场。这变化着的磁场就在第二个线圈——线圈(b)——中产生一个交变电动势。这一电动势能够，比如说，产生足够的功率以使一个灯泡发亮。

线圈(b)中的电动势其频率当然与原来发电机的频率相同。但线圈(b)中的电流则可能大于或小于在线圈(a)中的。线圈(b)中的电流取决于其中所感生的电动势以及线路中其余部分的电阻和电感。这电动势可能低于发电机的，例如，若通量的变化很少。要不然，线圈(b)中的电动势可以通过增加匝数而比发电机中的大许多，因为在给定磁场中此时穿过线圈的通量增加了。（或者，若你喜欢用另一种方式来看它，每一匝的电动势彼此相同，而总电动势等于分开的各匝的电动势之和，所以如有许多匝串联起来就会产生一个较大的电动势。）

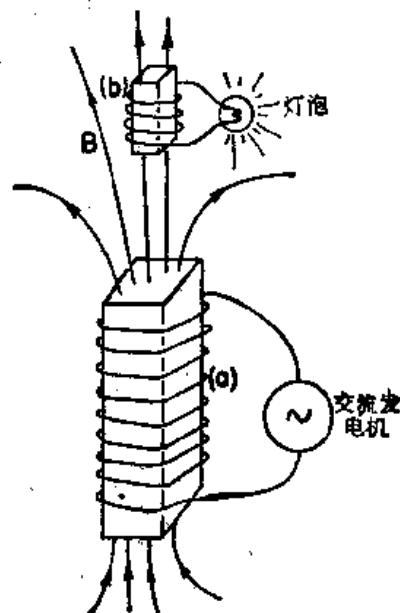


图 16-5 两个围绕在各一迭铁片外面的线圈，能让一部发电机在没有直接连接的情况下使一个灯泡发亮

两个线圈的这种结合——通常布置一些铁片来引导磁场——称为变压器。它能使电动势(也叫“电压”)“改变”。

在一个单独线圈中也会有电感效应发生。例如在图 16-5 的那种设备中,不但有一个借以使灯泡发亮的穿过线圈(b)的变化着的磁通量,而且也有一个穿过线圈(a)中的变化磁通量。在线圈(a)中变化着的电流会产生一个变化着的磁场于其本身之中,因而这个场的通量也就不断变化,结果有一个自感应的电动势存在于线圈(a)中。当任何电流正在建立磁场时——或更普遍地说,当它的场以任一种方式变化时——便有一个电动势作用于该电流上。这一效应称为自感。

当我们在上面给出“通量法则”,即电动势等于磁通匝连数的变率时,还未规定电动势的方向。有一个简单法则,叫楞次(Lenz)法则,就是为弄清楚电动势指向何方的:电动势企图反抗任何磁通变化。也就是说,感生电动势的方向总是这样:如果电流沿该电动势的方向流动,则它总会产生旨在抗拒造成该电动势的 B 之变化的一个 B 通量。楞次法则可以用来找出图 16-1 中那部发电机的电动势方向,或图 16-3 那变压器绕组中的电动势方向。

特别是,如果在单一线圈(或任一根导线)中有一正在变化的电流,则在该电路中就会有一“反”电动势。在图 16-5 的线圈(a)中,这一电动势作用于各电荷上以反抗磁场的改变,从而也就是沿着反抗电流改变的方向。它企图保持电流恒定不变;当电流增加时它与电流反向,当电流减少时则与电流同向。在一自感中的电流具有“惯性”,因为该电感效应企图保持电流恒定,正如机械惯性企图保持一物体的速度恒定一样。

任一大型电磁铁中都会有大的自感。假设有一电池组连接于一大型电磁铁的线圈上,如图 16-6 所示,则一个强磁场就会建立起来。(电流达到了一个由电池组电压和线圈里导线电阻所确定的稳恒值。)但现在假定我们是在试图通过打开开关而切断电池组。要是真的切断电路,电流就会迅速趋于零,而在这样做时将会产生一个巨大电动势。在大多数情况下,这一电动势会大到足以在开关的断路接点间发展成一个跨越接点的电弧。这样出现的高电压也许会损害线圈中的绝缘——甚至会把你击伤,如果你正是拨动开关的那个人!为了这些原因,电磁铁往往被接成象图 16-6 所示的那种电路。当键被断开时,电流并不作迅速变化,而是保持稳定,这是由于那受线圈中的自感电动势所驱使的电流正在流经灯泡。

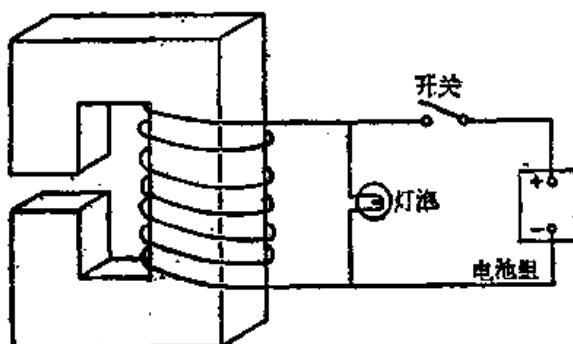


图 16-6 电磁铁的电路连接法。灯泡容许在开关打开时仍然有电流通过,这样才能避免出现过高的电动势

§ 16-3 作用于感生电流上之力

你也许曾经见过利用如图 16-7 所示的那种小机件来戏剧性地演示楞次法则。这是一块电磁铁,恰好象图 16-5 中的线圈(a),一个铝质环放在电磁铁的顶端上。当接通电键以便使线圈连接至一交流发电机时,这个环会飞向空中。当然,力是来自环中的感生电流的。环会飞开这一事实表明,环里的电流反抗穿过其中的磁场的变化。当电磁铁正在其顶端形成一北极时,在环里的感生电流就在形成一个朝下的北极。环与线圈的互相排斥犹如两块同极磁铁互相接近时那样。但如果在环里造成一个狭窄的径向裂缝,力就会消失,这表明力确

实是来自环中的电流。

如果不采用环而改用一个铝盘或铜盘放在图 16-7 的磁铁一端之上，它也将被排斥；感生电流在盘的材料里形成环流，再度产生了排斥作用。

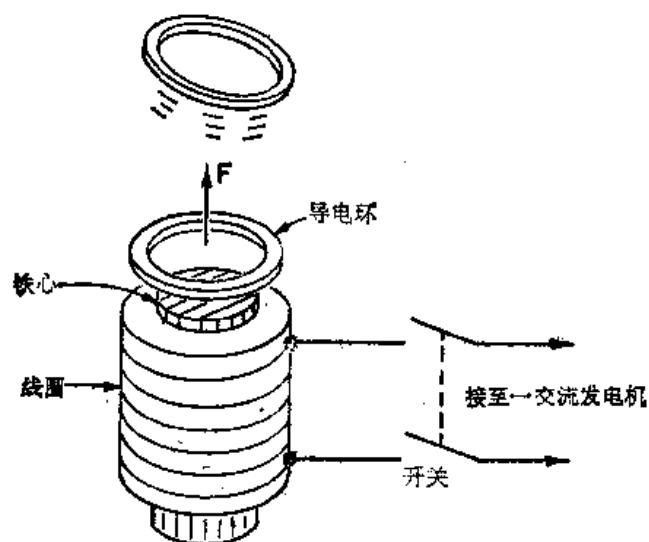


图 16-7 一个导电环会被一块通有变化电流的电磁铁强烈推开

其根源与此相类似的一个有趣效应发生在一片完美无缺的导体中。要知道，完美导体对于电流将不会有任何电阻。所以如果电流在其中产生，它将会无限期地保持下去。事实上，一个最微小的电动势便足以产生一个任意大的电流——这实际上意味着完全可以没有电动势。任何要把磁通量送进这样一片理想导体里的尝试都会产生引起相反 **B** 场的电流——所有这一切只需要无限小的电动势，因而不会有任何磁通量窜进理想导体中。

如果有一片完美导体并把一块电磁铁放在其附近，则当我们接通电磁铁的电流时，被叫作涡流的那种电流会在该片里出现，使得磁场不能进入其中。场线看来会象图 16-8 所示的那样。当然，如果把一条形磁铁移近一完美导体，这同一情况也会发生。既然涡流正在产生相反磁场，磁铁就会受导体所排斥。这样就有可能让一条形磁铁悬浮在形状有点象个盘子那样的完美导体片之上，情形示如图 16-9。这磁铁是受到在完美导体里的感生涡流的排斥才得以悬浮于空中的。在寻常温度下不会有完美导体，但某些材料在足够低的温度下会变成完美导体。例如，在 3.8 K 上的锡，导电就十分完美。这叫做超导体。

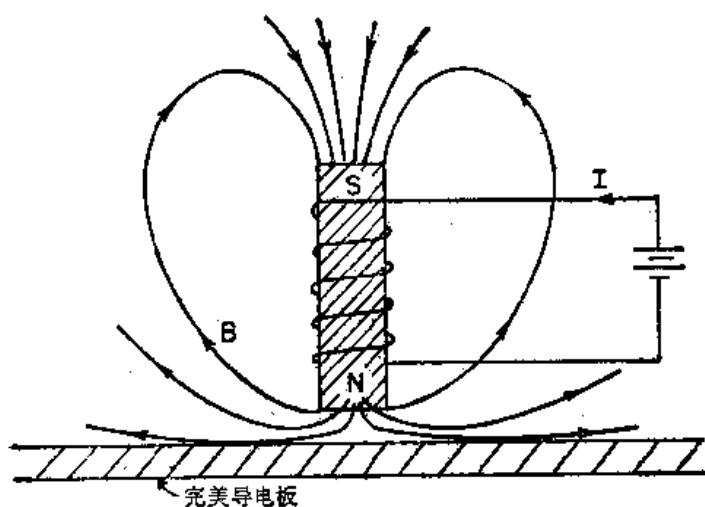


图 16-8 电磁铁靠近一块完美导电板

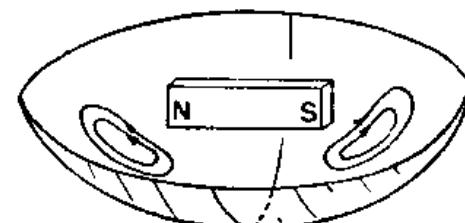


图 16-9 由于受到涡流排斥，一块条形磁铁会悬浮在一个超导体碗上面

如果图 16-8 的那块导体不是完美导体，则对于涡流这种流动便会有一些阻力。电流将逐渐消失而磁铁便将慢慢落下。在一非完美导体中，涡流需要电动势来维持，而要有一电动势，通量势必保持不断变化。磁场的通量就会逐渐钻进导体中去。

在正常导体中，来自涡流的不仅有排斥力，而且也有侧向力。例如，若把一块磁铁在导体表面上侧向移动，则涡流将产生一个阻力，因为这些感生电流正在反抗通量所在地的改变。这种力的大小与速度成正比，象一种粘滞力。

这些效应在图 16-10 所示的仪器中表演得十分美妙。一块方形铜片悬挂在一根棒的下端而构成一个摆。这铜片在一电磁铁的两极间摆来摆去。当电磁铁的电流接通时，摆动会突然掣停。这块金属板当进入电磁铁的缝隙中时，板里感生电流的作用就在于抗拒通过该板的磁通量变化。假若该块板是一完美导体，即其中电流会大到足以将板重推出去——即它会被弹回去。若采用的是一块铜板，在板里会有一些电阻，因而当它开始进入磁场中时，电流将先把该板阻至几乎停止运动的地步。然后，当电流降低时，板就会在磁场中缓慢地降下来。

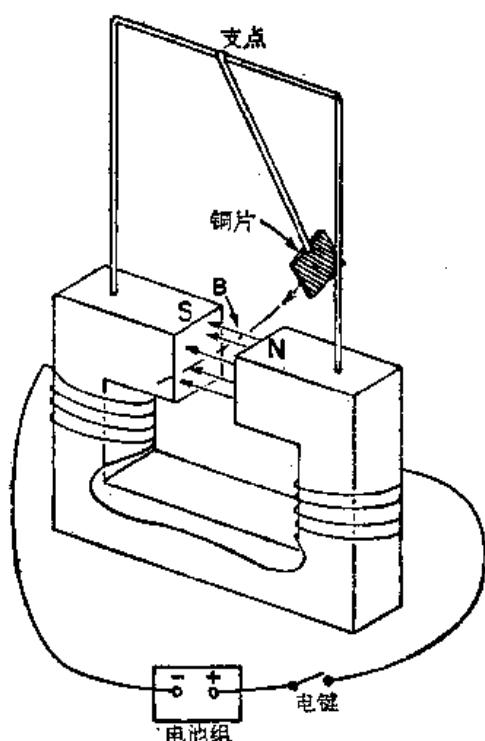


图 16-10 对摆的制动作用，证明有起因于涡流的一些力

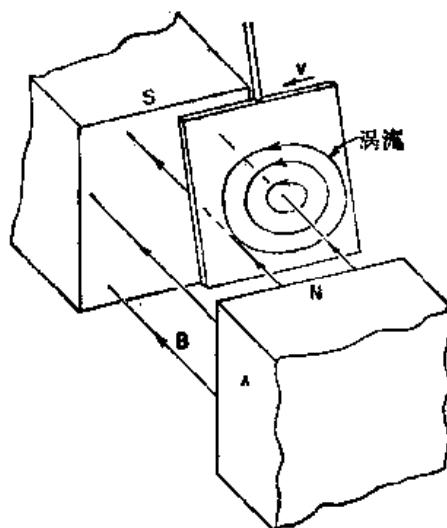


图 16-11 铜摆中的涡流

铜摆中涡流的性质示如图 16-11。这种电流的强度及其几何分布对摆的形状很敏感。例如，若象图 16-12 所示的那样，用一块中间割去几条沟道的铜板来代替那原来的铜板，涡流效应则会猛烈下降。当摆通过磁场而摆动时，仅有一微小的减速力。原因是：铜板中每一小区域里借以驱动电流的磁通量减少了，因而使每一回路的电阻效应增加。电流变小而阻力也就小了。如果把一块铜板放在图 16-10 的磁铁两极间然后释放，则力的粘滞特性还会看得更加清楚。铜板不会掉落下来；只是缓慢地下降。涡流对运动会施一强大阻力——就象蜜糖里的粘滞阻力一样。

如果不是将一块导体拉经磁铁附近而过，却是在磁场中试图转动导体，则将有来自同一种效应的阻滞转矩。反之，若在导电板或导电环附近旋转一块磁铁——把两

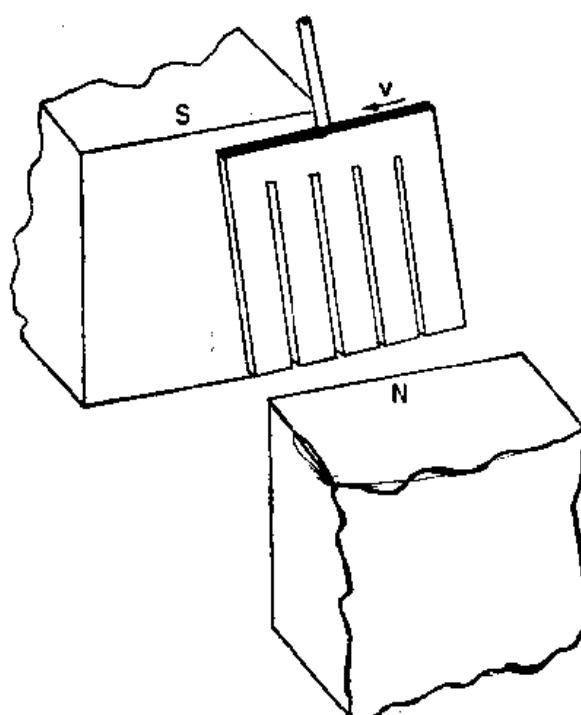


图 16-12 在铜板中割出一些沟道，涡流效应会猛烈下降。

請勿用於盈利之目的

极端都对着它——则板或环将被拖着在一起旋转；板或环里的电流将产生一个倾向于使其跟随磁铁旋转的转矩。

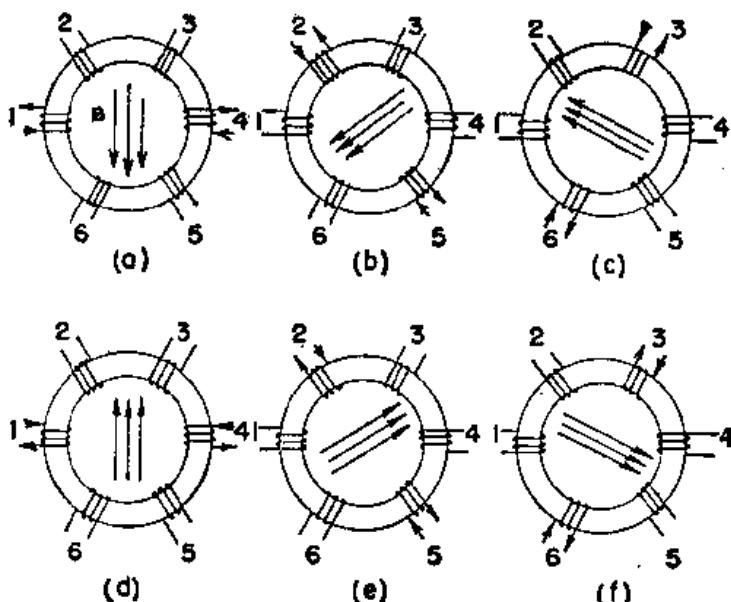


图 16-13 构成一个旋转磁场

有一“旋转”磁场了。把各线圈连接至一套三相输电线上就能轻易地获得所需的一系列电流，因为三相输电线就是为提供这种电流的。“三相动力”是利用图 16-1 的原理在一部发电机中形成的，只要有三个线圈以对称的方式排列在同一根轴上——也就是说，每一回线与次一回线之间要相隔 120 度。当各线圈作为整体旋转时，其中之一的电动势极大，然后这极大值又转移到下一个线圈中，如此以有规则的程序持续下去。三相动力有许多实际优点，其中之一就是造成一个旋转磁场的可能性。由这种旋转磁场在导体中所产生的转矩可由一个金属环竖立在一张刚好置在该铁环之上的绝缘台上而轻易地加以演示，如图 16-14 所表达的那样。这旋转磁场会引起该导电环绕着一根垂直轴线旋转。在这里所看到的基本因素与在一部大型商用三相感应电动机中实际上起作用的因素完全相同。

感应电动机的另一种形式示如图 16-15。这里所示的布置不适于一部实用的高效率电动机，但将会说明原理。电磁铁 M 包括一迭多层铁片和在其外面绕着的螺线管式线圈，由

一个恰好象那转动磁铁的磁场可以用如图 16-13 所示的那种线圈布置来完成。我们取一铁环（也就是，一个象炸面圈那样的铁环）并绕上六个线圈。如果象图 (a) 那样通电流于 (1) 和 (4) 两绕组，就会有一个如图所示的那种方向的磁场。现在若把电流转移至 (2) 和 (5) 两绕组上，则磁场将指向图 (b) 所示的那个新的方向。继续这一步骤，便会得到图上其他部分所示的一系列磁场。倘若这一过程顺利地进行，就会

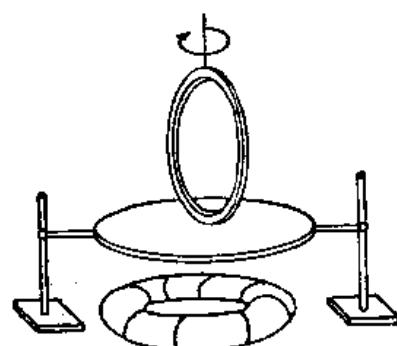


图 16-14 图 16-13 中的旋转磁场
可用来对一个导电环提供转矩

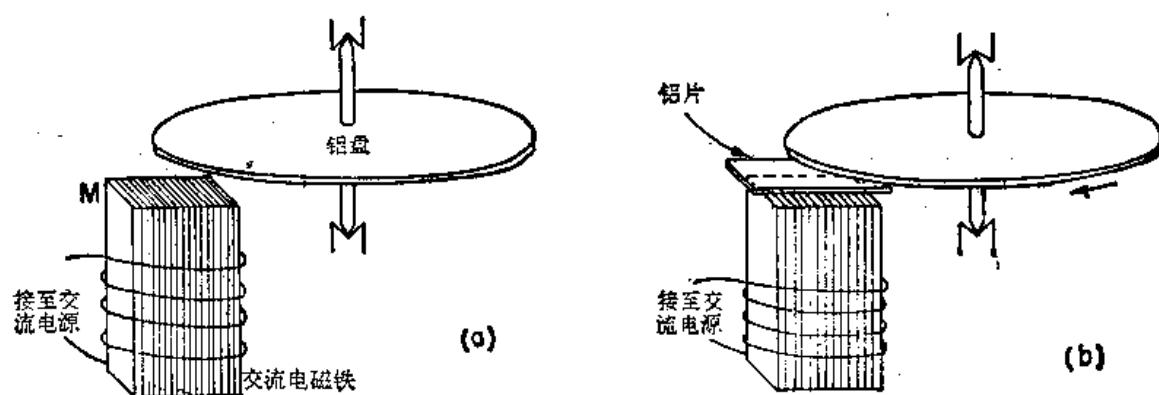


图 16-15 磁极荫蔽式感应电动机的一个简单例子

一部发电机的交变电流来提供动力。这电磁铁会产生一个变化着的 B 通量穿过该铝盘。但如果我们仅有这两部件，如图(a)中所示的，则还不能构成一部电动机。盘中虽然有了涡流，可是这些涡流表现对称性，因而不会产生任何转矩。（由于这些感生电流，盘里多少总会发生一些热。）现在若用一个铝盘仅仅遮盖磁极的一半，如图(b)所示，则该盘便将开始转动，而我们便有一部电动机了。这操作有赖于两个涡流效应。首先，在铝片中的涡流抗拒着穿过它的通量变化，因而在那块片上面的磁场就总会落后于那不受遮盖的一半之上的磁场。这种所谓磁极“荫蔽”效应在那“被荫蔽”区中会产生一个其变化十足象在“非荫蔽”区中的磁场，只不过被延迟了一段固定时间。整个效应就象只有一半宽的一块磁铁不断从非荫蔽区移至荫蔽区似的。于是，这些正在变化着的磁场就会与铝盘中的涡流互相作用而产生一个施于铝盘上的转矩。

§ 16-4 电工技术

当法拉第最初将其有名发现——即关于变化着的磁通量会产生电动势的那个发现——公诸于世时，他曾被人质问（象任何对自然界新事物的发现者会被质问一样）。“这有什么用处呢？”其实他所发现的不外是当他在一块磁铁旁边移动一根导线时就会有一小电流产生的那么一桩怪事。这有什么被“利用”的可能呢？他的回答是：“一个新生的小孩会有什么用处？”

你试想想他的发现曾经导致多么巨大的实际应用。我们上面所描述的并不只是玩具一类，而是选择了在大多数情况下代表着某种实用机器的原理的一些例子。例如，在一旋转磁场中的那个转动环就是一部感应电动机。对那个环只需一个很小转矩；你用手就可以止住它。对于一部优良电动机，结构就必须安排得更加紧凑：不能让那么多的磁场“浪费”在外面空气中。首先，利用铁质以集中磁场。我们还未讨论过铁如何会完成这一使命，但铁的确能使磁场比单靠铜线圈时强几万倍。其次，铁块与铁块间的缝隙被缩小了；为此，有些铁甚至被嵌入该旋转环之中。每一件东西都被安排得能够获得最大的力和最高效率——也就是说，把电功率转变成机械功率——一直到该“环”不再能够用手去阻止它的转动并使其停下来。

封闭缝隙以及使事情按最实际的方式进行，这些问题属于工程方面。这需要对设计作认真的研究，尽管那些力并非从任何新的基本原理获得的。但要从基本原理过渡到一种实际而又经济的设计却仍然有一段漫长的道路要走。然而，正是这种过细的工程设计才使得象柏耳达(Boulder)水坝*那类庞然大物及其附属东西成为可能。

柏耳达水坝是什么？一条大河给一混凝土的墙壁挡住了。但究竟是怎样的墙壁呢？按一条经过十分仔细计算过的曲线来造型的，使得用最少量混凝土便能挡住整条河流。在它的底部要做得厚些，这出现在那么奇妙的形状上以致艺术家们都喜欢它，而工程师们则能够理解它，因为他们懂得这样的变厚是与压力随水的深度而增加有关的。但我们却已离开了电学。

然后，河水被导入一条巨大管道。这件东西本身就是工程上绝妙的一项成就。管道把水供给水轮——一座巨大涡轮机——而使水轮旋转。（另一项工程业绩。）但为什么要转动水轮呢？它们同一大堆极端错综复杂的而又相互交织纠缠在一起的铜和铁耦合起

* 柏耳达水坝位于美国西南部科罗拉多河上，坝长 360 米，深 222 米，蓄水量 395 亿立方米。——译者注

来，其中包括两部分——一部分在转动而另一部分不动。仅有寥寥几种材料的交相配合，其中绝大多数是铁和铜，但还有供绝缘用的一些纸片和虫胶。一件会旋转的巨大怪物，也就是一部发电机。在这一大堆铜和铁之外还有铜制的几个特殊配件。水坝、轮机、铁、和铜，所有这些都配置在那里以使某一特殊事物终于发生在几根铜杆之间——一个电动势。然后，这些铜杆伸出去并在一变压器的另一铁块上绕了几圈；于是它们的任务完成了。

可是环绕那同一铁块的却还有另一根铜缆，看上去它与来自发电机的那几根铜杆毫无直接联系；铜杆由于在发电机附近经受影响——因而获得了电动势。变压器把对发电机的有效设计所需的那种相对低的电压转变成十分高的电压；这对于电能跨越长电缆而作有效传输是再好不过的了。

每一件东西都必须效率非常高——不能有任何浪费或损失。为什么？一个都市的动力全部经由此通过。要是有一小部分损失了——比方说百分之一、二——试想想这些掉了队的能量！要是有百分之一的能量留在变压器里，这些能量就必须设法取出来。否则，若它表现为热，就会马上将全部机件都熔掉。当然，采取下述做法也有点降低效率，然而这是必需的。那就是要有几部液泵，使油质环流于辐射器中以保证变压器不致过热。

从柏耳达水坝出来的是几十根铜棒——长长的也许有手腕那样粗的铜棒伸向四面八方，越过成几百英里以外。这些小铜棒把一条大河的动力都载上了。然后这些棒又分叉成更多的棒……再接至更多的变压器……有时则接至能产生其它形式电流的巨大发电机……有时接至为了庞大工业目标而运转着的机器……接至更多的变压器……然后又再行分叉和散开……直到最后该河流就遍布了整个城市——驱动着电动机、发热、发光以及使许多小机器运转。从600英里外的冷水变成炽热灯光这样一种奇迹——全都由一些特殊布置的铜、铁块完成了。轧钢用的大型电动机、或牙科医生用来钻牙齿的微小电动机，千万个小轮子都响应着柏耳达水坝那边的巨轮运转。如果停止该巨轮，所有一切小轮就都会停止；电灯也会熄灭。它们确实是互相联系着的。

此外，还有更多的东西。与取之于河流的强大动力而散布于各地农村的、直到几滴水流便足以驱动牙科医生用的牙钻的同一些现象，也一再出现在一些非常精密仪器的建造上……为了对异常微小电流的探测……为了对口语、音乐和图象的传递……对计算机……对惊人准确的自动化机器。

所有这一切之所以成为可能就是由于对铜和铁的小心设计安排——有效地产生出来的磁场……具有六英尺直径的铁块当旋转时其缝隙才有 $1/16$ 英寸宽……为了获得最高效率而对铜选取的最仔细比例……所有一切的古怪形状，都象该水坝的曲线那样，为的是达到同一个目标。

如果未来的某一位考古学家发现柏耳达水坝，那么我们可能推测他将对那些曲线的优美加以赞叹。但出自未来某一伟大文化时代的考察者也将望着该发电机和变压器说：“注意每一块铁都各有其美妙的有效形状。考虑那种渗透到每块铜里面去的思想吧！”

这就是工程的威力以及电工技术的精心设计。在发电机中已曾创造出一种在自然界其他地方都找不到的东西。肯定在太阳和星球周围的某些地方也会有电磁感应。例如地球磁场或许（虽然还不确定）也是由运行于地球内部各环流上的一种发电机类似物所保持着的。但没有任何一处会有动与不动的一些部件放在一起——有其高效率和规律性——从而产生象发电机那样的电功率的。

你可能会想到，设计发电机不再是一门有趣科目，它已是一门呆板的科目了，因为各种发电机都已设计出来。几乎十全十美的发电机或电动机都可从货架上取下来。但即使那是真的，我们对一问题的接近圆满解决的那种惊人成就也值得表示钦佩。甚至发电机和变压器也会再度成为问题。整个低温和超导体技术范围都有可能很快就被用于电力分配问题上。既然在这一问题中已经出现一个根本崭新因素，则新的最佳设计就非得创造出来不可。未来的动力网可能与今天的仅有极小类似。

你可以看到有数不清的应用和问题在学习感应定律时就可加以考虑的。关于电机设计的研究本身就已构成一项终身工作。我们不能在这方面走得太远，但应该认识到，当人们发现了电磁感应规律之后，便突然把理论和大量的实际发展联系起来。然而我们总必须把这一科目留给那些对算出特殊应用细节感兴趣的工程师和应用科学家们。物理学只是提供基础——无论哪一种可供应用的基本原理。（我们还未完成这种基础，因为还得去详细考虑铁和铜的性质。稍后一些我们将会见到，物理学对于这些都会有所论述。）

现代电工技术是从法拉第的发现开始的。那个毫无用处的初生小孩竟会发展成一位非凡的天才，把地球的面貌以一种连他那自豪的父亲都从没有想象到的方式改变了。

17

感 应 定 律

§ 17-1 感应的物理过程

在上一章中我们曾描述过许多表明电感效应既很复杂又很有趣的现象。现在我们要来讨论那些控制着这些效应的基本原理。已经把一导电电路中的电动势定义为遍及该回路全长的作用于电荷上的总积累势。更具体地说，它是施于每单位电荷上之力的切向分量，沿该电路环绕一周的线积分。因此，在数量上就等于环绕电路一周所作于单位电荷上的总功。

我们也都曾给出这样的“通量法则”，它申述电动势等于穿过这样一个导电电路的磁通量的变率。让我们来看看能否理解其中原因。首先，我们将考虑一种由于电路在一稳恒磁场中移动而导致通量变化的情况。

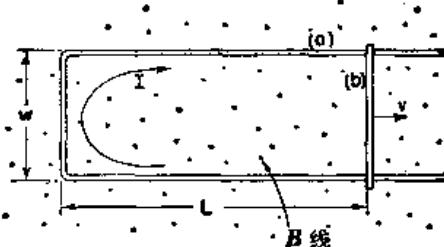


图 17-1 如果通量是由于改变电路面积而改变的，则在该回路中会感生一电动势

在图 17-1 中，我们表示一个大小可以改变的简单回路。这回路有两部分，固定的 U 形 (a) 部分和一根可以在该 U 形的两腿上滑动的横棒 (b)。它始终是一个完整电路，不过其面积是在变化着的罢了。假设现在把该回路置于一匀强磁场中，使 U 形平面垂直于磁场。按照通量法则，当移动横棒时在回路中就该产生一个与穿过回路的通量变率成正比的电动势。这电动势将在回路中引起电流。我们将假定导线中的电阻相当大以致电流很小。于是便可以略去来自这一电流的任何磁场。

穿过该回路的磁通量为 wLB ，因而“通量法则”会对于电动势——我们将把它写成 \mathcal{E} ——给出

$$\mathcal{E} = wB \frac{dL}{dt} = wBv,$$

式中 v 是该横棒的移动速率。

现在应该能够从作用于在该移动棒里的电荷上的磁力 $v \times B$ 来理解这一结果。这些电荷会感到一个切于该导线上的、大小等于每单位电荷为 vB 之力。沿横棒的长度 w 这力恒定，而在别处则都是零，因此力沿整个电路的积分为

$$\mathcal{E} = wvB,$$

这与上面从通量变率所获得的结果相同。

刚才所给出的论据可以推广至导线在固定磁场中移动的任一种情况。人们能够普遍证明：对于任一有部分移动于一固定磁场中的电路其电动势等于通量对时间的微商，不管该电路的形状如何。

反之，若回路固定不动而改变磁场，情况将会怎样呢？我们不能根据同一论据来导出对这一问题的解答。那是法拉第——从实验上——的发现，即不管通量怎样变化，该“通量法则”总是正确。作用于电荷上之力，普遍地说，是由 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 给出的；并没有任何新

的特殊的“由于正在改变磁场而产生之力”，任何作用于固定导线中的静止电荷上之力都是来自该 E 项。法拉第的观察导致发现电场和磁场是由一个新规律联系起来的：在一个其中磁场正在随时间发生变化的区域里，电场会产生。正是这一电场在驱使着电子绕行该导线——因而也就要对当有一变化磁通量时在一固定电路中的电动势负责。

关于联系到一变化磁场的电场其普遍定律为

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (17.1)$$

我们将称之为法拉第定律。它是由法拉第发现的，但首先是麦克斯韦将其写成一微分方程并作为他的方程组中之一条方程。让我们看一看这方程怎样给出电路中的“通量法则”。

利用斯托克斯定理，这一定律可以写成积分形式：

$$\oint_{\Gamma} E \cdot ds = \int_S (\nabla \times E) \cdot n da = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n da, \quad (17.2)$$

式中 Γ 照常指任一闭合曲线，而 S 则是由它所包围的任一曲面。这里应该记住， Γ 是一条固定于空间中的数学曲线，而 S 则是一个固定曲面。于是该时间微商就可以移至积分符号之外，而我们便有

$$\oint_{\Gamma} E \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot n da = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{穿过 } S \text{ 的通量}). \quad (17.3)$$

应用这一关系式于沿一个固定的导电电路而行的曲线 Γ ，我们便再度获得该“通量法则”了。左边的积分为电动势，而右边积分则是由该电路包围着的通量之负变率。所以应用在一个固定电路上的式(17.1)就相当于“通量法则”。

因此，“通量法则”——在一电路中的电动势等于穿过该电路的磁通量之变率——适用于或由磁场变化或由电路运动(或兼由两者)所引起的通量变化。在该法则的提法中有这样两种可能性——“电路移动”或“磁场变化”——不能加以区别。然而在我们对该法则的解释中，则对于这两种情况已用了两条完全不同的定律——在“电路移动”中用 $v \times B$ ，而在“磁场改变”中则用 $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ 。

我们知道，在物理学的其他领域里还没有一个这么简单而又准确的普遍原理竟需要从两种不同现象作出分析才能真正加以理解的。通常这么一个优异的普遍性总是发源于一个单一而又深刻的基本原理。然而，在我们这一情况下并不象有任何这种奥妙关系。因此，就只能作为两种完全独立的现象的混合效应来理解该“法则”。

我们必须按照下述方式来看待这“通量法则”。普遍地说，对每单位电荷所施之力为 $F/q = E + v \times B$ 。在移动导线时，有一个来自第二项之力。并且，如果某处有一正在变化着的磁场，则也有一 E 场。它们是两个独立效应，但环绕该导线回路的电动势则始终等于穿过其中的磁通量之变率。

§ 17-2 “通量法则”的一些例外

现在我们将举一些例子，其中部分起源于法拉第。这些例子表明，在你的心目中对负责感生电动势的那两种效应之间的差别加以辨别清楚，是十分重要的。下述例子将包括该“通量法则”不能够应用的一些情况——或者由于根本没有导线，或者由于感生电流所经路径是在一导体的广延领域中移动着的。

首先，我们指出如下一个要点：来自 E 场的那一部分电动势并不依赖于导线实体的存在。

請勿用於盈利之目的

在(如同 $v \times B$ 那部分就要有导线实体那样), E 场可以在自由空间中存在, 而它在空间环绕任一固定的想象曲线的积分就等于穿过该曲线的 B 通量之变率。(注意, 这与由静电荷所产生之 E 场大不相同, 因为在那种情况下环绕一闭合回路的 E 之线积分永远为零。)

现在我们将描述其中穿过电路的通量丝毫没有改变, 但却有一电动势的那种情况。图 17-2 表示一个可以在磁场存在的情况下绕一固定轴旋转的导电盘。其一个接触点落在轴上, 而另一个接触点则在该盘的外缘上擦过。通过电流计使该电路闭合。当盘旋转时, 该电路——意思就是在空间中有电流经过的那些地方——总是一样。但在盘中的那部分“电路”是在运动着的材料里。尽管穿过该“电路”的磁通量固定不变, 但仍然有一电动势, 正如由电流计的偏转所观察到的那样。很清楚, 这里就是其中 $v \times B$ 之力会在该转盘中产生一电动势, 但却不能令其等于通量变化的一种情况。

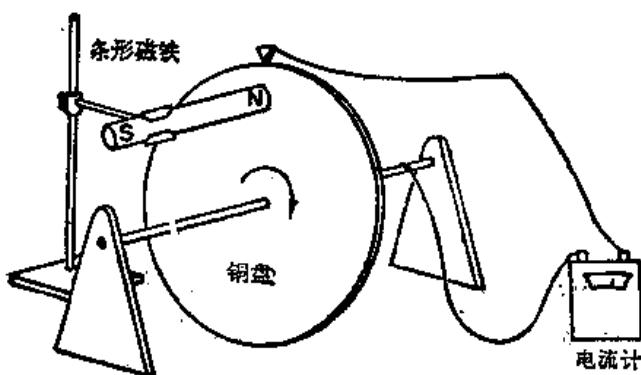


图 17-2 当金属盘旋转时, 有一个来自 $v \times B$ 的电动势, 但在被包围的通量中却没有什么变化

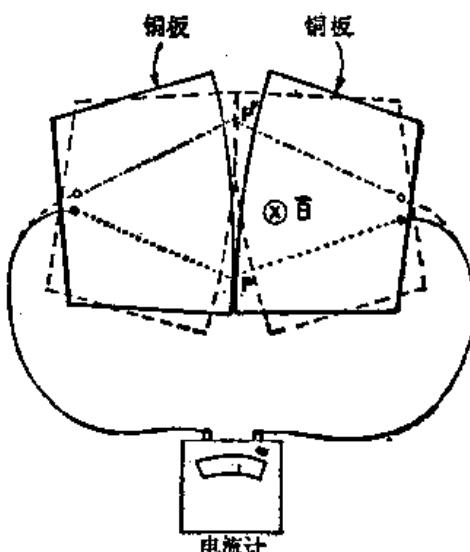


图 17-3 当两板在一匀强磁场中辗转而过时, 可以有巨大的磁通量变化, 但却没有电动势产生

现在作为一个相反例子, 我们将考虑一种稍为有点异常的情况, 即在其中穿过“电路”(又是指在有电流通过的那些地方)的磁通量发生了变化, 但却没有什么电动势。设想两块边缘稍为弯曲的金属板, 如图 17-3 所示, 这两块板被放在与其平面垂直的匀强磁场中。每一块板连接到电流计的一端, 示于图上。在两板之间有一接触点 P , 因而构成了一个闭合电路。如果现在两板辗转过一个小小角度, 接触点将转移至 P' 。如果设想该“电路”沿图中所示的那条虚线经两板而形成闭合, 则当两板往复辗转时穿过这一电路的磁通量变化就很大。然而这种转动却可由微小运动来完成, 从而 $v \times B$ 很小, 实际上就不会产生任何电动势。“通量法则”在此已不适用了。它必须应用于其中电路材料保持相同的那些电路。当电路的材料正在变化时, 就必须回到基本定律中去。正确的物理学总是由这两个基本定律给出的:

$$\underline{F = q(E + v \times B)},$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

§ 17-3 感生电场使粒子加速; 电子感应加速器

我们已说过, 由于改变磁场而产生的电动势即使在没有导体时也能存在; 这就是说, 没有导线也可以有电磁感应。我们仍然可以想象在空间里环绕任一数学曲线的电动势。它被定义为 E 之切向分量环绕该曲线的积分。法拉第定律申述, 这个线积分等于穿过该闭合曲

线的磁通量之变率，即式(17.3)。

作为这么一个感生电场效应的例子，我们现在要来考虑在一个变化着的磁场中电子的运动。想象有这么一个磁场，即在一个平面上处处都指向上，如图 17-4 所示。磁场是由一电磁铁产生的，但其细节我们将不予考虑。对于这一例子我们将设想磁场是对某一轴对称的，也就是说，磁场强度将仅取决于该点与轴间的距离。这一磁场也是随时间变化的。我们现在设想有一个电子在这磁场中沿以场的轴上一点为中心的恒半径圆周运动着。（我们迟些将看到，如何安排这一种运动。）基于改变着的磁场，就会有一个切于电子轨道的电场 E ，这将驱动电子环绕着该圆周。又由于对称性的缘故，这电场在圆周上各处将有相同之值。若电子轨道具有半径 r ，则 E 环绕其轨道的线积分将等于穿过该圆周内的磁通量之变率。 E 之线积分恰好就是它的大小乘以该圆周 $2\pi r$ 。一般说来，这磁通量应从一积分获得。眼下我们暂令 $B_{平均}$ 代表该圆周内的平均磁场；那么通量便是这平均磁场乘以该圆周面积。我们将有

$$2\pi r E = \frac{\partial}{\partial t} (B_{平均} \cdot \pi r^2).$$

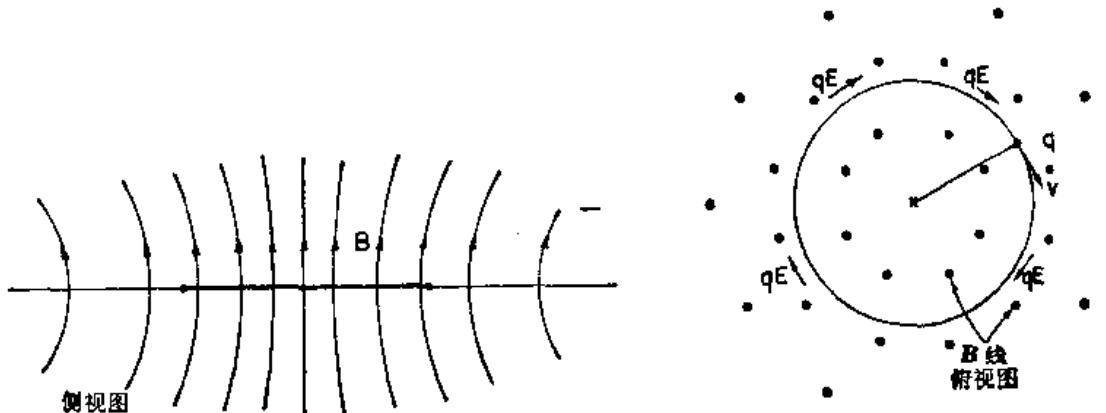


图 17-4 电子在一个轴对称的、随时间而变的磁场中被加速

既然假定 r 固定不变， E 便会与这一平均场的时间微商成正比：

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB_{平均}}{dt}. \quad (17.4)$$

电子将感觉到该电力 qE 并作加速运动。若想起有关运动的相对论性正确方程乃是动量变率正比于力，则便有

$$qE = \frac{dp}{dt}. \quad (17.5)$$

对于所已定的圆周轨道，电子所受的电力始终指向其运动方向，因而它的总动量便将按式(17.5)所给出的时率增加。结合(17.5)和(17.4)两式，我们便可将动量变率与平均磁场变率互相联系起来：

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2} \frac{dB_{平均}}{dt}. \quad (17.6)$$

对 t 进行积分，可得到电子的动量

$$p = p_0 + \frac{qr}{2} \Delta B_{平均}, \quad (17.7)$$

式中 p_0 乃电子出发时的动量，而 $\Delta B_{平均}$ 则是往后在 $B_{平均}$ 中的变化。电子感应加速器——

种用来把电子加速至高能的机器——的操作就是基于这一概念的。

为了详细看看这部电子感应加速器是怎样工作的，我们现在就必须审查如何才能把电子约束在一个圆周上运动。我们曾在第一卷第十一章中讨论过所牵涉到的原理。如果能够这样安排，使得在电子的轨道上有一磁场，则将有一横向力 $qv \times B$ ；对于一个适当选择的 B ，这个力就能够使电子保持在所预定的轨道上运动。在电子感应加速器中，正是这一横向力引起了电子在一半径固定的圆周上运动的。通过再度应用关于运动的相对论性方程，不过这回却是关于力的横向分量的，我们便能找出在该轨道上的磁场强度应有多大。在这电子感应加速器中（见图 17-4）， B 乃垂直于 v ，因而这横向力就是 qvB 。于是这个力就等于动量的横向分量 p_t 的变率：

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \quad (17.8)$$

当一粒子在一圆周上运动时，它的横向动量变率等于总动量的大小乘以转动角速度 ω （根据第一卷第十一章中的论证）：

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \quad (17.9)$$

其中，由于运动轨道是圆的，就有

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (17.10)$$

若令磁力等于动量变率的横向分量，便有

$$qvB_{\text{轨道}} = p \frac{v}{r}, \quad (17.11)$$

式中 $B_{\text{轨道}}$ 是在半径 r 处的磁场。

当电子感应加速器运行时，电子的动量会按照式(17.7)正比于 $B_{\text{平均}}$ 而增长。又倘若电子继续在其原有圆周上运动，则当其动量增大时式(17.11)仍应继续维持正确。 $B_{\text{轨道}}$ 之值就必须随动量 p 成比例地增大。将式(17.11)与确定 p 的式(17.7)作比较，我们便见到，在半径为 r 的轨道内的平均磁场 $B_{\text{平均}}$ 与在轨道上的磁场 $B_{\text{轨道}}$ 必须有如下关系：

$$\Delta B_{\text{平均}} = 2AB_{\text{轨道}}. \quad (17.12)$$

电子感应加速器的正确操作要求：在轨道内的平均磁场的增长率比在该轨道本身的磁场增长率要大一倍。在这种情况下，当粒子能量因受感生电场所促进而增加时，在轨道上的磁场的增长率便恰足以维持该粒子在一圆周上运动。

电子感应加速器是用来加速电子以达到几千万乃至几亿电子伏的能量的。然而，要把电子加速至远大于几亿电子伏的那种能量就有几个原因使它成为不切合实际的。原因之一是，要在该轨道内获得所需的高平均值磁场在实际上有困难。另一个原因则是，式(17.6)在能量高的情况下已不再正确，因为它并没有把由于粒子的电磁辐射（即在第一卷第三十四章中所称为同步加速器辐射的）而损失的能量包括在内。由于这些原因，要把电子加速至更高能量——达到几十亿电子伏——就得采用另一种称为同步加速器的机器来完成。

§ 17-4 一个佯谬

现在要来向你们描述一个显而易见的佯谬。佯谬指的是用这样分析会得出一个答案，而用那样分析又会得出另一个答案的那么一种情况，因而对于实际上究竟会发生什么我们

就会陷于多少是迷惑不解、左右为难的困境。当然，在物理学中从未有过任何真正的佯谬，因为实际上只有一个正确答案；至少我们相信自然界只按照一种方式动作（不用说，那是正确的方式）。因此，在物理学中佯谬只是我们本身理解上的一种混乱，下面是我们将要提出的一个佯谬。

试想象造成一部如图 17-5 所示的那种设备。有一个薄而圆的塑料盘被支撑在一根配有优良轴承的同心轴上，从而能够十分自由地旋转。在该盘上，与转轴同心地放着一个以短螺线管的形式出现的线圈。通过这个螺线管的稳恒电流 I 由一个同样是装在盘上的小电池组供应。靠近盘的边缘并在周边上彼此等距离地分布着的还有若干个小金属球，它们相互之间以及与螺线管之间均由制造该盘的塑料材料所绝缘。这些小导体球的每一个都各带有等量的静电荷 Q 。每件东西都完全固定，而盘则是静止不动的。假设现在由于某一偶发事件——或由于预先的安排——螺线管中的电流被中断了，然而却没有受到任何外界干扰。只要继续通电流，便有穿过该螺线管的多少是与盘轴平行的磁通量。当电流中断时，这通量一定会趋于零。因此，就必然会感生一电场，而这电场将环绕以该轴为中心的一些圆周。在盘的周边那些带电球体均将感到一个切于盘缘的电场。这一电力对于所有电荷来说都是指同一方向，因而将产生一个施于该盘上的净转矩。要是我们已知道盘的转动惯量、通进螺线管里的电流、以及在那些小球上的电荷，那我们就能够算出所得到的角速度的。

但我们也可轻易地作出一个不同论证。利用角动量守恒原理，我们可以说，盘及其一切附件的角动量在开始时为零，因而这整套的角动量就应该保持等于零。当电流中断时不应当有转动发生。究竟哪一种论证才是正确的呢？盘将转动或不转动？我们将把这一问题留给你们去思考。

必须提醒你们一点，正确的答案并不依赖于任何非根本性特征，诸如电池组的非对称位置等等。事实上，你可以想象一种有如下述的理想情况：该螺线管是由超导电导线绕成的，里面通有电流。在该盘已经小心翼翼地被安静置好之后，让螺线管的温度缓慢上升。当导线的温度达到介乎超导与正常导电之间的转变温度时，螺线管里的电流便将由导线的电阻引导到零。磁通量将如前降低至零，因而会有一个电场环绕着该轴心。我们也应该提醒你，这个解答不容易得到，也不是一种诡计。当你把它想出来时，你已经发现了一个重要的电磁学原理。

§ 17-5 交流发电机

在本章的其余部分我们将应用 § 17-1 节的原理来分析在第十六章中所曾讨论过的若干现象。我们首先要对交流发电机更详细地加以审察。这种发电机基本上包括一个在匀强磁场中转动的导线圈。这一结果也可由一固定线圈放在一个按上一章所描述的那种方法而使其方向旋转的磁场中得到。我们将仅仅考虑前一种情况。假设有一个圆形线圈可围绕其中一

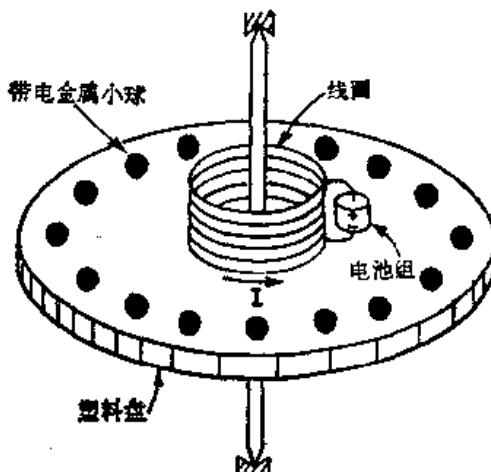


图 17-5 如果电流 I 停止了，该盘是否会转动？

一条直径作为转轴而旋转。让这个线圈安放在一个垂直于该转轴的匀强磁场之中，如图 17-6 所示。我们并且设想该线圈两端通过某种滑动触点被引至外电路中。

由于线圈转动，穿过它的磁通量便将发生改变。因此，在线圈所在的电路中就有一个电动势。令 S 为该线圈的面积^{*}，而 θ 为磁场与线圈平面的法线之间的交角。于是穿过线圈的通量就是

$$BS \cos \theta. \quad (17.13)$$

如果线圈是以一匀角速度 ω 旋转的，则 θ 会按照 $\theta = \omega t$ 随时间变化。这样，在该线圈中的电动势就是

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(\text{磁通量}) = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t),$$

或

$$\mathcal{E} = BS\omega \sin \omega t. \quad (17.14)$$

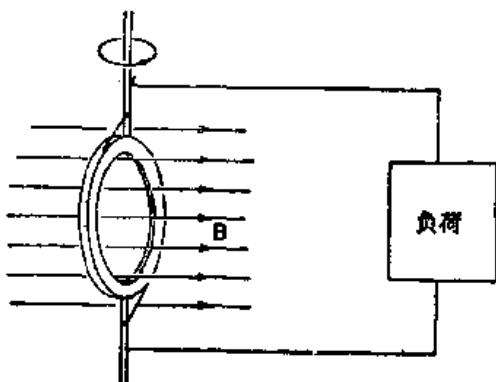


图 17-6 一个导线线圈在匀强磁场中旋转——交流发电机的基本原理
转——交流发电机的基本原理

相当远的地方，那里的磁场为零，或至少磁场已不随时间变化，那么在这个区域里 E 之旋度便将为零，而我们也就定义一个电势了。事实上，若没有电流从发电机中引出，则在该两导线间的电势差 V 会等于该旋转线圈中的电动势。这就是说，

$$V = BS\omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t.$$

两导线间的电势差正比于 $\sin \omega t$ 。象这样变化着的一个势差称为交变电压。

既然两导线之间存在电场，那它们就必然是带电的。显然，发电机的电动势已经把某些超额电荷推出至导线上，直到这些电荷产生的电场强大到足以抵消该感应力时为止。从发电机的外面看，两导线表现出似乎象静电场情况那样所带电荷已达到了电势差 V ，而电荷又似乎是随时间变化的，因而给出一个交变电势差。还有另一个与静电情况不相同之点如下：如果把发电机连接至一个容许电流通过的外电路中，我们便将发现该电动势并不允许导线放电，而是当电流从导线引出来时继续对导线供应电荷，企图使两导线之间永远保持一个不变的电势差。事实上，若发电机与一总电阻为 R 的电路连接，则流经该电路的电流将正比于发电机的电动势而反比于 R 。既然电动势有一个正弦式的时间变化，则电流也是一样，即有一个交变电流：

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t.$$

关于这一种电路的简图如图 17-7。

我们也能看到，电动势确定了由发电机供应的能量有多少。在导线中的每一电荷都以 $F \cdot v$ 的功率接受能量，其中 F 为施于该电荷上之力，而 v 为其速度。现在令每单位长度导线中的运动电荷数目为 n ，则对导线任一线元 ds 所交付的功率为

$$F \cdot v n ds.$$

对于一条导线来说， v 总是沿着 ds ，所以这功率可以写成

$$nvF \cdot ds.$$

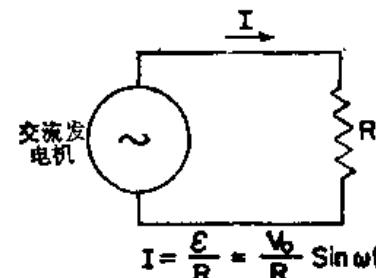


图 17-7 包括一部交流发电机和一个电阻的电路

* 现在由于字母 A 已被用于矢势了，我们就倾向于让 S 来代表一个表面积。

对整个电路提供的总功率等于这一表达式环绕整个回路的积分:

$$\text{功率} = \oint nqv F \cdot ds = \oint nqv \frac{F \cdot ds}{q} \quad (17.15)$$

现在应当记起, qv 就是电流 I , 而电动势则被定义为 F/q 环绕该电路的积分。因此就得到这么一个结果:

$$\text{发电机提供的功率} = \mathcal{E}I. \quad (17.16)$$

当发电机的线圈有电流通过时, 也将会有机械动作于其上。事实上我们知道, 作用于线圈上的转矩与其磁矩、磁场强度 B 、以及它们间的夹角之正弦都成正比。磁矩则等于线圈里的电流乘以线圈面积。因此该转矩就是

$$\tau = ISB \sin \theta. \quad (17.17)$$

为维持线圈转动所必须作的机械功其时率等于角速度 ω 乘以这一转矩:

$$\frac{dW}{dt} = \omega \tau = \omega ISB \sin \theta. = I \mathcal{E} \quad (17.18)$$

把上式和式(17.14)比较, 可见为了抵抗磁力而使线圈转动所必需的机械功其时率恰好等于 $\mathcal{E}I$, 也即发电机的电动势所输送出来的电能的时率。在发电机中, 用掉的全部机械能作为电能出现在电路上。

作为来自感生电动势的电流和力的另一个例子, 让我们分析在 § 17-1 节中曾描述过并如图 17-1 的那个设备中会发生的事情。那里有两根平行导线和一根滑动横棒置在一个垂直于该平行导线平面的磁场之中。现在让我们假设该 U 形之“底”(图中的左端)是由高电阻导线制成, 而那两根侧线则是由象铜一样优良的导体制成——于是我们就不必担心当横棒移动时电路的电阻会发生改变。和以前一样, 电路的电动势为

$$\mathcal{E} = vBw. \quad (17.19)$$

在电路中的电流与这一电动势成正比而与该电路的电阻成反比:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBw}{R}. \quad (17.20)$$

基于这一电流, 就会有一个施于该横棒上的磁力, 这力与棒的长度、通过棒中的电流、以及磁场均成正比, 即

$$F = BIw. \quad (17.21)$$

由式(17.20)取 I , 因而对于力便有

$$F = \frac{B^2 w^2}{R} v. \quad (17.22)$$

我们见到, 力与该横棒的速度成正比。正如你可容易明白的, 这个力的方向与棒的移动速度相反。这么一种象粘滞力那样的“速度正比”力, 每当在磁场中移动导体而产生感生电流时总会出现。在上一章中我们所给出的有关涡流的例子, 也会在导体中产生一些正比于导体速度之力, 尽管这样的情况, 一般说来, 都会给出难以进行分析的复杂电流分布。

在对机械系统的设计中, 有一些与速度成正比的阻尼力往往显出方便。涡流力提供一个获得这种速度依存力的最方便办法。应用这种力的一个例子就是那普通家用瓦时计。在瓦时计中有一个旋转于永磁铁两极间的薄铝盘。这个盘由一部小电动机推动, 其转矩与家庭电路中所消耗的功率成正比。由于在这个盘中的涡流力, 便会有一个正比于速度的阻力。因此, 当平衡时该速度便与电能消耗的时率成正比。利用一个连接于转盘上的计数器, 便能

对它的转数作出记录。这个数目就是关于总能量消耗，亦即所用去的瓦时数的指示。

我们也可以指出，式(17.22)表明来自感生电流之力——也就是任一个涡流力——均与电阻成反比。材料的导电性能越好，这力就越大。原因当然是由于电阻低，电动势所产生的电流就较强，而较强的电流又是代表较大的机械力。

从那些公式我们也可以看出，机械能是如何转变成电能的。和以前一样，对电路中电阻所提供的电能为 $\mathcal{E}I$ 这个积。当移动横棒时对其所作之功的时率，则为施于棒上之力乘以棒的速度。若利用关于力的式(17.22)，则作功的时率便是

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2 B^2 w^3}{R}.$$

我们见到，这确实等于由式(17.19)和(17.20)所该获得的积 $\mathcal{E}I$ 。机械功又一次表现为电能。

§ 17-6 互 感

现在考虑一种导线线圈固定而磁场在改变的情况。当我们过去描述由电流所产生的磁场时，仅考虑到稳恒电流的情况。但只要电流的变化缓慢，则在每一时刻的磁场就几乎与一稳恒电流的磁场相同。在这一节的讨论中，我们将假定电流总是足够缓慢地变化着使得这种情况保持正确。

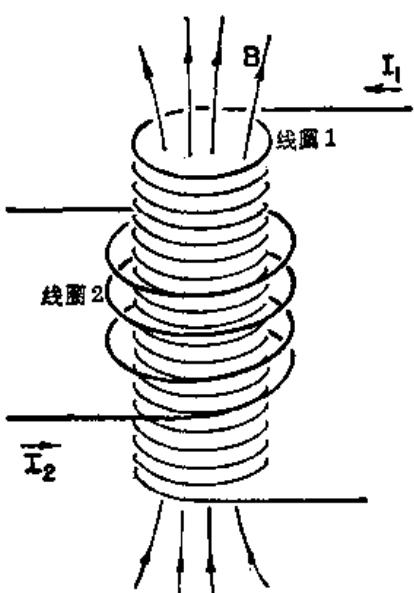


图 17-8 线圈 1 中的电流会产生一个穿过线圈 2 的磁场

促使变压器起作用的那些基本效应，可由图 17-8 所示那两个线圈的布置来加以演示。线圈 1 由绕成长螺线管形状的一根导线构成。在这个线圈外面——与之绝缘的——还绕上一个仅有几匝导线的线圈 2。现在，若电流通过线圈 1，我们知道在其内部将出现一磁场。这磁场也穿过线圈 2。当线圈 1 中的电流变化时，磁通量也起变化，从而将会在线圈 2 中感生一电动势。现在我们要算出这一感生电动势。

在 § 13-5 节中我们曾见到，在一长螺线管内磁场是均匀的，而其大小为

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^3} \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (17.23)$$

式中 N_1 为线圈 1 的匝数， I_1 为通过其中的电流，而 l 即为线圈长度。令线圈 1 的横截面积为 S ，那么 B 之通量就是它的大小乘以 S 。如果线圈 2 共有 N_2 匝，则这通量对线圈 2 环绕了 N_2 次。因而在线圈 2 中的电动势就由下式给出：

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}. \quad (17.24)$$

式(17.23)中，唯一随时间变化之量为 I_1 。因此电动势为

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.25)$$

我们见到，线圈 2 中的电动势与在线圈 1 中的电流变率成正比。该比例常数基本上是两线圈的一个几何因数，称为互感，而往往被记作 M_{21} 。于是式(17.25)便可以写成

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.26)$$

假设现在电流通过线圈2而要求得线圈1中的电动势。这就应该先算出磁场，那是处处与电流 I_2 成正比的。穿过线圈1的磁通匝连数会与几何形状有关，但同时又与 I_2 成正比。因此，在线圈1中的电动势再度正比于 dI_2/dt 。可以把它写成

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.27)$$

要算出 M_{12} ，比起刚才对于 M_{21} 所做的计算会困难一些。我们不打算现在就来进行计算，因为在本章往后一点将会证明 M_{12} 必然等于 M_{21} 。

由于任一线圈中的磁场总是与其电流成正比，因此对任两个线圈就会获得同一类型的结果。(17.26)和(17.27)两式具有相同形式；只是常数 M_{21} 和 M_{12} 不同罢了。它们之值应取决于两线圈的形状和它们的相对位置。

假设要找出任意两线圈——比如那些如图17-9所示的——之间的互感。我们知道在线圈1中的电动势其一般表式可写成

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a},$$

式中 \mathbf{B} 为磁场，而积分是要在由电路1所包围

的一个面上取的。在§14-1节中我们曾经见到，这样的一个对 \mathbf{B} 的面积分可以联系到对矢势的一个线积分。具体地说，

$$\int_{(1)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1,$$

式中 \mathbf{A} 代表矢势，而 $d\mathbf{s}_1$ 则是电路1中的一个线元。该线积分必须环绕电路1而取。因此，在线圈1中的电动势便可以写成

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1. \quad (17.28)$$

现在让我们假设在电路1处的矢势是来自电路2中的电流。那么这矢势便可以写成环绕电路2的一个线积分：

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \quad (17.29)$$

式中 I_2 代表电路2中的电流，而 r_{12} 则是从电路2中的线元 $d\mathbf{s}_2$ 至我们正在计算其矢势的电路1上那一点间的距离(见图17-9)。比较(17.28)和(17.29)两式，便可将电路1中的电动势表达成一个双重线积分：

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}.$$

式中的积分全都是对于固定电路取的。唯一与积分的变量无关的只有电流 I_2 。因此，我们可以把它提到两积分之外。于是电动势就可以写成

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

式中系数 M_{12} 为

$$M_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}. \quad (17.30)$$

从这一积分我们见到， M_{12} 仅取决于电路的几何形态，它依赖于两电路间的一种平均距离，

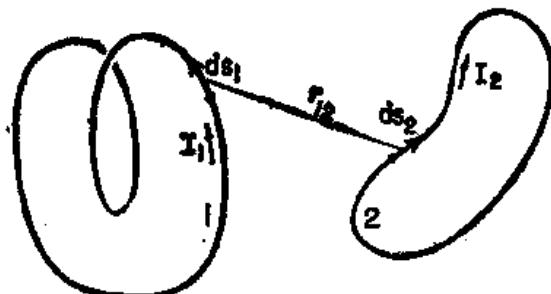


图17-9 任两个线圈都有与 $d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2/r_{12}$ 的积分成正比的互感 M

而在这个平均过程中对两线圈互相平行的那些节段加权最重。我们的式子可以用来计算两任意形状电路间的互感。并且，它表明对于 M_{12} 的积分与对于 M_{21} 的积分全同。因此，我们就已证明了该两系数是彼此全等的。对于一个只含有两线圈的系统，这两系数 M_{12} 和 M_{21} 常被表达成没有任何下角标的符号 M ，简单叫作互感：

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

§ 17-7 自 感

在对图 17-8 或 17-9 的两线圈中的感生电动势进行讨论时，我们仅仅考虑了电流只在其中一个线圈中流动的那种情况。如果两线圈中同时载有电流，则联系到每一线圈的磁通量就将是那些分开存在着的两通量之和，因为迭加定律对于磁场是适用的。因此，每个线圈中的电动势不仅正比于另一线圈中的电流变化，而且也正比于该线圈本身中的电流变化。于是，在线圈 2 中的总电动势就应当写成*

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} + M_{22} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.31)$$

同理，线圈 1 中的电动势将不仅依赖于在线圈 2 中的变化电流，而且也依赖于本身中变化着的电流：

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} + M_{11} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.32)$$

系数 M_{22} 和 M_{11} 都永远是负数，通常被写成

$$M_{11} = -L_1, \quad M_{22} = -L_2, \quad (17.33)$$

其中 L_1 和 L_2 分别称为两线圈的自感。

当然，即使仅有一个线圈，该自感的电动势依然存在。任一线圈本身总有一个自感 L ，电动势将正比于其中电流的变率。对于一个单独线圈，通常采取这样的惯例，即如果电动势与电流的方向相同，那它们就被认为是正的。按照这种惯例，我们可以把一个单独线圈的电动势写成

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (17.34)$$

负数指明该电动势反抗电流的改变——故常称为“反电动势”。

既然任一线圈都有一反抗电流改变的自感，该线圈里的电流就有一种惯性。事实上，如果想要改变线圈里的电流，就必须把线圈接至某一电池组或发电机的外电压源，如简图 17-10(a)所示的那样，来克服这一惯性。在这样一个电路中，电流 I 按照如下关系依赖于电压 V ：

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (17.35)$$

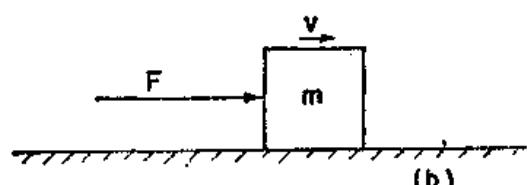


图 17-10 (a)含有一电压源和一自感的电路；(b)类似的机械系统

律具有相同形式。因此，我们可以按“同一方程总会有相同之解”的原则来对它进行研究。

这一方程与粒子在一维中运动的牛顿运动定

* 式(17.31)和(17.32)中 M_{12} 和 M_{21} 的符号取决于对该两线圈中正电流向指的任意选择。

这样,若使外加电压 V 对应于所施的外力,而线圈中的电流对应于粒子的速度,则该线圈的自感就会对应于粒子的质量 m^* . 看一看图 17-10(b). 我们可以编造一个关于各对应量的对照表:

粒子	线圈
F (力)	V (电势差)
v (速度)	I (电流)
x (位移)	q (电荷)
$F = m \frac{dv}{dt}$	$V = L \frac{dI}{dt}$
mv (动量)	LI
$\frac{1}{2} mv^2$ (动能)	$\frac{1}{2} LI^2$ (磁能)

§ 17-8 电感与磁能

继续上一节中所进行的比拟,我们就应该期待,对应于其变率等于外力的机械动量 mv ,就应有一个等于 LI 的类似量,其变率为 V . 当然,我们并没有任何权利去申明 LI 就是电路的真实动量;事实上,它并不是. 整个电路可能固定不动而没有任何动量. LI 与动量 mv 相类似只是在彼此都满足相对应的方程这一意义上说的. 同样,对于动能 $\frac{1}{2} mv^2$,也有一类似量 $\frac{1}{2} LI^2$ 与之对应. 但这里却使我们感到惊异,这 $\frac{1}{2} LI^2$ 在电的情况下的确就是能量. 这是因为作于电感上之功的时率为 VI ,而这即是力学系统中的对应量 Fv . 因此,就能量来说,那些量不但在数学上彼此对应,而且也具有相同的物理意义.

从下面所述情况我们可更详尽地明了这一点. 就象在式(17.16)中我们曾经得到的那样,由感应力所作之电功其时率为电动势与电流之积:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

将式(17-34)中以电流表达之 \mathcal{E} 代入,我们便有

$$\frac{dW}{dt} = -LI \frac{dI}{dt}. \quad (17.36)$$

对这一方程进行积分,便会找到在建立电流过程中所必须从外电源处获得用以克服自感电动势的能量** (这应等于所储存的能量 U) 为

$$-W = U = \frac{1}{2} LI^2. \quad (17.37)$$

因此,储藏于自感中的能量就是 $\frac{1}{2} LI^2$.

把与此相同的论据应用于诸如图 17-8 或 17-9 中的那一对线圈,就可以证明该系统的电能是由下式给出:

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2. \quad (17.38)$$

* 附带说一下,这并不是在力学量与电学量之间能够建立起对应关系的唯一途径.

** 目前我们忽略电流在线圈的电阻中变成了热的任何能量损耗. 这种损耗要求来自电源方面的附加能量,但不会改变那种加入于电感中的能量.

因为, 设两线圈中都从 $I=0$ 开始, 就尽可以先接通线圈 1 中的 I_1 , 让 $I_2=0$. 此时所作之功不过是 $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$. 但现在当接通 I_2 时, 就不仅在对抗电路 2 中的电动势上作了功 $\frac{1}{2} L_2 I_2^2$, 而且也作了附加之功 $M I_1 I_2$, 后者等于在电路 1 中对电动势 $[M(dI_2/dt)]$ 的时间积分, 再乘以现在已经存在于该电路中的恒定电流 I_1 .

假设现在想找出各带有电流 I_1 和 I_2 的任两个线圈之间的力. 我们起初也许预期, 可以通过取式(17.38)中的能量变化而应用虚功原理. 当然, 还必须记住, 当我们改变两线圈的相对位置时, 唯一变化之量乃是该互感 M . 这样, 我们也许会把虚功原理写成:

$$-F\Delta x = \Delta U = I_1 I_2 \Delta M \text{(错了).}$$

但这个式子却是错误的. 因为, 正如我们以前曾经见过的, 它只包括两线圈中的能量变化, 而没有包括为维持电流 I_1 和 I_2 保持恒定值的那些电源的能量变化. 现在我们能够理解这些源必须在线圈移动时供应能量以便抵抗在各该线圈中的感生电动势. 如果想要正确地应用虚功原理, 就必须把这些能量都包括进去. 然而, 正如我们曾经见到的, 可以取一捷径, 可回忆那总能量乃等于所称为 $U_{\text{机械}}$ 的“机械能”的负值, 再应用虚功原理. 因此, 我们可以把力写成:

$$-F\Delta x = \Delta U_{\text{机械}} = -\Delta U. \quad (17.39)$$

于是两线圈间之力便由下式给出:

$$F\Delta x = I_1 I_2 \Delta M.$$

这个两线圈系统的能量表式(17.38), 可以用来证明存在于两线圈间的互感 M 与其各自自感 L_1 和 L_2 间的一个有趣不等式. 十分清楚, 两线圈的能量总必须是正的. 如果把两线圈的电流从零开始增加到某些值, 则我们就在给该系统输入能量了. 要不然的话, 电流便会自发增加而同时又对世界其他部分释放了能量——一件看来绝不会发生的事情! 现在, 我们的能量表式(17.38)也同样可以写成如下形式:

$$U = \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2. \quad (17.40)$$

这只是一个代数变换式. 这个量对于任何 I_1 和 I_2 之值都必须始终为正. 特别如果 I_2 碰巧有这么一个特殊值

$$I_2 = -\frac{L_1}{M} I_1, \quad (17.41)$$

它仍应该是正的. 但有了这个 I_2 电流, 式(17.40)中的首项便是零. 如果能量一定是正值, 式(17.40)的末项就必须大于零. 因而要求有

$$L_1 L_2 > M^2.$$

这样, 我们就已证明了这么一个普遍结果: 两线圈之间的互感 M 必然会小于或等于该两自感的几何平均数. (M 本身是可正可负的, 这取决于对电流 I_1 和 I_2 所定的符号约定.)

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}. \quad (17.42)$$

M 与自感的关系常被写成

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}. \quad (17.43)$$

常数 k 称为耦合系数. 如果来自一个线圈的通量大部分贯穿另一个线圈, 则这耦合系数很接近于 1; 我们说该两线圈是“密耦合”的. 如果两线圈相距很远, 或由另外作出安排使得其互相串通的通量很少, 则这耦合系数接近于零, 而互感便很小了.

为计算两线圈的互感，我们曾经在式(17.30)中给出一个环绕两电路的双重线积分的公式。或许我们会想到，这同一公式本来应可通过对那两个线积分都环绕同一个线圈进行而获得一个单独线圈的自感。然而，这办法却行不通，因为在环绕两线圈而积分时，若两线元都落在同一点，则被积函数中的 r_{12} 将会趋于零。于是从这个式所得到的自感就会无限大。原因是这个公式乃是一种近似，只有当两电路的导线截面比起从一电路至另一电路的距离为小时才正确。很清楚，这样一种近似对于一个单独线圈并不成立。事实上，一个单独线圈的自感，当其中导线的直径变得越来越小时，确会按照对数函数方式而趋于无限大。

这样，我们就必须寻找另一种计算一个单独线圈的自感的方法。有必要将导线里的电流分布也计算在内，因为导线的大小是一个重要参数。因此，我们不应去追究一个“电路”的自感如何，而应去寻求若干块导体的分布之自感如何。也许找出这自感的最方便办法乃是利用磁能。我们以前在§15-3节中就曾找出过一个对稳恒电流分布的磁能表式：

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.44)$$

如果已知电流密度 \mathbf{j} ，便可以算出矢势 \mathbf{A} ，并进一步算出式(17.44)的积分而获得能量。这一能量等于自感的磁能，即 $\frac{1}{2} LI^2$ 。令这两方面相等便会提供我们一个关于自感的公式：

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.45)$$

当然，我们期望，自感乃是只与该电路的几何形状有关而与电路中的电流 I 无关的一个数值。公式(17.45)的确会给出这样一个结果，因为这个式中的积分与电流的平方成正比——电流有一次通过 \mathbf{j} 、又一次通过矢势 \mathbf{A} 而出现。这积分除以 I^2 便将与电路的几何形状有关而与电流 I 无关了。

关于电流分布的能量表式(17.44)，可以写成一个有时更便于计算的十分不同形式。并且，正如我们以后将见到的，那是一种重要形式，因为它的正确性会更普遍。在关于能量的公式(17.44)中， \mathbf{A} 和 \mathbf{j} 两者都可以联系到 \mathbf{B} ，因而也就可以指望把这能量用磁场来表达——就象过去我们能够把静电能同电场联系起来似的。我们要由引用 $\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ 来代替 \mathbf{j} 开始。但不能那么容易地代替 \mathbf{A} ，因为 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 并不能颠倒过来以用 \mathbf{B} 表达 \mathbf{A} 。但无论如何，总是可以写出

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.46)$$

有趣的是——附带一些限制条件——这一积分可以写成

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV. \quad (17.47)$$

为看出这一点，我们将其中一个典型项详细写出。假设由存在于式(17.46)的积分中取出 $(\nabla \times \mathbf{B})_{xy} A_z$ 这么一项。将其所含各部分写出，便得

$$\int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz.$$

(当然，还有两个相类似的积分。)现在就第一项对 x 进行积分——采用分部积分法。这就是说，我们可以有

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} dx.$$

請勿用於盈利之目的

现在假定我们的系统——指各源及各场——乃是有限大的，因而在无限远处所有之场就都趋于零。这样，若那些积分都是对全部空间进行的，则在积分限上该 $B_y A_z$ 项将会给出零值。剩下的就只有 $B_y (\partial A_z / \partial x)$ 那一项，这显然是 $B_y (\nabla \times A)_z$ 的一部分，因而也就是 $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ 的一部分。如果你又算出那其余五项，就将看到式(17.47)的确与式(17.46)等效。

但现在我们可用 \mathbf{B} 来代替 $\nabla \times \mathbf{A}$ ，因而获得

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (17.48)$$

上式已经把一静磁情况的能量仅用磁场来表达。这一表式紧密地对应于我们以前曾经对静电能所得到的公式：

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (17.49)$$

之所以强调这两个能量表式，其中的一个原因是，有时它们更便于应用。而更为重要的是，事实证明，对于动态场（当 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都随时间变化时）这两个表式(17.48)和(17.49)都仍保留正确，而以往关于电能和磁能所曾给出的其他公式则不再正确——它们仅适用于静态场。

如果对一单独线圈的磁场已经了解，则可以通过令式(17.48)的能量表式等于 $\frac{1}{2} L I^2$ 而找出自感。让我们通过找出一段螺线管的自感来看看这是如何得来的吧。以前曾见过螺线管里的磁场是均匀的而管外之 \mathbf{B} 则为零。管内磁场的大小为 $B = nI/\epsilon_0 c^2$ ，其中 n 为每单位长度的绕线匝数，而 I 则为电流。如果该线圈的半径为 r 而其长度为 l （我们设想 l 十分长，也即 $l \gg r$ ，从而可以忽略端效应），则管内的体积为 $\pi r^2 l$ ，因而磁能就是

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 \cdot (\text{体积}) = \frac{n^2 I^2}{2\epsilon_0 c^2} \pi r^2 l,$$

这会等于 $\frac{1}{2} L I^2$ ，也即

$$L = \frac{\pi r^2 n^2}{\epsilon_0 c^2} l. \quad (17.50)$$

麦克斯韦方程组

§ 18-1 麦克斯韦方程组

本章我们将回到第一章作为我们起点的那四个式子的麦克斯韦方程组。到目前为止，我们已经零碎地研究过麦克斯韦方程组；现在是把最后一部分加进去，并将其全都拼合起来的时候了，然后才会出现一个关于随时间可能作任何形式变化的电磁场的完整而又正确的描述。在这一章中所谈到的而又与以前发生矛盾的都以本章为准，以前所谈到的则都是错误的——因为以前所论述的只适用于诸如稳恒电流和固定电荷那样一些特殊情况。尽管过去当我们每写出一个方程时总是十分细心地指出一些限制条件，但这一切条件仍很容易被忽略了，从而对那些错误方程掌握得太好了，现在我们准备给出全部真理，而不附带（或几乎没有）任何限制条件。

整套麦克斯韦方程组列如表 18-1，其中包括语言和数学符号两种表达方式。语言与方程式等效这一事实从现在就应该熟悉它——你应当能够从一种形式顺利地变换到另一种形式。

表 18-1 经典物理学

麦克斯韦方程组：	
I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	（穿过一闭合面的 \mathbf{E} 之通量）=（面内电荷）/ ϵ_0
II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	（环绕一回线的 \mathbf{E} 之线积分）= $-\frac{\partial}{\partial t}$ （穿过该回线的 \mathbf{B} 之通量）
III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	（穿过一闭合面的 \mathbf{B} 之通量）= 0
IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	c^2 （环绕一回线的 \mathbf{B} 之积分）= 穿过该回线的电流 / ϵ_0 + $\frac{\partial}{\partial t}$ （穿过该回线的 \mathbf{E} 之通量）
电荷守恒 [$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	（穿过一闭合面的电流通量）= $-\frac{\partial}{\partial t}$ （面内电荷）]
力律：	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
运动定律：	$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}$, 其中 $\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (经爱因斯坦修正过的牛顿定律)
引力：	$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$

第一个方程—— \mathbf{E} 之散度等于电荷密度除以 ϵ_0 ——是普遍正确的。无论对于动态场或静态场，高斯定律永远正确。穿过任一个闭合面的 \mathbf{E} 之通量与面内电荷成正比。第三个方程是关于磁场方面与此相对应的一般定律。由于不存在磁荷，所以通过任一闭合面的 \mathbf{B} 之通量总是等于零。第二个方程，即 \mathbf{E} 之旋度为 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，这就是法拉第定律，我们在前面两章中已经讨论过了，它也是普遍正确的。最末一个方程含有某种新的东西。以前我们只看到对稳恒电流才适用的那一部分。在那种情况下，我们曾经说过 \mathbf{B} 之旋度为 $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ ，但该普

遍正确的方程则还带有一个由麦克斯韦所发现的新项。

在麦克斯韦完成其工作以前，电和磁方面的已知定律就是从第三章至第十七章中我们所曾学习过的那些。特别是，关于稳恒电流的磁场之方程仅仅知道为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.1)$$

麦克斯韦开始考虑这些已知定律并将其表达成微分方程，正如我们这里曾经做过的那样。（虽然当时 ∇ 这一符号尚未发明，但今天我们所称之为旋度和散度的那些微商结合式主要就是通过麦克斯韦才首次显示其重要性的。）后来他又注意到式(18.1)有某些奇怪之处。如果我们取这一方程的散度，左边将是零，因为一个旋度的散度始终等于零。所以这一方程要求 \mathbf{j} 之散度也是零。但如果 \mathbf{j} 之散度为零，则从任一闭合面跑出来的电流之总通量也将是零。

来自一闭合面的电流通量等于在该面内电荷的减少。一般地说，这肯定不得为零，因为我们知道电荷可以从一处移至另一处。事实上，方程

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.2)$$

几乎已是我们关于 \mathbf{j} 的定义了。这一方程表明电荷守恒这一最基本定律——任何电荷流动都必须来自某一供应处。麦克斯韦认识到这一困难，并建议通过加进 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 这一项于式(18.1)右边来加以避免；于是他就得到了表 18-1 上所列的那第四个方程：

$$\text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

在麦克斯韦时代人们还不习惯于用抽象的场来进行思考。麦克斯韦曾利用真空好象是一弹性固体的那种模型来讨论他的概念。他也尝试过用这一机械模型来解释他的新方程的意义。当时对接受他的理论存在不少阻力，首先是由于他的模型，而其次则是由于起初尚未有任何实验能予以证实。今天，我们更好地了解到，只有那些方程本身才算数，而并不是用来获得它们的那种模型。我们可以仅仅质问那些方程是正确还是错误。这要通过做实验来回答，而无数实验都已证实了麦克斯韦方程组。如果把他用以建立他的大厦的架子搬开，我们将见麦克斯韦的华丽大厦本身仍巍然屹立。他把所有关于电学和磁学的定律都结合在一起而形成一套完整而又漂亮的理论。

让我们来证明这一附加项正好是为澄清麦克斯韦所发现的那一困难所必需的。如果对他的方程(表 18-1 上的式 IV)取散度，那右边的散度就应为零：

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (18.3)$$

第二项中对坐标与对时间取微商的次序可以对调，因而该方程便可重新写成

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (18.4)$$

但麦克斯韦方程组中的第一个方程已经申述， \mathbf{E} 之散度为 ρ / ϵ_0 。将这一等式代入式(18.4)中，我们便又回到式(18.2)，那明知是正确的。反过来，若接受麦克斯韦方程组——事实上，我们行将接受，因为没有任何人曾发现过一个与那些方程不相符合的实验——则我们便应该断定，电荷总是守恒的。

物理规律不能回答下述问题：“如果电荷在某处突然产生，那将会出现什么——有哪一

些电磁效应该会发生？”对此不能提供任何答案，因为我们的方程组申述，上述情况是不会发生的。要是它真的发生的话，便需要一些新的定律，但我们无法讲明这些定律该会怎么样。因为还未有机会去观察一个电荷不守恒的世界将会怎样行动。按照我们的那些方程，如果你突然将一电荷放在某一点上，那你一定是从别处带到那里去的。在这种情况下，你就能够说出将会发生什么了。

当我们过去添加一新项于 \mathbf{E} 之旋度之上时，就已发现有一整串新型现象可以得到说明。我们即将见到，麦克斯韦对 $\nabla \times \mathbf{B}$ 那个方程的一个小小附加也具有深远后果。在本章中，对这些后果我们只能提及其中的几个。

§ 18-2 该新项是怎样工作的

作为第一个例子，我们要考虑一个具有球形对称的径向电流分布会发生的情况。我们设想有一个其中装有放射性材料的小球，从这一放射性材料会迸射出一些带电粒子来。（或者也尽可以设想有一大块胶体在其中心处用一支皮下注射针注入了一些电荷并从那里慢慢地渗漏出来。）在这两种中的任一种情况下，我们都具有处处沿径向而流出的电流。下面将假定，这一电流的大小在各不同方向上都相同。

令在任一半径 r 之内的总电荷为 $Q(r)$ 。如果在该同一半径处径向电流密度为 $j(r)$ ，则式(18.2)要求 Q 减少的时率为

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (18.5)$$

现在我们要问，在这一情况下由电流所产生的磁场如何。假设在半径为 r 的球面处画出某一条回线 Γ ，如图 18-1 所示。这样就有一些电流会穿过该回线，因而也许可以期望会找出一个象在图上所示的沿那个环流方向的磁场来。

但这样我们就处于困难之中了。 \mathbf{B} 如何能在该球面上有任一特殊方向呢？对 Γ 的另一种选择将会容许我们去断定它的方向恰恰与所示的相反。所以怎么能够有环绕着那些电流的 \mathbf{B} 之环流呢？

幸而麦克斯韦方程救了我们。 \mathbf{B} 之环流不仅取决于穿过 Γ 的总电流，而且也取决于穿过它的电通量对时间的变率。一定是这两部分刚好互相抵消。让我们来看看是否确是这样。

在半径为 r 处的电场应该是 $Q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$ ——只要如我们所假定的，电荷乃球对称地分布着的。它沿着径向，而其变率则为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (18.6)$$

将此式与(18.5)比较，我们便看到在任一半径上

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \quad (18.7)$$

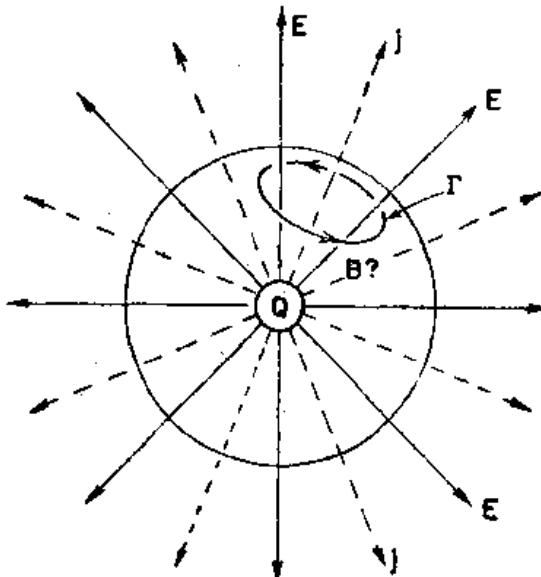


图 18-1 一个具有球形对称的电流，其磁场如何？

方程 IV 中那两个源项互相抵消了, 因而 \mathbf{B} 之旋度就永远为零. 在我们的例子中, 是不会有磁场的.

作为第二个例子, 我们考虑一根对平行板电容器充电的导线的磁场(见图 18-2). 如果板上的电荷随时间变化(但不要变化得太快), 则导线里的电流便会等于 dQ/dt . 我们期待这电流将产生一个环绕着该导线的磁场. 肯定地说, 在载流导线的周围附近将产生一个正常磁场——它不可能依赖于电流将流向何处.

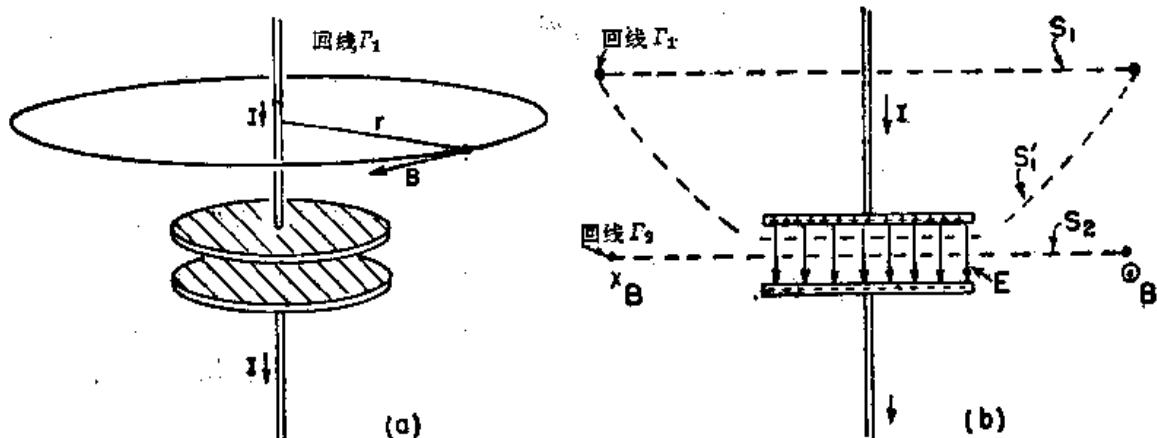


图 18-2 在一个正在充电的电容器附近的磁场

假定选取一条回线 Γ_1 , 那是一个如图(a)所示的半径为 r 的圆周. 磁场的线积分就应等于电流 I 除以 $\epsilon_0 c^2$. 即是

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.8)$$

这是对于稳恒电流所应该获得的, 不过在加上麦克斯韦的附加项之后它仍然正确, 因为如果我们考虑那个圆周内的平面 S , 在该面上将不会有电场(假定那条导线是十分优良导体). 关于 $\partial E / \partial t$ 的面积分就是零.

然而, 假设现在慢慢地把曲线 Γ 向下移动. 那我们得到的结果仍然不变, 直至电容器的极板水平为止. 此时电流 I 变为零. 是否磁场就消失了呢? 这将会是十分奇怪的. 让我们来看看, 对于那条其平面通过电容器两板之间而其半径为 r 的圆形回线 Γ_2 [图 18-2(b)], 麦克斯韦方程对此将作何解释. 环绕 Γ_2 的 \mathbf{B} 之线积分为 $2\pi r B$. 这应等于穿过该圆面 S_2 的 \mathbf{E} 之通量的变率. 这个 \mathbf{E} 通量, 我们从高斯定律得知, 应等于 $1/\epsilon_0$ 乘以电容器每一板上的电荷. 于是就有

$$c^2 2\pi r B = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (18.9)$$

那很方便. 它就是我们在式(18.8)中曾经得到的同一结果. 对变化着的电场取积分与对在导线里的电流取积分会给出同一个磁场. 当然, 这恰好就是麦克斯韦方程所申述的. 对于图 18-2(b)所示的由同一回线 Γ_1 所包围着的两个面 S_1 和 S'_1 , 只要通过应用与上述相同的论据便很容易看出永远应该如此. 穿过 S_1 的会有电流 I , 但却没有电通量. 而穿过 S'_1 的则没有电流, 但却有一个以 I/ϵ_0 的时率变化着的电通量. 如果应用方程 IV 于这两个面中之一, 就都会得到同一个 \mathbf{B} .

从我们迄今对麦克斯韦的新项的讨论, 你可能会觉得有了它并没有增加多少东西——它只是把方程组安排得符合于我们所已经预期的结果. 诚然, 若只是孤立地考虑方程 IV,

就不会发现任何特别新鲜的东西。然而，“孤立地”这个词却十分重要。麦克斯韦在方程 IV 中的那个小小改变，当它与其他的方程结合起来时，就确会产生不少全新的而又重要的东西。然而，在考虑这些事情之前，我们将要对表 18-1 再议论一下。

§ 18-3 都属于经典物理学

表 18-1 列举了我们所熟悉的全部基本经典物理学，即在 1905 年以前就已知道的那种物理学。这里将其全都列在一个表上。有了这些方程，我们便能理解经典物理的整个领域。

首先，我们拥有麦克斯韦方程组——写成扩充形式和简短的数学形式两种。然后就有电荷守恒律，那甚至是写在方括号之内的，因为一旦我们有了完整的麦克斯韦方程组，就能够由其导出电荷守恒律了。所以该表甚至还稍为有点多余。其次，我们已写出了该力律，因为尽管有了电场和磁场仍不会告诉我们任何东西的，直到我们知道了它们对于电荷起着什么作用。可是，若知道了 E 和 B ，我们就能找出对一个带有电荷 q 而以速度 v 运动着的物体所施之力了。最后，虽然有了力，还未能对我们说出个什么，除非我们知道了当力推动某一件东西时会发生的事情；我们需要运动定律，那就是力等于动量的变率。（能记起吗？我们早在第一卷中就已经有了。）我们甚至通过把动量写成 $p = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 而将相对论效应也包括了进去。

如果真正希望完备无缺的话，就仍须再加上一个定律——牛顿的引力定律——所以我们将其放在该表之末。

因此，在一个小小的表中，我们就已具备了所有属于经典物理学的基本定律——有的地方还用语言写出，其中有一些甚至是多余的。这是一个伟大时刻。我们已爬上了一座高峰，在到达了 K-2 高峰之上——正在准备攀登珠穆朗玛峰，那就是量子力学。我们已登上了“落基山脉分水岭”的那个高峰，而现在能够从山的那边落下去了。

上面主要是试图学习如何去理解那些方程式。现在我们已有了凑在一起的整个东西，正在研究这些方程具有何等意义——它们会说出还未为我们见过的那些新东西。为到达这一点，我们已付出了辛勤劳动，作出了巨大努力。而现在当我们见到这一成就的全部结果时，马上就要沿着下坡的道路悠闲地滑下去了。

§ 18-4 行 移 场

现在就来谈谈一些新的结果，它们发源于将所有麦克斯韦的几个方程都凑合在一起。首先，让我们看看在一个我们选定为特别简单的情况下会发生的事态。假定所有之量都仅在一个坐标上变化，我们的问题就变成一个一维问题了。这样的情况示如图 18-3，我们具备一个置于 yz 平面上的电荷片。该片起初是静止的，然后突然得到一个平行于 y 轴的速度 v ，并保持以这一恒速度运动。你也许会担心已有了这么一个“无限大”的加速度，但那实际上不要紧；只要想象该速度很快就提高到 v 。因此，我们突然就有一个面电流 J (J 是在 z 方向上每单位宽度的电流)。为了保持问题简单，我们假定还有一片固定的异号电荷迭加在 yz 面之上，使得不会发生任何静电效应。并且，虽然在图上我们仅仅表明，在一个有限区域里所发生的情况，但应该想象该片伸展至 $\pm y$ 和 $\pm z$ 的无限远处。换句话说，我们有这么一种情况，即原本没有电流，但突然有了一个均匀电流片。这样将会发生什么呢？

噢！当在正 y 方向上有一片电流时，如我们所知，对 $x > 0$ 的地方就会产生一个沿负 z

方向的磁场而对 $x < 0$ 则是沿相反方向。我们尽可以通过应用磁场的线积分会等于电流除

以 $\epsilon_0 c^2$ 这一事实来找出 \mathbf{B} 之大小。这样，就将得到 $B = J / 2\epsilon_0 c^2$ (因为在宽度为 w 的条片上，电流 I 就是 Jw ，而 \mathbf{B} 的线积分则为 $2Bw$)。

这向我们提供了在该片附近——即对于小 x 值——的磁场，但由于我们所设想的乃是一个无限大的片，因而也就该期望这同一论据应当给出在较大 x 值即在较大距离上的磁场。可是，这就意味着，一旦接通电流，磁场会突然处处从零变到一个有限值。但请等一下！如果磁场突然改变，也会产生巨大的电效应。（只要反正它在改变，就总会

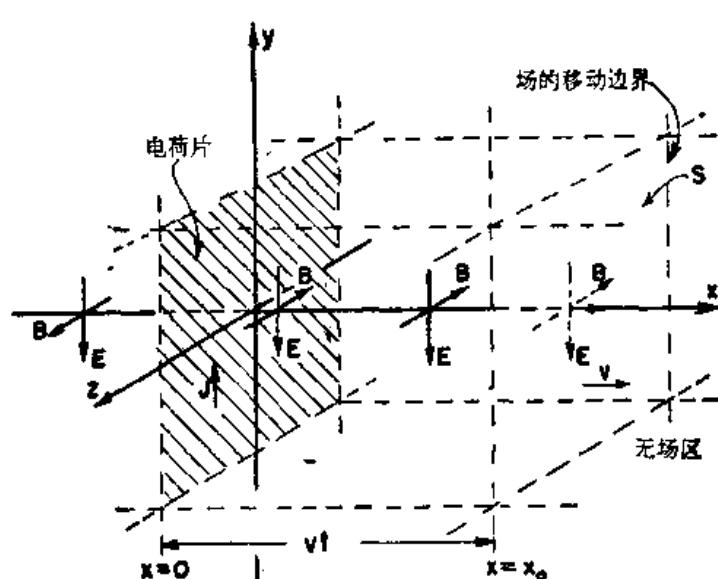


图 18-3 一个无限大电荷片突然被驱使平行于其本身运动。这样就会有磁场和电场从该片以一恒速率传播出去

有电的效应。)因此，由于移动了该电荷片，我们便会造成一个变化着的磁场，因而电场也一定会产生。如果有电场产生，则它们该从零开始而变化至某一个量值。这样就将有一些 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ，与电流 \mathbf{J} 合在一起，对磁场的产生均会作出贡献。因此，通过各个方程式就有大量的交相混合，从而使我们不得不试图同时解答所有一切之场。

如果仅仅考察麦克斯韦方程组，还不容易直接看出如何去求得解答。因此，首先就要向你们说明该答案是什么，然后才证实它的确满足了那些方程。答案是这样的：上面我们所算出的 \mathbf{B} 场，实际上确是在该电流片附近（即对于小 x 值）产生的。一定就是这样，因为如果作一个小回线以环绕该片，总不会有任何地方可供电通量穿过的。但是在较远—— x 较大——处的 \mathbf{B} 场起初为零。它保持了片刻为零，然后便突然增大。总之，我们接上了电流，而附近的磁场就会升高至一恒定值 \mathbf{B} ；然后这个 \mathbf{B} 的开动又从源区再度扩展出去。经历了某一段时间后，在某一 x 值之内就将处处有一个均匀强磁场，在更远的地方则都等于零。由于对称的缘故，它会朝着正的和负的两个 x 方向扩展出去。

\mathbf{E} 场也与此一样。在 $t=0$ （当我们开动电流时）之前，场处处为零。然后在经历了时间 t 之后， \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 两者在达到距离 $x=vt$ 之内都是均匀的，而再往外则均为零。这些场象波浪一样向前扩张，其波前以一匀速前进，这速度最终将弄清楚是 c ，但暂时我们却只叫它做 v 。关于 \mathbf{E} 或 \mathbf{B} 的大小对

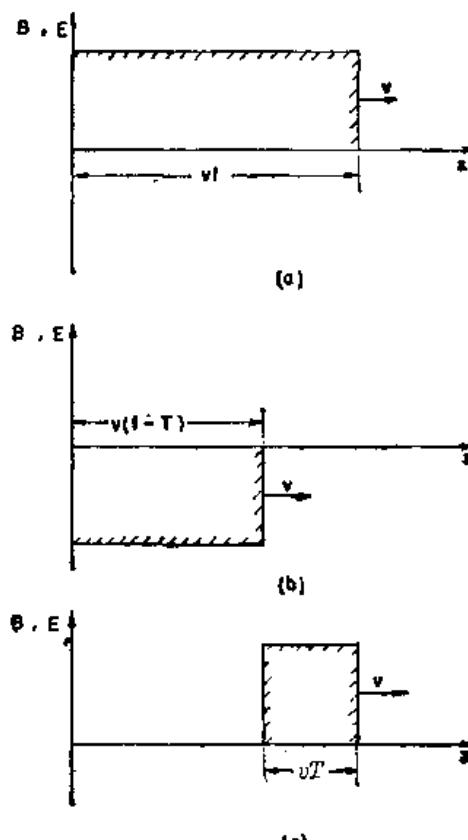


图 18-4 (a) 在电荷片已经动了之后，在 t 时刻作为 x 函数之 \mathbf{B} (或 \mathbf{E}) 的大小；(b) 在 $t=T$ 时才将一电荷片朝着负 y 方向移动后之场；(c) 这是(a)与(b)两者之和

x 所作的曲线，正如在 t 时刻所表现的，示如图 18-4(a)。再回顾一下图 18-3，在 t 时刻，在 $x = \pm vt$ 的区域内都“充满”着场，但这些场却还未到达更远的地方。这里要再次强调，我们是在假定该电流片、以及由此产生之场 E 和 B ，都是在 y 和 z 方向上伸展出至无限远的。（我们不能够画出一张无限大的片，因而图中所示的只是在一个有限大范围内所发生的事情。）

现在，我们要对所发生的情况作定量分析。为此，就必须考察两个截面图，一个是沿 y 轴向下的俯视图，如图 18-5 所示；另一个则是沿 z 轴往回望的侧视图，示如图 18-6。我们从该侧视图开始，就会见到该电荷片正在向上移动；在 $+x$ 各处磁场都指向书内，而在 $-x$ 各处磁场则指向读者。电场就都处处向下——一直伸展至 $x = \pm vt$ 处。

让我们看看这些场是否符合麦克斯韦方程组。首先，画出一条供计算线积分用的回线，

比如说图 18-6 中所示的那个矩形 Γ_2 。你该会注意到，这矩形之一边落在有场的区域内，但另一边却落在场还没有到达的地方。有一些磁通量穿过这一回线。如果这通量正在变化着，则环绕该回线就应有一电动势。如果波前正在前进，就会有一个变化着的磁通量，因为 B 所存在的区域正在以速度 v 逐渐扩大。在 Γ_2 之内的通量等于 B 乘以存在磁场

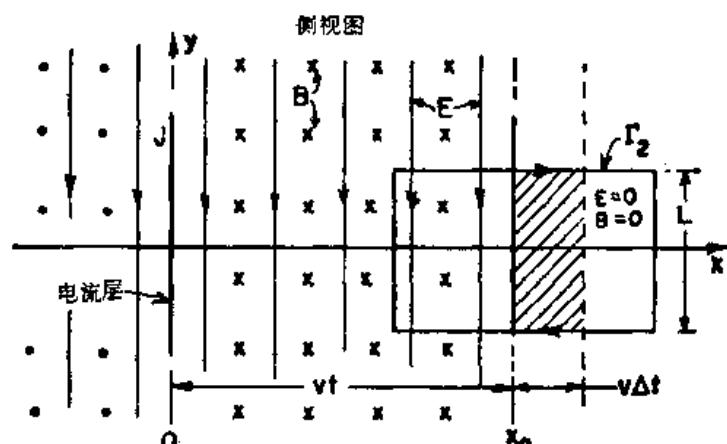


图 18-5 图 18-3 的俯视图

的那一部分面积。由于 B 之大小恒定，通量的变率就会等于该量值乘以面积的变率。要获得面积的变率挺容易。若该矩形的宽度为 L ，则其中有 B 存在的面积在时间 Δt 内将改变 $Lv\Delta t$ 。（见图 18-6。）于是通量的变率便是 BLv 。按照法拉第定律，这应等于环绕 Γ_2 的 E 之线积分，而那恰好就是 EL 。于是我们就有这么一个式子：

$$E = vB. \quad (18.10)$$

因此，若 E 对 B 的比率为 v ，则我们所假设的这些场便将满足法拉第方程。

但那不是唯一的方程；我们还有联系着 E 和 B 的另一个方程：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (18.11)$$

为运用这一方程，要看看图 18-5 的那个俯视图，我们已经知道，这一方程将提供靠近该电流片的 B 值。并且，对于任一条画在该片之外但在波前之后的回线，就不会有 B 之旋度或 \mathbf{j} 或变化中之 \mathbf{E} ，因而方程(18.11)在那里是正确的。现在让我们来看看对于示如图 18-5 的

那条与波前相交的回线 Γ_1 所发生的事情。这里并没有电流，因而方程(18.11)可以——用积分形式——写成

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{在 } \Gamma_1 \text{ 之内}} \mathbf{E} \cdot n da. \quad (18.12)$$

\mathbf{B} 之线积分恰好就是 B 乘以 L 。 \mathbf{E} 通量的变率仅仅来自该前进着的波前。在 Γ_1 之内，其中 \mathbf{E} 不为零的面积正在以 vL 的速率增大着。于是(18.12)的右边就是 vLE 。该方程式便变成

$$c^2 B = E v. \quad (18.13)$$

我们有这么一个解：即在波前后面 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 都是恒量，它们各与波前行进的方向垂直而且彼此之间也互相垂直。麦克斯韦方程组规定了 E 对 B 的比率。根据式(18.10)和(18.13)，便有

$$E = vB \quad \text{和} \quad E = \frac{c^2}{v} B.$$

可是请等一等！我们已找到了两个不同的 E/B 比值。刚才所述的这种场能否确实存在呢？当然，要使这两个式都正确，只能有一个速度 v ，也即 $v=c$ 。波前一定要以速度 c 前进。这样我们就有一个其中来自电流的电效应是以某一有限速度 c 传播着的例子。

现在试问，如果在经历了一段短时间 T 之后，突然把电荷片的运动停下来，那该会发生什么情况呢？对此我们能够应用迭加原理来看出会发生什么事情。我们遇到过电流原来为零，然后才突然发动的那种情况。并且已知道了那种情况之解。现在让我们来加上另一电场。即取另一片电荷，并仅在发动了第一个电流而又过了 T 时间之后，才在相反的方向上以同一速率突然开始移动。这两者相加起来的总电流就是起初为零，然后接通了一段时间 T ，之后又再中断——因为两电流恰好互相抵消，于是我们就具备了一个电流的方形“脉冲”。

这一新的负电流产生了与正电流相同的场，只是所有的符号都反过来，而且当然都延迟了时间 T 。又再有一个波前以速度 c 行进。在 t 时刻它已到达了 $x = \pm c(t-T)$ 的距离，如图 18-4(b) 所示。因此，就有两“块”场以速率 c 向外推进，正如图 18-4 的(a) 和 (b) 两部分所示的，至于联合场则示如图(o)。在 $x > ct$ 处场为零，在 $x = c(t-T)$ 与 $x = ct$ 之间场为恒量（具有我们在上面所曾找到之值），而在 $x < c(t-T)$ 处场又是零。

总之，我们有一小块场——厚度为 cT 的一块——离开了该电流片而独自穿越空间奔跑。场已经“起飞”了；它们正在自由地跨越空间而传播着。毛虫已变成了蝴蝶！

这束电磁场如何能维持它本身的呢？答案是：依靠法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 和麦克斯韦新项 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$ 的联合效应。它们不得不维持其本身的生存。假定磁场即将消失，那就会有一个变化着的磁场，而这又会产生一个电场了。如果这一电场又要消逝，则这变化着的电场将再度产生磁场。因此，通过不断的相互作用——由一个场不断地变成另一个场——它们就一定会永远继续存在下去，而绝不会消逝*，它们以一种舞蹈方式——一个搂着另一个，第二个又搂着第一个——穿越空间而向前传播。

§ 18-5 光速

我们已获得了一个离开了物质源，而以速度 c 亦即光速向外行移之波。可是，让我们回

* 噢！这可不十分见得。如果它们到达一个有电荷存在的区域，便可能被“吸收”。这意味着其他的场可以在某处产生而在与这些场互相迭加时，通过相消干涉就可将其“抵消”掉（见第一卷第三十一章）。



顾一下。从历史观点看，过去并不知道在麦克斯韦方程组中的系数 c 就是光传播的速率。当时只是一个在方程组中的常数。我们从一开始就叫它做 c ，那是因为已知道它最终应该变成什么。但在使你学习了一些含有另一个不同常数的公式之后，才在它所在的地方以 c 代入，这我们认为不见得通情达理。然而，根据电学和磁学的观点，我们只是从两个常数 ϵ_0 和 c^2 出发，它们分别出现在静电和静磁的方程式中：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.14)$$

与

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.15)$$

如果我们对于单位电荷采纳一个任意定义，便可通过实验来确定式(18.14)中所需的那个常数 ϵ_0 ——例如利用库仑定律测量在两个静止的单位电荷之间的力。我们也应当凭实验方法来测定出现在式(18.15)中的那个常数 $\epsilon_0 c^2$ ，这可通过测量两单位电流之间的力而得到。（单位电流指的是每秒流过单位电荷。）这两个实验常数之间的比值为 c^3 ——只不过是一个“电磁常数”罢了。

现在应该注意：无论我们选择什么作为电荷单位，该常数 c^3 总会相同。如果把两倍“电荷”——如两倍数字的质子——放进我们的电荷“单位”中，那么 ϵ_0 就必须只有原来的四分之一大。当我们把两个这样的“单位”电荷通过两根导线时，在每根导线中每秒通过的电荷将是两倍，因而在两导线间之力就会四倍大了。常数 $\epsilon_0 c^3$ 一定要减少至四分之一。可是比率 $\epsilon_0 c^2 / \epsilon_0$ 却仍没有改变。

因此，只是由电荷和电流所作的实验就能找出一个大小等于 c^3 的数值来，这证实是电磁影响传播速度的平方。从对静态测量——通过对两单位电荷间和两单位电流间之力的测量——我们便找到了 $c = 3.00 \times 10^8$ 米/秒。当麦克斯韦首先用他的方程组做出这一计算时，就宣布了电场和磁场束均应以这一速率传播。同时他也指出了这一数值与光速相同的那一神秘的符合性。麦克斯韦说：“我们不得不引申，光含有在同一媒质中与导致电和磁现象相同的那种横振动”。

麦克斯韦完成了物理学中几项重大统一事业中的一项。在他之前，既有光，也有电和磁。这后两者是由法拉第、奥斯特和安培通过实验工作而统一的。然后突然地，光不再是“局外人”，而只是在这么一种新形式中的电和磁——独自穿越空间而传播着的一小块一小块的电场和磁场了。

曾向你们提醒过，要注意这一特解的某些特点，但事实却证明，任一种电磁波都具有这些特点：即磁场和电场分别与波前运动的方向垂直；而且 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 这两矢量又彼此互相垂直。此外，电场的大小 E 等于磁场的大小 B 的 c 倍。这三桩事实——两种场都垂直于传播方向， \mathbf{B} 垂直于 \mathbf{E} ，而 $E = cB$ ——对于任何电磁波都普遍正确。我们的特殊情况是一个优美的例子——它表明了电磁波的所有主要特点。

§ 18-6 求解麦克斯韦方程组：势和波方程

现在，我们愿意来做一些数学工作；要把麦克斯韦方程组写成较简单形式。你可能会认为我们正在使其复杂化，但倘若你稍为忍耐一点，它们就会突然变得简单些。尽管目前你已完全熟悉了麦克斯韦方程组中的每一方程，但其中有许多部分仍须全都合并起来。这就是我

们所要做的。

现在从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ——最简单的方程——开始。我们知道，这意味着 \mathbf{B} 是某种东西的旋度，所以，如果我们写出：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (18.16)$$

便已解答了麦克斯韦方程组中之一了。（顺便提一下，你总会认识到，若另一矢量 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ ——其中 ψ 为任一标量场——则这个 \mathbf{A}' 仍会保持正确，因为 $\nabla\psi$ 的旋度为零，而 \mathbf{B} 还是一样。对此我们早已有所论述。）

其次，考虑法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，因为它并不涉及任何电流或电荷。如果将 \mathbf{B} 写成 $\nabla \times \mathbf{A}$ 并对 t 微分，则可把法拉第定律写成如下形式：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

由于对时间或对空间取微分的先后次序是可以调换的，上式也可写成

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.17)$$

由此可见， $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 乃是一个旋度为零的矢量。因此，这一矢量便应当是某一件东西的陡度。当我们处理静电学问题时，就曾得到 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，当时断定， \mathbf{E} 本身即是某种东西的陡度，并假定为 $-\phi$ （负号是为了技术性的方便）的陡度。现在对于 $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ 也作同样处理；即令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi. \quad (18.18)$$

这里采用了同一符号 ϕ ，以便在其中没有任何东西会随时间变化，因而当 $\partial \mathbf{A} / \partial t$ 项消失的那种静电情况下， \mathbf{E} 便是我们旧的 $-\nabla\phi$ 。因此，法拉第方程便可以写成这么一个形式：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (18.19)$$

我们已经解答了麦克斯韦方程组中的两个，即已找出了要描述电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，总共需要四个势函数：一个标量势 ϕ 和一个矢量势 \mathbf{A} ，后者当然就是三个函数。

现在既然 \mathbf{A} 确定了 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的一部分，那么若我们将 \mathbf{A} 改成 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ ，又会发生什么呢？一般说来， \mathbf{E} 是会改变的，如果我们不采取特别预防措施的话。然而，仍然可容许 \mathbf{A} 按照上述方式改变而不致影响 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ——也就是说，不致改变其物理内容——如果我们总是按下列法则一齐改变 \mathbf{A} 和 ϕ 的话：

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (18.20)$$

这样，不论 \mathbf{B} 或由式(18.19)所确定的 \mathbf{E} ，就都不会改变。

以前，我们曾选取 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，以便使静电力方程组稍微变得简单些。现在不想再这样做了；而必须作另一种选择。但在告诉大家这种选择到底是什么之前，我们将稍为等一下，因为往后就会明白为什么要作这样一种选择。

现在回到剩余的两个描写势与源(ρ 和 \mathbf{j})之间关系的麦克斯韦方程。一旦我们从电流和电荷方面确定了 \mathbf{A} 和 ϕ ，就总能够根据式(18.16)和(18.19)以获得 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，所以我们希望有另一种形式的麦克斯韦方程组。

首先，将式(18.19)代入 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 中；我们便得：

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

这个式子也可写成:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.21)$$

这是把 ϕ 和 \mathbf{A} 联系到源上去的一个方程。

最后一个方程将是最复杂的。我们先来把这第四个麦克斯韦方程重新写成:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

然后利用式(18.16)和(18.19)以势代替 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} :

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

再利用这么一个代数全等式: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$; 便得到:

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (18.22)$$

这并不见得简单!

幸而我们现在可以利用任意选择 \mathbf{A} 之散度的自由。下面将要做的就是利用这一选择以便使 \mathbf{A} 和 ϕ 的方程互相分开而又具有相同形式。为此, 选择可以按下式规定*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (18.23)$$

当我们这样做时, 式(18.22)中关于 \mathbf{A} 和 ϕ 的中间两项便互相抵消, 因而该式也就比原来简单得多了:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.24)$$

又关于 ϕ 之式——即式(18.21)——也会取同一形式:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.25)$$

多么绚丽夺目的一组方程式! 它们之所以美丽, 首先是因为它们漂亮地互相分开了——电荷密度属于 ϕ ; 电流则属于 \mathbf{A} 、而且, 尽管左边看来有点希奇——拉普拉斯算符加上一个 $(\partial/\partial t)^2$ ——但当我们将其全都展开出来时却会看到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.26)$$

这在 x, y, z, t 上就有一个漂亮的对称性——该 $-1/c^2$ 是必要的, 因为时间和空间当然彼此不同; 它们各有不同的单位。

麦克斯韦方程组已经把我们引导到, 关于势 ϕ 和 \mathbf{A} 的这样一个新型方程, 以及所有四个函数 ϕ, A_x, A_y, A_z 的同一个数学形式。一旦掌握了如何解出这些方程, 便能够由 $\nabla \times \mathbf{A}$ 和 $-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 获得 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 。我们具备一套完全同麦克斯韦方程组等效的另一种形式的电磁定律, 而在许多场合下它们远更便于处理。

事实上, 我们曾经解过一个与式(18.26)十分相似的方程。早在第一卷第四十七章中研究声学时, 我们就有过一个取这种形式的方程:

* 这样选取 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 称为“选取一个规范”。把 $\nabla \phi$ 加于 \mathbf{A} 上称为一种“规范变换”。式(18.23)称为“洛伦兹规范”。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

并且知道，它描述了波在 x 方向上以速率 c 进行着的传播。式 (18.26) 乃对于三维的相应波方程。所以在不再存在电荷和电流的那些区域中，这些方程之解并不是 ϕ 和 A 各等于零。（虽然那的确也是一种可能之解。）会有一些其中某组 ϕ 和 A 随时间变化但却总是以速率 c 向外运动之解。那些场穿越自由空间向前行进，正如本章开头的那个例子一样。

在方程 IV 中，引入了麦克斯韦的新项，我们就能将场方程组用 A 和 ϕ 来写成一种简单的而又能立即使电磁波的存在成为明显的那种形式。对于许多实用目的来说，采用原来以 E 和 B 表达的那些方程将仍然很方便。但这都是在我们已经攀登过的高峰的那条上坡路上。现在我们准备要跨越至高峰另一边了。事情看来将会不同——我们准备要看到一些新的和美妙的景色。

最小作用原理* (专题演讲)

当我在中学念书时，我的物理教师——他的名字是柏达(Bader)先生——有一次在讲完了物理课之后，把我叫住说，“看来你有点厌烦；我要给你讲点有趣的东西。”然后，他告诉我一件我认为绝对会令人神往的事情，并且自那以后一直使我神魂颠倒。每当这一课题出现时，我总是抓住不放。事实上，当我开始准备这一课时，我发现自己对这个问题正在作更详尽的分析。并不是为这一次演讲操心，实则我已被卷入到一个新的问题中去了。这个课题就是——最小作用原理。

柏达先生这样告诉我：假定有一质点（例如，在一引力场中）通过自由运动从某处移至另一处——你把它抛掷出去，它就会上升而又落下[图 19-1(a)]。它在某一定时间内由出发点到达最后的目的地。现在，你尝试一个不同的运动。假设由这里到达那里是这样进行的[图 19-1(b)]，但却在同一段时间内到达目的地。然后他又这样说：如果你算出在该路程上每一时刻的动能，减去势能，再计算出经历整条路线对时间的积分，你将会发现所获得的数字比起对实际运动所得的要大。

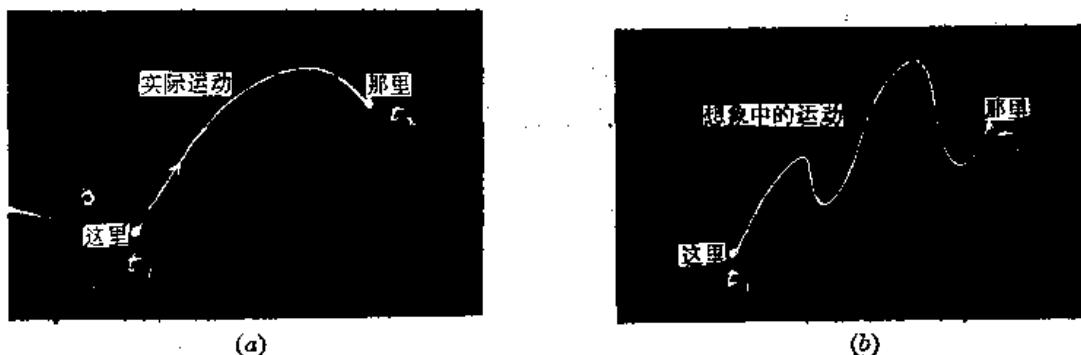


图 19-1

换句话说，牛顿定律可以不写成 $F=ma$ 的形式而写成：一物体从一点至另一点所经行的路线其平均动能减去平均势能应尽可能地少。

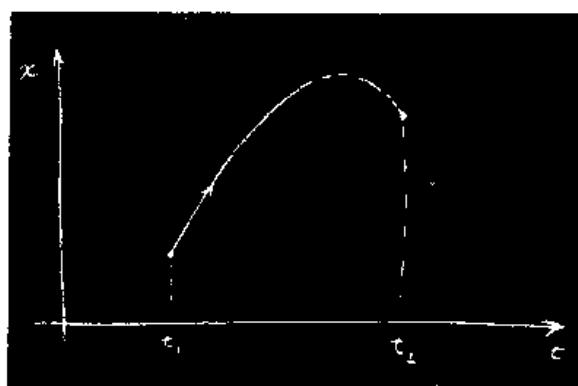
让我把这里面的意义说得清楚些。如果我们考虑那引力场的情况，那么若粒子的路程为 $x(t)$ （让我们暂时只考虑一维；即是一条升高、降落、但绝不会偏斜的轨道），其中 x 是地面上的高度，则在任一时刻动能为 $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ ，而势能为 mgx 。现在我取每一时刻沿该路程的动能减去势能再对时间自始至终进行积分。假定在起始时刻 t_1 由某一高度出发，并在结束时刻 t_2 确实到达了另外某一点[图 19-2(a)]。

那么该积分就是

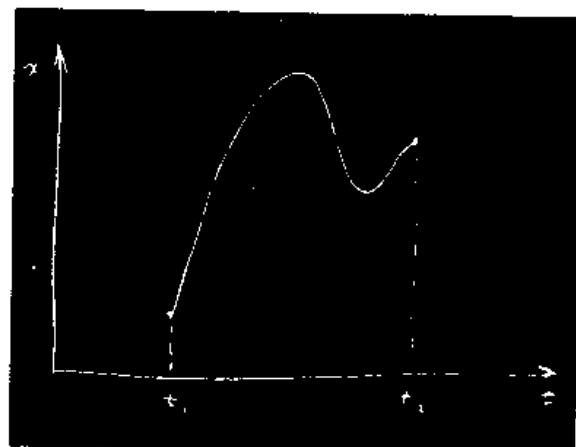
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

* 这是一次专题演讲（几乎是逐句照原话记录的）。以后各章并不依赖于这篇专题讲演的材料——这是特意为“娱乐”的目的而设置的。

請勿用於盈利之目的



(a)



(b)

图 19-2

实际的运动为某种曲线——如果作一个位置-时间图, 它将是一条抛物线——而对于该积分会给出某一数值。但我们本来也满可以设想另一种在升至十分高之后又以某一特殊方式降落下来的运动[图 19-2(b)]。我们可以算出动能减去势能并对这么一个路程…或对其他任何我们所想出的路程积分。令人诧异的是, 真正的路程就是那一条会使这一积分取得最小值的路程。

就让我们来试一试吧。首先, 假定取一个没有任何势能的自由质点情况。那么, 该法则申述: 在某一定时间内从一点跑至另一点, 动能的积分是最少的, 因而它就一定要以一匀速率行进了。(我们知道这是一个正确答案——以一匀速率前进。)为什么是这样呢? 因为假如该质点以任何其他方式运动, 速度便将有时比平均值高, 有时比平均值低。平均速度对于每一情况都是相同的, 因为它是在某一定时间内由“这里”到达“那里”, 所必然会获得的结果。

作为一个例子, 比如你的任务是要乘车在某一给定时间内从家里到达学校。你可以用几种方法做到。你可以一开始就象疯子似的使车子加速, 然后在接近终点时用脚掣煞车逐渐放慢, 或者你可以匀速地前进, 甚至你也可转回头一下, 然后再往前开驶, 如此等等。事实

是, 平均速率当然一定是你所经过的总距离给时间除。但如果你试用各种方式开行但就是不以匀速前进, 那么有时你总会太快而有时则太慢。原来任何与平均值有歧离的东西, 其均方值, 如你所知, 总是大于其平均值的平方的, 所以如果你摇摆开车的速度, 那么动能积分就总会比用一匀速度时为高。所以我们见到, 如果速度固定不变(当没有力作用时), 则该积分便是一个极小值。正确的路线就是这样(图 19-3)。

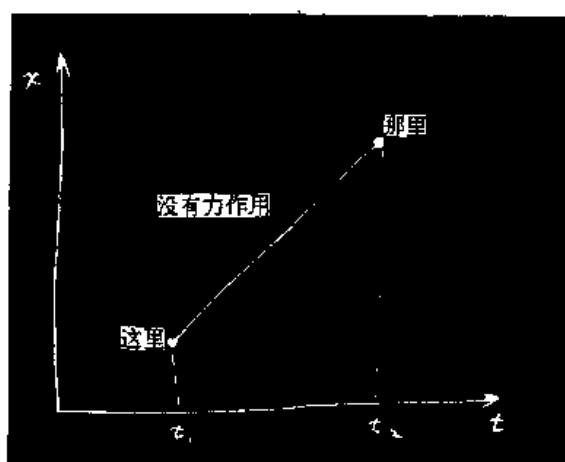


图 19-3

现在, 一个在引力场中被抛起的物体起初确会升得较快, 然后就逐渐放慢。那是因为物体具有势能, 它就必须在平均上有最小的动能与势能之差值。由于在空间升得越高势能越大, 我们便将获得一个较低的差值, 如果能够尽快升到一个那里有高势能的地方去的话, 这样该势能才能从动能那里扣除出去, 从而获得

一个较低的平均值。所以最好就是去选取能够升得高，从而可从势能处得到一个大负值的那一条路程(图 19-4)。

另一方面，你也不能够升得太快，或跑得太远，因为这么一来你将会包罗过多的动能——你得很快达到高处以便在可使用的那段规定时间里再落下来。所以你也不宜升得太高，但总要升得高些。因此事实证明，答案是在试图获得更多的势能与最少的额外动能之间取得某一种平衡——以期获得动能减去势能的差值尽可能小。

这就是我的老师告诉我的全部内容，因为他是一位十分好的教师并懂得在什么时候就应停止对话。但我却还未懂得要在什么时候结束啰嗦。所以并不会留给你一个有趣述评，而我却想要来证明它确是如此，这无异用生活中的复杂性来使你感到不安和焦躁。我们将遇到的数学问题会十分困难，而且是一个崭新的课题。我们有某一个叫做作用量 S 的量。它是动能减去势能并对时间的积分。

$$\text{作用量} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{动能} - \text{势能}) dt.$$

记住势能和动能两者都是时间的函数。对每一不同的可能路线你将获得关于这一作用量的不同值。我们的数学问题是去寻找使这个数值最小的那一条曲线。

你会说——呵，那不过是寻常微积分学中的极大和极小问题罢了。在算出了作用量之后，只要取微分就能找出那个极小值。

但可要小心。寻常我们不过有一个某变量的函数，而需要去找出其中该函数是最小或最大的那个变量值。例如，设我们有一根棒，在其中部已加了热，因而热量将向周围传送出去。对于棒上每一点就有一对应温度，而我们必须去找出温度最高的那一点。但现在对于空间每一条路线我们是有一个数值的——很不相同的东西——而我们得去找出那一条会使该数值极小的空间路线。那是完全不同的一个数学分支。它并不是寻常的微积分。事实上，它被称为变分学。

有许多问题属于这一种数学。例如，圆周往往被定义为所有与一固定点的距离为一定值的点的轨迹，但对于圆周还有另一个给予定义的方法：圆周乃是具有某给定长度而又能容纳最大面积的那一条曲线。对于某一周长来说，任何其他曲线所容纳的面积比圆周都要小。因此，若我们提出这样一个问题：试找出对某一给定周长能容纳最大面积的那条曲线，我们就有个变分学问题——与你们所熟悉的有所不同的一种微积分。

因此，我们就来对一物体的路径进行计算。这里介绍一下方法。我们的意图是：设想一条正确路线，而所画出来的其他任何路线则都是错误的，因而若对一错误路线算出该作用量，便将得到一个比按正确路线的计算结果要大的值(图 19-5)。

问题：试找出那真实路线。到底坐落在哪里？当然，一种方法是去算出千千万万条路线上的作用量，再找出哪一条是最小的。当你找到了那条最小的，它就是该真正路线了。

那是一种可能途径，但我们却能够比此做得更好些。当有一个具有极小值的量——例

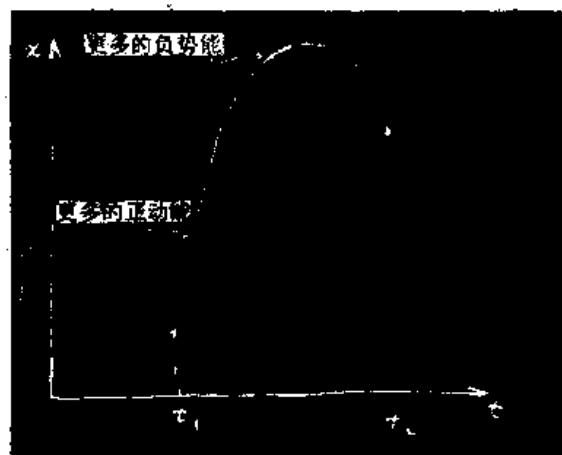


图 19-4

請勿用於盈利之目的

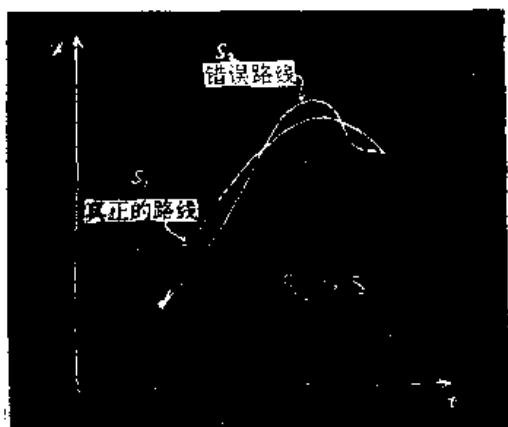


图 19-5

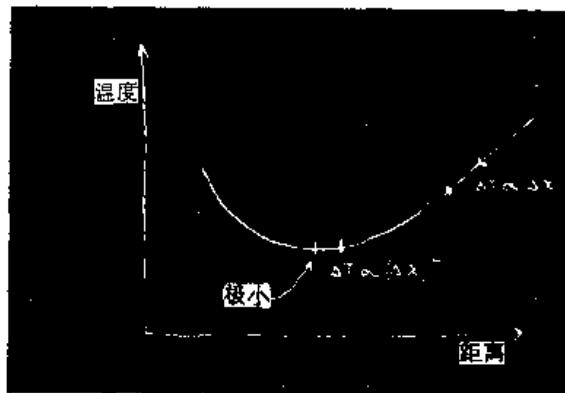


图 19-6

如象温度那样的寻常函数——时，极小值就有这么一个特点：若在第一级上离开该极小点，则函数与极小值的偏差只是属于第二级的。在该曲线的任何其他部分，若移开原位置一个小距离，则函数之值也将按第一级变化。但在极小点上，一个小小的偏离在第一次近似上将不会产生任何差异(图 19-6)。

这就是我们将要用来算出那真实路线的办法。如果已有一条真实路线，那么在一条与之只有小小差别的曲线上的作用量在第一次近似上将不会造成任何差别。若确实有一个极小值的话，则任何差别都将落在第二次近似上。

那是容易证明的。若当我使曲线在某种方式上稍为有点歧离时即发生一个第一级的变化，则在作用量上就有一个与该歧离成正比的变化。这变化大概会使作用量变得大些；否则我们就不会得到一个极小值了。但此时若该变化与歧离成正比，则倒转歧离的符号将会使作用量变得较小。我们就会使作用量沿一个方向增加而沿另一个方向减少。唯一能够有一个真正极小值的办法是在第一次近似上不作任何改变，而改变乃是与对真实路线的歧离的平方成正比的。

所以我们就这样做：令 $\underline{x}(t)$ （下边加一底线）代表该真实路线——即我们要试图寻找的那条曲线。取一条尝试路线 $x(t)$ ，与该真实路线有一微小差别，这差别我们称之为 $\eta(t)$ ，见图 19-7。

现在我们的想法是：若对路线 $x(t)$ 计算该作用量 S ，则这个 S 与我们对路线 $\underline{x}(t)$ 所算出的作用量——为了简化写法，我们可叫它做 \underline{S} ——之差，即 S 与 \underline{S} 之差，在小 η 的第一次近似上应等于零。这差别可以是第二级的，但在第一级上这差别应该为零。

而这对于任何一个 η 都应该是正确的。噢，还未尽然。这方法不会具有任何意义，除非你所考虑的各路线都有彼此相同的起点和终点——每条路线都在 t_1 时刻从某点出发而在 t_2 时刻到达某另一点，这些地点和时间都保持固定不变。因此，我们的歧离 η 在每一端都应等于零，即 $\eta(t_1) = 0$ 和 $\eta(t_2) = 0$ 。有了这个条件，我们的数学问题才告确定。

要是你完全不懂得微积分，你也许对于求一寻常函数 $f(x)$ 的极小值也是这样做。你本来就会讨论如果对 $f(x)$ 中的 x 加一小量 h 该会发生的情况，并论证在 h 的第一次幂上对

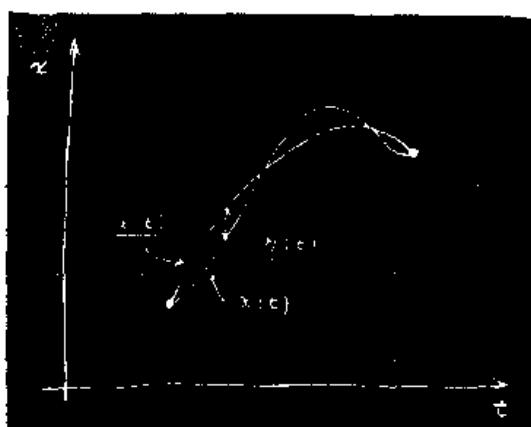


图 19-7

$f(x)$ 的修正应当在极小点处等于零。你会以 $x+h$ 取代 x 并展开至 h 的第一次幕…正如我们将要对 η 做的那样。

于是我们的打算是, 把 $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$ 代入该作用量公式中

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

式中 $V(x)$ 代表势能。而 dx/dt 这个微商当然就是 $\underline{x}(t)$ 的微商再加上 $\eta(t)$ 的微商, 所以对于作用量会得到这么一个表达式:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

现在我们必须写得更详尽些。对于该平方项我们得到

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

可是请等一等。对高于第一次幕之项我们并不在意, 因而将所有含有 η^2 和更高次幕的项都拿出来并放进一个标明“二次和更高次项”的小箱子中。从积分中的这一平方项我只得到属于第二次幕的, 但从其他方面还可得到更多一些东西。因此, 动能部分就是

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{二阶和更高阶项}).$$

现在我们需要一个在 $\underline{x}+\eta$ 上的势能 V 。我认为 η 是小的, 因而可以将 $V(x)$ 写成泰勒级数。它近似地等于 $V(\underline{x})$; 在次一级近似上(按微商的通常性质)则该修正应该是 η 乘以 V 对 x 的变率, 如此等等:

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2} V''(\underline{x}) + \dots$$

为了简化书写, 我已将 V 对 x 的微商写成 V' 。至于 η^2 项以及其后面各项则都落在“二阶和更高阶项”的范畴之内, 而我们便不须对之操心了。将所有这一切都凑合起来, 得:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (\text{二阶和更高阶项}) \right] dt.$$

现在, 如果我们对事情观察得仔细些, 便会见到我在这里安排好的头两项相当于用那真实路线 \underline{x} 所计算出来的作用量 S , 而我要集中注意力的东西乃是 S 的变化—— S 与对该正确路线所应得的 S 之间的差别。这一差值我们将写成 δS , 并称之为 S 的变分。丢开那些“二阶和更高阶项”, 则我对于 δS 便有

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt.$$

现在的问题是: 这里有某一积分。虽然我还不知道 \underline{x} 是什么, 但我确实知道不管 η 是什么, 这一积分总应该等于零。噢, 你试想想, 这可能发生的唯一途径就是那个给 η 乘上的东西应当是零。可是那含有 $d\eta/dt$ 的第一项又该怎么办呢? 哟, 如果 η 终归可以是一任意的东西, 那它的微商也该是任意的了, 因而你可以断定 $d\eta/dt$ 的系数也应当等于零。但这可就不对了。之所以不对是因为在 η 与它的微商之间存在某一种关系; 它们并非完全互相独立, 因为 $\eta(t)$ 必须在 t_1 和 t_2 两个时刻上都等于零。

在变分学中解决一切问题的方法总要用到那同一普遍原则。即首先对你所要变化的东西作一个移动(象我们上面通过加上 η 而做到的那样), 旨在寻找第一级的项; 然后又总要把积分安排成含有“某种东西乘以该移动(η)”, 而又不含有其他微商(没有 $d\eta/dt$)的那种形式。

必须重新安排以便总是“某一件东西”乘以 η . 过了一会你将会看出这样做的巨大价值. (也有一些公式会告诉你, 在某些情况下如何可不经实际计算就能获得结果, 但这样一些公式都不够普遍, 所以就不值得你去关注; 最好的办法还是按照上述这一种方法把它算出来.)

怎么才能将该 $d\eta/dt$ 项重新安排使其含有 η 呢? 回答是通过分部积分就可以做到. 事实证明, 变分学的全部巧妙就在于包括写下 S 的变分, 然后利用分部积分就可以将 η 的微商清除掉. 在微商会出现的每一问题中总是采取这一办法的.

你该会记起分部积分的一般原理吧. 如果你有任一个函数 f 乘以 $d\eta/dt$ 并对 t 积分, 你可以写下 ηf 的微商:

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

你所要的积分是对末一项而积的, 因此,

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

在我们关于 δS 的公式中, 该函数 f 就是 m 乘以 \underline{dx}/dt ; 因此, 我得到下列关于 δS 的公式:

$$\delta S = m \frac{dx}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(x) \eta(t) dt.$$

首项应该是在 t_1 和 t_2 两限上算出来的. 然后我还必须有那个从分部积分剩下来的积分. 末项则是照抄下来的, 没有什么改变.

现在碰到一件总会发生的事情——被积出的那一部分不见了. (事实上, 如果该被积出的部分不消失, 那你就应当重申该原理, 加上一些条件而保证其如此!) 我们已经说过, 在路线两端 η 必须是零, 因为该原理要求只有在该变化曲线开始并终结于那些选定点上时作用量才是一极小值. 这条件就是 $\eta(t_1) = 0$, 和 $\eta(t_2) = 0$. 所以该项积分结果为零. 我们将其他各项都凑集起来并得到:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 x}{dt^2} - V'(x) \right] \eta(t) dt.$$

S 的变分现在就成为我们所希望得到的形式了——在该方括号内的各项, 比方说 F , 全都乘上了 $\eta(t)$ 并从 t_1 积至 t_2 .

我们得到了某种东西乘以 $\eta(t)$ 的积分总等于零:

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

这里我有某一个 t 函数; 再以 $\eta(t)$ 乘之; 并对它从一端积至另一端. 而不论 η 是什么, 结果始终为零. 这意味着该函数 $F(t)$ 就是零. 尽管这很明显, 但反正我仍将给你示范一种证明.

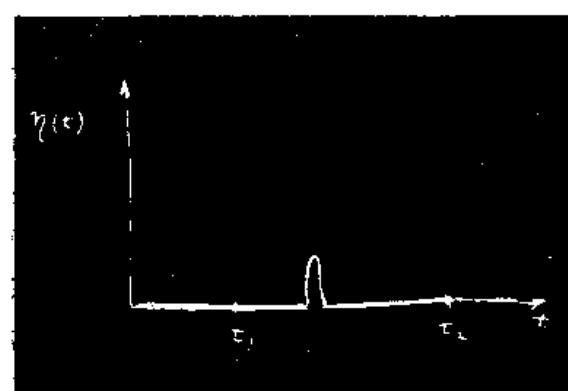


图 19-8

假设作为 $\eta(t)$, 我选取除了某一特定 t 值外其余一切 t 上都等于零的某种东西. 它始终保持零值直至到达这个 t (图 19-8), 此时它突然跃起, 过了一会又骤然降下. 当我们对这个 η 乘以任一函数 F 而做出积分时, 你会唯一得到不等于零的地方就是那里 $\eta(t)$ 出现突起的地方, 这时你会得到在该处的 F 值乘以对突跃的积分. 对于突跃本身的积分不会等于零, 但当乘上了 F 之后它就必须等于零; 所以

在突跃处的函数 F 也就必然是零了。但突跃发生的地方是我们喜欢放在哪里就可以在哪里的，因而 F 就必须处处为零。

我们看到，如果对于任一个 η ，我们的积分总是零，则 η 的系数必须为零，只有对于满足这复杂微分方程

$$\left[-m \frac{d^2x}{dt^2} - V'(x) \right] = 0$$

的那条路线，该作用量积分才将是一极小值。实则它并非那么复杂，你以前就见过的。它不过是 $F=ma$ 罢了。第一项是质量乘加速度，而第二项则是势能的微商，那就是力。

所以，至少对于一个保守系统来说，我们已证明了最小作用量原理会给出该正确答案；它申述，具有最小作用量的那条路线就是满足了牛顿定律的那条路线。

一个述评：我从未证明过它是一个极小点——也许是一个极大点。事实上，它的确不必是一个极小点。这与我们过去在讨论光学时所曾发现过的那个“最少时间原理”十分类似，在那里我们起初也曾说过是“最少”时间。然而事实却证明，会有时间并非最少的那些情况。基本原理是，对于任何离开光学路程的第一级变化，时间的变化为零；事态与此完全一样。所谓“最小”我们确实指的是，当你改变路线时， S 值的第一级变化为零。并不要求是一个“极小”。

其次，我想就上述问题谈论一些普遍化可能性。第一，可以推广至三维，即不只是 x ，我宁愿有 x 、 y 和 z 各作为 t 之函数；此时作用量更为复杂些。对于三维运动，你必须用到该完整的动能式——($m/2$)倍于整个速度的平方。这就是说，

$$\text{动能} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

并且，势能也是 x 、 y 和 z 的函数。而路线究竟如何呢？路线是在空间中某一条普遍曲线，不容易画出来的，但意思却都是一样。不过 η 又是怎么回事？噢， η 可以有三个分量。你可以在 x 向、 y 向或 z 向上——也可以同时在所有三个方向上，移动路线。所以 η 该是一个矢量。然而，这样做实际上并未曾把事情弄得过于复杂。由于只有第一阶的变分必须为零，我们便可以通过三个连续移动而进行计算。可仅仅在 x 向上移动 η ，而申明它的系数应等于零。这样就得到一个方程，然后又在 y 向上移动而得到另一个方程，又在 z 向上得到第三个。当然，或者按照你所喜欢的任一种次序进行。无论如何，你已得到了三个方程。而牛顿定律实际上就是在三维中的三个方程——对每一分量就有一个。我想你实际上能够明白，这一定会行得通，但这个三维问题仍留给你自己去作证明。顺便提一下，你本来也可以采用任一种你所喜欢的坐标系，诸如极坐标或其他坐标，从而看出如果在半径、角度、或其他坐标上各有一个 η 的移动将会发生的事情，便会立即得出适用于该坐标系的牛顿定律。

同样，这一方法也可推广至任何数目的粒子。例如，如果你有两个粒子，在它们之间作用着力，因而就有一个相互势能，那么你只要将这两粒子的动能相加并取它们间的互作用作为其势能。对此你想要变化什么东西呢？势必变化两粒子的路线。于是，对于在三维中运动的两粒子，就总共有六个方程。你可以在 x 向、 y 向和 z 向上变更那第一个粒子的位置，而对于第二个粒子也是这样做；因而就有六个方程。而这正是理该如此的。其中三个方程确定了第一个粒子受力作用时的加速度，而另外三个则是描述第二个粒子在力的作用下所得到的加速度的。你只要仿照这同一种游戏，就会得到关于任何数目的粒子在三维中的牛顿定律。

我刚才说过，我们得到了牛顿定律。这并非十分正确，因为牛顿定律还包括象摩擦一类的非保守力。牛顿说 ma 等于任何 F ，可是最小作用原理却只适用于保守力系——那里所有的力都可以从一个势能函数获得。然而，你知道，在微观的一级——即在物理学最深入的那一级——并没有非保守力。象摩擦力那样的非保守力，之所以出现乃是由于我们忽略了微观上的复杂性——实在有太多的粒子有待分析。但基本定律却都可以置于最小作用原理的那种形式上面。

让我继续来作进一步的推广。假定我们问起粒子按相对论运动时会发生什么情况，而上面还未获得正确的相对论性运动方程； $F = ma$ 只对于非相对论才正确。问题是：对于相对论的情况是否有一个对应的最小作用原理？回答是肯定的。对于相对论情况其公式是这样：

$$S = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-v^2/c^2} dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\phi(x, y, z, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t)] dt.$$

这个作用量积分的第一部分是粒子的静质量 m_0 乘以 c^2 再乘以对于速度函数 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的积分。后一项并不仅仅是势能，却是一个对于标势 ϕ 和对于 v 乘以矢势 \mathbf{A} 的积分。当然，此时我们只是包括电磁力。所有的电场和磁场都是由 ϕ 和 \mathbf{A} 提供的。这一个作用量函数对于一单独粒子在电磁场中的相对论性运动给出一套完整理论。

当然，每当我写出 v 时，你总会明白，在试图作出任何计算之前，得先用 dx/dt 来代替 v_x ，并对其他各分量也都这样做。而且，你还必须把沿路线在 t 时刻的一点写成 $x(t), y(t), z(t)$ ，而这些在上式中我只是写作 x, y, z 。适当地讲，只有当你已经对 v 等的那些式子代入以后，你才能有一个关于相对论性粒子的作用量公式。我将把这一作用量公式事实上确能给出那些正确的相对论性运动方程这一问题的证明留给你们中那些较机敏的人去做。我是否可向你们建议，最初假定没有 \mathbf{A} ，亦即没有磁场时去做它？此时你应当得到运动方程 $d\mathbf{p}/dt = -q\nabla\phi$ 的各分量，其中你会记起 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。

要把存在矢势的情况也包括进去就困难多了。那些变化远较复杂。可是在终了时，该力项确将出现为 $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，正该如此。但我将把这留给你们去玩玩。

我想要强调在一般情况下，比如在相对论公式中，那作用量的被积函数不再具有动能减去势能的形式。那只有在非相对论性的近似上才正确的。例如， $m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$ 这一项就不是我们所称之为动能的了。对于在一特定情况下作用量应该是什么的问题必须通过某种尝试的办法来确定。这与首先确定什么是运动定律的问题恰好相同。你只要对所已知的一些方程盘来盘去，看你能否把它们纳入于最小作用量的形式之中。

还有一点是关于名称方面的。那个经过对时间积分就可以得到作用量 S 的函数称为拉格朗日(Lagrange)函数 \mathcal{L} ，它只是粒子的速度和位置的函数。因此最小作用原理也就可写成

$$S = \int \mathcal{L}(x_i, v_i) dt,$$

其中 x_i 和 v_i 指位置和速度的所有各分量。所以如果你听到有人正在谈论“拉氏函数”，你就会知道他们是在谈论那个要用来找出 S 的函数。对于在电磁场中的相对论性运动，

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

并且，我还应该讲，对于那些最讲究准确和学究式的人物来说， S 实际上并非叫做“作用量”，它称为“哈密顿第一主函数”。现在，我讨厌的是，要来作一次关于“最小哈密顿第一

主函数原理”的演讲。所以就把它叫做“作用量”吧。而且，会有更多更多的人正在称之为作用量。在历史上你看到还有许多不那么有用的东西也曾被称为作用量，但我想更合理的还是改用一个新一点的定义。所以现在你也将叫这个新函数做作用量，而不久人人都将用这一个简单名字去称呼它了。

现在，我要对这一课题作一些与以前关于最少时间原理所作的相似的讨论。一个宣称从一处到另一处的某一积分是一极小值的定律——这会告诉我们有关全过程的某种东西——与一个宣称当你沿路线行进时，有一个力在使它加速的定律相比，在其特性上是有很大差别的。第二种办法，陈述你如何沿着路线一点一滴地前进；而另一种办法，是关于整个路线的全面描述。在光的情况下，我们已谈论过这两者间的关系。现在，我愿意来解释在有了这一类最小作用原理时，为什么还会有微分定律。原因是这样的：试考虑在时间和空间中的那条实际路线。如前一样，让我们仅仅考虑一维，从而可把 x 作为 t 的函数以画成曲线。沿这一真实路线， S 是一极小值。让我们假定已有了该真实路线，而它在空间和时间上既通过某一点 a ，又通过另一附近之点 b ，见图 19-9。现在，如果从 t_1 至 t_2 整个积分是一极小值，那么就有必要沿 a 至 b 的那一小段该积分也是一极小值。不可能在 a 至 b 这一部分稍为多一点。因为不然的话，你就总能仅仅通过把这一部分路程拨来拨去即可使整个积分值稍为降低一点。

所以在这条路线中的每一小段上也应该都是一个极小值。并且不管该小段如何短，这都必然正确。因此，整个路线会给出一极小值的原理，也可说成是路线上的每一无限小线段也各具有能给出一最小作用量的那种曲线。现在若我们取路线上足够短的一段——在十分靠近的 a 与 b 两点之间——那么在遥远处势能如何逐点变化就是无足重轻的了，因为你在那整整一小段路线上几乎总是呆在同一个地点。你必须加以讨论的唯一东西就是势能中的第一阶变化。答案只能取决于势能的微商而不是在各处的势能。所以关于整条路线的总性质的陈述就变成对一小段路线会发生的事情的陈述——一种微分式描述。而这一种微分式描述就仅仅涉及到势能的微商，也就是在该点上之力。这就是在总体定律与微分定律之间的关系的一种定性解释。

在光的情况下，我们也曾讨论过这同一问题：粒子怎么会找到它的正确路线？从微分的观点，那是容易理解的。每一时刻当它获得一加速度时仅仅知道在该时刻应该做什么。可是如果你讲粒子会做出决定以选取将能给出最小作用量的那条路线，那你关于因果的全部本能就将发生混乱。它是否会“闻”到那些邻近路线借以了解其是否具有更多的作用量？在光的情况下，当我们放置一些块块在光所经行的道路上，以致光子们不能试验出一切路线时，我们便发现它们不再能算出该走的是哪一条路，从而就有了衍射现象。

这类事情在力学中也会发生吗？粒子真的不仅仅能选取那正确路线，而且还会审查所有其他的各种可能路线吗？而且，若在路途上设置一些东西以阻止其向四处张望，我们也能得到与衍射类似的现象吗？当然，一切令人惊奇之处就在于，事情恰恰是这样。这正是量子力学定律所说的。因此，我们的最小作用原理还是陈述得不完全，并非粒子选取了作用最

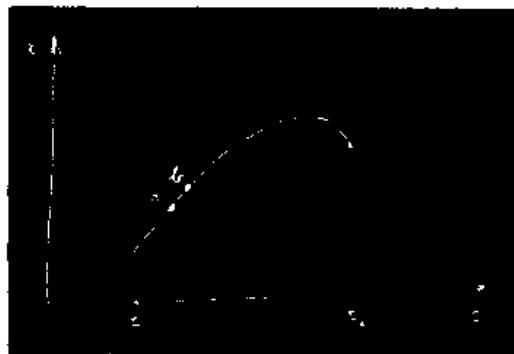


图 19-9

小的那条路线，而是它对附近的所有路线都一一闻过，从而按照与光选择最短时间同样的方法来选取那条具有最小作用量的路线。你应会记起，光选取最短时间的办法是这样的：要是它遵循一条需要不同时间的路线，则当它到达时就有不同周相。而在某一点上的总幅乃等于光所能经行而到达的各不同路线之幅的贡献总和。所有那些提供周相差异很大的路线将不会合成任何东西。但如果你能找出一整序列路线，它们都具有几乎相同的周相，则小小的贡献便将迭加在一起而在到达之处得到一个可观的总幅。因此，重要路线变成是，有许多附近路线都能给出同一周相的那一条。

讲到量子力学，也恰恰是这同一桩事情。整个量子力学（对于非相对论情况，并略去电子自旋）是这样工作的：一个粒子从时刻 t_1 所处的点 1 出发，将在 t_2 到达点 2 的几率，等于一个几率幅的平方。总幅可以写成对每一可能路线——每一到达的途径——的各幅之和。对于每个我们所该有的 $x(t)$ ——对于每条可能想象出来的轨道——我们就得算出一个幅来。然后再把它们都相加起来。对于每条路线应该取个什么波呢？上述的作用量积分就告诉我们关于一单独路线所应有之幅如何。波正比于某一常数乘 $e^{iS/\hbar}$ ，其中 S 就是对于该路线的作用量。这就是说，如果我们用一复数来表示幅的周相，那相角就是 S/\hbar 。作用量 S 具有能量乘时间的那种量纲，而普朗克常数 \hbar 也具有这同一量纲。它是判定量子力学在什么时候才显得重要的一个常数。

这里就是它工作的原理：假设对所有路线， S 比起 \hbar 来都很大。每一路线贡献某一定之幅。对于附近一条路线，该周相已很不相同，因为若有一个巨大 S ，即使一个小小的 S 变化也就意味着一个完全不同之相——因为 \hbar 竟是那么小。所以在取该总和时，互相靠近的路线一般都会将其效应互相抵消——除了一个区域以外，而这个区域就是当一条路线与其邻近路线在第一次近似上全都会给出同一个周相时（更准确地说，在 \hbar 范围内的同一个作用量）。只有那些路线才算重要。因此，在普朗克常数 \hbar 趋于零的极限情况下，正确的量子力学可以总结成简单的一句话：“忘记所有这些几率幅吧。该粒子会在一条特殊路线上奔跑，那就是在其中 S 不会在第一次近似上发生变化的路线”。这就是最小作用原理与量子力学之间的关系。量子力学可以用这一种形式来表达这一事实，是由本次讲演开头所曾提及的那同一位物理教师柏达先生的另一名学生在 1942 年才发现的。[量子力学原本是通过给出关于幅的微分方程（薛定谔首创的）并也通过某种其他矩阵数学（海森伯首创的）而表达出来的。]

现在要来谈谈物理学中其他的极小原理。有许多是很有意义的。我并非马上就企图将它们全都罗列出来，而只是打算再描述其中的一种。以后，当我们面临一个具有漂亮极小原理的物理现象时，我将随时结合它来谈。现在我要来证明：不必通过给出关于场的一个微分方程，而是通过申明某一积分是一极大或极小值，就能够描述静电学。首先，让我们来考虑那种电荷密度处处为已知的情况，而问题就是要找出空间每一处的电势 ϕ 。你知道答案应该是：

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0.$$

但陈述这一事情的另一种办法却是：计算这么一个积分 U^* ：

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 dV - \int \rho\phi dV,$$

这是一个要对全部空间取的体积分。对于该正确的势分布 $\phi(x, y, z)$ ， U^* 是一极小值。

我们可以证明，这两种关于静电学的陈述是等效的。现在假定选取任一函数 ϕ ，要求证

明: 若所取的这个函数 ϕ 是该正确之势 $\underline{\phi}$ 加上一个小歧离 f , 则在第一级上 U^* 的变化为零. 因此我们记作

$$\phi = \underline{\phi} + f.$$

ϕ 就是我们所要寻找的, 但现在给它造成一种变化, 以找出究竟它应该怎样才能使 U^* 的变分在第一级上为零. 对于 U^* 中的第一部分, 我们需要

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\underline{\phi})^2 + 2\nabla\underline{\phi} \cdot \nabla f + (\nabla f)^2.$$

唯一将会变化的第一级项为

$$2\nabla\underline{\phi} \cdot \nabla f.$$

在 U^* 的第二项中, 该被积函数为

$$\rho\phi = \rho\underline{\phi} + \rho f,$$

其变化部分为 ρf . 因此, 若只保留那些变化着的部分, 则要求有这么一个积分:

$$\Delta U^* = \int (\epsilon_0 \nabla \underline{\phi} \cdot \nabla f - \rho f) dV.$$

现在, 根据以往的普遍法则, 我们必须使那个经过了补缀之后的东西全都除掉 f 之微商. 让我们看看到底会有哪些微商. 该点积是

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z},$$

那我们得去对 x , 对 y 和对 z 进行积分的. 原来窍门就在这里: 若要将 $\partial f / \partial x$ 除掉, 就必须对 x 分部积分. 这将把微商移到 $\underline{\phi}$ 上去. 那是同我们过去用来除掉对 t 的微商的那一般想法相同的. 即要采用这个等式:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f \frac{\partial \phi}{\partial x} - \int f \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx.$$

等号右边该积出之项为零, 因为我们必须使 f 在无限远处为零. (这相当于使 η 在 t_1 和 t_2 时为零. 因此, 我们的原理就应该更准确地说成: 对于该正确的势 $\underline{\phi}$, U^* 比对其他任一势 $\phi(x, y, z)$, 都具有较小之值, 而在无限远处 $\underline{\phi}$ 和 ϕ 则都有相同之值.) 然后我们对于 y 和 z 也是这样做. 因而 ΔU^* 的积分就是

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\phi} - \rho) f dV.$$

为了使这一变分对于任一个 f ——不管是什么——都为零, f 的系数就必须为零, 因而

$$\nabla^2 \underline{\phi} = -\rho / \epsilon_0.$$

我们又得到那个古老方程. 因而上述的“极小”命题就是正确的了.

如果我们采用稍为不同的方法来做代数, 就可以使命题普遍化. 让我们回到原式那里去, 不先取各分量, 而直接做分部积分. 由注意下列这个等式开始:

$$\nabla \cdot (f \nabla \underline{\phi}) = \nabla f \cdot \nabla \underline{\phi} + f \nabla^2 \underline{\phi}.$$

如果微分左边, 就能证明这刚好等于右边. 现在可以将这一等式用于分部积分上. 在上述积分 ΔU^* 中, 要用 $f \nabla^2 \underline{\phi} - \nabla \cdot (f \nabla \underline{\phi})$ 来代替 $-\nabla \underline{\phi} \cdot \nabla f$, 而这又得对体积进行积分. 其中散度一项的体积分可以由一个面积分代替:

$$\int \nabla \cdot (f \nabla \underline{\phi}) dV = \int f \nabla \underline{\phi} \cdot \mathbf{n} da.$$

既然对全部空间积分, 则所积到的面就应位于无限远处. 由于那里 f 会等于零, 因而得到一个与前相同的答案.

只有现在我们才知道怎样来解答一个我们不懂得其中一切电荷如何分布的问题。假设以某种办法使一些电荷分布于某些导体之上。只要所有导体之势都固定不变，我们仍然能够应用那极小原理。要仅仅在一切导体之外的空间中进行 U^* 的积分。这时，由于不能使导体上的 ϕ 发生变化，在所有那些表面上 f 就都等于零，因而该面积分

$$\int f \nabla \phi \cdot n da$$

仍然为零。那剩下来的体积分

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \phi - \rho) f dV$$

只是在各导体之间的空间里进行。当然，我们又再得到那个泊松方程：

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0.$$

至此，就已经证明了那原来的积分 U^* 也是一个极小，如果在电势全都固定了的各导体之外的空间里进行计算的话（这就是说，当 x, y, z 是指其中一个导体的表面上一点时，任何用来尝试的 $\phi(x, y, z)$ 都必须分别等于各该导体的给定势值）。

一个饶有兴趣的情况是当电荷只存在于导体上时。这时

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV.$$

我们的极小原理申述，在一群导体都固定在某些给定势值上的那种情况下，在它们之间的势就会自动调整到使积分 U^* 为最小。这一积分指的是什么呢？ $\nabla \phi$ 项就是电场，因而该积分分

就是静电能。真正之场乃是在一切来自一个势之陡度中那个会给出最小总能量的。

我想要利用这一结果来算出某一具体东西，从而向你们证明这些东西实际上是非常有用的。假设我取两个构成一柱形电容器的导体（图 19-10），那内导体具有电势 V ，而外导体的电势为零。令内、外导体的半径分别为 a 和 b 。现在可以假定在它们之间的任一个势分布。如果采用该正确 ϕ 而算出 $\epsilon_0/2 \int (\nabla \phi)^2 dV$ ，那应当是该系统的能量，即 $\frac{1}{2} CV^2$ 。

因此，也可以根据我们的原理来算出 C 。但若采用一个错误的势分布而试图按这一办法来算出 C ，则我们将得到一个太大的电容，因为电势 V 已经给规定了。任何假定出来的并非严格等于该正确势的 ϕ ，都会给出一个比正确值要大的冒充的 C 。不过如果我的错误的 ϕ 是在任一粗略近似上， C 仍将是一个优良近似，因为 C 的误差比 ϕ 的误差要高一级。

假设我还未知道一个柱形电容器的电容。那我就可以利用这一原理来找到它。方法只是对该势函数 ϕ 进行猜测直到获得最低的 C 值为止。例如，假定我选取一个相当于一恒定场之势。（当然，你知道，这里的场实际上不是恒定的；它会随 $1/r$ 变化。）一个恒定场意味着一个与距离成正比之势。为配合该两导体所在处的条件，它必须是

$$\phi = V \left(1 - \frac{r-a}{b-a} \right).$$

这一函数在 $r=a$ 处为 V ，在 $r=b$ 处为零，而在两者之间则有一个等于 $-V/(b-a)$ 的斜率。所以我们对于求该积分 U^* 所做的就是将这个陡度的平方乘以 $\epsilon_0/2$ 并对全部体积求积分。

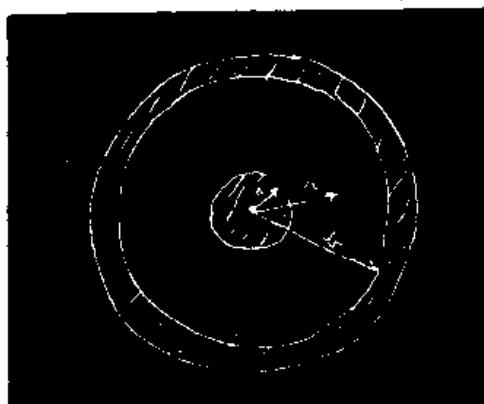


图 19-10

让我们对一单位长度之柱来做这一计算吧。在半径 r 处的体积元为 $2\pi r dr$ ，将这一积分做出，我对求电容的第一次尝试就得到

$$\frac{1}{2} CV^2 \text{(第一次尝试)} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r dr.$$

这积分是容易算出的；它只是

$$\pi V^2 \left(\frac{b+a}{b-a} \right).$$

于是我就有了一个关于该电容的公式，但这只是一种近似，并非正确的结果：

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

自然，这与那正确答案 $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ 不同，但并非太坏。让我们对几个 b/a 值就此与该正确答案作个比较，所得结果列如下表：

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{正确}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C_{\text{(第一次近似)}}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.4423	1.500
4	0.721	0.833
10	0.434	0.612
100	0.267	0.51
1.5	2.4662	2.50
1.1	10.492070	10.500000

即便当 b/a 大至 2 时——这在电场上比起一个线性变化的场来已经有相当大的改变——我仍会获得一个相当好的近似。当然，答案稍为偏高一些，正如所预期的那样。如果你有一根细线放在一个大圆筒之中，事情就会变得更糟。这时场已有了巨大变化，而倘若你还是用一个恒定场来表达它，那你就干得不太好。当 $b/a=100$ 时，我们偏离了几乎一个因数 2。对于小的 b/a ，则事情要美妙得多。试取一个相反的极端，当两导体相距不远——比方说 $b/a=1.1$ ——时，则该恒定场就是一个相当好的近似，而我们会得到准确至千分之一的正确 C 值。

现在我要来告诉你，如何可改进这种计算。（当然，对于柱形电容器来说你已经知道该正确答案，但对于其他一些你还不知道其正确答案的古怪形状，所用方法仍然与此相同。）下一步应当对该未知的正确 ϕ 尝试一个较好的近似。例如，你也许会去试一试一个常数加上一个指数函数的 ϕ ，如此等等。但除非你已知道该正确 ϕ ，否则你怎么会知道何时才能得到一个较好的近似呢？答案：你把 C 算出来；最低的 C 值就是那最接近于正确之值。让我们来尝试这一想法。假定该电势不是 r 的线性函数而是 r 的二次函数——电场不是恒定的而是线性的。最一般的二次形式的 ϕ 能够配合在 $r=b$ 处 $\phi=0$ ，而在 $r=a$ 处 $\phi=V$ 的乃是

$$\phi = V \left[1 + \alpha \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1+\alpha) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right],$$

式中 α 为一任意常数。这公式稍为复杂点。它在势中除了一个线性项外还包括一个二次项。从它很容易就可以得到场，该场不外是

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

现在我们必须就上式加以平方并对体积进行积分。但请等一等，我应当给 α 取个什么值

呢？我可以对 ϕ 取一条抛物线；但什么抛物线呢？这里就是我所要做的：用任意一个 α 算出电容。得到的结果是

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a} \left[\frac{b}{a} \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1 \right) + \frac{1}{6} \alpha^2 + \frac{1}{3} \right].$$

这看来还是稍为复杂一点，但它是从对场之平方进行积分而得到的。现在我可来选择 α 了。我知道正确结果总是比我将要去算出的任何值都小，因而不管我代入什么 α 值总会得到一个太大的答案。但如果我保持着玩弄 α 并得到一个我所能得到的最低值的话，则这个最低值就会比其他任何值都更接近于真实。所以我将要做的次一件事就是去拣出会提供极小 C 值的那个 α 。按照寻常微分法来做，我得到极小的 C 出现在 $\alpha = -2b/(b+a)$ 时，将此值代入该公式中，对于极小电容我便得到：

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

我已经算出了对于各不同 b/a 值这一公式会给出的 C 值，我将称这些数值为 C (二次)，这里将列出一个以 C (二次)与正确 C 相对照的表。

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{正确}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{二次})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.4423	1.444
4	0.721	0.733
10	0.434	0.475
100	0.267	0.346
1.5	2.4662	2.4667
1.1	10.492070	10.492065

例如，当两半径之比为2比1时，我得到1.444，这对于该正确答案1.4423来说已经是一个很好的近似。即使对于较大的 b/a ，它仍保持相当好——比那第一次近似要好得多。当 b/a 为10比1时，还是相当准确的——只偏离百分之十。但当 b/a 达到100比1时，事情就开始变糟。我所得到的 C 乃是0.346而不是0.267。在另一方面，对于1.5的半径比率，该答案显出十分优良；至于对1.1的 b/a ，答案表明是10.492065而不是10.492070。无论任何地方答案应该要求良好的，它就已经非常非常之好了。

我已经举出上面好些个例子，首先在于表明这些极小作用原理和一般极小原理的理论价值，其次在于表明它们的实用价值——不仅仅是去算出我们已明知其答案的那种电容。对于任何其他形状，你可以用某些象 α 的未知参数去猜测一个近似的场并将这些参数调整到会获得一个极小值为止。这样你就会得到否则将难以处理的一些问题的优良数值结果。

讲后添加的一段笔记：

我愿意添加一点我没有时间在课堂上讲的东西。（似乎我总是准备了比我有时间讲到的更多的材料。）正如我在上面曾经提到的，当准备这一演讲时我对一个问题感到兴趣。我要来告诉你们这是个什么问题。在我上面所提及的极小原理中，我曾注意到其中大多数总是来自力学和电动力学中的最小作用原理。但也有一类并非如此。作为一个例子，若电流通过某一块材料时遵从欧姆定律，则在这块材料中的电流就会分布得使热之产生率尽可能小。我们也可以讲（如果一切东西都保持等温的话），能量产生的时率是一极小值。那么，按照经典理论，这一原理甚至也适用于在一块载流的金属中去确定电子的速度分布。速度的这种

分布并非严格是一个平衡分布[见第一卷第四十章; 式(40.6)], 因为电子正在向侧面漂移. 这一新的分布可以从下述原理找到, 即它是对某一给定电流能使每秒由于碰撞所产生之熵尽可能少的一种分布. 然而, 关于电子行为的正确描述应该是根据量子力学的. 于是问题就是: 当情况要用量子力学来描述时, 关于产生极小熵的同一原理是否仍然正确? 我对此还未找到答案.

当然, 这一问题在理论上挺有趣. 象这样的原理是令人神往的, 而且始终值得去尝试看清其普遍性如何. 但从一个更为实用的观点, 我也希望去了解它. 我与几位同事曾经发表过一篇论文, 其中我们根据量子力学近似地计算出一个电子在其行经一块象 NaCl 那样的离子晶体中时所感觉到的电阻. [Feynman, Hellworth, Iddings, and Platzman, "Mobility of Slow Electrons in a Polar Crystal," *Phys. Rev.* 127, 1004(1962).] 但要是有一极小原理存在, 我本来可以用它来使结果更为精确些, 就象有关电容器电容的极小原理曾经允许我们去获得对电容那样高的准确度, 尽管对于电场方面我们却仅有一种粗糙的知识那样.

20

麦克斯韦方程组在自由空间中之解

§ 20-1 自由空间波; 平面波

在第十八章中，我们曾达到拥有完整形式的一套麦克斯韦方程组的那种地步。一切有关电磁场的经典理论所必须懂得的都可以在下列四个方程中找到：

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{IV. } C^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \quad (20.1)$$

当我们把所有这些方程都凑合在一起时，一个显著的新现象出现了：由运动电荷所产生的场可以离开源而独自经由空间奔驰。我们曾考虑过一个特殊例子，在其中一张无限大电流片被突然地接通。当电流已经通上了 t 时间之后，

就有从源处扩展至距离为 ct 的一种匀强电场和磁场。假设该电流片被置在 yz 平面上，即具有沿正 y 方向的一个面电流密度 \mathbf{J} ，电场将只有一个 y 分量，而磁场则只有一个 z 分量。对于比起 ct 为小的那些正 x 值，这些场分量之大小由下式给出：

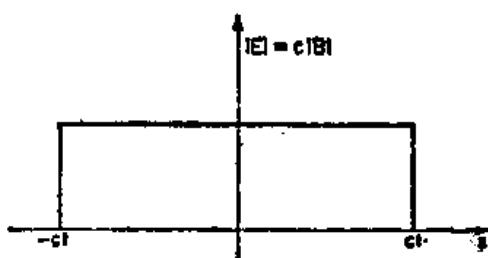


图 20-1 在电流片接通后的 t 时刻，作为 x 函数的电场和磁场

但对于较大的 x 值，则这些场都是零。当然，也有从该电流片伸向负 x 而达到同一个距离的相似之场。在图 20-1 上我们画出了一条在 t 时刻场之大小作为 x 函数的曲线。随着时间的推移，在 ct 处的“波前”会以恒速度 c 沿 x 方向往外传播。

现在，试考虑下述的事件次序。首先接通单位强度的电流并经历了一段时间，然后突然把电流强度增加至三个单位，并从此一直保持在这一数值上。这时场会象个什么样子呢？我们能够按照如下方式来看个究竟。首先，设想有一单位强度的电流在 $t=0$ 时接通，并且永不改变。这样，对于在 x 正向之场就由图 20-2(a) 的那条曲线给出。其次，我们要问，若在 t_1 时刻接通二个单位的稳恒电流又将发生什么？

在这一情况下场将比原来增强一倍，但在 x 方向仅伸展到 $c(t-t_1)$ 那么远的距离，如图 20-2(b) 所示。当我们运用迭加原理而把这两个解相加起来时，就会发现这两个源之和在从零至 t_1 的时间里电流为一单位而在大于 t_1 的时间里电流为三单位。在 t 时刻则

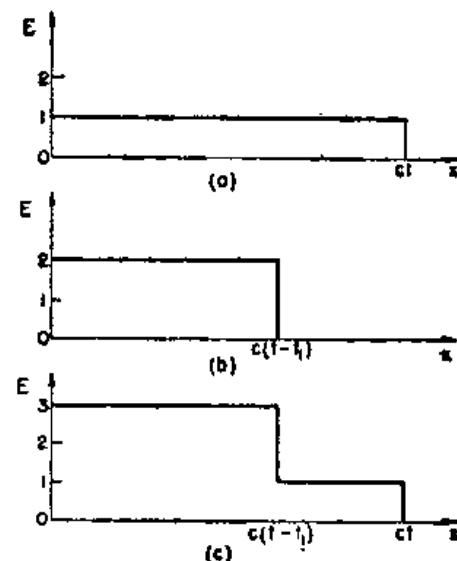


图 20-2 由一张电流片产生的电场。
(a) 在 $t=0$ 时，一单位电流被接通；
(b) 在 $t=t_1$ 时，二个单位的电流被接通；(c) (a) 和 (b) 两者的迭加

场随距离 x 变化的情形如图 20-2(c) 所示。

现在, 让我们取一个复杂一些的问题。考虑接通至一单位强度, 过了一会儿之后, 又增强至三个单位, 再过些时便完全给截断了的这样一种电流。对于这么一种电流, 场又将如何呢? 我们能够按照同一种办法来求出解答——把三个分开着的问题之解都相加起来。首先, 求一个单位强度的阶梯式电流之场。(这我们已经解过。)其次, 再求二个单位的阶梯式电流之场。最后, 才解出那三个负单位的阶梯式电流之场。当我们把这三个解都相加起来时, 便会得到一个从 $t=0$ 起至某一往后时刻——比如说 t_1 ——的单位强度, 然后又有三个单位强度一直持续到一个更后时刻 t_2 , 之后才将其完全弄断——也就是变成零的那种电流。作为时间函数的电流曲线如图 20-3(a) 所示。当我们把电场的那三个解相加起来时, 便会找到在某一给定时刻 t 电场随 x 的变化应如图 20-3(b) 所示。场是电流的准确表象。在空间中的场分布就是电流随时间变化的一条漂亮曲线——只不过要倒转过来画才对。随着时间流逝整个形象会以速率 c 向外移动, 因而就有一小截场朝正 x 方向奔跑, 这里面含有对全部电流变化的历史的一个完整详尽的记录。要是站立在若干英里以外, 我们该能够从电场和磁场的变化情况中准确地说出在源处电流曾经是怎样变化着的。

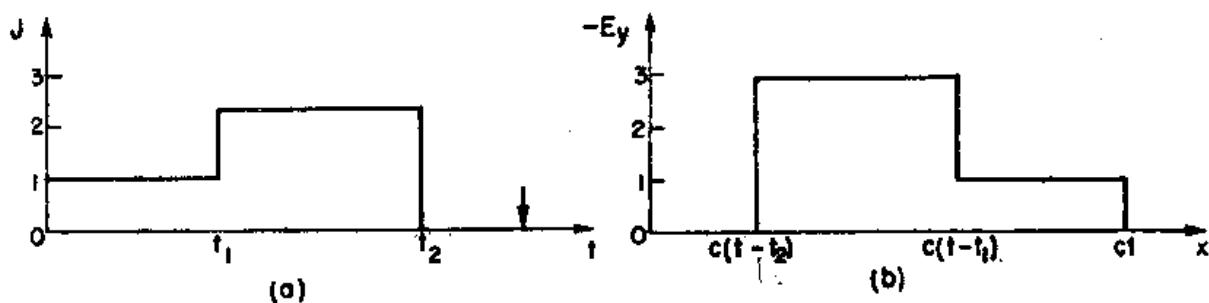


图 20-3 如果电流源强度随时间的变化如图(a)所示, 则在前头所指的 t 时刻电场作为 x 函数就如图(b)所示

你也将注意到, 远在源处的所有活动都已完全停止而一切电荷和电流都变为零之后, 那一小截场仍将继续通过空间行进。我们已有了不依赖于任何电荷或电流而存在的一种电场和磁场分布。这就是来自该完整麦克斯韦方程组的那个新效应。如果我们愿意, 尽可以对刚才所做的分析给出一个完全数学形式的表象, 即把在某一给定地点和给定时刻的电场写成与在源处之电流成正比, 只不要在同一时刻, 而是要在一个较早时刻 $t-x/c$ 上的。我们可以写出

$$E_y = -\frac{J(t-x/c)}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.3)$$

信不信由你, 早在第一卷当与折射率理论打交道时, 我们就曾导出过这同一个式。那时有必要算出当一片电介质材料中的一薄层偶极子受一射进来的电磁波的电场所驱动而发生振动时产生出来的电场如何。我们当时的问题是要算出原来波之场与由振动偶极子所辐射的波之场两者的联合场。当还缺乏麦克斯韦方程组时怎么能够算出由运动电荷所产生出来之场呢? 当时我们曾取(不作任何推导)一个从一加速点电荷在远处所产生的辐射场的公式作为我们的起点。如果你查阅一下第一卷第三十一章, 你就会看到, 那里的式(31.17)同我们刚才写下来的式(20.3)完全一样。尽管我们以前的推导只有在距离源处很远的地方才正确, 但现在明白, 即使在靠近源处这同一结果仍然是正确的。

目前, 要就普遍情况来考察在离源也即离电流和电荷很远的自由空间里电场和磁场的

行为。在十分靠近源处——近至足以使在传播的延迟时间内源还没有时间来得及作出大的变化——场与我们过去在所谓静电和静磁的那些情况中所找到的几乎完全相同。然而，如果我们已跑到了延迟变成十分重要的那些距离上，则场之性质就可能与我们所已找到的那些解之性质根本不同。在某种意义上，当场已离开所有之源很远时，它便开始取得它们本身的特性。因此，我们便可以开始讨论在一个既没有电流也没有电荷的区域里场之行为了。

假设我们问起：在 ρ 和 j 两者都是零的那些区域里哪一种场才会存在呢？在第十八章中我们曾经见过麦克斯韦方程组也可以表达成对于标势和矢势的一组微分方程：

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (20.4)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (20.5)$$

如果 ρ 和 j 都是零，则这些方程便会取一个较简单形式：

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.6)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.7)$$

这样，在自由空间里，标势 ϕ 和矢势 \mathbf{A} 的每一分量就都满足同一个数学方程。假如令 ψ 代表 ϕ, A_x, A_y, A_z 四个量中的任一个，则我们需要研究下列方程的通解：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.8)$$

这个方程称为三维的波方程式——所谓三维，是因为该函数 ψ 可以普遍地依赖于 x, y 和 z ，因而我们必须对在这三个坐标上的变化都关心。如果将拉普拉斯算符的三项都明显写出：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.9)$$

则我们对这一点就很清楚。在自由空间中电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 也都各自满足这一方程式。例如，既然 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，我们便可通过取式(20.7)的旋度而得到一个关于 \mathbf{B} 的微分方程。由于拉普拉斯算符是一标量算符，这算符与旋度算符便可以互相交换位置：

$$\nabla \times (\nabla^2\mathbf{A}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2\mathbf{B}.$$

同理，旋度算符与 $\partial/\partial t$ 的次序也可以互换：

$$\nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

利用这些结果，便可获得下列关于 \mathbf{B} 的微分方程：

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.10)$$

因此，磁场 \mathbf{B} 的每一分量就都满足该三维的波方程式。同样，若利用 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - d\mathbf{A}/dt$ 这一事实，也可随之而得到在自由空间中的电场 \mathbf{E} 也满足该三维波方程：

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.11)$$

一切电磁场都满足同一个波方程(20.8)。也许我们还要问：方程最一般的解到底是什么？然而，与其马上去处理这个困难问题，倒不如首先来看看对不随 y 和 z 变化的那些解一般能有什么可说的。（常常要先算出一个容易情况以便能看清将会发生的事情，然后你才能

深入到那些较复杂的情况中去。) 让我们假定那些场都仅取决于 x ——并没有跟 y 和 z 的那种场变化。当然，我们又是在考虑平面波了。应该期待会得到与前一节中多少有点相似的结果。事实上，我们即将找到那恰好彼此相同的答案。你可能会问：“为什么还要从头做一遍呢？”再做一遍很重要，第一，因为我们过去从未证明过已找到的波就是对于平面波的最普遍的解；其次，则因为我们当时仅从一个十分特殊类型的电流源找到了那些场。目前该乐于提问：在自由空间中关于一维波的最普遍类型到底是什么？我们不能通过看看这个或那个特殊源所发生的事情而做到这一点，但必须以更大的普遍性来从事工作。而且这回是要处理微分方程而不是处理一些积分形式。尽管将得到同一些结果，但仍不失为一种反复练习的途径，借以证明无论你采取什么方法都不会产生任何差别。你应该懂得如何去用多种方法来做事情，因为当碰到一个困难问题时，你往往会在那各种方法中只有一种才是最易于驾驶的。

我们本来就可以直接考虑对某一个电磁量的波方程之解。但还是不要这样做，宁可从一开始由自由空间中的麦克斯韦方程组出发，以便使你能够看得出它们与电磁波之间的密切关系。因此，我们就由(20.1)那个方程组出发，令其中的电荷和电流都各等于零。它们便变成

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I.} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \text{II.} & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III.} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \text{IV.} & c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (20.12)$$

把第一个方程用分量来写出：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (20.13)$$

我们已经假定场不会随 y 和 z 变化，因而后两项就都是零。于是，这个式告诉我们：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (20.14)$$

它的解是，在 x 方向上的电场分量 E_x 在空间里乃是一恒量。如果你考察式(20.12)中的 IV 式，同时假定 \mathbf{B} 没有在 y 与 z 方向上的变化，那么你就能够看出 E_x 在时间上也是不变的。象这样的场，有可能来自远处某一电容器极板上的电荷的稳恒直流场。此刻，我们对于这种枯燥乏味的静电场不感兴趣；目前感兴趣的只是一些动态变化之场。对于动态场来说， $E_x = 0$ 。

于是我们就有一个重要结果，即对于沿任一方向传播的平面波，电场总必须垂直于传播方向。当然，它仍然能够跟着坐标 x 作任何复杂形式的变化。

这一个横向 \mathbf{E} 场总可以分解成两个分量， y 分量和 z 分量。所以让我们先算出那种电场仅有一横分量的情况。我们将首先考虑一个始终在 y 方向上而不具有 z 分量的电场。显然，若已解出了这一问题，也就能解出电场总是在 z 方向上的那种情况。通解始终可以表达成这样两种场的迭加。

现在，我们的方程组已变得多么容易。电场的唯一不等于零的分量为 E_y ，而所有的微商——除了对于 x 的微商以外——都等于零。这样，其余的麦克斯韦方程就都变成十分

简单的了。

其次，让我们来看看麦克斯韦方程组中的第二个[(20.12)中的 II 式]。将 \mathbf{E} 之旋度的各分量写出，便有

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

$\nabla \times \mathbf{E}$ 的 x 分量为零，因为对 y 和对 z 的微商都是零。它的 y 分量也是零；其中第一项为零是因为对 z 的微商为零，而第二项则是由于 E_x 为零而得零的。 \mathbf{E} 之旋度的唯一不等于零的分量为 z 分量，那是等于 $\partial E_y / \partial x$ 的。令 $\nabla \times \mathbf{E}$ 的三个分量各对应于 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ 的分量，我们便可得到下列结论：

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0. \quad (20.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (20.16)$$

既然磁场的 x 分量和 y 分量两者对时间的微商都为零，这两分量就不过是相当于我们以前所找到的那些静磁解的恒定场。可能某人曾将一些永磁铁遗留在波传播所经过的地方附近。我们决不理睬这些恒定场，因而就令 B_x 和 B_y 都各等于零了。

顺便提一下，基于一个不同理由我们该会断定 \mathbf{B} 之 x 分量应为零。由于 \mathbf{B} 之散度为零（由第三个麦克斯韦方程得知），运用与我们上面关于电场所用的相同论据，就会得出结论说，磁场的纵向分量并没有随 x 变化。既然我们在对波的各种解答中忽略了这种匀强场，就该令 B_x 等于零了。在平面电磁波中， \mathbf{B} 场以及 \mathbf{E} 场都一定要与传播方向垂直。

式(20.16)向我们提供一个附加定理：如果电场只有 y 分量，则磁场将只有 z 分量，所以 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 彼此互相垂直。这正是我们曾经考虑过的那种特殊波中所出现的情况。

现在准备利用对自由空间中的最后一个麦克斯韦方程[(20.12)中的 IV 式]。将它的分量写出，便有：

$$\left. \begin{aligned} c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_x &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_y &= c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_z &= c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

在关于 \mathbf{B} 之分量的六个微商中，只有 $\partial B_z / \partial x$ 一项不等于零。因此，这三个方程仅向我们提供

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (20.18)$$

上述一切工作的结果表明，电场与磁场都仅有一个不等于零的分量，而这些分量应该满足式(20.16)和(20.18)。如果对前一式取 x 微商而对后一式取 t 微商，则这两个方程可以结合成一个；这时两方程的左边（除了那个因数 c^2 之外）将彼此相同。因此我们发现， E_y 会满足下列方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (20.19)$$

在过去学习声音的传播时, 我们就已经见过这一微分方程。它是关于一维波的波方程。

你应该注意到, 在我们的推导过程中已经找到了比包含在式(20.11)中的还要多的某种东西。麦克斯韦方程组已向我们提供进一步的知识, 即电磁波只具有垂直于其传播方向的场分量。

让我们复习一下关于一维波方程所已知之解。如果有任一个量 ψ 满足一维的波方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.20)$$

则一个可能之解就是具有如下形式的 $\psi(x, t)$ 函数:

$$\psi(x, t) = f(x - ct). \quad (20.21)$$

也就是说, 是该单独变量 $(x - ct)$ 的某一函数。函数 $f(x - ct)$ 代表一个在 x 轴上的“刚性”图样朝着正 x 方向以速率 c 在奔跑(见图20-4)。例如, 若该函数 f 当它的自变数为零时有一个极大值, 则在 $t = 0$ 时该极大值会出现在 $x = 0$ 处。此后在某一时刻, 比方说当 $t = 10$ 时, ψ 将在 $x = 10c$ 处有它的极大值。当时间继续向前推移时, 这极大值仍以速率 c 朝着正 x 方向行进。

有时这样说会更为方便, 即一维波方程的一个解属于 $(t - x/c)$ 的一个函数。然而, 这里谈的正是同一件东西, 因为 $(t - x/c)$ 的任一函数也就是 $(x - ct)$ 的一个函数:

$$F(t - x/c) = F\left[-\frac{x - ct}{c}\right] = f(x - ct).$$

让我们来证明 $f(x - ct)$ 的确是该波方程的一个解。由于它是唯一的一个变数——即该自变数 $(x - ct)$ ——的函数, 我们便将令 f' 代表 f 对于该变数的微商而 f'' 代表 f 的二次微商。就式(20.21)对 x 取微商, 便有

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x - ct),$$

因为 $(x - ct)$ 对 x 的微商为1。 ψ 对 x 的二次微商显然等于

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct). \quad (20.22)$$

取 ψ 对于 t 的微商, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f'(x - ct)(-c), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +c^2 f''(x - ct). \end{aligned} \quad (20.23)$$

我们看出, f 确实满足该一维波方程。

你可能正在感到诧异: “如果我有那一个波方程式, 又怎么会知道应取 $f(x - ct)$ 作为它的一个解呢? 我就不喜欢这一种倒退的办法。是否有向前看的办法来找出一个解答呢?” 哟, 一个好的向前看的办法就是要知道那个解答。是有可能“杜撰”出一个显然是向前看的数学论证来的, 特别是因为我们已知道解答大概应该如何, 但对于一个这么简单的方程来说就

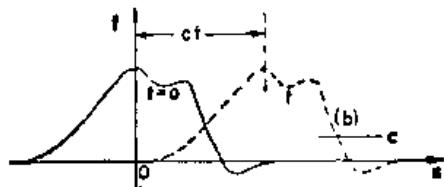


图 20-4 函数 $f(x - ct)$ 代表一个朝正 x 方向以速率 c 奔跑着的不变“形状”

不须去玩弄什么把戏了。不久你将会达到这样的地步，即当一旦看到式(20.20)时，就几乎同时会看出 $\psi = f(x - ct)$ 是一个解。(就象现在当你看到 $x^2 dx$ 的积分时，你马上就知道答案是 $x^3/3$ 似的。)

实际上，你也应该看出稍为多一点的东西。不仅任何 $(x - ct)$ 的函数是一个解，而且任一个 $(x + ct)$ 的函数也是一个解。既然该波方程中仅含有 c^2 ，所以改变 c 之符号就不会引起任何差别。事实上，一维波方程最普遍的解乃是两个任意函数之和，其中一个是 $(x - ct)$ 的函数而另一个则是 $(x + ct)$ 的函数：

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (20.24)$$

第一项代表一个沿正 x 向奔跑之波，而第二项则是沿负 x 向奔跑的任意一个波。通解就是两个这样的波同时存在的迭加。

我们将把下面一个逗人乐趣的问题留给你去想想。考虑如下形式的一个函数 ψ ：

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

这个式并不取 $(x - ct)$ 或 $(x + ct)$ 的函数形式，但你可以通过将其直接代入式(20.20)中而轻易地证明这函数就是该波方程的一个解。那么，我们怎能够说通解具有如式(20.24)那样的形式呢？

将我们关于波方程之解的那些结论应用到电场的 y 分量 E_y 上去，就可以断言， E_y 能够按任何一种方式跟 x 变化。然而，确实存在之场总可以认为是两个图型之和。一个波是在一个方向上以速率 c 通过空间飞驶，带有一个垂直于电场的相关磁场；另一个波则是在相反方向上以同一速率行进，象这样的波相当于我们所已熟悉的各种电磁波——光、无线电波、红外辐射、紫外辐射、X 射线等等。我们曾在第一卷中详细讨论过光之辐射。由于在那里所学到的每一件东西都适用于任一个电磁波，我们便不须在这里再来详尽地讨论这些波的行为了。

也许应当对电磁波的偏振问题进一步作几点述评。在上述的解中，我们曾商定考虑其中电场只有一个 y 分量的那种特殊情况。显然还有另一个解，其中电场只有一个 z 分量，但也是朝着正的或负的 x 方向奔跑着的波。由于麦克斯韦方程组是线性的，对于沿 x 方向传播着的一维波之通解就是 E_y 波和 E_z 波之和。这个通解可以综合成下列的一组式：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_y, E_z) \\ E_y &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ E_z &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ \mathbf{B} &= (0, B_x, B_z) \\ cB_x &= f(x - ct) - g(x + ct) \\ cB_z &= -F(x - ct) + G(x + ct). \end{aligned} \quad (20.25)$$

这样的电磁波具有一个 \mathbf{E} 矢量，其方向并非固定而是在 yz 平面上按某一任意方式旋转。在每一点上磁场总是垂直于电场，也垂直于传播方向。

如果只有在一个方向、比如在正 x 方向上行进之波，就会有一个简单法则告诉我们关于电场和磁场的相对取向。这法则是：叉积 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ——当然，那是一个既垂直于 \mathbf{E} 也垂直于 \mathbf{B} 的矢量——指着波正在行进的方向。如果从 \mathbf{E} 转到 \mathbf{B} 是按照右手螺旋法则，则这个螺

旋便会指着波速方向。（往后我们将见到，矢量 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 具有一个特殊的物理意义：它是描述电磁波中能量流动的一个矢量。）

§ 20-2 三 维 波

现在要转到三维波的课题上来。我们已经见到，矢量 \mathbf{E} 会满足那个波方程。通过直接由麦克斯韦方程组来作论证也容易得出这同一结论。假设我们是从方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

出发，并取两边的旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}). \quad (20.26)$$

你将会记起，任一矢量之旋度的旋度都可以写成两项之和，其中一项含有散度而另一项含有拉普拉斯算符，即

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

然而，在自由空间里， \mathbf{E} 之散度是等于零的。因而只有拉普拉斯算符那一项才保留着。并且，根据在自由空间的第 IV 个麦克斯韦方程[式(20.12)]， $c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ 的时间微商即是 \mathbf{E} 对 t 的二次微商：

$$c^2 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

于是式(20.26)就变成

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

这代表三维的波方程式。若要反映出它的全部光辉，这一方程当然就是

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.27)$$

我们如何来找出波之通解呢？答案是所有对于三维波方程之解都可以表达成所已找到的那些一维解的迭加，通过假定场并不依赖于 y 和 z 我们已获得在 x 方向上运动着之波的式子。显然，也有其中场并不依赖于 x 和 z 而代表在 y 方向上进行着的波之解。然后还有与 x 和 y 都无关而代表沿 z 方向奔跑着的波之解。或者一般说来，既然我们已将方程写成了矢量形式，则该三维波方程便可以有朝任何一个方向运动着的平面波之解。再则，由于那些方程都是线性的，便可以同时拥有随心所欲的沿尽可能多的不同方向而进行的许多个平面波。这样，该三维波方程的最一般解就是在各不同方向上运动着的所有各种平面波的迭加。

试想象此刻存在于这个课堂空间中的电场和磁场象个什么样子。首先，有一个稳恒磁场，那是来自地球内部的电流的——也就是地球的稳恒磁场。然后，还有一些不规则的、几乎是静态的电场，这或许是由于各人在其椅子上移动并以其大衣袖口擦过椅臂时由于摩擦而引起的电荷所产生的。然后也有由电线里的振动式电流所产生的其他磁场——以每秒 60 赫的频率变化着、并且与柏耳达水坝的发电机同步的场。但更为有趣的乃是那些以更高得多的频率变化着的电场和磁场。例如，当光从窗口至地板、从这面壁至那面壁行进时，就会有电场和磁场的微小摆动以每秒 186,000 英里的速率跟着奔跑。然后也有从各个温暖的脑门子跑向较冷的黑板上的红外波。而我们已经把那些紫外光、X 射线、以及飞越这个房间

里的各种无线电波都忘记了。

飞过这个房间里的还包括载有爵士乐队音乐的那些电磁波，也有由那些代表着世界上其他各地方发生的事故的图象、或代表着那种想象的退热药阿斯匹林溶解在想象的肚子里的图象的一系列脉冲所调制了的那些波。要演示这些波的真实性，只须打开那种能把这些波转变成图象和声音的电学设备就行了。

如果我们更加详细地分析到那些甚至是最微小的摇动，便有从庞大距离进入这房间里的细小电磁波。此刻就有这一种电场的微小振动，其波峰相距一英尺，那是来自几兆英里以外、由水手二号空间飞船刚刚经过金星时所传送到地球表面上来的。它的信号载着它从那个行星所拾到的情报总汇（由该行星出发行至空间飞船上的电磁波所提供的情报）。

此外还有电场和磁场的十分微小摇动，那是发源于几十亿光年以外——从宇宙间最遥远角落里的星系送来之波。这件事情的真实性已由“用导线充满的房间”——即由建立一套有这房间那么大的天线组——而找到了。这种从空间中超过那座最大光学望远镜所能见到的范围的一些地方来的无线电波被探测到了。甚至那些光学望远镜也不过是电磁波的收集器而已。所谓星星，只是一些推断，即从它们那里迄今已获得的唯一物理实质所作出的推断——对到达地面上这里来的电场和磁场的那些无数复杂的振动作了仔细研究而得出来的东西。

当然，还有更多的电磁场：从若干英里外的闪电所产生之场，那些带电的宇宙射线粒子当其嘘嘘地通过我们的房间里时之场，此外还有更多更多、围绕着你四周的空间电场竟会如此复杂！但它却始终满足该三维波方程式。

§ 20-3 科学的梦想

我曾要求你们对这些电场和磁场进行想象，到底应该做些什么呢？你们是否懂得了怎样去做？我该如何设想电场和磁场呢？我实际看到的到底是些什么？对科学想象应有哪些要求？它与试去想象这房间里充满着一些看不见的天使究竟有何区别？不，这并不象对那些看不到的天使的想象。要理解电磁场，比理解那些看不见的天使，还要有高得多的想象力。为什么？因为要使那些看不到的天使们可以理解，我所必须做的一切只是把他们的性质稍为改变一点点——即使得他们稍为看得见，这样我就能见到他们的翅膀、躯体和车轮了。一旦我已成功地想象出一个见得到的天使，那么所必须作的抽象化——即接纳一些几乎看不见的天使而把他们想象成完全是看不见的——就相对地容易了。所以你会说，“教授先生，请给我一个关于电磁波的近似描述吧，那怕它还可能有点不准确，以便使我也能象看到那些几乎见不得的天使们那样看到它们。然后我才将该图象修改成那所需的抽象化”。

对不起，我不能为你做这件事。我不懂得怎么去办。我并没有关于这电磁场在任何意义上准确的图象。我已长时间知道了电磁场——25年前我所处的地位与你们现在所处的地位正好相同，而我已经有了多出这25年来琢磨这些摇动着的波的经验。当我开始描述磁场在空间里运动时，我谈及 E 场和 B 场并挥摆我的两只手臂，而你可能就想象起我已能够看到它们了。我将告诉你我所看到的是什么。我看到了某种模糊的阴影，摇动着的线——莫明其妙但又总得在这里或那里标明之为 E 或 B ，而也许有些线还带着箭头——当我对其考察得太细致时，这里或那里的一个箭头竟会消失不见。当我谈及飕地飞过空间中的那些场时，在用来描述对象的符号与对象本身之间存在一种可怕的混乱。我确实不能作出那怕

是仅仅接近于真实波的一种图象。不久如果你对于作出这样一种图象感到困难的话，你就不必担心你的困难是异乎寻常的了。

我们的科学对想象竟会提出这么可怕的要求。所需的想象程度比起对一些古老概念所要求的要极端得多。现代概念远较难于想象。尽管如此，我们还是用了一大堆工具，运用过数学方程式和法则，并造成许多种图象。我现在所认识的是：当我谈及在空间中的电磁场时，我所看到的乃是所有那些我曾见过的关于它们的图形的某种迭加。并未看到在周围奔跑着的那些小束场线，因为我担心如果我以另一速率走过则那些线束将会消失不见。甚至我并非自始至终都在注视着那些电场和磁场的，因为我有时还想到应当有一幅用矢势和标势来表示的图象，原因是，它们也许是正在摇动着的更具有物理意义的东西。

你会说，也许唯一的希望就是采取一个数学图象。那么数学图象又是怎么回事呢？从数学的观点看，空间中每一点有一个电场矢量和一个磁场矢量；即共有六个数目与每一点相联系。你能否想象出与空间中每一点联系着的竟有六个数目之多？那太难了。那怕只有一个数目与每点联系，你能够想象得出来吗？我就不能！我只能想象在空间中每一点象温度那样的东西，那似乎还是可以理解的。冷热从一处变化到另一处。但我老实说，我并不理解在每一点上就有一个数值的那种概念。

因此，也许应该这样来提出问题：我们能否把电场表达成更象温度那样的某种东西呢？比方说，象一块胶质的位移。假设我们是从这样来开始，即通过想象世界充满着一种稀疏胶质而场乃代表胶质中的某种畸变——比如说伸长和扭曲。那么我们本来就应该能够看到场的。在已经“看到”了它象个什么样子之后，我们就该能将那胶质抽象化掉。这就是许多年来人们所企图做到的。麦克斯韦、安培、法拉第、以及其他一些人都曾经尝试过按这一途径去理解电磁学。（有时他们叫这抽象化了的胶体为“以太”。）但事实证明，按那种方式去想象电磁场的尝试实际上是在前进道路上设置的一道障碍。可惜我们始终仅局限于去作抽象化，去应用某种东西来探测场，去利用数学符号来描述场，等等。但无论如何，在某种意义上场却是真实的，因为在我们完全结束了对数学方程式的反复摆弄之后——不管有无作出图象和图画或试图去看到那种东西——我们仍然能够使仪器探测出从水手二号送来的信号并找出远在几十亿英里以外的那些银河，等等。

科学中的整个想象问题往往被从事其他学科的人们所误解。他们按下述办法企图来试验我们的想象力。他们说，“这里就是一些人在某种情况下的一幅图象。你想象以后将会发生什么呢？”当我说“我想象不出来”时，他们可能就认为我的想象力太弱了。他们忽视了这么一桩事实，即在科学中容许我们去想象的无论什么东西都必须与我们所已知道的其他每一件事情相一致。我们所谈及的电场和波不只是某些我们随心所欲地自由创造出来的愉快思想，而是必须与我们所已知的一切物理规律都符合一致的一些概念。我们不能容许去认真地想象那些明显与所知的自然规律发生矛盾的东西。因而我们的那一种想象乃是十分困难的玩艺。人们得要有琢磨着一些从未见过或听说过的东西的那一种想象力。同时这些思想又好比是被束缚在一件紧身衣里，即受到来自自然界确实情况的知识的那些条件所限制。去创造出某种新的东西，但又要同以前所已知的每一件东西相一致，这是一个极端困难的问题。

乘正在谈这个课题的时候，我要来谈一下是否有可能想象得出我们所不能见到的那种美丽。那是一个饶有趣味的问题。当我们凝望着彩虹时，它会对我们表现出美丽。每个人

都会说，“啊，彩虹”。（你看我多么科学。我不敢说出某一件东西美丽，除非我已有一种用实验来对它下定义的办法。）可是假如我们都是瞎子，又该如何去描述彩虹呢？当我们测量氯化钠的红外反射系数时，或者当我们在谈到来自一些见不到的银河之波的频率时，我们就都是瞎子了——我们会作出一个简图，画出一条曲线。例如，对于彩虹来说，这样的曲线就应该是~~在天空中每一个方向上用分光光度计所测得的辐射强度对频率关系的图形~~。在一般情况下，这样的测量应当给出一条相当平坦的曲线。然后在某一天，在气候的某些条件下，并在天空中某一角度上，有人就发现作为波长函数的光谱强度发生了一种奇异行为；它表现出凹凸不平了。当仪器的角度只变更一点点时，这个凹凸不平的颠峰会从某一波长移向另一波长。然后有一日，这些盲人所办的物理评论杂志也许会发表一篇标题为“在某些气候条件下作为角度函数的辐射强度”的专门论文。在这篇论文中也许会出现一幅象图 20-5 所示的那种图线。作者可能要指

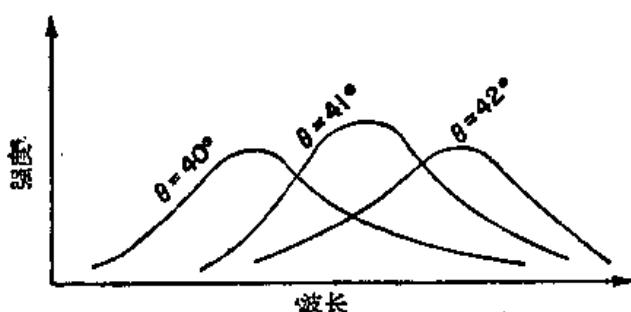


图 20-5 在(从与太阳相反的方向量起的)三个角度上电磁波的强度作为波长的函数，这只是在某些气象条件下进行测量的结果

出，在较大的角度上会有较多辐射集中在长波上，而对于较小角度，则辐射的高峰出现在较短的波长上。（从我们的观点出发，我们会说，在 40° 上绿色光占优势，而在 42° 上则红色光占优势。）

那么，我们觉得图 20-5 上的那些曲线很优美吗？它所包含的比我们当看到彩虹时所理解的要详细得多，因为我们的眼睛不能够在一种光谱的形状中看到其精确细节。然而，眼睛却会感觉到彩虹是美的。是否我们的想象力足以在光谱曲线中看到如同当我们直接了望彩虹时所看得到的那同一种美丽？我不知道。

但假定有一幅作为在红外区波长的函数，也作为角度的函数的关于氯化钠的反射系数的标绘图。要是眼睛能看到红外线——也许是一种灿烂夺目的“绿色”混杂着从该表面上反射而来的“金属红”——那么我该有一种对于我的两只眼睛会看出它象个什么的表示法了。那该是一件华丽的东西，但我还不知道我是否会有一天在看到用某种仪器测量出的关于 NaCl 的反射系数标绘图时，便能说出它具有那一种美丽。

另一方面，即使我们不能在具体的测量结果中看到美丽，我们也已能够断言在那些描述普遍物理规律的方程式中看到了某些优美之处。例如，在那个波方程(20.9)中，就有关于 x, y, z 和 t 表现出的整齐性的那种优美的东西。而这种在 x, y, z 和 t 的形式上所呈现出来的优美对称性对人们的思维就会提示一种更为伟大的美丽，那是有关四维方面的，即空间会有四维对称的可能性，在经过了分析之后发展成为狭义相对论的那种可能性。因此，联系到那些方程式就有许多智力上的美丽。

§ 20-4 球面波

我们已看到有一些属于波方程的解的平面波，而任一个电磁波都可描写成由许多平面波的迭加。然而，在某些特殊情况下，用与此不同的数学形式来描写波场往往更为方便。现在，我们愿意来讨论球面波——即相当于从某一中心扩展开去而形成各个球面的那种波

——的理论。当你把一块石头扔到湖里去时，那些涟漪会在水面上以圆形波的形式扩展开来——它们是二维波。一个球面波与此相似，只不过是在三维中伸展出去而已。

在我们开始描述球面波之前，需要一点点数学。假设有一个仅取决于从某一原点量起的径向距离 r 的函数——换句话说，就是一个球对称的函数。让我们叫它做函数 $\psi(r)$ ，其中 r 指的是

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

即与原点间的径向距离。要求出哪一种函数 $\psi(r)$ 才满足该波方程，我们将需要一个关于 ψ 的拉普拉斯算符的表达式。因此，就必须求出 ψ 对于 x 、 y 和 z 的二次微商之和。我们将采用这种记法，即 $\psi'(r)$ 代表 ψ 对于 r 的微商，而 $\psi''(r)$ 代表 ψ 对于 r 的二次微商。

首先，求对于 x 的微商。第一次微商为

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}.$$

ψ 对于 x 的二次微商为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi'' \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \psi' \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

可以由下列各式计算 r 对 x 的各级偏微商：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right).$$

因此， ψ 对于 x 的二次微商就是

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.28)$$

同理，

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \psi', \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.30)$$

拉普拉斯算符等于这三个微商之和。记住 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ，我们便得

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r). \quad (20.31)$$

把这一方程写成如下形式往往更为方便：

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \psi). \quad (20.32)$$

如果你将式(20.32)中所标明的微分做出，你便将看到右边与式(20.31)相同。

如果要讨论作为球面波而传播出去的那些球对称场，则我们的场量就必须是 r 与 t 两者的函数。这时，假设我们写出下列三维波方程

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0 \quad (20.33)$$

之解究竟是哪一些函数 $\psi(r, t)$ 。既然 $\psi(r, t)$ 仅仅通过 r 而依赖于空间坐标的，那便可以采用上面所已找到的那个拉普拉斯算符即式(20.32)。然而，为了准确起见，既然 ψ 也是一个 t 之函数，我们就该把对于 r 的微商写成偏微商。这样该波方程便变成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0.$$

现在我们必须解出这一方程，这看来比那平面波的情况远较为复杂。可是要注意，如果

我们以 r 乘这一方程，则便可得到

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = 0. \quad (20.34)$$

上式告诉我们，函数 $r\psi$ 满足了在变数 r 上的一维波方程。应用曾经那么经常强调过的那个普遍原理，即同一些方程总会有同一些解，那么我们便知道，如果 $r\psi$ 只是属于 $(r-ct)$ 的一个函数，则它将是方程(20.34)之解。因此，我们就懂得了球面波一定具有这么一种形式：

$$r\psi(r, t) = f(r-ct).$$

或者，正如我们以前曾见过的，也尽可以说 $r\psi$ 可有这么一种形式：

$$r\psi = f(t-r/c).$$

两边各除以 r ，便得到场量 ψ （不管它可能代表什么）具有如下形式：

$$\psi = \frac{f(t-r/c)}{r}. \quad (20.35)$$

这样一个函数代表从原点起以速率 c 传播出去的一个普遍球面波。如果暂时忘却那个在分母上的 r ，则在某一给定时刻作为从原点至该点的距离的函数之波幅会具有某一定形状并以速率 c 向外奔驰。然而，那个分母中的因数 r 却说明当波传播时该波幅会正比于 $1/r$ 而减小。换句话说，不象平面波在其中当波行进时波幅维持不变，而在一球面波中波幅却是稳定地逐渐缩小的，如图 20-6 所示。

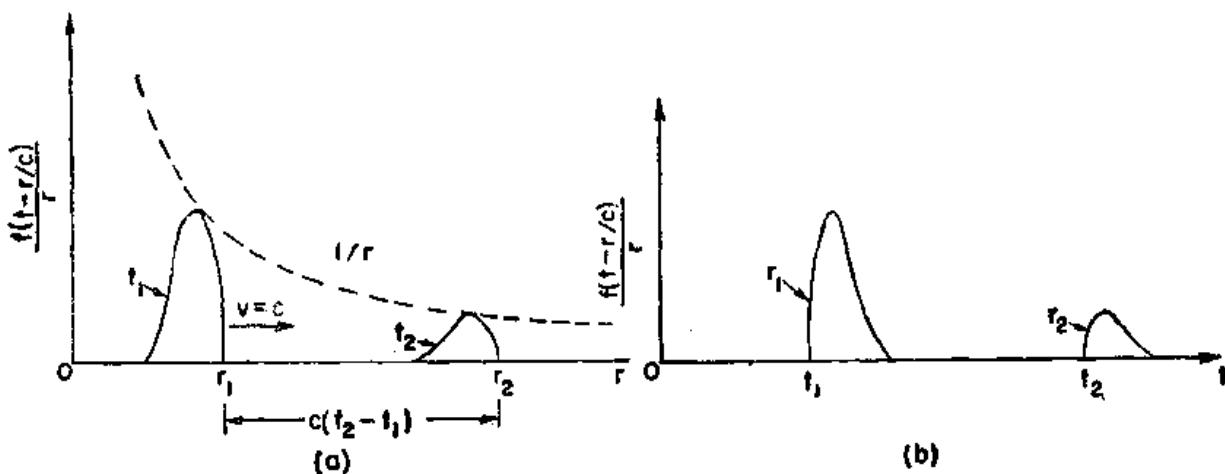


图 20-6 球面波 $\psi = f(t-r/c)/r$ 。(a) 在 $t=t_1$ 和在一个较后时刻 t_2 同一个波作为 r 函数的 ψ ；(b) 在 $r=r_1$ 处和在 r_2 处所看到的同一个波作为 t 函数的 ψ

我们知道，在波中能量密度取决于波幅的平方。当波向外扩展时，其能量扩展至布满了与径向距离的平方成正比的越来越大的面积。如果总能量守恒的话，则能量密度应该随 $1/r^2$ 下降，而波幅则随 $1/r$ 缩小。因此，式(20.35)就是对一球面波的“合理”形式了。

我们已忽略了对于该一维波方程的第二种可能解：

$$r\psi = g(t+r/c),$$

$$\text{或 } \psi = \frac{g(t+r/c)}{r}.$$

这也代表一个球面波，不过是一个从较大的 r 朝着原点往里跑之波。

现在要来作一个特殊假定，但不做任何证明。我们讲，由源所产生之波只有那些向外行进之波。既然已懂得了波是由电荷的运动所引起的，我们就要来设想波是从电荷那里向外

出发的。要想象在电荷还未开始运动以前就有一个球面波从无限远处出发而恰恰在那些电荷刚要开始动起来的那一瞬到达它们那里，这该相当奇怪。虽然这是一个可能的解，但经验表明，当电荷被加速时波是从电荷那里向外奔驰的。尽管麦克斯韦方程组理应允许这两者中的任一种可能性，但我们还要放进一个附加事实——基于经验方面的——即只有向外奔驰之波的那种解才会构成“物理意义”。

然而，也应该指出，对于这一附加假设会发生一个有趣后果：我们正在把存在于麦克斯韦方程组中的那种时间对称性消除掉了。有关 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的原本方程组，以及从其导出的那些波方程式，都具有这么一种性质，即如果改变 t 的符号，该方程式仍将保持不变。这些方程申述，对于沿某一方向行进之波的每一个解，就有一个沿相反方向行进之波作为同样适当的解。我们关于只将考虑向外奔驰之波的那个声明是一个重要的附加假设。（一种旨在避免这一附加假设的电动力学表达方式已由人们仔细地研究过。令人惊异的是，在许多场合下它并未导致在物理上荒谬的结论，但若此刻就来讨论这些想法，那就未免引导我们误入歧途太远了。我们将在第二十八章再对此稍为多讨论一下。）

必须提出另一要点。在关于一个向外奔驰之波的解即式(20.35)中，函数 ψ 在原点处等于无限大。那是有点特别的。我们愿意有一个处处都表现出平滑的波解。解必须在物理上代表有某一个源位于原点上的那一种情况。换句话说，出于疏忽我们已犯了一个错误。我们并未曾对该自由波方程(20.33)处处求得解答；只是解了在其右边除了原点之外处处都为零的方程式(20.33)。我们的错误所以会乘虚而入，是由于在上述推导过程中，某些步骤在 $r=0$ 时是不“合法”的。

让我们来证明，在一个静电问题中也很容易犯这同一种错误。假定要求出一个有关自由空间里静电势的方程 $\nabla^2\phi=0$ 之解。这拉普拉斯算符等于零，因为我们正在假设处处都没有电荷。但对这一方程的一个球对称解——即仅仅取决于 r 的某一函数 ψ ——将会怎么样呢？利用(20.32)关于拉普拉斯算符的公式，就有

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0.$$

对上式乘以 r ，便得到一个易于积分的微分方程：

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0.$$

如果对 r 积分一次，就会得到 $r\phi$ 的第一次微商为一常数，那我们可称之为 a ：

$$\frac{d}{dr}(r\phi) = a.$$

再积分一次，又得到 $r\phi$ 具有这么一个形式：

$$r\phi = ar + b,$$

其中 b 是另一积分常数。因此，我们就发现，下列的 ϕ 即是对在自由空间中有关静电势的一个解：

$$\phi = a + \frac{b}{r}.$$

显然出现了某种差错。在一个其中没有任何电荷的区域中，我们知道关于静电势之解，在任何一处，势都是恒量。这相当于我们解中的第一项。但还有那第二项，这说明有一个与

离原点的距离成反比的对势的贡献。然而，我们知道，这样一个势相当于在原点处有一个点电荷。所以，虽然我们当初设想是在对自由空间中的势求解，但上述的解却也给出了在原点上有一个点电荷之场。你是否看到在目前所发生的事情与在上面当我们对该波方程求一个球对称解时所发生的事情之间存在的相似性？要是真的在原点上没有任何电荷或电流，那么就不会有任何往外跑的球面波了。当然，球面波一定是由原点上之源产生的。在下一章中我们将探讨那些正在往外跑的电磁波与产生了这些波的电流和电压之间的关系。

有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解

§ 21-1 光与电磁波

在上一章我们看到，在麦克斯韦方程组的解中就有电与磁之波。这些波相当于无线电波、可见光、X射线等现象，视波长如何而定。我们曾在第一卷中详尽地学习过光学。本章将把这两门学科互相结合起来——证明麦克斯韦方程组确实能够构成我们前期对光现象所作处理的基础。

过去当我们学习光学时，是先写出一个以任意方式运动着的电荷所产生之场的式子开始的。即

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right], \quad (21.1)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

[见第一卷中式(28.3).]

如果电荷是以一种任意方式运动，则我们现在在某一点所找到的电场并非取决于电荷此刻所处的位置和运动，而仅仅取决于在一个较早时刻——早了光以速率 c 行经从电荷至该场点的距离 r' 所需之时间——的位置和运动。换句话说，若要得到在 t 时刻在点(1)处之场，就必须算出在 $(t-r'/c)$ 时刻电荷所处的位置 $(2')$ 及其运动，其中 r' 是在 $(t-r'/c)$ 时刻从电荷位置 $(2')$ 至点(1)的距离。加上一撇是为了向你们提醒 r' 乃所称为从点 $(2')$ 至点(1)的“推迟距离”，而并非电荷在 t 时刻的位置即点(2)至该场点(1)的实际距离(见图 21-1)。注意，现在我们正在采用一种关于单位矢量 \mathbf{e}_r 的方向的新的规则。在第一卷第二十八和三十四两章中我们曾取 \mathbf{r} (因而 \mathbf{e}_r) 指向源处，那是方便的。但现在却要按照上面关于库仑定律的定义，其中 \mathbf{r} 是从点(2)处的电荷指向点(1)处的场点的。当然，唯一不同之处乃是，现在的新 \mathbf{r} (和 \mathbf{e}_r) 就是那些旧的对应量的负值。

我们也已知道，若电荷的速度总是比 c 小得多，而且所考虑的又只是那些距离电荷很远之点，使得只有式(21.1)中那最后一项才算重要，则场也就可以写成

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[\begin{array}{l} \text{电荷在 } (t-r'/c) \text{ 时刻的加速度} \\ \text{垂直于 } \mathbf{r}' \text{ 方向的投影} \end{array} \right] \quad (21.1')$$

和

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

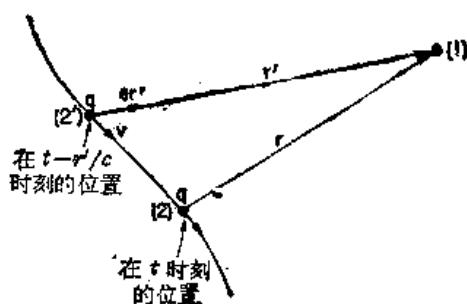


图 21-1 在 t 时刻，在点(1)处之场要取决于在 $(t-r'/c)$ 时刻电荷 q 所占据的位置 $(2')$

让我们稍为详细地考察一下该完整公式(21.1)所陈述的内容吧。矢量 $\mathbf{e}_{r'}$ 乃是从该推迟位置 $(2')$ 至点(1)的单位矢量。那么第一项便是我们对电荷在它的推迟距离上的库仑场——可以把它叫做“推迟库仑场”——所应该期待的。电场与距离的平方成反比，并且从电

荷的推迟位置上指向出来(也就是在 e_r 的方向上)。

但那只是第一项，其他两项告诉我们，电学定律并未申述过所有之场除了推迟之外都与静场相同(这是人们有时喜欢说的)。对于该“推迟库仑场”我们还必须加上其他两项。式中的第二项申述，对于该推迟库仑场应有一项“修正”，那就是该推迟库仑场的变率乘以延迟所耽搁的时间 r'/c 。在某一种说法上，这一项倾向于对第一项的推迟作出补偿。这两项相当于在算出了“推迟库仑场”之后又再用 r'/c 这个量来将它向外推，即一直外推至 t 时刻。这一外推是线性的，就象是假定该“推迟库仑场”应以对该电荷在点(2')所计得的变化率继续作为其变化率似的。如果场变化得很慢，那推迟效应就几乎完全由该修正项所抵消，而这两项合在一起便在很好的近似程度上给我们提供了一个“瞬时库仑场”那样的一种电场——也就是在点(2)处的电荷的库仑场。

最后，式(21.1)中还有那第三项，它是对单位矢量 e_r 的第二次微商，在就光学现象进行学习时我们曾利用过这么一桩事实，即在离电荷很远的地方，前两项都与距离的平方成反比，因而对于巨大距离来说比起那随着 $1/r$ 下降的第三项就已变得十分微弱了。因此，我们完全集中在这第三项上，并也曾证明过(又是对于大距离而言)这一项与电荷的加速度在垂直于视线上的分量成正比。(并且，我们在第一卷中的大部分工作都是考虑其中电荷正在作非相对论性运动的那一种情况，只有在第三十四那一章中才考虑过相对论性效应。)

现在应该尝试把这两件东西联系起来。我们既有麦克斯韦方程组，也有关于一个点电荷之场的式(21.1)，肯定应该问起这两者是否等效。若能从麦克斯韦方程组导出式(21.1)来，那我们就确实理解到光学与电磁学间的关系。建立这么一种关系就是本章的主要目标。

事实证明，我们还不想把它完全建立起来——数学的细节变得过于复杂以致我们不能将其彻底完成。但仍将进行至足够接近的地步，以便使你们能够轻而易举地看出如何可把该联系建立起来。所遗漏的部分将只是一些数学细节。你们当中有些人可能会觉得这一章中的数学相当复杂，因而也就不愿意去紧跟那些论证了。然而，我们认为这样做是十分必要的，即要把你以前学到的与现在正在学习的东西联系起来，或者至少指出这样一种联系如何可以建立。倘若你对以前各章大致看一看，你就会注意到，每当我们取一种说法作为讨论的起点时，总是要小心地解释它是否属于某一条“基本规律”的一种新的“假设”，还是最终可以从别的某些规律推导出来。多亏你们对这些演讲的热切心意，我们才准备来建立起光与麦克斯韦方程组之间的关系。若在某些地方变得太困难，噢，那就是生活——没有其他别的途径可走。

§ 21-2 由点源产生之球面波

在第十八章中我们曾发现，麦克斯韦方程组是可以求得解答的，即通过设

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.2)$$

和

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.3)$$

其中 ϕ 和 \mathbf{A} 这时必须是下列两方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21.4)$$

和

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (21.5)$$

之解，并也须满足条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (21.6)$$

现在要来找出(21.4)和(21.5)两方程之解。为此，就得求解方程

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s \quad (21.7)$$

中之 ψ ，其中我们称之为源的 s 是已知的。当然，对于式(21.4)来说， s 相当于 ρ/ϵ_0 而 ψ 相当于 ϕ ，或者若 ψ 为 A_z ，则 s 为 $j_z/\epsilon_0 c^2$ ，等等。但我们要作为一个数学问题来解方程(21.7)时，就不管 ψ 和 s 在物理上指的是什么了。

在 ρ 和 \mathbf{j} 都分别等于零的那些地方——即在我们所称之为“自由”空间里——势 ψ 和 \mathbf{A} 以及场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都满足该无源的三维波方程，其数学形式为

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (21.8)$$

在第二十章中就曾经见过这一个方程之解可代表各种不同类型之波：在 x 方向上的平面波 $\psi = f(t - x/c)$ ；在 y 向、 z 向、或其他任一方向上的平面波；或者具有如下形式的球面波：

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (21.9)$$

(那些解也仍然可以按其他方式写出，比方是从一根轴线散开来的柱形波。)

我们也曾指出过，在物理上，式(21.9)并未代表自由空间里之波——一定要在原点处有电荷才能得到一个开始发动的波。换句话说，式(21.9)处处都是方程(21.8)之解，只除了很靠近 $r=0$ 处，在那里它必然是那个包括了某些源的完整方程(21.7)之一个解了。让我们看看到底是怎么搞的。方程(21.7)中要有什么样的源 s 才能产生象式(21.9)那样之波？

假设已有了式(21.9)的那种球面波，并考察在 r 十分微小处所发生的情况。这时， $f(t - r/c)$ 中的 $-r/c$ 这一推迟是可以忽略的——只要 f 是一个平滑函数——因而 ψ 也就变成

$$\psi = \frac{f(t)}{r} \quad (r \rightarrow 0). \quad (21.10)$$

所以 ψ 刚好象在原点处一个随时间变化的电荷的库仑场。这就是说，要是有一小堆电荷，被局限在原点附近的一个小区域里，并具有密度 ρ ，那么我们就会知道

$$\phi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{r},$$

式中 $Q = \int \rho dV$ 。原来我们已懂得了象这样一个 ϕ 会满足方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

根据相同的数学，我们总可以讲，式(21.10)中的 ψ 满足了

$$\nabla^2 \psi = -s \quad (r \rightarrow 0), \quad (21.11)$$

其中 s 与上面 f 的关系乃是

$$f = \frac{S}{4\pi},$$

而且

$$S = \int s dV.$$

唯一不同之处，只是在这种普遍情况下， s ，从而 S ，都可以是时间的函数。

现在重要的事情在于：若对于小 r 来说 ψ 会满足方程(21.11)，则它也会满足方程(21.7)。当我们进至极靠近原点时， ψ 对 $1/r$ 的依存关系会使那些空间微商变得十分大。但那些时间微商却仍保持它们的一些原有之值。〔它们不过是 $f(t)$ 的时间微商。〕所以当 r 趋于零时，式(21.7)中的 $\partial^2\psi/\partial t^2$ 项比起 $\nabla^2\psi$ 来就可以忽略，而方程(21.7)也就变成相当于(21.11)了。

因此扼要地说，若方程(21.7)中的 $s(t)$ 被置在原点处并具有总强度

$$S(t) = \int s(t) dV, \quad (21.12)$$

则该方程之解便是

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{S(t-r/c)}{r}. \quad (21.13)$$

式(21.7)中的 $\partial^2\psi/\partial t^2$ 项的唯一影响是在那库仑势中引入了推迟时间($t-r/c$)。

§ 21-3 麦克斯韦方程组的通解

我们已找出了关于一个点源方程(21.7)之解，下一个问题是：对于一个分布之源其解又如何呢？那是容易求得的；可以把任何源 $s(x, y, z, t)$ 都想象成是由许多个“点”源所组成，而对于每一体积元 dV 就有这么一个其源强为 $s(x, y, z, t)dV$ 的“点”源。既然方程(21.7)是线性的，该合成分场就会等于来自所有这样的源元之场的迭加。

利用上一节的结果[式(21.13)]我们知道，在 t 时刻在点 (x_1, y_1, z_1) ——或简称点(1)——上的来自点 (x_2, y_2, z_2) ——或简称点(2)——的一个源元 $s dV$ 之场 $d\psi$ 要由下式给出：

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t-r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

式中 r_{12} 是从(2)至(1)的距离。当要把所有来自各部分源的贡献都相加起来时，那意思当然就是要做出遍及所有 $s \neq 0$ 的那些区域的积分；因而我们有

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t-r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} dV_2. \quad (21.14)$$

这就是说，在 t 时刻在点(1)上之场是所有在 $(t-r_{12}/c)$ 时刻就已离开了处于点(2)上的各个源元的球面波之和。这就是对于任何一组源的有关波方程之解。

现在我们来看看如何可得到麦克斯韦方程组的通解。若 ψ 指的是标势 ϕ ，则源函数 s 便变成 ρ/ϵ_0 。我们也可以令 ψ 代表矢势 \mathbf{A} 的三个分量中的任一个，则应由 $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ 的对应分量来取代 s 。这样，若我们对处处的电荷密度 $\rho(x, y, z, t)$ 和电流密度 $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ 都为已知，那便可立即把(21.4)和(21.5)两方程之解写出来。它们是

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t-r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2, \quad (21.15)$$

和

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t-r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (21.16)$$

然后利用式(21.2)和(21.3)，场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 便可以通过取那些势的微商而找出。〔顺便提一下，我们能够核实由式(21.15)和(21.16)所得之 ϕ 和 \mathbf{A} 确会满足那等式(21.6)。〕

我们已解出了麦克斯韦方程组。在任何场合下，如果给出电流和电荷，便能够从这些积分直接找到势，然后通过微分而获得场。因此，我们便已结束了麦克斯韦理论。而且这也使我们能够把这个环节与光之理论衔接起来，因为要联系到我们以前关于光方面的工作，只须算出来自一个运动电荷的电场。一切尚待做的就是去取一个正在运动的电荷，从这些积分算出各个势来，然后再通过微分而由 $-\nabla\phi - \partial A/\partial t$ 找出 E 。这样就应该得到式(21.1)。事实证明，需要做的工作很多很多，但那是原则。

因此，这里正是电磁世界的中心——电和磁，以及光的整套理论；对于由任一些运动电荷所产生之场的完整描述；还有其他的。但全都聚集在这里了。这里就是由麦克斯韦建立起来的，在其全能与全美中都算得上是一种完满的结构。它可能是物理学中最伟大的成就之一。为要使你想起它的重要性，我们将把它全都收集在一个精致的框架中。

麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$$

它们之解：

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$B = \nabla \times A$$

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2$$

$$A(1, t) = \int \frac{j(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2$$

§ 21-4 振荡偶极子之场

就一个运动的点电荷之场而导出式(21.1)这么一个诺言，我们迄今还未曾实践。即使用到以往得到的一些结果，要把它导出来仍是一件相当复杂的事情。除了在这些演讲的第一卷之外，我们从未在已经发表的文献中任一处找到过式(21.1)*。因此，你可以看出这并非容易导出的。（当然，有关一个运动电荷之场曾经写成许多种互相等效的其他形式。）这里，我们不得不把自己限制在仅仅几个例子中来证实式(21.15)和(21.16)会给出与式(21.1)相同的结果。首先，将证明式(21.1)只在该带电粒子的运动是非相对论性的这么一个条件下才会给出正确之场。（仅仅这一特殊情况便将照顾到我们过去关于光方面所谈及的百分之九十或更多的内容。）

我们考虑一小滴电荷在一个小区域里以某种方式运动的情况，并将找出在远处之场。用另一种方式来表达，就是我们正在寻找来自一个在十分微小范围内摇动着的点电荷在任一距离上之场。由于光往往从一个诸如原子的那种中性体内发射出来，我们便将认为该摇动电荷 q 是处在一个静止不动的等值异号电荷附近。如果这两电荷中心间的距离为 d ，则这两电荷便将拥有一偶极矩 $p = qd$ ，这我们将认为是一个时间函数。现在应该期待，如果靠近电荷而对场进行观察，便无须去担心那个推迟效应；电场将与我们以前对一静态电偶极子所算出的完全相同——当然，要用到那瞬时偶极矩 $p(t)$ 。但若我们离开得很远，便该在场中找到一个按 $1/r$ 下降而又依赖于与视线垂直的那一部分电荷加速度之项。让我们来看看

* 这一公式约在 1950 年由 R. P. 费曼推导出来，并作为对同步加速器辐射的一种优良想法在某些讲稿中曾经写出。

是否会得到这么一个结果.

由利用式(21.16)以算出矢势 \mathbf{A} 开始. 假设该运动电荷形成一小点滴, 其中的电荷密度由 $\rho(x, y, z)$ 给出, 而在任一时刻整滴东西以速度 \mathbf{v} 运动. 那么电流密度 $\mathbf{j}(x, y, z)$ 就等于 $v\rho(x, y, z)$. 选取我们的坐标系使 z 轴指向 \mathbf{v} 的方向将很方便; 这时问题的几何结构就如图 21-2 所示. 现在要算出这么一个积分:

$$\int \frac{\mathbf{j}(2, t-r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.17)$$

若该电荷滴确实比起 r_{12} 来很小, 那么便可令分母中的 r_{12} 等于 r , 即与该滴中心间的距离, 并把 r 取出积分符号之外. 其次, 也要在该式的分子中令 $r_{12}=r$, 尽管这实际上并不完全对. 其所以不对,

因为我们本应在该滴的顶端取 \mathbf{j} 与在该滴的底部取 \mathbf{j} 时在时间方面稍为有点不同. 当在 $\mathbf{j}(t-r_{12}/c)$ 中令 $r_{12}=r$ 时, 我们是在同一个时刻($t-r/c$)对整个滴取其电荷密度的. 那只有当电荷的速度 v 远比 c 为小时才能算是良好的近似. 因此, 我们正在作一种非相对论性计算. 用 ρv 来代替 \mathbf{j} , 积分(21.17)便变成

$$\frac{1}{r} \int v \rho(2, t-r/c) dV_2.$$

由于所有电荷都有同一速度, 这一积分就只是 v/r 乘以总电荷 q . 但 qv 恰好就是 $\partial \mathbf{p} / \partial t$, 即该电偶极矩的变率——那当然是在该推迟时刻($t-r/c$)上算出来的. 我们将把它写成 $\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)$, 因此对于矢势来说就得到

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \quad (21.18)$$

上述结果表明: 一个变化偶极子的电流会产生一个矢势, 这矢势将以源强度为 $\dot{\mathbf{p}} / 4\pi\epsilon_0 c^2$ 的球面波的形式出现.

现在就可以由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 得到磁场. 既然 $\dot{\mathbf{p}}$ 完全落在 z 方向上, \mathbf{A} 便只有一个 z 分量; 在旋度中只有两个不等于零的微商. 因此, $B_z = \partial A_z / \partial y$ 而 $B_y = -\partial A_z / \partial x$. 让我们首先来考察 B_x :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r}. \quad (21.19)$$

要取微分, 就得记起 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 从而得出

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c). \quad (21.20)$$

记住 $\partial r / \partial y = y/r$, 那第一项就给出

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3}, \quad (21.21)$$

这类似于一个静态偶极子之场, 随 $1/r^2$ 而下降(因为对于某一方向来说, y/r 是个常数).

式(21.20)中的第二项为我们提供一些新的效应. 在取微分之后便得

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{cr^2} \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c), \quad (21.22)$$

式中 \ddot{p} 当然是指 p 对于时间的二次微商。这一来自对该式的分子进行微分之项，是要对辐射负责的。首先，它描述了一个仅按 $1/r$ 随距离而下降之场。其次，它取决于电荷的加速度。你可以开始明白，我们是如何行将得到一个象式(21.1')那样的结果，而它是描写光之辐射的。

让我们稍为详细一点检查这一辐射项如何得来——它是这么一个有趣而又重要的结果。由(21.18)那一表达式开始，它具有 $1/r$ 的依存关系，因而除了在该式分子上的那个推迟项外就象一个库仑势了。那么，为什么当我们为获得场而对空间坐标取微分时，并不恰好得到一个 $1/r^2$ 之场——当然还会有那相应的时间推迟？

按照下述办法我们就能够看出其所以然：如让偶极子作正弦式起落的那种振动，就该有

$$p = p_0 \sin \omega t$$

和 $A_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega(t-r/c)}{r}$

若在某一给定时刻对于作为 r 函数的 A_r 画成标绘图，则可获得如图 21-3 所示的那种曲线。该颠幅会按 $1/r$ 缩小，但除此之外还有在空间中的一种受包线 $1/r$ 调制的振动。当我们取对于空间的微商时，它

们将与这一曲线的斜率成正比。从图中我们看出有一些比 $1/r$ 曲线本身的斜率要峻峭得多的斜率。事实上，对于某一给定频率来说，那些峰值斜率显然会正比于随 $1/r$ 变化着的波幅。因此，这就说明了该辐射项的下降率。

事情之发生完全是由于当波向外传播时源对时间的变化已翻译成在空间里的变化，而磁场则是取决于势的空间微商。

让我们回来完成对磁场的计算。关于 B_z 已有了(21.21)和(21.22)那两项，因而

$$B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y\dot{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{y\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

利用同一种数学，就可以得到

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{x\dot{p}(t-r/c)}{r^3} + \frac{x\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

或者，可将其集合在一个漂亮的矢量式中：

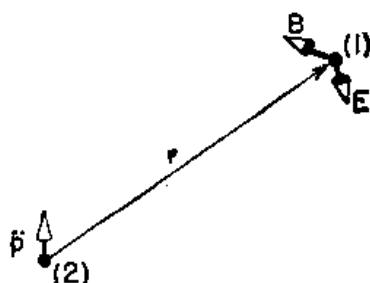


图 21-4 一个振荡偶极子的辐射场 \mathbf{B} 和 \mathbf{E}

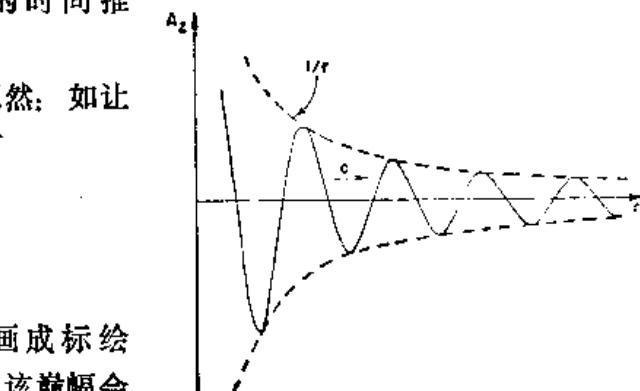


图 21-3 对来自一振荡偶极子的球面波，在 t 时刻矢势 \mathbf{A} 之大小作为 r 函数而画成之图

现在让我们来看看这个公式。首先，若 r 很大，就只有那 \ddot{p} 项才算数。 \mathbf{B} 之方向由 $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ 给出，那是垂直于矢径 \mathbf{r} 而又垂直于加速度的，如图 21-4 所示。一切都表明不错；那也是我们由式(21.1')所得到的结果。

现在，让我们来看看一向都不常看到的一种东西——即在源附近所发生的事态。在 § 14-7 节中我们曾对一电流源的磁场推出过毕奥-萨伐尔定律。找出了一个电流元 $j dV$ 对于磁场的贡献会有这么多：

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (21.24)$$

你看到, 若记起 $\dot{\mathbf{p}}$ 就是电流, 则这一公式看来就很象式(21.23)中的第一项。但有一不同之处。在式(21.23)中, 电流必须在 $(t-r/c)$ 时刻上算出, 而这一点在式(21.24)中就没有出现。然而, 事实上, 对于小 r 来说式(21.24)还是十分精确的, 因为(21.23)中的第二项有把在第一项中的推迟效应抵消掉的倾向。这两项合起来会给出当 r 小时一个很接近于式(21.24)的结果。

关于这一点我们可以这样来认识: 当 r 小时, $(t-r/c)$ 与 t 相差无几, 因而可以把式(21.23)中的方括号展开成泰勒级数。对于第一项,

$$\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}} + \text{其他},$$

而第二项展开至 r/c 的同一级, 则为

$$\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \ddot{\mathbf{p}}(t).$$

当取其和时, 有关 $\dot{\mathbf{p}}$ 的两项互相抵消, 而留给我们的就只是该非推迟电流 $\dot{\mathbf{p}}$ 也即 $\dot{\mathbf{p}}(t)$ ——加上那些属于 $(r/c)^2$ 级或更高级的项 [如 $\frac{1}{2}(r/c)^2 \ddot{\mathbf{p}}$], 这些对于 r 小至足以使 $\dot{\mathbf{p}}$ 在时间 r/c 内并未作出令人注目的改变时将是十分微小的。

因此, 式(21.23)就给出了一些很象瞬时理论中之场——比起那带有推迟的瞬时理论还要靠近得多; 有关推迟的第一级效应已被那第二项所消除了。该静态公式十分准确, 其准确程度远比你可能会想到的为高。当然, 这补偿作用仅对于极接近于振动源之各点才有效。对于远离源之点这一修正便会变得十分差, 因为该时间推移产生了十分显著效应, 从而使我们得到那个重要的 $1/r$ 辐射项。

仍然得去算出电场并证明它是与式(21.1')相同的一个问题。对于大的距离来说我们能够看出该答案将会正确。我们知道, 离源很远而那里有波正在传播的地方, \mathbf{E} 会垂直于 \mathbf{B} (而且也垂直于 \mathbf{r}), 如图 21-4 所示, 并且 $cB = E$ 。因此, \mathbf{E} 与加速度 $\ddot{\mathbf{p}}$ 成正比, 正如根据式(21.1')所期待的那样。

要完全得到在所有不同距离上的电场, 我们需要先求出静电势。当算出有关 \mathbf{A} 的电流积分以获得式(21.18)时, 就曾作过这样一种近似, 即忽视该推迟项中关于 r 的轻微变化。这对于静电势来说却将行不通, 因为这样一来我们该获得 $1/r$ 乘以对电荷密度的积分, 那将是一个常数。这一种近似太粗糙了。我们需要达到一个较高的近似级, 但又要避免直接在有关较高近似级的计算中找麻烦, 我们还是能够做某一种其他事情的——可以利用所已找到的矢势来从式(21.6)确定标势。在我们的情况下, \mathbf{A} 之散度只不过是 $\partial A_z / \partial z$ ——因为 A_x 和 A_y 都恒等于零了。按与上面找出 \mathbf{B} 时的同样办法取微分,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{z\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} - \frac{z\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right]. \end{aligned}$$

或者, 采用矢量记法,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

运用式(21.6), 我们就有一个关于 ϕ 的方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

对于 t 的积分不过是从每一个 p 中除去顶上的一点, 因而

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.25)$$

(积分常数会相当于某一迭加上去的静场, 那当然本是可以存在的。但对于我们所考虑的振荡偶极子来说, 那里却没有静场。)

现在我们已能够按照

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

来找出电场 \mathbf{E} 了。不过由于计算步骤很繁复, 但又是直截了当的[只要你记住 $\mathbf{p}(t-r/c)$ 和它对时间的微商之所以与 x, y, z 有关, 乃是通过该推迟时间 r/c 而得来的], 我们便将仅仅给出结果:

$$\mathbf{E}(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\mathbf{p}^* - 3 \frac{(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{c^2} \{ \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) \times \mathbf{r} \} \times \mathbf{r} \right], \quad (21.26)$$

式中

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t-r/c) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c). \quad (21.27)$$

尽管看来相当复杂, 但这个结果还是容易解释的。矢量 \mathbf{p}^* 就是已经被推迟, 然后又对这一推迟给予了“修正”的偶极矩, 因而该两个各带有 \mathbf{p}^* 之项就恰恰给出当 r 很小时一个静态偶极子之场。[见第六章, 式(6.14).] 当 r 大时, 该 $\ddot{\mathbf{p}}$ 项独占了优势, 而电场就会正比于电荷的加速度, 且垂直于 \mathbf{r} , 事实上即是指向 $\ddot{\mathbf{p}}$ 在垂直于 \mathbf{r} 的平面上的投影。

这一结果与我们应用式(21.1)所应该得到的结果相符。当然, 式(21.1)会更为普遍, 它适用于任一种运动; 而式(21.26)则仅仅适用于推迟时间 r/c 对于整个源都可以认为是一常数的那种小运动。无论如何, 我们现在已提供了对于以前整个有关光之讨论的下层基础(除了某些在第一卷第三十四章中曾经讨论过的内容以外), 因为全都关系到式(21.26)中的末项。下一步我们将讨论如何获得迅速运动的电荷之场(引导至第一卷第三十四章中的那种相对论性效应)。

§ 21-5 运动电荷之势; 连纳德和韦查特通解

在上一节中, 由于我们仅仅考虑低速度, 在计算 \mathbf{A} 积分时作了一个简化, 但在这样做时我们错过了一个重要之点, 而这一点也正是容易出偏差的。因此, 现在就要来从事对一个以任何形式——甚至以相对论性速度——运动着的点电荷关于其势方面的计算。一旦有了这一结果, 我们便将拥有关于电荷的整个电磁学了。这时就连式(21.1)也可以通过取微商而推导出来, 故事至此即将完结。请原谅我们再稍为谈一谈。

试来计算由一个点电荷、诸如一个电子、以任一种方式运动着、而在点 (x, y, z) 上所产生的标势 $\phi(1)$ 。所谓“点”电荷我们指的是一个十分微小的电荷球, 可以缩小到随心所欲的程度, 并带有电荷密度 $\rho(x, y, z)$, 我们可以由式(21.15)求得 ϕ :

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t-r/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.28)$$

答案似乎应该是——而几乎每个人最初总会认为是——遍及这样一个“点”电荷的有关 ρ 的

請勿用於盈利之目的

积分恰好就是其总电荷 q , 因而

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \text{(错了).}$$

对于 r'_{12} , 我们指的是从在推迟时刻 $(t - r_{12}/c)$ 电荷所在处之点(2)至点(1)的矢径. 但这个式乃是错的.

正确的答案是

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \frac{1}{1 - v_r/c}, \quad (21.29)$$

式中 v_r 为平行于 r'_{12} ——即指向点(1)——的电荷速度分量. 现在要来向你们解释其中原因. 为使论证易于跟上, 我们将首先计算的乃是关于一个具有小立方形状而以速率 v 朝向点(1)运动的“点”电荷, 如图 21-5(a) 所示. 令该立方体的每边长度为 a , 我们假定这比之 r_{12} , 即从电荷中心至点(1)的距离, 要小得多.

现在就来计算式(21.28)的积分, 我们将回到基本原理上去; 要把它写成一个求和式

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i}, \quad (21.30)$$

其中 r_i 是从点(1)至第 i 个体积元 ΔV_i 的距离, 而 ρ_i 则是在 $t_i = t - r_i/c$ 时刻 ΔV_i 处的电荷密度. 由于始终 $r_i \gg a$, 因而假定 ΔV_i 会取一个垂直于 r_{12} 的矩形薄片形式将是方便的, 这有如图 21-5(b) 所示.

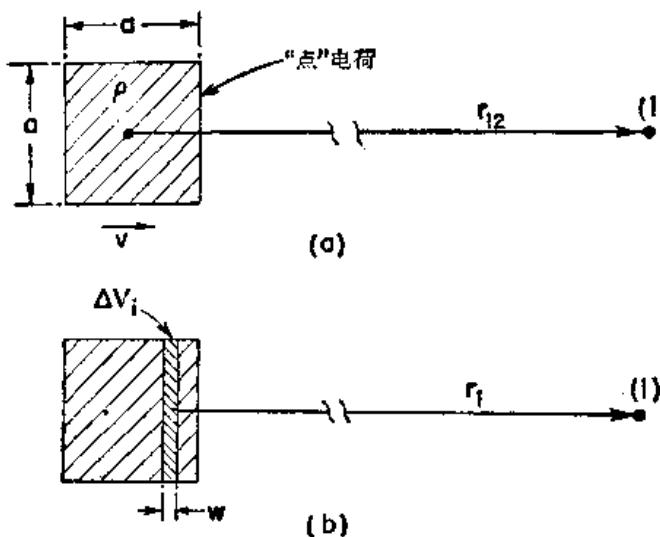


图 21-5 (a)“点”电荷——视作一个小立方体的电荷分布——以速率 v 朝着点(1)而运动;
(b)用来计算势的体积元 ΔV_i .

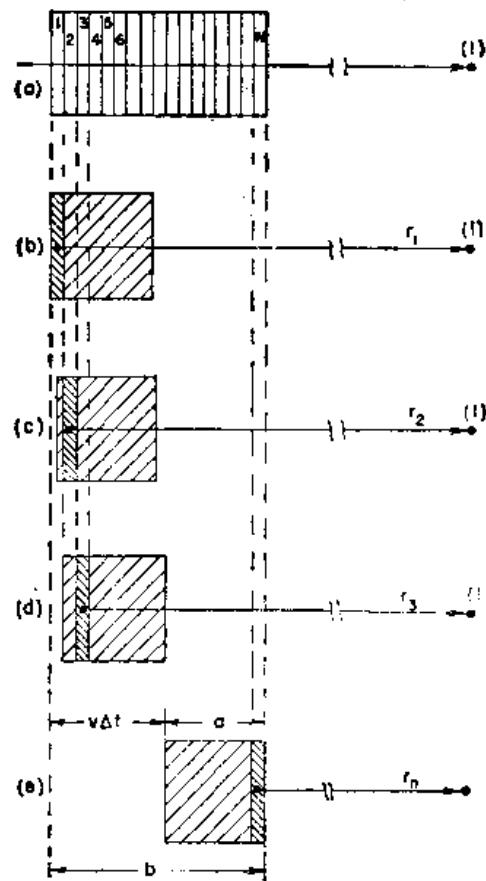


图 21-6 对一个运动电荷的 $\rho(t - r'/c) dV$ 进行积分

设我们事先假定每一体积元 ΔV_i 的厚度 w 远小于 a . 于是各个体积元看来就象图 21-6(a) 所示的那样, 其中已放上了比足以布满该电荷为多的体积元了. 但我们却还没有把电荷显示出来, 而这是有其充分理由的. 我们应该把它画在哪里呢? 对于每一体积元 ΔV_i 来说, 是要在 $t_i = (t - r_i/c)$ 的时刻取 ρ 的, 但由于该电荷正在运动, 因此对每个体积元 ΔV_i 来说, 它就占有不同的位置!

让我们说，我们是从图21-6(a)中那个标明为“1”的体积元开始的，该体积元是这样来选取，即在 $t_1=(t-r_1/c)$ 时刻该电荷的“后”端占据着 ΔV_1 ，如图21-6(b)所示。然后当我们计算 $\rho_2 \Delta V_2$ 时，就必须用到在一个稍为迟一点的时刻 $t_2=(t-r_2/c)$ 的电荷位置，这时电荷所处位置如图21-6(c)所示。对于 ΔV_3 、 ΔV_4 等等，可依此类推，现在就能算出那个和了。

既然每一 ΔV_i 的厚度为 w ，它的体积便是 wa^2 。于是每一个与该体积重迭着的体积元便将含有电荷量 $wa^2\rho$ ，其中 ρ 为该立方体内的电荷密度——我们已假定为均匀的。当由电荷至点(1)的距离很大时，通过令一切位于分母上的 r_i 都等于某一平均值，如令等于该电荷中心的推迟位置 r' ，那么我们这样作出的误差将是完全可以忽略的。于是式(21.30)的总和便是

$$\sum_{i=1}^N \frac{\rho wa^2}{r'},$$

在这里， ΔV_N 就是如图21-6(e)所示的与该电荷分布最后重迭着的那一个 ΔV_i 。该总和显然是

$$N \frac{\rho wa^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{Nw}{a} \right).$$

原来 ρa^3 恰好就是总电荷 q ，而 Nw 则是如图(e)所示的那个长度 b 。因此我们有

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right). \quad (21.31)$$

b 是什么？它是该立方体电荷的边长再加上在 $t_1=(t-r_1/c)$ 与 $t_N=(t-r_N/c)$ 两时刻之间由电荷运动所经过的距离——这就是在如下时间

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N)/c = b/c$$

内电荷所行经的距离。既然电荷的速率为 v ，那经过的距离就是 $v\Delta t = vb/c$ ，但长度 b 却是这一距离再加上 a

$$b = a + \frac{v}{c} b.$$

解出 b ，便得

$$b = \frac{a}{1 - (v/c)}.$$

当然，所谓 v ，我们指的是在该推迟时刻 $t'=(t-r'/c)$ 时的速度，这可以通过写成 $[1-v/c]_{\text{推迟}}$ 而指明出来，因此关于势的式(21.31)就变成

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{[1 - (v/c)]_{\text{推迟}}}.$$

这一结果与我们上面的断言，即式(21.29)相符。这里出现一个修正项，是由于在“扫过该电荷”而积分时电荷正在运动所引起的。当电荷朝着点(1)运动时，它对该积分的贡献增加了一个比值 b/a 。因此，正确的积分就是 q/r' 乘以 b/a ，后者即是 $1/[1-v/c]_{\text{推迟}}$ 。

如果电荷速度并非朝向观察点(1)，那就可以看出，重要的只是朝向点(1)的那一个速度分量。把这一速度分量称为 v_r ，该修正因子便是 $1/[1-v_r/c]_{\text{推迟}}$ 。并且，对于具有任何一种形状——不需要是个立方——的电荷分布，我们所作出的分析都会按完全相同的方式进行。最后，既然电荷的“大小” a 并未进入到最终的结果中去，同一个结果就将适用于当让该电荷缩小至任何尺寸——甚至缩小成一点时。普遍的结果是，对一个以任一速度运动着的点电荷其标势为

$$\phi(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' [1 - (\mathbf{v}_r/c)]_{\text{推迟}}}, \quad (21.32)$$

这个式子往往也以等效的形式写出:

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [\mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)]_{\text{推迟}}}, \quad (21.33)$$

式中 \mathbf{r} 是从电荷指向有待算出 ϕ 的那个点(1)的矢量, 而所有在方括号内之量则都要在推迟时刻 $t' = t - r'/c$ 上取其值。

当我们由式(21.16)算出有关一个点电荷之势 \mathbf{A} 时, 这同一事情也会发生。电流密度为 $\rho\mathbf{v}$, 而对于 ρ 的积分正如同刚才对于 ϕ 所求得的那样。该矢势便是

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 [\mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)]_{\text{推迟}}}. \quad (21.34)$$

有关点电荷之势最初是由连纳德(Liénard)和韦查特(Wiechert)导出的, 因而被称为连纳德-韦查特势。

要把这一环节接回到式(21.1)上去, 只须从这些势算出 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} (利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$)。现在只是个算术问题。然而, 这项算术相当繁复, 所以将不列出所有的细节。也许你会相信我们所说的话, 式(21.1)就同上面所导出的连纳德-韦查特势相当*。

§ 21-6 恒速运动电荷之势; 洛伦兹公式

下一步我们希望应用连纳德-韦查特势于一种特殊情况——即找出电荷在一直线上以匀速运动时所产生之场。以后还将再用相对论原理来把它做出。现在已经懂得, 当我们站立在电荷的静止参照系上时势该会怎样。当电荷在动着时, 则可以通过从一个参照系到另一个参照系的相对论性变换把任何东西都算出来。但相对论就是发端于电和磁的理论的。洛伦兹变换式(第一卷第十五章)是当洛伦兹正在研究电和磁的方程式时由他所作出的一些发现。

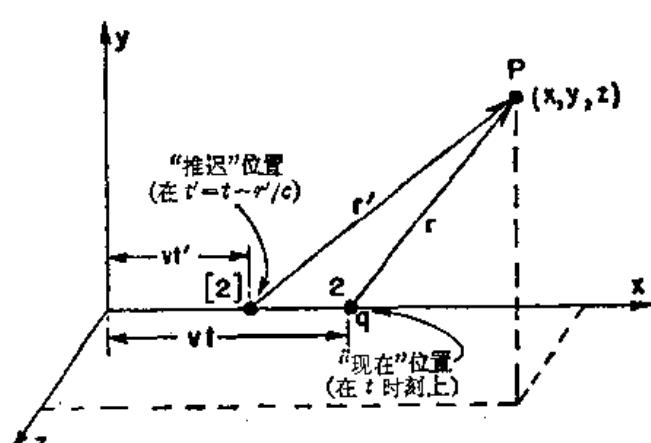
为了使你能够理解事情的来由, 我们愿意来证明麦克斯韦方程组确会导致洛伦兹变换。通过直接按照麦克斯韦方程组的电动力学来算出一个以匀速运动着的电荷之势这样来开始。我们已经证明, 麦克斯韦方程组对一个运动电荷会导致曾在上一节中得到之势。因此, 当我们引用这些势时, 也就是在运用麦克斯韦理论。

设有一个沿 x 轴以速率 v 运动着的电荷。我们要求出如图 21-7 所示的在 $P(x, y, z)$ 点上之势。如果 $t=0$ 就是当电荷处在原点上的时刻, 则在 t 时刻该电荷已经到达了 $x=vt, y=z=0$ 的那一点上。可是, 我们所必须知道的却是在该推迟时刻

$$t' = t - \frac{r'}{c} \quad (21.35)$$

图 21-7 找出一个沿 x 轴以匀速运动着的电荷在 P 点上之势。如果 $t=0$ 就是当电荷处在原点上的时刻, 则在 t 时刻该电荷已经到达了 $x=vt, y=z=0$ 的那一点上。可是, 我们所必须知道的却是在该推迟时刻

* 如果你拥有大量纸张和时间, 就可以自己试试将它做出来。那么, 我们要提出两个建议: 首先, 不要忘记对 r' 所取之微商都很复杂, 因为它是一个 t' 的函数。其次, 不要试图导出式(21.1), 而是要算出其中所有各种微商, 然后同你从式(21.33)和(21.34)之势所获得的 \mathbf{E} 作比较。



上电荷的位置，式中 r' 为从该推迟时刻的电荷位置至 P 点的距离。在这一较早时刻 t' 上，电荷位于 $x=vt'$ 的那个地方，因而

$$r' = \sqrt{(x-vt')^2 + y^2 + z^2}. \quad (21.36)$$

为求得 r' 或 t' ，我们要将这个式同式(21.35)结合起来。首先，通过由式(21.35)解出 r' 并代入(21.36)中而把 r' 消掉。然后，对两边平方，我们便得

$$c^2(t-t')^2 = (x-vt')^2 + y^2 + z^2,$$

这是关于 t' 的一个二次方程。把那些平方二项式都展开并按照 t' 收集其相似项，则可得

$$(v^2 - c^2)t'^2 - 2(xv - c^2t)t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$

由此解出 t' ，

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}. \quad (21.37)$$

为求得 r' ，就得把这个 t' 的表达式代入下式中去：

$$r' = c(t-t').$$

现在我们已准备好由式(21.33)来求得 ϕ ，既然 v 是恒量，这个式便变成

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - (v \cdot r'/c)}. \quad (21.38)$$

在 r' 方向上 v 之分量为 $v(x-vt')/r'$ ，因而 $v \cdot r'$ 就恰好是 $v(x-vt')$ ，而整个分母则为

$$c(t-t') - \frac{v}{c}(x-vt') = c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'\right].$$

代入来自式(21.37)中的 $(1-v^2/c^2)t'$ ，我们对于 ϕ 便得到

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}.$$

如果我们将上式重新写一下，则更易于理解：

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}. \quad (21.39)$$

矢势 A 是有一个附加因数 v/c^2 的同一表达式：

$$A = \frac{v}{c^2} \phi.$$

从式(21.39)中我们可以清楚地看到洛伦兹变换的开端。要是该电荷位于它本身的静止参照系上，则它的势该是

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}.$$

但我们是在一个运动着的参照系上来对它进行观察的，因而这显示出坐标系应该通过下列的式子变换：

$$x \rightarrow \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$y \rightarrow y,$$

$$z \rightarrow z.$$

那不过是洛伦兹变换式，而我们刚才所做的基本上也还是洛伦兹发现它时所用过的方法

不过, 出现于式(21.39)前面的那个附加因数 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 又是怎么一回事呢? 另外, 若在粒子的静止参照系上矢势 A 处处为零, 则它在运动坐标系上该表现成什么? 我们不久将要证明, A 和 ϕ 在一起构成一个四元矢, 象粒子的动量 p 和总能量 u 那样. 式(21.39)中那个附加因数 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 就是当人们在变换一个四元矢的分量时总会出现的那一因数——就象电荷密度会变换为 $\rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 那样. 事实上, 由式(21.4)和(21.5)就几乎可以明显地看出, A 和 ϕ 是一个四元矢的分量, 因为我们已在第十三章中证明 j 和 ρ 就是一个四元矢的分量了.

以后我们还将更详细地考虑有关电动力学方面的相对论; 这里只希望向你们表明, 麦克斯韦方程组自然会导致洛伦兹变换. 这样, 当你发现电和磁的规律已经符合爱因斯坦的相对论时, 将不会感到诧异. 我们无需象对牛顿力学定律所必须做的那样去加以“修正”.

22

交流电路

§ 22-1 阻抗

在本章中，我们大部分工作的目标在于抓住那完整的麦克斯韦方程组。在以上两章中，曾讨论过这些方程的后果。²³ 我们已经清楚，那些方程含有以前所算出的一切静态现象，以及在第一卷中就已相当详尽地谈及的那些有关电磁波和光的现象。麦克斯韦方程组给出上述两方面的现象，这取决于人们所计算之场是否靠近电流和电荷。对于那中间区域则没有什么有意义的东西可说的；那里并未出现任何特殊现象。

然而，在电磁学中还有几个课题有待我们去处理。将要讨论有关相对论和麦克斯韦方程组的问题——即当人们相对于一个运动坐标系而观望那麦克斯韦方程组时所发生的情况，以及关于在电磁系统中的能量守恒问题。还有关于物质材料的电磁性质的广泛课题；迄今为止，除了对于电介质的特性有过一点研究以外，我们所曾讨论过的都只是有关自由空间中的电磁场。而且，尽管在第一卷中我们就已相当详尽地谈及光这一课题，但还有几件事情我们愿意从场方程式的观点出发重新做过。

特别是要重新考虑有关折射率的课题，尤其是关于稠密材料方面的问题。最后，还有与局限于一有限空间区域里的波相联系着的那些现象。我们过去曾在研究声波时简单接触过这类问题。麦克斯韦方程组也导致代表电场和磁场的约束波的那些解。我们将在以后某些章节中考虑这一具有重要技术应用的课题。为了引导到该课题上去，我们将从考虑低频的电路特性入手。然后就可对下述两种情况进行比较：一种是麦克斯韦方程组的几乎静止解，近似地可以应用得上的情况；而另一种则是高频效应占优势的情况。

因此，我们就将从上面几章中那巍峨而又神秘的高度降到电路的相对低水平的课题上来。然而将会见到，即使这么一个世俗课题，只要足够详细地加以考察，也能包含某些极为复杂的东西的。²⁴

我们已在第一卷第二十三和二十五两章中讨论过电路的某些性质。现在再来重复其中某些内容，但会详细得多。我们又再度只是同一些线性系统和全都按正弦式变化的那种电压和电流打交道；这时可应用复数，即用第一卷第二十二章中所描述的那种指数函数记法来代表所有的电压和电流。于是，一个随时间变化的电压 $V(t)$ 就将被写成

$$V(t) = \hat{V} e^{i\omega t}, \quad (22.1)$$

式中 \hat{V} 代表一个与 t 无关的复数。当然，实际上随时间变化的电压 $V(t)$ 乃是由上式右边那复变数函数中的实部给出的。

同样，所有其他随时间变化之量也都被视作以同一频率 ω 按正弦式变化。因此，我们便可写出

$$\begin{aligned} I &= \hat{I} e^{i\omega t} && (\text{电流}), \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} && (\text{电动势}), \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}} e^{i\omega t} && (\text{电场}), \end{aligned} \quad (22.2)$$

等等。

通常我们将把方程用 V 、 I 、 \mathcal{E} …(而不是用 \hat{V} 、 \hat{I} 、 $\hat{\mathcal{E}}$ …)来写出，但还得记住，时间变化方面是由式(22.2)给出的。

以往关于电路的讨论中曾经假定过，象电感、电容和电阻这一类的东西你们都已熟悉。

现在要来稍为详尽地审查这些所谓理想电路元件指的是什么。我们将从电感开始。

电感是这样形成的，即把许多匝的导线绕成一个线圈形式，并从其两端接至距离线圈相当远的接头上去，如图 22-1 所示。我们要假定，由线圈中电流所产生之磁场并未强烈地向四周扩散以达到全部空间，从而与电路的其他部分发生相互作用。通常可以这样安排，把线圈绕成一个炸面圆形的式样，或把线圈绕在某一块适当的铁芯上，从而约束磁场，或通过把线圈放在某一个适当的金属盒之内，如图 22-1 所简略指明的那样。在任何情况下，我们都假定，在 a 和 b 两端点附近的外部区域里仅有微不足道的磁场。我们也将要假定，可以忽略线圈导线里的任何电阻。最后，还将假定，那些出现在导线表面上用以建立电场的电荷量是可以忽略的。

具备了这些近似性，就可以有一个所谓“理想”电感。(以后我们还会回过头来讨论在一实际电感中所发生的事情。)对于理想电感，我们说它的端路电压等于 $L(dI/dt)$ 。现在来看看为什么会这样？当有电流通过电感时，正比于这一电流的磁场在线圈内部便建立了起来。若电流随时间变化，则这磁场也会变化。一般说来， E 之旋度等于 $d\mathbf{B}/dt$ ；或者换句话说，环绕任一闭合路线的 E 之线积分等于穿过该回线的 B 通量之负变率。现在假设我们考虑下述路线：由端点 a 开始，并沿线圈通过(总是保持在导线之内)，以抵达端点 b ；然后在该电感外面的空间经过空气从端点 b 回到端点 a 上来。环绕这一闭合路线的 E 之线积分可以写成两部分之和：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.3)$$

正如以前曾经见到的，在一理想导体内部不可能有电场。(最微小之场都是足以产生无限大的电流。)因此，从 a 至 b 经由线圈的积分等于零。对于 E 之线积分的整个贡献都是来自在该电感外面从 b 至 a 的那一段路线。既然我们已经假定，在该“箱子”外面的空间里不存在磁场，则这部分积分就与所选取的路线无关，而我们便可以对该两端点的电势下定义。这两电势之差就是所称为电势差或简称为电压的，因而我们有

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

这整个线积分以前曾称为电动势 \mathcal{E} ，当然也就等于线圈里磁通量的变率。过去曾经见过，这一电动势与电流的负变率成正比，因而就有

$$V = -\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt},$$

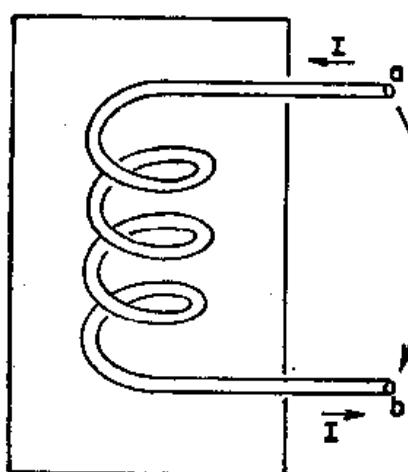


图 22-1 电感

式中 L 是该线圈的自感。由于 $dI/dt = i\omega L$, 我们便有

$$V = i\omega L I. \quad (22.4)$$

在描述理想电感时我们所采用的方法，也适用于其他理想电路元件——通常称作“集总”元件——的一般探讨。这些元件的性质完全由出现在两端点上的电流和电压来描述。通过作某些适当近似，就有可能忽略那些出现在该物体内部场的巨大复杂性。在内部与外部发生的事情之间划清了界限。

对于一切电路元件，我们都会找出一个象式(22.4)那样的关系式，其中电压正比于电流，而其比例常数一般说来都是一复数。这个复值比例系数称为阻抗并通常写作 z (不要同 z 坐标混淆起来)。它一般是频率 ω 的函数。因此，对于任何一种集总元件来说就可以写出

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z. \quad (22.5)$$

关于电感则有

$$z(\text{电感}) = z_L = i\omega L. \quad (22.6)$$

现在让我们从这一观点来看待电容*。一个电容器包括两块导电板，并各自引出导线至适当的接头上。这两块板可以有任何形状，通常并由某种介电材料隔着。我们粗略地把这样一种情况示如图 22-2 上。又作出几个简化假定。首先，假定板和导线都是理想导体。其次，也假定两板间的绝缘相当完美，以致不会有任何电荷能够通过该绝缘物质从一板流至另一板上。再其次，假定这两导体互相靠近但远离其他一切导体，以致所有离开其中一板的场线都将终结在另一板上。这样，在两板上的电荷就将永远等量异号，而在板上的电荷比起那些在接线表面上的要多得多。最后，我们假定在该电容器附近不会有磁场。

现在设想考虑环绕下述回路的 E 之线积分，即从端点 a 开始，沿导线内部达到该电容器的上板，然后越过两板之间的空间，又从下板通过导线而到达端点 b ，并在电容器外面的空间返回到 a 端点上来。由于没有磁场，绕行这一闭合路线的 E 之线积分就是零。这个积分可以分成三部分：

$$\oint E \cdot ds = \int_{\text{沿导线}} E \cdot ds + \int_{\text{在两板间}} E \cdot ds + \int_{\text{外部空间}}^b E \cdot ds. \quad (22.7)$$

沿导线的那个积分为零，因为在理想导体里不会有电场。在电容器外面从 b 至 a 的积分等于在该两端点间的电势差之负值。由于我们设想该两板总是孤立于世界上其他部分，故在该两板上的总电荷就必须为零；如果上板有一电荷 Q ，则在下板会有一相等而相反的电荷 $-Q$ 。以前我们曾见到，若两导体拥有相等而相反的电荷，即正负 Q ，这两板间的电势差就会

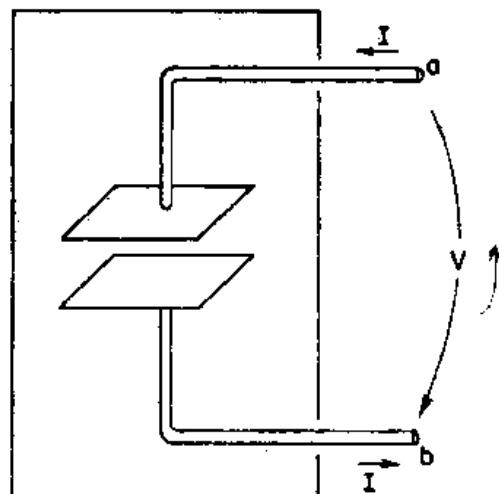


图 22-2 电容

* 有些人说，我们应该用“电感器”和“电容器”这种名称来称呼那些东西，而用“电感”和“电容”称呼它们的性质（与“电阻器”和“电阻”相类似）。但我们宁愿采用你将会在实验室里听到的那些名称。大多数人对于一个具体线圈及其自感 L 两者都仍说成是“电感”。至于“电容器”(capacitor)一词似乎已很吃香——尽管仍相当经常地听到另外一个“电容器”名称(condenser)——而大多数人仍比较喜欢用“电容”(capacity)，甚于用“电容”(capacitance)。

等于 Q/C , 其中 C 称为该两导体的电容。根据式 (22.7), a 和 b 两端点间的电势差等于两板间的电势差。因而我们有

$$V = \frac{Q}{C}.$$

从端点 a 进入(并从端点 b 离开)该电容器的电流 I 等于 dQ/dt , 即在两板上的电荷之变率。把 dV/dt 写成 $i\omega V$, 便可按照如下方式写出有关电容器的电压与电流的关系:

$$i\omega V = \frac{I}{C},$$

亦即

$$V = \frac{I}{i\omega C}. \quad (22.8)$$

这样, 电容器的阻抗 z 就是

$$z(\text{电容器}) = z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (22.9)$$

我们所要考虑的第三种元件是电阻。可是, 由于还没有讨论过实际材料的电性, 我们就未准备好去谈论在一真实导体内部所发生的事情。因此, 只好接受这样一个事实, 即在真实材料内部会有电场存在, 而这些电场能够引起电荷流动——也就是说, 产生了电流——并且这一电流是与电场从导体的一端至另一端的积分成正比的。然后, 我们设想一个按照简图 22-3 所建立起来的理想电阻。两条假定由理想导体构成的导线分别从 a 点与 b 点连接至一根电阻性材料的棒的两端。根据我们常用的论证方法, a 和 b 两端点间的电势差等于外电场的线积分, 而这也等于通过该电阻性材料的棒之电场的线积分。从而得出通过该电阻的电流 I 与端电压 V 成正比:

$$I = \frac{V}{R},$$

式中 R 称为电阻。以后我们还将看到, 对于实际导电材料, 电流与电压间的关系只是近似于线性。我们也将看到, 这一近似正比性只有当频率不太高时才可以指望与电流和电压的变化频率无关。于是, 在交变电流中, 跨越电阻的电压便与电流同相, 这意味着该阻抗是一实数:

$$z(\text{电阻}) = z_R = R. \quad (22.10)$$

关于三种集总电路元件——电感、电容和电阻——的结果我们将其扼要示如图 22-4

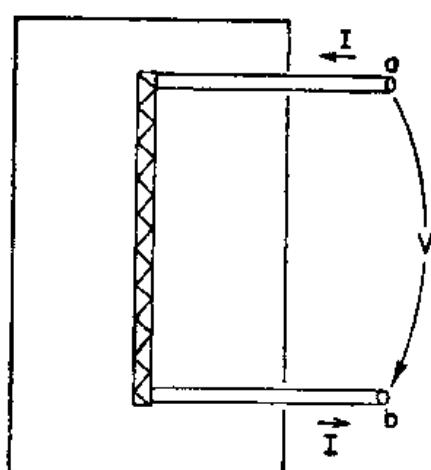


图 22-3 电阻

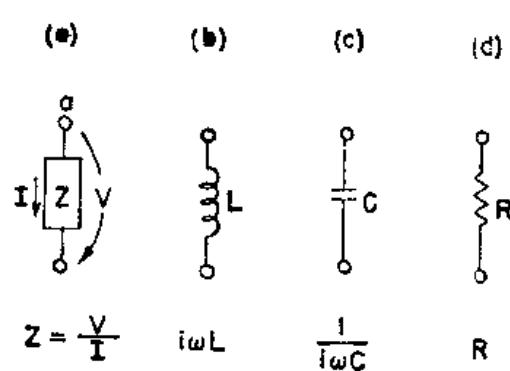


图 22-4 理想的集总电路元件
(被动的或无源的)

上。在该图中，以及在上面那些图中，我们都用一个从一端指向另一端的箭头来表明电压。如果电压是正的——也就是说，端点 a 比起端点 b 来处于较高电势——那么该箭头便指向一个正“电压降”的方向。

尽管我们现在所谈的是交流，但当然也可通过取频率 ω 趋于零的极限而包括通有稳恒电流的电路那种特殊情况。对于零频率——也即对于直流——来说，电感的阻抗趋于零；它变成短路了。对于直流，电容器的阻抗趋于无限大；它变成断路了。由于电阻的阻抗与频率无关，它是在分析一个直流电路时唯一遗留下来的东西。

迄今为止所描述过的那些电路元件中，电流与电压都是相互成比例的。倘若其中一个等于零，另一个也同时为零。我们往往会这样想：一个外加电压要对电流“负责”，或者电流会引起两端点间的电压；因此，在某种意义上，元件是会对所“施”的外部条件发生“响应”的。由于这一原因，这些元件便称为被动元件（或无源元件）。这样一来，它们便同即将在下节中讨论的、作为电路中的交变电流或电压之源的、诸如发电机那一类的主动元件（或有源元件）相对立。

§ 22-2 发电机

现在要来谈论一种主动性电路元件——作为电路中电流和电压之源的——也就是一部发电机。

假定有一个象电感那样的线圈，只是它的匝数很少，以致可以忽略它本身电流的磁场。然而，这一线圈被置于一个也许可由简示于图 22-5 中的那块旋转磁铁所产生的变化磁场之中。（以前曾经见过，象这样的一个旋转磁场也可由一组适当地通有交变电流的线圈产生。）我们还必须作出几个简化假定。这些假定全都与上面对电感情况所描述的相同。特别是，我们将假定，该变化磁场被局限在线圈附近的一定区域里而不会出现在发电机外面两端点之间的空间里。

密切地按照我们曾对电感所作的那种分析，考虑环绕如下一个闭合回路对 E 进行线积分，即从端点 a 开始，经过线圈到达端点 b ，并在两端点之间的空间里返回到起点上。我们又再断定，两端点间的电势差会等于环绕该回路的 E 之总线积分：

$$V = - \oint E \cdot ds.$$

这一线积分等于该电路中的电动势，因而两端点间的势差 V 也就等于连串到该线圈的磁通量之变率：

$$V = - \mathcal{E} = \frac{d}{dt} (\text{磁通量}). \quad (22.11)$$

对于一部理想发电机来说，我们假定连通该线圈的磁通量是由一些外加条件——诸如旋转磁场的角速度——所确定的，而无论如何总不会受流经发电机的电流所影响。这样看来，发电机——至少是我们现在所考虑的理想发电机——并不是一个阻抗。跨越它的端点之间的

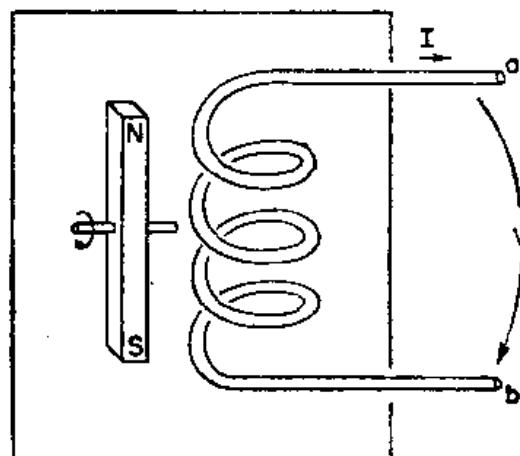


图 22-5 含有一个固定线圈和一个
旋转磁场的发电机

电势差是由任意指定的电动势 $\mathcal{E}(t)$ 所确定。象这样一部理想发电机由图 22-6 所示的那一种符号来表达。小箭头代表电动势取正值时的方向。图中发电机的正电动势将产生一个 $V = \mathcal{E}$ 的电压，其中 a 端比 b 端有较高的电势。

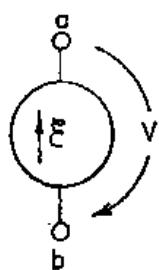


图 22-6 理想发电机的符号

还有一种用以造成一部发电机的方法，虽然内部很不相同，但在两端点以外所发生的事态则与刚才所描述的无法加以区别。假设有一个导线圈在一固定的磁场中旋转，如图 22-7 所示。我们画出一个条形磁铁来表明有磁场存在；当然，它本来也可以由任何其他稳恒磁场源、诸如一个载有稳恒电流的附加线圈来代替的。就象图中所示的那样，通过利用滑动接触或“汇电环”就可把该旋转线圈同外界建立连接。我们再对出现在 a 与 b 两端点间的电势差感兴趣，那当然就是从端点 a 至端点 b 沿着一条在该发电机之外的路线的电场的积分。

原来在图 22-7 的系统中并没有变化着的磁场，因而我们起初也许会怀疑怎么会有任何电压出现在发电机的两端。事实上，在发电机内部的任何一处都没有电场。我们照常假定，作为理想元件，在其内部的导线是由理想的导电材料制成的，而正如我们曾经多次说过的，在一理想导体内部电场会等于零。但那是不正确的。当导体在一磁场中运动时，

就不正确了。正确的说法是，在一理想导体内部作用于任一电荷上的总力必须为零。否则就会有自由电荷的无限制流动。所以永远正确的是，电场 E 以及导体速度与磁场 B 的叉积两者之和——那就是作用于单位电荷上的总力——在导体中之值必须为零：

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{在理想导体中}), \quad (22.12)$$

式中 v 代表该导体的速度。我们以前关于理想导体内部没有电场的说法是正确的，只要导体的速度 v 为零；不然的话，正确的说法就是由式(22.12)所提供的。

回到图 22-7 的发电机上来，我们现在明白，通过发电机的导电线路从端点 a 至端点 b 的电场 E 之线积分必须等于在同一路线上 $v \times B$ 之线积分，即

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.13)$$

可是，这仍然是正确的：即环绕一个包括该发电机外面从 b 至 a 的归途在内的那条闭合回路的 E 之线积分仍必须为零，因为这里并不存在正在变化的磁场。因此，式(22.13)中的第一个积分也就等于 V ，即在两端点间的电压。事实证明，式(22.13)右边的积分恰好就是穿过该线圈的通量匝连数的变率，因而——根据通量法则——会等于线圈中的电动势。因此，我们再度得到这么一个结果，即跨越两端点间的电势差等于该电路中的电动势，与式(22.11)相符。所以，无论是一部其磁场在一固定线圈附近变化着的发电机，还是一部其线圈运动于一固定磁场中的发电机，其外部的性质都完全相同。即有一个电势差跨越于两端点之间，

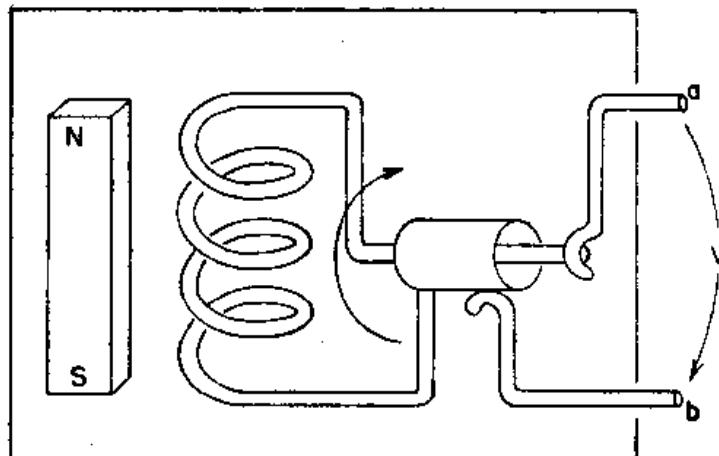


图 22-7 含有一个旋转于一固定磁场中的线圈的发电机

那是与电路中的电流无关而仅仅取决于该发电机内部一些任意被指定的条件。

只要我们试图从麦克斯韦方程组的观点来理解发电机的操作，我们也许就要问及象手电筒电池那样的一个寻常化学电池。这也是一种发电机，即是一个电压源，尽管它只出现在直流电路中。原理最简单的一种电池示如图 22-8。我们设想有两块浸没在某一种化学溶液中的金属板。假定该溶液含有正的和负的离子。也假定其中一种离子，如负的那一种，比那带有异号电荷的离子要重得多，使得凭扩散过程而通过溶液的运动就要慢得多了。其次，我们还假定，用种种方法来安排使得溶液浓度从一部分变化至另一部分，以致两种符号的离子在比方说下板附近的数目要远大于在上板附近。由于正离子的迁移率较大，它们便将更快地漂移到浓度较低的那个区域里，使得有超额正离子到达上板。于是上板就将带有正电而下板则有一净负电荷。

当有越来越多的电荷扩散至上板时，这一块板的电势就将升高至这样一种程度，即在两板间所引起的电场对离子所施之力恰足以抵偿其超额迁移率，因而电池中的两极板就迅速达到一个标志着其内部结构的电势差。

正如上面对于一理想电容器所论证的那样，我们见到， a 和 b 两端点间的电势差恰好等于两极板间的电场之线积分，如果不再有任何离子扩散的话。当然，电容器与这样一个化学电池之间是有一点根本差别的。倘若把电容器的两端短路了一会儿，电容器将会放电而不再有任何电势差跨越于两端点之间。而在化学电池的情况下，电流却可以继续从端点引出而不致在电动势上有任何改变——当然一直到电池内的化学药品耗尽时为止。在一个实际电池中，会发现跨越端点的电势差随着从电池所引出的电流增大而降低。然而，在保持所已作出的那种抽象化程度上，我们可以设想一个理想电池，跨越于端点间的电压是与电流无关的。这样，一个实际电池便可视作一个理想电池串联着一个电阻。

§ 22-3 理想元件网路；基尔霍夫法则

就象上一节中我们曾见到的，用在元件外面所发生的事态来描述一个理想电路元件是十分简单的，电流与电压彼此线性地联系着。可是在元件内部真正发生的事态却是相当复杂的，凭借麦克斯韦方程组来给出一个精确的描述将是十分困难的。试想象要对一部含有数以百计的电阻、电容和电感的收音机提供一个里面的电场和磁场的精确描述吧。要对这样一件东西运用麦克斯韦方程组来加以分析，那是无法做到的。但作出曾在 § 22-2 节中描述过的那么多种近似后，再对实际电路元件的基本特点用理想化的办法来加以总结，这样对一个电路用相当简单的方法来分析就成为可能的了。现在我们要来证明那是怎样做出来的。

设有一个含有一部发电机和几个阻抗互相连接在一起的电路，如图 22-9 所示。按照我们的近似条件，在各别电路元件的外部区域里并没有磁场。因此环绕任一条未曾通过其中任一元件的曲线的 E 之线积分为零。然后考虑由虚线所构成的完全围绕着图 22-9 的电路的那条曲线 Γ 。环绕这一条曲线的 E 之线积分由好几段构成。每段就是从一个电路元件

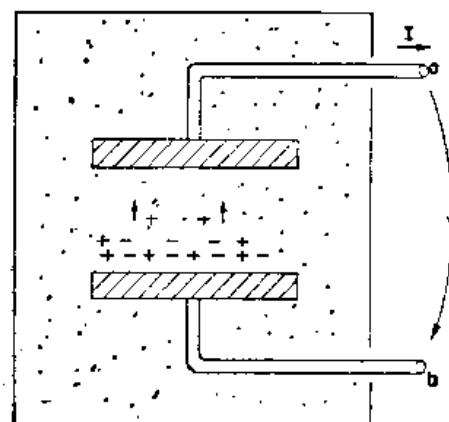


图 22-8 化学电池

的一端至另一端的线积分。这一线积分我们已称之为跨越该电路元件的电压降。于是整个线积分就恰好是跨越电路中所有一切元件的电压降之和：

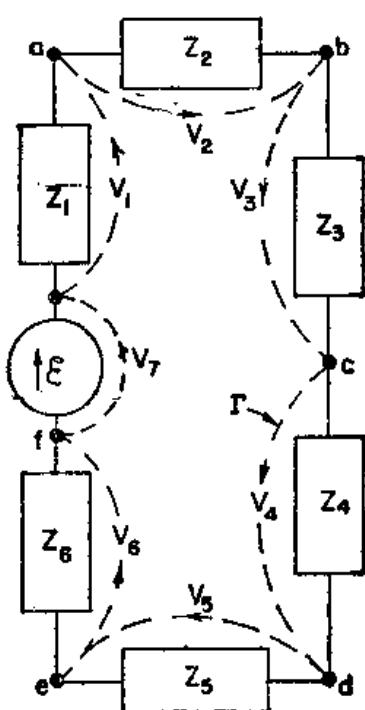


图 22-9 环绕任一闭合路线的电压降之和为零

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum V_n.$$

由于这一线积分为零，我们便应该有环绕整个电路回线的势差之和等于零：

$$\sum_{\text{环路}} V_n = 0. \quad (22.14)$$

这一结果得自麦克斯韦方程组中之一——即在一个其中没有磁场的区域里环绕任一闭合回线的 \mathbf{E} 之线积分为零。

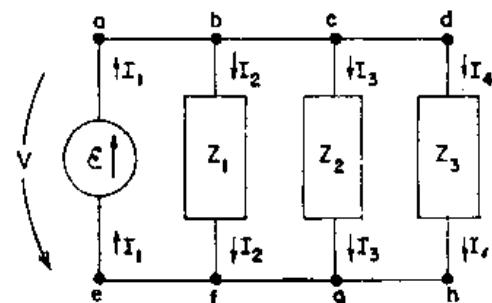


图 22-10 流入任一个交点的电流之和为零

假设现在考虑一个象图 22-10 所示的那种电路。连接 a 、 b 、 c 和 d 各端点的那条水平线是为着要表明这些端点都彼此互相连接着，或者它们都是由电阻可以忽略的导线连接着。无论如何，这种画法的意思是： a 、 b 、 c 、 d 诸端点全都处于同一电势上，同样地， e 、 f 、 g 、 h 诸端点也都处于同一电势上。于是横跨那四个元件中每一个的电压降 V 都相同。

原来我们的理想化条件之一就已经是，在各阻抗的端点上所积聚起来的电荷都可以忽略。现在再进一步假定，任何积聚于用来连接各端点的那些导线上的电荷也都是可以忽略的。于是电荷守恒律要求，任何离开了某一电路元件的电荷都应立即进入另一个电路元件中去。或者，也同样可以说，我们要求流入任一个交叉点的电流之代数和必须为零。当然，所谓交叉点我们指的是诸如 a 、 b 、 c 、 d 等互相连接着的任何一组端点。象这样互相连接的一组端点我们往往称之为“交点”。于是电荷守恒便要求对于图 22-10 的电路，

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0. \quad (22.15)$$

进入包括 e 、 f 、 g 和 h 四端点的那个交点的诸电流之和也是零：

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (22.16)$$

当然，这和式(22.15)是一样的。这两个方程并非互相独立。普遍的法则是，流进任一个交点的电流之和必须为零。

$$\sum_{\text{流进一个交点}} I_n = 0. \quad (22.17)$$

上面关于环绕一个闭合回路的电压降之和为零的结论在一个复杂电路中必须运用于其中任一回路。并且，有关流进一个交叉点的电流之和为零的结果对于任一个交叉点也必然是正确的。这两个方程称为基尔霍夫法则。有了这两个法则，就能够在任何一个网路中解出其中的电流和电压。

现在假定考虑图 22-11 那个更复杂的电路。在这一电路中我们将怎样找出其中的电流和电压呢？可以按照下述直截了当的办法把它们找出。分别考虑出现在该电路中的那四个附属闭合电路。（例如，其中一个回路从端点 a 至端点 b 又至端点 e 和 d 并返回到端点 a 上。）对于每一个回路，我们把基尔霍夫法则的第一个——环绕每一回路的电压之和为零——的方程写出。必须记住：若顺着电流的方向行进，该电压降就算作是正的，但若在经过某一元件时与电流的方向相反，则电压降应算是负的；并且还必须记住，跨越一部发电机的电压降是在该方向上电动势的负值。这样，若我们考虑那一个从端点 a 出发而又结束于其上的小回路，就会得出如下方程：

$$z_1 I_1 + z_3 I_3 + z_4 I_4 - \mathcal{E}_1 = 0.$$

应用这一法则于其余的回路中，我们便会获得三个同类方程。

其次，对于该电路中每一个交叉点，还应该写出电流方程。例如，对那些流入交叉点 b 的电流求和时便给出方程

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0.$$

同理，对那个标明为 e 的交叉点则会有电流方程

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

图上所表示的这个电路总共有五个这样的电流方程。不过，结果弄清楚的是，这些方程中的任何一个都可从其他四个导出来；因此就只有四个互为独立的电流方程。这样一来，我们总共有八个独立的线性方程：四个电压方程和四个电流方程。有了这八个方程，就可以解出那八个未知电流。一旦这些电流求出，该电路便算是已经解决了。跨越每一元件的电压降由流经该元件的电流乘以其阻抗而给出（或者，在有电压源的情况下，电压是已知的）。

我们已见到，当写出电流方程时，会获得一个并不与其他诸方程独立的方程。一般也可能写下太多的电压方程。例如，在图 22-11 的电路中，虽然我们只考虑那四个小回路，但还有大量的其他回路本来也可以对其写出电压方程来的。例如，有一个沿路线 $abcfeda$ 的回路。还有另一个回路是沿 $abcfegda$ 路线。你能够看出，存在许多个回路。在分析一个复杂电路时极易于得出太多的方程。有一些法则会告诉你如何去作处理以便仅仅写下最低限度数目的方程，但往往只要略为思考一下便能看出该怎样去得到形式最简单的适当数目的方程。而且，写出一、二个超额方程也没有什么妨碍。它们将不会导致任何错误的答案，只是或许要多费一些不必要的代数运算罢了。

在第一卷第二十五章中，我们曾经证明过，若两阻抗 z_1 和 z_2 互相串联，则它们相当于由下式给出的一个单独阻抗 z_t ：

$$z_t = z_1 + z_2. \quad (22.18)$$

我们也曾证明过，若两阻抗并联，则它们相当于一个由下式给出的单独阻抗 z_p ：

$$z_p = \frac{1}{(1/z_1) + (1/z_2)} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (22.19)$$

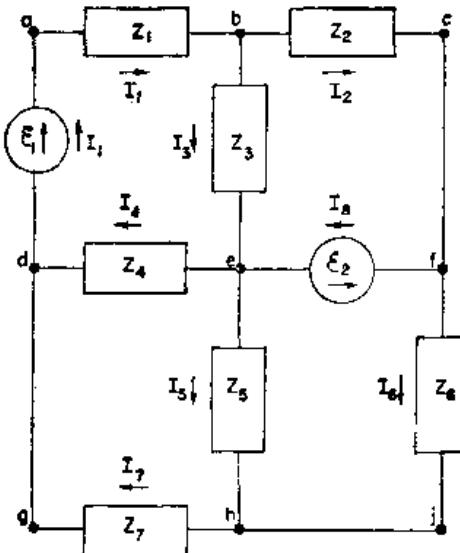


图 22-11 用基尔霍夫法则来分析电路

你如果回顾一下就将会看到，在导出这些结果时我们实际上已应用了基尔霍夫法则。往往可以通过反复运用关于阻抗串联和并联的公式来对一个复杂电路加以分析。例如，图 22-12 的电路就是可以这样分析的。首先， z_4 和 z_5 两阻抗可以由其并联等效阻抗来代替，而 z_6 和 z_7 两阻抗也是一样。然后，阻抗 z_2 可以同 z_6 和 z_7 的并联等效阻抗按串联法则结合起来。按照这样的方式进行下去，整个电路就可以简化成一部发电机同一个单独阻抗 Z 串联了。于是流经该发电机的电流就不过是 \mathcal{E}/Z 。然后又倒转过来做，人们就能求出通过每一阻抗的电流了。

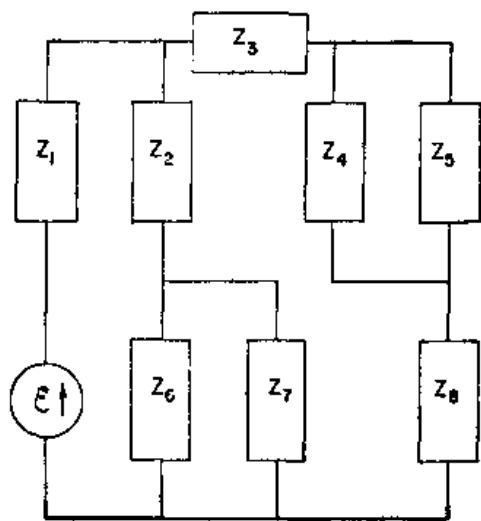


图 22-12 一个可以用串联和并联两种组合来加以分析的电路

照这样的方式进行下去，整个电路就可以简化成一部发电机同一个单独阻抗 Z 串联了。于是流经该发电机的电流就不过是 \mathcal{E}/Z 。然后又倒转过来做，人们就能求出通过每一阻抗的电流了。

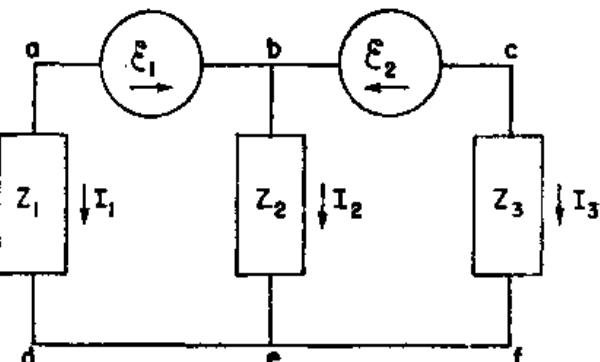


图 22-13 一个不能用串联和并联那些组合来加以分析的电路

然而，也有一些十分简单电路不能用这一办法来分析的，图 22-13 所示电路就是一个例子。要分析这个电路，一定要按照基尔霍夫法则写下电流和电压的方程来。让我们就来做一做吧。这里只有一个电流方程：

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

因而我们立即知道

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$

如果马上利用这一结果以写出那些电压方程，便能节省一些代数手续。对于这一电路会有两个独立的电压方程；它们是

$$-\mathcal{E}_1 + I_2 z_2 - I_1 z_1 = 0$$

$$\text{和} \quad \mathcal{E}_2 - (I_1 + I_2) z_3 - I_2 z_2 = 0.$$

有两个方程和两个未知电流。对这些方程解出 I_1 和 I_2 ，便得

$$I_1 = \frac{z_2 \mathcal{E}_2 - (z_2 + z_3) \mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3} \quad (22.20)$$

和

$$I_2 = \frac{z_1 \mathcal{E}_2 + z_3 \mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3}. \quad (22.21)$$

第三个电流则可从这两个之和获得。

另一个不能通过利用关于阻抗的串联和并联法则来加以分析的电路例子示如图 22-14。象这样的电路

称为“电桥”。它出现在许多用来测量阻抗的仪器中。对这一电路人们往往感兴趣的是这么一个问题：各阻抗应怎样互相联系，才能使通过阻抗 Z_3 的电流为零？符合这一要求的条件将留给你们去找。

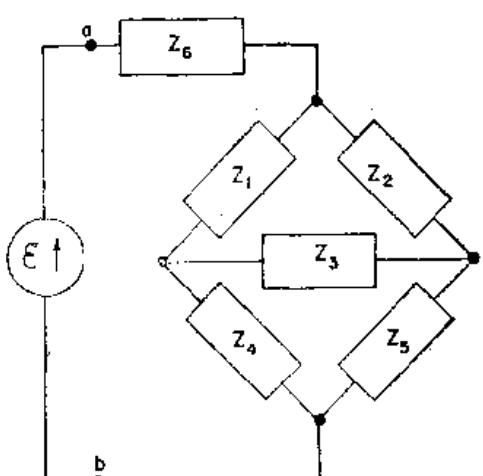


图 22-14 一个桥式电路

§ 22-4 等效电路

假定把一部发电机 \mathcal{E} 连接到一个含有各种阻抗的复杂互连的电路中, 如图 22-15(a) 约略所示的那样。所有从基尔霍夫法则获得的方程都是线性的, 因而当对其解出流经该发电机的电流 I 时, 我们便会得出 I 与 \mathcal{E} 成正比。即可以写成

$$I = \frac{\mathcal{E}}{z_{\text{有效}}},$$

式中 $z_{\text{有效}}$ 是一复数, 即在该电路中所有一切元件的一个代数函数。(如果该电路除了图上所示的那部发电机之外便没有其他发电机, 那么就不会有独立于 \mathcal{E} 的任何附加项。) 但这一方程恰好就是我们关于图 22-15(b) 的电路所该写出的。只要我们仅仅对在 a 和 b 两端点的左侧所发生的事态感兴趣, 图 22-15 的两个电路就是等效的。因此, 我们能够提出一个普遍声明: 任一个含有无源元件的二端网路都可以由一个单独阻抗 $z_{\text{有效}}$ 来代替而不致改变电路中其余部分的电流和电压。当然, 这一声明的内容不过是关于来自基尔霍夫法则——而最终则是来自麦克斯韦方程组的线性——的结果的一个评述。

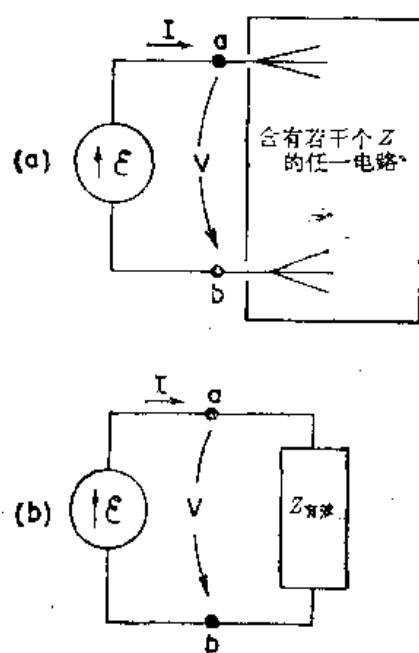


图 22-15 任一个含有无源元件的二端网路都相当于一个有效阻抗

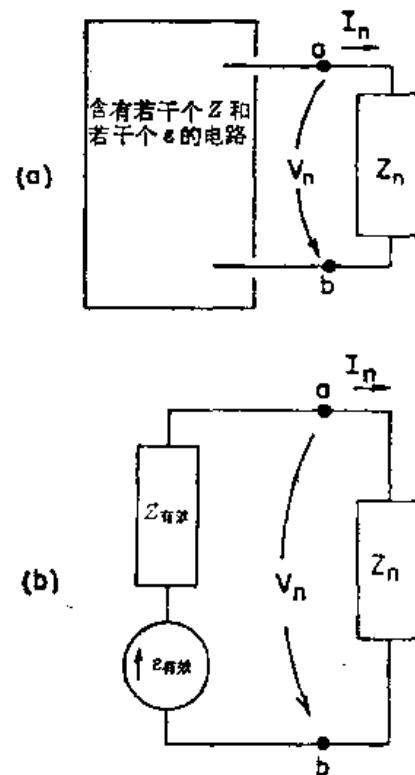


图 22-16 任一个二端网路都可以由一部发电机和一个阻抗互相串联来代替

这一概念可推广至同时含有若干部发电机和若干个阻抗的电路中。假定我们是“从其中某一阻抗的观点”来观看这样一个电路, 而这个阻抗被称为 z_n , 示如图 22-16(a)。要是对整个电路的方程求解, 就会找出在 a 和 b 两端点之间的电压 V_n 乃是 I 的一个线性函数, 这我们可以写成

$$V_n = A - BI_n, \quad (22.22)$$

式中 A 和 B 依赖于该电路中在端点的左侧的一些发电机和阻抗。例如, 对于图 22-13 的那种电路, 我们会找出 $V_1 = I_1 z_1$ 。这可以写成 [通过对式(22.20)的重新布置]:

$$V_1 = \left[\left(\frac{z_2}{z_2 + z_3} \right) \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \right] - \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} I_1. \quad (22.23)$$

于是，把这一方程与有关阻抗 z_1 的方程，即 $V_1 = I_1 z_1$ ，互相结合就可获得其通解，或者在普遍情况下，通过将方程(22.22)与

$$V_n = I_n z_n$$

相结合而获得。

现在若考虑 z_n 被连接至一个含有一部发电机和一个阻抗的简单串联电路，如图 22-16 (b) 所示，则相当于(22.22)的方程就是

$$V_n = \mathcal{E}_{\text{有效}} - I_n z_{\text{有效}}$$

上式与(22.22)全等，只要我们令 $\mathcal{E}_{\text{有效}} = A$ 而 $z_{\text{有效}} = B$ 。因此，若我们只对于在 a 和 b 两端点右侧所发生的事态感兴趣，则图 22-16 的那个任意电路便始终可以由一部发电机与一个阻抗互相串联而成的等效结合体来代替。

§ 22-5 能量

我们已经注意到，要在一个电感中建立起电流 I ，能量 $U = \frac{1}{2} L I^2$ 总得由外电路供应；当电流下降到零时，这能量又交还给外电路。在一个理想电感中并没有能量损耗机制。当有一交变电流通过一电感时，能量在它与电路的其他部分之间流来流去，能量递交给电路的平均时率即为零。这样，我们便说电感是一个无耗元件；没有电能会在其中消耗掉——也就是“损失”掉——的。

同样，一个电容器的能量、 $U = \frac{1}{2} C V^2$ ，当电容器放电时，会归还给外电路。当一电容器置于交流电路中时，能量在其中进进出出，但每一周期中的净能流为零。一个理想电容器也是一个无耗元件。

我们知道，电动势就是一个能源。当电流 I 沿电动势的方向流动时，能量以 $dU/dt = \mathcal{E}I$ 的时率输送给外电路。如果电流是被由电路中的其他发电机驱使——使其逆着电动势的方向流动，则这电动势将以时率 $\mathcal{E}I$ 吸收能量；既然 I 是负的， dU/dt 也将是负的。

如果一部发电机连接至一个电阻 R ，则通过该电阻的电流为 $I = \mathcal{E}/R$ 。由发电机所供应的能量以时率 $\mathcal{E}I$ 为该电阻所吸收。这一能量在电阻中变成热，从而使该电路的电能损失掉。这样，我们便说电能在电阻中耗散了。在电阻中能量被耗散的时率为 $dU/dt = RI^2$ 。

在交流电路中，能量消耗于电阻中的平均时率等于一周中 RI^2 的平均值。由于

$I = \hat{I}e^{i\omega t}$ ——这我们实际指的是 I 正比于 $\cos \omega t$ ——所以在一周中 I^2 的平均值就是 $|\hat{I}|^2/2$ ，因为电流峰值为 $|\hat{I}|$ ， $\cos^2 \omega t$ 的平均值为 $1/2$ 。

当一部发电机接至任意一个阻抗 z 时，能量的损失又将如何呢？（当然，所谓“损失”我们指的是电能转变为热能。）任一阻抗 z 都可以写成它的实部及虚部之和。这就是说，

$$z = R + iX, \quad (22.24)$$

式中 R 和 X 都是实数。从等效电路的观点出发，我们可以讲，任一阻抗相当于一个电阻与一个纯虚数阻抗——称为电抗——互相串联，如图 22-17 所示。

我们以前就知道，任一仅含有一些 L 和 C 的电路都会有一个

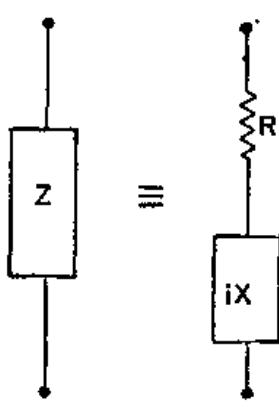


图 22-17 任一阻抗都与一纯电阻及一纯电抗的串联组合等效

纯虚数的阻抗。由于平均没有任何能量会在某一个 L 和 C 中损失，因而一个仅含有一些 L 和一些 C 的纯电抗便将不会有任何能量损失。我们可以看到，对于电抗来说这应是一般正确的。

如果一部具有电动势 \mathcal{E} 的发电机被连接至图 22-17 的那个阻抗 z 上去，则来自该发电机的电动势和电流便应有这样一个关系：

$$\mathcal{E} = I(R + iX). \quad (22.25)$$

要找出能量输出的平均时率，就要求得乘积 $\mathcal{E}I$ 的平均值。此刻我们必须小心！当处理这一种乘积时，应与实数量 $\mathcal{E}(t)$ 和 $I(t)$ 打交道。（只有当我们拥有线性方程时，复变数函数的实部才会代表实际的物理量；现在我们所关心的乃是一个积，这肯定就不再是线性的了。）

假定我们选取 t 的原点以便使该幅 I 是一实数，比如 I_0 ；那么 I 的实际时间变化就是由下式给出：

$$I = I_0 \cos \omega t.$$

式(22.25)的电动势则为下式

$$I_0 e^{i\omega t} (R + iX)$$

中的实部，也即

$$\mathcal{E} = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t. \quad (22.26)$$

式(22.26)中的两项分别代表跨越图 22-17 上 R 和 X 的电压降。我们看到，那跨越电阻的电压降与电流同相，而那跨越纯电抗部分的电压降则与电流异相。

由发电机供应的平均能量消耗率 $\langle P \rangle_{平均}$ 等于 $\mathcal{E}I$ 这一乘积遍及一周的积分除以周期 T ；换句话说，

$$\langle P \rangle_{平均} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}IdT = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t dt.$$

第一个积分为 $\frac{1}{2} I_0^2 R$ ，而第二个积分为零。所以在一个阻抗 $z = R + iX$ 中的平均能量损失只取决于 z 的实部，并且等于 $I_0^2 R / 2$ 。这同我们以往关于在电阻中的能量损失结果相符。而在那电抗部分则并没有能量损失。

§ 22-6 梯形网路

现在我们想要来考虑一个可用串联和并联组合加以分析的有趣电路。假设从图 22-18(a)的那个电路开始。可以立刻看出，从端点 a 至端点 b 的阻抗只不过是 $z_1 + z_2$ 。现在让我们考虑一个稍为困难一点的电路，即如图 22-18(b)上的。我们本来可以利用基尔霍夫法则来分析这个电路，但也容易用串联和并联的组合来加以处理。我们可用一个单独阻抗 $z_3 = z_1 + z_2$ 来代替右端那两个阻抗，如图(c)所示。然后， z_3 和 z_4 两阻抗又可以由它们的等效并联阻抗 z_4 来顶替，示如图(d)。最后， z_1 和 z_4 相当于一个单独阻抗 z_5 ，示如图(e)。

现在可以提出一个逗趣的问题：要是我们在图 22-18(b)的那个网路上永远保持增多一些节段——如在图 22-19(a)由那些虚线所示的那样——将会发生什么样的情况呢？我们能否解这样一个无限长的网路？噢，那并不怎么困难。首先，我们注意到，如果再添加一节于这一无限长网路的“前”端，它仍将不会改变。肯定无疑的是，若我们添加一节于一无限长网路，它仍然是那同一无限长网路。假设把在该无限长网路的两端点 a 和 b 之间的阻抗称为

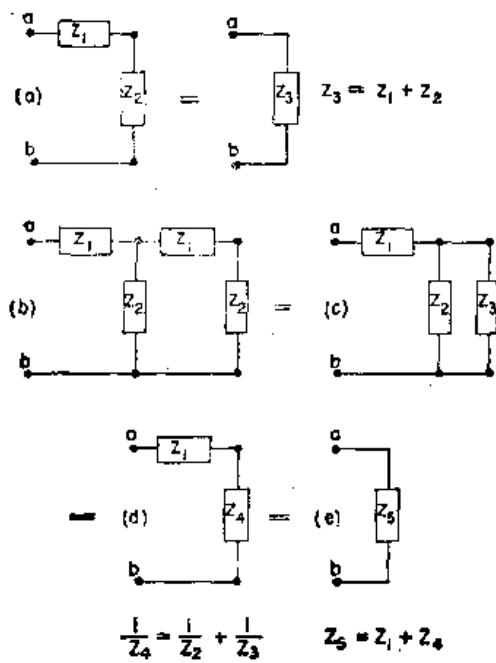


图 22-18 一个梯形网路的有效阻抗

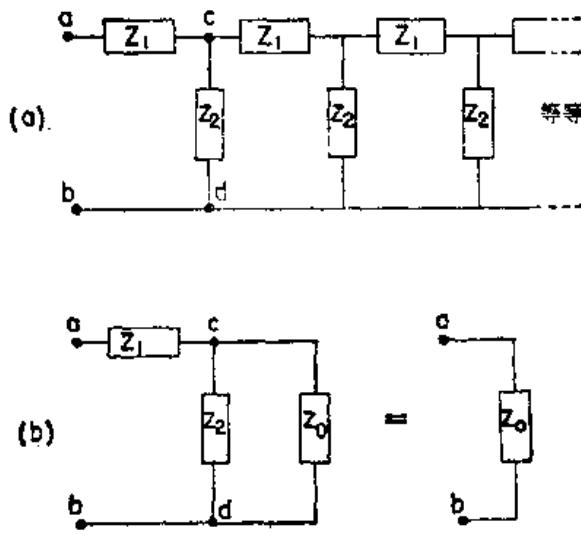


图 22-19 一个无限长梯形网路的有效阻抗

z_0 ; 则在 c 和 d 两端点右侧的全部东西也将是 z_0 . 因此, 就其前端来说, 可以将该网路表达成如图 22-19(b) 所示的那样. 构成 z_2 与 z_0 的并联组合, 并将这个结果加于那个串联着的 z_1 上, 我们便能立即写下这个组合的阻抗:

$$z = z_1 + \frac{1}{(1/z_2) + (1/z_0)} \quad \text{或} \quad z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

但这一阻抗也等于 z_0 , 因而得到这么一个方程:

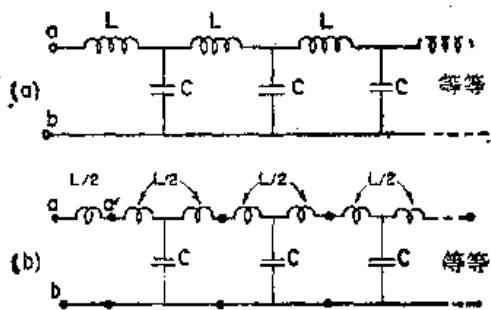
$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

由此可以解出 z_0 :

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1^2}{4}\right) + z_1 z_2}. \quad (22.27)$$

因此, 我们已经得到一个含有反复串联和并联阻抗的无限长梯形网路的阻抗之解. 这阻抗 z_0 被称为这样一个无限长网路的特性阻抗.

现在让我们来考虑一个特殊例子, 其中串联元件是一自感 L 而并联元件则是一电容 C ,

图 22-20 一个 $L-C$ 梯形网路

以两种等效方式画出

如图 22-20(a) 所示. 在这种情况下, 通过令 $z_1 = i\omega L$ 和 $z_2 = 1/i\omega C$, 我们便可找出该无限长网路的阻抗. 注意式(22.27)中的第一项不过是那头一元件的阻抗之一半. 因此, 要是把该无限长网路画成象图 22-20(b) 所示的那样, 似乎就更为自然, 或多少总会较为简单些. 若从端点 a' 去观看该无限长网路, 则应可见到该特性阻抗为

$$z_0 = \sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)}. \quad (22.28)$$

现在就有两种有趣情况, 这要取决于频率. 如

果 ω^2 小于 $4/LC$, 则根号内的第二项将比第一项为小, 而阻抗 z_0 将是一实数. 反之, 若 ω^2 大于 $4/LC$, 则阻抗 z_0 将是一纯虚数, 并可写成

$$z_0 = i\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)}.$$

我们以前就曾经说过，一个仅含有诸如电感和电容那种虚值阻抗的电路将有一个纯虚数的阻抗。目前正在研究的电路——仅含有一些 L 和一些 C ——在频率低于 $\sqrt{4/LC}$ 时其阻抗怎么能够是一纯电阻呢？对于较高频率，阻抗乃一纯虚数，这与我们以前的说法一致。对于较低频率，阻抗是一纯电阻，因而将吸收能量。该电路为什么会象电阻那样不断吸收能量，它是仅由电感和电容所构成的呀？答案：由于有无限多个电感和电容，以致当一个源被接到该电路上时，它会供应能量于第一个电感和电容，然后又供应那第二个、第三个、等等，在这一种电路中，能量不断以一恒定率被吸收，即从发电机那里稳恒地流出并进入该网路中去，所供应的这些能量被储存在沿线往后的那些电感和电容中去了。

这一概念暗示着在该电路中所发生的事态有一个有趣的地方。我们会期望，如果把一个源接到其前端上，这个源的效应将经由该网路朝向那无限远的一端传播。波会沿线直下的这种传播很象由一根从它的驱动源吸收了能量的天线所发出的辐射；这就是说，我们期望，当阻抗是一实数，即在 ω 比 $\sqrt{4/LC}$ 小时，这样一种传播就会发生。但当阻抗是一纯虚数，亦即 ω 比 $\sqrt{4/LC}$ 大时，就不该指望会看到这一种传播。

§ 22-7 滤波器

在上一节中，我们曾见到图 22-20 的那个无限长梯形网路会不断地吸收能量，如果它被一个低于某一临界频率 $\sqrt{4/LC}$ 的源所驱动的话，这一频率将被称为截频 ω_0 。我们曾经建议，这一效应可以用能量不断沿线直下传输来理解。另一方面，在较高频率上，即对于 $\omega > \omega_0$ ，便没有这种连续性的能量吸收；这时我们应该期待，电流或许不会沿线直下“贯穿”得很远。让我们来看看这些想法是否对头。

假设已把该梯形网路的起始端连接到某一交流发电机，现问：网路的第 n 节上电压的情况如何？由于该网路无限长，因而从一节至次一节电压所发生的任何变化总是一样；所以就让我们只来看看当从某节、比如说第 n 节、至下一节所发生的事情。我们将象图 22-21 (a) 所示的那样对电流 I_n 和电压 V_n 下定义。

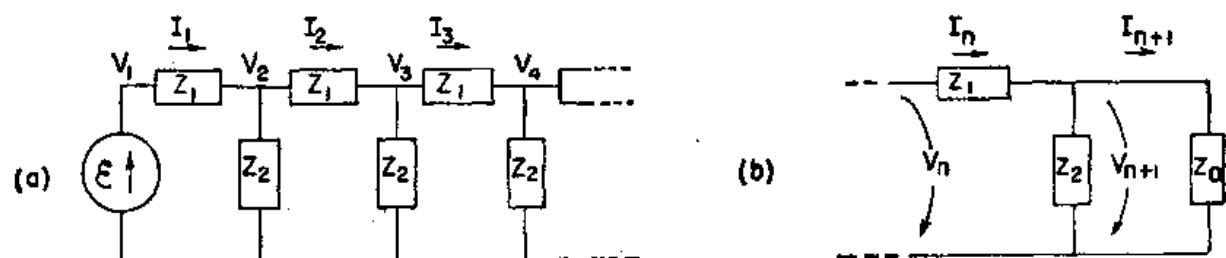


图 22-21 要找出一个梯形网路的传播因数

记住在第 n 节之后，我们总能用特性阻抗 z_0 来代替该梯形网路的其余部分，这样就可以从 V_n 得到 V_{n+1} ；于是只须对图 22-21(b) 的那个电路进行分析。首先，我们注意到，由于 V_n 是横跨 z_0 的电压，因而它必须等于 $I_n z_0$ 。并且 V_n 与 V_{n+1} 之差恰好是 $I_n z_1$ ：

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

因此，便可得到比值

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0}.$$

这个比值叫做每节梯的传播因数; 我们将记之为 α . 当然, 这对于所有一切节级都相同.

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z}. \quad (22.29)$$

这样, 在第 n 节之后的电压就是

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E}. \quad (22.30)$$

现在你可以找出在第 754 节之后的那个电压; 它刚好就是 α 升至第 754 次幂乘以 \mathcal{E} .

我们看一看图 22-20(a) 中 $L-C$ 梯的 α 象个什么样子. 利用式(22.27)的 z_0 , 以及 $z_1 = i\omega L$, 我们便得

$$\alpha = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)}. \quad (22.31)$$

如果驱动频率低于该截频 $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$, 则平方根是一实数, 而在分子及分母上的两个复数其量值便相等. 因此, $|\alpha|$ 的量值为 1; 我们便可写成

$$\alpha = e^{i\delta},$$

这表明在每节上电压的大小都相同; 只是电压的周相变化而已. 事实上, 这相变 δ 是一负数并代表着当沿该网路从一节至下一节时电压上的“延迟”.

对于比截频 ω_0 为高的频率, 最好是把式(22.31)的分子和分母上的 i 消去而重新写成

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)}. \quad (22.32)$$

现在该传播因数 α 是一实数, 而且是一个小于 1 的数目. 这意味着在任一节上的电压比起其前一节上的电压总要小一个因数 α . 对于任一比 ω_0 高 的频率, 当我们沿该网路往下走时, 电压降落得很快. α 的绝对值作为频率函数而画成之图看来就象图 22-22 的那条曲线.

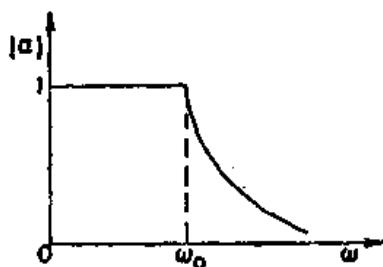
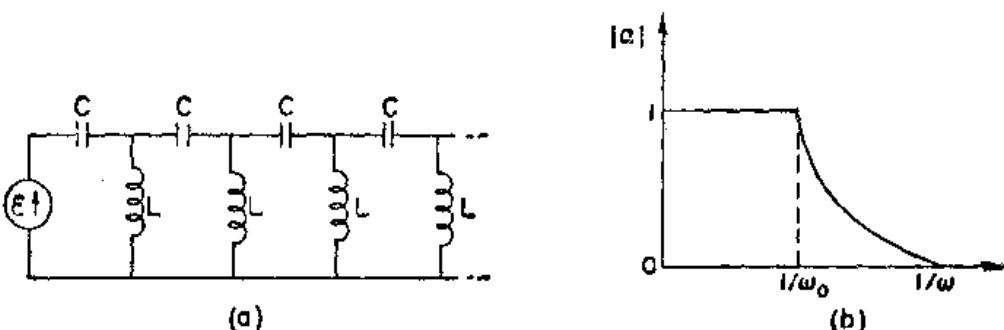


图 22-22 在 LC 梯中
每节的传播因数

我们看到, 对高于和低于 ω_0 的频率, α 的行为都与这样一种认识相一致, 即对于 $\omega < \omega_0$, 该电路会传播能量; 而对于 $\omega > \omega_0$, 则能量被阻塞住了. 我们说, 这网路会“通过”低频而“舍弃”或“滤去”高频. 任何一个其特性被设计成按某一规定方式随频率变化的网路都称为“滤波器”. 我们刚才正在分析一个“低通滤波器”.

你可能会觉得奇怪, 为什么要讨论一个显然不能够实现的无限长网路. 重要之点是, 同样的特性可以在一个有限网路中找到, 如果我们用一个等于该特性阻抗 z_0 的阻抗在其末端结束它的话. 虽然在实际上是不能够用几个象 R 、 L 和 C 那样的简单元件来严格地复制出该特性阻抗的, 但对于某一范围内的频率却往往能够以相当好的近似程度做到这一点. 这样, 就可以做成性质十分接近于一个无限长网路的一个有限长滤波器. 例如, 若用一纯电阻 $R = \sqrt{L/C}$ 来结束那个 LC 梯, 则它的表现就象上面对它所描述的那样.

如果在那个 LC 梯形网路中交换各个 L 和 C 的位置, 以形成如图 22-23(a) 所示的那种梯形, 就有一种会传播高频而舍弃低频的滤波器. 通过利用已有的结果, 很容易看出在这一网路中会发生的事情. 你将会注意到, 无论什么时候当把 L 变成 C 或倒过来时, 也就由每一个 $i\omega$ 变成 $1/i\omega$. 因此, 过去在 ω 上所发生的事情现在在 $1/\omega$ 上发生了. 特别是, 可以通过用图 22-22 并将其在横轴上的标记改成 $1/\omega$, 象图 22-23(b) 所做的那样, 将看出 α 如何

图 22-23 (a)一个高通滤波器; (b)它的传播因数作为 $1/\omega$ 的函数

随频率而变化。

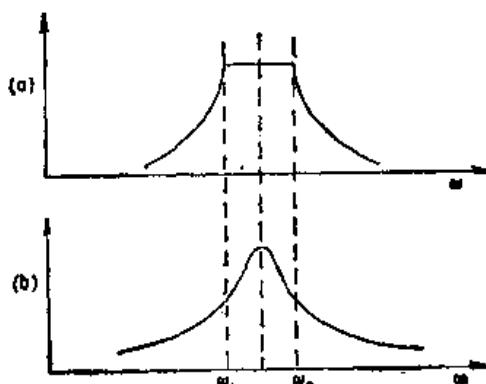
刚才所描述的低通和高通滤波器具有各种技术应用。 LC 型低通滤波器常在直流动力供应单元中用作“平流”滤波器。如果要从一个交流电源造成一套直流动力，那么先要用一个只允许电流单向流动的整流器。从整流器将会得到看来象图 22-24 所示的函数 $V(t)$ 那样的一系列脉冲，那是一种低劣的直流，因为它会上下跳动。假设想要一个漂亮的纯粹直流，象一个电池组所供应的那样。我们可以通过放置一个低通滤波器于整流器与负载之间，就会接近这一目标。

从第一卷第五十章中我们知道，图 22-24 的那个时间函数可以表达成由一个恒定电压加上一个正弦波、再加上一个更高频率的正弦波、等等的迭加——即由一个傅里叶级数来表达。如果该滤波器是线性的（正如我们曾经假定的，只要那些 L 和 C 都不随电流或电压而变），那么从滤波器出来的就是对在输入端每一成分的各项输出的迭加。如果安排得使滤波器的截频 ω_0 远低于函数 $V(t)$ 中的那一最低频率，则直流 ($\omega=0$) 便能够很好地通过，但那第一谐波之幅将被削弱得很厉害。而那些更高的谐波之幅被削弱得更厉害了。所以我们能够获得一个随心所欲的尽可能平滑的输出，只凭你乐意购买多少节滤波器而定。

如果希望舍弃某些低频，则一个高通滤波器便用得上了。例如，在一留声机放大器中，

高通滤波器可以用来让音乐通过，而避开那些来自转盘电动机的低调隆声。

也可能制成一种“带通”滤波器，它会舍弃比某一频率 ω_1 低而比另一频率 ω_2 （大于 ω_1 ）高的一些频率，但却让 ω_1 与 ω_2 之间的那些频率通过。这可简单由让一个高通的与一个低通的滤波器并放在一起而做到，但更经常的却是通过下述的办法来做到，即制成一个其阻抗 z_1 和 z_2 更加复杂——每一个都是若干个 L 和 C 的组合——的梯形网路。象这样一个带通滤波器也许具有如图 22-25(a) 所示的那种

图 22-25 (a)带通滤波器;
(b)简单的共振滤波器

传播常数。这可能用来把一些仅占据一个频率间隔的信号——诸如在一高频电话缆中的许多声音沟道的每一个，或在无线电传递中受了调制的每一个载波——分开来。

在第一卷第二十五章中我们曾经见到，象这样的滤波作用也可利用一寻常共振曲线的选择性来做到，为了比较，我们已把该共振曲线作于图 22-25(b) 上。但对于某些目的来说，

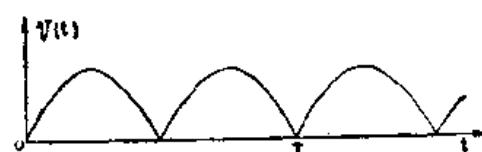


图 22-24 一个全波整流器的输出电压

这一种共振式滤波器没有象带通滤波器那么优越。你会记起(第一卷第四十八章)，当一频率为 ω_0 的载波受一“信号”频率 ω_s 所调制时，整个讯号不仅含有该载频，而且也含有边带频率 $\omega_0 + \omega_s$ 和 $\omega_0 - \omega_s$ 。采用共振式滤波器时，这些边带总多少会受到衰减，而信号的频率越高则衰减越厉害，正如你可以从图上见到的。因此就是一个不良的“频率响应”。那些较高频的乐音通不过去，但若滤波作用是由一个设计得使 $\omega_2 - \omega_1$ 的宽度至少两倍于最高信号频率的那种带通滤波器来完成的话，则该频率响应对于所需的那些信号来说就将是“平坦”的了。

关于梯式滤波器我们还要再强调这么一点：图 22-20 的 LC 梯也是传输线的一个近似表象。如果有一长导体与另一导体平行并列——诸如在一根同轴电缆中的导线，或一根悬挂在地面之上的导线——那么便会有某一电容存在于两导体之间，还有由它们之间的磁场所引起的电感。若我们设想该传输线被分割成众多个小段 Δl ，每一段看来就象在 LC 梯中由一个串联电感 ΔL 和一个并联电容 ΔC 所构成的一节。然后，我们便能应用有关该梯式滤波器的结果。若取 Δl 趋于零时的极限，则便有对于传输线的一个极好描述。注意当 Δl 变得越来越小时， ΔL 和 ΔC 两者都会减少，但都在同一比例上，因而比值 $\Delta L/\Delta C$ 仍将保持不变。因此，若取 ΔL 和 ΔC 都趋于零时式(22.28)的极限，则可以找出该特性阻抗是一个大小为 $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$ 的纯电阻。我们也可将该比值 $\Delta L/\Delta C$ 写成 L_0/C_0 ，其中 L_0 和 C_0 各代表线的每单位长度的电感和电容；那么便有

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (22.33)$$

你也将会注意到，当 ΔL 和 ΔC 各趋于零时，该截频 $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ 会变成无限大。即对于一条理想的传输线来说并没有任何截频。

§ 22-8 其他电路元件

迄今我们仅仅定义过那些理想的电路阻抗——电感、电容和电阻——还有那理想电压发生器。现在我们要来证明，其他诸如互感、晶体管或真空管的其他元件都可以利用那一些基本元件来加以描述。假设有两个线圈，而有意或无意地使其中一个线圈的某些磁通量串连到另一个线圈中去，如图 22-26(a)所示。此时这两个线圈便有一互感 M ，使得当其中一个线圈的电流变化时，便将有一电压产生在另一个线圈中。我们能够将这一效应算进于等效电路中。之所以能够，是要按下述方法来做的。我们已经知道，在两个互作用线圈的每一

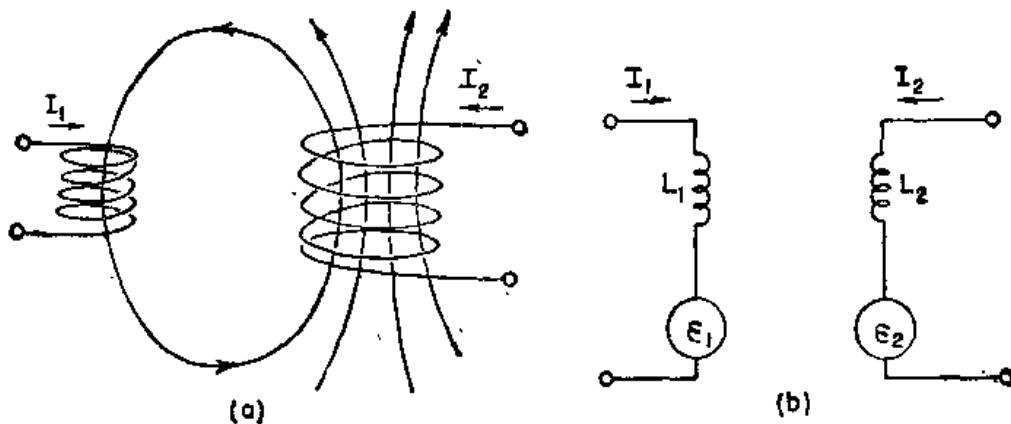


图 22-26 互感的等效电路

个中其感生电动势均可以写成两部分之和:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}, \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.\end{aligned}\quad (22.34)$$

第一项来自线圈的自感,而第二项则来自与另一线圈间的互感。第二项的符号可正可负,取决于来自一个线圈的磁通量连串到另一个线圈上去的方式。既然作了我们以前在描述一理想电感时所常用的同一些近似,我们便可以说,跨越每一线圈两端的电势差等于该线圈中的电动势。那么(22.34)那两个方程便将和我们从图22-26(b)的电路中获得的方程相同,只是图示的每一电路中的电动势是按照下列关系式取决于对面电路中的电流:

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2, \quad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1. \quad (22.35)$$

因此我们所能做的是,把自感效应按照正常方式表示,但对于互感效应则要由一个附加的理想电压发生器来顶替。当然,此外我们还应有关于这一电动势与电路中某一部分的电流的关系的方程式;但只要这一方程式是线性的,我们便不过是加进了一些线性方程于那些电路方程之中,而所有我们以前关于等效电路的那些结论以及其他一些东西就仍然是正确的了。

除了互感之外,也可能还有互容。迄今,当我们谈及电容器时总是想象只有两个电极,但在许多情况下,比如在一个真空管中,就有许多个彼此互相靠近的电极。如果把一电荷放在其中某一极上,它的电场将会在其他每一极上感生一些电荷并影响其电势。作为一例,试考虑图22-27(a)所示的那四块板的布置。假定这四块板分别由A、B、C和D四根导线连接至外电路。只要我们所关心的仅限于静电效应,则象这样一种电极布置的等效电路就如同图22-27(b)所示。任一电极对于其他每一电极的静电互作用相当于在这两电极之间的一个电容。

最后,让我们来考虑对交流电路中象晶体管和真空管那么复杂的器件应该怎样来表达。本该一开头就指出,这种器件通常是这样操作,以致电流与电压的关系是完全非线性的。在这种情况下,我们所曾作过的有赖于方程式的线性的那些说法便当然不再正确。另一方面,在许多种应用中,晶体管和真空管的操作特性曲线还是足够线性,使得可把它们视作线性器件。这意味着在比方晶体管中,集电极交变电流与出现在本极及其他各电极上的电压,诸如发射极电压和基极电压形成了线性正比关系*。当我们具备这样的线性关系时,便能够将该器件纳入等效电路的表象之中。

正如在互感的情况那样,我们的表达方式将不得不包含一些附属的电压发生器,用以描述在该器件一部分中的电压或电流对于其他部分中的电流或电压所施加的影响。例如,一个三极管的板极电路经常可表示为一个电阻串联于一个其源强正比于栅极电压的理想电压

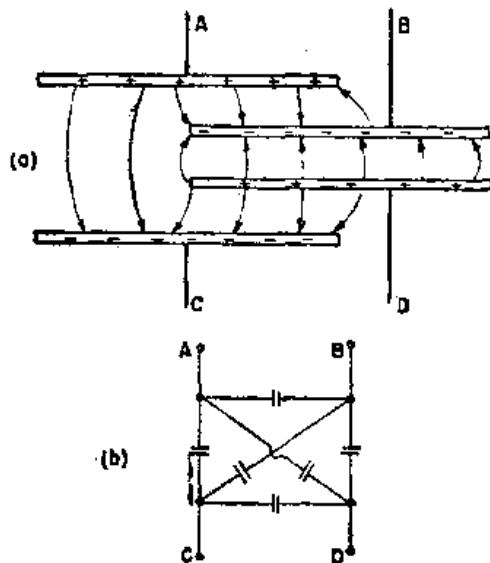


图 22-27 互容的有效电路

* 这一句按原文是:“…与出现在其他各电极上的电压,诸如栅极电压和板极电压,形成了…”我们把它这样改了,似稍为清楚些。——译者注

請勿用於盈利之目的

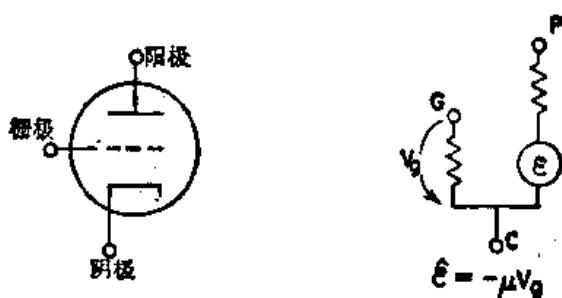


图 22-28 真空管的低频等效电路

发生器。我们便得到示如图 22-28 的那个等效电路*。同理，一个晶体管的集电极电路可以方便地表达成一个电阻串联于一理想电压发生器，这个源的强度正比于从该晶体管的发射极流向基极的电流。这时等效电路就象图 22-29 所示的那样。只要用来描写其操作的方程

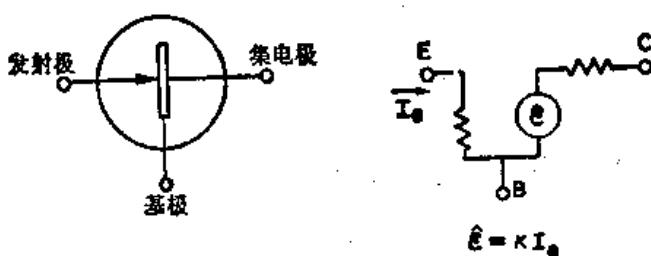


图 22-29 晶体管的低频等效电路

是线性的，便可以对电子管或晶体管引用这些表达方式。然后，当它们被归并入一个复杂网路中时，关于元件的任意一种连接方式的等效表象的一般结论就都仍然有效。

关于晶体管和真空管电路有一件不同于仅含有阻抗的那种电路的令人

注目的事情：该有效阻抗 $z_{\text{有效}}$ 的实部可以变成负值。我们已明白 z 的实部代表能量损耗。可是晶体管和真空管的重要特性却要对电路供应能量。（当然，它们并非在“创造”能量；不过从动力供应的直流电路中取得能量并将其转变成交变能量。）因此，就可能有一种具备负电阻的电路。这样的一个电路具有如下性质，即如果你把它接至一个具有正实部的也就是具有正电阻的阻抗，并将东西布置成使该两实部之和恰恰等于零，则在该联合电路中便将不会有能量耗散。如果没有能量损耗，则任何一个一经发动了的交变电压便将永远维持下去。这就是在任一个所想望的频率上可用作交变电压之源的振荡器或信号发生器的操作过程背后的基本概念。

* 图上所示的这个等效电路只有在低频时才正确。对于高频来说，该等效电路便变成复杂得多，而将包括各种所谓“寄生”电容和电感了。

空腔谐振器

§ 23-1 实际电路元件

任何一个由一些理想阻抗和发电机所构成的电路，当从任一对端点看时，不论在什么频率上，它都会相当于一部发电机 \mathcal{E} 和一个阻抗 z 串联着。之所以会这样，是因为若在那对端点上加一电压 V ，当解所有方程以求得电流 I 时，我们就一定会获得电流与电压之间的一个线性关系。由于所有方程都是线性的，因而对 I 所得的结果也就应该仅仅是线性地依赖于 V 。最普遍的这种线性形式可表达为

$$I = \frac{1}{z}(V - \mathcal{E}) \quad (23.1)$$

一般说来， z 和 \mathcal{E} 两者都可能以某一复杂方式依赖于频率 ω 。然而，如在该两端点后面仅有—发电机 $\mathcal{E}(\omega)$ 与一阻抗 $z(\omega)$ 相串联时，我们就应获得式(23.1)那样的关系。

也有与此相反的问题：设我们已经有一部具备两个端点的电磁器件，并已测量了 I 与 V 的关系以确定 \mathcal{E} 和 z 各作为频率的函数，那么我们能否找到一个理想元件的组合来相当于该内阻抗 z 的呢？答案是，对于任一合理的——也就是说，物理上有意义的——函数 $z(\omega)$ ，可以用一个含有有限个理想元件的电路来近似地逼近该情况，并可达到随心所欲的尽可能高的精确度。我们现在暂不考虑这个普遍问题，但只想对几种特殊情况来看看，从物理的论证方面会期待得到些什么东西。

若我们考虑的是一个电阻，便知道通过它的电流会产生一磁场。所以任一实际电阻也应有一些电感。并且，当有一电势差跨越电阻时，必然有一些电荷会呆在该电阻两端以产生所必需的电场。当电压改变时，这些电荷也将按比例改变，从而该电阻也就有某些电容。我们期待一个实际电阻也许会有如图 23-1 所示的那种等效电路。在一个经过了恰当设计的电阻中，这里所称为“寄生”元件的 L 和 C 都很小，使得在那些打算用到的频率上， ωL 会比 R 小得多而 $1/\omega C$ 则比 R 大很多。因此就有可能把它们都加以忽略。然而，当频率升高时，它们最终会变得重要，因而一个电阻初看起来就象一个谐振电路了。

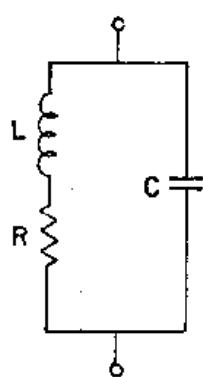


图 23-1 一个实际电阻的等效电路

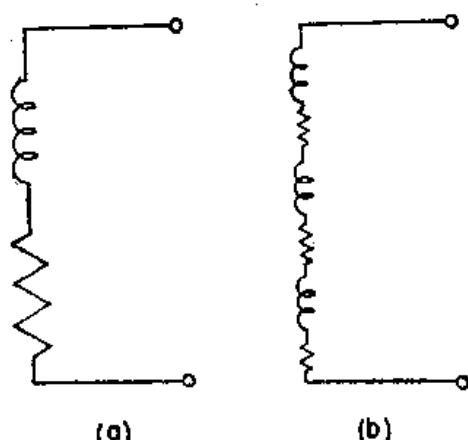


图 23-2 一个实际电感在低频上的等效电路

一个实际电感也并非等于阻抗为 $i\omega L$ 的理想电感。一个实际线圈将有某些电阻，从而在低频上该线圈实际上就相当于一电感与某一电阻串联，如图 23-2(a)所示。可是，你此刻正在想着，在一个实际线圈中电阻和电感总会~~凑合在一起~~——电阻完全分散于整条导线中，因而已和电感互相混合了。我们也许应该采用一个更象图 23-2(b) 那样的电路，它有几个小

R 和小 L 互相串联着。但这样一个电路其总阻抗不过是 $\Sigma R + \Sigma i\omega L$ ，这就相当于(a)那个较简单的图了。

当对一实际线圈提高频率时，把它当成一个电感与一个电阻串联着的那种近似就不再是很好的了。在导线上所积累起来的借以形成电压的电荷将会变得重要。就象有一些小电容器横跨于该线圈的各匝之间，如图 23-3(a) 所示那样。也许我们会试图对该实际线圈用图 23-3(b) 的那个电路来作近似。在低频上，这一电路可由图(c)那个较简单的电路很好地加以模仿（这又再是我们上面对于一个电感的高频模型所找到的同一种共振电路）。然而，在较高频率上，则取图 23-3(b) 的那个更复杂电路将会更好。事实上，你想要对一个真实的物理的电感的实际阻抗表达得越准确，在它的人为模型上你就得用更多的理想元件。

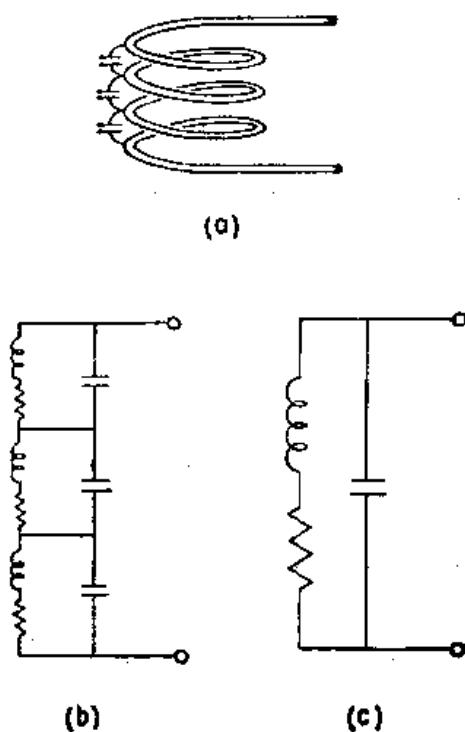


图 23-3 一个实际电感在高频上的等效电路

让我们稍为密切地注视在一个实际线圈中所发生的情况。一个电感的阻抗正比于 ωL ，因而在低频上它会变为零——出现一个“短路”了：我们所见到的只是导线的电阻。当频率提高时， ωL 不久就会变成比 R 大得多，而该线圈看来就很象一个理想电感了。然而，当频率提得更高时，电容又变得重要。这个阻抗与 $1/\omega C$ 成正比，当 ω 小时数值很大。因此对于足够低的频率，电容是一个“断路”，而当它与别的东西并联时，不会抽取任何电流。但在高频上，电流就倾向于流入各匝间的电容，而不再流经该线圈。所以在线圈里的电流从一匝跳跃至另一匝，而不必发愁要去转那些不得不在那里抵抗着电动势的圈子了。因此，尽管我们也许已经预定电流理所当然地要环绕着回线走，但它却将选取那一条较方便的路线——阻抗最小的路线。

要是这一课题早就为大众所感兴趣，则这一效应理该被赋予“高频障壁”或其他类似名称了。这同一种事态在所有一切部门中都会出现。在气体动力学中，若你试图让原来是为低速设计的东西去跑得比声速还快，那就不行。这并不意味着确实存在一巨大的“障壁”；而只是指该东西必须重新加以设计罢了。因此，这一原来我们作为一“电感”而设计出来的线圈在十分高的频率上将不再作为一个良好的电感，而是作为某一种其他东西。对于高频，我们得寻找一个新的设计。

§ 23-2 在高频上的电容器

现在我们要来详细讨论当频率逐渐增大时一个电容器——几何上的理想电容器——的行为，使我们能够看到其性质的转变。（我们宁可采用电容而不采用电感，为的是一对板的

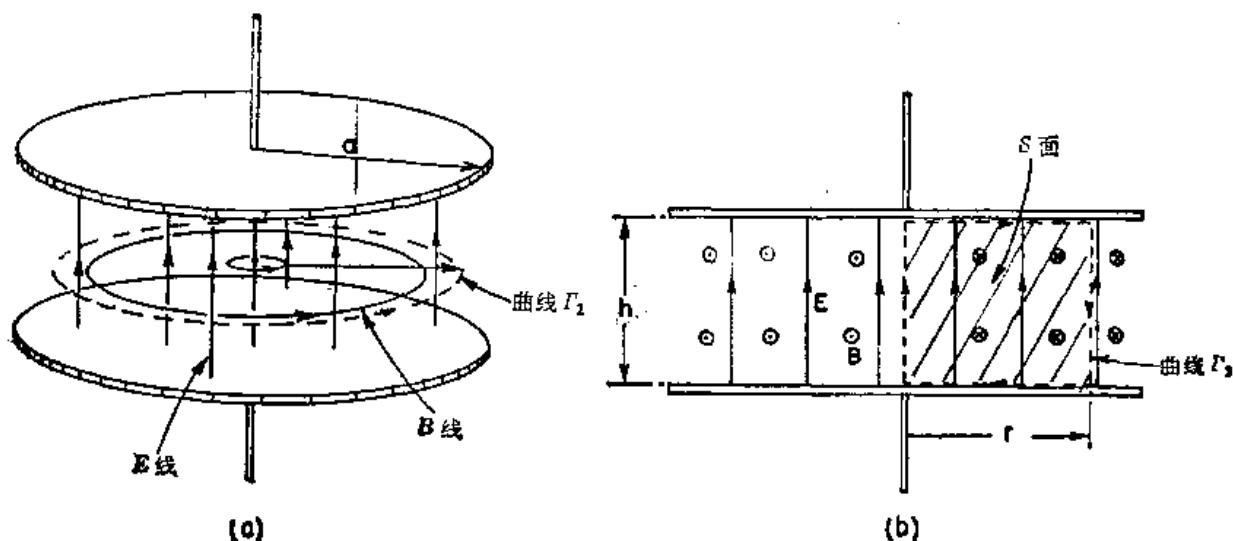


图 23-4 电容器两极板间的电场和磁场

几何比一个线圈的几何要简单得多。) 我们考虑图 23-4(a)所示的那个电容器, 它由两块平行圆板用一对导线接至外界发电机上。如果用直流来对电容器充电, 则在其中一板上将有正电荷, 在另一板上有负电荷, 而在两板之间则有一匀强电场。

现在假定不用直流, 而是加一个低频交流于两板上。(往后我们将会确定什么是“低”频, 什么是“高”频。) 比方说, 把电容器连接至一低频发电机上。当电压正在交变时, 上板的正电荷会被取出而换上了负电荷。在这一事情发生时, 电场会随之消失, 然后又在相反的方向上建立起来。当电荷缓慢地涌来涌去时, 电场也跟着那样干。在每一瞬间电场表现出均匀, 如图 23-4(b)所示, 只除了一些我们将要加以忽视的边缘效应以外。可以把电场的大小写成

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (23.2)$$

式中 E_0 是一常数。

现在, 当频率升高时, 这是否将仍然正确呢? 不, 因为当电场一上一下时就会有电通量穿过象图 23-4(a)的那条回线 Γ_1 。而正如你所知的, 一个变化的电场会起到产生磁场的作用。麦克斯韦方程组中一个方程申述, 当有一变化的电场时, 犹如这眼前存在的那样, 就一定有磁场的线积分。环绕某一闭合环的磁场积分, 乘以 c^2 之后, 就等于穿过该环内面积的电通量之变率(如果没有电流的话):

$$c^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{在 } \Gamma \text{ 之内}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (23.3)$$

所以, 到底在那里的磁场有多大呢? 计算并不十分困难。假定考虑回线 Γ_1 , 它是一个半径为 r 的圆周。我们能够从对称方面看出, 磁场会环绕图中所示的那种圈子旋转。这样 \mathbf{B} 的线积分就是 $2\pi r B$ 。而既然电场是均匀的, 则电场通量就会简单地等于 E 乘以该圆周的面积 πr^2 :

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2. \quad (23.4)$$

对于交变场来说, E 对时间的微商只不过是 $i\omega E_0 e^{i\omega t}$ 。因此我们就找出, 该电容器有一磁场

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.5)$$

换句话说, 磁场也在振动, 而且具有一个正比于半径 r 的强度。

那会发生什么效果呢？当有一个正在变化的磁场时，便将产生一些感生电场，而该电容器将开始有点象一个电感的作用了。当频率升高时，这磁场会变得强些；它是与 E 之变率成正比的，因而也就正比于 ω 了。该电容器的阻抗将不再简单地等于 $1/i\omega C$ 。

让我们继续提高频率，并仔细分析将会发生的情况。我们有一个涌来涌去的磁场。但这时的电场就不可能象我们所曾假定的那样是均匀的了！当有一正在变化的磁场时，就必然有一个电场的线积分——根据法拉第定律。所以，如果有一个可观的磁场，正如在高频上就开始发生的那样，则电场不能在离开中心的所有距离上都相同。电场一定会随 r 而变，才能使电场的线积分等于变化着的磁场通量。

让我们来看看能否算出那正确的电场。通过算出对我们原为低频所假定的匀强场的“修正”，便能够完成此事。现在把该匀强场称作 E_1 ，那仍旧是 $E_0 e^{i\omega t}$ ，但把正确的场则写成

$$E = E_1 + E_2,$$

其中 E_2 就是由于变化着的磁场所引起的修正。对于任一频率 ω ，我们将把在该电容器中心处之场写成 $E_0 e^{i\omega t}$ （因而定义了 E_0 ），使得在这中心点上并不需要修正；即在 $r=0$ 处 $E_2=0$ 。

为求得 E_2 可利用法拉第定律的积分形式：

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} (B \text{ 之通量}).$$

这些积分很简单，只要对回线 Γ_2 采取象图 23-4(b) 所示的那样，即沿轴上升，当达到上板时再沿径向外伸展至距离 r 处、又沿竖向落到底板、然后又返回到轴上来。环绕这一回线的 E_1 之线积分当然是零；所以就只有 E_2 作出贡献，而它的积分不过是一 $E_2(r) \cdot h$ ，其中 h 是两板间的距离。（如果 E 指向上我们称之为正的。）这等于 B 之通量的变率，那应该通过对图 23-4(b) 中在 Γ_2 之内遍及该阴影面积的积分而获得。穿过每一条宽度为 dr 的竖向细条子的通量为 $B(r)hdr$ ，因而总通量就是

$$h \int B(r) dr.$$

令这一通量之 $-\partial/\partial t$ 等于 E_2 的线积分，便有

$$E_2(r) = -\frac{\partial}{\partial t} \int B(r) dr. \quad (23.6)$$

注意式中 h 已消去了；场并不与两板间的间隔有关。

利用式(23.5)作为 $B(r)$ ，我们便有

$$E_2(r) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{i\omega r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}.$$

对于时间的微商只不过带来另一个因数 $i\omega$ ；这样我们便得

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

正如所指望的，这感生之场会倾向于把远离中心的电场削弱。于是，改正后之场 $E = E_1 + E_2$ ，便是

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.8)$$

在电容器中的电场不再是均匀的了；它具有如图 23-5 中虚线所示的那种抛物线形状。你看，我们的简单电容器已变得稍为复杂些了。

本来自现在就可以利用所得结果来计算电容器在高频上的阻抗。已经知道了电场，理应

能够算出在两板上的电荷并找出通过该电容器的电流如何依赖于频率 ω , 但目前我们对这一问题不感兴趣。更感兴趣的是要看看当继续提高频率时会发生什么情况——看看在更高频率上所发生的事态。我们的工作是否结束了呢? 不, 因为已改正了电场, 这就意味着所算出来的磁场不再是正确的了。式(23.5)的磁场也是近似正确的, 但那不过是初步近似。所以就让我们叫它做 B_1 。这样便应将式(23.5)重新写成

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.9)$$

你将会记起, 这个场是由 E_1 的变化产生的。现在正确的磁场却是由总电场 $E_1 + E_2$ 所产生的了。若把

磁场写成 $B = B_1 + B_2$, 则其中第二项就恰好是由 E_2 所产生的附加场。为求出 B_2 , 可以通过与上面我们曾用来求出 B_1 的相同论证来进行; 环绕该回线 Γ_1 的 B_2 之线积分等于穿过 Γ_1 的 E_2 之通量变率。我们将恰恰再有其中的 B 用 B_2 代替而 E 用 E_2 代替的式(23.4):

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} (\text{穿过 } \Gamma_1 \text{ 的 } E_2 \text{ 通量}).$$

由于 E_2 随着半径变化, 因而要获得它的通量就得对 Γ_1 内的圆面积进行积分。用 $2\pi r dr$ 作为面积元, 这一积分就是

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r dr.$$

因此对于 $B_2(r)$ 会得到

$$B_2(r) = -\frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r) r dr. \quad (23.10)$$

利用来自式(23.7)的 $E_2(r)$, 我们需要对 $r^3 dr$ 进行积分, 而这当然就是 $r^4/4$ 。对于磁场的修正变成

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.11)$$

可是事情至此还没有止境! 如果磁场并不与我们最初所设想的相同, 则刚才对 E_2 的计算便不能认为是正确的。我们必须对 E 进一步作出修正, 那是来自该额外磁场 B_2 的。让我们叫这一个对电场的附加修正做 E_3 。它与磁场 B_2 的关系犹如 E_2 与 B_1 的关系一样。我们可以再一次利用式(23.6), 只不过改变其中的下角标:

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) dr. \quad (23.12)$$

利用上面关于 B_2 的结果, 即式(23.11), 对于电场的新的修正便是

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.13)$$

把经过了两次修正的电场写成 $E = E_1 + E_2 + E_3$, 我们便得

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (23.14)$$

电场随 r 的变化不再是我们曾在图 23-5 中画出来的那条简单抛物线, 而是在较大的半径上略高于 $(E_1 + E_2)$ 曲线。

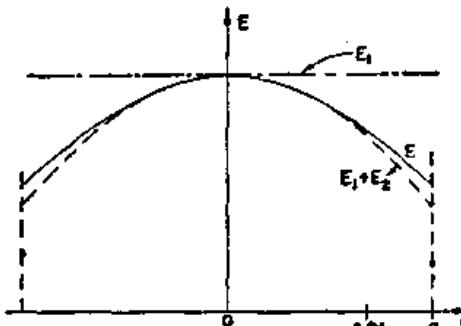


图 23-5 在高频上电容器两板间的电场
(边缘效应已被忽略)

事情还未最后完成，新的电场产生对磁场的一个新的修正，而这个被重新修正了的磁场又将对电场产生一个进一步的修正，如此等等。然而，我们已经有了必需的一切公式了。对于 B_3 可以采用式(23.10)，把其中 B 和 E 的下角标从 2 改成 3。

对电场的下一次改正是

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

因此，在达到这一级时，整个电场就由下式给出：

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 + \dots \right], \quad (23.15)$$

其中我们已把各数字系数写成这样一种形式，以便对如何去继续该级数看得更清楚。

我们的最后结果是：在该电容器两板间的电场，对于任一频率来说，都是等于 $E_0 e^{i\omega t}$ 乘以仅含有变数 $\omega r/c$ 的一个无穷级数。如果我们乐意，就可以定义一个特殊函数，这函数将称为 $J_0(x)$ ，以代表出现在式(23.15)那个方括号内的无穷级数。

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (23.16)$$

这样，就可以将我们之解写成 $E_0 e^{i\omega t}$ 乘以这一函数，其中 $x = \omega r/c$ ：

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0 \left(\frac{\omega r}{c}\right). \quad (23.17)$$

之所以叫这个特殊函数做 J_0 的原因是：自然，这并非是计算柱体中振动这一问题才开始用的。其实这一函数以前就已出现过而且经常被称为 J_0 。它总是发生于当你正在解决一个具有柱对称的波的那种问题时。函数 J_0 对于柱面波就好象余弦函数对于沿直线奔驰着的波一样。因此它是一个重要函数，发现已多时了。以后与一个叫贝塞耳(Bessel)的人的名字联系上。那个下角标零意味着贝塞耳曾经发现过整个一系列别的函数，而这只是其中的第一个。

其他的贝塞耳函数—— J_1, J_2, \dots ——是与强度随着绕柱轴的角度而变的那些柱形波有关的。

在我们的圆形电容器两板间、经过完全改正、即由式(23.17)所给出的电场，已画成为图 23-5 中那条实曲线。对于不太高的频率，我们的第二次近似就已经很好，第三次近似甚至会更好——事实上，好到要是我们把它画出来，你会看不出它与那条实曲线间的差别。然而，你将在下一节中见到，对于大的半径或高的频率，为获得一个准确描述，整个级数就是必需的了。

§ 23-3 谐振空腔

现在我们要来看看，当继续把频率提得更高更高时，对在该电容器两板间的电场所给出之解如何。对于大的 ω ，该参数 $x = \omega r/c$ 也变得大了，因而在 x 的级数 J_0 中的头几项便将增大得很快。这意味着，我们曾在图 33-5 中所画出来的那条抛物线在较高频率上会向下弯得更加陡峭。事实上，看来好象在某一高频上场会一直降低至零，也许当 c/ω 约莫等于 a 之一半时。让我们来看看， J_0 是否确实会通过零而变成为负。由 $x=2$ 开始这一尝试：

$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0.22.$$

函数仍未等于零。因此，就让我们尝试一个更高的 x 值，比如说 $x=2.5$ 。代入数字之后，

可得

$$J_0(2.5) = 1 - 1.56 + 0.61 - 0.09 = -0.04.$$

函数 J_0 在我们进到 $x=2.5$ 时就已经通过了零点。对 $x=2$ 和 $x=2.5$ 的结果进行比较，看来似乎 J_0 在从 2.5 至 2 的五分之一路程上就通过了零点。我们便该猜测零会发生在 x 约等于 2.4 时。现在看看对于这个 x 值会给出的结果：

$$J_0(2.4) = 1 - 1.44 + 0.52 - 0.08 = 0.00.$$

在两个小数位的准确程度上得到零。若再计算得精确些（或者由于 J_0 是一个知名函数，即可查一查书本），我们便会找出它是在 $x=2.405$ 时通过零的，我们用手就已经把它算出，这表明你们本来也可以发现这些东西的，而不一定要从书本上查出来。

只要是在一本书中查阅到了 J_0 ，注意它在较大的 x 值上如何表现，会十分有趣；它看来象图 23-6 的那条曲线。当 x 增大时， $J_0(x)$ 在正值与负值之间以逐渐缩小的振幅振动着。

已经得到一个有趣结果：若频率足够高，则在电容器中心处电场将指向一个方向而在靠近边缘处电场又指向相反方向。例如，假设取一个足够高的 ω 使得在该电容器的外缘上 $x=\omega r/c$ 的值为 4；那么该电容器的边缘就相当于图 23-6 的横坐标 $x=4$ 的地方。这意味着我们的电容器是在 $\omega=4c/a$ 上工作着。在极板的边缘上，电场将有一个与我们所指望的方向相反而量值却相当大的电场。那就是在高频上电容器所能发生的令人感到惊异的事情。若把频率提得很高，则当从电容器中心向外跑出时电场的方向会反复起落多次。而且还有与这些电场联系着的磁场。因此，对于高频来说，我们的电容器看来并不象一个理想电容，就不足为怪了。甚至有可能开始怀疑：它看来更象一个电容还是更象一个电感呢？应该强调，还有一些发生于该电容器边缘上的更加复杂的效应已经给我们忽略了。例如，会有经过边缘而辐射出去的波，因而场甚至比我们所已算出来的还要复杂。但眼前我们不必对那些效应操心。

本来我们也可试搞出一个有关电容器的等效电路，但或许更好的是仅仅承认，曾为低频而设计的那种电容器当频率太高时就不再令人满意了。若要来处理象这样一件东西在高频时的操作情况，我们就必须放弃在处理电路时曾经作过的那种对待麦克斯韦方程组的近似方法，而返回到能够完满描述空间里之场的那个完整方程组。不要去同一些理想的电路元件打交道，而是不得不同那些现场的实际导体打交道，把在其间的空间里的一切场都算进去。例如，若想要有一个高频谐振电路，就不试着去设计一个用到线圈与平行板电容器的那种电路了。

我们已经提到，刚才正在分析的那个平行板电容器具有电容和电感两方面的某些特征。既然有电场，就会在两板的表面上聚积电荷；既然有磁场，就会产生反电动势。是否有可能我们已得到了一个谐振电路呢？确实是已经得到了。假设挑选这样一个频率，它能使该电场图样在盘之边缘以内的某一半径上降低至零；也就是说，我们选取一个比 2.405 大些的 $\omega a/c$ 。在这个与两板共轴的圆周上，处处的电场都将是零。现在假定取一块薄金属片，并把它剪成一条其宽度恰足以贴满该电容器两板间的空隙，然后把它在电场等于零的那个半径

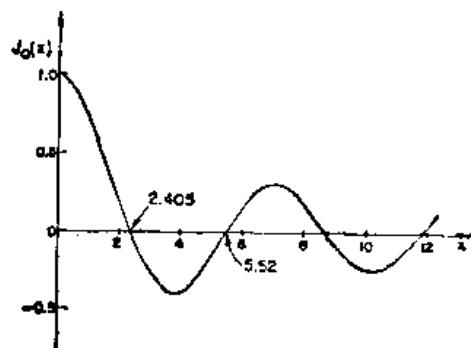


图 23-6 贝塞耳函数 $J_0(x)$

請勿用於盈利之目的

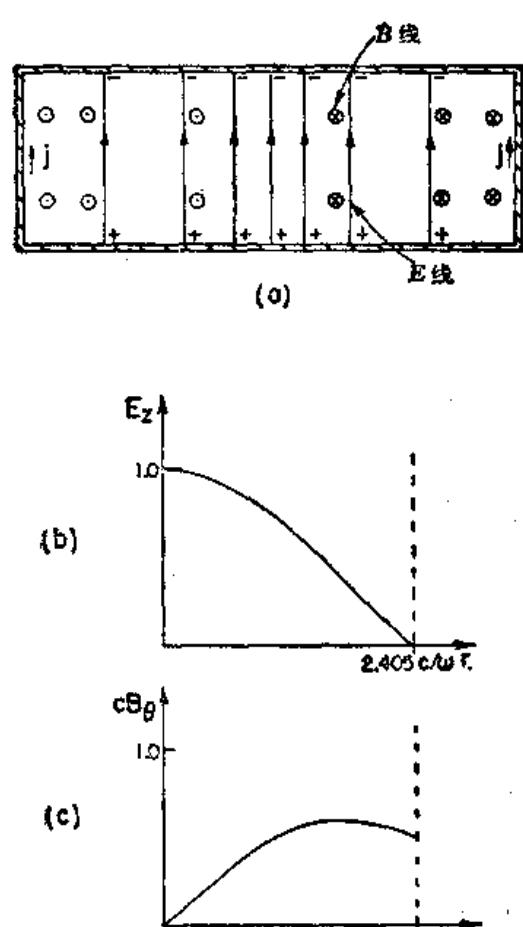


图 23-7 在一个封闭的圆筒盒内的电场和磁场

照麦克斯韦方程组进行着。磁场具有一电感面貌，而电场则具有一电容面貌；两者合在一起才构成象谐振电路那样的某种东西。注意刚才所描述的这些情况仅仅发生于当盒子的半径恰好等于 $2.405c/\omega$ 时。对于一个半径已经给定了的盒子，这些振动着的电场和磁场只有在该特定频率上才会——按照我们所描述的那种方式——维持它们本身。因此，一个半径为 r 的柱形盒子在如下的频率上就会发生谐振：

$$\omega_0 = 2.405 \frac{c}{r}. \quad (23.18)$$

我们曾说，在盒子完全封闭了之后场仍将继续照样振动。那并非完全正确。假如盒子的壁是理想导体，那就会有可能。然而，对于一个实际盒子，在其内壁上存在的振动电流会由于材料中的电阻而损耗能量。场之振动将逐渐衰减下去。可以从图 23-7 看到，与该空腔内部的电场和磁场相结合的必然有一些强电流。既然该竖向电场会突然在盒子的顶板和底板上停顿下来，那里就该有巨大散度；因而也就一定有正、负电荷出现在该盒子的内部表面，如图 23-7(a)所示。当电场的方向倒转时，电荷也会倒转过来，因而在盒子的顶板和底板之间就一定有交变电流。这些电荷将在盒子的侧壁上流过，如图所示的那样。通过对磁场方面所发生的情况的考虑，我们也能够明白，必然会有电流通过该盒子的侧壁。图 23-7(c)的曲线告诉我们，磁场在该盒子的周边上会突然下降至零。象这样的磁场突变只能发生在有电流流经壁中时。这一电流就是为向该盒子的顶板和底板提供那些交变电荷的。

而且，在电场和磁场上也将不会有变化。在该电容器中间，我们已经能够放置一个直接短路的东西而不致引起任何变化。而且，看看现在我们所拥有的东西吧；已经有一个闭合柱形盒，其中存在电场和磁场，但完全不会同外界联系。甚至若丢掉了那些伸到盒外的两板边缘部分以及对该电容器的接线，盒里之场仍将不会有任何变化。我们所遗留下来的一切就是一个其中藏有电场和磁场的封闭盒子，如图 23-7(a)所示的那样。电场是在频率 ω 上来回振动着的——不要忘记， ω 确定了该盒子的直径。该振动 E 场之幅随着从盒轴向外伸出的距离而变化，示如图 23-7(b)的那条曲线。这一曲线不过是零级贝塞耳函数的第一个弓形。此外，还有一个磁场环绕着轴在团团转，并以在时间上与电场相差 90° 的周相振动。

我们也可对磁场写出一个级数，并把它描绘出来，这示如图 23-7(c)的那条曲线。

怎么能够有藏于一个盒子里面与外界没有任何联系的电场和磁场呢？这是因为，电场和磁场会维持它们本身：正在改变的 E 造成一个 B ，而正在改变的 B 又造成一个 E ——所有过程都按

你可能对于在盒子的竖向侧壁中发现有电流会感到奇怪。关于以前曾提及在电场为零的地方引进这些侧壁不会改变任何东西，又该怎么说呢？然而，要记住，当我们起初放进该盒子的侧壁时，顶板和底板还伸出于壁之外，因而在盒子外面也就还有磁场。只有当我们丢掉了伸出于盒子边缘之外的那一部分电容器极板之后，净电流才不得不出现在该竖壁之内表面上。

虽然在完全封闭了的盒子之内的电场和磁场将会由于能量损失而逐渐减弱，但我们还是能够阻止这一事情发生，如果在盒之旁边挖开一个小洞而输入一点点能量以补充其损失的话。试取一根小导线，戳进盒子旁边的这一小洞中，并把它粘固在内壁上以便形成一个小环，如图 23-8 所示的那样。如果现在把这一段导线接至一高频交变电源，则电流将会把能量耦进空腔里，而使其中的电场和磁场振动能够持续进行。当然，这只能发生在该驱动源的频率与盒子的谐振频率相同时。如果源的频率不对头，则电场和磁场将不会发生谐振，因而盒子里的场也就十分微弱了。

通过在盒子旁边再开另一个小洞并钩进另一个耦合环，如在图 23-8 中描画出来的那样，则这一谐振行为便容易观察到。穿过这耦合环的正在变化的磁场将在环中产生一感生电动势。若这个环现在被连接至某一外面的测量电路，电流将会正比于该空腔中场之强度。假定现在将空腔的输入环接至一部射频信号发生器，如图 23-9 所示。这信号发生器含有一个交变电流源其频率可由旋转该发生器面板上的旋钮而改变。然后又把空腔的输出环接至一个“检波器”上，那是一部能测得来自输出环的电流的仪器。它会给出一个正比于电流的指针读数。如果现在测量这一电流作为该信号发生器频率的函数，则可找到一条象图 23-10 所示的曲线。除十分靠近该空腔的谐振频率 ω_0 的那些频率以外，对于所有频率，输出电流都很小。这条谐振曲线很象我们曾在第一卷第二十三章中所描述过的那些。然而，这一谐振曲线的宽度比起寻常由电感和电容所构成的共振电路中所找到的要狭窄得多；也就是说，空腔的 Q 值很高。得到一个高达 100,000 或更大的 Q 值并不算希奇，如果空腔的内壁是由某些象银那样的十分优良的导电材料所构成的话。

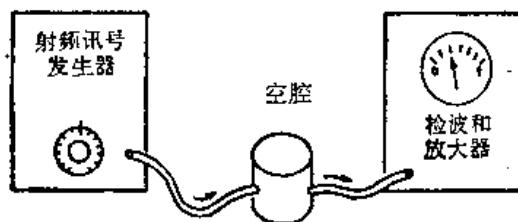


图 23-9 为观测空腔谐振用的装备

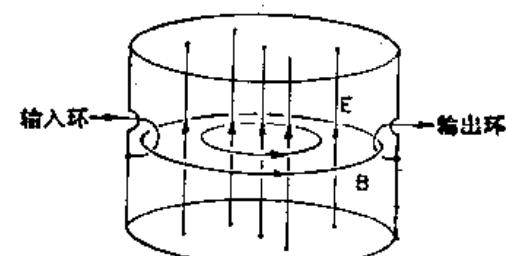


图 23-8 对一谐振空腔的耦进和耦出办法

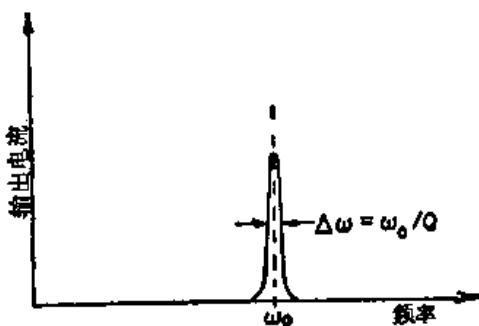


图 23-10 谐振空腔的频率响应曲线

§ 23-4 空腔波模

假设现在试图通过用一个实际盒子来作测量。我们取一个圆柱形盒子，其直径为 3.0 英寸而高度约 2.5 英寸。这个盒子装配有如图 23-8 所示的各一个输入和输出环。若按照式(23.18)算出对这个盒子所期待的谐振频率，便可得 $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 3010$ 兆周。当我们把信号发生器的频率布置在 3000 兆周左右并略略变更这一频率以获得谐振时，就会观察到最大

請勿用於盈利之目的

的输出电流发生于频率为 3050 兆周处，这在数值上很接近于那预料的谐振频率，但仍非完全相同。产生这一差异有几种可能原因。或许由于为要放进耦合环而挖开的那些小洞会使谐振频率有了点点变化。然而，稍微想一下就会明白，那些小洞理该使频率略有降低，因而不能成为理由。或许是在校准信号发生器时有过一些误差，也许是我们在对该空腔的直径量得不够准确。但无论如何，符合还是相当逼近的。

远较为重要的是：当信号发生器的频率超过 3000 兆周的范围而改变时所发生的事态。当我们这样做时，便会获得如图 23-11 所示的那些结果。我们发现，除了所指望的那个在 3000 兆周附近的谐振外，还有一个接近于 3300 兆周和另一个接近于 3820 兆周的谐振。这些附加的谐振意味着什么呢？我们也许可从图 23-6 获得一条线索。尽管曾经假定贝塞尔函数的第一个零值会发生在该盒子的边缘，但实际上本来也有可能贝塞耳函数的第二个零值相当于该盒子边缘的，因而当我们从盒子中心移至边缘上去时电场就恰好完成了一整个振动，如图 23-12 所示。这是对该振动场的另一种可能模式。我们应当肯定地期待盒子会在这么一个模式上发生谐振。可是要注意，贝塞耳函数的第二个零值乃发生在 $x=5.52$ 处，那比起第一个零处之值大不止一倍。因此，这一模式的谐振频率就应比 6000 兆周还高。无疑，我们会在那里找到它的，但却不能用它来解释在 3300 上所观测到的那个谐振。

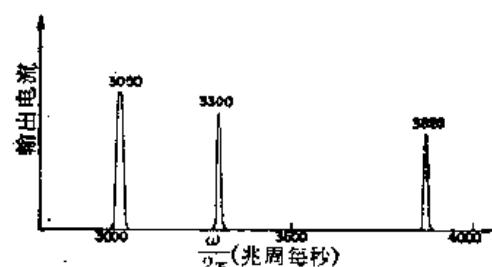


图 23-11 对一柱形空腔所观测到的几个谐振频率

(a) A diagram of a cylindrical cavity with vertical electric field lines (E) and horizontal magnetic field lines (B) forming concentric circles. (b) A plot of electric field strength E versus radial distance r. The curve starts at zero at the center, reaches a maximum at $r = 5.52c/\omega$, and returns to zero at the outer edge.

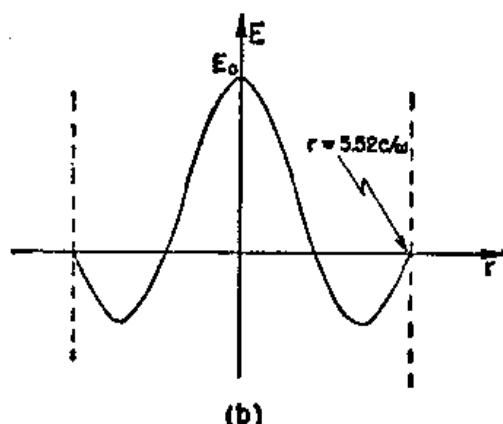


图 23-12 一个频率更高的波模

麻烦就在于对有关谐振空腔行为的分析，我们只考虑了电场和磁场一种可能的几何布局。已经假定电场是竖直的而磁场则位于一些水平圆周上，但别的场也有可能。唯一的要求是，在盒子里的电场和磁场都必须满足麦克斯韦方程组而且电场还必须与盒壁正交。我们已考虑其中盒子顶部和底部都是平坦的那一种情况，但要是顶和底都弯曲，事情也不会完全不同。事实上，盒子怎么能够知道哪是它的顶、底、以及边呢？实际上能够证明，在盒内就有其电场多少是穿越直径的那一种振动模式，如图 23-13 所示。

要理解为什么这一模式的固有频率应不太异于我们所曾考虑过的第一个模式的固有频率，并不会太困难的。假设不取该柱形空腔，而是取一个每边 3 英寸的立方形空腔。很清楚，这个空腔该有三种不同模式，但都有同一频率。一个其中电场多少是上下振动的模式肯定将与另一个其中电场是左右指向的模式具有相同频率。如果我们现在将该立方扭曲成一圆筒，就会或多或少改变其频率。但仍应该期望，这些频率不会改变得太多，只要对该空腔的尺寸多少还保持一样。因此，图 23-13 那种模式的频率应不太异于图 23-8 的模式。本来

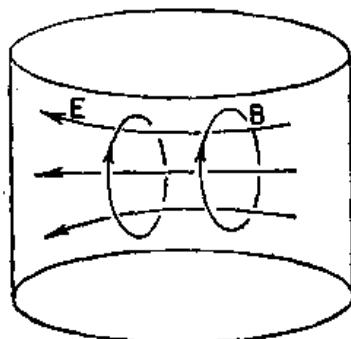


图 23-13 柱形空腔的一种横向波模

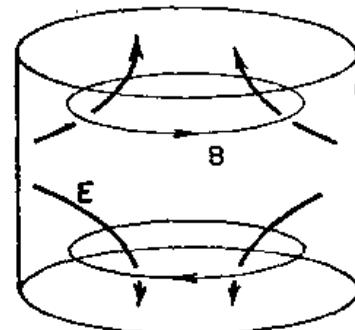


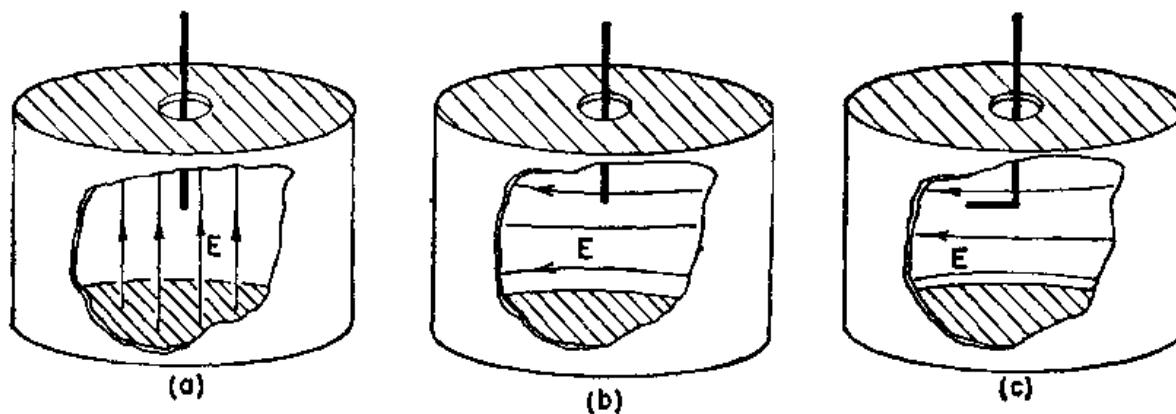
图 23-14 柱形空腔的另一波模

我们可以对图 23-13 的那种模式详细算出其固有频率，但现在还不打算那样做。当这些计算做出来时，便会发现，对于上面所假定的那些尺寸，该谐振频率确很接近于所观测到的 3300 兆周。

通过相似的一些计算还能够证明，应有另一个其谐振频率为我们已找出的接近 3800 兆周的模式。对于这一模式，电场和磁场示如图 23-14。不必担心该电场会跑过整个空腔，它从侧壁跑至两端，如图所示。

正如你现在大概会相信的，若把频率提得越高，便该指望会找到更多更多的谐振。有许多不同的波模具有不同谐振频率，相当于某一特定的复杂电场和磁场布局。这些场布局的每一种称为谐振波模。通过求解麦克斯韦方程组以获得空腔里的电场和磁场，每一波模的谐振频率就可以计算出来。

当已有一个在某一特定频率上的谐振时，我们怎能知道被激发的是哪一模式呢？一种办法是，通过一个小洞把一根小导线戳进空腔里。如果电场沿着导线方向，如图 23-15(a) 那样，则导线里便有一个相对大的电流从电场汲去了能量，因而谐振便将被抑制了。若电场象图 23-15(b) 所示的那样，则影响会小得多。我们尽可以通过把导线的末端弯曲，象图 23-15(c) 那样，来找出场究竟指向哪一个方向。于是，当把导线转动使其末端与 E 平行时影响便大，而当转动至与 E 成 90° 时影响就小。

图 23-15 一条伸进空腔里的短金属线，当其平行于 E 时，比起与 E 垂直时，对谐振的干扰要大得多

§ 23-5 空腔与谐振电路

尽管我们所已描述的谐振空腔似乎与寻常含有电感和电容的那种谐振电路很不相同，但这两种谐振系统当然还是很紧密地互相联系着的。它们都是同一家庭的成员；恰好就是电磁谐振的两个极端情况——有许多中间情况介乎此两极端之间。假设通过考虑一个电容

請勿用於盈利之目的

与一个电感并联的谐振电路，从图 23-16(a)所示的那样开始。这一电路将在 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

的频率上发生谐振。如果我们希望提高这一电路的谐振频率，可通过降低电感 L 而做到。一种办法是，减少线圈的匝数。然而，在这一方面我们只能走得那么远，即最后将达到只有一匝，就是连接电容器的顶板和底板间那一根导线。本来还可以通过降低电容而把谐振频率提得更高；然而，可以通过把几个电感并联而继续降低电感。当两个单匝电感并联时就只有每匝电感之一半。所以当电感已减至仅有一匝时，我们仍可通过添加其他一些连接电容器的顶板与底板间的单匝来继续提高谐振频率。

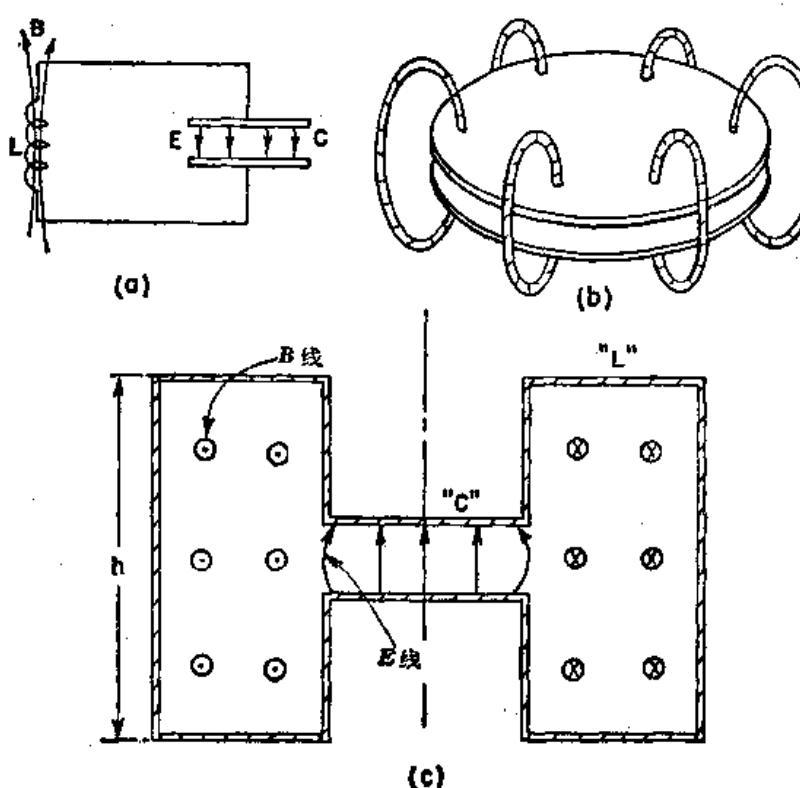


图 23-16 谐振频率逐渐提高的各种谐振器

频率。例如，图 23-16(b)表明电容器两板之间是由六个这样的“单匝电感”连接的。如果继续增加许多这种导线段，便会过渡到一个完全封闭了的谐振系统，如图(c)所示，那是一个柱形对称的东西的截面。现在我们的电感是一个连接至电容器两板边缘的柱形空罐。电场和磁场显示在该图中。当然，这样的东西就是一个谐振空腔。被叫做“加感”空腔。但我们仍能把它想象成一个 LC 电路，即其中电容部分是我们能够在那找到大多数电场的地方而电感部分则是能找到大多数磁场的地方。

如果要进一步提高图 23-16(c)的谐振器频率，还可以通过继续降低电感 L 而做到。为此，就必须减小该电感区的几何尺寸，比方说缩小图中的高度 h 。当 h 缩小时，谐振频率将会提高。当然最后将会达到其中高度 h 刚好等于电容器两板间的间隔。此时，我们就刚好有一个柱形盒子；谐振电路变成图 23-7 的空腔谐振器。

你将会注意到，图 23-16 的那个原来 LC 谐振电路中，电场和磁场都分得很开。当逐渐把谐振系统修改以便使其频率逐步提高时，磁场就会越来越靠近于电场，一直到了在该空腔谐振器中，则两者都已十分交相混合了。

尽管在这一章中，我们所曾谈过的空腔谐振器都是柱形盒子，但对于圆柱这个形状却没有什么神秘不可思议之处。任一种形状的盒子都将有对应于电场和磁场的各种可能振动模式的谐振频率。例如，示如图 23-17 的那个“空腔”就将有它自己的一套谐振频率——虽则要把它算出来是相当困难的。

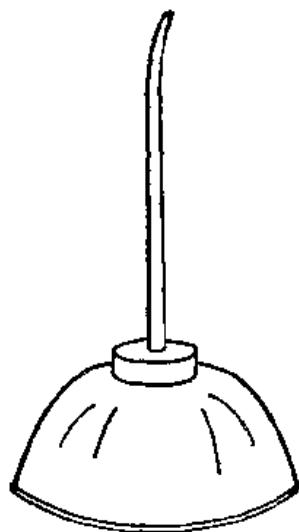


图 23-17 另一个谐振空腔

§ 24-1 传 输 线

上一章我们曾学习过电路的集总元件在十分高的频率上工作时所发生的事态，从而看出一个谐振电路可由场在其中谐振着的一个空腔替代。另一个技术上感兴趣的问题是，要把两件东西连接起来使得电磁能量能在它们之间传输。在低频电路中，这种连接是由导线完成的，但这一种方法在高频上就不怎么奏效，因为那些电路将会把能量辐射到周围的空间中去，从而难以控制能量的去向。场将在导线周围散发出去；电流和电压不可能由导线很好地“引导”。在这一章中我们要来看看能在高频上互相连接各种东西的办法。至少，这是一种表达我们课题的方式。

另一种说法是，上面我们已谈论了在自由空间里波的行为，现在正是时候，来看看当振动场被局限在一维或多维的空间里时所发生的情况。我们将发现一些有趣的新现象。当场仅限制在二维中而允许在第三维上自由通过时，它们将以波的形式传播出去。这些就是“导波”——本章的课题。

我们首先要来创立有关传输线的普遍理论。那些在旷野从一个铁塔到另一个铁塔的输电线会辐射出一些功率，但动力频率(50~60周/秒)竟是如此之低，以致这种损失不算严重。这一种辐射本来可以用金属套管来把导线包围住从而加以防止，但这一办法对于动力传输线来说并不实际，因为所用的电压和电流势必要求一条十分粗重而又昂贵的套管。因此，通行的还是那简单的“敞式线”。

对于较高一些的频率——比方说几千周——辐射可能已变得严重。然而，它还是可采用诸如在短程电话接线中所用的那种“双扭线”来降低的。但是，在更高频率上，辐射很快就会变得难以忍受，这或由于功率损失，或由于能量在一些不需要的其他电路中出现了。对于从几千周起至几百兆周的频率，电磁信号和功率往往采用在一个筒形“外导体”或“屏蔽物”之内含有一根导线的那种共轴线来传输。虽然我们仍将仅仅对一根共轴线进行推导，下述处理办法将适用于互相平行的任何形状的两导体的传输线。

试取一条最简单的共轴线，在其中心处有一个薄中空筒，此外又有与这一内导体共轴的另一外导体，也是一个薄筒，示如图 24-1。从约略计算在相对低频上这条线将如何行动开始。我们过去是这样来处理的，即知道两导体

每单位长度具有某一电感或某一电容时，就已描述了其中某些低频行为。事实上，是可以通过给出任一根传输线的每单位长度的电感 L_0 和电容 C_0 而描述其低频行为的。于是，我们就可以将该线当作 § 22-6 节中所曾讨论过的那种 LC 滤波器的极限情况而加以分析。可以当作一个滤波器，那是采取一些小串联元件 $L_0 \Delta x$ 和一些小并联元件 $C_0 \Delta x$ ——其中 Δx 是该线中的一个长度元——来模拟该线的。利用关于无限长滤波器的结果，可以看到电场会沿

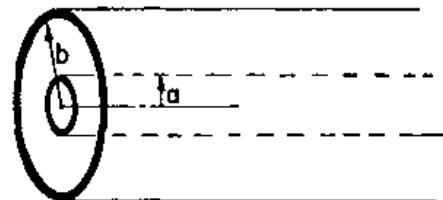


图 24-1 一条共轴传输线

着该线传播。然而，我们现在并不想遵循这一途径，而宁愿从微分方程的观点来考察该线。

假设看看沿传输线在相邻两点、比如说从线端量起的距离 x 和 $x+4x$ 两点间、会发生的事情。让我们把这两导体间的电势差称为 $V(x)$ ，而沿那根“热”导体上的电流称为 $I(x)$ (见图 24-2)。如果导线中的电流正在变化，则电感将向我们提供跨越从 x 至 $x+4x$ 那一小段

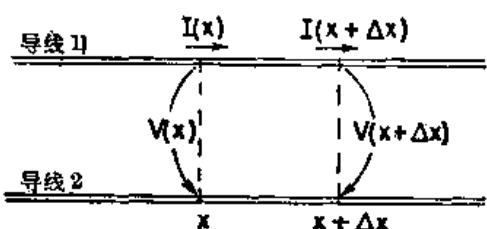


图 24-2 传输线的电流和电压

导线间的电压降数值：

$$\Delta V = V(x+4x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt},$$

或者，取 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限，则可得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (24.1)$$

该变化着的电流会给出一个电压陡度。

再参考该图，若在 x 处的电压正在变化，则必须有某些电荷提供给该区域里的电容。如果我们考虑从 x 至 $x+4x$ 那一小线段，则聚集在其上的电荷为 $q = C_0 \Delta x V$ 。这一电荷的时间变率为 $C_0 \Delta x dV/dt$ ，但电荷之所以会改变只有在流入该线元的电流 $I(x)$ 不等于从该线元流出的电流 $I(x+4x)$ 时才出现。把这一电流差称为 ΔI ，便有

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{dV}{dt}.$$

若取 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限，可得

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (24.2)$$

因此，电荷守恒隐含着电流陡度正比于电压的时间变率。

于是，(24.1) 和 (24.2) 两式就是关于传输线的基本方程。如果我们乐意，本来尽可以把它稍为修改一下使之包括导体中的电阻效应或经由导体之间绝缘体中的电荷渗漏现象，但对于眼前的讨论来说我们将只停留在这一简单例子上。

关于传输线的这两个方程可以通过对其中一个取 t 微商，而对另一个取 x 微商，再消去 V 或 I 来互相结合。于是，我们就有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (24.3)$$

或者是

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (24.4)$$

由此我们再度遇到在 x 方向上的波方程。对一条均匀的传输线来说，电压(或电流)会作为波而沿该线传播。沿线电压必然会取 $V(x, t) = f(x - vt)$ 、或 $V(x, t) = g(x + vt)$ 、或两者之和的形式。那么，速度 v 又将如何呢？我们知道， $\partial^2/\partial t^2$ 的系数就恰好是 $1/v^2$ ，因而

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (24.5)$$

将留给你们去证明：对于线里每一个波电压波总会正比于电流波，而这一比例常数刚好等于特性阻抗 z_0 。若对一个沿正 x 向行移之波分别称其电压和电流为 V_+ 和 I_+ ，则应该得到

$$V_+ = z_0 I_+. \quad (24.6)$$

同理，对于一个走向负 x 向之波其关系为

$$V_- = -z_0 I_-.$$

特性阻抗——正如过去曾从滤波器方程中找到的——由下式给出：

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad (24.7)$$

所以是一个纯电阻。

为求得一条传输线的传播速率 v 及其特性阻抗 z_0 ，我们必须懂得每单位长度的电感和电容。对于一条共轴缆来说，是能轻而易举地算出这些来的，因而现在就来看看到底怎样。对于电感，根据 § 17-8 节的那些概念，令 $\frac{1}{2}LI^2$ 等于磁能，那是可以通过遍及该体积对于 $\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$ 积分而获得的。假定该中心导体载有电流 I ；那么我们知道， $B = I / 2\pi\epsilon_0 c^2 r$ ，其中 r 为有关之点与轴间的距离。取一厚度为 dr 而长度为 l 的柱形壳作为体积元，则对于磁能应有

$$u = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)^2 l 2\pi r dr,$$

式中 a 和 b 分别代表内外两导体的半径。算出该积分，便得

$$u = \frac{I^2 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.8)$$

令这一能量等于 $\frac{1}{2}LI^2$ ，就可以找出

$$L = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.9)$$

正如理应得到的那样，这与线的长度 l 成正比，因而每单位长度的自感 L_0 就是

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}. \quad (24.10)$$

我们曾算出在一柱形电容器上的电荷（见 § 12-2 节）。现在，将该电荷除以电势差，便得

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)},$$

每单位长度的电容 C_0 为 C/l 。把这一结果与式 (24.10) 相结合，便可得到 $L_0 C_0$ 这一个积恰好等于 $1/c^2$ ，因而 $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ 即等于 c 。波以光速沿轴向下奔跑。必须指出，这一结果有赖于我们所作的如下假定：(a) 在两导体之间的空间里并没有电介质或磁性材料存在，以及 (b) 电流全都是在导体表面上通过的（对理想导体理该如此）。我们以后还将见到，对于优良导体，当频率高时，一切电流将象理想导体那样都分布于其表面上，因此这一假定就适用。

眼下有趣之点是，只要(a)和(b)两假设正确，则对于任一对平行导体——甚至是一根六角形内导体放置在一根椭圆形外导体中的任何一处——该积 $L_0 C_0$ 总还是等于 $1/c^2$ 。只要横截面固定不变，而在两导体之间的空间里并没有任何物质材料存在，则波始终是以光速传播着的。

关于特性阻抗就不能提出象这样一种普遍说法。对于一根共轴线来说，它是

$$z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}. \quad (24.11)$$

式中因数 $1/\epsilon_0 c$ 具有电阻的量纲并等于 120π 欧姆。至于该几何因数 $\ln(b/a)$ ，则只是对数性地取决于尺寸，因而就共轴线——和大多数类型的导线——而言，这特性阻抗具有从 50 欧至几百欧左右的典型值。

§ 24-2 矩形波导

我们将要谈及的下一个问题，乍一看来，是一种令人惊奇的现象：如果从共轴线抽去该中心导体，它仍会运载电磁功率。换句话说，在足够高的频率上，一根空管子将工作得如同导线那样好。这是与在高频上电容器和电感器所构成的谐振电路不得不由一个空盒来代替那么一种神秘办法有联系的。

尽管当人们把一条传输线当作一种分布式的电感和电容来思考时，似乎是一件引人注目之事，但大家都清楚，电磁波可以沿一条中空的金属管道通过。如果该管道是笔直的，则还可以看穿它！因此，肯定电磁波是会通过管子的。但我们也知道，不可能使低频波（动力或电话）通过一个单独的金属管内部。因此就必然是：若电磁波的波长足够短，才可以从中通过。我们要来讨论对某一给定大小的管子能够从其中通过的最长波长（或最低频率）的那个极限情况。既然这时管子是在用来载波，它就称为波导。

我们将从一矩形管开始，因为它是待分析的最简单情况。起初打算给出一种数学处理，以后才回过头来用一种相当初级的办法来考察该问题。然而，这相当初级的办法只能轻易地运用到一个矩形导管上去。但基本现象应对任意形状的一般导管都相同，故从根本上来说数学论证还是更为靠得住的。

这样，我们的问题就是要找出在矩形管中有哪一种波才可以存在。现在先来选取某些方便坐标；我们选取 z 轴沿管长方向，而 x 和 y 轴则平行于管的两边，如图 24-3 所示。

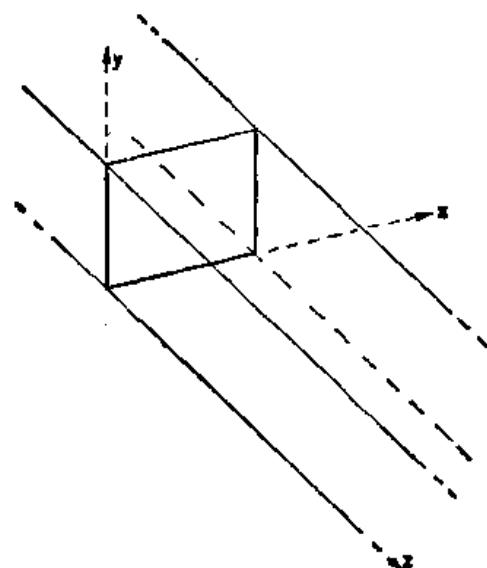


图 24-3 对矩形波导所选取的坐标

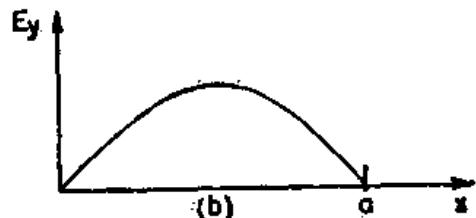
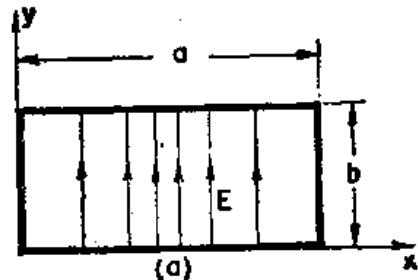


图 24-4 在某一个 z 值上存在于波导中的电场

我们知道，当光波沿着管道往下传播时，它们有一横向电场；因此，假定先来寻找垂直于 z 的、比如说只有一 y 分量 E_y 的那一种解。这一电场在横跨该导管时会有某种变化；事实上，在平行于 y 轴的两侧处它必须为零，因为在一导体中的电流和电荷始终会被调整到使得在导体表面上不会有切向的电场分量。因此， E_y 就将随 x 以某一拱形变化，如图 24-4 所示。也许它就是曾经对一空腔所找出过的那种贝塞耳函数？不，因为贝塞耳函数是与柱形几何有关的。对于一个矩形的几何形态来说，波通常是一些简单谐函数，因而就应该尝试某种象 $\sin k_x x$ 那样的东西。

既然我们所想要的是沿波导往下传播之波，那就应该期望，当沿 z 向奔跑时场会在正值

与负值之间反复变化，如图 24-5 所示的那样，而这些振动又将以某一速度 v 沿着波导行进。若我们所拥有的是在某一定频率 ω 上的振动，则总会猜测到，该波跟随 z 的变化也许会象 $\cos(\omega t - k_z z)$ ，或者若采用那更为方便的数学形式，则象 $e^{i(\omega t - k_z z)}$ 那样，这一种与 z 的依存关系代表一个以速率 $v = \omega/k_z$ 奔跑着之波（见第一卷第二十九章）。

因此，我们也许会猜测，导管里之波该有如下数学形式：

$$E_y = E_0 \sin k_z x e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (24.12)$$

让我们来看一看这猜测是否满足该正确场方程组。首先，电场在导体上应没有切向分量。我们的场满足这一要求；它垂直于顶面和底面，并在两侧面上为零。噢，若选取 k_z 使得 $\sin k_z x$ 的半周恰好贴合该导管的宽度——也就是，若

$$k_z a = \pi \quad (24.13)$$

——便会如此。还有其他一些可能性，比如 $k_z a = 2\pi, 3\pi, \dots$ 或一般说来，

$$k_z a = n\pi, \quad (24.14)$$

其中 n 是任一整数。这些就代表场的各种复杂布局，但在目前让我们只考虑那一种最简单情况，即 $k_z = \pi/a$ ，其中 a 为该导管内面的宽度。

其次，在导管内的自由空间里 E 之散度必须为零，因为那里并没有电荷。 E 只有一个 y 分量，而这一分量并不会随 y 变化，因而的确是有 $\nabla \cdot E = 0$ 。

最后，电场在导管内的自由空间里应该与其余的麦克斯韦方程都一致。这与它应满足下列波方程是同一回事：

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (24.15)$$

必须审查我们的猜测，即式(24.12)是否合适。 E_y 对 x 的二次微商只不过是 $-k_z^2 E_y$ ，对 y 的二次微商则为零，因为没有什么会依赖于 y 的。对 z 的二次微商为 $-k_z^2 E_y$ ，而对 t 的二次微商则为 $-\omega^2 E_y$ 。于是，方程(24.15)申述

$$k_z^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

除非 E_y 处处为零（那并非十分有意义），否则若

$$k_z^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (24.16)$$

则上式便是正确的了。我们已经确定了 k_z ，因而这一个式就告诉我们，若 k_z 与频率 ω 之间有使式(24.16)被满足的那一种关系——换句话说，若

$$k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}, \quad (24.17)$$

则可以有上面所假设的那种波型。我们刚才所描述的那些波在 z 方向上就是以这一 k_z 值传播着的。

由式(24.17)算出之波数 k_z ，会告诉我们关于在某一给定频率 ω 上波节沿波导往下传播的速率。这个相速度是

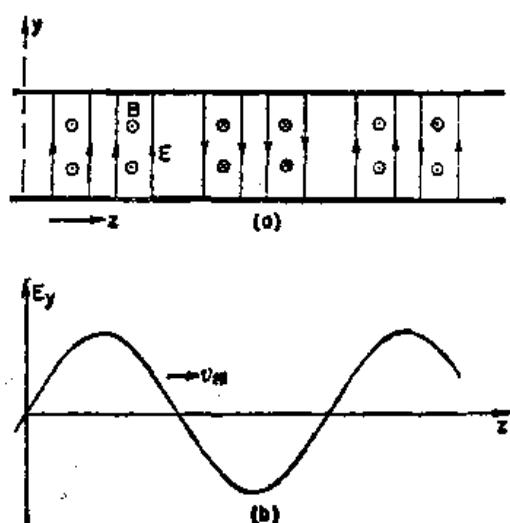


图 24-5 在波导中电场与 z 的依存关系

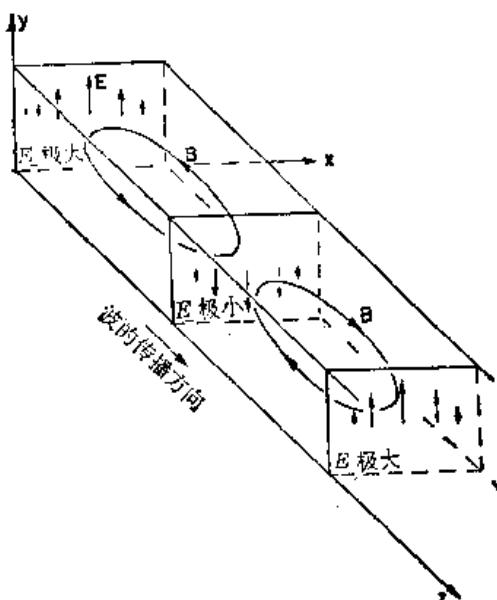


图 24-6 波导中的磁场

除了电场之外,还有磁场也在跟着波奔跑,但眼前我们将不耐烦去算出有关磁场方面的那个表式。由于 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$, \mathbf{B} 线将围绕那些 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 值最大的区域,也就是说,将介乎 \mathbf{E} 的极大点与极小点之间。 \mathbf{B} 之回线将会平行于 xz 平面并位于 \mathbf{E} 的峰与谷之间,如图 24-6 所示。

§ 24-3 截止频率

在解方程(24.16)以求得 k_z 时,实际应有两个根——一个是正,一个是负。我们应该写出

$$k_z = \pm \sqrt{(\omega^2/c^2)^2 - (\pi^2/a^2)}. \quad (24.20)$$

正、负这两个符号只是意味着会有以负相速(朝向 $-z$)传播之波,也有在导管中沿正向传播之波。自然,应有可能使波沿两者之中的任一方向传播。既然同时这两种波型都可以存在,就会有驻波解的那种可能性了。

有关 k_z 之式也告诉我们,较高的频率会给出较大的 k_z 值,因而也就是较短的波长,一直到了 ω 取非常大值的极限, k_z 就变成等于 ω/c ,那是对自由空间里之波所该指望的。我们所“见到”的通过管里之光仍然以速率 c 行进。但此刻必须注意,若频率往下降,则某些奇怪事情会跟着发生。开头波长会变得越来越大,但若 ω 降至太小,则式(24.20)中的平方根内之量会突然变成为负的。一旦 ω 变成小于 $\pi c/a$ ——或当 λ_0 变得大于 $2a$,上述情况就会发生。换句话说,当频率变成低于某一临界频率 $\omega_c = \pi c/a$ 时,波数 k_z (从而 λ_z)会变成虚数,从而不再得到任何解了。难道真的不会得到解了吗?谁说 k_z 必须是实数呢?如果确实出现虚数,那又该怎么办呢?场方程组仍旧被满足,或许一个虚数的 k_z 也会代表一个波。

假设 ω 小于 ω_c ;那便可以写成

$$k_z = \pm ik', \quad (24.21)$$

其中 k' 是一正实数,即

$$k' = \sqrt{(\pi^2/a^2) - (\omega^2/c^2)}. \quad (24.22)$$

如果现在回到有关 E_y 的表式(24.12)上去,则有

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t \mp k_z z)}, \quad (24.23)$$

这也可以写成

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{\pm k' z} e^{i\omega t}. \quad (24.24)$$

上述表式给出了一个按 $e^{i\omega t}$ 随时间振动着的、但却按照 $e^{\pm k'z}$ 随 z 变化着的 E 场。它作为一个指数函数随 z 平滑地减少或增加。在我们的推导中并未曾对发动那些波之源有所操心，不过当然一定会有一个源存在于导管中某处的。该伴随着 k' 的符号必须是会使场跟着与波源的距离增大而减小的那一个。

因此，对于比 $\omega_0 = \pi c/a$ 为低的频率，波并不会沿导管往下传播；该振动场只能钻进导管里达到属于 $1/k'$ 数量级的一段距离。为此，该频率 ω_0 才被称作导管的“截止频率”。考察式(24.22)可知，在频率仅稍低于 ω_0 时， k' 是一个小数值，因而场可钻进导管里走得很远。但若 ω 比 ω_0 小很多，则该指数系数 k' 等于 π/a ，而场便非常迅速地减弱，如图 24-7 所示的那种情形。在距离等于 a/π 、或在约三分之一宽度的那一距离内，场减弱至 $1/e$ 。场从源出来后仅钻进一个很短距离。

我们想要强调对导波进行分析的一个有趣特点——即虚波数 k_* 的出现。按正常情况，如果在物理学中求解一个方程并获得一个虚数，它总不会指任何物理的东西。然而，对于波来说，一个虚数确实意味着某种东西。该波方程仍被满足；它只是意味着解答会给出一个指数式地削弱之场，而不是一个传播着之波罢了。因此，在任一个波问题中，若对于某一频率 k 会变成虚数，这意思就是说波的形式变了——由一个正弦波变成一个指数函数。

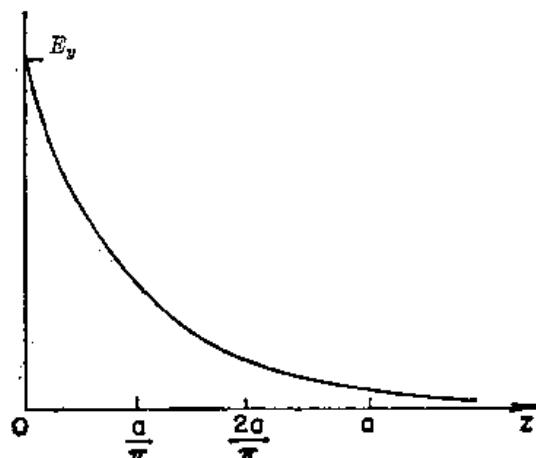


图 24-7 对于 $\omega < \omega_0$, E_y 随 z 的变化情况

§ 24-4 导波的速率

上面所用的波速度是相速，即波节*的速率；它表现为频率的函数。若把(24.17)和(24.18)两式结合起来，便可写出

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}}, \quad (24.25)$$

对于比截频为高的频率——其中存在行波—— ω_0/ω 会小于 1，而 v_{ph} 就是实数，且会大于光速。我们曾在第一卷第四十八章中见到，相速大于光速是可能的，因为那不过是波节在运动而不是能量或信息在运动。为要知道信号将跑得多快，得算出由一个频率之波与另一个或更多个频率稍为不同之波互相干涉而形成的脉冲或受调波的速率（见第一卷第四十八章）。我们就曾把象这样一群波的包线之速率称为群速；它不是 ω/k ，而是 $d\omega/dk$ ：

$$v_{ph} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.26)$$

就式(24.17)对 ω 取微商并颠倒之以获得 $d\omega/dk$ ，便可得出

$$v_{ph} = c \sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}, \quad (24.27)$$

那是低于光速的。

v_{ph} 与 v_{ph} 的几何平均数恰好就是 c ，也即光速：

$$v_{ph} v_{ph} = c^2. \quad (24.28)$$

* 这里“波节”指的是行波中的波谷（或波峰），而不是驻波中的那种波节。——译者注

这很奇怪,因为我们已在量子力学中见过一个相似的关系式了.对于一个具有任何速度——即便是相对论性的——的粒子,其动量 p 与能量 U 都是这样联系着的:

$$U^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (24.29)$$

但在量子力学中能量为 $\hbar\omega$, 而动量为 \hbar/λ , 即等于 $\hbar k$; 因而式(24.29)便可以写成

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \quad (24.30)$$

或

$$k = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (m^2 c^2/\hbar^2)}, \quad (24.31)$$

这看来十分象式(24.17)…妙哉!

波之群速也就是能量沿导管传输的速率. 如果想要找出沿波导传送的能流, 便可从能量密度乘以群速而得到. 设电场的方均根值为 E_0 , 则电能的平均密度为 $\epsilon_0 E_0^2/2$. 也有一些能量是与磁场联系着的. 我们将不在这里来证明它, 但在任一个空腔或导管中磁能与电能始终相等, 因而总的电磁能量密度就是 $\epsilon_0 E_0^2$. 于是, 由导管所传输的功率 dU/dt 为

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 ab v_{\text{群}}, \quad (24.32)$$

(我们将在以后看到另一种会获得能流的更普遍方法.)

§ 24-5 导波的检测

能量可借助某一种“天线”以耦合至一个波导之中. 例如, 用一根小小的竖立导线或“短线”就可以. 导波的存在可以用一条小接收“天线”——那又可以是一根小短线或一个小回

线——来拾取某些电磁能而加以检测. 在图 24-8 中, 利用切开一部分侧壁来表明导管中装有一根驱动短线和一个拾波“探头”. 该驱动短线可以通过一根共轴缆而连接至一信号发生器, 而该拾波探头则可由一根相似电缆连接至一检波器. 把拾波探头通过一条细长渠道插入导管

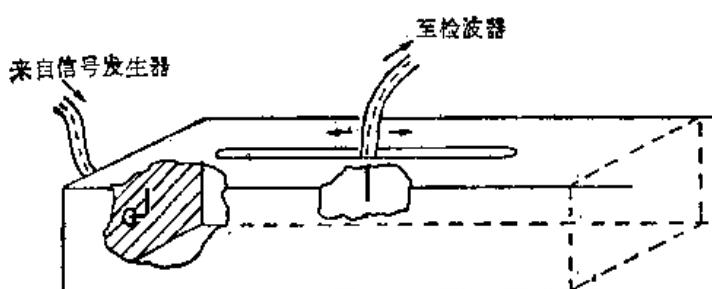


图 24-8 装配有驱动短线和拾波探头的波导管

之内往往很方便, 如图 24-8 所示. 这样, 探头就可以沿着导管来回移动以便在不同位置上取得场之样.

如果信号发生器被布置在某一大于截频 ω_0 的频率 ω 上, 那么沿导管就有从该驱动短线出发而往下传播之波. 这些将是唯一存在之波, 如果该导管是无限长的话, 这可通过用一个经过了仔细设计的吸收器来使其从远端不致发生反射而有效地布置成. 于是, 由于检波器所测量的乃是在探头附近之场的时间平均值, 它便将拾得一个与沿导管位置无关的信号; 它的输出将与被传递的功率成正比.

如果现在导管之远端以某种方式被封闭因而产生一个反射波——作为一个极端例子, 假定用一块金属板来封闭它——则除了原来的前进波之外就还有一个反射波. 这两个波将互相干涉, 在管里产生一个与我们以前曾在第一卷第四十九章中讨论过的那种弦线上的驻波相似的驻波. 于是, 当该拾波探头沿线移动时, 检波器的读数就将周期性地起落, 表明在

驻波的每一个腹处场为极大而在每一个节处场为极小。在相邻两节点(或腹点)间的距离恰为 $\lambda_e/2$ 。这提供了测量导管内波长的一个方便方法。现在若频率移至接近于 ω_c , 则两节点间的距离增长, 这表明该导管波长是按照式(24.19)所预言的而增大了。

假设现在信号发生器被拨至稍为低于 ω_c 的一个频率。那么, 当该拾波探头沿导管往下移动时, 检波器的输出便将逐渐减弱。如果频率再度降低, 场强将按照图 24-7 的曲线迅速下降, 并表明波不再传播出去了。

§ 24-6 波 导 管

波导的一种重要实际应用就是对于高频功率的传输, 比如把一个高频振荡器或一部雷达装置中的输出放大器耦合至一根天线上。事实上, 天线本身往往包括一个抛物线形反射镜, 由一个在其末端张开成“喇叭口”形状的波导把沿之而来的波辐射出去, 并馈至镜的焦点上。尽管高频电磁波可以经由共轴缆传输, 但对于传输大量功率, 波导仍然较为优越。首先, 可以沿一条缆线传输的最大功率被导体间的绝缘材料(固体或气体)的击穿所限制。对于某一给定功率量, 在一导管内的场强往往比在一共轴缆内的为低, 因而在击穿发生之前较大的功率就可在其中传送。其次, 在一共轴缆中的功率损耗往往大于在一波导管内的。在共轴缆内必须有用以支持该中心导体的绝缘材料, 而在这一材料中便有能量损耗——特别是在高频上。并且, 在共轴缆的中心导体上电流密度很高, 而由于损耗是随电流密度的平方增大的, 因而那出现在导管壁上的较低电流就会导致较小的能量损耗。为保持损耗最小, 导管内壁往往是用一种诸如银的高电导率材料涂镀的。

凡在有波导存在的“电路”中, 连接问题与在低频上的相应电路问题大不一样, 并常称为微波“衔接”法。许多特殊器件曾经为此目的而发展起来。例如, 两节波导往往是经由凸缘接头互相连接的, 这可由图 24-9 中看出。然而, 象这样的连接会导致严重的能量损耗, 因为那些表面电流必须流经该接口, 而那里可能有相对高的电阻。一种避免这种损耗的办法是造出截面有如图 24-10 所示的那种凸缘接头。在导管的相邻两节间留下一点空隙, 而在其中一个凸缘接头上则刻有一条槽沟以便造成一个如图 23-16(c) 所示的那种小空腔。这些大小尺寸被选取得使这一空腔能同所采用的频率发生谐振。这一谐振空腔对于电流会呈现一个高“阻抗”, 因而流经该金属接口(图 24-10 中的 a 处)的电流就相对地小。导管里的大电流只是对该空隙(图中的 b 处)的“电容”充电及放电而已, 那里仅有少量的能量损耗。

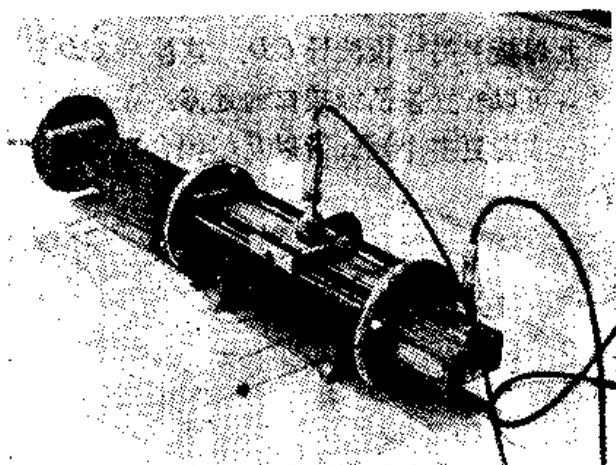


图 24-9 几段波导由凸缘接头互相连接

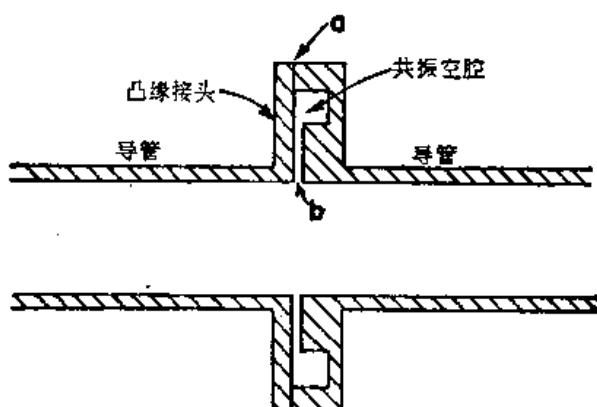


图 24-10 两节波导间的低损耗连接

假设你想要对一 λ 波导管加以封闭使得不会形成反射波，那么，你就必须在其末端安置一种模拟一根无限长导管的东西。你需要有一个对于导管的作用就象特性阻抗对于传输线的作用那样的“终端”——对到达之波仅有吸收而没有反射的一种东西。此时该导管就将如同永远接续下去似地作用着。象这样的终端是通过放进一些经过精心设计的电阻材料的楔子于该导管中借以吸收波能量使得几乎产生不出任何反射来而造成的。

如果你想要把三件东西——例如一个源与两条天线——互相连接起来，那么你就可用一个象图24-11所示的那种“T”形来完成。被馈给这个“T”形管中间一节中的功率被分开成两支经由两条侧臂流出（可能还有一些反射波）。从24-12的简略图示中你可以定性地看出，当场到达该输入节的末端时就会散开并形成将在该两臂中开始传播出去之波的电场。在交界处的这些场会约略象图24-12(a)或(b)所示的那样，这要视该导管里的电场是与该“T”形之“顶”平行还是与之垂直而定。

最后，我们想要描述一种称为“单向耦合器”的器件，这对于在你已经连接好一个复杂的波导布局之后要道出到底有什么东西在里面行走非常有用。假设你想要知道在波导的某一特定节段中波朝哪一方向行走——例如，你或许会怀疑是否存在一强反射波。若导管里之波是沿某一方向行走，这单向耦合器就会从其中的功率吸取一小部分，但若波是朝另一方向行走，则不能取出任何功率。通过把这一耦合器的输出连接到一个检波器上，你便能测得在该导管中的“单向”功率。

图24-13是单向耦合器的简图；沿一段波导AB的一个面上焊接上另一段波导CD。这波导CD被弯开以便有可以安置该凸缘接口的地方。在把这两

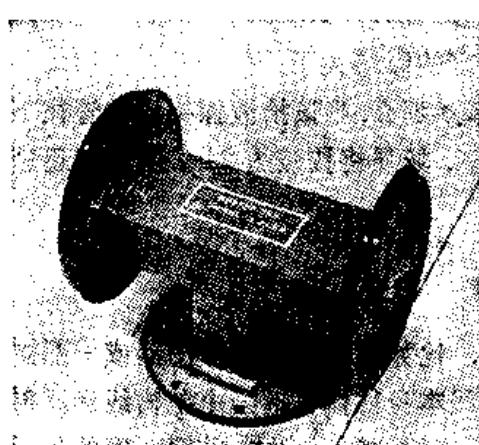


图 24-11 “T”形波导管（在凸缘接头处配备有塑料端帽，以保持当这个“T”形导管不用时内部清洁）

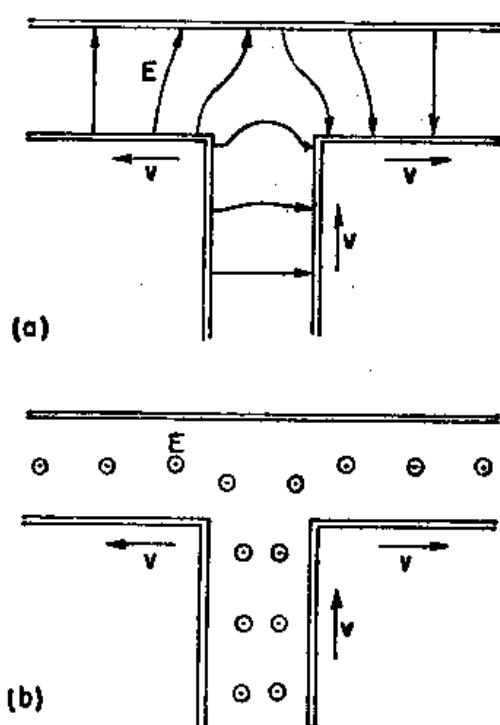


图 24-12 在一“T”形波导中关于两种可能取向的电场

个波导焊接在一起之前，要在每一波导上钻通两个（或者更多个）洞（借以互相耦合），以便使主波导AB中的一些场可被耦合至副波导CD中去。每个洞就象一条小天线那样作用，这会在副波导中产生出一个波来。要是只有一个洞，波会在两个方向上被送出，因而不管波在原导管中走哪个方向都一样。但当有两个洞使其间的间隔等于导管波长的四分之一时，它们就会形成相位差为90°的两个源。你是否还记得，在第一卷第二十九章中讨论

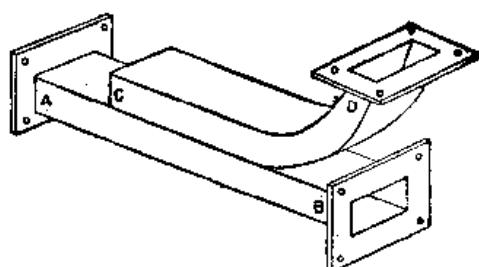


图 24-13 单向耦合器

过的来自相距为 $\lambda/4$ 而在时间上又以 90° 异相被激发的两条天线之波的那种干涉？我们当时就曾发现，在一个方向上这两波会相减而在相反方向上两波相加。这同一事态也将发生在这里。导管 CD 中所产生之波将与在 AB 中之波有相同的走向。

如果主导管中之波是从 A 跑向 B ，则在副导管中的输出口 D 处将会有个波。若主导管中之波是从 B 跑向 A ，则将有一个波朝副导管之 C 端跑。但这一端却已装配成一终端，因而波将被吸收，于是在该耦合器的输出口处就不再有波了。

§ 24-7 波导模式

由我们选择出来而正在加以分析之波乃是波方程组的一个特解。此外还有许多其他的解。每个解称为一种波导“模式”。例如，上面关于场的依存关系不过是正弦波的半周。有一个同样好的解则是利用其全周；这时 E_y 随 φ 的变化将如图 24-14 所示。对这一种模式的 k_z 是前值的二倍，因而截频就会高得多了。并且，在我们所已学习过的波中 E 仅有一个 y 分量，但此外还有包含更复杂电场的其他模式。若电场只有 x 和 y 分量——因而总场始终与 z 向正交——则这种模式称为“横电式”（或 TE ）波模。这种模式的磁场总会有一个 z 分量。事实证明，若 E 有一个 z 分量（沿传播方向），则磁场始终只有横向分量。因此这种场就称为横磁（ TM ）波模。对于一个矩形导管来说，所有其他模式比起上述那种简单的 TE 模来具有较高截频。因此，就有可能——而且也经常是——采用一个其中频率只比这一最低波模的截频为高而比其他一切截频都较低的导管，以便仅有这么一种波模能够传播。不然的话，情况就会变得复杂而且更难于控制了。

§ 24-8 从另一角度来看导波

现在要来向你们表明另一种理解波导对比其截频 ω_0 为低的那些频率为什么会使场迅速衰减的途径。这样你将有一个关于在高、低频之间行为之所以会那么突然变化的更为“形象化”的概念。对于一个矩形波导来说，是能够通过利用在导管壁上的反射——或镜象法——来完成此事的。然而，这一种办法只对矩形波导有效；这就是为什么我们在上面仍要从比较数学化的那种分析开始，因为那在原则上对任何一种形状的波导都适用。

对于上面所曾描述过的那个模式，竖向尺寸大小（即 y 值）不会引起任何效应，因而可略去该导管之顶和底，并想象导管乃是在竖向上延伸至无限远的。于是，设想导管仅包括两块相距为 a 的竖直板。

场源是一根放在导管中间的竖向导线，这根线中载有以频率 ω 振动着的电流。在不存在导壁的情况下，象这样一根导线会辐射出柱面波的。

现在，考虑那两面导壁都是理想导体。这样，如同在静电学中一样，若我们对于该导线

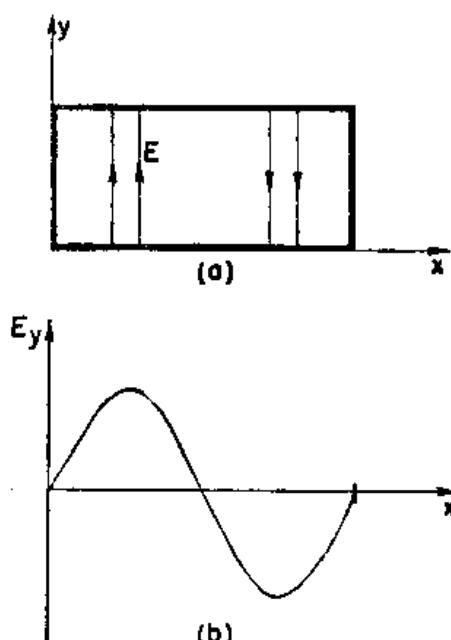


图 24-14 另一种可能的 E_y 随 x 变化的情况

之场再加上一个或更多个适当的“象”导线之场，则在壁面上的那些条件就会正确。关于象的概念，在电动力学中，正如同在静电学中一样，也都适用，当然要把推迟方面也包括进去。我们都明白那是真的，因为经常见到一面镜子会产生一个光源之象。而对于光频的一面镜子只不过是对于电磁波的一块“理想”导体而已。

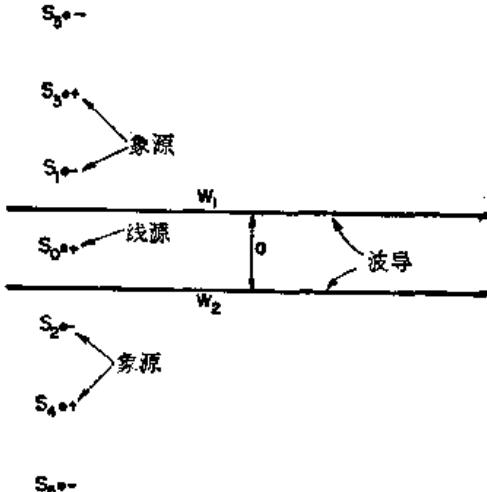


图 24-15 放在两面导体壁 W_1 和 W_2 之间的线源 S_0 。这两面壁可以由一个无穷序列的象源代替

如你在了望一根置于两面平行镜中间的线所会看到的那样。)为了使在两壁上之场为零，在象上的那些电流极性必须从一个象至另一个象交替地改变着。换句话说，它们的振动存在 180° 的相差。于是，该波导场就恰好是这样一组无限多个线源的场之迭加。

如果靠近那些源，场就很象是个静场。在 §7-5 节中曾经考虑过由一排栅形线源所产生之静场，并找出了除跟着与栅的距离指数函数式地减弱的那些项外，这个场好象是一块面电荷之场。这里平均源强为零，因为从一个源至另一个源的符号交替地改变。任何存在之场就该随距离作指数函数式的减弱。在靠近源处，所见到之场主要是来自那一个最接近之源；在较远处，许多的源都会作出贡献，因而它们的平均效果便是零了。因此，现在我们就看到了为什么在低于其截频上波导会给出一个按指数函数削弱之场。特别是在低频上，这静态近似表现得很好，因而它就预言场会随距离的增大而迅速减弱。

现在，我们却面临一个相反问题：为什么波毕竟会传播呢？那是个神秘部分！原因是，在高频上场之推迟会在周相上引进一个附加改变使得来自那些异相之源的场能够相长而不是相消。事实上，正是为了这一问题，我们才在第一卷第二十九章中学习由一个天线阵或一个光栅所产生之场。在那里曾经发现，当几根无线电天线适当地安排着时，它们就能提供一种干涉花样，使得在某一方向有强信号而在另一方向则没有。

假设回到图 24-15 并看看从那一列象源到达一个远处之场。仅有在某些要由频率来决定的方向上——仅有在来自所有一切源之场都会同相相加的那些方向上——场才会表现出最强。在与源有相当距离处，场将在这些特殊方向上才作为平面波而传播。我们已在图 24-16 中对这一种波作了草图，其中实线代表波峰而虚线代表波谷。波的传播方向将是其中两相邻源到达同一波峰的推迟时差等于半个振动周期的那一方向。换句话说，图中的 r_2 与 r_1 相差为自由空间波长之半：

$$r_2 - r_1 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

现在让我们取一个水平截面，如图 24-15 所示，其中 W_1 和 W_2 是两面导壁而 S_0 则是那根源导线。我们称这一根线里的电流方向为正。现在假如仅有的一面壁，比方说 W_1 ，我们本来可以除去它，若在那标明为 S_1 的地方放置一个(具有相反极性的)象源的话。但由于那里存在两面壁，便也将有 S_0 在壁 W_2 中之象，我们将其标明为象 S_2 。这个象源也将在 W_1 中造成一个象，我们叫它做 S_3 。现在 S_1 和 S_3 两者都将在 W_2 中在标明为 S_4 和 S_5 的位置上各有其象，如此等等。对于配置有一个源在其中间的两面导体来说，场与由排列成一条直线的彼此相隔各为 a 的无限多个源所产生的相同。(这事实上就恰

于是角度 θ 就由下式给出:

$$\sin \theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \quad (24.33)$$

当然, 还有另一组波以相对于该线源阵对称的角度往下奔跑。整个波导场(不要太靠近源)就是这两组波的迭加, 如图 24-17 所示。当然, 只有在该波导的两壁之间那实际之场才会真的是这样。

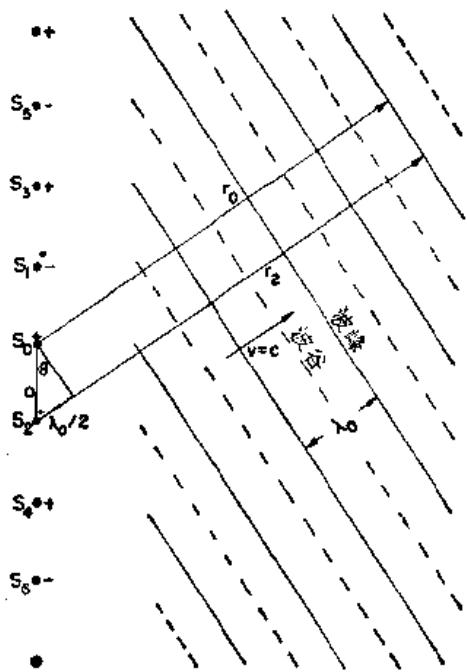


图 24-16 来自一个线源阵的一组相干波

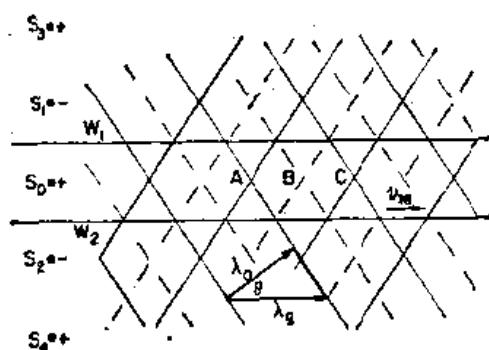


图 24-17 波导场可以视作
两列平面波之迭加

在比如 A 和 C 那些点上, 两种波形之峰相合, 因而场就有一个极大值; 在比如 B 那种点上, 两波都有负峰值, 因而场会有一个极小值(最大负值)。当时间向前推移时, 导管里之场会表现出沿导管以波长 λ_g ——等于从 A 至 C 的距离——行进。这一距离与 θ 角的关系为

$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \quad (24.34)$$

利用关于 θ 的式(24.33), 便可得到

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (24.35)$$

这恰好就是上面我们在式(24.19)中所曾找到的。

现在看到了为什么只有在超过截频 ω_0 时才会有波之传播。如果该自由空间波长大于 $2a$, 则不能在有如图 24-16 所示的那种角度出现。当 λ_0 降至 $2a$ 以下、或当 ω 升至 $\omega_0 = \pi c/a$ 以上时, 那所需的相长干涉才会突然出现。

若频率足够高, 波会出现的方向就可能有二个或更多个。如果 $\lambda_0 < \frac{2}{3}a$, 上述情况就会发生。然而, 一般说来, 这本来也可发生在 $\lambda_0 < a$ 时。这些附加之波相当于我们所曾提及的那些较高的波导模式。

通过上述分析我们也已弄清楚为什么导波的相速度会大于 c 以及为什么这一速度会依赖于 ω 。当 ω 改变时, 图 24-16 中的自由波角度会跟着发生变化, 从而沿导管的速度也就变了。

尽管已经把导波描写成无限多个线源的阵列之场的迭加, 但我们还可以看到, 要是设想有两组自由空间波在两面理想镜之间被不断地往复反射——记住反射意味着周相的反转——我们便会得到这一结果。这些反射波组会彼此完全互相抵消, 除非它们刚好是按照式(24.33)所给出的那个角度 θ 行进的。对于同一事物就有许多用来考察的方法。

25

按相对论记法的电动力学

在这一章中: $c=1$

§ 25-1 四 元 矢

现在来讨论狭义相对论在电动力学中的应用。由于曾在第一卷的十五至十七章中学习过狭义相对论，因而我们在此只要尽快地温习一些基本概念。

曾经在实验上发现：如果我们以匀速运动，物理规律则总不会改变。你不能道出你是否居于一艘以匀速沿直线航行的宇宙飞船中，除非你从该飞船中眺望出来，或至少作一种与外界有关的观测。我们写下来的任何物理定律都必须安排得使自然界的这一事实被嵌进去。

存在两个坐标系，其中一个 S' 系是在 x 方向上以速率 v 相对于另一个 S 系而作匀速运动的，这两个坐标系的空间与时间彼此间的关系由洛伦兹变换式给出：

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, & y' &= y, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, & z' &= z. \end{aligned} \tag{25.1}$$

物理定律必须是这样：在经过了洛伦兹变换之后，该定律的新形式看来刚好象其旧形式。这恰恰同物理定律不会与坐标系的取向有关的那条原理相似。在第一卷第十一章中，我们曾经见到，若从数学上描写物理规律的转动不变性，其办法是利用矢量来写出方程式。

例如，若有两矢量

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \text{和} \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

我们曾发现其结合式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

不会改变，如果转移到一个经过转动的坐标系上去的话。因此我们知道，若在一个方程式的两边都有象 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 这一类的标积，则在所有转动了的坐标系中就都有完全相同的形式。我们也曾发现过这么一个算符（见第二章）：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

当运用于一标量函数时，会给出象一个矢量那样变换的三个量。利用这一算符我们曾定义过陡度，而与其他矢量相结合时也曾定义过散度与拉普拉斯算符。最后还发现，取两矢量的各分量的某些对之积并求和*，便会得到三个新的量，其行为象一个新的矢量。我们曾称之为两矢量的叉积，然后，又利用算符 ∇ 来作叉积，这就定义了一个矢量的旋度。

既然我们将经常回过头来参考矢量分析中所曾做过的那些事情，因此就把过去曾在三维中用过的所有重要矢量运算都作为概要罗列在表 25-1 上。重要之点是，必须将物理学的

* 这个“和”指的是具有不同符号的两项之和，即代数和，其实也就是两项之差。——译者注

方程式写得能使方程两边在坐标系转动时以同一方式变换。如果一边是矢量，则另一边也必须是矢量；以便在坐标系转动后方程两边将恰好以同一种方式一起改变。同理，若一边是标量，则另一边也应该是标量，因而当转动坐标系时两边都不应当有任何改变。

现在，在狭义相对论的情况下，时间和空间不可分割地混在一起，因而就必须对四维做出类似的事情。我们希望那些方程式不仅对于转动会保持不变，而且对于任一个惯性参照系也应如此。这意味着，方程式在经历了式(25.1)的洛伦兹变换之后应该不变。本章的目的就是要向你们证明如何才能做到这一点。然而，在开始之前，还要做一件将使我们的工作轻松得多（也会减少某些混乱）的事情。这就是要选取长度和时间单位使得光速 c 会等于 1。你可以想象这相当于把时间单位选取为光所需以行经一米长的时间（约为 3×10^{-9} 秒）。我们甚至还可以叫这一个时间单位为“一米”。采用这一种单位，一切方程会更明显地呈现出空时对称性。并且，所有的 c 将不再出现在我们的相对论方程式中。（如果你对此觉得麻烦的话，你始终可将每一个 t 代以 ct ，或一般说来，通过添加一个 c 于那些需要使方程的量纲表现得正确的地方，把 c 再放回到任一个方程中去。）有了这个约定，我们就准备开始工作。我们的计划是要在四维空时中作出一切过去曾用矢量在三维中所做过的事情。这诚然是一场十分简单地游戏；只是根据比拟来做工作罢了。唯一真正的复杂性是在记法上（在三维时已用尽了矢量符号）以及一个关于正、负号的轻微扭变上。

首先，通过与三维中的矢量相比拟，将定义一个四元矢以作为 a_t, a_x, a_y, a_z 四个量的一组，当我们转移到一个运动坐标系上去时，这些量会象 t, x, y, z 那样变换。人们将写成 a_μ ，这指的是四个数 (a_t, a_x, a_y, a_z) 的一组——换句话说，该下角标 μ 可以取 t, x, y, z 各“值”。有时由一个三元矢来指明那三个空间分量，即象 (a_x, a_y, a_z) 那样，会很方便。

我们曾碰到一个四元矢，它含有一个粒子的能量和动量（第一卷第十七章）。在新记法中将把它写成

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}), \quad (25.2)$$

这意味着该四元矢 p_μ 是由粒子的能量及其三元矢 \mathbf{p} 的三个分量所构成的。

看来似乎这场游戏的确十分简单——对于物理学中每一个三元矢，就应去找出那其余的一个分量该是什么，从而就有一个四元矢了。为了弄清楚并不是那么回事，试考虑速度矢量，它的分量是

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

问题：那时间分量是什么？凭本能就应能够提供正确的答案。由于四元矢都象 t, x, y, z 那样，我们就会猜测到其时间分量为

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1.$$

这是错的。原因是，当我们作洛伦兹变换时在每个分母中的 t 并非是不变量。要造成一个四元矢，那些分子都具有正当表现，但在各个分母中的 dt 却把事情败坏了；它并不是对称

表 25-1 三维矢量分析中的重要量和主要运算

矢量定义	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
标积	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
微分矢量算符	∇
梯度	$\nabla \varphi$
散度	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
拉普拉斯算符	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
叉积	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
旋度	$\nabla \times \mathbf{A}$

的，因而在两个不同系统中就不相同了。

事实证明，只要各除以 $\sqrt{1-v^2}$ ，上面所写下来的四个“速度”分量就将成为一个四元矢的分量。我们能够看出那是真的，因为如果从动量四元矢出发：

$$\mathbf{p}_\mu = (E, \mathbf{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (25.3)$$

并用四维中为一不变量的那个静质量 m_0 来除它，那便有

$$\frac{\mathbf{p}_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (25.4)$$

这应仍然是一个四元矢。（用一个不变标量来除，并不会改变变换性质。）因此，就可由下式定义一个“速度四元矢” u_μ ：

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

这个四元速度是一个有用的量；例如，可以写出

$$\mathbf{p}_\mu = m_0 u_\mu. \quad (25.6)$$

这是相对论中凡属正确方程都必须具有的那一种典型形式；式的每一边都是一个四元矢。（右边是一个不变量乘以一个四元矢，那仍然是一个四元矢。）

§ 25-2 标 积

如果你乐意的话，还可以讲，在坐标系转动之下从原点至某一点的距离不变乃是生活中的一项巧遇。这意味着在数学上 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 是一个不变量。换句话说，在经过了转动之后， $r'^2 = r^2$ ，或

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

现在的问题是：是否在洛伦兹变换之下也有一个相似的不变量？有的。从式(25.1)你可以看出

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

除了对 x 方向还有赖于一种特别选择之外，这都很好。若再减去 y^2 和 z^2 我们便能把它安排妥当。于是，任一个洛伦兹变换再加上转动就将遗留该量不变。因此，与三维中的 r^2 相仿的一个四维量为

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

这是在所谓“完整洛伦兹群”——意指对于以一恒速平动和转动的那种变换——名义下的一个不变量。

现在，由于这一不变性是一个仅仅依赖于式(25.1)的变换法则——再加上转动——的代数过程，它对于任一个四元矢就都是正确的（根据定义，它们都作同样变换）。因此，对于一个四元矢 a_μ 来说，便有

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

我们将叫这个量为该四元矢 a_μ 的“长度”。（有时人们将所有各项的正负号都改变而叫 $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ 为长度，因而你得要小心对待。）

现在如果有两个矢量 a_μ 和 b_μ , 它们的相应分量按同种方式变换, 则这个组合

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

也是一个不变(标)量。(事实上, 在第一卷第十七章中对此已有过证明。) 很明显, 这一表达式与矢量的点积很相似。实际上, 我们将称之为两个四元矢的点积或标积。把它写成 $a_\mu \cdot b_\mu$ 使得看来像个点积, 似乎该合乎逻辑。可是, 不凑巧, 习惯上不是那样做; 而是往往被写成没有中间那一点。因此, 我们将按照这一惯例而把该点积写成 $a_\mu b_\mu$ 。这样, 根据定义,

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (25.7)$$

每当你看到两个全同下角标凑在一起(有时得用 ν 或某一其他字母来代替 μ)时, 那就意味着你必须取该四个积并相加起来, 记住对于那些空间分量之积就要用上负号。按照这一惯例, 在洛伦兹变换之下, 标积的不变性可以写成

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

由于式(25.7)中的最后三项不过是三维中的点积, 把它写成如下形式往往更为方便:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

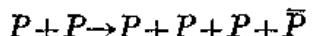
刚才在上面描述过的那种四维长度可以写成 $a_\mu a_\mu$, 那也是明显的:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (25.8)$$

有时把它写成 a_μ^2 也很方便:

$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

现在要来向你们提供有关四元矢点积的用途的又一例证。在一部巨大加速器中, 通过下列反应可以产生反质子(\bar{P}):



这就是说, 一个高能质子与一个静止质子(例如, 放置在质子流中的氢靶里的质子)相碰撞, 而倘若该入射质子拥有足够能量, 则除了那原来的两个质子之外一对新的质子-反质子可能会产生*。问题在于: 应给予该入射质子多少能量才能使这一反应在能量上成为可能。

要获得答案的最轻易途径是去考虑在质心(CM)系统上该反应看来象个什么样子(见图 25-1)。我们将叫入射质子为 a 而其四元动量为

p_μ^a 。同理, 将叫靶质子为 b 而其四元动量为 p_μ^b 。若该入射质子拥有仅仅足以使反应进行的能量, 那么末态——经过碰撞后的状态——就将包括一个在质心系上静止不动的含有三个质子和一个反质子的球体。要是入射能量稍高一些, 那些末态粒子就会拥有一些动能而四

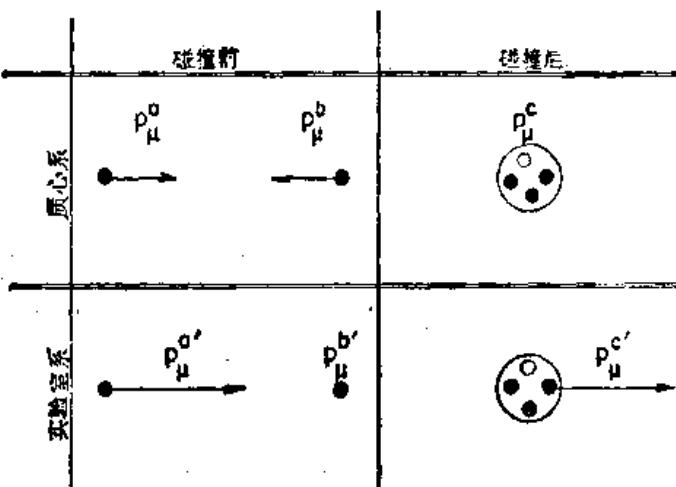


图 25-1 从实验室和质心两参照系上来观察反应 $P + P \rightarrow 3P + \bar{P}$ 。假定该入射质子拥有仅仅足以使反应进行的能量。质子示如实心圆点; 而反质子则如圆圈。

* 你尽可以提问: 为什么不去考虑

$$P + P \rightarrow P + P + P,$$

$$P + P \rightarrow P + \bar{P}$$

那些显然要求较少能量的反应? 答案是, 一个称为重子守恒的原理告诉我们: “质子数减去反质子数”不能改变, 在我们的反应中左边这个量为 2。因此, 若希望有一反质子出现在右边, 则同时应有三个质子(或其他重子)伴随它。

散跑开；要是入射能量稍低一些，则不会有足够能量以造成那四个粒子。

若把末态中那整个球体的总四元动量称为 p_μ^e ，则动量与能量两守恒律便告诉我们：

$$\mathbf{p}^a + \mathbf{p}^b = \mathbf{p}^e,$$

和

$$E^a + E^b = E^e.$$

结合这两式，又可以写出

$$p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^e. \quad (25.9)$$

现在重要之点在于，这是一个四元矢之间的方程，因而对于任一惯性系都应当正确。我们可以利用这一事实来简化计算。由取式(25.9)每一边的“长度”开始；当然，它们也是彼此相等的。于是便有

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)^2 = p_\mu^e p_\mu^e. \quad (25.10)$$

既然 $p_\mu^e p_\mu^e$ 是不变的，便可在任一坐标系上对之进行计算。在该质心系上， p_μ^e 的时间分量为四个质子的静能量，即 $4M$ ，而那空间部分 \mathbf{p} 则等于零；因此 $p_\mu^e = (4M, 0)$ 。我们已利用了反质子的静质量等于质子的静质量那一项事实，并也已叫这一共同质量为 M 。

这样，式(25.10)就变成

$$p_\mu^a p_\mu^a + 2p_\mu^a p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2. \quad (25.11)$$

现在， $p_\mu^a p_\mu^a$ 和 $p_\mu^b p_\mu^b$ 都十分容易求得，因为任一个粒子的动量四元矢之“长度”都不过是该粒子的质量之平方：

$$p_\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = M^2.$$

这可由直接的计算给予证明，或者更巧妙地，则是通过注意一个静粒子的 $p_\mu = (M, 0)$ ，从而 $p_\mu p_\mu = M^2$ 。但由于它是一个不变量，故在任一个参照系上都会等于 M^2 。引用这些结果于式(25.11)中，便有

$$2p_\mu^a p_\mu^b = 14M^2,$$

也即

$$p_\mu^a p_\mu^b = 7M^2. \quad (25.12)$$

现在，也就可以算出在实验室系统中的 $p_\mu^a p_\mu^b$ 了。该四元矢 p_μ^a 可以写成 (E^a, \mathbf{p}^a) ，而 $p_\mu^b = (M, 0)$ ，因为后者描述一个静止质子。这样， $p_\mu^a p_\mu^b$ 也就应该等于 ME^a ；又因为知道标积是个不变量，它必须在数值上等于上面式(25.12)中所得到的。因而有

$$E^a = 7M,$$

这就是我们所要寻找的结果。该初质子的总能量必须至少为 $7M$ （约合 66 亿电子伏，因为 $M = 938$ 兆电子伏），或者在减去了静质量 M 之后，其动能必须至少为 $6M$ （约合 56 亿电子伏）。安装在伯克利(Berkeley)的那部高能质子同步稳相加速器就是为给予受加速质子约 62 亿电子伏的动能以便能够造成反质子而设计的。

由于标积都是不变量，对之进行计算就总是有趣的。那么，关于四元速度的“长度” $u_\mu u_\mu$ 又该如何呢？

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1.$$

这样， u_μ 就是一个单位四元矢。

§ 25-3 四维陡度

我们要讨论的第二个问题就是陡度的四维类似物。回想起(第一卷第十四章)那三个微

分算符 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ 就象三元矢那样变换，所以就叫陡度。这一方案也该适用于四维；这就是说，我们也许会猜测到该四维陡度应当是 $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 。然而，这是错的。

要看出错误的所在，可考虑一个仅与 x 和 t 有关的标量函数 ϕ 。如果在 t 上我们作一个小变化 Δt 而保持 x 不变，则在 ϕ 中的变化为

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} \Delta t. \quad (25.13)$$

另一方面，按照一个正在运动的观察者，

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial\phi}{\partial t'} \Delta t'.$$

应用式(25.1)，就可用 Δt 来表达 $\Delta x'$ 和 $\Delta t'$ 。记住我们正在保持着 x 不变，因而 $\Delta x=0$ ，并可写出

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Delta t; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这样， $\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'} \left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Delta t \right) + \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v \frac{\partial\phi}{\partial x'} \right) \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}$ 。

把这一结果与式(25.13)比较，就可以知道

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v \frac{\partial\phi}{\partial x'} \right). \quad (25.14)$$

与此类似的计算将会给出

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x'} - v \frac{\partial\phi}{\partial t'} \right). \quad (25.15)$$

现在可以看清，该陡度相当奇怪。用 x' 和 t' 来表达 x 和 t 的公式[由解方程组(25.1)而得到的]为：

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这就是一个四元矢所必须进行变换的方式。但式(25.14)和(25.15)中却有两个符号搞错了！

答案是，不要那个不对的 $(\partial/\partial t, \nabla)$ ，而应当通过下式来定义一个四维陡度算符——我们将称之为 ∇_μ ：

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (25.16)$$

采用这一定义，上面所遇到的符号困难就消除了，从而 ∇_μ 也就表现得如同一个四元矢所应该做的那样。（带着那些负号相当难看，但那就是宇宙中通行着的方式。）当然，所谓 ∇_μ “表现得如同一个四元矢”指的只不过是，一个标量的四元陡度为一个四元矢。如果 ϕ 是一个真实的标量不变场（洛伦兹不变量），则 $\nabla_\mu \phi$ 就是一个四元矢量场了。

好，现在已有了矢量、陡度和点积，下一件事情则是要找出一种与三维的矢量分析中的散度相类似的不变量。很清楚，这一种模拟要求去形成 $\nabla_\mu b_\mu$ 这样一种表式，其中 b_μ 为一个四元矢量场，其分量都是空间和时间的函数。要把一四元矢 $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$ 的散度定义为 ∇_μ 与 b_μ 的点积：

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) b_z = \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (25.17)$$

式中 $\nabla \cdot \mathbf{b}$ 是该三元矢 \mathbf{b} 的寻常三元散度。注意，人们必须对这些符号当心。其中有些负号来自标积的定义，即式(25.7)；其他则是由于诸如式(25.16)中关于 ∇_μ 的空间分量为 $-\partial/\partial x$ 等所要求的。由式(25.17)定义出来的散度是一个不变量，因而在彼此相差只是一个洛伦兹变换的所有一切坐标系中就会给出相同的答案。

让我们来看看其中四元散度会出现的一个物理例子。可以用它来求解有关一根运动导线周围场的问题，我们曾经见过(§ 13-7 节)，电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{j} 会形成一个四元矢 $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$ 。如果一根不带电导线载有电流 j_s ，那么在一个以速度 v (沿 σ 轴)从它旁边经过的参照系上，该导线将拥有如下的电荷和电流密度[由洛伦兹变换式(25.1)得到的]：

$$\rho' = \frac{-v j_s}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j'_s = \frac{j_s}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这些恰好就是我们曾在第十三章中获得的。于是，我们就能引用这些源于该运动系统的麦克斯韦方程式中而找到场。

§ 13-2 节的电荷守恒律，在这四元矢记法中，也会取得一个简单形式。试考虑 j_μ 的四元散度：

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (25.18)$$

电荷守恒律申述，每单位体积的电流流出量应等于电荷密度的负增率。换句话说，

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

将此代入式(25.18)中，电荷守恒律就会取一个简单形式

$$\nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.19)$$

既然 $\nabla_\mu j_\mu$ 是一个不变标量，如果它在一个参照系中为零，则在所有一切参照系中也都是零。我们就有这么一个结果，即如果电荷在一个坐标系中守恒，它在所有以匀速运动着的坐标系中也将守恒。

作为最后一个例子，要考虑该陡度算符 ∇_μ 与它本身的标积。在三维中，这样一个积会给出

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在四维中，将得到个什么呢？这很容易。按照有关点积和陡度的法则，就可以得到

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

这一算符，就是那三维拉普拉斯算符的类似物，称为达朗伯(D'Alembert) 算符，并有一种独特记法：

$$\square^2 = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (25.20)$$

根据定义，它是一个不变的标量算符；如果运算于一个四元矢量场上，将产生一个新的四元矢量场。(有些人会把达朗伯算符用与式(25.20)相反的符号给下定义，因而当你阅读文献时务必当心。)

现在，对上面表 25-1 中所列举的那些三维量，大部分已找到了其四维的相应量。(不过还未有过叉积和旋度运算方面的相应物；在到达下一章以前我们将不会对它有所论述。) 如果把所有重要定义和结果都集中在一处，对你记住它们如何演变可能有所帮助，因此我们就在表 25-2 中作这么一个摘要。

表25-2 在三维和四维的矢量分析中的一些重要量

	三 维	四 维
矢 量	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
标 积	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
矢 算 符	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$	$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$
陡 度	$\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$	$\nabla_\mu \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right)$
散 度	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}$
拉氏算符或达氏算符	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2$

§ 25-4 按四维记法的电动力学

我们曾在 §18-6 节中碰到过达朗伯算符，但却未给过它这一名字；在那里对于那些势所找到的微分方程可以用新的记法写成：

$$\square^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (25.21)$$

这两个方程中的右边四个量为 ρ, j_x, j_y, j_z ，再各除以 ϵ_0 。如果所有参照系中都采用同一种电荷单位，则这个 ϵ_0 就是在各坐标系上都彼此相同的一个普适常数。因此，那四个量 $\rho/\epsilon_0, j_x/\epsilon_0, j_y/\epsilon_0, j_z/\epsilon_0$ 也就会如同一个四元矢那样变换。我们可将其写成 j_μ/ϵ_0 。当坐标系改变时达朗伯算符不会改变，因而 ϕ, A_x, A_y, A_z 那四个量也必须象一个四元矢那样变换——这意味着它们就是一个四元矢的分量。简单地说，

$$A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

是一个四元矢。我们所称之为标势和矢势的，实际上就是同一个物理客体的不同方面。它们有共同的统属，而倘若它们都保持在一起，则这个世界的相对论不变性就很显然了。我们叫 A_μ 为四元势。

在四元矢记法上，(25.21)两方程简单地变成

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}. \quad (25.22)$$

这一方程的物理内容恰好同麦克斯韦方程组一样。但可以把它改写成这么一个优美形式实在令人感到某些喜悦。这个漂亮形式也有其本身意义；它直接表明在洛伦兹变换之下电动力学的不变性。

要记住，式(25.21)之所以能够由麦克斯韦方程组推导而得，只是由于我们加上了规范条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (25.23)$$

这不过申述 $\nabla_\mu A_\mu = 0$ ；这规范条件说明四元矢 A_μ 的散度为零。这一条件称为洛伦兹条件。那很方便，因为是一个不变性条件，从而使麦克斯韦方程组对所有一切参照系都能保持(25.22)那种形式。

§ 25-5 运动电荷的四元势

虽然变换规律已隐含在上述内容中,但现在还是把在一个运动系统上的 ϕ 和 A 用在一个静止系统上的 ϕ 和 A 来表达的那种变换律写下来。既然 $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ 是一个四元矢,这些变换式看来就一定恰好象式(25.1),只是 t 应以 ϕ 代,而 \mathbf{x} 则以 \mathbf{A} 代。于是,

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{\phi - v A_x}{\sqrt{1-v^2}}, & A'_y &= A_y, \\ A'_x &= \frac{A_x - v \phi}{\sqrt{1-v^2}}, & A'_z &= A_z.\end{aligned}\quad (25.24)$$

这假定了该加撇坐标系是以速率 v 在正 x 方向上运动着的,而这速率则是在那不加撇的坐标系上量得的。

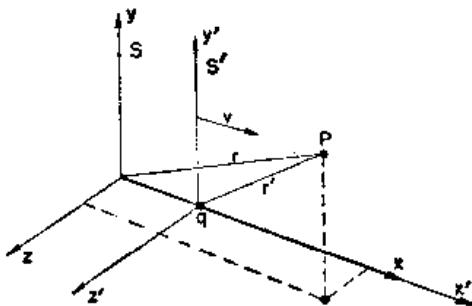


图 25-2 参照系 S' 以速度 v (沿 x 方向) 相对于 S 系而运动。一个在 S' 系的原点上是静止的电荷在 S 系上则处于 $x=vt$ 的地位。 P 点上之势可以在两个参照系的任一个上算出来

我们要来讨论有关四元势概念的用途的一个例子。以速率 v 沿 x 轴运动的电荷 q ,其矢势和标势该会怎么样呢?这一问题在随电荷运动的那个坐标系上很简单,因为在这个系统上电荷是静止的。让我们说,这电荷位于 S' 参照系的原点上,如图 25-2 所示。于是在这个系统上的标势为

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (25.25)$$

(式中 r' 是从 q 至场点间的距离),即在该运动系统上所测到的。当然,矢势 \mathbf{A}' 则为零。

现在要找出在静止坐标系上的势 ϕ 和 \mathbf{A} ,这很直截了当。式(25.24)的反逆关系就是

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\phi' + v A'_x}{\sqrt{1-v^2}}, & A_y &= A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + v \phi'}{\sqrt{1-v^2}}, & A_z &= A'_z.\end{aligned}\quad (25.26)$$

利用由式(25.25)所给出之 ϕ' ,以及 $A'_x = 0$,便可获得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' \sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

这向我们提供在 S 系上所会见到的标势 ϕ ,但可惜是,这是用 S' 的坐标表达的。还可以利用(25.1)将 t' 、 x' 、 y' 和 z' 的各式代入而得到用 t 、 x 、 y 、 z 表达出来的东西。我们得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \quad (25.27)$$

对于 \mathbf{A} 的各个分量,按照同一手续,你也可证明

$$\mathbf{A} = v \phi. \quad (25.28)$$

这些就是曾在二十一章中用别的方法推导而得的相同公式。

§ 25-6 电动力学方程组的不变性

我们已找出了,势 ϕ 和 \mathbf{A} 凑合在一起便形成一个称之为 A_μ 的四元矢,而该方程组——即用那些 j_μ 来确定 A_μ 的完整方程组——可写成如式(25.22)那样,这一方程,协同电荷守

恒律，即式(25.19)，就会给出电磁场的基本定律：

$$\square^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.29)$$

只在页面的小小一点位置上就包括麦克斯韦方程组的全部——优美而又简单。除了它们既优美而又简单外，将方程组这样写出来能否从中学习到什么东西呢？首先，这是否有别于我们过去将所有各种不同分量全都写出来时所得到的那些？能否从这一方程推导出某些过去不能够由电荷和电流表达出势的那些波方程推导出来的东西？答案是明确否定的。我们所做的唯一一件事情就是改变各东西的名称——引用一种新的记法。我们已写下一个方框符号来代表微商，但它仍然意味着不多不少的对时间的二次微商、减去对 x 的二次微商、减去对 y 的二次微商、减去对 z 的二次微商。而 μ 则意味着有四个方程，对于 $\mu=t, x, y, z$ 各有一个。那么，可以将那些方程写成这么一个简单形式的事实又有什么意义呢？按直接从其导出什么东西来的观点看，那确实没有什么意义。然而，也许这些方程的简单性就意味着自然界也具有某种简单性。

让我们来向你证明某种新近才发现的有趣东西：所有一切物理规律都可以包括在一个方程式之中。这方程就是

$$U=0. \quad (25.30)$$

多么简单的一个方程！当然，还需要知道该符号指的是什么。 U 是一个称之为情况“超脱性”的物理量。而我们对于它是会有一个公式的。这里关系到你怎样去计算出该超脱性。你可以取所有已知的物理定律，并把它们都写成一种独特形式。例如，假设你所取的是力学定律 $F=ma$ ，并把它重新写成 $F-ma=0$ 。然后你可以将 $(F-ma)$ ——那当然应该等于零的——叫作力学上的“失调”。其次，你再取这失调的平方并叫它做 U_1 ，这可以称为“力学效应的超脱性”。换句话说，你会取

$$U_1 = (F-ma)^2. \quad (25.31)$$

现在你又写下另一个物理定律，比如说， $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ ，并定义

$$U_2 = \left(\nabla \cdot E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)^2,$$

这或许被你称为“电的高斯超脱性”。你继续再写出 U_3, U_4, \dots ——对每一物理定律就各有一个。

最后，你把来自所有一切有关的分现象的诸多不同超脱性 U_i 都相加起来，而叫它做宇宙的总超脱性 U ；也就是， $U = \sum U_i$ 。这样该伟大定律就是

$$U=0. \quad (25.32)$$

这一“定律”当然意味着所有各别的失调之平方的总和为零，而能使一大堆平方之和为零的唯一办法就是其中每一项都各等于零。

因此，式(25.32)的“优美简单”定律相当于你原来所曾写下来的一整套方程式。因而绝对明显的是，一种不过把复杂性隐藏在符号的定义之内的简单记法并不是真正的简单性。它不过是一种诡计。式(25.32)中所出现的优美——仅从几个方程被隐藏在其中这一事实看来——也不外是诡计而已。当你把整个东西都打开时，你就会回到你原来所在的地方。

然而，把电动力学写成(25.29)那种形式，除了简单之外还有其他一些东西。它的含义会多一些，就象矢量分析理论含有更多的意义一样。电动力学方程组之所以能够写成为洛

伦兹变换的四维几何所设计出来的那一种十分特殊写法——换句话说，作为在四元空间中的一个矢量方程——这一事实，就意味着它在洛伦兹变换之下是不变的。只是由于麦克斯韦方程组在那些变换之下不变，才使得它们能够被写成一个优美形式。

能够将电动力学方程组写成式(25.29)那样的美妙卓越形式并非偶然。正是由于在实验上已发现由麦克斯韦方程组所预言的各种现象在一切惯性系中都相同，相对论才发展起来的。而又是通过研究麦克斯韦方程组的变换性质，才使得洛伦兹发现了他的变换式作为保留那些方程不变的一种变换。

然而，还有另一个要把方程组这样写出来的理由。已经发现——在经过爱因斯坦猜测也许应该是这样之后——所有一切物理定律都是在洛伦兹变换之下保持不变的。这就是相对性原理。因此，如果我们发明一种记法，当写下一个定律时它能够立刻指出该定律是否不变，那么，便能够在试图创立新的理论时保证仅仅写出了与相对论原理相一致的方程式。

在这一特殊记法上麦克斯韦方程组表现出很简单这一事实，并不是什么奇迹，因为这种记法就是在想遍了那些方程之后才发明的。但有意义的物理事态却是：每一种物理规律——介子波的传播或在 β 衰变中中微子的行为，等等——都必须在同一种变换之下具有这种相同的不变性。那么当你呆在一艘以匀速航行的太空飞船中时，所有自然规律就都一同这样作变换，以致没有任何新的现象发生。正是由于相对论原理是自然界中的一项现实，才使得在四维矢量的那种记法上世界的各种方程式都会表现得简单。

在本章中: $c=1$ **§ 26-1 运动电荷的四元势**

在上一章中曾见到势 $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ 是一个四元矢。那时间分量为标势 ϕ , 而三个空间分量则构成矢势 \mathbf{A} 。通过利用洛伦兹变换我们也算出了一个以匀速在一直线上运动的粒子之势。(本来在第二十一章中就已经用另一种方法找到了这些势。) 对于一个在 t 时刻上位置为 $(vt, 0, 0)$ 的点电荷, 其在 (x, y, z) 点上之势为

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}, \\ A_x &= \frac{qv}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}, \\ A_y &= A_z = 0.\end{aligned}\quad (26.1)$$

式(26.1)给出了一个“现”位置(指的是在 t 时刻的位置)为 $x=vt$ 的电荷在位置 (x, y, z) 和时间 t 上之势。注意这些式子是用 $(x-vt)$ 、 y 和 z , 即是用该运动电荷的现行位置 P 的坐标来表达的(见图 26-1)。那实际影响, 我们知道确是以速率 c 行进的, 因而真正有效的东西乃是往后推迟的那个位置 P' 上电荷的行为*。 P' 点位于 $x=vt'$ 上(其中 $t'=t-r'/c$ 是推迟时刻)。但是, 电荷是以匀速在一直线上运动的, 因而在 P' 点与在 P 点上的行为自然就直接地互相联系着了。事实上, 如果作一个附加假设, 即假定那些势仅取决于在推迟时刻

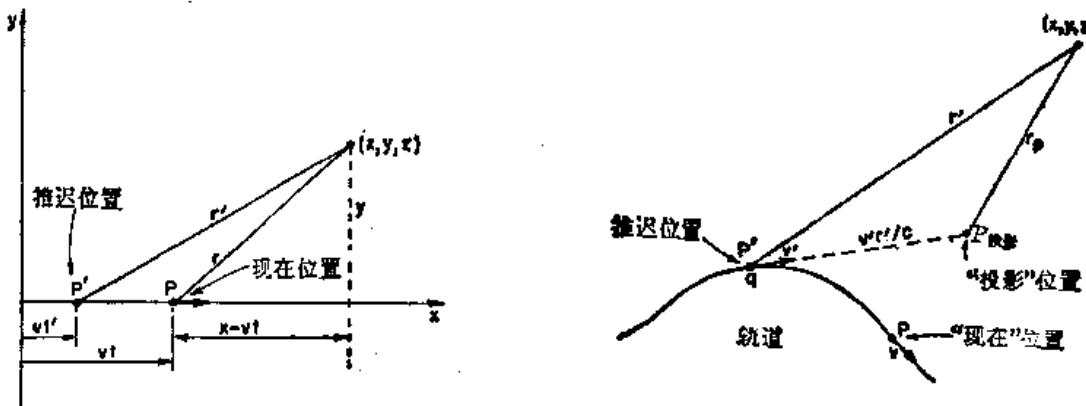


图 26-1 求一个沿 x 轴以恒速 v 运动着的电荷 q 在 P 点上之场。“此刻”在 (x, y, z) 点上之场既可用“现”位置 P , 也可用那个(在 $t'=t-r'/c$ 时刻的)“推迟”位置 P' 来表达

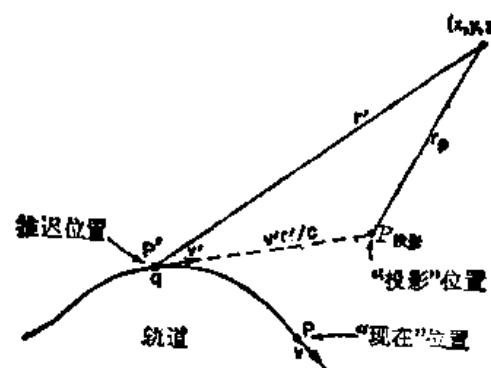


图 26-2 电荷在一任意轨道上运动。在 t 时刻 (x, y, z) 点上之势由在推迟时刻 $t-r'/c$ 的位置 P' 和速度 v' 所确定, 这些势可用该“投影”位置 $P_{\text{投影}}$ 的坐标来表达(在 t 时刻的实际位置则为 P)

* 这里用来指明推迟位置或推迟时刻的那些撇号都不应与上一章中用来指明一个已作了洛伦兹变换的参照系的撇号混淆。

的位置和速度，那么式(26.1)便是以任意方式运动着的电荷之势的完整公式了。方法是这样：假定你有一个以某一任意方式运动、比方其轨道有如图 26-2 所示的电荷，而你试图找出在点 (x, y, z) 上之势。首先，你会找出那推迟位置 P' 以及在该位置上电荷的速度 v' 。然后你设想电荷会在这推迟时间 $(t-t')$ 里继续保持这一速度，以致此时它会出现在一个想象的位置 $P_{\text{影}}$ 上，这可称之为“投影位置”，并应该以速度 v' 到达那里的。（当然，电荷并不是那样干的；它在 t 时刻的确实位置乃是 P 。）于是在 (x, y, z) 点上之势就恰好是一个想象电荷在该投影位置上由式(26.1)所给出的。我们现在要说的是，由于势仅取决于在该推迟时刻电荷所干的，那就不管电荷继续以一恒速度运动还是在 t' 时刻之后——即对在 t 时刻将会出现于点 (x, y, z) 上之势早已确定了之后——改变它的速度，势都将会一样。

你当然知道，一旦有了来自一个以任意方式运动着的电荷之势，便拥有全部电动力学了；能够通过迭加以获得任一电荷分布之势。因此，可以把电动力学的所有现象都加以总结，或者是通过写出麦克斯韦方程组，或者是通过遵照如下的一系列摘要。（如果你有机会登上一个荒岛，你就可以回忆起这些摘要。一切东西都可由此重新建造。当然，你要懂得洛伦兹变换；无论是在一个荒岛上或在其他任何一处你总别忘记它。）

首先， A_μ 是一个四元矢；其次，关于一个静止电荷的库仑势为 $q/4\pi\epsilon_0 r$ ；第三，一个以任一种方式运动着的电荷所产生之势仅取决于在推迟时刻的速度和位置。只要有这三项事实我们就有了一切。由 A_μ 是个四元矢这一事实，便可变换所已知的那个库仑势，以获得一恒定速度之势。然后，通过势仅取决于过去的在该推迟时刻电荷的速度那最后一项声明，我们便可以运用该投影位置游戏而找到各势了。这虽然不是一个处理问题的特别有用方法，但它表明了物理规律能够用许多不同方式加以表达，仍然是挺有趣的。

有时出自一些漫不经心的人们之口会说，电动力学的一切都可以只从洛伦兹变换和库仑定律导出来。当然，那是完全错误的。首先，必须假定存在一个标势和一个矢势，它们互相结合而形成一个四元矢。这里，就告诉我们如何对势作变换。然后，为什么只有那推迟时刻的影响才算有效的呢？若是这样提问就更好：为什么势仅取决于位置和速度，而与诸如加速度就毫无关系？而场 B 和 E 则确实与加速度有关。如果你试图对于这些场也使用同一种论证，你就会讲，它们也仅取决于推迟时刻上的位置和速度。可是这么一来，那来自正在加速着的电荷之场就会如同来自一个在该投影位置上电荷之场一样——那是错误的。场不仅取决于沿运动路线上电荷的位置和速度，而且也取决于其加速度。所以在这个有关无论什么东西都可从洛伦兹变换推导出来的伟大说法中还有几个附加的默认假设。（每当你看到一个能从少数几个假设便导出一大堆东西来的风卷残云式的说法时，你总会发现它是错误的。如果你足够小心地加以思考的话，就会觉得其中往往有许多远非明显的隐含着的假设。）

§ 26-2 恒速点电荷之场

现在已有了来自以恒速运动着的电荷之势，我们——为了实用原因——该来找出其场了。有许多其中带电粒子是以匀速运动的情况——例如，行经一云室的宇宙射线，或甚至在一根导线里的慢动电子。因此，让我们来看看，至少是对于任一速率——甚至对于接近光速的速率——场实际上表现出什么样子，只要假定其中没有加速度。这是一个有意义的问题。

通过常用法则便可由势得到场:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

首先, 试求 E_x ,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

但 A_x 等于零; 所以我们就对式(26.1)中的 ϕ 取微分, 便得

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.2)$$

同理, 对于 E_y , 则得

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.3)$$

要求得 x 分量须多做一些工作. ϕ 的微商此时较为复杂而且 A_z 又不等于零. 首先,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.4)$$

然后, 对 A_z 取 t 微分, 可得到

$$-\frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.5)$$

而且最后再取其和, 则有

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.6)$$

过一会儿我们将要来看看 \mathbf{E} 之物理情况; 但让我们先来求出 \mathbf{B} . 对于其 z 分量,

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

由于 A_y 为零, 就只须得到一个微商. 然而, 要注意 A_x 不过是 $v\phi$, 而 $v\phi$ 的 $\partial/\partial y$ 则恰恰是 $-vE_y$. 因此

$$B_z = vE_y. \quad (26.7)$$

同理,

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = +v \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

也即

$$B_y = -vE_x. \quad (26.8)$$

最后, B_x 为零, 因为 A_y 和 A_z 两者都是零. 可以将磁场简单写成

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (26.9)$$

现在来看看场的形态象个什么样子. 我们试图把电荷在其现位置周围各不同位置上之场描绘出来. 电场的影响, 在某种意义上, 确实来自该推迟位置; 但由于运动是严格规定的, 该推迟位置便可以由现位置来唯一地给出. 对于均匀速度来说, 更妙的是将场同现行位置联系起来, 因为在点 (x, y, z) 上的各个场分量都仅取决于 $(x-vt), y$ 和 z ——那是从现位置到达 (x, y, z) 点的位移 \mathbf{r}_P 的各分量(见图 26-3).

首先考虑一个 $z=0$ 之点. 那么 \mathbf{E} 就只有 x 和 y 分量. 根据式(26.3)和(26.6), 这两分量的比率恰好等于该位移的 x 和 y 两分量的比率. 这意思是说, \mathbf{E} 和 \mathbf{r}_P 指同一方向,

請勿用於
盈利用目的

如图 26-3 所示, 由于 E_r 也正比于 z , 所以这个结果在三维中适用就是明显的了。总之, 电场乃从电荷沿径向发出的, 正如对一个静止电荷所干的那样。当然, 这个场并非完全与静止电荷的相同, 那是由于所有附加因数 $(1-v^2)$ 所致。但是我们还可以证明一件相当有趣的事情, 即差别恰恰如同你是在用一个其中 x 轴的尺寸预先受到 $\sqrt{1-v^2}$ 这个因数所压扁的奇特坐标系所描绘库仑场该会得到的那样。如果你这样做, 场线就将在该电荷前后散开, 而在侧向周围则挤紧, 如图 26-4 所示。

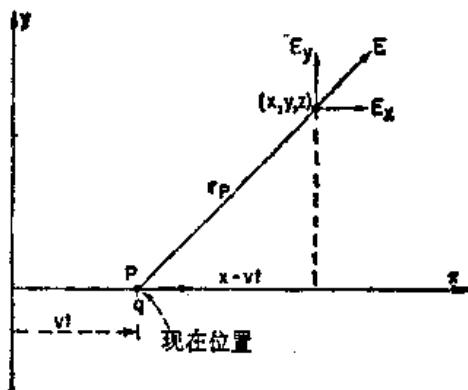


图 26-3 一个以恒速运动着的电荷, 其电场从电荷的“现”位置径向地指出

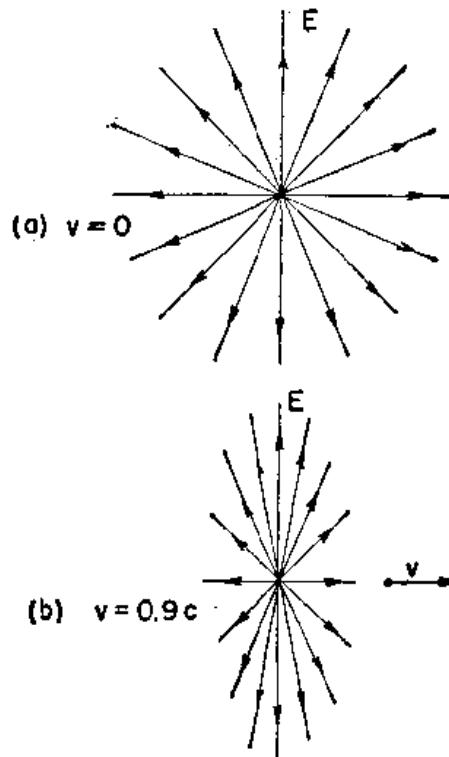


图 26-4 一个以恒速 $v=0.9c$ 运动的电荷之电场 [图(b)], 与一静止电荷之电场[图(a)]作比较

如果将 E 的强度同场线密度按照惯常办法互相联系起来, 就可以看到, 在侧向上有一个较强之场, 而在前后则有一较弱之场, 恰如那些式子所指出的。首先, 若在垂直于运动路线的方向上观察场强, 也就是说, 在 $(x-vt)=0$ 那一处, 从电荷至场点的距离为 $\sqrt{y^2+z^2}$, 这里总场强就是 $\sqrt{E_y^2+E_z^2}$, 即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{y^2+z^2}. \quad (26.10)$$

场与距离的平方成反比——恰好象库仑场, 所不同的是受一个总会大于 1 的恒定附加因数 $1/\sqrt{1-v^2}$ 所增强。因此, 在一运动电荷的侧向上, 电场比从库仑定律所得到的要强。实际上, 侧向场比库仑场增大的倍数刚好等于该粒子的能量与其静质量的比率。

在电荷的前面(与后面), y 和 z 都是零, 因而

$$E = E_x = \frac{q(1-v^2)}{4\pi\epsilon_0(x-vt)^2}. \quad (26.11)$$

场又再反比于与电荷距离的平方, 但现在却被减弱了一个因数 $(1-v^2)$, 这与场线的图景相符。如果 v/c 值小, 则 v^2/c^2 更小, 因而 $(1-v^2)$ 这一因数的影响就很小; 我们便回到库仑定律上来。但如果粒子的运动速度十分接近于光速, 则在前后方向上之场将会大大削弱, 而在侧向上之场则将大大增强。

上面有关运动电荷的电场结果可以这样来描述: 假定你把一个静止电荷之场在一张纸上描绘出来, 然后使该幅图画以速率 v 奔跑。当然, 此时整幅图画会受到洛伦兹收缩; 也就是说, 在纸面上的那些碳粒会出现在不同之处。令人惊异的是, 当该页纸在你旁边飞过时,

你所看到的图画仍然代表该点电荷的场线。这一收缩会把那些场线在侧向上互相挤紧，而在前后方向则彼此散开，刚好是按照那一适当方式所得出的正确线密度。我们以前就曾强调过，场线是不真实的，只不过是一种表示场的方式。然而，这里场线却几乎象是真实的了。在这一特殊情况下，如果你错误地认为场线不晓得怎样总是实在存在于空间里，并对之作了变换，那你倒会获得该正确之场。然而，这也丝毫不会使场线更加真实。要对你自己提醒场线并不是真实的，你所应该做的事情就是去想象由一个电荷和一块磁铁所共同产生的那些电场；当磁铁运动时，新的电场会产生，从而破坏了该美丽图景。因此，这一收缩图象的巧妙构思并非普遍有效。然而，它毕竟不失为一种方便手段以记住来自一个快速运动电荷之场象个什么样子。

磁场就是 $v \times E$ [根据式(26.9)]。如果你把速度矢量又乘到一个径向的 E 场上去，你便会得到一个环绕着运动路线的 B ，如图 26-5 所示。如果把那些 c 都放回去，你便将看出，那是与过去处理低速电荷时所得的结果相同的。为了看清应该在哪里放进 c 去的一个好办法是反过来参考该力律：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

你看速度乘上磁场才具有与电场相同的量纲。因此，式(26.9)的右边就应该有一个因数 $1/c^2$ ：

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (26.12)$$

对于一个低速运动电荷 ($v \ll c$) 来说，我们可取库仑场作为 E ；这时

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (26.13)$$

上式恰好相当于以前曾在 § 14-7 节中对于电流的磁场所得到的那些式。

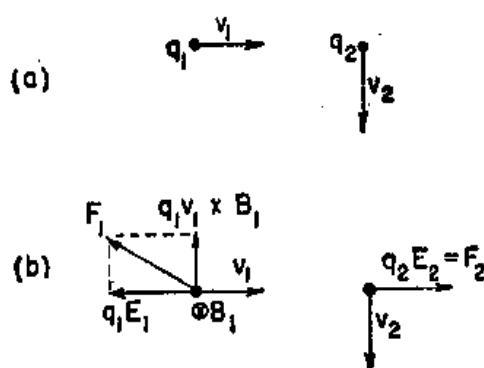


图 26-6 施于两个运动电荷上之力不总是相等而相反。看来“作用”不等于“反作用”
26-6(b)。施于 q_1 与 q_2 上的电力彼此大小相等方向相反。然而，却有一侧向(磁)力作用于 q_1 上，而没有任何侧向力作用于 q_2 上。是否作用不等于反作用呢？我们想把这一问题留给你们去思索。

我们愿意顺便指出某一种你会感兴趣而加以思考的东西。（以后还将会回来再进行讨论。）试想象两电子具有互成直角的速度，使得其中之一横穿过另一个的路线，但却在其前面，从而彼此不会发生碰撞。在某一时刻，它们的相对位置将如图 26-6(a)所示。现在试考察由 q_2 作用于 q_1 上之力，以及相反情况。施于 q_2 上的只有来自 q_1 的电力，因为 q_1 在其运动路线上不会造成磁场。然而，施于 q_1 上的又是那个电力，但除此之外却还有磁力，因为 q_1 是在由 q_2 所造成的 B 场中运动着的。这些力示如图

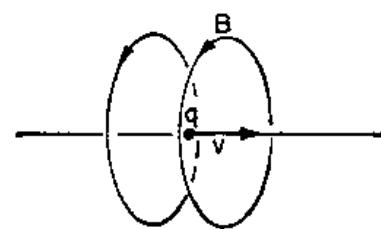


图 26-5 在一运动电荷附近的磁场为 $v \times E$ (试与图 26-4 作比较)

§ 26-3 场的相对论变换

在上一节中我们从经过变换后的势算出电场和磁场。当然，场仍很重要，不管以前曾经

对势所具有的物理意义及其真实性给出的那么一切论证，场毕竟也是真实的。对于许多目的来说，如果你已经知道了在某一“静止”系统上之场，而又有办法去算出在一运动系统中之场，那该十分方便。我们已有了对于 ϕ 和 A 的变换规律，因为 A 是一个四元矢，现在来弄清楚有关 E 和 B 的变换律。已知在一个参照系上之 E 和 B ，另一个从旁边跑过的参照系中它们看来会象些什么呢？那该是一个便于得到的变换式。本来我们始终可以通过势而再算出场的，但如果能直接将场变换，有时仍挺有用。现在就来看这是怎么回事。

如何能找到场的变换律呢？我们已知道 ϕ 和 A 的变换律，并已懂得了场是如何由 ϕ 和 A 给出的——要找出 B 和 E 的变换式就应该是容易的了。（你也许会想到，对于每一矢量就该有某种会使之成为一个四元矢的东西，因而对于 E 来说，就一定有另一种可用来作为其第四分量的东西。而对于 B 也是如此。但事实却并非这样。与你该指望的很不相同。）作为开始，让我们仅仅考虑磁场 B ，那当然就是 $\nabla \times A$ 。现在知道，具有 x, y, z 各分量的矢势只是某种东西的一部分；此外还有一个 t 分量。而且，对于象 ∇ 一类的微商，除了 x, y, z 各部分外，也还有对于 t 的微商。因此，就来试算出若把“ y ”代以“ t ”，或把“ z ”代以“ t ”，或如此这般，所该发生的事态吧。

首先，注意把 $\nabla \times A$ 的各分量写出时，其中各项的形式是

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (26.14)$$

x 分量等于仅含有 y 与 z 分量的一对项。假设叫这个微商与分量的结合体为某一“ zy 件”，并给它一个速写名字 F_{yz} 。我们的意思只是

$$F_{yz} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (26.15)$$

同样， B_y 会等于这一类“东西”，但这回它却是一个“ xz 件”了。而 B_z 当然就是该相应的“ yx 件”。于是便有

$$B_x = F_{yz}, \quad B_y = F_{xz}, \quad B_z = F_{xy}. \quad (26.16)$$

现在，若我们也试图造作出一些象 F_{xt} 和 F_{tz} 那样的“ t ”型件（由于自然界应该对 x, y, z 和 t 都一视同仁，并且都对称），该会有什么情况发生呢？例如， F_{tz} 是什么？当然，它就是

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

但要记住 $A_t = \phi$ ，因而它也等于

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

对此你以前就已见过。那是 E 之 z 分量。噢，几乎是了——但还有一个错误符号。你忘记了在那四维陡度中 t 微商与 x, y, z 各微商之间带有相反符号。因此，实际上我们应该取下式作为更加一致的有关 F_{tz} 的推广：

$$F_{tz} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (26.17)$$

这么一来，它就刚好等于 $-E_z$ 。也可再尝试 F_{tx} 和 F_{ty} ，我们发现这三种可能性总共提供

$$F_{tx} = -E_x, \quad F_{ty} = -E_y, \quad F_{tz} = -E_z. \quad (26.18)$$

如果两个下角标都是 t ，又将出现什么情况呢？或者，对于此事来说，若两者都是 x 呢？我们会得到一些象如下的东西：

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t} = 0,$$

和 $F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$

即这些都不外给出零值。

于是，就有六个这种 F 件。还有六个你可以通过倒转下标而得的，但它们实际上不会给出任何新的东西，因为

$$F_{xy} = -F_{yx},$$

如此这般。所以，在由四个下标取对的十六种可能组合中，仅得到六个不同的物理客体；而它们就是 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的分量。

要表达出 F 的一个普遍项，我们将采用那些普遍下角标 μ 和 ν ，其中每一个各代表 0、1、2 或 3——在寻常四元矢记法中即 t 、 x 、 y 和 z 。而且，一切都符合四元矢记法，如果对 $F_{\mu\nu}$ 作出如下定义的话：

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (26.19)$$

要记住 $\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$ 和 $A_\mu = (A_t, A_x, A_y, A_z)$ 。

我们所已得出来的是：有六个在自然界中互相统属在一起的量——它们是同一件东西的不同方面。在低速运动世界里（那里不须担心光速）被认为是彼此分开的两矢量的电场和磁场，在四元空间里却并不是矢量。它们是一种新“东西”的各部分。物理“场”实际上应该具有六个分量的客体 $F_{\mu\nu}$ 。这就是在相对论中我们必须看待它的方式。现在把有关 $F_{\mu\nu}$ 的结果概括成表 26-1。

你看到这里我们所做的就是推广叉积。要从旋度的变换性质与两矢量——寻常的三维矢量 \mathbf{A} 和已知道其行为也象一矢量的那个旋度算符——的变换性质相同这一事实出发。考察一下在三维中一个寻常的叉积，比如一个粒子的角动量。当一物体在一平面上运动时， $(xv_y - yv_x)$ 这个量是重要的。对于在三维中的运动，则有三个这样的重要量，称之为角动量：

$$L_{xx} = m(xv_n - yv_r), \quad L_{yy} = m(yv_n - zv_r), \quad L_{zz} = m(zv_n - xv_r)$$

表 26-1 $F_{\mu\nu}$ 的各分量

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	
$F_{\mu\mu} = 0$	
$F_{xy} = -B_z, \quad F_{xt} = E_x$	
$F_{yz} = -B_x, \quad F_{yt} = E_y$	
$F_{zx} = -B_y, \quad F_{zt} = E_z$	

$$L_{xx} = m(xv_n - yv_r), \quad L_{yy} = m(yv_n - zv_r), \quad L_{zz} = m(zv_n - xv_r)$$

即便在三维中，也可能有不能用矢量来代表的有关两矢量的组合。假设取两矢量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ，并作成各种可能的分量组合，象 $a_x b_x, a_x b_y, a_x b_z, a_y b_x, a_y b_y, a_y b_z, a_z b_x, a_z b_y, a_z b_z$ 等等。就该有九个可能的量：

$$\begin{array}{lll} a_x b_x, & a_x b_y, & a_x b_z, \\ a_y b_x, & a_y b_y, & a_y b_z, \\ a_z b_x, & a_z b_y, & a_z b_z. \end{array}$$

我们也许可以叫这些量为 T_{ij} 。

如果现在来到一个已经转动（比如说绕 z 轴转动）了的坐标系上， \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的各分量就会改变。在这一新参照系上，比如 a_x 会由下式代替：

$$a'_x = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta,$$

而 b_y 则由下式代替：

$$b'_y = b_y \cos \theta - b_x \sin \theta.$$

对于其他各分量也与此相仿。当然，那九个由我们所发明的有关乘积 T_{ij} 的分量也全都改变了。例如， $T_{xy} = a_x b_y$ 就会变成

$$T'_{xy} = a_x b_y (\cos^2 \theta) - a_x b_x (\cos \theta \sin \theta) + a_y b_y (\sin \theta \cos \theta) - a_y b_x (\sin^2 \theta),$$

$$\text{或 } T'_{xy} = T_{xy} \cos^2 \theta - T_{xz} \cos \theta \sin \theta + T_{yz} \sin \theta \cos \theta - T_{xz} \sin^2 \theta.$$

T'_{ij} 的每一分量就是 T_{ij} 的诸分量的一个线性组合。

因此发现，不仅能够有三个分量变换得象 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的那种“矢积”，而且也能够——人为地——造成两矢量的另一种“乘积” T_{ij} ，其中有九个在转动之下，也可以求得按一组复杂法则而变换着的分量。这么一件要有两个下标、而不是单一下标，才能加以描述的东西，叫做张量。这是一个“二阶”张量，因而你也可以用三个矢量来做这一游戏，从而获得一个三阶张量——或用四个矢量而获得一个四阶张量，如此等等。第一阶张量就是矢量。

所有这一切的要点在于，电磁量 $F_{\mu\nu}$ 也是一个二阶张量，因为它带有两个下标。然而，它是一个四维中的张量。是按一种即将算出来的独特方式变换的——也就恰恰是按两矢量之积那种方式变换。对于 $F_{\mu\nu}$ ，如果你掉转该两下标，则 $F_{\mu\nu}$ 碰巧会改变符号，那是一种特殊情况——它是一个反对称张量。所以，电场和磁场两者都是四维中一个反对称张量的部分。

你们已经走过很长路程了，是否还记得好久以前我们对速度指的是什么所下定义的时候？现在就已在谈论“四维中一个反对称的二阶张量”了。

眼前，我们得要来找出关于 $F_{\mu\nu}$ 的变换律。这完全不难得出；只是有点麻烦罢了——无需动脑筋，但要做不少工作。我们所需要的是关于 $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ 的洛伦兹变换。既然 ∇_μ 不过是矢量的一个特殊情况，我们就要对一普遍反对称矢量组合式，即可称之为 $G_{\mu\nu}$ 的，进行计算：

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \quad (26.20)$$

（对于我们的目的来说， a_μ 最终将由 ∇_μ 代替而 b_μ 则由 A_μ 代替。） a_μ 和 b_μ 的各分量分别按照洛伦兹公式变换，它们是

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_x &= \frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (26.21)$$

$$\begin{aligned} a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y, \\ a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z. \end{aligned}$$

现在来变换 $G_{\mu\nu}$ 的分量。要从 G_{tx} 开始：

$$G'_{tx} = a'_t b'_x - a'_x b'_t = \left(\frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \left(\frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) = a_t b_x - a_x b_t.$$

但这恰好就是 G_{tx} ；因而有这么一个简单结果：

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

我们将再多做一个。

$$G'_{ty} = \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

因而得到

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - vG_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

当然按相同的方法也可以得到

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - vG_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

很清楚，剩下的将会怎么样了。让我们对所有这六个项都制成一表；只是此刻也可用 $F_{\mu\nu}$ 来写出罢了：

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{sy} &= \frac{F_{sy} - vF_{ty}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - vF_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - vF_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{xz} &= \frac{F_{xz} - vF_{xt}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (26.22)$$

当然，仍旧有 $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ 和 $F'_{\mu\mu} = 0$ 。

所以就有了电场和磁场的变换式。我们所必须做的一切就是去查表 26-1 以找出在用 $F_{\mu\nu}$ 的堂皇记法中改用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 时会变成什么。那不过是如何代入的事情。为了使你能够用寻常符号来看出它是怎样表现的，我们将在表 26-2 中重新写出关于场分量的变换式。

表 26-2 电场和磁场的洛伦兹变换(注意: $c=1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$

表 26-3 场变换的另一种形式(注意: $c=1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_z}{\sqrt{1-v^2}}$

表 26-2 中的那些式子告诉我们：如果从一个惯性参照系到另一个上去， \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 将会怎样变化。若已知道在一个系上的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，则可找出在另一个以速率 v 在其旁边走过的参照系中它们会变成什么。

如果注意到，由于 v 是在 ω 方向上，因而所有含有 v 的项就都是叉积 $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的

简单些。这样，就得到表 26-4 中的那些式子。（我们也已把那些 c 都放回去了，使得以后要回来参考时更为方便。）

表 26-4 E 和 B 的洛伦兹变换的另一种形式

$E'_\parallel = E_\parallel$	$B'_\parallel = B_\parallel$
$E_\perp = \frac{(E + v \times B)_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$B_\perp = \frac{\left(B - \frac{v \times E}{c^2}\right)_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

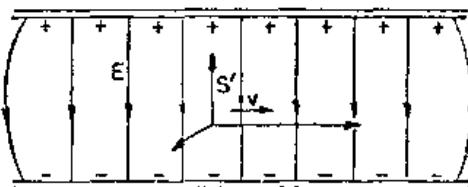


图 26-7 坐标系 S' 正在穿过一个静电场而运动

这些场变换式为我们提供如何去解一些曾经解过的问题——比如求一运动的点电荷之场——的另一种方法。我们以前就曾通过对势取微分而算出了场。但现在该会通过变换库仑场而做到这一点了。若有一个在 S 参照系上静止不动的点电荷，则那里只有简单的径向场。在 S' 参照系上，将会看到一个以速度 v 运动着的点电荷，如果 S' 参照系是以速率 $v = -u$ 经过 S 参照系的话。将让你们去证明，26-3 和 26-4 两表会给出与 § 26-2 节中我们曾经得到的相同的电场和磁场。

如果经由任一固定的电荷系统奔跑而过，则表 26-2 上的变换式对于我们所能看到的东西便会提供一个有趣而又简单的答案。例如，假定要知道在我们的 S' 参照系上之场，倘若我们正在如图 26-7 所示的那个电容器两板之间运动着的话。（当然，如果说是一个充了电的电容器经过我们而运动，那也是一样。）我们所看到的到底是什么呢？在这一种情况下变换是轻而易举的，因为在那原来系统上， B 场为零。首先，假定我们的运动是垂直于 E 的；则将看到一个仍然是完全横向的 $E' = E/\sqrt{1 - v^2}$ 。此外，我们还将看到一个磁场 $B' = -v \times E'/c^2$ （注意 B' 的表达式 v/c^2 与 v 的关系）。由于相对论性 E' 而非用 E 来下

請勿用於
盈利之目的

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (26.26)$$

似乎应该是：若我们希望那些微商会造成一个四元矢，则秘诀在于对 d/dt 乘以 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。

于是，我们的第二个猜测是：

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} (p_\mu) \quad (26.27)$$

该是一个四元矢。但 v 究竟是什么？它是粒子的速度——而并非坐标系的速度！那么，由下式定义的量 f_μ ，

$$f_\mu = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (26.28)$$

就是力在四维中的推广——我们可叫它为“四元力”。它的确是一个四元矢，而其空间分量并非 \mathbf{F} 的分量，而是 $\mathbf{F}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的分量。

问题在于——为什么 f_μ 是一个四元矢呢？对该因数 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 稍微有点理解该是不错的。由于现在它已出现过两次，对 d/dt 总可以用那同一因数来作妥善处理看出个所以然来，就该是时候了。答案有如下述：当我们就某一函数 ω 取其 t 微商时，是在自变量 t 的一个小间隔 Δt 中计算 ω 的增量 $\Delta \omega$ 。但在另一个参照系上，这间隔或许会相当于 t' 和 x' 两者中的变化，因而如果我们仅变化 t' ，则在 ω 中的变化便将不同了。对于取微分来说，就必须找出一种会量度空时“间隔”的变量，这才对一切坐标系相同。当一粒子在四维空间中“运动”时，会有各种变化： $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。我们能否从其中构成一个不变的间隔呢？噢，它们就是该四元矢 $\omega_\mu = (ct, x, y, z)$ 的各分量，因而如果由下式定义一个量 Δs ，

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2} \Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2) \quad (26.29)$$

——那是一个四维点积——则我们有一个可用来量度四维间隔的优良四元标量了。从 Δs ——或其极限 ds ——我们便能定义一个参数 $s = \int ds$ 来。而对于 s 的微商，即 d/ds ，就是一种优良的四维算符，因为它对于洛伦兹变换来说是不变的。

对一个运动粒子，若要将 ds 和 dt 联系起来倒很容易。在一个正在运动的点粒子中，

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt, \quad (26.30)$$

因而

$$ds = \sqrt{(dt^2/c^2)(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (26.31)$$

于是，这算符

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt}$$

就是一个不变算符。若用它来对任一四元矢进行运算，则可以得到另一个四元矢。例如，若把它运算于 (ct, x, y, z) 上，可获得该四元速度 u_μ ：

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu.$$

现在我们明白，为什么这个因数 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 总会把事情安排妥当。

这个对洛伦兹变换不变的变量 s 是一个有用的物理量。它称为沿一粒子路线的“原时”，因为 ds 总是在一个跟着该粒子跑的参照系上在任一特定时刻的一个时间间隔。（这时，

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, 因而 $ds = dt$.) 如果你能够想象出某一个其运行时率不会与加速度有关的“钟”, 那么这样一个伴随着该粒子的钟就将指示出时间 s 了.

现在我们可以回去把(经过了爱因斯坦修正的)牛顿定律写成那个简洁形式:

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu, \quad (26.32)$$

其中 f_μ 就是式(26.28)中所给出的. 并且, 动量 p_μ 还可以写成

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds}, \quad (26.33)$$

式中坐标 $x_\mu = (ct, x, y, z)$, 现在就正在描述该粒子的轨道. 最后, 该四维记法为我们提供这么一个十分简单的运动方程:

$$f_\mu = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}, \quad (26.34)$$

这使人回想起 $F = ma$. 重要的是, 要注意式(26.34)与 $F = ma$ 不同, 因为这个四元矢公式(26.34)已含有在高速中不同于牛顿定律的那种相对论力学了. 也不象麦克斯韦方程组的那种情况, 那里我们能够把各个方程都重新写成相对论形式而不致丝毫改变其意义——只不过是一种记法上的改变而已.

现在让我们回到式(26.24)并看看怎样才能将其右边用四元矢记法写出. 那三个分量——当各除以 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 时——就是 f_μ 的分量, 因而

$$f_x = \frac{q(E + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q \left[\frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v_y B_z - v_z B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_z B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]. \quad (26.35)$$

现在, 我们必须把所有的量都用它们的相对论记法来表达. 首先, $c/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 和 $v_y/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 以及 $v_z/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 就是该四元速度 u_μ 的 t , y , 和 z 分量. E 和 B 的分量则是该二阶张量场 $F_{\mu\nu}$ 的分量. 当回到表 26-1 上去查查与 E_x , B_x 和 B_y 相对应的那些 $F_{\mu\nu}$ 时, 便可以得到

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}),$$

这看来开始有趣了. 每项都有一个下标 x , 那是合理的, 因为我们正在寻找一个 x 分量嘛. 然后, 所有其他下标则是成对地出现: tt , yy , zz ——只除了 xx 那一项不见之外. 所以我们索性就把它塞进去, 并写成

$$f_x = q(u_t F_{et} - u_x F_{xx} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}). \quad (26.36)$$

这并未改变什么, 因为 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的, 从而 F_{xx} 等于零. 之所以要把 xx 项放进去就是为了使我们能够将式(26.36)写成一个速写形式

$$f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.37)$$

这个式与式(26.36)是一样的, 如果作出这样一个规则, 即每当任一个下标出现两次时(比如这里的 ν), 你就得自动地象对于标积那样把那些项都相加起来, 应用那同一符号惯例.

你可以相信, 式(26.37)对于 $\mu=y$ 或 $\mu=z$ 也同样适用, 但对于 $\mu=t$ 又是怎么回事呢? 作为一种游戏, 让我们来看看它是如何申述的:

$$f_t = q(u_t F_{tt} - u_x F_{tx} - u_y F_{ty} - u_z F_{tz}).$$

现在得要将其翻回成那些 E 和 B 了, 我们得出

$$f_t = q \left(0 + \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_x + \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_y + \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_z \right), \quad (26.38)$$

或

$$f_t = \frac{q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

但从式(26.28), f_t 假定是

$$\frac{F \cdot v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

既然 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ 为零, 这就与式(26.38)相同了. 所以, 一切都很顺利.

概括起来, 运动方程可以写成这么一个优美形式:

$$m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.39)$$

方程式可以按照这种写法虽然很巧妙, 但这一种形式却并非特别有用. 要求解粒子运动的问题, 通过采用那些原来方程(26.24)往往还更方便, 而那是我们将要经常做的.

场能量和场动量

§ 27-1 局域守恒

很明显，实物的能量并不守恒。当一物体辐射出光时它就丧失了能量。然而，这部分损失的能量可以用其他方式来描述，比如说用光的方式。因此，要是没有考虑到与光、或普遍地说，与电磁场联系着的能量，那么能量守恒的理论便不算完整了。我们现在要来讨论场的能量守恒和动量守恒。肯定不能只谈论其中之一而不涉及其他，因为在相对论中它们是同一个四元矢的不同方面。

早在第一卷中，就曾讨论过能量守恒；那时只是说世界上的总能量恒定不变。现在要将能量守恒律的概念在一个重要方面加以推广——那是说明能量是怎样守恒的某些细节方面。这一新的定律将申述：如果能量离开一个区域，那是由于它通过了该区域的边界而流出去的。这是比起不加这样一种限制的能量守恒律稍微强一点的一个规律。

为看清这一说法的含义，让我们先来考察一下电荷守恒律是怎样工作的。过去我们对电荷守恒是这样描写的：有一电流密度 \mathbf{j} 和一电荷密度 ρ ，当某处的电荷减少时就必然会有电荷从该处流出。我们把它称为电荷守恒律。这个守恒律的数学形式是

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (27.1)$$

上述定律有这么一个后果，即在世界上的总电荷总保持恒定不变——永远不会有任何电荷的净得或净失。然而，总电荷本来可以按另一种方式守恒的。假定在点(1)附近有某一电荷 Q_1 ，在隔某一段距离的点(2)附近则没有什么电荷（图 27-1）。现在假定：随着时间的推移，电荷 Q_1 会逐渐消失，而与此同时却有某些电荷 Q_2 在点(2)处出现，并且以这样一种方式进行，即使得在每一时刻 Q_1 与 Q_2 之和总是一常数。换句话说，在任一中间态上 Q_1 所丧失之量应加在 Q_2 之上。那么世界上的总电荷才会守恒。这是一种“世界规模”的守恒，而不是我们将称之为“局域”性的守恒，因为要使电荷从点(1)转移至点(2)并不要求在两点之间的空间里任何一处出现。就局部来说，该电荷只不过是“丧失”罢了。

这一种“世界规模”的守恒律在相对论中会碰到困难。在两个遥远点上，“同时”这一概念对于不同参照系是彼此不相等同的东西。两事件在某一参照系上是同时的，但对于从旁运动而过的另一个参照系来说则不是同时的了。在上述那种“世界规模”的守恒律中，要求从 Q_1 上丧失的电荷应该同时出现在 Q_2 上。否则就会出现电荷并不守恒的某些时刻。如不将其造成一个“局域”守恒律，似乎就没有办法来使电荷守恒律在相对论上不变。事实上，洛伦兹

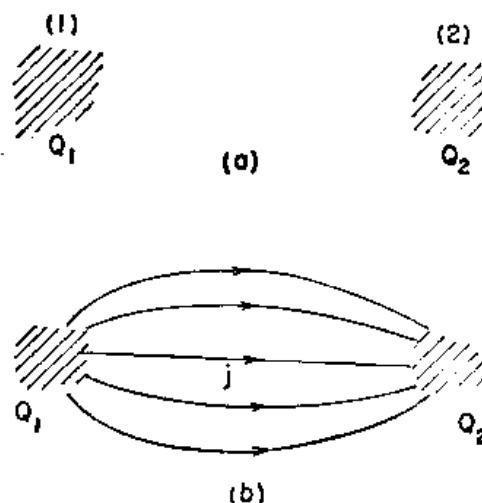


图 27-1 两种使电荷守恒的方式：(a) $Q_1 + Q_2$ 为一恒量；(b) $dQ_1/dt = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da = -dQ_2/dt$

的相对论不变性这一要求，似乎以令人惊异的方式限制了可能有的自然规律。比方，在现代量子场论中，人们往往希望通过允许我们所称之为一种“非局域”性互作用——这里的某件东西会直接影响到那里的某件东西——来改变理论，但却陷入了相对论性原理上的困难。

“局域”守恒还含有另一种概念。它申述电荷之所以能够从一处移至另一处，在它们之间的空间里必须有某一事件发生。要描述该定律，我们不仅需要电荷密度 ρ ，而且也需要另一种量，即 \mathbf{j} ，那是会给出越过一个面的电荷之流率的一个矢量。于是这个流量就同电荷密度的变率通过式(27.1)而互相联系起来。这是守恒律中更为极端的一种。它申述电荷按某一特殊形式守恒——“局域”地守恒。

事实证明，能量守恒是一种局域过程。在某一给定空间区域里不但要有一能量密度，而且也有一个代表着穿越一表面的能流率的矢量。例如，当有一个光源向外辐射时，我们能够找出从该源流出来的光能。如果设想某一个包围着该光源的数学面，那么从这个面内部所损失的能量就会等于穿越该面而流出去的能量。

§ 27-2 能量守恒与电磁学

现在我们要定量地写出关于电磁学的能量守恒律。为此，就必须描述在空间里任一体积元中能量及其能流率各有若干。假定我们首先只想到电磁场的能量。因而将令 u 代表场的能量密度(也就是在空间里每单位体积的能量)，并令矢量 \mathbf{S} 代表场之能通量密度(即每单位时间穿越垂直于流动方向的单位面积的能流)。于是，同电荷守恒律，即式(27.1)完全相仿，我们可以把场能量的“局域”守恒律写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (27.2)$$

当然，这一定律并非普遍正确；说场能量守恒是不对的。假设你在一个黑暗房间里拨动照明电钮。忽然之间整个房间里都充满了光，尽管在此之前一点光也没有。式(27.2)并非一个完全的守恒律，因为场能量单独来说本不会守恒的，只有世界上的总能量——也包括实物方面的能量——才会守恒。如果有一些功是由实物方面作于场或由场作于实物上，则场能量将会发生改变。

可是，若在该有关体积里存在实物，则我们知道它将拥有若干能量：每一粒子具有能量 $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 。实物方面的总能量不过是所有这些粒子的能量之和，而穿过某一个面的这种能流就不过是那些穿越这个面的粒子的能量之和。现在我们只要谈论有关电磁场方面的能量。因此就必须写下这样一个方程，它会道出在某一指定体积里的总场能的减少，或者是由于场能从该体积里流出，或者是由于场把能量丢失于实物上(或从实物处获得能量，那不过是一个负损失)。在一个体积 V 中的场能是

$$\int_V u dV,$$

而其减少率则是这一积分的负时间微商。从体积 V 流出来的场能等于 \mathbf{S} 的垂直分量遍及包围着 V 的 Σ 面的积分，

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da.$$

因此，

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da + (\text{在 } V \text{ 内部作于实物上之功}). \quad (27.3)$$

我们以前就曾见到，场作用于每单位体积实物上之功率为 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 。[施于一粒子上之力为 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，因而作功的时率就是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ 。若每单位体积里共有 N 个粒子，则每单位体积的作功时率为 $Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ ，但 $Nq\mathbf{v} = \mathbf{j}$] 所以 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 这个量应该等于每单位时间每单位体积由场所损失的能量。于是式(27.3)便变成

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (27.4)$$

这是关于场的能量守恒律。如果能够把第二项变成一个体积积分，就可以将它转变成一个象式(27.2)那样的微分方程。这是容易用高斯定理来做到的。 \mathbf{S} 的垂直分量的面积分等于它的散度遍及该内部体积的积分。因此，式(27.3)就相当于

$$-\int_V \frac{du}{dt} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV,$$

其中我们已把第一项中的时间微商置于该积分之内。既然这一方程对于任一体积都适用，便可以移开那些积分而得到关于电磁场能量的方程式：

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (27.5)$$

现在，这一方程对我们毫无用处，除非已知道 u 和 \mathbf{S} 各代表什么。也许仅能告诉你们关于用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 来表达它们的式子，因为一切我们所希望得到的只是结果。然而，这里却宁愿向你们演示曾于1884年由坡印廷(Poynting)用来获得 \mathbf{S} 和 u 的公式的那种论证，以便使你们能够看出这些式子是从何而来的。(然而，对于今后的工作来说，你们并不需要去牢记这一推导。)

§ 27-3 电磁场中的能量密度和能流

首先要假定存在仅仅取决于 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的场能量密度 u 和能通量密度 \mathbf{S} 。(例如，至少在静电学中就已知道，能量密度可以写成 $\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 。)当然，这里的 u 和 \mathbf{S} 也许会依赖于势或其他的东西，但让我们看看能够算出个什么结果来。可以尝试把 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 这个量重新写成为两项之和：其中一项代表一个量的时间微商，而另一项则代表第二个量的散度。这时，那第一个量该含 u 而第二个量则含 \mathbf{S} (带有适当符号)。这两个量都应当只是用场来表达的；这就是说，我们希望把上述方程写成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (27.6)$$

左边应该首先仅仅用场来表达。我们如何能做到这一点呢？当然，要通过应用麦克斯韦方程组。根据关于 \mathbf{B} 之旋度的那个麦克斯韦方程，

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (27.7)$$

我们就已部分地完成了任务。那最末一项是一时间微商——即是 $(\partial/\partial t)(\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$ 。因此， $\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 至少就是 u 的一部分了。这与我们曾经在静电学中找到的是同一件东西。现在，一切必须做的就是要使那另一项纳入某件东西的散度之中。

注意(27.7)右边的第一项与

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} \quad (27.8)$$

相同。而正如你从矢量代数方面就可以见到的， $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 一样；因而上面这一项也就等同于

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}), \quad (27.9)$$

这就有了“某种东西”的散度，这恰恰就是我们所需要的。不过这可弄错了！以前曾向你们警告过， ∇ 虽然“象”个矢量，但与矢量不“完全”相同。之所以不是矢量，是因为有一个来自微积分学方面的附加惯例：当一微分算符置于一乘积的前面时，它要对右边每一东西都进行运算。在式(27.7)中， ∇ 只对 \mathbf{B} 运算，而对 \mathbf{E} 不运算。但在(27.9)的那种形式中，按照正常惯例， ∇ 应当对 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 两者都进行运算。所以并不是同一回事。实际上，若我们算出 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的各部分，就能看出它等于 $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ 再加上某些其他的项。这很象当我们取代数中一个积的微商时所发生的情况。例如，

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

并不打算将 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的所有各部分都算出，仅愿意向你们指明一个对付这种问题十分有用的巧计。那就是使你将矢量代数的法则运用到含有算符 ∇ 的那些表式上去而又不会引起任何麻烦的一种巧计。这巧计就是要丢开——至少暂时是如此——微分记法上关于微商是要对哪一些东西进行运算的那种法则。你会看到，寻常关于各项的次序乃是为着两个分开的目的。一个目的是在微分方面，为使 $f(d/dx)g$ 不同于 $g(d/dx)f$ ；另一个目的则是在矢量方面，为使 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 不同于 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 。如果我们乐意，可以决定暂时放弃那个微分法则，不去申明微商要对右边每一件东西都进行运算，而是来制订一种不与所写下来的各项次序有关的新规则。于是我们就能将那些项任意调动而不用发愁了。

这里就是新的规章：用一个下角标来表示该微分算符是在对哪一件东西进行运算的；这样前后次序就没有什么意义了。假设令算符 D 代表 $\partial/\partial x$ 。那么 D_f 就意味着仅对于变量 f 取微商。于是

$$D_f f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

但如果我们将 $D_f fg$ ，则它指的是

$$D_f fg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) g.$$

不过要注意，此刻按照我们的新规则， $f D_g g$ 也指那同一东西。我们可将那同一东西任意写成以下各种形式：

$$D_f fg = g D_f f = f D_g g = fg D_f.$$

你看， D_f 甚至可以落在一切东西之后。（象这样一种近便记法竟从未在数学或物理学书中应用于教学运算方面，那真令人感到意外。）

你可能会怀疑：若我要写出 fg 的微商，那该怎么办呢？我所要的乃是对两项的微商。那很容易，你只要这样说就行了：你写下 $D_f(fg) + D_g(fg)$ 。而这恰好就是 $g(\partial f/\partial x) + f(\partial g/\partial x)$ ，也即在旧记法上你对 $\partial(fg)/\partial x$ 所指的意思。

你将会看到，现在要来对 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 算出一个新的表式就变得很容易了。我们从改成新的记法开始；也即写出

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \nabla_E \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}). \quad (27.10)$$

当你这样做时，你就无须再保持次序上的正确了。我们始终懂得， ∇_B 只对 \mathbf{E} 运算，而 ∇_E 只

对 \mathbf{B} 运算。在这种场合下，就能够如同对一寻常矢量那样运用 ∇ 。（当然，当运算结束时，就要回到每人常用的那种“标准”记法上去。）因此，现在就可以作出象交换点和叉的符号以及对各项的其他各种重新安排。例如，式(27.10)中的中间项可以重新写成 $\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}$ 。（你应会记起， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ 。）而那最末一项则与 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{B}}$ 相同。这看来象是异想天开，但却没有什么问题。现在，如果我们试图回到寻常的惯例上来，那就得去这样安排使得 ∇ 仅运算于其“本身”的变量上。那第一项已经按照那样做了，所以可仅仅丢掉那个下标。第二项就需要某种整顿才能使 ∇ 移至 \mathbf{E} 之前，这我们可通过掉转该叉积的次序并改变符号而做到：

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{E}}) = -\mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{E}} \times \mathbf{E}).$$

现在，式子已经按照惯常次序写出，因而就可回到寻常的记法上来。式(27.10)相当于

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (27.11)$$

(在这一特殊情况下，若早就利用各分量该可以干得快些，但还是值得花点时间来向你们指出这一种数学技巧的。你或许将不会在其他地方见到它，但为了把矢量代数从关于含有微商的项的次序方面的那些规条解放出来这还是极为巧妙的。)

现在我们就回到能量守恒的讨论上来，并引用我们的新结果，即式(27.11)，把式(27.7)中的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 项变换。这样，该能量方程便变成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (27.12)$$

现在你看，我们几乎已完成了任务。已经具备可用作 u 对于 t 的漂亮微商的那一项以及可代表 \mathbf{S} 的美妙散度的另一项了。可惜，那中间项仍旧保留下来，它既不是散度，又不是对于 t 的微商。所以我们已经接近胜利，但还有点不完全。在经历了一番思考之后，就回去查查麦克斯韦的微分方程组，发现幸亏 $\nabla \times \mathbf{E}$ 等于 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，这就意味着我们还可把该独特项转入某种属于纯时间微商的东西：

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right).$$

现在恰好就有我们所需要的一切了。我们的能量方程写明

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (27.13)$$

那就完全象式(27.6)，只要下这样两个定义：

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (27.14)$$

和

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (27.15)$$

(调转该叉积的次序才使符号对头。)

我们的计划宣告成功。已经有一个关于能量密度的表式，那就是“电”和“磁”两种能量密度之和，它们的形式象以前在静电力学和静磁学中当用场来算出能量时所曾找到过的那些。并且，我们也已找到了关于电磁场的能量矢量的公式。这一新的矢量， $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，按照它的发现者的名字，称为“坡印廷矢量”。它告诉我们有关场能在空间中到处流动的时率。每秒流经一小面积 da 的能量为 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da$ ，其中 \mathbf{n} 为垂直于 da 的单位矢量。（现在你既有了 u 和 \mathbf{S} 的公式，若乐意的话，便可忘掉那些推导过程。）

§ 27-4 场能的不确定性

在考虑坡印廷公式[(27.14)和(27.15)]的某些应用之前，我们愿意申明，并未确实“证明”过这些式。上面所做的只不过是找出了一个可能的“ u ”和一个可能的“ S ”。我们怎能知道，如果再将那些项变变戏法不会找到另一个关于“ u ”的公式和另一个关于“ S ”的公式来呢？这个新的 S 和新的 u 就该会不相同了，但它们仍然能满足式(27.6)。那满有可能，这是办得到的。不过所找到的形式始终含有场的各种微商（总会有象二次微商或一次微商的平方那样的二次项）。事实上，有无限多个关于 u 和 S 的不同可能性，而迄今还没有人曾经想到用实验方法来判明哪一个是正确的！人们曾猜测过那最简单的一个就可能是对的，但我们必须讲明，并未肯定懂得空间中电磁场能的确切位置究竟在哪里。因此，我们也就同样选择了那个最平易的形式而申明场能是由式(27.14)所给出的。于是，能流矢量 S 也必须由式(27.15)给出了。

十分有趣，似乎没有一种唯一途径来解决关于场能定位的不确定性问题。有时人们会宣称，这一问题可以通过利用引力理论按照下述论证来加以解决：在引力理论中，所有各种能量都是引力之源。因此，如果我们已懂得了引力是沿哪个方向作用的，则电的能量密度也就应该给适当定位了。然而，迄今为止还未有人曾做过这么一个精确实验使得电磁场的引力效应的精密位置可以确定下来。因而电磁场单独可以作为引力之源这一概念就难于在外部实现。事实上，确曾观测到光当行近太阳时会受到偏转——我们可以说太阳把光朝向它本身拉下。你是否想允许光也同样会拉住太阳呢？反正，每人都乐于接受我们所已找到的那些简单表式来作为电磁能的定位及其流动。尽管有时由于运用那些式子而获得的结果似乎有点奇怪，但却从未有人曾找出那些结果的毛病——这就是说，结果与任何实验不相符。因此，我们仍将跟随世界上其他人——此外，我们还会相信那可能是完全对的。

应该再作出一个关于能量公式的述评。首先，场中每单位体积的能量表现得很简单，它是静电能量加上磁场能量，如果把静电能量用 E^2 表达而磁场能量用 B^2 表达的话。当我们过去在计算静态问题时，就曾得出过两个这样的表式作为能量的可能表式。我们也曾对静电力的能量找出了若干个其他公式，比如 $\rho\phi$ ，这在静电情况下会等于 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 的积分。然而，在动态电场中该等式就会失败，但过去对于哪个式子正确则还未曾有过明显的选择。现在我们才知道哪一个是正确的。同样，我们也已找出了一个普遍正确的磁能量公式。对动态场的能量密度仍然正确的公式就是式(27.14)。

§ 27-5 能流实例

关于能流矢量 S 的公式，是某种相当新鲜的东西。我们现在就要来看看，在某些特殊情况下它是如何工作的，并看看它是否与以前所已知的任何东西都互相验证。我们将要取的第一个例子是光。在一个光波中， E 矢量和 B 矢量互相正交而且也正交于波的传播方向。（见图 27-2。）在电磁波中， B 之大小等于 $1/c$ 乘以 E 之大小，而且由于它们互相垂直，就还可以写成

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \frac{E^2}{c}.$$

因此，对于光来说，每秒通过单位面积的能流就是

$$S = \epsilon_0 c E^2. \quad (27.16)$$

在 $E = E_0 \cos \omega(t - x/c)$ 的那种光波中, 每单位面积的平均能流率, 即 $\langle S \rangle_{\text{平均}}$ ——也称为光之强度——为电场平方的平均值乘以 $\epsilon_0 c$:

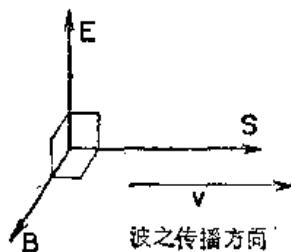


图 27-2 关于光波中的 E , B 和 S 矢量

$$\text{强度} = \langle S \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}. \quad (27.17)$$

信不信由你, 我们曾在第一卷 § 31-5 节中, 学习光学时就已经导出过这一结果。应该可以相信这结果是正确的, 因为它也由某另一方面所核实。当我们拥有一光束时, 在空间中便有由式 (27.14) 所给出的那一个能量密度。对于光波还可以引用 $cB = E$, 因而得出

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \epsilon_0 E^2.$$

但 E 在空间中是变化着的, 因而平均能量密度就是

$$\langle u \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}. \quad (27.18)$$

现在, 波既然以速率 c 行进, 就应该认为每秒穿过一平方米的能量为 c 乘以每立方米中的能量。因此我们就该申明

$$\langle S \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}.$$

那是对的; 这与式 (27.17) 相同。

现在考虑另一例。这是相当奇妙的一个例子。我们来考察流入一个正在缓慢充电的电容器的能量。(并不要求那种会使电容器开始表现一个谐振空腔的那么高的频率, 但也不要那直流电。) 假定是用一个属于寻常类型的平行板圆形电容器, 如图 27-3 所示。在其内部有一个几乎处处均匀而只是随时间变化的电场。在任一时刻, 这内部的总电磁能为 u 乘以体积。若两板的半径均为 a 而其间的间隔为 h , 则在两板间的总能量便是

$$U = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) (\pi a^2 h). \quad (27.19)$$

当 E 改变时, 这一能量也在改变。当电容器充电时, 位于两板间的体积正在以这一时率接受能量:

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 \pi a^2 h E \dot{E}. \quad (27.20)$$

因此, 一定会有从某处流进该体积中的能量。当然你会知道, 它理应从那些用作充电的导线进来——但完全不是这样! 它不能经由该方向流入于两板间的空间里, 因为 E 是垂直于板的; 这样 $E \times B$ 就一定要与两板平行。

当然, 你会记起, 当电容器正在充电时, 就有一个环绕着轴心的磁场。我们在第二十三章中对此曾有所讨论。利用麦克斯韦方程组中那最末一个方程, 曾经得出在电容器边缘上磁场是由下式给出的:

$$2\pi a c^2 B = \dot{E} \cdot \pi a^2,$$

或

$$B = \frac{a}{2c^2} \dot{E}.$$

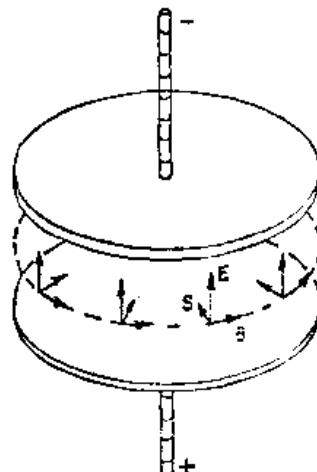


图 27-3 接近一个正在充电的电容器, 坡印廷矢量 S 会朝轴心指向内

它的方向示如图 27-3。因此，就有一个正比于 $E \times B$ 的来自边缘四周的能流，如图所示的那样。能量实际上并不是从导线流下来的，而是从围绕着该电容器的空间那里来的。

让我们来核对一下是否穿过两板边缘间的整个面上的总能流会等于其内部能量的变率——看来这样较好。上面我们曾通过对式(27.15)作出证明的全过程来加以保证，但还是让我们来看个究竟。该面面积为 $2\pi ah$ ，而 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，则其大小便是

$$\epsilon_0 c^2 E \left(\frac{a}{2c^2} \dot{E} \right),$$

因此总能流为

$$\pi a^2 h \epsilon_0 E \dot{E}.$$

这的确与式(27.20)相符。但它告诉我们一桩特别事情：当对一电容器充电时，能量并不是从导线流下来的；而是穿过边缘的间隙闯进来的。那分明就是这一理论所说的！

怎么能够这样呢？这并不是一个容易的问题，但这里有一条可供人们对它进行思索的途径。假设在该电容器的顶面和底面很远处各有一些电荷。当电荷离得很远时，就会有一个微弱的但却是大量散开着的场包围着该电容器（见图 27-4）。于是，当这些电荷一齐互相

靠拢时，在电容器附近之场就变得强起来了。因此，远处的场能量是会朝向该电容器移动过来而最后停驻于两板之间的。

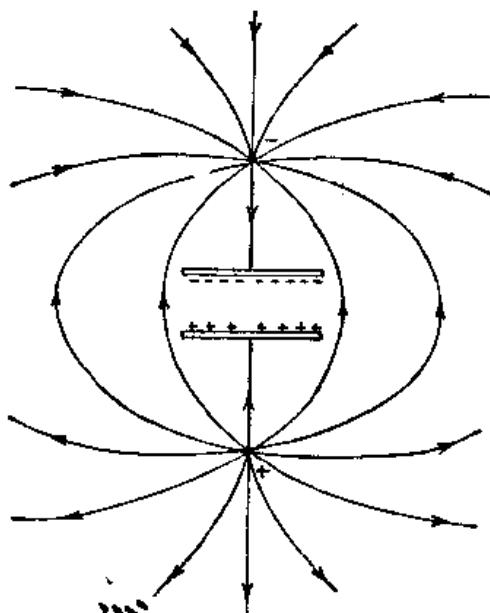


图 27-4 当将两电荷从远处带来对一电容器充电时，在电容器外面之场

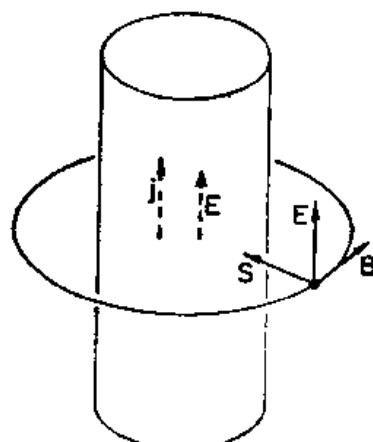


图 27-5 在一根载流导线附近的坡印廷矢量 \mathbf{S}

作为另一个例子，试问在一根有阻导线中当它载着电流时会有什么情况发生。既然这根导线中有电阻，则沿该线方向便有一个驱动着电流的电场。由于该线有一电势降，因而刚好在导线外面与其表面平行的，也就有一电场（见图 27-5）。此外，还有一个由电流所产生的环绕着导线的磁场。 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 互成直角；因此就有一个径向而指向内的坡印廷矢量，如图中所示。即有一个从四面八方流进该导线的能流。当然，这会等于在导线中以热的形式损耗掉的能量。因此，我们的“狂妄”理论申述：电子由于来自外面的场能量流进导线中来才获得它们用以产生热的那些能量。直觉似乎告诉我们，电子是由于沿着导线被推动才获得能量的，因而这能量应该是沿导线流下（或流上）。但这一理论却申述：电子实际上受一个来自远处的某些电荷之场所推动，而它们就是从这些场获得了会发生热之能量的。能量总会莫名其妙地从遥远处的电荷那里流进于空间中一个广阔的区域里，然后又流进导线中去。

最后,为了使你确实相信这一理论分明是一难题,我们将再考虑一个例子——其中有一电荷和一块磁铁彼此都静止地互相靠近着的例子——即两者都固定不动。假设取一个其中的点电荷被置在磁铁中点附近的例子,如图 27-6 所示。每一件东西都是静止的,从而能量并不会随时间变化。而且, E 和 B 又都完全处于静态,可是坡印廷矢量却说明存在一个能流,因为 $E \times B$ 并不等于零。如果你考察这能流,就会发现那不过是转了又转地在兜着圈子。任何一处都没有能量转变——凡是流进某一体积里的东西都会从那里再流出来。这很象不可压缩的水在环流。因此,在这一个所谓静态中就有能量在环流,多么荒谬!

然而,当你记起我们所称之为“静”磁的实际上乃是一种环行的永电流,这也许就不会使你那么可怕地感到莫明其妙。在一块永磁体中,其内部电子都在永恒地自旋。这样能量也许会在外面环流这一点毕竟就不那么奇怪了。

你无疑会开始得到这么一个印象,即坡印廷理论至少部分地违背了你对于在电磁场中能量居于何处的那种直觉。你也许会相信,必须对你的一切直觉都进行补缀,因而有一大堆东西都得在这里进行学习。但实际似乎并不需要。你无需感觉到,如果有时忘记了导线里能量是从外面流进来而不是沿导线涌进来,你就会陷入巨大困难。在应用能量守恒的概念时,过细地注意能量所采取的路线,似乎只在极罕见的一些时候才有价值。能量围绕着一块磁铁和一个电荷在兜圈子,这在大多数场合下似乎是很不重要的。它并非一个重要细节,但很清楚,我们寻常的直觉却是很错误的。

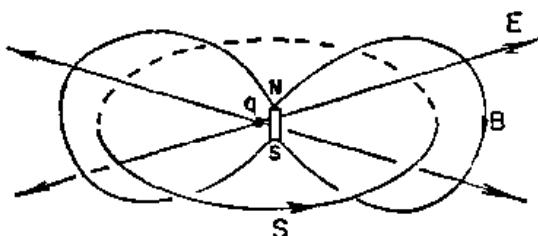


图 27-6 电荷和磁铁会产生一个在闭合回路上环行着的坡印廷矢量

§ 27-6 场 动 量

其次,我们要来谈论关于电磁场中的动量。正如场具有能量一样,它的每单位体积也将带有某一动量,让我们称之为动量密度 \mathbf{g} 。当然,动量具有各种可能的不同方向,因而 \mathbf{g} 必须是个矢量。让我们每次只谈一个分量;首先,考虑那 x 分量。由于动量的每一分量都守恒,就该可写下下一个看来有点象这样的定律:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\text{实物的动量})_x = \frac{\partial g_x}{\partial t} + (\text{动量外流})_x.$$

左边是容易理解的。实物动量的变率只不过是施于其上之力。对于一个粒子来说,这力就是 $F = q(E + v \times B)$;对于一个电荷分布来说,则施于每单位体积上之力为 $(\rho E + j \times B)$ 。然而,该“动量外流”项却有点奇怪。它不可能是一个矢量的散度,因为并非一个标量;其实乃是某一矢量的 x 分量。无论如何,它大概应该表现出象这样的一种东西:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

因为该 x 动量还可能是在三个方向中的任一个方向上流动的。总之,不管 a , b 和 c 各代表什么,这个组合料想会等于 x 动量的向外流动。

原来这场游戏应该是要仅仅用 E 和 B 来写出 $\rho E + j \times B$ ——通过利用麦克斯韦方程组而把 ρ 和 j 消掉——然后才对那些项变变戏法并作一些代换以使它变成看来象如下的东西:

$$\frac{\partial g_c}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

之后，通过对那些项作出鉴定，便该有关于 g_c , a , b , 和 c 的表式了。那是一大堆工作，我们并不打算那样干，宁愿只找出一个有关动量密度 σ 的表式——而且是通过另一条途径来做的。

在力学中有一个重要定理，那是这样说的：在任一情况下，每当有一个能量（场能或任何其他类型的能量）之流时，则单位时间流经单位面积的能量，再乘以 $1/c^2$ ，就会等于在空间中每单位体积的动量。在电动力学的特殊情况下，这一定理会提供 σ 等于 $1/c^2$ 乘以坡印廷矢量的那一结果：

$$\sigma = \frac{1}{c^2} S. \quad (27.21)$$

因此，坡印廷矢量不但会给出流出的能量，而且若除以 c^2 的话，也还可给出动量密度。这同一结果该可从上面所暗示的另一种分析方法获得，但更有意义的还是去注意这一较普遍的结果。现在就来提供若干有趣例子及其论证以便使你们相信这一普遍定理是正确的。

第一个例子：假设在一个箱子里存在一大群粒子——比方说每立方米中含有 N 个粒子——而它们是以某一速度 v 运动着的。现在就来考虑一个垂直于 v 的想象平面。每秒流经这个面每单位面积的能量，等于每秒流过的粒子数 Nv 乘以每一粒子所带的能量。每一粒子的能量为 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。因而每秒的能流就是

$$Nv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

但每一粒子具有 $m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 的动量，因而动量密度为

$$N \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

这恰好就是 $1/c^2$ 乘以能流——正如该定理所说的。因此，对于一群粒子来说这定理是正确的。

这对于光来说也正确。我们过去在第一卷学习光学时就曾见到，当从一束光处吸收能量时，会有一定动量递交给该吸收体。事实上，在第一卷第三十四章中我们曾经证明，动量等于 $1/c$ 乘以所吸收的能量[第一卷的式(34.26)]。若令 U_0 代表每秒到达单位面积的能量，则每秒到达单位面积上的动量就是 U_0/c 。但动量是以速率 c 行进的，因而在该吸收体前面的动量密度就必然是 U_0/c^2 。因此，该定理又是对的。

最后，我们将提供一个论据，这论据来源于爱因斯坦对那同一事情的又一次证明。假设有一铁道车辆在轨道上自由滑动（假定没有摩擦阻力），这车辆具有某一巨大质量 M 。车箱里的一端配有能发射出一些粒子或光（或任何其他东西，到底是哪一种东西都没有什么差别）的某种装备，然后这射出来的东西就给车箱里对面一端所截住了。原本已有某些能量放在车箱里的一端——比如说是在图 27-7(a) 中所标明的那个 U ——而后来它却转移到对面的一端上去，如图 27-7(c) 所示。这能量 U 已经移动了一个等于该车辆长度的距离 L 。既然能量 U 具有质量 U/c^2 ，因而要是车子保持不动的话，该车子的重心就必然会移动。爱因斯坦不喜欢一物体的重心可以只凭在其内部瞎胡闹一番就能使其移动的那种主意，因而他假定不能通过在其内部做任何事情来移动其重心。但如果事实确是那样，则当我们把能量

U 从一端移至另一端时，整架车辆就应反冲一段距离 x ，如图(c)中所示的。实际上，你可以看到，车辆的总质量乘以 x 就应等于所移动的能量之质量 U/c^2 乘以 L （假定 U/c^2 比 M 要小得多）：

$$Mx = \frac{U}{c^2}L. \quad (27.22)$$

现在让我们来考察一下能量是由一次闪光所带着的那种特殊情况。（该设备本来也应可适用于粒子的，但我们将跟随爱因斯坦，他对于光的问题感兴趣。）究竟是什么东西会引起车辆移动的呢？爱因斯坦这样议论说：当光被发射出来时一定会发生一次反冲，即带有动量 p 的某一待定反冲。正是这一个反冲才使车辆滚向后的。车辆的反冲速度 v 等于这一动量除以车辆质量：

$$v = \frac{p}{M}.$$

车辆是以这一速度运动着的，直至光之能量到达了对面一端为止。这时，当它撞上去时，它交还了它的动量而使车辆停住了。如果 x 很小，则车辆运动的时间约等于 L/c ，所以就有

$$x = vt = v \frac{L}{c} = \frac{p}{M} \frac{L}{c}.$$

把这个 x 值代入式(27.22)中，便得

$$p = \frac{U}{c}.$$

又一次得到了光之能量与动量的关系。用 c 来除以便获得动量密度 $g = p/c$ ，因而又再得到

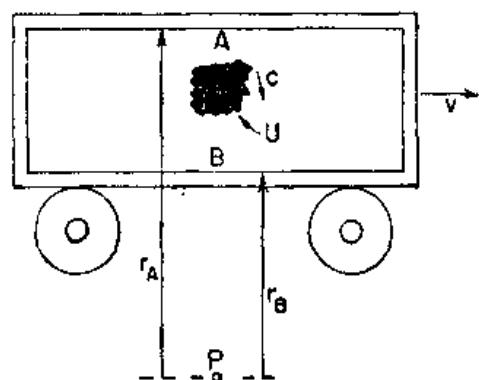


图 27-8 如果环绕 P 点的角动量是守恒的，则能量 U 应带有动量 U/c

一质量，而倘若整个车箱的线动量不会发生变化，则它应仍拥有速度 v 。这时它环绕 P 点的角动量就是 mvr_B 。这角动量将会改变，除非当光被射出时该正确的反冲动量曾给予车箱——也就是说，除非光带有动量 U/c 。结果变成，角动量守恒与该重心定理在相对论中是紧密相联的。因此，要是我们的重心定理不正确，则连角动量守恒也都给破坏了。无论如何，

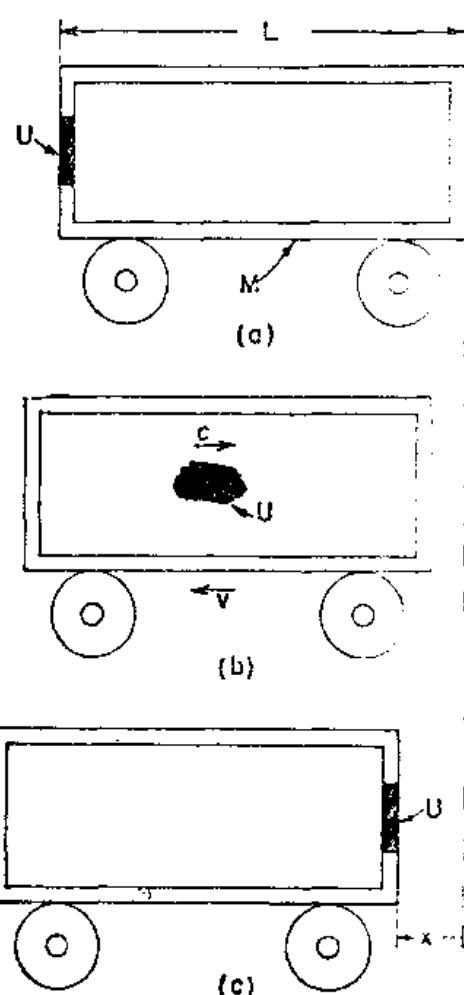


图 27-7 以速率 c 运动着的能量 U 会带有动量 U/c

$$g = \frac{U}{c^2}. \quad (27.23)$$

你尽可以觉得奇怪：为什么该重心定理会那么重要？也许它是错的。满有可能，但那时我们也会丧失角动量守恒律了。假定我们的车箱是沿着轨道以某一速率 v 前进的，而同时我们把某些光能从车顶射向车底——比方说，从图 27-8 中的 A 点射至 B 点。现在来考察这系统环绕 P 点的角动量。在能量 U 离开 A 点之前，它具有质量 U/c^2 和速度 v ，从而拥有角动量 mvr_A 。当它到达 B 点时，仍具有同

已经弄清楚它是一个正确的普遍定律，而在电动力学的情况下我们还能利用它来获得场之动量。

我们将进一步提及在电磁场中关于动量的两个例子。上面曾在 § 26-2 节中指出，当两个带电粒子在互成直角的轨道上运动时作用与反作用定律失败了。施于两粒子上之力并不平衡，因而作用并不等于反作用；这样实物的净动量就必然正在改变，它是不守恒了。但在这样一种情况下场之动量也正在改变。如果你算出由坡印廷矢量所给出的动量，它就不是一个常数。然而，粒子动量的改变刚好给这个场动量所抵偿，从而使粒子加上场的总动量才会守恒。

最后，另一个例子则是如图 27-6 所示的有一块磁铁与一个电荷同时存在的那一种情况。我们曾对于发现有能量在那里转圈子感到不快，但此刻，由于我们知道能流与动量是互成比例的，我们便也知道有一动量在空间环行着了。可是一个环行动量就意味着存在角动量。因此该场是有角动量的。你是否记起，在 § 17-4 节中我们曾描述过的有关一个螺线管和若干个放在一圆盘上的电荷的那个佯谬？似乎当电流中断时，整个盘应该开始旋转。该佯谬所提出的问题是：角动量到底是从哪里来的？答案：如果你有一磁场和某些电荷，则在场中就会有某一角动量。当场初建立时，它就应该给安置在那里了。而当场断掉时，这一角动量是会归还的。因此在该佯谬中的盘子就该开始转动。这一神秘的能量环流，最初似乎觉得是那么荒谬可笑，但却是绝对必需的。确实有一个动量流，它必须用来在整个世界中保持角动量守恒。

28

电磁质量

§ 28-1 点电荷的场能量

在把相对论和麦克斯韦方程组凑在一起时，我们就已完成了有关电磁理论的主要工作。当然，有某些细节我们曾经漏掉，并有一个以后将会涉及的广阔领域——电磁场与实物的相互作用。但现在却要稍为停留一下以便向你们指明，这座崇高大厦尽管对于解释那么多现象是多么美妙，但最终不得不脸朝下倒下去了。当你追随任一项物理学太远时，总会发现将碰到某种困难。现在就要来讨论一个严重困难——经典电磁理论的失败。你会认识到，由于量子力学效应，使得全部经典物理学都失败了。经典力学是一种在数学上协调一致的理论；它只是与经验不符罢了。然而，很有趣，电磁学的经典理论就其本身而言已经是一种不能令人满意的理论。有一些与麦克斯韦理论的概念联系在一起，但却不是量子力学所能解决或与之直接有关的困难。你可能会说，“担心这些困难也许没有什么用处，既然量子力学正在对电动力学定律进行修改，则应该等待在经过了修正之后才看看还有什么困难。然而，当电动力学结合到量子力学上去时，那些困难却依然存在。因此，现在来看清楚这些困难到底是什么不能说是浪费时间。何况，这些困难还有巨大的历史重要性。此外，从能够跟踪理论足够远以便见到每一项事态——包括它的一切困难——你可能会得到某一种成就的感觉。

我们所提及的困难关系到当应用于电子或其他带电粒子上时电磁动量和能量的概念。那些有关简单的带电粒子和电磁场的概念多少是互相矛盾的。为了描述这些困难，将开始用能量和动量的概念来做一些练习题目。

首先，将计算一个带电粒子的能量。假设是采取一个简单的电子模型，其中一切电荷 q 都均匀分布在一个半径为 a 的球面上，对于点电荷的那一种特殊情况， a 可取为零。现在让我们计算电磁场中的能量。如果该电荷静止不动，就不会有磁场，而每单位体积的能量则正比于电场的平方。电场的大小为 $q/4\pi\epsilon_0 r^2$ ，其能量密度即是

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

要获得总能量，就得对这一密度遍及全部空间积分。利用该体积元 $4\pi r^2 dr$ ，我们将称之为 $U_{\text{电}}$ 的总能量就是

$$U_{\text{电}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

这很容易积出，下限为 a 而上限为 ∞ ，因而

$$U_{\text{电}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}. \quad (28.1)$$

如果用电子电荷 q_e 来代替 q 而用符号 e^2 来代替 $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ ，则

$$U_{\text{电}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}. \quad (28.2)$$

这全都很好, 直到对于一个点电荷 a 会趋于零——才存在巨大困难。由于场能量密度与从中心量起的距离的四次幂成反比, 它的体积分就是无限大了。在一个点电荷的周围竟有无限大的能量。

一个无限大能量有什么不妥之处呢? 如果能量不会跑出去, 而一定要永远驻扎在那里, 则一个无限大能量是否会带来任何真正的困难? 当然, 出现无限大的量可能会使人烦躁不安, 但真正要紧的却只是究竟有无任何可观测得到的物理效应。为回答这一问题, 我们应当转到能量以外的其他东西上去。假定我们问起当移动电荷时能量是怎样变化的。这样, 如果变化为无限大, 则我们便将陷入困难之中了。

§ 28-2 运动电荷的场动量

假设一个电子以匀速在空间中运动, 暂时假定这速度比起光速来很小。与这一运动电子联系在一起的将有一动量——即使电子在带电之前并没有什么质量——那是起因于电磁场中的动量的。我们能够证明, 这一个场动量是在该电荷的速度 v 的方向上, 而且对于小速度来说是与 v 成正比的。在与该电荷中心距离为 r 而与运动路线作成一角度 θ 的 P 点上(见图 28-1)电场是径向的, 而且正如我们业已知道, 磁场则是 $v \times E/c^2$ 。根据式(27.21)和(27.15), 动量密度为

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

它是斜向进入运动路线的, 如图中所示, 并具有大小

$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin \theta.$$

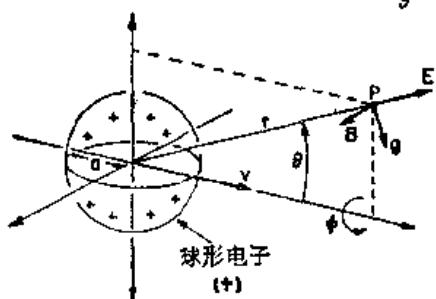


图 28-1 表示一个正电子的场 E 和 B 及其动量密度 g 。对于负电子, E 和 B 都会倒转方向, 但 g 的方向仍不会倒转

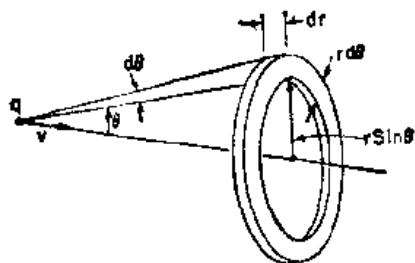


图 28-2 用来算出场动量的体积元 $2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta$

这些场对于运动路线是对称的, 因而当我们遍及空间积分时, 那些横向分量加起来就会等于零, 结果给出一个平行于 v 的合动量。在这个方向上 g 之分量为 $g \sin \theta$, 我们应对之遍及全部空间积分。取一个其平面垂直于 v 的圆环作为体积元, 如图 28-2 所示。这个体积是 $2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta$ 。于是总动量为

$$p = \int \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta.$$

既然 E 与 θ 无关(对于 $v \ll c$), 我们便可立即对 θ 积分; 这个积分为

$$\int \sin^3 \theta d\theta = - \int (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3}.$$

关于 θ 的积分上下限分别为 0 和 π , 因而这个 θ 积分便只给出一个因数 $4/3$, 结果是

$$p = \frac{8\pi}{3} \frac{\epsilon_0 v}{c^2} \int E^2 r^2 dr.$$

这个积分(对于 $v \ll c$)就是刚才在求能量时算出过的; 它是 $q^2/16\pi^2\epsilon_0^2 a$, 因而

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{v}}{ac^2},$$

或

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \mathbf{v}. \quad (28.3)$$

场中的动量——电磁动量——与 \mathbf{v} 成正比。这正是具有等于 \mathbf{v} 之系数的那种质量的一个粒子所应该拥有的动量。因此, 我们可叫这一系数做电磁质量 $m_{\text{电磁}}$, 并把它写成

$$m_{\text{电磁}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.4)$$

§ 28-3 电磁质量

质量是从哪里来的呢? 在我们的力学定律中就曾经假定过每一物体都带有一种我们称之为质量的东西——这也意味着带有一个正比于其速度的动量。事实上, 也许质量不过是一种电动力学效应。质量的起源迄今还未得到解释。最后在电动力学理论中就有很大的机会来理解这一种我们以前从未理解过的东西。意外地——或宁可说, 是从麦克斯韦和坡印廷那里——出现希望, 即任一帶电粒子只是由于电磁影响才拥有一个正比于其速度的动量。

让我们放保守一些而暂且说, 存在两种质量——物体的总动量可以是机械动量与电磁动量两者之和。机械动量等于“机械”质量乘以 \mathbf{v} 。在那些通过观察一个粒子有多少动量或观察它如何绕一个轨道旋转借以测量其质量的实验中, 我们正在测量其总质量。普遍地说, 动量等于总质量($m_{\text{机械}} + m_{\text{电磁}}$)乘速度。因此, 凡观测到的质量都可能含有两部分(或可能有更多部分, 若我们还包括其他类型之场的话): 机械部分加上电磁部分。我们明确知道有一个电磁部分, 而且对于它已经有一个公式了, 但却有一个令人战栗的可能性, 即该机械部分根本就不存在——质量全都是电磁性质的。

让我们来看看电子该有多大, 如果它不具有机械质量的话。可以通过令式(28.4)中的电磁质量等于所观测到的电子质量 m_e 而找到。我们找出

$$a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (28.5)$$

而

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (28.6)$$

这个量则称为“经典电子半径”; 它的数值为 2.82×10^{-18} 厘米, 约等于一个原子直径的十万分之一。

为什么要把 r_0 称为电子半径, 而不是我们的 a ? 因为我们本来也可用别种假定的电荷分布——电荷也许会均匀分布在一个球体中, 或者也许会象一个模糊的球体那样渗透出去——来做同样的计算。对于任一特殊假定, 该因数 $2/3$ 会改变成某一其他分数。例如, 对于均匀分布在一个球体内的电荷, 这 $2/3$ 就得由 $4/5$ 代替。与其去争辩哪一种分布是对的, 倒不如决定把 r_0 定义为一种“标称”半径, 然后, 不同的理论就可以提供其所喜爱的系数。

让我们追踪一下关于质量的电磁理论。上面的计算是针对 $v \ll c$ 的; 如果进入高速度, 又将发生什么情况呢? 早期的尝试曾导致某些混乱, 但洛伦兹却认识到在高速度上该带电球体会收缩成一个椭球而场则会按照我们在第二十六章中对于相对论性情况所导出的式

(26.6)和(26.7)改变。如果你对那种情况的 \mathbf{p} 进行积分，便将发现，对于一任意速度 v 来说，动量会改变一个因数 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ：

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (28.7)$$

换句话说，电磁质量会与 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 成反比而随速度增加——是一项在相对论问世之前就已作出的发现。

早期曾有些实验被提出来以测量一个粒子的观测质量如何会随速度而变，这样来确定其中有若干质量是属于机械性质的而若干是属于电性质的。当时人们相信，那电的部分才会随速度变化，而机械部分则不会。可是，当那些实验正在进行之际，理论家们也仍在继续工作。不久之后相对论便发展起来，它提出不管质量来源于什么，全都应当随 $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 变化。式(28.7)就是质量与速度有关的那种理论的开始。

让我们回到曾导致式(28.2)的有关场能的计算。根据相对论，能量 U 将具有质量 U/c^2 。于是式(28.2)便申述，电子之场应该具有如下质量：

$$m'_{\text{电}} = \frac{U_{\text{电}}}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.8)$$

这不同于式(28.4)中的电磁质量 $m_{\text{电磁}}$ 。事实上，若我们只是结合(28.2)和(28.4)两式，便该写成

$$U_{\text{电}} = \frac{3}{4} m_{\text{电磁}} c^2.$$

这一公式在相对论之前就已发现，而当爱因斯坦及其他人物开始认识到这个关系应当始终是 $U=mc^2$ 时，曾引起过巨大混乱。

§ 28-4 电子施于其自身上之力

关于电磁质量的两个公式间的差异是特别令人为难的，因为我们已经小心地证明过电动力学理论与相对性原理是互相一致的。但相对论却毫无疑问地含有动量应等于能量乘以 v/c^2 的意思。因此，我们就陷于某种困难之中；必然是犯了错误。但我们的计算却从未犯过代数方面的错误，因而可能是遗漏了某种东西。

在推导有关能量和动量的方程时，我们曾假定了那些守恒律。也曾假定过所有一切之力都计算进去，而任何由“非电”机制所作之功与所带之动量也都包括了进去。现在如果有一个带电球体，电力全都是互斥的，因而电子该会趋于飞散。由于这一系统具有非平衡力，我们便可能在联系能量和动量的那些规律中犯了各种类型的错误。要得到一个一致图象，就必须设想有某种会把电子紧系在一起的东西。那些电荷必须由某种橡胶带——某种会使电荷不致飞散的东西——来束缚在一个球体之内。最早曾由彭加勒(Poincaré)指出，这些橡胶带——或任何能把电子紧系在一起的东西——应该包括在能量和动量的计算之内。为此缘故，这一附加的非电性力才被赐以一个更优雅的名字：“彭加勒应力”。如果这些附加力也包括在计算之内，则按那两种办法而计算出来的质量也将有所改变(改变程度取决于一些详细假定)，而结果就会与相对论一致；也就是说，从动量计算得来的质量与从能量方面计算得来的相同。然而，它们两者都各含有两种贡献：电磁质量和来自彭加勒应力方面的贡献。只有当这两方面相加起来时才能获得一个一致的理论。

因此，不可能按照我们所希望的方式以得到一切质量都是属于电磁性质的。如果除了电动力学之外别无其他东西，那就不是一个正当的理论。必须补充某种其他东西。不管你称作什么——“橡胶带”还是“彭加勒应力”还是其他什么——要作成这么一种一致理论，在自然界中就必须存在其他之力。

很明显，只要我们必须把一些力放进电子之内，整个概念的美妙之处便将开始消失。事情变得十分复杂。你会问起：那些应力该有多强呢？电子是怎样摇动着的呢？它到底会不会振动？它的内部特性如何？如此等等。也许有可能电子的确具有某些复杂的内部特性。假如沿这些路径创立一个电子理论，就该预告一些象振动模式那样的古怪性质，而这些却从未明显地被观测到。我们说“明显”，是因为已在自然界观测到一大堆仍未能形成意义的东西。可能有朝一日会发现，今天我们所未能理解的东西之一（比如 μ 介子）能够实际上被解释为彭加勒应力的振动。这似乎不很可能，但就没有任何人能拿得很稳。有许多关于基本粒子的事情我们还不了解。不管怎样，这一理论所包含的复杂结构是不受欢迎的，但企图用电磁现象来解释全部质量的尝试——至少按我们所描述的那种办法——则已走进了死胡同。

我们愿意稍为多想一想，为什么当场里的动量与速度成正比时我们就说已有了质量。这很容易！质量就是在动量与速度之间的那个系数嘛。但我们也可按另一种方式来看待质量：如果要加速一个粒子你得施以一力，那么它便拥有质量。因此，如果我们稍为密切一些来考察力是从哪里来的，则可能对我们的理解有所帮助。你怎么会知道必须有一个力呢？因为我们已证明了场的动量守恒律。如果你有一个带电粒子并推动它经历一小段时间，那么在其电磁场中便将带有一些动量。动量总得按某种办法注入场中。因此就必然会有某一个力施于电子之上而使其运动——一个除需以克服机械惯性之外的附加力，即一个由于电磁互作用所引起之力。还应该有一个反过来施于该“推动者”之上的力。但究竟这个力是从哪里来的呢？

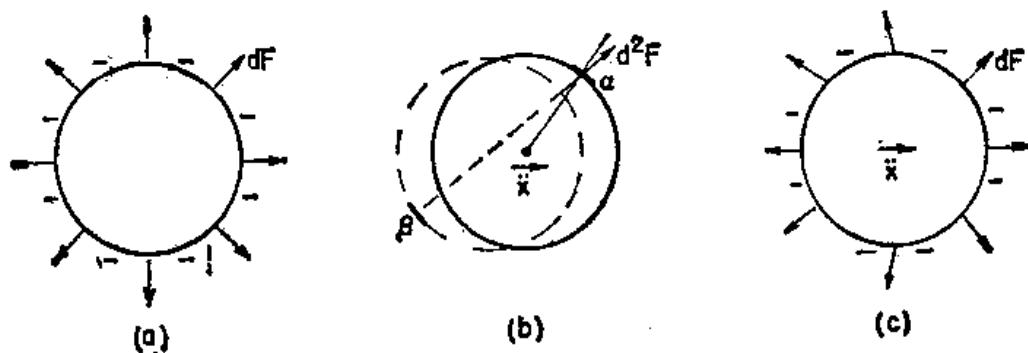


图 28-3 由于推迟作用，所以施于一个加速着的电子的自力不会等于零。（ dF 指施于面元 da 上之力； d^2F 则指由在面元 da_α 上的电荷施于面元 da_α 上之力。）

图景大抵就是这样。我们可以把电子想象成一个带电球体，当它静止时，每一部分电荷都将与每一其他部分互相排斥，但那些力却又都成对地抵消掉，因而并没有任何净力存在[见图 28-3(a)]。不过，当电子正在加速时，由于电磁影响需要时间以从一点传播至另一点，那些力就不再平衡了。例如，在图 28-3(b)中由 β 那一部分作用于 α 那一部分之力取决于在某一较早时刻上的位置，如图中所示。力之大小和方向两者都要取决于该电荷的运动。如果电荷正在加速，则施于电子各不同部分上之力也许会如图 28-3(c)所示的那样。当把所

有这些力都相加起来时，它们并不会互相抵消。对于均匀速度来说它们就该抵消，尽管初时乍一看来似乎甚至连对于匀速这推迟作用也会给出一个非平衡力。但结果变成，除非电子被加速，就不会有净力施于其上。一有了加速，如果我们考察电子的各部分之间的力，则作用不会恰恰等于反作用，从而电子施于其本身上的就是一种企图阻碍其加速之力。它自身的靴带在拖着它向后了。

要算出这个自作用力满有可能，但不容易；可是我们在这里还不打算从事这一精细计算。只要告诉你们关于一个相对不那么复杂的一维——比方说沿 α 方向——运动的那种特殊情况的结果。这时，该自力就可以写成一个级数。它的首项依赖于加速度 \ddot{x} ，第二项依赖于 \dddot{x} ，等等*。结果得出

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^8} \dddot{x} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{\ddot{x}} + \dots, \quad (28.9)$$

式中 α 和 γ 都是数量级为 1 的数字系数。该 \ddot{x} 项的系数 α 取决于所假定的是怎样一种电荷分布；如果电荷均匀分布于一个球面上，则 $\alpha = 2/3$ 。因此就有一个正比于加速度之项，它与电子的半径 a 成反比，而刚好与我们在式(28.4)中对于 $m_{\text{电子}}$ 所曾获得的数值相同。如果所选定的电荷分布不同，因而 α 改变，则式(28.4)中的分数 $2/3$ 也会按同一方式改变。该 \dddot{x} 项与所假定的半径 a 无关，同时也与所假定的电荷分布无关；它的系数始终等于 $2/3$ 。再下一项与半径 a 成正比，而其系数 γ 则取决于电荷的分布情况。你将会注意到，如果我们让电子半径趋于零，那末项(以及一切更高次项)便将趋于零；第二项保持恒定不变；但那首项——电磁质量——却将变成无限大了。而且，我们还能够看得清楚，这无限大是由于电子的一部分作用于另一部分上之力所引起的——由于我们容许了“点”电荷会作用于其自身上那种可能性这么一桩也许是蠢事所引起的。

§ 28-5 改进麦克斯韦理论的尝试

现在我们愿意来讨论也许可以将麦克斯韦的电动力学理论作某种改进，以便使得电子作为一个简单点电荷的那种概念能够维持得住。许多种尝试都曾做过，而其中有些理论甚至能将事情安排得使电子质量全都是电磁性质的。但所有这些理论如今却都已销声匿迹了。要来讨论曾被提出来的某些可能性——借以看看人类智力中的一些奋斗历程——仍满有趣味。

我们是通过谈论一个电荷与另一个电荷之间的相互作用而开始我们的电学理论的。然后又对这些互作用着的电荷建立一种理论并归结为一套场论。对此我们的信心竟有如此之强，以致容许它来告诉有关电子中的一部分作用于另一部分上之力。也许整个困难就在于电子根本不会对其本身起作用；也许从彼此分开着的各电子互作用过渡到一个电子作用于其本身上的概念给外推得太远了。因此有些理论就提出来，其中电子作用于自身的可能性给排除掉。于是，就不再有由于自作用而引起的那种无限大。并且，也不再有任何与该粒子联系着的电磁质量了；所有质量都回到机械性质上面去，但在这么一种理论中仍有一些新的困难。

我们必须立即申明，象这样的理论就要求对电磁场概念加以修改。你会记起，我们从一开始就讲，在任一处施于一粒子上之力仅由两个量—— E 和 B ——来确定。如果我们放弃

* 我们是在采用这么一种记法： $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\dddot{x} = d^3x/dt^3$, 等等。

了“自力”，则这一说法将不再正确，因为假定某处有一电子，它所受之力并非由总 E 和总 B 所给出的，而只是由别的电荷所产生的那些部分 E 和 B 所给出。因此我们总得记住， E 和 B 中有若干是来自将要算出对其所施之力的那个电荷的，而又有若干则是来自其他电荷的。这使得理论变成烦琐得多，但却消除了那个无限大困难。

因此，如果我们乐意，便可以说没有诸如电子作用于其本身上的那种事情，因而抛弃式(28.9)中那一整系列之力。然而这么一来，我们却把小孩连同澡盆里之水都一起倒掉了！因为式(28.9)中的第二项，即那 \ddot{x} 项，仍然是需要的。这个力会做某种十分明确的事情。如果你把它丢掉，你又将再陷入困难之中。当我们对一电荷加速时，它会辐射出电磁波，从而损耗了能量。因此，要使一电荷加速，比起要对一等质量的中性物体加速，就必然需要更大一些的力；否则能量该不会守恒了。我们对一被加速粒子所作之功的时率必须等于每秒由于辐射而损耗的能量。以前就曾谈论过这一种效应——那是称为辐射电阻的。不过我们仍须回答这样一个问题：要作功以抵抗的那个附加力究竟来自何方？当一巨大天线正在辐射时，力是来自天线中的一部分电流对另一部分电流的影响。对于一个单独的被加速电子向一个原来就是空洞洞的空间中辐射，力似乎只能从唯一的一个地方来——即从电子的一部分对另一部分的作用而来。

我们回到在第一卷第三十二章中找到了一个振动电荷以这么一个时率辐射出能量：

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\ddot{x})^2}{c^3}. \quad (28.10)$$

让我们看看为抵抗式(28.9)的靴带力而对电子所作之功率如何。功率等于力乘速度，或 Fx ：

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \dot{x} \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} \dot{x} + \dots \quad (28.11)$$

第一项与 $d\dot{x}^2/dt$ 成正比，因而恰好对应于与电磁质量联系在一起的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的变化。第二项就该对应于式(28.10)中的辐射功率了。可是它仍有所不同。差异是由于式(28.11)中那一项是普遍正确的，而式(28.10)却只对于一振动电荷才正确这么一桩事实。我们能够证明：如果电荷运动是周期性的，则这两者彼此等同。为此，就应当将式(28.11)中的第二项重新写成

$$-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt} (\dot{x} \ddot{x}) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2,$$

那不过是一种代数变换。如果电子运动是周期性的，则 $\dot{x} \ddot{x}$ 这个量会周期性地回到它的原值，使得若取其时间微商的平均便会得到零。然而，第二项却总是正的（它是一个平方），因而它的平均值也是正的。这一项给出了所作的净功，并恰好等于式(28.10)。

为了使在辐射系统中的能量守恒，那个由 \ddot{x} 所表示的靴带力项是必需的，因而不能把它丢掉。事实上，洛伦兹的各项胜利之一就是在证明有这么一种力存在并且是来自电子对其本身的作用的。我们必须相信电子对其本身作用的那种概念，并需要该 \ddot{x} 项。问题在于如何获得该项，而又不致于同时得到式(28.9)中的第一项，那是一切困难之源。我们不懂得应该怎么办才好。你看，经典电子理论已经把它自身逼进了一个绝境。

已有若干种修改定律的其他尝试以期把事情解决。由玻恩(Born)和英费耳德(Infeld)建议的一种办法，是要按照一种复杂方式改变麦克斯韦方程组使其不再是线性的。这样，电磁能量和动量就可以表现出有限大。但他们所倡议的这些规律还预言了一些从未被观测到

的现象。他们的理论也遭遇到另一种我们将在下面谈到的而为所有这一切为避免上述毛病作的尝试所共通的困难。

下述的独特可能性是由狄喇克提出的。他说：让我们通过式(28.9)中的第二项而不是通过其第一项来容纳电子作用于其本身上，然后他又有一种能消除其中一项而不消除另一项的聪颖意见。他说，看！当我们只取麦克斯韦方程组的推迟波解时我们作了一种特殊的假设；要是我们转而取那些提早波，就该得到一些别的东西。关于自力的公式会是

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^3} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{x} + \dots \quad (28.12)$$

除了级数中的第二项——和某些更高次项——的符号外，这个式恰好就象(28.9)。〔从推迟波变成提早波不过改变该推迟的符号，而不难看出，这相当于处处都改变 t 的符号。对于式(28.9)的唯一效果就是改变所有奇数次的时间微商的符号。〕所以，狄喇克说，让我们建立一个新的法则，即电子作用于其本身是通过它所产生的推迟与提早的两种场的差值之一半而进行的。这样，式(28.9)与(28.11)之差，除以 2，便是

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \text{更高次项}.$$

在所有更高次的项中，该半径 a 升至某一正幂出现在分子上。因此，当我们进到点电荷的极限时，就只会得到那么一项——恰恰是所需要的。就这样，狄喇克得到了该辐射电阻之力而毫无那些惯性力。电磁质量不见了，而经典理论也得救了——可是却付出了关于自力的任意假定的那种代价。

狄喇克的附加假设的任意性至少部分地被惠勒(Wheeler)和费曼所解除，他们建议一个更加奇怪的理论。他们提出点电荷仅与其他的电荷互相作用，但这互作用一半是通过提早波而另一半是通过推迟波。结果变成，最令人惊奇地，在大多数场合下你将不会看到那些提早波的任何效应，但提早波却的确具有刚好产生那辐射作用力的效应。该辐射电阻并不是由于电子作用于其本身上，而是由于下述的特殊效应。当一电子在 t 时刻被加速时，它将在一些较后时刻 $t' = t + r/c$ (其中 r 为至其他电荷的距离)动摇世界上所有一切其他电荷，这是由于那些推迟波的所作所为。但此时这些别的电荷又通过其提早波以折回来作用于原来那个电子上，这些波将在等于 t' 减去 r/c 的 t'' 时刻、当然也就恰恰在 t 时刻上到达。(它们也用其推迟波折回来作用，但那不过是对应于正常的“反射”波罢了。) 提早波与推迟波的组合意味着，当一个振动电荷正在被加速时它会感觉到来自所有“将对”其所辐射出之波进行吸收的那些电荷之力。你看在试图获得一个关于电子的理论时人们会陷入多么严重的困难中！

现在要来描述另一种理论，以表明当人们给绊住时会想到些什么东西。这是由柏派(Bopp)提出的另一种对电动力学定律的修改。你会认识到，一旦你决定要来修改电动力学方程组时，你可以在任一个想要下手的地方开刀，可以改变关于电子的力律，或者改变麦克斯韦方程组(正如我们在已描述过的那些例子中所见到的)，或者也可在任何其他一处作出改变。一种可能性是去改变那些用电荷和电流以给出势的公式。我们的这些公式之一申述了在某一点上之势是由在一较早时刻在某一其他点上的电流(或电荷)密度所给出的，应用有关势的四元矢记法，写成

$$A_\mu(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_\mu(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (28.13)$$

柏派的美妙而又简单的想法是：也许困难出在这个积分里的因子 $1/r$ 上。假设我们从此开始，即只是通过假定在某点上之势取决于在任何其他点上的电荷密度作为该两点间距离的某一函数，比如说 $f(r_{12})$ 吧。于是，在点(1)处的总势就将由 j_μ 乘以这一函数而遍及全部空间的积分所给出：

$$A_\mu(1) = \int j_\mu(2) f(r_{12}) dV_2.$$

这就是一切。既没有微分方程，也没有其他的东西。噢，还有一件事情。我们也要求这结果应该是相对论上不变的。因此所谓“距离”，我们应取在空时中两点间的那种不变“距离”。这一距离的平方（在一个无关紧要的符号变化范围之内）为

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (28.14)$$

因此，对于一个相对论上不变的理论来说，我们就应当采取 s_{12} 的大小的某一函数，或与此相同的，即采取 s_{12}^2 的某一函数。因此柏派理论就是

$$A_\mu(1, t_1) = \int j_\mu(2, t_2) F(s_{12}^2) dV_2 dt_2. \quad (28.15)$$

（当然，这积分就应该是遍及四维体积 $dt_2 dx_2 dy_2 dz_2$ 而取的了。）

剩下的一切就是要选取一个适当函数作为 F 。对于 F 来说，我们仅仅假定这么一点——即除了当其自变数接近于零时都十分微小——使得 F 的曲线象图 28-4 所示的那样。它是一个狭窄钉形，具有一个集中于 $s^2=0$ 处的有限面积，并具有我们可以说是约略等于 a^2 的宽度。无妨草率地这样说，当我们计算点(1)上之势时，只有在如果 $s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2$ 是在零点的 $\pm a^2$ 之内的那些点(2)才能产生任何可观的效应。我们可以通过提出只有对于

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 \approx \pm a^2 \quad (28.16)$$

F 才重要来指明这一点。你如果乐意，还可以使它更为数学化些，但那就是我们的打算。

现在假定 a 比起象电动机、发电机等寻常器物的大小来要小得多，以致在正常问题中总是 $r_{12} \gg a$ 。

这样式(28.16)便申述，只有在 $t_1 - t_2$ 处于下列的小范围内那些电荷才会对式(28.15)的积分有所贡献：

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} \approx r_{12} \sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}.$$

由于 $a^2/r_{12}^2 \ll 1$ ，该平方根便可由 $1 \pm a^2/2r_{12}^2$ 来作近似，因而

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c} \left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2} \right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$

这有什么含义呢？这一结果申明，在 A_μ 的积分中只有与所要计算在其上的势的那一时刻 t_1 相差为该推迟时间 r_{12}/c ——带有一个只要符合 $r_{12} \gg a$ 便可以忽略的改正项——的那些时刻 t_2 才是重要的。换句话说，柏派的这一理论在它给出推迟波的效应这一意义上来说

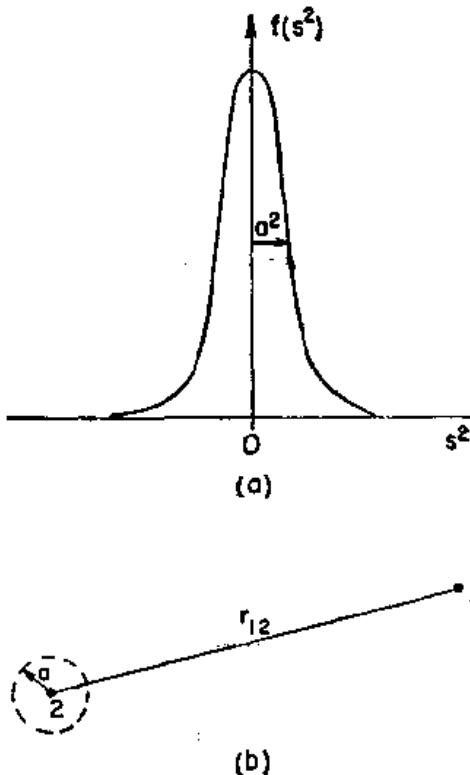


图 28-4 用于柏派的非局域理论中的函数 $F(s^2)$

是接近于麦克斯韦理论的——只要我们远离任一特定电荷就行。

事实上，我们能够约略地看出式(28.15)的积分会给出个什么结果。如果首先对于 t_2 从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 进行积分——保持 r_{12} 固定不变——那么 s_{12}^2 也将从 $-\infty$ 进至 ∞ 。该积分将全部来自以 $t_1 - r_{12}/c$ 为中心、而具有狭小宽度 $\Delta t_2 = 2a^2/2r_{12}c$ 的那些 t_2 。设函数 $F(s^2)$ 在 $s^2=0$ 处具有 K 值；则对于 t_2 的积分会约略给出 $K j_\mu \Delta t_2$ ，或

$$\frac{Ka^2}{c} \frac{j_\mu}{r_{12}}.$$

当然，还应该取 $t_2 = t_1 - r_{12}/c$ 时的 j_μ 值，因而式(28.15)就变成

$$A_\mu(1, t) = \frac{Ka^2}{c} \int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2.$$

如果我们挑选 $K = q^2 c / 4\pi\epsilon_0 a^2$ ，便将径直地回到麦克斯韦方程组的那种推迟势解上去——自动地包括了该 $1/r$ 的依存关系！而这全都来自这么一个简单主张，即在空时中某一点上之势取决于在空时中所有其他各点上的电流密度，不过带有一个作为两点间四维距离的某一狭窄函数的权重因数。这一理论又再预言一个有限大的电子电磁质量，而能量与质量之间也有一个对于相对论来说是正确的关系。它们必然如此，因为这理论从一开始就是属于相对论性不变的，而一切似乎都很对头。

然而对于这一理论，同时也对于我们所曾描述过的所有其他各种理论，都存在一个基本缺点。我们知道，一切粒子都遵循量子力学规律，因而对电动力学的一种量子力学修正总是必须做出的。光的行为活象光子，并非百分之百地象麦克斯韦理论那样。因此，电动力学理论就必须改变。我们已经提出过，为了澄清经典理论而要那么艰苦地工作也许是白费时间，因为有可能变成在量子电动力学中那些困难将被清除或可以按照其他某一方式得到解决。可是，这些困难在量子电动力学中却也未被消除。人们之所以花那么多精力试图解决这些经典困难，其中原因之一就是希望假如他们能够扫除这些经典困难，然后才去作量子力学方面的修正，一切就都会妥当。在作了量子力学的修正之后麦克斯韦方程组仍然存在困难。

量子效应确会造成某种变化——有关质量的公式已经改变了，而普朗克常数也出现了——但答案仍然会呈现无限大，除非你想办法在一个积分上截止下来——正如我们过去不得不在那经典积分上在 $r=a$ 处就停下来一样。而答案就取决于你怎样去停止那些积分。可惜我们在这里不能向你们证明那些困难实际上是基本相同的，因为我们对于量子力学理论迄今只掌握了那么少，而对于量子电动力学甚至还更少了。所以你就必须仅仅相信我们的话，即麦克斯韦电动力学的量子化理论对于一个点电子来说仍会给出一个无限大的质量。

然而，事实证明，迄今从未有人曾对任一个已经修改过了的那些理论造成一种自洽的量子理论。玻恩和英费耳德的概念从没有给满意地纳入量子理论之中。狄喇克的或惠勒和费曼的关于提早和推迟波的那些理论也从未被满意地纳入量子理论之中。柏派的理论同样也未曾给纳入到令人满意的量子理论中。所以今天，还没有已知的对这一问题的解答。我们未曾懂得如何去形成对电子或对任一个点电荷不会产生出一个无限大的自能的一种协调的理论——包括量子力学。而在同时，也没有一种会描述一个非点电荷的令人满意理论。这是还未得到解决的一个问题。

当你决定仓卒地去作出一个其中电子对其本身的作用完全被消除，从而使电磁质量不

再具有任何意义的理论，然后又对之建成一套量子理论时，那你就应该被警告说，一定会陷于困难之中。有明确的实验证据表明，电磁惯性是存在的——有证据表明，带电粒子的某些质量的确具有电磁起源。

在较古老的书本中往往会说，由于大自然显然不愿意向我们提供两种粒子——除了一个是有电荷的而另一个是中性的之外其他方面则全都相同——我们就将永远不能够说出有多少质量是属于电磁的而有多少是属于机械的。但结果弄清楚，大自然已经足够仁慈来供给我们恰恰就是这样的物体，以便通过对一个带电粒子的质量观测值与一个中性粒子的质量观测值进行比较，就能够道出是否有任何电磁质量。例如，存在中子和质子，它们之间互作用着一些巨大之力——核力——其来源还不清楚。然而，正如我们所曾经申述过的，核力具有一种引人注目的性质，就核力这方面来说，中子与质子完全相同。就我们所能说的，中子与中子、中子与质子、质子与质子间的核力全都相同。只有那小小的电磁力才是不同的；从电方面说，质子与中子间的差别有如白天和黑夜。这恰好就是我们所需要的。我们拥有两种粒子，从强相互作用的观点看是全同的，但从电方面看则是不同的。而它们在质量上存在一个小差别。质子与中子间的质量差别——用兆电子伏的单位来表达其静能 mc^2 之差——约为 1.3 兆电子伏，那约等于电子质量的 2.6 倍。于是经典理论就该预言一个约等于经典电子半径的 $1/3$ 至 $1/2$ 、或约为 10^{-13} 厘米的半径。当然，人们实际上应该采用量子理论方面的结果，但由于某种奇怪的偶合，所有的常数—— 2π 和 \hbar 等等——凑合起来，使得量子理论竟会给出与经典理论约略相同的半径。唯一的困难是符号错了！中子比质子还要重。

表 28-1 粒子质量

粒 子	电 荷 (电子电荷单位)	质 量 (兆电子伏)	Δm^* (兆电子伏)
n (中子)	0	939.5	
p (质子)	± 1	938.2	-1.3
$\pi(\pi \text{介子})$	0	135.0	
	± 1	139.6	+4.6
$K(K \text{介子})$	0	497.8	
	± 1	493.9	-3.9
$\Sigma(\Sigma \text{超子})$	0	1191.5	
	+1	1189.4	-2.1
	-1	1196.0	+4.5

* $\Delta m = (\text{带电粒子的质量}) - (\text{中性粒子的质量})$ 。

大自然还提供几种别的粒子对——或三重态——除了它们的电荷之外其他各方面的表现都完全相同。它们通过所谓核力的“强”互作用来与质子和中子发生反应，在这些互作用中，每一种粒子——比如说 π 介子——除了它们的电荷之外每一方面都表现得一模一样。表 28-1 上给出这种粒子的一张清单，包括对它们测定的质量。那些带电的 π 介子——无论正的或负的——都各拥有 139.6 兆电子伏的质量，但中性 π 介子则比之要轻 4.6 兆电子伏。我们相信，这一质量差值是电磁性质的；它该相当于一个半径为 3 至 4×10^{-14} 厘米的粒子。你将从表上看到其他粒子的质量差值往往也具有这一相同的普遍大小。

原来这些粒子的大小是可以由其他方法、诸如由在高能碰撞中所表现出来的直径来测定的。因此，这电磁质量似乎一般都与电磁理论相一致，只要在场能的那些积分中截止于由

这些其他方法所测定的那同一个半径上。这就是为什么我们要相信这些差值确实会代表电磁质量的原因。

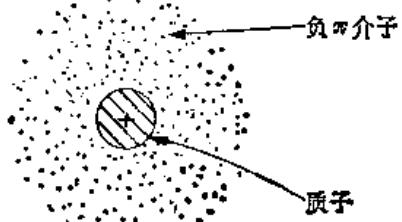


图 28-5 有时, 中子可能作为一个由一个负 π 介子所包围着的质子而存在

你无疑会对表上的那些质量差值中的不同符号感到担心。要看出为什么那些带电粒子会比中性粒子重些挺容易, 但象质子和中子那么一对, 其中测量出来的质量倒表现出相反, 那又是怎么一回事呢? 噢, 结果弄清楚, 这些粒子较为复杂, 因而对于它们的电磁质量计算就一定要更精细些。例如, 尽管中子没有净电荷, 但在其内部确有一种电荷分布——只是其净电荷等于零。事实上, 我们相信中子——

至少有时——看来象一个给一幅负 π 介子“云”所包围着的质子, 如图 28-5 所示。尽管由于总电荷等于零, 中子表现出“中性”, 但它仍然拥有电磁能量(例如, 它具有磁矩), 因此, 若没有对其内部结构的一种详尽理论, 就不容易道出该电磁质量差值的符号来。

我们在这里只愿意来强调下述几点: (1) 电磁理论预言有一种电磁质量存在, 但它这样做时也得脸朝下倒下来, 因为它不会产生一个一致的理论——而对于量子修正也是如此; (2) 关于电磁质量的存在是有实验依据的; 而(3) 所有这些质量都大体上与电子的质量相同。因此, 我们再又回到洛伦兹的原来想法上来——也许全部电子质量纯粹是电磁性质的, 也许整个 0.511 兆电子伏都起源于电动力学。究竟是, 还是否呢? 由于我们还未得到一套理论, 所以就说不出来了。

必须提起最令人烦恼的另一点消息。在世界上还有一种叫做 μ 介子的粒子, 那就我们所能说的除了它的质量以外没有任一方面有别于电子。它每一方面都很象电子: 同中微子会互相作用, 同电磁场也有互作用, 但就是没有核力。它的表现丝毫无异于电子——至少, 没有任何事态不能只作为它的较高质量(206.77 倍电子质量)的后果来加以理解的。因此, 每当有人最后获得关于电子质量的解释时, 他将对 μ 介子从何处得到它的质量感到困惑。为什么呢? 因为无论电子干的什么, μ 介子总是照样地干——所以质量就理应表现相同。有人坚定地相信这么一个见解, 即 μ 介子与电子是同一种粒子, 而在有关质量的最后理论中, 对质量的公式将是一个拥有两个根的二次方程——其中每个根指每一种粒子。也有一些人建议, 那将是一个具有无限多个根的超越方程, 而他们正在从事猜测在这一系列中其他粒子的质量应该是什么, 并为什么这些粒子还未曾被发现。

§ 28-6 核 力 场

我们愿意对那一部分非电磁性质的核粒子质量进一步作某些评述。这另一大部分质量究竟从哪里来的呢? 除了电动力学以外还有别种力——象核力——它们也各有其本身的场论, 尽管没有任何人会知道目前通行的那些理论到底是否正确。这些理论也预言了一种会对于那些核粒子提供一个与电磁质量相似的质量项的场能; 我们尽可以把它称为“ π 介子场质量”。它大概会十分巨大, 因为那些力是很庞大的, 而这可能就是那些重粒子的质量起源。但有关介子场的理论目前还处于最初步状态上。纵然利用发展得最完美的电磁理论, 我们仍然发现在解释电子质量时不能越过那第一个基点。至于对介子理论, 我们就象在棒球场上三击不中而退下来了。

由于同电动力学存在着有趣联系, 我们将花一点时间来略述介子理论。在电动力学中,

场可以用满足下列方程的一个四元矢来描述:

$$\square^2 A_\mu = \text{源}.$$

现在我们已经见到, 场的各部分场可以辐射出去, 因而可以离开源而存在。这些就是属于光的光子, 而它们是由一个无源的微分方程描述的:

$$\square^2 A_\mu = 0.$$

人们曾经议论说, 核力场也应拥有它本身的“光子”——它们大概会是 π 介子——而它们应由一个相似的微分方程来描述。(由于人类脑子的弱点, 我们始终不能想出某些真正新的东西; 因而才不得不用已知的东西来作比拟式的论证。) 因此, 介子方程式也许就是

$$\square^2 \phi = 0,$$

其中 ϕ 可能是一个不同的四元矢或也许是一个标量。如果采用这一简单方程 $\square^2 \phi = 0$, 则介子场应该随着与源间的距离按 $1/r^2$ 变化, 正如电场所干的那样。可是我们知道, 核力具有短得多的作用距离, 因而该简单方程式就行不通。有一种办法能够把东西改变而又不会破坏相对论不变性的: 我们可以对达朗伯算符加上或减去一个常数乘以 ϕ 。因此汤川秀树(Yukawa)就曾建议, 核力场的自由量子或许会遵循这么一个方程:

$$\square^2 \phi - \mu^2 \phi = 0, \quad (28.17)$$

式中 μ^2 是一常数——也就是一个不变的标量。(既然 \square^2 是在四维中的一个标量微分算符, 所以如果我们对之加上另一个标量, 它的不变性仍然成立。)

让我们来看看, 当事情不随时间变化时式(28.17)会给出一个怎么样的核力。我们希望有满足下列方程的围绕着某一比方处于原点上之点源的一个球对称解:

$$\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi = 0.$$

如果 ϕ 仅取决于 r , 则我们知道

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi).$$

因此就有这么一个方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) - \mu^2 \phi = 0$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = \mu^2 (r\phi).$$

把 $(r\phi)$ 想象成因变数, 这便是我们曾经多次见过的一个方程。它的解是

$$r\phi = K e^{\pm \mu r}. \quad (28.18)$$

这一函数称为汤川势。对于吸引力来说, K 是一负数, 其大小应被调整以适应在实验上所观测而得的力之强度。

核力的汤川势降落得比 $1/r$ 还要快该指数函数因子那么多。对于超过 $1/\mu$ 的那些距离, 这个势——从而这个力——降落到零要比 $1/r$ 快得多, 如图28-6所示。核力“范围”要比静电力“范围”小得多。从实验上发现, 核力并不会超出约 10^{-13} 厘米之外, 因而 $\mu \approx 10^{15}$ 米⁻¹。

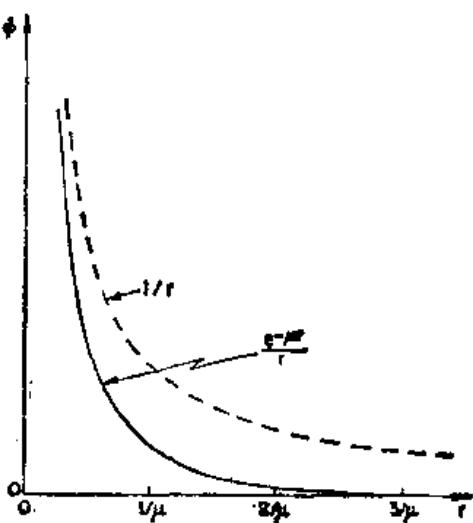


图 28-6 汤川势 $e^{-\mu r}/r$, 与库仑势 $1/r$ 相比较

最后, 让我们看看方程(28.17)的自由波解。如果将

$$\phi = \phi_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

代入式(28.17)中, 便得

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0.$$

将频率与能量、波数与动量互相联系起来, 象在第一卷第三十四章末尾我们曾经做过的那样, 便可得到

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \mu^2 \hbar^2,$$

上式申述, 该汤川“光子”拥有一个等于 $\mu \hbar / c$ 的质量。如果我们对 μ 采用那个会给出核力的观测范围的估计值 10^{15} 米 $^{-1}$, 那么质量就会得出 3×10^{-36} 克, 或 170 兆电子伏, 这约莫等于所观测到的 π 介子的质量。因此, 根据与电动力学作类比, 我们该说 π 介子就是核力场中的“光子”。但现在我们已把电动力学的那些概念推广到其中它们可能实际上并不适用的领域中去了——我们已越过了电动力学范围而进入到核力的问题中。

电荷在电场和磁场中的运动

§ 29-1 在匀强电场或匀强磁场中的运动

我们现在要来描述——主要采取定性方式——在各种不同情况下电荷的运动。大多数电荷运动于场中的有趣现象都发生于那里有许许多多电荷互相作用着的十分复杂的情况下。例如，当电磁波行经一块材料或一团等离子体时，会有亿万个电荷与该波起作用并彼此互作用。往后我们将进入这样的问题，但现在却只要来讨论那简单得多的关于在一给定场中一个单独电荷的运动。这样就可以忽略所有其他电荷——当然除了存在于某处的借以产生我们将要假定其存在之场的那些电荷和电流以外。

我们大概应当首先质问粒子在一匀强电场中的运动。在低速上，这一种运动并非特别有趣——它不过是在该电场方向上的匀加速而已。然而，如果粒子拾取了足够多的能量以致成为相对论性的，那么运动就会变得更加复杂。但我们将对这一情况的解决留给你们自己去玩玩。

其次，要考虑在一匀强磁场中那里并没有电场的那种运动。我们已解决了这个问题——其中一个解答是，粒子会围绕着圆周团团转。磁力 $qv \times B$ 始终与运动成直角，因而 $d\mathbf{p}/dt$ 就会垂直于 \mathbf{p} 并具有量值 $v p / R$ ，其中 R 为圆周半径，即

$$F = qvB = \frac{vp}{R}.$$

于是该圆周轨道的半径就是

$$R = \frac{p}{qB}. \quad (29.1)$$

那只是一种可能性。如果粒子还有沿场向的运动分量，则这一运动将保持不变，因为在场向上不可能有磁力的分量。粒子在一匀强磁场中的普遍运动将是一个平行于 B 的匀速运动加上一个垂直于 B 的圆周运动——轨道乃是一条柱形螺旋线（图 29-1）。这螺旋线的半径由式(29.1)所给，只要我们用垂直于场的动量分量 p_{\perp} 来代替其中的 p 。

§ 29-2 动量分析

一个匀强磁场往往被用来造成一部对于高能带电粒子的“动量分析器”或“动量谱仪”。假定该带电粒子在图 29-2(a)的 A 点处被射入一匀强磁场中，这磁场与该图面垂直。每一粒子将在半径正比于粒子动量的一个圆周上跑动。如果所有粒子都正交地在场缘处进入场中，那么它们便将在一个（与 A 点间的）距离为 x 的地方离开场，这 x 值正比于它们的动量

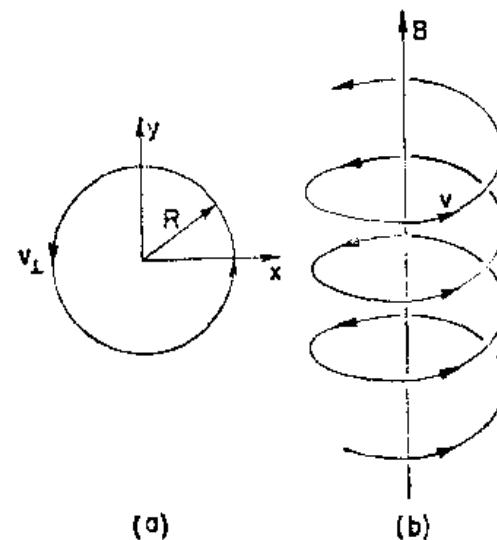


图 29-1 粒子在一匀强磁场中的运动

p. 一个放在诸如某点 O 上的探测器将只能探测到其动量落在 $p = qBz/2$ 附近一个间隔 Δp 内的那些粒子.

当然, 并不要求粒子在它们被探测到之前都要走过 180° , 但这种名为“ 180° 谱仪”却具有一种独特性质. 并不要求所有粒子全都以直角进入该场缘. 图 29-2(b) 显示三个粒子的轨道, 它们都拥有同一动量, 但各以不同角度进入场中. 你看它们各取不同轨道, 可是全都在很靠近于 O 点处离开了场. 我们说存在一个“焦点”. 象这样的聚焦特性有其优越之处, 即较大的角度范围可以在 A 点处被接受——虽则某些限制往往仍得加上, 如图中所示的那样. 对一个较大角度范围的接纳经常意味着较多的粒子在一个给定时间内被计算了进去, 这就减少了对某一特定量度所需的时间.

通过变更磁场, 或沿 x 轴移动探测器, 或由运用许多个计数器以遮盖一个 x 范围, 该入射束的动量“谱”就可以测得了. [所谓“动量谱” $f(p)$, 我们指的是动量介乎 p 与 $(p+dp)$ 之间的粒子数为 $f(p)dp$.] 比方, 这样的方法就曾用以测定各种不同原子核在 β 衰变中的能量分布.

有许多其他形式的动量谱仪, 但我们只将对具有特别大的接收立体角的那一种加以描述. 它是以

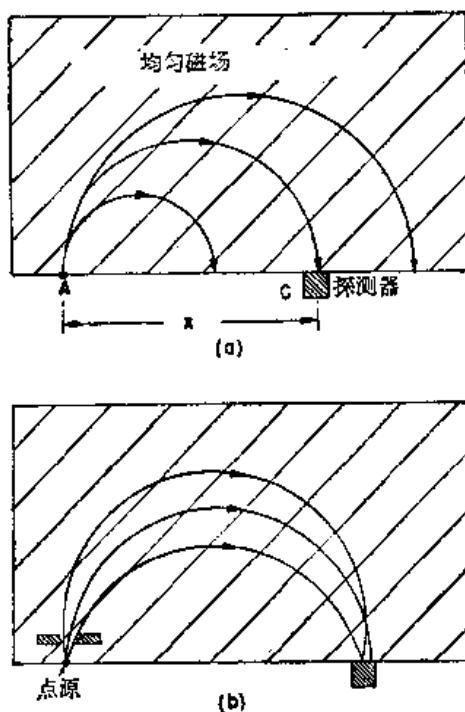


图 29-2 用匀强磁场 180° 聚焦的动量谱仪: (a) 动量不同; (b) 角度不同(磁场指向与图面垂直的方向)

如图 29-1 所示的那种在匀强场中的螺旋轨道为基础的. 让我们设想一个柱面坐标系—— ρ, θ, z ——这样布置得使 z 轴沿着场向. 如果一个粒子以相对于 z 轴的某一角度 α 从原点发射而出, 则它将沿一条其方程为

$$\rho = a \sin kz, \quad \theta = bz$$

的螺旋线运动, 其中 a 、 b 和 k 都是你可以容易用 p 、 α 和磁场 B 来表达的参数. 如果对于某一给定动量, 但对于几个不同起角, 把与轴的距离 ρ 作为 z 的函数画成曲线, 则我们将得到象图 29-3 所示的那些实曲线.

(记住这不过是对一条螺旋线的投影.) 当发射方向与轴作成较大角度时, ρ 的峰值变大, 但其纵向速度则变小, 从而使不同角度的轨道倾向于在图的 A 点附近形成一个“焦点”. 如果我们放置一个窄孔于 A 点处, 那么在一个起角范围内的粒子仍然能够穿过它而到达轴线上, 在那里粒子可由一个长条形探测器 D 进行计算.

以较高动量在与上述相同的那些角度上从原点射出之粒子将遵循那些虚曲线轨道而不能穿过在 A 处的那个窄孔. 因此, 这部仪器将选出一个小间隔的动量. 比起上述那第一种谱仪的优点是: 孔 A ——以及孔 A' ——都可以作成环形孔, 以便使在一个相当大的立体角范围内离开了源的粒子都能够被接收到. 来自源的大部分粒子都给应用上了——对于弱源或为了十分精密的测量这都是一个重要优点.

然而, 人们对于这一优点毕竟付出了代价, 因为需要一个大体积的匀强磁场, 而这往往

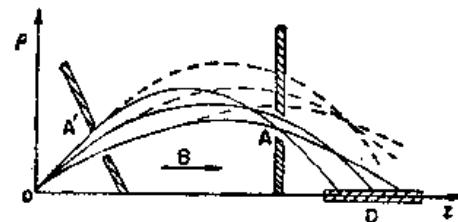


图 29-3 一个轴向场式谱仪

仅对于低能粒子才是切实可行的。你会记起，造成匀强磁场的一种办法是去绕一个线圈于一球面之上，以其面电流密度正比于该角度的正弦。你也能够证明，这同一事情对于一个旋转椭球来说也属正确。因此这种谱仪往往是在一个木(或铝)架上绕上一个椭球形线圈。所要求的一切就是在每一沿轴距离 Δx 上的电流都相同，如图 29-4 所示的那样。

§ 29-3 静电透镜

粒子聚焦有许多应用。例如，在一个电视显象管中那些离开了阴极的电子都在显象屏上聚成一个焦点——为了形成一个细斑。在这一种情况下，人们希望把所有具有同一能量但以不同初角射出来的粒子都聚集在一小点上。这一问题就象用透镜来把光聚焦一样，因而对粒子也会干这种相应工作的那一类设备就也叫做透镜。

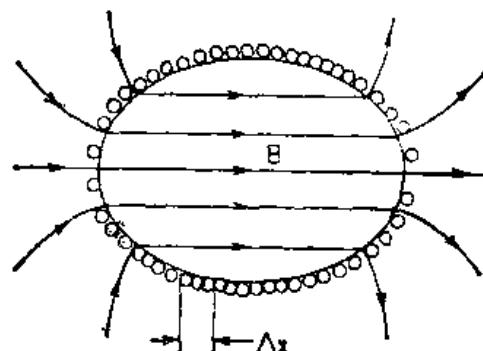


图 29-4 在一个每一沿轴间隔 Δx 中有相等电流的椭球形线圈里面所产生的匀强磁场

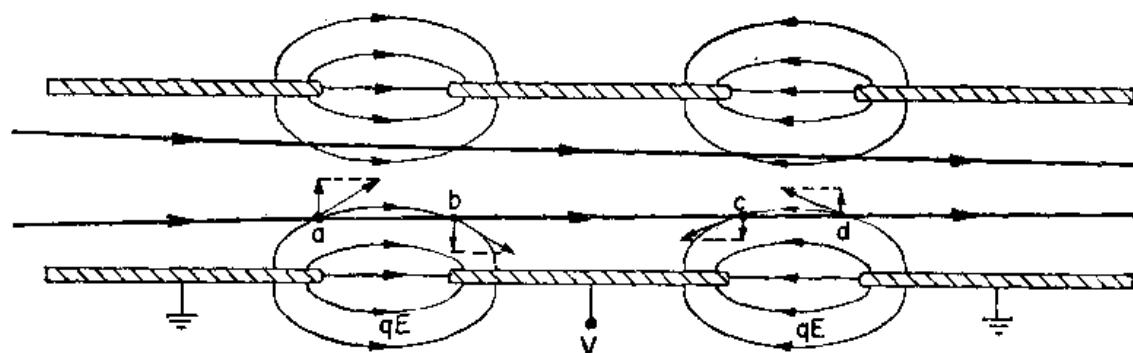


图 29-5 静电透镜。这里所示的场线是“力线”，也即 qE 线

电子透镜的一个例子简略示如图 29-5。它是一个其动作取决于两邻极间的电场的静电透镜。其运用情况可通过考虑一条从左边进来的平行电子束会发生什么来加以理解。当各电子到达 a 区时，它们会感到一个侧向力分量而获得某一使其弯向轴心的冲力。你也许会想到，它们会在 b 区获得一个相等而相反的冲力，但事实却不是这样。当电子到达 b 区时它们已得到了能量，从而在 b 区停留的时间就较短。力还是一样，但时间短些，冲力也就小些了。在从 a 区进至 b 区时，就有一净轴向冲力，因而电子会弯向一个共同点。在离开了高电压区之后，这些粒子又得到指向轴心的另一次冲击。在 c 区的力是向外的而在 d 区的力则是向内的，但粒子在后一区域里停留的时间较长，因而又再受到一个净冲力。对于离轴心不太远之点，通过透镜时的总冲力与离轴心的距离成正比(你能否看出个什么原因来？)，而这正是对透镜式聚焦所要求的条件。

你能够用同样的论据来证明，无论该中间电极的电势相对于其他两极是正还是负，都会有聚焦作用。这一种类型的静电透镜通常用于阴极射线管或某些电子显微镜中。

§ 29-4 磁透镜

另一种透镜——常出现在电子显微镜中——就是简略示如图 29-6 的磁透镜。一块柱形对称的电磁铁具有十分尖锐的圆形尖极而能在一小区域里产生一个非均匀的强磁场。

一些沿竖向行动的电子在通过这一区域中时被聚焦了。你能够通过考察如图 29-7 所示的有关该极尖区的放大图象而理解其机制，考虑以相对于轴线某一角度离开了源 S 的 a 和 b 两电子。当电子 a 到达场的首部时，它被场的水平分量所偏转以致离开了你。但这时电子将有一侧向速度，使得当它经过该强竖向场时会得到一个朝向轴心的冲力。它的侧向运动当离开场时便给该磁力所消除，因而净效应就是一个朝向轴心的冲力加上一个环绕轴线的“旋转”。作用于粒子 b 上之所有力都与此相反，因而它也朝向轴心而偏转了。在这图中，那些发散出去的电子都被引导成走平行路线。这一作用就象置一物体于透镜的焦点上一样。安排在上游的另一个相似透镜则可用来把这些电子再聚焦回一个单独的点上去，以便造成该 S 源之象。

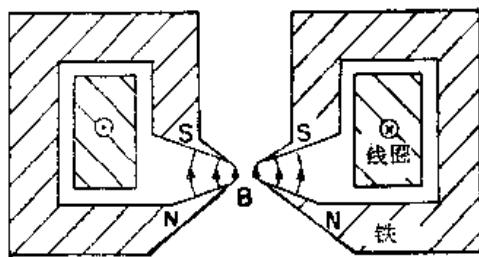


图 29-6 磁透镜

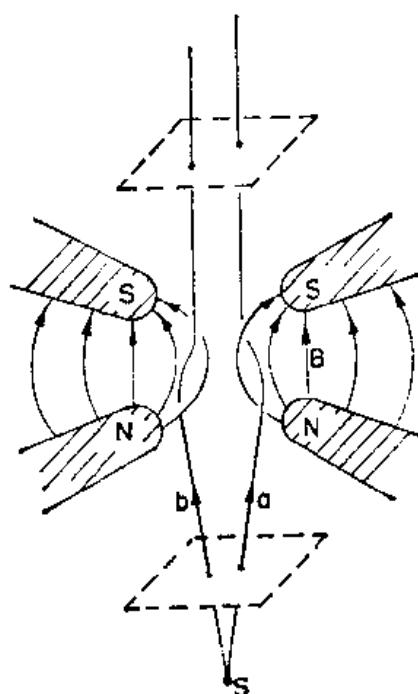
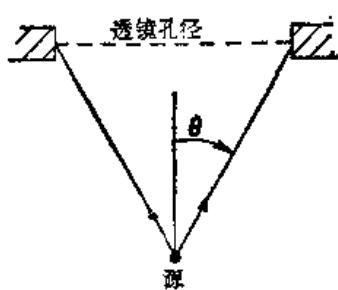


图 29-7 在磁透镜中电子的运动

§ 29-5 电子显微镜

你们知道，电子显微镜能够“看见”光学显微镜所无法看到的非常微小的东西。我们曾在第一卷第二十章中讨论过由于透镜孔径的衍射使任一光学系统所遭受的一些基本限制。



如果透镜孔径从源点对向一个角度 2θ (见图 29-8)，则在源处的两邻点若其间距约略比

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

还小，便不能看成两个分开之点，式中 λ 为光之波长。用最优良的光学显微镜， θ 会接近于 90° 的理论极限，因而 δ 约等于 λ ，即约为 5000 埃。

图 29-8 显微镜的分辨本领受从源点对向之角所限制

对于电子显微镜来说这同一限制也该适用，不过这里的波长——对于 5 万伏的电子——约为 0.05 埃。假如人们能够采用一个接近 30° 的孔径，就该能看到相距只有一埃的 $\frac{1}{5}$ 的两物体。由于分子里原子的典型距离为 1 或 2 埃，我们就该能拍得分子的照片了。生物学会变得容易；我们该拥有关于脱氧核糖核酸结构的照片，那将是多么重大的一件事情呵！今天分子生物学中大多数研究工作就是在琢磨出关于复杂有机分子的形状。但愿我们能够看到这些分子！

可惜，迄今在电子显微镜中能够获得的最高分辨本领还只是接近 20 埃。原因是，还没

有人能够设计出一种具有大孔径的透镜，所有一切透镜都带有“球面象差”，那意味着与轴作成大角度的射线比起靠近轴的那些射线来其聚焦之点不同，如图29-9所示。通过特殊技术，光学显微镜的透镜可以造成仅带有可忽略的球面象差，但迄今还没有人能制成一种避免了球面象差的电子透镜。

事实上，人们能够证明，任何一种我们所曾经描述过的静电透镜或磁透镜一定会有不可能加以消除的球面象差量。这一象差——和衍射在一起——把电子显微镜的分辨本领限制在目前的数值上。

我们所提及的那种限制不适用于非轴对称的或在时间上不是恒定不变的那些电场和磁场。也许有朝一日将会有有人想出一种新型的电子透镜，它能够克服那种为简单电子透镜所固有的象差。那时我们将能直接为原子们拍照了。也许有一天，化学中的化合物将能够通过考察原子位置而不是通过观察某些沉淀物的颜色而加以分析！

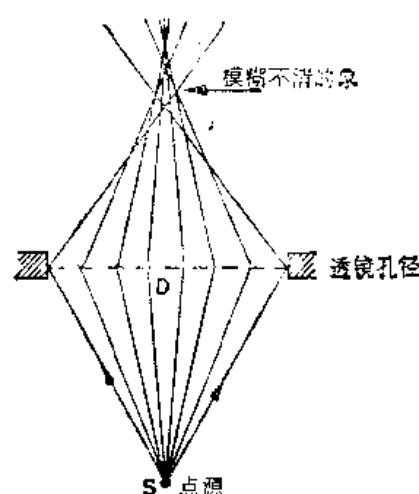


图29-9 透镜的球面象差

§ 29-6 加速器中的导向场

在高能粒子加速器中磁场也被用来产生特殊的粒子轨道。象回旋加速器和同步加速器

那一类机器，会把反复经过一个强电场的粒子加速至高能。粒子被磁场保持在它们的循环轨道中。

我们已曾见到，在匀强磁场中的粒子将在圆周轨道上奔跑。然而，这只有对于一个完全均匀的场才正确。试设想一个在大面积上几乎均匀、但在某一区域里会稍为强于其他区域里的 B 场。若把一个动量为 p 的粒子放置在这样一个场中，它便将走一个几乎圆形的轨道，其半径为 $R = p/qB$ 。然而，在场较强一些的那个区域里这曲率半径会稍为小点。轨道不是一个闭合圆周，但将在场中“漫步”转移，如图29-10所示的那

样。如果我们乐意的话，就可以把这个场里的小“误差”认为是会产生一个附加的角度冲击以便使粒子跳进一个新的轨道上去。如果粒子要在加速器中绕行成几兆个圈，则某一种能倾向于保持各轨道全都靠近某一设计轨道的“径向聚焦”就成为必需的了。

对于一个匀强场来说，另一种困难乃是粒子不会保持在一个平面上。如果它们以一微小角度开始——或通过场中的任一微小误差给予了一个小角度——它们便将跑一个螺旋路线而最终会闯进磁极或到达真空室里的天花板或地板上。必须做出某种安排来避免这种竖向漂移；场必须同时提供“竖向聚焦”和径向聚焦。

最初，人们会猜测到，通过使磁场跟着与设计路线中心的距离的增大而增大就可以提供这种聚焦作用。于是，若有一粒子跑到较大的半径上去，它便将处于较强的磁场之中而被弯回到其正确的半径上来。如果它跑了一个太小的半径，则弯曲将会小些，因而又会朝该设计半径返回。一个粒子，一旦以某一相对于该理想圆周的角度开始奔跑，便将在该理想圆周轨

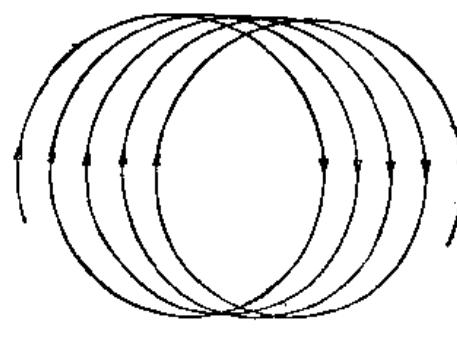


图29-10 在一个稍为非均匀的磁场中粒子的运动
这里磁场较强

請勿用於盈利之目的

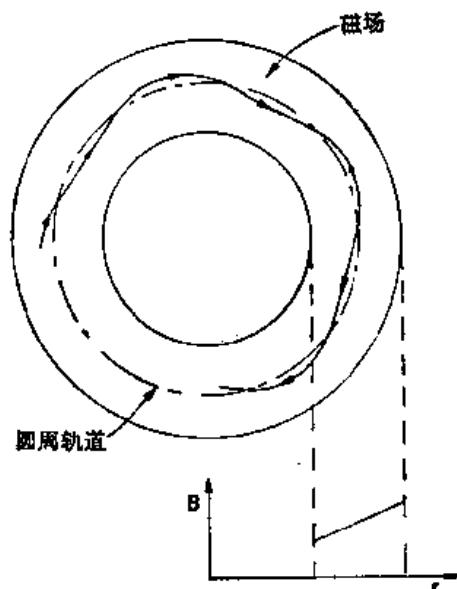


图 29-11 在一个具有大的正斜率的
磁场中粒子的径向运动

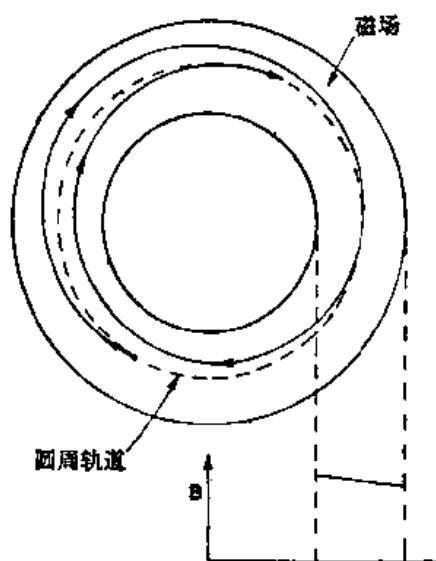


图 29-12 在一个具有小的负斜率的
磁场中粒子的径向运动

道上左右摇摆, 如图 29-11 所示。这径向聚焦作用会保持粒子于该圆周路线附近。

实际上, 即便使用相反的磁场斜率, 也仍会有某种径向聚焦作用。这发生于当轨道曲率半径的增大不会快过粒子与场中心的距离的增大时。粒子轨道将会如图 29-12 所示, 然而, 若场的陡度太大, 则轨道将不会回到该设计半径上来, 将向内旋入或向外旋出, 如图 29-13 所示的那样。

我们通常用“相对陡度”或场指数 n 来描述场的斜率:

$$n = \frac{dB/B}{dr/r}. \quad (29.2)$$

如果这一相对陡度大于 -1 , 则一个导向场便能提供径向聚焦。

一个径向的场陡度也将对粒子产生一些竖向力。假设有一个靠近轨道中心处较强而在

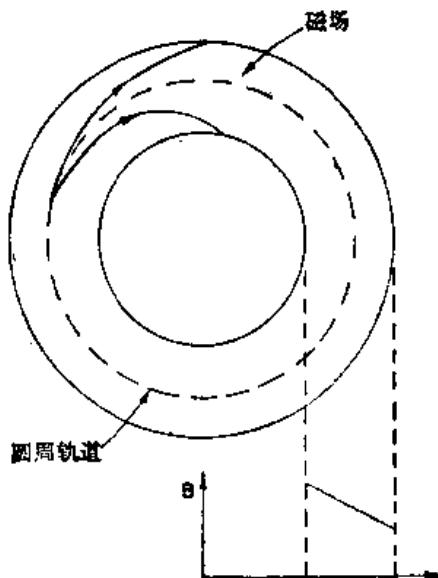


图 29-13 在一个具有大的负斜率的
磁场中粒子的径向运动

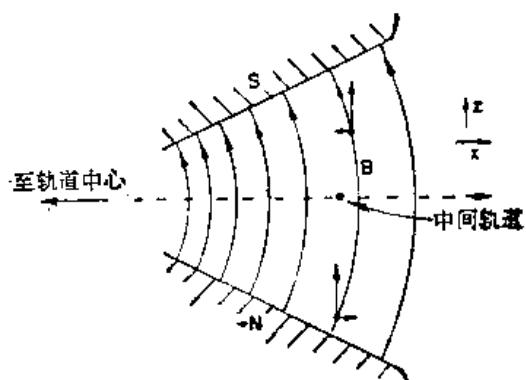


图 29-14 从一个垂直于轨道的截面
上来看一个竖向导向场

外面较弱之场，那么一个垂直于轨道的关于磁场的竖向截面也许会象图 29-14 所示的那样。（对于质子来说，它们的轨道会从页面上指出来。）如果左边之场比起右边的较强，则磁场线应如所示的那样弯曲。我们可通过引用在自由空间里 \mathbf{B} 的环流等于零的规律来了解必然会是这样。若我们选取如图所示的那些坐标，则

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = -\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0,$$

或

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (29.3)$$

由于已假定 $\partial B_z / \partial x$ 是负的，就应有一个相等的 $\partial B_x / \partial z$ 。如果轨道的“标称”平面是一个在 $B_x = 0$ 的对称面上，则该径向分量 B_x 在这一个平面之上为负而在其下为正。场线就必须弯曲成如图所示的那个样子。

象这样的一个场将具有竖向聚焦特性。试想象一个质子多少是与该中间轨道平行但却在其上面奔跑。 \mathbf{B} 的水平分量将对它施一一向下之力。如果质子是在该中间轨道之下运动，则力会颠倒过来。因此，就有一个朝向该中间轨道的“恢复力”。根据我们的论证，将有一个竖向的聚焦作用，只要该竖向场随半径的增大而减小；但如果这一个场陡度为正，则将有一“竖向的去焦”作用。因此，对于竖向聚焦来说，该场指数 n 必须小于零。上面我们已找出了对于径向聚焦 n 必须大于 -1 。这两个条件凑合在一起就给出一个总条件

$$-1 < n < 0,$$

若要把粒子维持在一稳定的轨道上的话，在回旋加速器中，极接近于零的 n 值常被采用；而在电子回旋加速器和同步加速器中，则典型地采用 $n = -0.6$ 的数值。

§ 29-7 交变陡度聚焦法

象这么小值的 n 只会给出相当“弱”的聚焦作用。很清楚，一个有效得多的径向聚焦作用该可由一个大的正陡度 ($n \gg 1$) 来提供，但这时竖向力就将产生一个强大的去焦作用了。同理，大的负斜率 ($n \ll -1$) 会给出一个较强的竖向力，但却会引起径向的去焦。然而，约十年

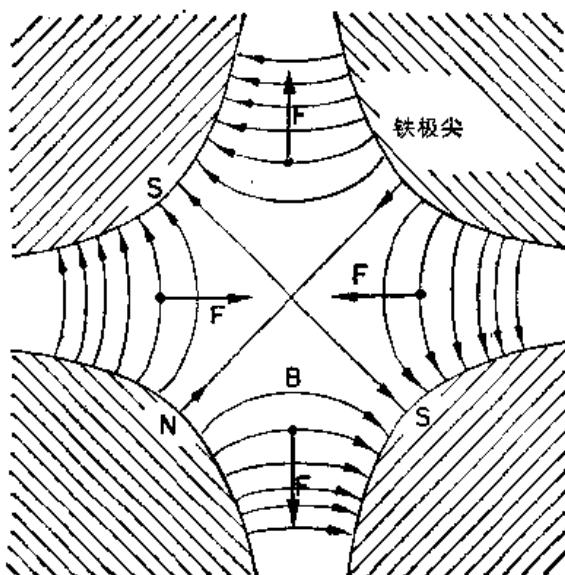


图 29-15 为使在水平方向上聚焦的四极透镜

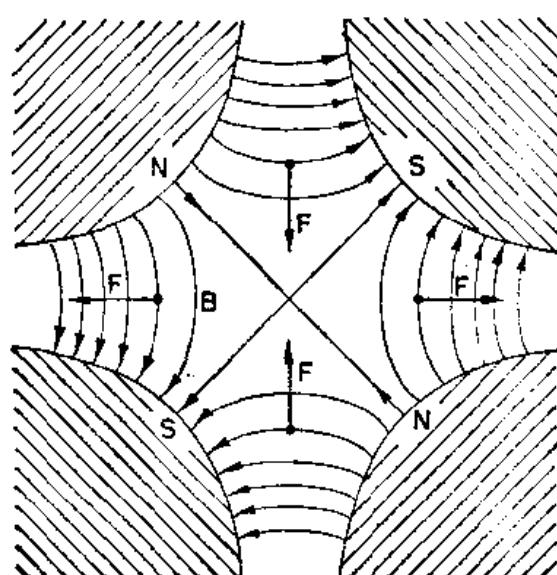


图 29-16 为使在竖向上聚焦的四极透镜

前就已经认识到，一个在强聚焦与强去焦之间的交变力仍然会产生一个净的聚焦力来。

为解释交变陡度聚焦法是如何进行的，我们将首先描述一个四极透镜的运用规程，那是基于同一个原理的。试设想一个匀强磁场加于图 29-14 的场之上，使其强度调整至在轨道上的场为零。这合场——对于与中立点间的小位移来说——会象图 29-15 所示之场那样。这样一种四极磁铁称为“四极透镜”。一个在中点之左或右（从读者一边看）进入到场里来的正粒子会被推回中心。如果这个粒子是在上面或下面进入的，则将被从中点推开。这是一个平行方向的聚焦透镜。如果这水平陡度被反转过来——正如可通过掉转所有的磁极而做到的那样——则所有力的符号都将掉转过来，因而我们就有竖向的聚焦透镜，如图 29-16 所示的。对于这样一种透镜，场强——因而也有那焦聚力——会随着与镜轴的距离线性地增大。

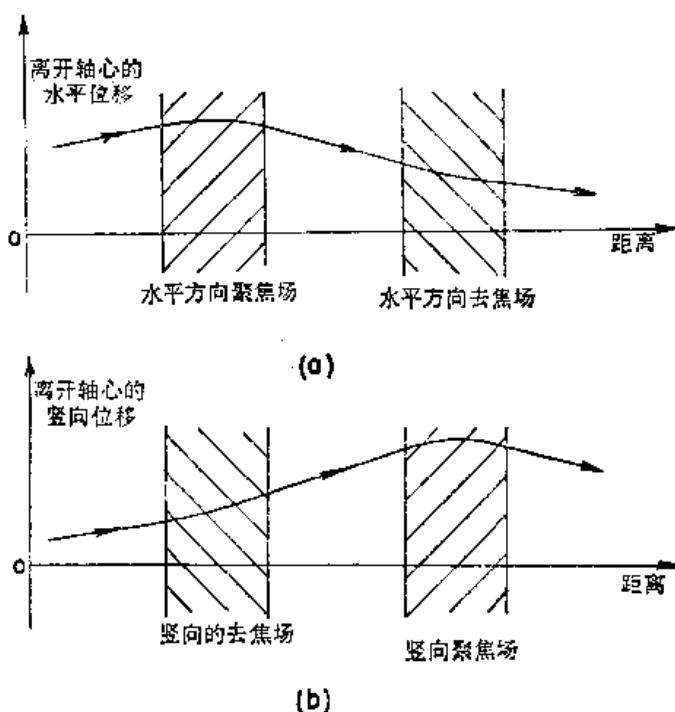


图 29-17 利用一对四极透镜而得到的水平聚焦和竖向聚焦

轴心。净效应又再是聚焦作用。这样一对四极透镜独立地对于水平方向和竖立方向的运动起作用——十分象一个光学透镜。四极透镜被用来形成并控制粒子束，与光学透镜用于光束上的那种方式十分相似。

还应该指出，一个交变陡度系统并不总会产生聚焦作用。如果陡度太大（相对于粒子动量或两透镜的间隔来说），则净效应可能是一个去焦作用。你若设想图 29-17 那两个透镜的距离要是增大了三或四倍，就会看清楚那可能是怎样发生的了。

现在就让我们回到同步加速器的导向磁铁上来。可以认为，它含有一个加进于匀强场上的交变“正”、“负”透镜串联组。匀强磁场是用来把粒子平均弯曲成一个水平圆周的（对于竖向运动不起作用），而该交变透镜组则是对于那些也许已走错了路的粒子会起作用——始终把它们（在平均上）推向中间轨道上去。

有一套漂亮的机械模拟器，可以用来演示在“聚焦”力与“去焦”力之间交变着的力竟会发生一个净“聚焦”效应。试想象一副机械摆，它含有一根将重量固紧在其一端的坚固棒，悬挂在被安排得由一部电动机驱动着的曲柄使其迅速作上下振动的支枢上。象这样的摆会有两个平衡位置。除了正常的下垂悬挂位置外，该摆也有一个“向上悬挂”着的平衡位置

现在设想有两个这样的透镜串联安放着。若一粒子从与轴心有某一水平位移的地方进入场中，如图 29-17(a) 所示，则它在第一个透镜中将被朝向轴心而偏转。当抵达第二个透镜时，它距离轴心较近，因而向外之力较小，使向外的偏转也就比较小了。有一个朝向轴心的净弯曲；平均效应是在对水平方向的聚焦作用。另一方面，若我们考察一个在进入场时在竖向上就已偏离了轴心的粒子，则其路径将如图 29-17(b) 所示。该粒子初时被偏转以致离开了轴心，但之后在较大位移上到达那第二个透镜，在那里它会感觉到一个较强大之力，因而被弯向了

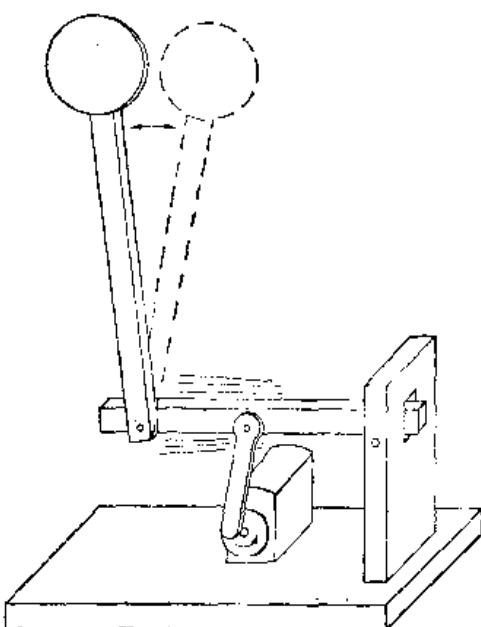


图 29-18 一副配着振动支枢的摆，可以使位于支枢之上的摆锤有一个稳定位置

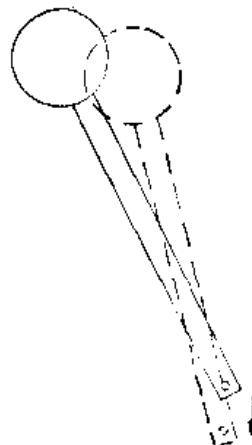


图 29-19 支枢的向下加速会引起摆朝着竖向运动

——摆锤高居于支枢之上！这样的摆示如图 29-18。

通过下述论证我们能够看出支枢的竖向运动相当于一个交变聚力。当支枢向下加速时，摆锤倾向于向内运动，如图 29-19 所示。当摆锤向上加速时，这效应就被反转。促使摆锤恢复朝向轴线之力虽然在交变着，但其平均效应仍然是一个朝向轴线之力。所以这个摆将会围绕恰在正常平衡位置对面的一个中立位置来回摆动。

当然，有一种容易得多的办法来保持一副摆倒悬着，而那就是把它平衡于你的手指之上！不过你还可试一试，在同一只手指上平衡两根互为独立的棒！或者把你的眼睛掩闭着而试图平衡一根棒！平衡含有对即将出现的错误进行改正的意思。而这一般是不可能的，倘若同时有几件东西都将发生错误的话。在一部同步加速器中有数以亿计的粒子同时在环行，其中每一个都可能从某一不同的“误差”出发。我们刚才所述的那种聚焦作用将对它们都有效。

§ 29-8 在交叉电磁场中的运动

迄今为止我们谈到了只在电场或只在磁场中的粒子。当这两种场同时存在时就会有某些有趣效应。假设有一个匀强磁场 B 和一个电场 E 互相正交。凡垂直于 B 而出发的粒子都将跑过一条如图 29-20 所示的那种曲线。（这是一条平面曲线，而不是一条螺旋线！）我们能够定性地理解这一运动。当（假定带正电的）粒子在 E 方向上运动时，它会拾起速度，因而所受磁场弯曲的程度较小。当其逆着电场运动时，它丧失了速率，因而受磁场逐渐弯得多些。净效应就是它有一个沿 $E \times B$ 方向的平均“漂移”。

事实上，我们能够证明，上述运动就是由一个匀速圆周运动加于一个以速率 $v_d = E/B$ 进行着的侧向匀速运动之上——图 29-20 中的那条轨道就是一条旋轮线。试想象一个以恒定速率向右运动

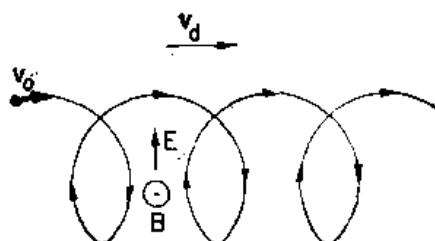


图 29-20 在交叉的电场和磁场中一个粒子的路线

的观察者，在这一个参照系上，我们的磁场会转变成一个新的磁场再加上一个朝向下的电场。如果他具有那刚刚正确的速率，则他的总电场将为零，而他便将看到粒子是在兜着圈子。因此，我们所看到的乃是一个圆周运动加上一个以漂移速率 $v_d = E/B$ 进行着的平动。电子在交叉的电场和磁场中的运动就是磁控管——即用来产生微波能量的振荡器——的基础。

关于在电场和磁场中粒子的运动还有许多其他的有趣例子——诸如被陷入于范艾伦(Van Allen)带中的那些电子和质子的轨道——但可惜我们这里没有时间来一一讨论。

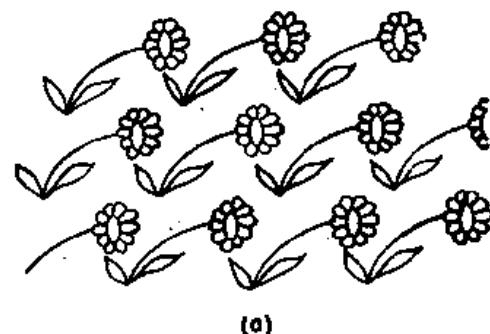
晶体的内裏几何

§ 30-1 晶体的内裏几何

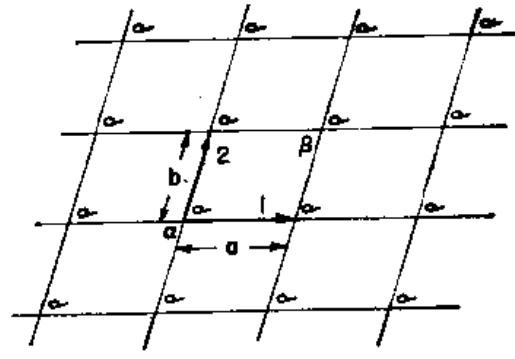
我们已经结束了关于电磁基本定律的学习，现在要来学习实物的电磁性质了。我们将从描述固体——即晶体——开始。当物质中的原子并不运动得太厉害时，它们都给禁住而安排在一个拥有尽可能低能量的位形中。如果某处的原子已找到了一个似乎具有低能量的图案，那么在别处的原子大概也会作出同样的安排。为了这些缘故，在一固体材料中我们便有一种原子的重复性图案。

换句话说，晶体中的条件是这样的：晶体里某一特定原子的周围环境具有某一种安排，而倘若你在较远的另一处又看到一个同类原子，那么你将会发现它的环境完全与前面的相同。如果你按这同一距离再进一步离开而指取一个原子，你将会发现条件又是完全相同。这图案将一次又一次地重复——这当然是在三维之中的。

试想象设计出一张糊墙纸——或花布，或为平面用的某一几何图案——你假定将有一个一次又一次地重复着的设计单元，使得你可以组成一个随心所欲的大面积，这就是将要在三维中求解的晶体问题的一个二维类比。例如，图 30-1(a) 显示一张常见的糊墙纸的设计图案，有一个在图案中重复直至无穷的单元。这一种糊墙纸图案的几何特性，若仅仅考虑其重复性质而不顾虑到花朵本身的几何图形或其艺术价值，则可用图 30-1(b) 来表述。你若从任一点出发，便可通过沿箭头 1 的方向移过一距离 a 而找到一个对应点。如果是沿另一个箭头的方向移动一距离 b ，那么你也可获得一对应点。当然，还有许多其他方向。比方，你可以从 α 点跑至 β 点而达到一个对应点，但这样的一步可认为是这样的一个组合，即沿方向 1 的一步，跟着又沿方向 2 的一步。这个图案的一种基本性质就是可以由达到附近同等位置的两个最短步伐来描述。所谓“同等”位置我们指的是若你站在其中一个位置上而眺望你的周围，你将会看到有如你是站在另一个位置上所看到的完全相同的东西。这就是晶体的基本性质，唯一不同之处是，晶体乃一种三维排列，而不是二维排列；而其点阵的每一基元自然不就是那些花朵，而是某些原子——也许是六个氢原子和二个碳原子——在某个图案上的一种排列。晶体中原子的图案在实验上可以通过 X 射线衍射而找到。以前我们就曾简略地提到过这种方法，而现在就不想再多赘述，除了指出对于大多数简单晶体和某些相当复杂晶体其在空间中的原



(a)



(b)

图 30-1 在二维中的一个重复图案

子精密排列都已经被找到了这么一点以外。

晶体的内禀图案会在许多方面显示出来。首先，在某些方向上原子的结合强度往往强于其他方向，这意味着通过晶体中有某些平面会比其他平面更易于裂开。它们被称为解理面。如果你用一小刀片劈裂一块晶体，它往往会沿这么一个面破裂开来。其次，根据晶体的形成方式，其内部结构还往往表现在其表面上。试想象晶体从一溶液中沉淀而成，有一些原子会在溶液里漂来漂去，而最后当它们找到一个能量最低的地方就沉淀下来。（这正如该糊墙纸是通过这样而形成的，即其中的花朵漂来漂去，直到其中一朵偶尔漂到一个地方而给绊住了，之后另一个又另一个花朵都给绊住，使得该图案逐渐生长起来。）你将体会到，其中一些方向以与其他方向不同的速率生长，因而长成某种几何形状。由于这种效应，许多晶体的外表就会呈现原子内部排列的某些特征。

例如，图 30-2(a) 显示一块典型石英晶体的形状，它的内部图案是六角形的。如果你严密地考察这样一块晶体，你将会注意到，外面并不会形成一个很好的六边形；因为那些边并非完全等长——事实上，它们往往很不一致。但在一个方面石英晶体却是十分完美的六边形；两面间所形成之角恰好是 120° 。很清楚，任一个特定面的大小只不过是在生长中的一个偶发事件，但角度却是其内禀几何的一种表象。所以每一块石英晶体各有其不同形态，纵使在各该对应面之间的角度总是相同。

一块氯化钠晶体的内禀几何，从其外表形状来看，也是很显然的。图 30-2(b) 显示出一块典型食盐的形状。这种晶体再不是理想立方体，但其表面间却严格互相垂直。

一种更复杂的晶体是云母，它的形状示如图 30-2(c)。它是一种高度各向异性的晶体，并从这么一个事实就容易看得出来，即如果你试图在一个方向（图中的水平方向）上拉断它，它表现出十分坚韧，但在另一个方向（竖向）上就很容易把它撕裂开了。它常被用来获得十分坚韧的薄片。云母和石英是两种含有硅的矿物。第三种含硅矿物实例则是石棉，它具有这么一种有趣性质，即容易在两个方向上被撕开，但在第三个方向上就不是这样，它表现为十分坚韧的线性纤维。

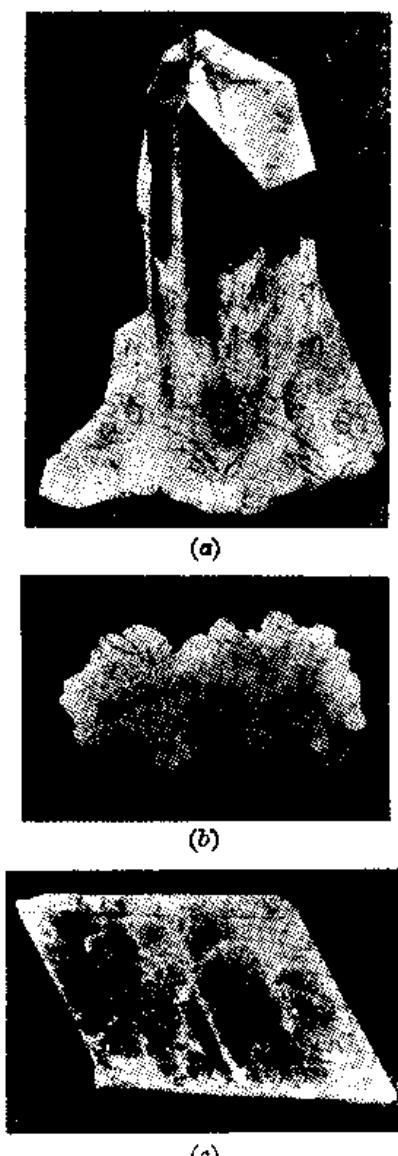


图 30-2 天然晶体：(a) 石英；
(b) 氯化钠；(c) 云母

看得出来，即如果你试图在一个方向（图中的水平方向）上拉断它，它表现出十分坚韧，但在另一个方向（竖向）上就很容易把它撕裂开了。它常被用来获得十分坚韧的薄片。云母和石英是两种含有硅的矿物。第三种含硅矿物实例则是石棉，它具有这么一种有趣性质，即容易在两个方向上被撕开，但在第三个方向上就不是这样，它表现为十分坚韧的线性纤维。

§ 30-2 晶体中的化学键

晶体的机械性质显然取决于原子间的化学结合类型。云母沿不同方向的明显不同强度取决于在不同方向上的原子间键联类型。无疑，你已经在化学中学到了不同种类的化学键。首先，有离子键，正如我们对于氯化钠所曾讨论过的。粗略地说，钠原子已经丧失了一个电子而变成一个正离子；氯原子则已获得了一个电子而变成一个负离子。这些正离子和负离子给安排在一个三维的跳棋盘上并由电力把它们互相维系在一起。

共价键——其中电子为两个原子所共有——则更为常见，而且往往十分坚强。例如，在金刚石中，碳原子在所有四个方向上都有与其最近邻的共价键，因而这种晶体确实十分坚硬。在石英晶体中，硅与氧间也有共价键，但那里的键实际上只是部分共价。由于不具有电子的完全共存性，那些原子便会部分带电，因而该晶体也就多少是离子性的了。大自然并不象我们试图要使之那么简单就那么简单；实际上，在共价键与离子键之间是有一切可能的递次等级的。

糖晶体还有另一种结合方式。其中有由原子通过共价键坚强地结合在一起的大型分子，因而每一分子就是一个坚韧的结构。但由于那些强键联都已完全被满足，就只有存在于各自分开的、各别分子间的相对微弱的吸引力了。在这种分子晶体中，分子们好比会保持它们各自的身分，而其内部排列也许象图30-3所示的那样。由于分子间并不彼此坚强地互相维系着，这种晶体就很容易破裂。它们与诸如金刚石那种东西很不相同，后者实际上是一个巨大分子，如果不破坏其坚强的共价键，就不可能在任何一处使其破裂。石蜡是分子晶体的另一例子。

分子晶体的一个极端例子存在于一种象固态氩的物质中。在那些原子之间只有十分微弱的吸引——每一原子是一个完全饱和了的单原子分子。但在十分低的温度下，热运动会十分小，因而微小的原子间力就足以引起许多原子都沉积成一个象一堆紧密聚拢起来的球体那样的整齐阵容。

金属构成一个完全不同的物质种类。其键联属于完全不同的类型。在金属中，键联并非在相邻原子间进行的，而是整个晶体的一个属性。那些价电子并不是附属于一个或一对原子而是为整个晶体所共有。每一原子贡献出一个电子于公共的电子海中，而那些原子型的正离子则驻扎在这一负电子海里。这个电子海把那些离子固结在一起就象某种胶质一样。

在金属中，由于不存在任一特殊方向的特别键联，在结合上就不会有强的方向性。然而，它们仍然是晶体，因为当那些原子型离子被安排成某一明确阵列时其总能量最低——尽管这个从优排列的能量往往不会比其他可能的排列的能量低得太多。对于第一级近似来说，许多金属的原子就好象是尽可能紧密地堆积起来的一堆小球。

§ 30-3 晶体生长

试想象地球中晶体的自然形成情况。在地球表面上有各种各样原子的一大堆混合物。它们不断受火山活动、风和水所搅拌——经常激起运动，并且互相混合。可是，由于某种诡计，硅原子逐渐开始找到它的伙伴，并找到了氧原子，而形成石英。每次当一原子加入其他原子之中而建立晶体时——混合体就变成不混合了。而在附近另一处，钠原子和氯原子又会互相彼此撞到而建立起食盐的晶体来。

当晶体一旦开始形成，就只允许一种特殊类型的原子继续参加进去，这是怎么回事呢？之所以会这样，乃由于整个系统正在寻找最可能低的能量。一块正在成长中的晶体将接受一个新原子，如果它行将使能量尽可能低的话。但这块成长中的晶体怎么会知道当一个硅

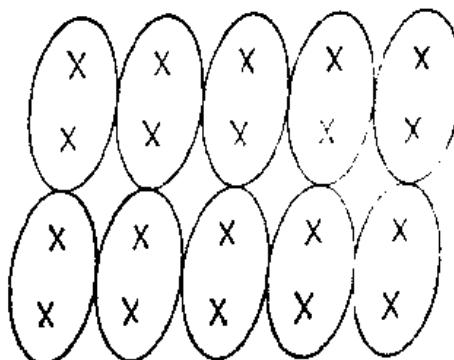


图30-3 分子晶体的点阵

原子——或一个氧原子——落在某一特定位置上就会得出最可能低的能量呢？这是通过尝试法而做到的。在液体中，所有一切原子都在不断运动。每一原子对其邻居每秒约要碰撞 10^{13} 次。如果它撞击在该正在成长的晶体的正确位置上，那它再跳出来的机会就会比较小，倘若能量低下的话。在数以百万计的年期中通过不断以每秒 10^{13} 次的时率作尝试，原子们便会在那些它们发现能量最低的地方逐渐积累起来。最后，它们就长成一大块晶体了。

§ 30-4 晶体点阵

晶体中原子的排列——晶体点阵——可以取许多种几何形态。我们愿意先来描述标志着大多数金属以及由惰性气体所形成的固体的那些最简单点阵。它们就是可在两种形式上存在的立方点阵：示如图 30-4(a) 的体心立方，与图 30-4(b) 的面心立方。当然，图上所示的只是点阵中的一个立方；你要想象这种图案是在三维中无限制地重复着的。并且，为了使画面比较清楚，只有原子的中心给描绘出来。但在一实际晶体中，原子更象是互相接触着的球体。图中的实心球和空心球，一般说来，可以代表异类原子，也可代表同类原子。例如，铁在低温时具有体心立方点阵，但在高温时则形成面心立方点阵。在这两种结晶形式上其物理

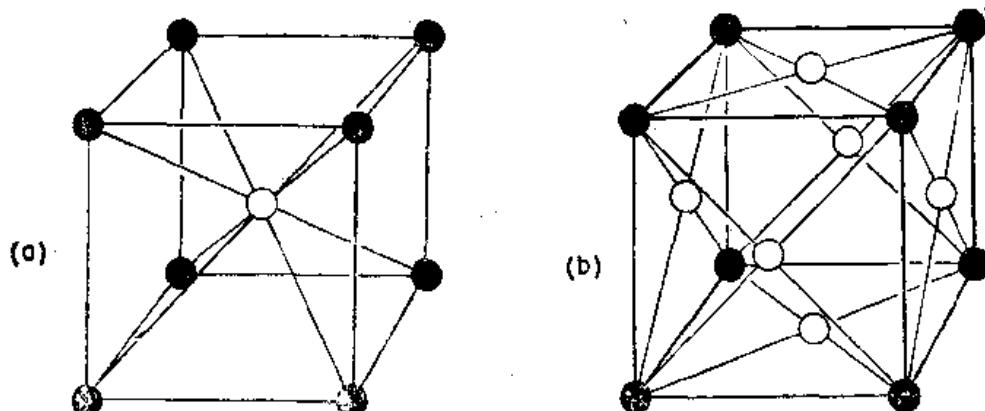


图 30-4 立方晶体的晶胞：(a) 体心立方；(b) 面心立方

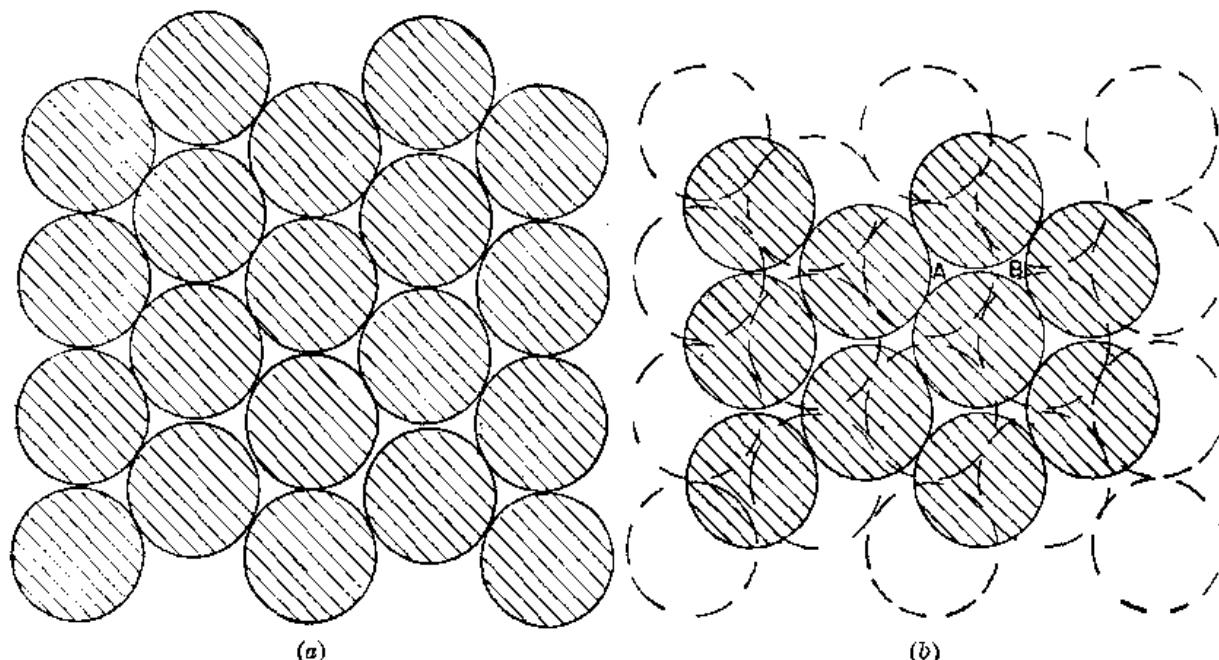


图 30-5 建立一个六角密排点阵

性质很不相同。

象这样的形式是怎样得来的呢？试设想你有一个要把球形原子堆积成尽可能紧密的问题。这里一种办法该是通过造成一个“六角密排阵势”中的一层，如图30-5(a)所示。然后你就会建成与第一层相似的第二层，不过在水平方向上作一些位移而已，如图30-5(b)所示。此后，你还可放上第三层。但要注意！安放这第三层有两种显然不同的方式。若你通过放一个原子于图30-5(b)的A点上而开始那第三层，则这第三层中的每一原子就直接位于底层的一个原子之上。另一方面，如果你通过放一个原子于位置B上而开始那第三层，则这第三层的原子将被置在恰恰是由底层的三个原子所形成的三角形的中心点上。任何其他的初始位置都相当于A或B，从而就只有这两种安放第三层的方式了。

如果第三层有一个原子位于B点上，则这种晶体点阵就是面心立方——不过是从一个角度上去看的罢了。似乎满有趣味，本来你是从一个六角开始的，但到头来却得到一个立方。可是要注意，若从角隅去看，一个立方体就会有一个六角轮廓。比方，图30-6本来就可以代表一个平面上的六角形或一个透视中的立方！

如果第三层是通过把一个原子放在A点上而迭加于图30-5(b)之上，则不会有立方结构，这个点阵此时只有六角对称。很清楚，我们刚才所述的这两种可能性都是属于密排的。

某些金属——诸如铜和银——选择第一种可能性，即面心立方。其他——例如铍和镁——则选取另一种可能性；它们形成六角晶体。很明显，将出现哪一种晶体点阵，不能仅仅取决于小球体的堆积，而必须部分地也由其他因素确定。特别是，这有赖于原子间力的轻微残存的角依存关系（或对于金属而言，则有赖于该电子池的能量）。你无疑会在化学课中学到所有这些东西的。

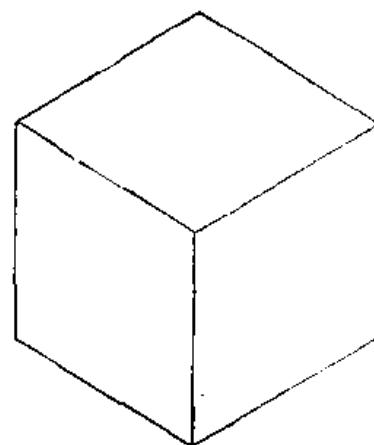


图30-6 从一个角隅上去看。
这是个六角还是个立方？

§ 30-5 二维对称性

我们现在愿意从内禀对称性的观点来讨论晶体的某些性质。晶体的一个主要特点是：若你从某一原子出发而移过一个点阵单位以达到一对对应原子，则你将再处在同一种环境中。这是基本命题。但假如你是一个原子，也许还有另一种变化能够把你再带到同一种环境上去——这就是说，另一种可能的对称性。图30-7(a)显示另一种可能的“糊墙纸型”设计（虽则你可能从未见过）。假设我们要来比较A和B两点的环境。起初，你也许认为它们彼此相同——但又有点不同。C和D两点各相当于A，但B点的环境只有在经过了倒转、诸如在一镜面反射中，才会象A。

在这一图案中还有其他类型的“相当”点。比如，E和F两点除了其中之一要相对于另一点转过90°之外就都拥有“相同”环境。这一图案很特别。环绕着诸如A的顶点作一个90°的转动——或90°的任一整数倍——会再给出一个完全相同的图案。一块具有这种结构的晶体在其外表看来该有四方角隅，但其内部则比一简单立方要稍为复杂。

现在已描述了某些特殊例子，让我们试来盘算晶体所能拥有的一切可能对称性。首先，我们考虑在一个平面上该会怎么样。一个平面点阵可以通过两个所谓初基矢来给予下定义，这两个矢量是从点阵中的一点指向两个最靠近的相当点的。图30-1中那两个矢量I和

請勿用於盈利之目的

2 就是该点阵的初基矢。图 30-7(a)中的 a 和 b 两矢量则是那里的图案的初基矢。当然，

我们本来也尽可以用 $-a$ 来代替 a ，或用 $-b$ 来代替 b 的。由于 a 和 b 的大小相等并互相垂直，一个 90° 角的转动就会将 a 变成 b ，并将 b 变成 $-a$ ，这又给出同一种点阵了。

我们看到存在一些具有“四方”对称性的点阵，而前面则已描述了一种密排点阵，那是基于本来就具有六边对称性的一个六角形上的。对于图 30-5(a)的那个圆圈阵列，环绕任一圆心而作一个 60° 角的转动将会把该图案转回到原来样子。

还有哪些其他类型的转动对称性呢？比方，能否有五重或八重转动的对称性？很容易看出那都是不可能的。多于四边的唯一一种对称性就是六边对称。首先，让我们来证明多于六重的对称是不可能的。假设试图想象一种其中的两个等长初基矢作成小于 60° 之角，如图 30-8(a)所示的那样。我们必须假

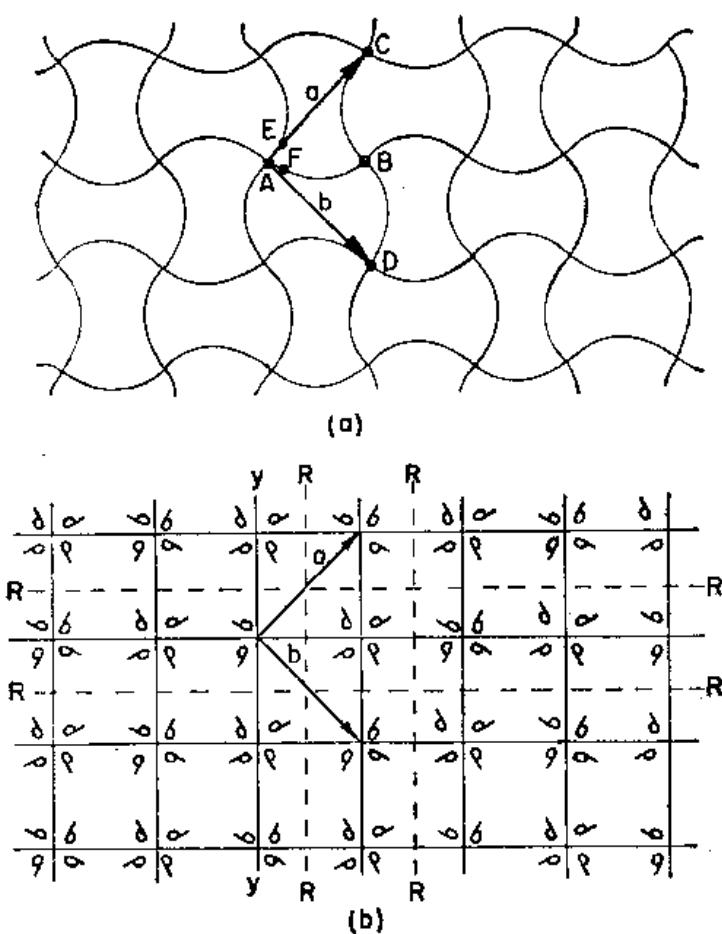


图 30-7 一个高对称性的图案

定： B 和 C 两点各相当于 A ，而 a 和 b 便是从 A 点至其相当邻点的两个最短矢量。但这显然是错误的，因为在 B 与 C 两点间的距离比从其中任一点至 A 点的距离还要短。因此就应该有一个与 A 点相当的、而较 B 点或 C 点都较近的 D 点邻居。我们本来就应当选取 b' 作为我们的初基矢之一。所以两个初基矢所夹之角必然是 60° 或更大。八角对称根本没有可能。

关于五重对称又怎么样呢？若我们假定该初基矢 a 和 b 具有相等长度，并且作成一个等于 $2\pi/5 = 72^\circ$ 的角度，如图 30-8(b)所示，那么也就应有与 C 作成 72° 的 D 作为点阵中的一个相当点。但此时从 E 至 D 的矢量 b' 还短于 b ，因而 b' 就不是一个初基矢了。这样五重对称就不可能存在。不致于使我们陷入这种困难中去的可能性只有 $\theta = 60^\circ, 90^\circ$, 或 120° 。零度或 180° 显然也都可能。对上述结果的一种提法是：通过转动一个整圈（即完全不变动）、半

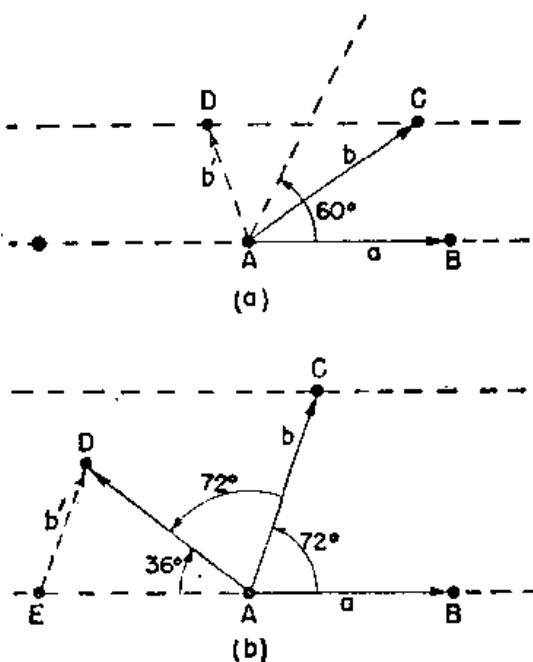


图 30-8 (a) 多于六重的转动对称是不可能的；
(b) 五重转动对称性也没有可能

圆、三分之一、四分之一或六分之一圆，该图案能够保持不变。而这些就是在一平面上所可能有的转动对称性——总数为五。如果 $\theta = 2\pi/n$ ，我们就说这是一个“ n 重”对称性。我们还声称，一个 n 等于 4 或 6 的图案比起一个 n 等于 1 或 2 的图案要具有“较高的对称性”。

回到图 30-7(a)上去，我们见到这一图案具有一个四重的转动对称性。在图 30-7(b)中曾画出一个与图(a)具有相同对称性的另一图案，那些象逗点模样的小图形是用来在每个方块中定义该图案的对称性的一个不对称的东西。注意在相邻方块中的逗点都是彼此反转的，因而晶胞比起每一方块就要大。假如没有那些逗点，该图案仍然会有四重对称，但晶胞就会小些了。图 30-7 的图案也还有别的对称性。例如，对那些虚线 $R-R$ 的反射会再现出同一个图案来。

图 30-7 的图案还有另一种对称性。若该图案在 $Y-Y$ 线上反射并向右(或向左)移过一个方块，则我们将得到原来的图案。这 $Y-Y$ 线称为“滑移”线。

这些就是在二维中的所有一切对称性。在空间里的对称操作中还有一种与在二维中的 180° 转动相当、但在三维中却是一个明显不同的操作。这就是反演。所谓反演我们意指从某一原点[比方，图 30-9(b)中的 A 点]作出的位移矢量 \mathbf{R} 所指向的任一点被移至在 $-\mathbf{R}$ 的另一点上去。

图 30-9(a)的图案通过反演产生出一个新的图案，但图案(b)的反演又再现出那同一图案。对于一个二维图案来说(正如你可以从图上看出来的)，通过 A 点对图案(b)的反演与环绕同一点作 180° 的转动相当。然而，假设通过想象将每一小逗点都各加上一个从页面上指出来的“箭头”以便使图 30-9(b)的图案变成个三维的图案，在经历了三维中的反演之后，所有的箭头都将倒向，因而该图案就不会再现。若我们分别用点和叉来代表箭头和箭尾，便能造成一个如图 30-9(c)所示的那种三维图案，它是在反演之下不对称的；或者造成一个象图(d)所示的图案，那就具有反演对称性了。注意，不可能用转动的任一种组合来模仿三维中的反演。

如果我们用刚才所描述的那些种类的对称操作来标志一个图案——或点阵——的“对

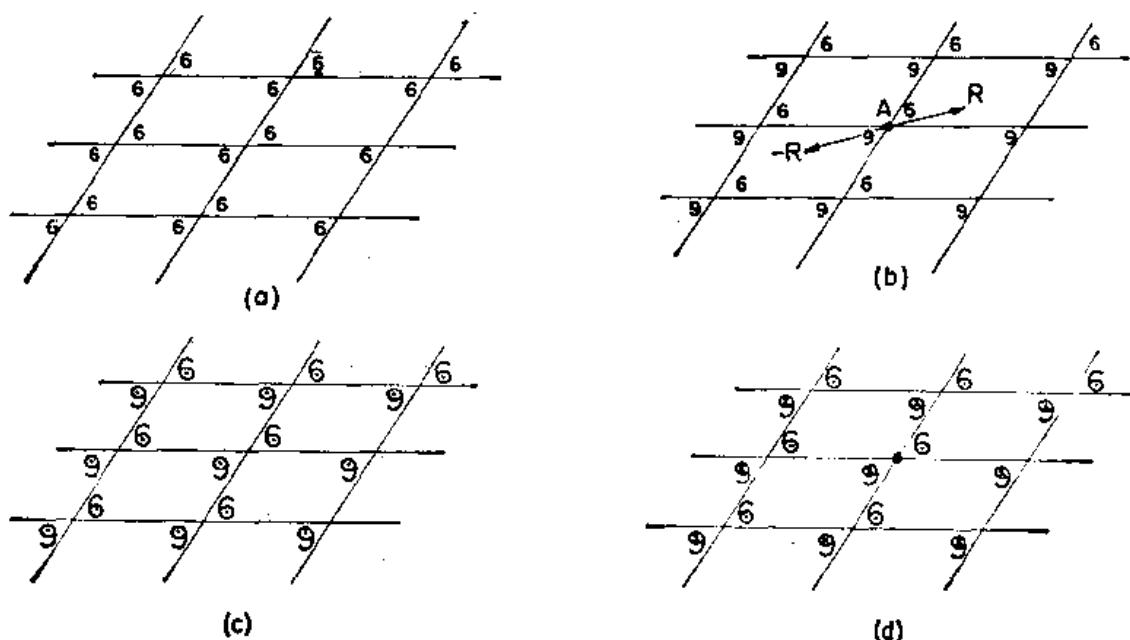


图 30-9 反演对称性。若把 \mathbf{R} 变成 $-\mathbf{R}$ ，图案(b)将保持不变，但图案(a)却将改变。在三维中，图案(d)具有反演对称性而图案(c)则否

称性”，那么结果弄清楚，对于二维共有 17 种互为清晰不同的图案。我们曾在图 30-1 中画出一个对称性最可能低的，而在图 30-7 中又画出一个对称性高的图案。把 17 种可能图案都弄出来的游戏将留给你们去玩玩。

在这 17 种可能的图案中，只有寥寥那么几种才用来制作糊墙纸和织物，那是有点奇怪的；人们始终只看到那三、四种基本图案。这是因为设计者缺乏想象力，还是因为许多可能的图案都是不悦目的呢？

§ 30-6 三维对称性

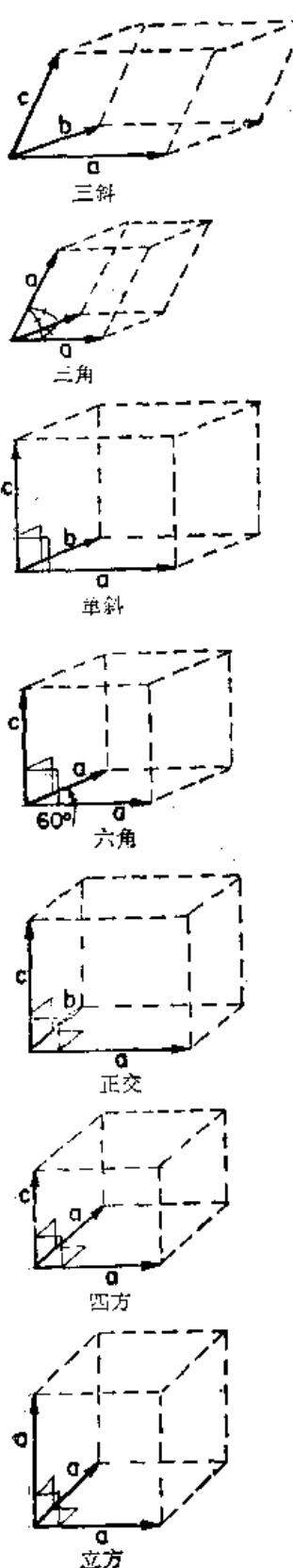
迄今我们所谈到的都只是有关二维的图案。然而，我们实际感兴趣的却是三维中的原子排列图案。首先，很明显的就是一块三维晶体将具备三个初基矢量。这么一来，我们如果问起在三维中的可能对称操作，则将发现共有 230 种不同的可能对称性！为了某些目的，这 230 种类型还可归纳成七类，它们绘在图 30-10 上。那对称最少的一种点阵称为三斜类。它的晶胞是一个平行六面体。初基矢量的长度各不相同，而它们间的夹角也不会有任何两个相同的，没有任何转动或反射对称的可能。然而，仍然会有两种可能的对称性——即对于通过该顶点的反演能使晶胞改变或不改变。[在三维中所谓反演我们指的又再是把那些空间位移 \mathbf{R} 由 $-\mathbf{R}$ 来代替——换句话说，就是从 (x, y, z) 变成 $(-x, -y, -z)$]。因此，三斜点阵就只有两种可能的对称性，除非在那些初基矢之间存在某种特殊关系。例如，若所有的基矢长度都相等并以相同角度分隔开，则人们便有那示如图上的三角点阵。这一图形可以有一个附加的对称性；它可以通过对该体内的长对角线的转动保持不变。

如果其中一个基矢，比如说 \mathbf{c} ，垂直于其他两个，我们便会得到一个单斜晶胞。一个新的对称性成为可能——就是围绕着 \mathbf{c} 转过 180° 。六角晶胞是一种其中 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 两矢量长度相等而其夹角则为 60° 的特殊情况，因而围绕着 \mathbf{c} 所作的 60° ，或 120° ，或 180° 转动就都会重复该同一点阵（对于某些内禀对称而言）。

如果所有三个基矢都互成直角，但各有不同长度，则将得到一个正交晶胞。这一图形在环绕那三条轴中任一条轴转过 180° 时都是对称的。对于其中三个基矢都互相正交而其中又有两个彼此等长的四方晶体，则较高级的对称仍有可能。最后，还有立方晶体，那就是所有晶体之中对称性最高的了。

图 30-10 晶体点阵的七大类

关于对称性的全部这些讨论其要点在于晶体的内禀对称——有时会以巧妙的方式——表现在晶体的宏观物理性质中。比方，晶体一般都有一个张量电极化率。如果我们用极化椭球来描写该张量，则应当预期某些晶体对称性也必然会表



现在该椭球中。例如，一块立方晶体相对于围绕三个正交方向中之一的 90° 转动都是对称的。很明显，具有这么一种性质的唯一椭球就是圆球。因而立方晶体就必然是一种各向同性的电介质。

另一方面，四方晶体具有一个四重转动对称性。它的椭球就必定具有两个等长的主轴，而其第三条轴则应与晶轴平行。同理，由于正交晶体对三条正交轴都各有二重的转动对称性，它的这些轴就必须与极化椭球的轴相合。与此相似，单斜晶体的其中一条轴应该平行于这一椭球的三条主轴之一，尽管我们对其他两轴不能说些什么。由于三斜晶体不具有任何转动对称性，其椭球就可以有任意的取向了。

正如你所能见到的，对算出各种可能对称性并将其与各种可能的物理张量联系起来，我们可以进行一大场游戏。刚才仅仅考虑了极化张量，但对于其他张量——比如弹性张量——事情就会变得更加复杂。有一门称为“群论”的数学分支就是与这些课题打交道的，但运用常识往往也能得到你所需要的。

§ 30-7 金属强度

我们已经说过，金属通常具有一种简单的立方晶体结构；现在要来讨论它们的力学性质——那是与这一结构有关的。金属一般都十分“柔软”，因为很容易将金属晶体中的一层在另一层上滑动，你可能会认为：“那是滑稽可笑的；金属很强硬嘛。”这可不然，金属单晶是可以很容易扭歪的。

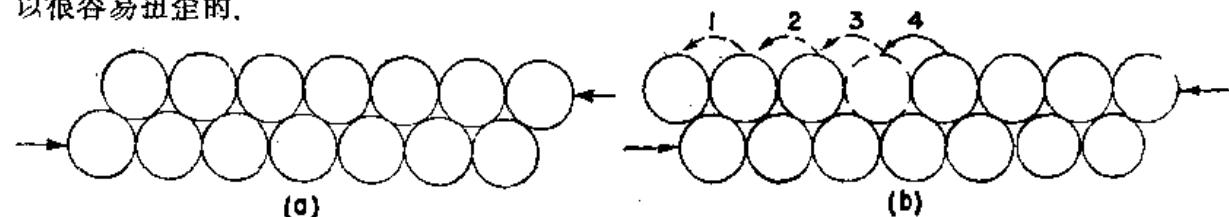


图 30-11 晶面滑移

假设我们考察受一个切力所作用的晶体中的两层，如 30-11 的简图所示。起初你也许会想到，整层原子该抵抗运动直到所施之力大至足以推动整层以“爬过该丘陵”，从而向左移过一个山峡。尽管滑移的确会沿一个平面发生，但实际却不是那样干的。（假如是那样干的话，你该算出金属比实际的要强硬得多。）实际发生的更象是每次只有一个原子在动；首先左边那个原子跳了过去，然后又轮到第二个、第三个等等；如图 30-11(b) 所示。事实上，是在原子间的那个空位迅速跑到右边，而净结果则是整个第二层都已移过了一个原子间隔。滑移就是这样进行的，因为每次要把一个原子抬高过一个隆起处所需的能量远低于要把整排原子都抬起来。一旦力足以发动这一过程，其余的就进行得非常快了。

结果弄清楚的是：在一实际晶体中，滑移将在一个平面上重复发生，然后就在那里停顿下来，却又在某另一个面上开始。之所以会开始和停止滑动的一些细节十分神秘莫测。事实上，前后接连发生的滑移还往往有相当均匀的间隔，这就很奇怪了。图 30-12 显示一块细长的铜晶体在受到拉伸后的照片。你能够看到滑移发生的那些不



图 30-12 铜的一块小晶体在受拉伸之后的照片

同平面。

如果你取一根其中存在一些大晶体的细锡线并把它拿到耳边，拉挽它时，则那些个别晶面的突然滑移会很明显。当那些滑移面一个接着一个地猛跳至一个新的位置上去时，你会听到一大堆滴嗒声。

在一排原子中出现一个“空位”的问题也许比按照图 30-11 所示的那样会较难于实现。当有更多的层次时，情况就必然会有点象图 30-13 所示的那样。晶体中这样的一种不完整性叫做位错。推测这种位错或是在晶体形成时就存在，或是在其表面某些切口或裂缝处产生，一旦它们产生了，就能够相当自由地在晶体里移动。由于大量这样的位错的运动就形成了宏观的畸变。

图 30-13 晶体中的一个位错

位错能够自由运动——这就是说，它们要求极少量的额外能量——只要晶体的其余部分都具有完美点阵。但位错可能会给“绊住”，如果它碰到晶体中别种缺陷的话。若要位错通过这么一个缺陷需要很大能量，则运动就会停歇。这恰好就是赋予不完整金属晶体以强度的机制。纯铁本来很软，但一个微小浓度的杂质原子就可以引起足够多的缺陷来有效地束缚住位错。正如你所知道的，钢基本上就是铁，却十分坚硬。要造成钢，小量碳质溶解在铁熔体中；如果这熔体迅速冷却，碳便会淀积成小粒，在晶体里引起了许多微观畸变。位错不能再到处移动了，因此金属就坚硬起来。

纯铜十分柔软，但可以进行“加工硬化”。这是通过锤打或弯来弯去而做到的。在这一种情况下，许多新的各种位错形成了，从而彼此互相干扰，减低了它们的可动性。也许你曾看过这样一种把戏，取一条“极软”铜带轻轻地将其弯曲成围绕在某人腕上的手镯。在这一过程中，铜镯受到加工硬化，便不能轻易地再被伸直！象铜这样受过加工硬化的金属，可以通过在高温上退火而再变软。原子的热运动把那些位错都“熨平”了，并再形成一些大块单晶。我们迄今仅仅描述了那种所谓滑移位错。还有许多其他种类，其中之一就是示如图 30-14 的那种螺型位错。这种位错通常在晶体生长中起着重要作用。

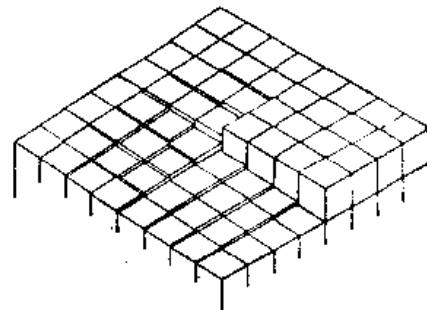
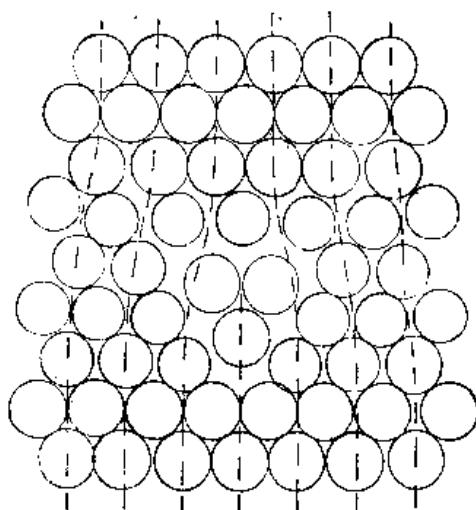


图 30-14 螺型位错

§ 30-8 位错与晶体生长

长期以来一个重大难题就是晶体可能怎样生长。我们已描述过每一原子也许是在经过了反复试验之后才决定是否最好加入到晶体阵容中去。但这就意味着每一原子应当找到一个能量低的地方。然而，被置在一个新的面上的原子只会由处于其下的一个或二个键来把它结合，而不会拥有与被置在一个角落里受到三面原子所包围那样而拥有的相同能量。假设我们想象一块正在生长的晶体作为如图 30-15 所示的一堆木块。若试图把新的一块放置在比如 A 的位置上，它将仅仅拥有最终该得到的六个邻居中之一。既然缺少那么多的键，它

的能量便不会很低。但若放在位置 B 上那就会好得多，那里已具备全部键联的一半份额。晶体的确是通过把新的原子附着在象 B 那样的位置上而生长起来的。

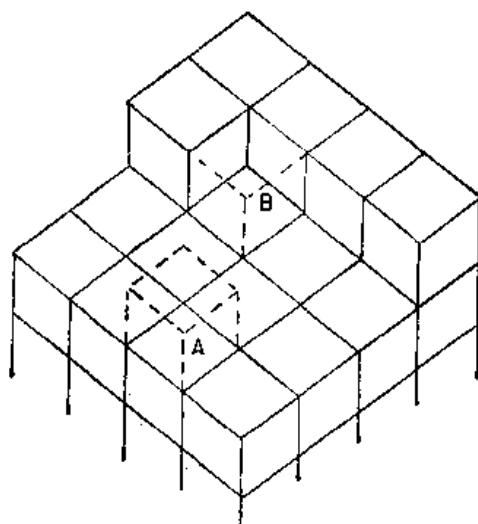


图 30-15 晶体生长

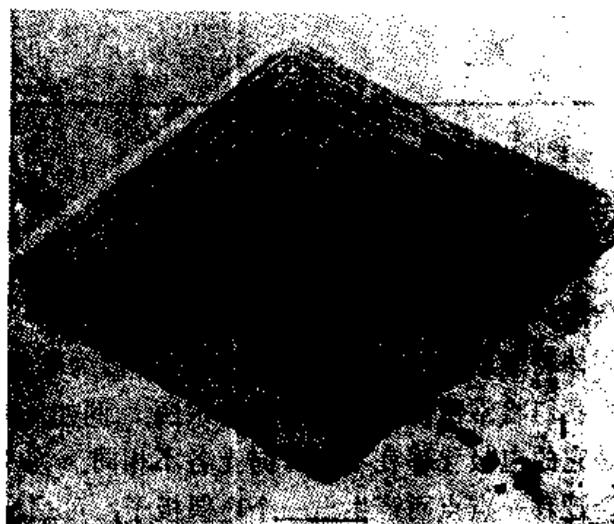


图 30-16 一块曾围绕着一个螺型位错而生长起来的石蜡晶体

然而，当这一行结束了又将如何呢？要重新开始另一行，一个原子在停留时只能与两边接触，而这又不太可能了。即使真的是这样干，当全层结束了又该如何呢？怎能开始一个新的层呢？一个答案是：晶体喜爱在一个位错上生长，比如围绕一个如图 30-14 所示的那种螺型位错。当一些块块加到晶体之上时，总会有其中保存着三个可资用的键的地方。因此，晶体喜欢同插进去的位错生长在一起。象这样的一种螺旋型生长示如图 30-16，那是一块石蜡单晶的照片。

§ 30-9 布喇格-奈伊模型

我们当然不能见到各别原子在晶体中所经历的过程。并且，正如你现在所认识的，有许多复杂现象是不容易作定量处理的。劳伦斯·布喇格 (Lawrence Bragg) 爵士和 J. F. 奈伊 (Nye) 曾想出一种方案来造成金属晶体的模型*，这种模型能以令人惊奇的方式表现出许多据信是在实际金属中发生的现象。

* 原书复制了这个模型的原来文献 (*Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 190, September 1947, pp. 474~481)。由于此附件过于繁复，没有译出。——译者注

31

张量

§ 31-1 极化张量

物理学家总有这么一种习惯，即取任何现象的最简单例子而称之为“物理学”，把那些更复杂的例子则留给其他学科——诸如应用数学、电工学、化学、晶体学等——去打交道。甚至固体物理就几乎只算得半个物理学，因为它对一些特殊物质关心得太多。所以在这些讲演中我们将常常漏掉许多有趣的东西。例如，晶体——或大多数物质——的重要性质之一就是它的电极化率在不同方向上各不相同。如果你在任一方向上加一电场，那些原子电荷将会迁移一点点而产生出一个电偶极子，可是这偶极矩的大小在很大程度上却取决于场之方向。当然，这是相当复杂的东西。但在物理学中我们往往通过谈及极化率在一切方向上都相同的那一种特殊情况而开始，目的在于使生活较容易过。其他情况则都留给别的部门。因此，在这一章中将要论及的东西，对于我们今后的工作来说就都完全不需要。

张量数学对于描述性质随方向而变的那些物质特别有用——尽管这只是其用途的一个方面。既然你们大多数将不会成为物理学家，但将会进入各种事态都会严重地与方向有关的实际世界中，你们迟早就都要用到张量。为了不使遗漏任何东西，我们即将描述张量，那怕不十分详尽也罢。现在要求你们有对物理学处理已达到完整地步的那种感觉。比方，我们的电动力学足够完整——正如同任一电磁学过程，甚至研究院课程那么完整。我们的力学不够完整，因为当过去学习力学时，我们还未曾达到数学论证那样高的水平，因而不能讨论象最小作用原理、或拉格朗日函数、或哈密顿函数、等等那类课题，这些都是描述力学的更优秀方式。然而，除了广义相对论之外，我们确已有了一整套力学定律。我们的电磁学是完整的，而一大堆其他东西也很完整。自然，量子力学还谈不到——我们得留一些东西在后头。可是，你至少应该懂得张量是什么。

我们曾在第三十章中强调过，结晶物质的特性在不同方向上是不同的——我们说它们是各向异性的。感生偶极矩随所加电场的方向改变而改变，只是一个我们将用之作为张量范例的例子。让我们讲，对于某一给定方向的电场，每单位体积的感生偶极矩 \mathbf{P} 与这外加电场 \mathbf{E} 的强度成正比吧。（如果 \mathbf{E} 不太大，这对于许多物质来说都是个很好近似。）我们将叫这一比例常数为 α^* 。现在要来考虑 α 取决于外加场方向的那类物质，诸如象方解石那样的晶体，当你望穿它时会看到双象。

假定在某一特定晶体中，我们已发现在 x 方向上的电场 \mathbf{E}_1 会在该方向上产生一个极化强度 \mathbf{P}_1 。然后又发现在 y 方向上有一个与 \mathbf{E}_1 同等强度的电场 \mathbf{E}_2 却在 y 方向上产生一个不同的极化强度 \mathbf{P}_2 。如果我们把电场置于 45° 角上又将如何呢？噢，那是沿 x 与沿 y 两种场的迭加，因而极化强度 \mathbf{P} 便将是 \mathbf{P}_1 与 \mathbf{P}_2 的矢量和，如图 31-1(a) 所示。极化强度不再与电场同向了。你可以看出这或许是怎样的得来的吧。可能有些电荷很容易上下移动，但

* 在第十章中，我们曾按照通常惯例并写出 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}$ ，而称 α （“*khi*”）为“电化率”。这里采用一个单独字母将更方便，所以就把 $\epsilon_0 \alpha$ 写成 α 。对于各向同性的电介质来说， $\alpha = (\chi - 1)\epsilon_0$ ，其中 χ 为介电常数（见 § 10-4 节）。

对于侧向运动则很僵硬。当力施于 45° 角时，那些电荷就会向上动得比向右多些。位移并不沿外力方向，因为其中有非对称的内在弹力。

当然，对于 45° 并没有什么独特意义。晶体的感生极化强度不在电场的方向上是普遍正确的。在上述例子中，我们碰巧对于 x 和 y 轴作了一个侥幸选择，即对该两轴来说 \mathbf{P} 都沿着 \mathbf{E} 。要是晶体相对于坐标系有了转动，则在 y 方向上的 \mathbf{E}_y 就该产生一个含有 x 分量也含有 y 分量的极化强度 \mathbf{P} 。同理，起因于 x 向的电场的极化强度也该有 x 和 y 两分量。那么极化强度就该如图31-1(b)所示的那样，而不再象(a)那种模样了。事情变得较为复杂——但对于任一个场 \mathbf{E} 来说， \mathbf{P} 的大小仍然正比于 \mathbf{E} 的大小。

我们现在要来处理晶体相对于坐标系有任意取向的那种普遍情况。沿 x 方向的电场将产生一个具有 x 、 y 和 z 各分量的极化强度 \mathbf{P} ；我们可以写出

$$P_x = \alpha_{xx} E_x, \quad P_y = \alpha_{yy} E_y, \quad P_z = \alpha_{zz} E_z, \quad (31.1)$$

这里我们正在申述的一切就是：若电场是在 x 方向上，那么极化强度不一定要在同一方向，而是含有 x 、 y 和 z 各分量——每个都正比于 E_x 。我们分别称这些比例常数为 α_{xx} 、 α_{yy} 和 α_{zz} （第一个字母告诉我们所牵涉到的是哪个分量，末一个字母则表明电场的方向）。

同理，对于一个沿 y 方向之场，我们可以写出

$$P_x = \alpha_{xy} E_y, \quad P_y = \alpha_{yy} E_y, \quad P_z = \alpha_{yz} E_y, \quad (31.2)$$

而对于一个沿 z 方向之场，则有

$$P_x = \alpha_{xz} E_z, \quad P_y = \alpha_{yz} E_z, \quad P_z = \alpha_{zz} E_z, \quad (31.3)$$

原来我们已经说过，极化强度线性地依赖于场，因而若有一个兼有 x 和 y 分量的电场 \mathbf{E} ，则合成 \mathbf{P} 的 x 分量便将等于式(31.1)和(31.2)的两个 P_x 之和。如果 \mathbf{E} 拥有沿 x 、 y ，和 z 的各分量，则其合成 \mathbf{P} 之分量就将等于式(31.1)、(31.2)，和(31.3)的三个贡献之和。换句话说， \mathbf{P} 将由下列诸式给出：

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z, \\ P_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z, \\ P_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (31.4)$$

于是晶体的介电行为就完全由这九个量(α_{xx} 、 α_{yy} 、 α_{zz} 、 α_{xy} 、 \cdots)来描述，我们可用 α_{ij} 这个符号来作代表。（每个下标 i 和 j 各代表三个可能字母 x 、 y ，和 z 中的任一个。）一个任意电场 \mathbf{E} 可以分解为其分量 E_x 、 E_y ，和 E_z ；从这些我们就能够用 α_{ij} 来找出 P_x 、 P_y 和 P_z ，把它们合起来即是总极化强度 \mathbf{P} 了。由这九个系数 α_{ij} 构成的一组数称为张量——在本例中，即指极化张量。正如我们说那三个数值(E_x 、 E_y 、 E_z)会“形成矢量 \mathbf{E} ”一样，我们也申明这九个数值(α_{xx} 、 α_{yy} 、 \cdots)会“形成张量 α_{ij} ”。

§ 31-2 张量分量的变换

你知道，当我们改变到另一个坐标系 x' 、 y' 、 z' 上去时， \mathbf{E} 矢量的分量 E_x 、 E_y ，和 E_z 将完全不同—— \mathbf{P} 的分量也是如此。所以对于不同坐标系，系数 α_{ij} 将不相同。事实上，你可

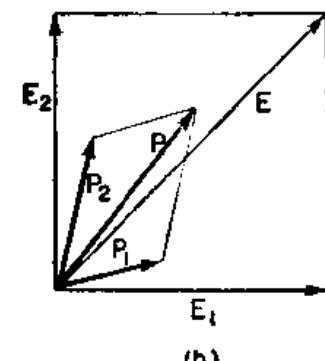
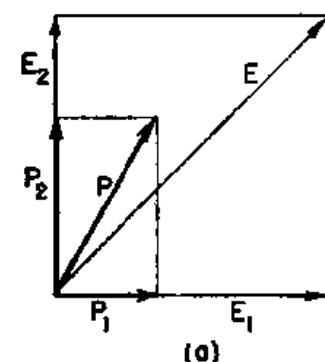


图 31-1 在一块各向异性的晶体中，极化强度的矢量加法

以通过按照适当办法改变 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 的分量来看出那些 α 为何必然会改变, 因而如果我们在该新坐标系上描述同一个物理电场, 就仍应得到同一个极化强度。对于任一个新的坐标系, P_x' 是 P_x , P_y 和 P_z 的一个线性组合:

$$P_x' = aP_x + bP_y + cP_z,$$

而对于其他各分量也是如此。如果你利用式(31.4)由那些 E 来代替 P_x , P_y 和 P_z , 则可获得

$$P_x' = a(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) + b(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \cdots) + c(\alpha_{zx}E_x + \cdots + \cdots).$$

然后再用 E_x , E_y 和 E_z 来写出 E_x , E_y 和 E_z ; 比方,

$$E_x = a'E_x + b'E_y + c'E_z,$$

式中 a' , b' , c' 与 a , b , c 有关, 但彼此不相等。因此你就有了以分量 E_x , E_y 和 E_z 来表达 P_x' 的式子; 也就是说, 你已有一套新的 α_{ij} 。这一步骤相当繁复, 但却十分直截了当。

当我们谈论改变坐标轴时, 是在假定晶体在空间呆着不动。若晶体跟着坐标轴转动, 那些 α 就该不会改变。反之, 假如晶体的取向相对于坐标轴变了, 我们就该有一套新的 α 。但如果这些 α 对于晶体的任一取向为已知, 则对于任一其他取向就都可以通过刚才所述的那种变换而找到。换句话说, 晶体的介电性质可以通过给出相对于一任意选定的坐标系的极化率张量 α_{ij} 而作出完整的描述。正如我们能够把一矢量速度 $v = (v_x, v_y, v_z)$ 联系到一个粒子上去, 如果知道了当坐标轴改变时这三个分量将按照某一特定方式改变的话, 所以对于晶体来说, 我们也将给它联系上它的极化张量 α_{ij} , 这九个分量将按照某一规定方式变换, 如果坐标系改变的话。

式(31.4)中所写出的有关 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 的关系可以写成一个更简洁形式:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j, \quad (31.5)$$

式中默认 i 代表 x , y 或 z , 而在求和符号中的 j 则取 $j=x$, y 和 z 的。为了与张量打交道, 已经发明了许多种独特记法, 但每一种记法只对于某一有限种类的问题方便。一个寻常惯例是去删掉式(31.5)中那个求和符号(Σ), 而留下一个默认: 每当同一个下标(这里是 j)出现两次时, 就要对它求和。既然我们对张量将用得那么少, 就无需去关心采用任何这一类的独特记法或规则了。

§ 31-3 能量椭球

现在要来取得有关张量的某些经验。假定我们提出这么一个有趣问题: 要使晶体极化所需的能量(除了我们所已知道的在每单位体积电场中就有 $\epsilon_0 E^2 / 2$ 这么多的能量以外)若干? 暂时考虑那些正在发生位移的原子电荷。要使电荷移过距离 dx 所作之功为 $qE_x dx$, 而倘若每单位体积中共有 N 个电荷, 则所作总功便是 $qE_x N dx$ 。但 $qNdx$ 又是每单位体积中的偶极矩变化 dP_x , 因而单位体积所需的能量就是

$$E_x dP_x.$$

把对于场的三个分量之功都合起来, 就可得每单位体积之功为

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}.$$

由于 \mathbf{P} 之大小正比于 \mathbf{E} , 因此在使 \mathbf{P} 从 0 增大至 \mathbf{P} 时对每单位体积所作之功就是对 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ 的积分。把这个功叫做 u_p^* , 就可写出

* 由电场产生极化而作之功, 不应与一永偶极矩 \mathbf{p}_0 的势能 $-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$ 互相混淆。

$$u_P = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_i E_i P_i. \quad (31.6)$$

现在可以根据式(31.5)用 \mathbf{E} 表达 \mathbf{P} , 因而有

$$u_P = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} E_i E_j. \quad (31.7)$$

这能量密度 u_P 是一个与坐标轴的选择无关的数值, 因此是一个标量。这样, 张量便有这么一种性质, 即当它对其中一个下标(即对一矢量)求和时, 会给出一个新的矢量; 而当它对两个下标(即对两个矢量)都求和时, 则会给出一个标量。

α_{ij} 这个张量实际上应称为“二阶张量”, 因为它有两个下标。矢量——带有一个下标——是一阶张量, 而标量——完全没有下标——则是零阶张量。因此我们讲, 电场 \mathbf{E} 是一个一阶张量而 u_P 则是个零阶张量。有可能把张量的概念推广到三个或四个下标, 因而形成了高于二阶的张量。

极化张量的下标取遍三个可能的数字——这是三维中的张量。数学家会考虑在四维、五维、或更多维中的张量。我们已在对电磁场的相对论性描述中采用过一个四维张量 $F_{\mu\nu}$ (第二十六章)。

极化张量 α_{ij} 具有一个有趣性质, 即它是对称的, 这就是说, $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, 而对于任一对下角标都是如此。(这是实际晶体的一种物理性质, 而对于一切张量并不一定都如此。)你可以通过在下述循环中计算晶体的能量变化而自己去证明那必然是正确的:(1)加一电场于 x 方向上;(2)加一电场于 y 方向上;(3)除去沿 x 向之场;(4)除去沿 y 向之场。现在晶体已回到原来出发时的那个状态, 而在极化过程中所作之净功就必须回到零了。然而, 你能够证明, 要此事兑现, α_{xy} 必须等于 α_{yx} 。当然, 这同一种论证也可授给 α_{xz} , 等等。因而极化张量是对称的。

这也就意味着, 极化张量可以通过只测量在不同方向上使晶体极化所需的能量而加以测定。假设我们加上一个只有 x 和 y 分量的 \mathbf{E} 场, 那么按照式(31.7), 就有

$$u_P = \frac{1}{2} [\alpha_{xx} E_x^2 + (\alpha_{xy} + \alpha_{yx}) E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2]. \quad (31.8)$$

仅用一个 E_x 场, 就可以测定 α_{xx} ; 仅用一个 E_y 场, 则可以测定 α_{yy} ; 若同时用 E_x 和 E_y 两者, 还可得到由带有 $(\alpha_{xy} + \alpha_{yx})$ 这一项而引起的附加能量。既然 α_{xy} 与 α_{yx} 相等, 这一项便是 $2\alpha_{xy}$, 并且可与该能量联系上了。

(31.8)的能量表达式具有一种漂亮的几何解释。假设我们问起对应于某一给定能量密度——比如说 u_0 ——该有什么样的 E_x 和 E_y 之场。那恰好就是求解下列方程式的数学问题:

$$\alpha_{xx} E_x^2 + 2\alpha_{xy} E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2 = 2u_0.$$

这是一个二次方程, 因此如果我们把 E_x 和 E_y 画成曲线, 则这一方程之解便是在一个椭圆上的所有各点(图 31.2)。(它必须是个椭圆, 而不是一条抛物线或双曲线, 因为对于任何一个场来说能量总是正的而且又是有限大的。)具有分量 E_x 和 E_y 的矢量 \mathbf{E} 可以从该椭圆的原点画出来。因此, 象

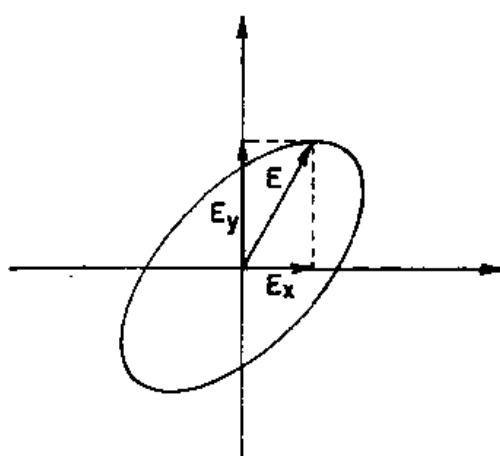


图 31.2 提供恒定极化能的矢量 $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ 的轨迹

这样的一个“能量椭圆”就是使极化张量“形象化”的一种巧妙办法。

如果我们现在推广至包括所有三个分量，则所需在任一方向上给出单位能量密度的电场矢量 \mathbf{E} 就能提供在一个椭球表面上的一点，如图 31-3 所示。这个恒定能量椭球的形状唯一地标志着该极化张量。

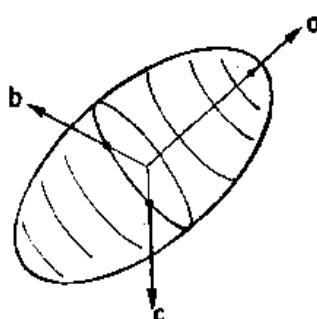


图 31-3 极化张量的能量椭球

原来椭球具有这么一个有趣性质，即它总是可以通过给出三个“主轴”方向以及沿这些轴的椭圆直径而加以描述的，“主轴”就是该最长直径与该最短直径的方向以及与此两者都正交的另一方向。它们在图 31-3 上即是 a , b 和 c 三条轴所标明的。相对于这些轴，椭球就有一个特别简单的方程

$$\alpha_{aa} E_a^2 + \alpha_{bb} E_b^2 + \alpha_{cc} E_c^2 = 2u_0.$$

因此，相对于这些轴，这个介电张量就只有三个不等于零的分量： α_{aa} , α_{bb} 和 α_{cc} 。这就是说，不管晶体如何复杂，总能够选取一套坐标轴（不一定是晶体本身的轴），在其中极化张量只有三个分量。用这样一组轴，式(31.4)便简单地变成

$$P_a = \alpha_{aa} E_a, \quad P_b = \alpha_{bb} E_b, \quad P_c = \alpha_{cc} E_c. \quad (31.9)$$

一个沿任一条主轴的电场将产生一个沿该同一轴的极化强度，当然这三条轴的系数则可以彼此不同。

人们往往对张量这样来描述，即把那九个系数罗列在一个方括号内：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.10)$$

对于主轴 a , b 和 c 来说，只有那些对角线项才不等于零；这时我们就说，“张量是对角线式的”。整个张量为

$$\begin{bmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{bmatrix}. \quad (31.11)$$

重要之点在于，任一极化张量（实际上，在任一数目的维中凡属于二阶的任一对称张量）都可以通过选取适当的一组坐标轴而置于这一形式上。

若在对角形式中的极化张量的三个元素都彼此相同，即如果

$$\alpha_{aa} = \alpha_{bb} = \alpha_{cc} = \alpha, \quad (31.12)$$

则该能量椭球便会变成一个圆球，极化率在所有方向上都一样。这种材料是各向同性的了。在张量记法中，

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (31.13)$$

式中 δ_{ij} 为单位张量

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31.14)$$

当然，这意思是：

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, & \text{若 } i = j; \\ \delta_{ij} &= 0, & \text{若 } i \neq j. \end{aligned} \quad (31.15)$$

这个 δ_{ij} 张量通常称为“克朗内克 (Kronecker) δ ”。你可以这样来自取乐：通过证明若把

坐标系改变成任一其他的直角坐标系，则张量(31.14)仍然具有完全相同形式。式(31.13)的极化张量会给出

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} E_j = \alpha E_i,$$

这个式子具有关于各向同性电介质的与我们那个古老结果

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$$

相同的意义。

极化椭球的形状和取向有时可与晶体的对称特性联系起来。我们曾在第三十章中说过，属于三维点阵的共有230种不同的可能内部对称，而对于许多目的来说，它们可以按照晶胞的形状方便地归纳成七类。现在这极化椭球就应该分享晶体的这些内禀几何对称了。例如，三斜晶体具有低级对称——其极化椭球将有互不等长的轴，而每一轴的方向一般都没有与晶轴排成一线。另一方面，单斜晶体具有这样的特性，即如果晶体对其中的一轴转过 180° ，它的性质不会改变。所以在经过了这样一个转动之后该极化张量应仍然相同。结果是，极化椭球在经过了这么一个 180° 转动之后就必须返回到其本身上，这只有在该椭球的一根轴与晶体的对称轴的方向相同时才能发生。除此之外，这个椭球的取向和大小都不受到限制。

可是对于正交晶体，该椭球的诸轴就必须都对应于各晶轴，因为围绕三轴中任一轴的 180° 转动都将重复同一点阵。如果我们进到四方晶体，则该椭球必须具有那同一种对称，因而就必然会有两条相等的直径。最后，对于立方晶体来说，椭球的所有三条直径都必须等长；它已变成了一个球，而晶体的极化率在所有一切方向上就都相同了。

对晶体的一切可能对称性算出各种可能有的张量类型来将是一场大型游戏，这称为“群论”分析法。但对于极化张量的那种简单情况，要看出其中关系应该会怎么样，还是相对容易的。

§ 31-4 其他张量：惯性张量

还有许多其他张量例子出现在物理学中。比方，在金属或任一种导体中，人们经常找到电流密度 \mathbf{j} 近似地正比于电场 \mathbf{E} ；该比例常数称为电导率 σ ：

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

可是，对于晶体来说， \mathbf{j} 与 \mathbf{E} 的关系就比较复杂了；电导率并非在所有一切方向上都是一样的。这电导率乃是一个张量，因而可以写成

$$\mathbf{j}_i = \sum \sigma_{ij} E_j.$$

关于物理张量的另一个例子是那转动惯量。在第一卷第十八章中我们曾经见过，一块固体对某一固定轴旋转时就有一个与 ω 成正比的角动量 \mathbf{L} （而我们叫这个比例因数为 I ，即转动惯量）：

$$\mathbf{L} = I \omega.$$

对一任意形状的物体，转动惯量与物体相对于转动轴的取向有关。例如，一块矩形板对于它的三个正交轴的转动惯量就各不相同。原来角速度 ω 和角动量 \mathbf{L} 两者都是矢量。对于环绕每一根对称轴，它们彼此互相平行。但如果对于三条主轴转动惯量各不相同，则一般说来， ω 和 \mathbf{L} 就不同在一个方向上（图 31.4）。它们以类似于 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 的关系式互相联系

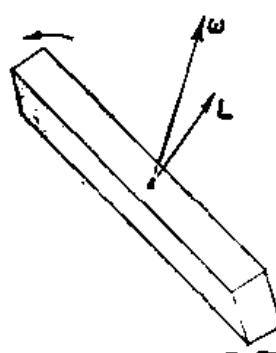


图 31-4 一般说来，一块固体的角动量 \mathbf{L} 并不平行于其角速度 ω

着。一般说来，我们应当写出

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (31.16)$$

这九个系数称为惯性张量。按照与极化方面的类似性，对于任一角动量的动能应为角速度分量 ω_x , ω_y 和 ω_z 的某一二二次型：

$$KE = \frac{1}{2} \sum_i I_{ij}\omega_i\omega_j. \quad (31.17)$$

我们可利用能量来定义惯性椭球。并且，关于能量的论证也可用来证明该张量是对称的——即 $I_{ij} = I_{ji}$ 。

若一刚性物体的形状为已知，则该物体的惯性张量便可以算出来。我们只须写下在该物体中所有粒子的总动能。一个质量为 m 而速度为 v 的粒子具有动能 $\frac{1}{2}mv^2$ ，而总动能就不过是遍及该物体中所有各粒子的这个和

$$\sum \frac{1}{2} mv^2$$

罢了。每一粒子的速度 v 与整个固体的角速度 ω 有关。现在假定，物体是在绕我们认为固定不动的质心旋转。那么，若 \mathbf{r} 是一个粒子从该质心量起的位移，则其速度 v 就要由 $\omega \times \mathbf{r}$ 给出。因此总动能为

$$KE = \sum \frac{1}{2} m(\omega \times \mathbf{r})^2. \quad (31.18)$$

眼前必须做的就是用 ω_x , ω_y , ω_z 各分量和 x , y , z 把 $\omega \times \mathbf{r}$ 写出，并将这一结果与式(31.17)作一比较；通过验明各项以找出 I_{ij} 。在进行代数运算时，我们写出

$$\begin{aligned} (\omega \times \mathbf{r})^2 &= (\omega \times \mathbf{r})_x^2 + (\omega \times \mathbf{r})_y^2 + (\omega \times \mathbf{r})_z^2 = (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= \omega_y^2 z^2 - 2\omega_y \omega_z zy + \omega_z^2 y^2 + \omega_x^2 x^2 - 2\omega_x \omega_z zx + \omega_z^2 z^2 + \omega_x^2 y^2 - 2\omega_x \omega_y yx + \omega_y^2 x^2. \end{aligned}$$

对这一方程乘以 $m/2$ ，遍及所有的粒子求和，并同式(31.17)作比较，我们见到，例如 I_{xx} 是由下式给出的：

$$I_{xx} = \sum m(y^2 + z^2).$$

这就是我们以前(第一卷第十九章)曾经得到过的关于环绕 x 轴的物体转动惯量公式。由于 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ，也可将这一项写成

$$I_{xx} = \sum m(r^2 - x^2).$$

算出所有其他各项，该惯性张量便可以写成

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m(r^2 - x^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(r^2 - y^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(r^2 - z^2) \end{bmatrix}. \quad (31.19)$$

如果你乐意的话，还可以按“张量记法”写成

$$I_{ij} = \sum m(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j), \quad (31.20)$$

式中 r_i 是某一粒子的位置矢量的 (x, y, z) 分量，而 \sum 则意味着对所有粒子求和。于是转动惯量就是一个二阶张量，其中各项代表该物体的一种属性，并且通过下式将 L 联系到 ω 上去：

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j. \quad (31.21)$$

对于不管什么形状的任一物体，我们都能够找到该惯性椭球，从而找到三个主轴。对于这些轴来说，该张量将是对角的，所以对于任一物体就总共有三个互相正交之轴，绕这些轴角速度与角动量互相平行。它们称为惯量主轴。

§ 31-5 叉积

我们应当指出，从第一卷第二十章我们就已经应用过二阶张量了。在那里，我们曾通过下式定义一个“在一平面上的转矩”，诸如 τ_{xy} ：

$$\tau_{xy} = xF_y - yF_x.$$

推广到三维中去，可以写成

$$\tau_{ij} = r_i F_j - r_j F_i. \quad (31.22)$$

τ_{ij} 这个量就是一个二阶张量。要看出这是真的，一种办法就是通过把 τ_{ij} 同某一矢量相结合，比方说同单位矢量相结合，按照

$$\sum_j \tau_{ij} e_j.$$

如果这个量是一矢量，则 τ_{ij} 必然会按照张量变换——这是我们关于张量的定义。把有关 τ_{ij} 的式子代入，便得

$$\sum_j \tau_{ij} e_j = \sum_j \tau_{ij} F_j e_j - \sum_j r_j e_j F_i = r_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) F_i.$$

由于那些点积都是标量，右边两项便都是矢量，而它们之差也是一样。因此 τ_{ij} 就是一个张量。

但 τ_{ij} 是一种特殊类型的张量；它是反对称的，即

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji},$$

所以它只有三个不等于零的项—— τ_{xy} ， τ_{yz} 和 τ_{zx} 。在第一卷第二十章中我们已能够证明，这三项几乎是由于“凑巧”才会象一矢量的三个分量那样变换的，使得我们可以下这样的定义：

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}).$$

我们说“凑巧”，是因为它只发生于三维中。比方，在四维中，一个二阶的反对称张量就有六个不等于零的项，而肯定不能由具有四个分量的矢量来代替它。

正如这个轴矢量 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 实际上是一个张量那样，每个由两极矢构成的叉积也是如此——与上述相同的一切论证也都适用。可是，出自幸运，它们也可用矢量（实际上是一种膺矢）来表达，因而数学就给我们造成方便。

从数学方面讲，若 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 是任意两矢量，则那九个量 $a_i b_j$ 总会形成一个张量（尽管它可能没有任何有用的物理目的）。这样，对于位置矢量 r_i 来说， $r_i r_j$ 就是一个张量，而由于 δ_{ij} 也是一个张量，我们便明白式(31.20)的右边确是一个张量。同样，式(31.22)也是一个张量，因为其右边的两项都是张量。

§ 31-6 胁强张量

迄今我们所描述的对称张量都是由将一矢量联系到另一矢量上去的系数产生的。现在我们要来考察一个具有不同物理意义的张量——胁强张量。假设有一块被施以各种力的固

体。我们说其内部会有各种“胁强”，这意思是，在该材料中的相邻部分间存在一些内力。当我们在§12-3节中考虑一张被伸张的膜中的表面张力时，就曾稍为谈及在二维情况下的这种胁强。现在将看到，在一三维物体的材料中内力可以由一个张量来描述。

考虑某一种弹性材料——比如说是一种胶质——的物体。如果我们在该块材料里割开了一道缝，在这割口每一边的物质一般都会受到一些内力而引起位移。在作这一切割之前，材料中的两部分间必然有力在维持其固定位置；我们可以用这些力来给胁强下定义。假设我们正在考察一块垂直于 x 轴的平面——象图31-5中的 σ 面——并问起在这个面上越过一小面积 $\Delta y \Delta z$ 上之力。在这一面积左边的材料施力 ΔF_1 于其右边的材料，如图(b)所示。当然，还有一个反向的反作用力 $-\Delta F_1$ 施于左边的材料上。如果该面积足够小，我们就该预期 ΔF_1 与面积 $\Delta y \Delta z$ 成正比。

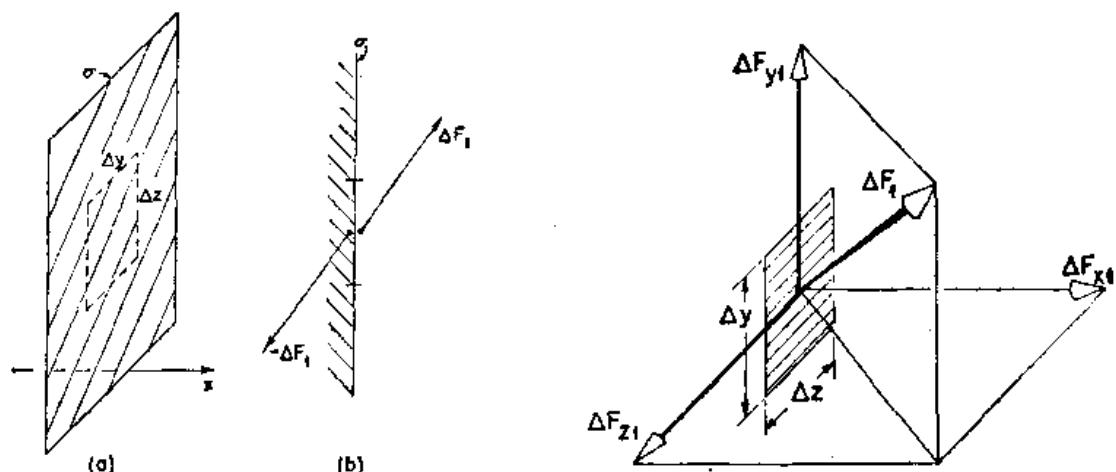


图 31-5 σ 面左边的材料在越过 $\Delta y \Delta z$ 面积上
施一力 ΔF_1 于该平面右边的材料上

图 31-6 作用于与 x 轴正交的面积元 $\Delta y \Delta z$ 上之
力 ΔF_1 可分解成三个分量 ΔF_{x1} , ΔF_{y1} 和 ΔF_{z1}

你已经熟悉了胁强中的一种——在一静止液体中的压强。那里力等于压强乘面积并与该面积元垂直。对于固体——也对于运动中的粘滞性液体——来说，力就不一定与该面垂直。

除了压强(正的或负的)之外还会有切力。(所谓“切力”，我们指的是越过面上之力的切向分量。)力之所有三个分量都必须计算在内。也应该注意，如果我们在一个具有某一其他取向的平面上切割，则这些力将不相同。对于内胁强的完整描述需要有一个张量。

我们按照下述办法来对胁强张量下定义：首先，我们想象一个垂直于 x 轴的切割并把越过这割面上之力 ΔF_1 分解成它的分量 ΔF_{x1} , ΔF_{y1} , ΔF_{z1} ，如图31-6所示。这些力对面积 $\Delta y \Delta z$ 的比值，分别被称为 S_{xz} , S_{yz} 和 S_{zx} 。例如，

$$S_{xz} = \frac{\Delta F_{z1}}{\Delta y \Delta z}.$$

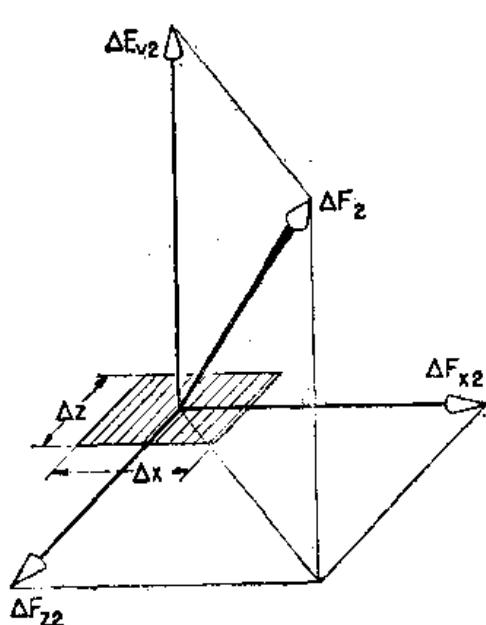


图 31-7 越过垂直于 y 轴的一个面积元
上之力被分解成三个互相垂直的分量

第一个下角标 y 指力的分量方向；第二个下角标 x 指垂直于该面积的方向。如果你愿意，还可以把该

面积 $\Delta y \Delta z$ 写成 Δa_z , 表明是一个垂直于 x 轴的面积元。于是

$$S_{yz} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta a_z}.$$

其次, 我们设想一个垂直于 y 轴的想象切割, 跨越一小面积 $\Delta x \Delta z$ 将有一个力 ΔF_x , 再把这个力分解成三个分量, 如图 31-7 所示, 并定义三个胁强分量 S_{xz} , S_{yy} , S_{zz} , 作为在那三个方向上每单位面积之力。最后, 我们作一个垂直于 z 轴的想象式切割并定义三个分量 S_{xz} , S_{yz} 和 S_{zz} 。因此, 我们就有了九个数值:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.23)$$

现在要来证明, 这九个数值足以完整地描述胁强的内部状态, 而且 S_{ij} 的确是一个张量。假设我们要知道横越一个在某一任意角度上取向的面上之力, 能否从 S_{ij} 找到它呢? 能, 只要按照下述办法: 试想象一个小小的固体图形, 它有一个 N 面, 那就是该新面, 而其他各面则都垂直于坐标轴。假如这个 N 面碰巧平行于 z 轴, 则该有如图 31-8 所示的那个三角形。(这多少是一种特殊情况, 但将足够圆满地演示那普遍方法。) 原来作用于图 31-8 中那个小三角体上的各胁力是平衡的(至少在无限小尺寸的极限上), 因而施于其上的总力就必须等于零。我们直接从 S_{ij} 知道了在垂直于各坐标轴的那些面上之力。它们的矢量和就应等于作用在 N 面上之力, 因而我们可用 S_{ij} 来表达这个力。

关于作用在该小三角形体积上的表面力达成平衡这一假设, 我们是忽略了任何可能会存在的其他一些彻体力, 诸如重力, 或如果我们的坐标系不是一个惯性坐标系的话就会存在的那种膺力的。然而, 应该注意, 这种彻体力将与那个小三角体的体积、因而也即与 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 成正比, 而所有的表面力则均与诸如 $\Delta x \Delta y$, $\Delta y \Delta z$ 等面积成正比的。所以, 如果我们取该小楔子的尺寸足够小, 则同表面力相比彻体力就总可以忽略了。

现在让我们把施于该小楔子上之力都相加起来。首先考虑 x 分量, 那是五个部分之和——从每一个面各有一部分! 然而, 如果 Δz 足够小, 那么作用于(与 z 轴垂直的)那两个三角形上之力就会相等相反, 因而可以将其忘却掉。施于底面矩形上之力的 x 分量为

$$\Delta F_{x2} = S_{xy} \Delta x \Delta z.$$

施于该竖立矩形上之力为

$$\Delta F_{x1} = S_{xz} \Delta y \Delta z.$$

上述两力必须等于越过 N 面的向外力的 x 分量。令 n 为垂直于 N 面的单位矢量, 并令施于此面上之力为 F_n ; 于是我们有

$$\Delta F_n = S_{xz} \Delta y \Delta z + S_{xy} \Delta x \Delta z.$$

越过这一个平面的胁强 x 分量 S_{xn} 等于 ΔF_n 除以 $\Delta z \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 这样一个面积, 即

$$S_{xn} = S_{xz} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + S_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

原来 $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 就是 n 与 y 轴间之角 θ 的余弦, 如图 31-8 所示, 因而我们可把它写成

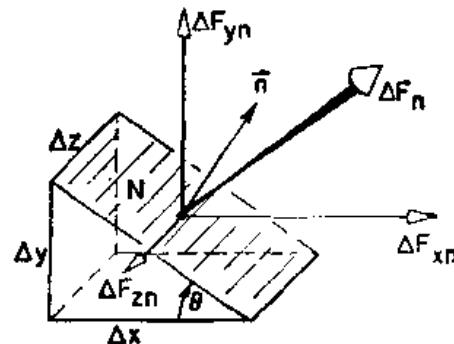


图 31-8 把横越 N 面(其单位法
线为 n)之力 F_n 分解成各分量

n_y , 即 \mathbf{n} 之 y 分量. 同理, $\Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 就是 $\sin \theta = n_x$. 我们便可将上式写成

$$S_{nn} = S_{xx}n_x + S_{yy}n_y.$$

如果现在推广至一个任意表面元, 就该得到

$$S_{nn} = S_{xx}n_x + S_{yy}n_y + S_{zz}n_z,$$

或一般地,

$$S_{nn} = \sum_j S_{ij}n_j. \quad (31.24)$$

我们能够找到以 S_{ij} 表达的横越任一个面元之力, 因而 S_{ij} 的确会完整地描述材料内部的胁强状态.

式(31.24)申述, 该张量 S_{ij} 把力 \mathbf{S}_n 联系到单位矢量 \mathbf{n} 上去就好象 a_i 把 \mathbf{P} 联系到 \mathbf{E} 上去似的. 既然 \mathbf{n} 和 \mathbf{S}_n 都是矢量, 所以 S_{ij} 的各分量就应当象一个张量那样随坐标系的改变而作变换. 因此, S_{ij} 的确是一个张量.

我们也可通过考察作用于一个小立方体材料上之力来证明 S_{ij} 是一个对称张量. 假设取一个小立方体, 其各个面被摆至平行于我们的坐标轴, 并从一个截面上去考察它, 如图

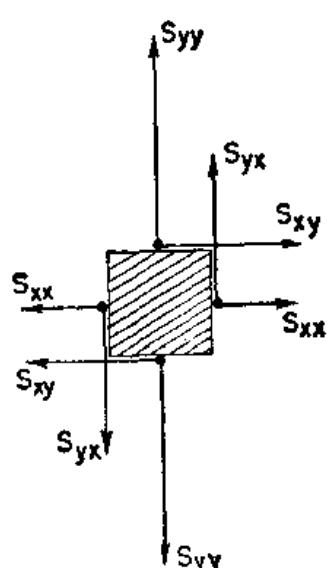


图 31-9 作用于一小单位立方体的四个面上的 x 力和 y 力

31-9 所示. 若令这一立方体的每一边为单位长度, 则作用于与 x 和 y 轴正交的那些面上之力的 x 和 y 分量就可能是图上所示的那些. 如果该立方体很小, 则在其中一个面上的胁强就不会与在其对面上的胁强有显著的不同, 因而那些力分量就如图所示的那样大小相等而方向相反. 现在对于该立方体必然不会有转矩作用着, 否则它就会开始转动了. 环绕中心点的总转矩为 $(S_{yx} - S_{xy})$ (乘以该立方体的单位边长), 而由于这总转矩为零, S_{yx} 就应等于 S_{xy} , 因而这胁强张量就是一个对称张量.

既然 S_{ij} 是一个对称张量, 就可以由一个具有三条主轴的椭球来加以描述. 对于与这些轴正交的面来说, 胁强特别简单——它们相当于与这些面正交的挤压或拉挽. 因而沿这些面上就不会有切力了. 对于任一胁强来说, 我们总能够选择坐标轴使其各切向分量为零. 如果这椭球是一圆球, 则在任一方向上就只有法向力. 这相当于流体静压强(正的或负的). 因此, 对于流体静压强来说, 这一张量就是对角的, 而且所有三个分量都相等; 实际上, 它们刚好等于压强 p . 即可以写成

$$S_{ij} = p\delta_{ij}. \quad (31.25)$$

胁强张量——因而也有它的椭球——一般将在一块材料中逐点变化; 要描述整块材料, 就需要给出 S_{ij} 的每一分量作为位置的函数. 因此, 胁强张量就是一个场. 我们已曾有过标量场, 象温度 $T(x, y, z)$ 那样, 在空间每一点上给出一个数值, 以及矢量场, 象 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 那样, 对每一点给出三个数值. 现在我们又有了张量场, 对空间每一点会给出九个数值——或对于该对称张量 S_{ij} 来说, 实际上是六个数值. 在一块任意受畸变的固体中, 对其内力的完整描述需要六个各含有 x , y 和 z 的函数.

§ 31-7 高阶张量

胁强张量 S_{ij} 描述了物质中的内力. 如果材料是弹性的, 用另一个张量 T_{ij} ——称为胁

变张量——来描述其内部畸变很方便。对于一种象金属棒那样简单的物体，你知道在长度上的变化 ΔL 与所加之力约略成正比，因而我们说它服从胡克定律：

$$\Delta L = \gamma F.$$

对于受了任意畸变的固态弹性体来说，胁变 T_{ij} 与胁强 S_{ij} 的关系是由一组线性方程表达的：

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} S_{kl}. \quad (31.26)$$

并且，你也知道，一条弹簧（或一根棒）的势能为

$$\frac{1}{2} F \Delta L = \frac{1}{2} \gamma F^2.$$

推广至固体中的弹性能量密度，则为

$$U_{\text{弹性}} = \sum_{ijkl} \frac{1}{2} \gamma_{ijkl} S_{ij} S_{kl}. \quad (31.27)$$

因此对于晶体弹性的完整描述就必须由这些系数 γ_{ijkl} 来提供。这给我们引来了一头新的野兽。它是一个四阶张量。由于每一个下角标各可取三个数值中之一，即取 x, y 或 z ，就总共有 $3^4 = 81$ 个系数。但实际上却只有 21 个不同数值。首先，由于 S_{ij} 是对称的，它就只有 6 个不同的数值，因而在式(31.27)中就只要求 36 个不同系数。可是还有， S_{ij} 和 S_{kl} 可以互相交换而不致改变能量。这把不同系数的数目又减少至 21 个。所以要描述那种属于最可能低对称的晶体就需要 21 个弹性常数！当然，对于较高对称的晶体，这一数目还可以减少。例如，立方晶体只有三个弹性常数，而各向同性物质则只有二个。

这后一点的真实性可以这样看出。 γ_{ijkl} 的各分量怎么能与坐标轴的方向无关，如同一块各向同性物质所必须有的那样呢？答案是：只有当它们可用张量 δ_{ij} 表达时，才能是无关的。有两个可能表式： $\delta_{ij}\delta_{kl}$ 和 $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ ，它们都具备所需的对称性，因而 δ_{ijkl} 就必须是它们的一个线性组合。因此，对于各向同性材料来说，

$$\gamma_{ijkl} = a(\delta_{ij}\delta_{kl}) + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

而这一种材料就需要两个常数 a 和 b 来描述它的弹性了。另外，将留给你们去证明立方晶体仅需要三个常数。

作为最后一个例子，这次是属于一个三阶张量，我们举出压电效应。在受胁强作用之下，晶体会产生一个正比于这一胁强的电场；因此，一般说来，规律是

$$E_i = \sum_{j,k} P_{ijk} S_{jk},$$

式中 E_i 为电场，而 P_{ijk} 为压电系数——或压电张量。你能否证明，若晶体有一个反演中心（在从 $x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$ 的变换上保持不变），则所有压电系数都等于零？

§ 31-8 电磁动量的四元张量

在这一章中，迄今所考察过的所有张量都是联系到三维的；它们被定义为在空间转动之下具有某种变换性质。在第二十六章中，我们曾有机会用到在相对性空时中的一个张量——电磁张量 $F_{\mu\nu}$ 。这样一个四元张量的各分量以某种我们曾经算出来的特殊方式在洛伦兹的坐标系变换之下变换着。（尽管我们并未曾按照那种做法，但我们本来就已经可以把洛伦兹变换认为是在称为闵可夫斯基（Minkowski）空间的“四维空间”里的一种转动；那么与我们这里正在做的来作个类比，就会更加清楚了。）

作為最後一個例子，我們要來考慮在相對論的四維(t, x, y, z)中的另一個張量。當我們在上面寫出該動量張量時，我們曾把 S_{ij} 定義為越過一單位面積之力的分量。可是力等於動量的變率。因此，與其說“ S_{xy} 是越過垂直於 y 的單位面積上之力的 x 分量”，我們本盡可以說“ S_{xy} 是穿過垂直於 y 的單位面積的動量 x 分量之變率”。換句話說， S_{ij} 的每一項也各代表通過垂直於 j 方向的單位面積的動量 i 分量流。這些是純空間分量，但它们却是在四維(μ 和 $\nu=t, x, y, z$)中還含有象 S_{tx}, S_{yt}, S_{zt} 等附加分量的一個“較大”張量 $S_{\mu\nu}$ 的一些部分，我们现在就試圖找出這些附加分量的物理意義。

我们知道，那些空間分量代表著動量流。可以从研究另一种“流”——電荷流——來获得一个会把它推广至时间那一维上去的线索。对于该标量电荷来说，流率(通过每单位垂直于流动的面积)就是一空间矢量——电流密度 j 。我们已经看到，这一流动矢量的时间分量就是那些流动質料的密度。比方， j 可以同一个时间分量 $j_t = \rho$ ——即电流密度——相结合而构成一个四元矢 $j_\mu = (\rho, j)$ ；也就是说，当 j_μ 中的 μ 取 t, x, y, z 各值时，它指的是该标量电荷的“密度，在 x 向上的流率，在 y 向上的流率，在 z 向上的流率”。

現在，与刚才所作的關於一个标量流动的时间分量的说法相类似，我们也许会期待，同用来描述動量的 x 分量的流动的 S_{xx}, S_{xy}, S_{xz} 在一起的，就应该有一个时间分量 S_{xt} 。它会代表在流动中的那一种东西的密度；也就是说， S_{xt} 应该是 x 动量的密度。所以我们就能够沿水平方向推广我们的張量以包括一个 t 分量。即是有

$$\begin{aligned}S_{xt} &= x \text{ 动量密度,} \\S_{xx} &= x \text{ 动量的 } x \text{ 向流,} \\S_{xy} &= x \text{ 动量的 } y \text{ 向流,} \\S_{xz} &= x \text{ 动量的 } z \text{ 向流.}\end{aligned}$$

同理，对于動量的 y 分量我们有三个流动分量—— S_{yx}, S_{yy}, S_{yz} ——此外还应加入一个第四项：

$$S_{yt} = y \text{ 动量密度.}$$

而当然，在 S_{xx}, S_{xy}, S_{xz} 之外我们也应该加上

$$S_{zt} = z \text{ 动量密度.}$$

在四維中还有一个動量的 t 分量，我们知道那就是能量。因此，張量 S_{ij} 应该在竖向上* 用 S_{tx}, S_{ty} 和 S_{tz} 来推广，其中

$$\begin{aligned}S_{tx} &= \text{能量的 } x \text{ 向流,} \\S_{ty} &= \text{能量的 } y \text{ 向流,} \\S_{tz} &= \text{能量的 } z \text{ 向流;}\end{aligned}\tag{31.28}$$

这就是说， S_{tx} 是穿過垂直於 x 軸的面每單位面積和每單位時間的能量流，等等。最后，为使張量达到完整，还需要 S_{tt} ，那该是能量密度。我们已把三维的動量張量 S_{ij} 推广成四維的動量-能量張量 $S_{\mu\nu}$ 。那下标 μ 可以取四个值 t, x, y 和 z ，分别指“密度”，“在 x 向上每單位面積的流动”，“在 y 向上每單位面積的流动”，“在 z 向上每單位面積的流动”。同样地， ν 取 t, x, y, z 四个值以便告诉我们關於什么是在流动，也就是“能量”，“沿 x 向的動量”，“沿 y 向的動量”和“沿 z 向的動量”。

作为一个例子，我们将讨论不是在实物中、而是在一个存在着电磁场的自由空间区域里

* 这表明是一个与 x, y, z 各轴都“正交”的方向，即 t 方向。——译者注

的一个张量。我们知道，该能流就是坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 。因此， \mathbf{S} 的 x, y 和 z 分量，从相对论的观点来看，就是我们的四维胁强-能量张量的分量 S_{tx}, S_{ty} 和 S_{tz} 。张量 S_{ij} 的对称性同样也带到了 t 分量那边去，因而这个四维张量 $S_{\mu\nu}$ 就是对称的

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \quad (31.29)$$

换句话说，代表 x, y 和 z 动量密度的 S_{xt}, S_{yt}, S_{zt} 也等于坡印廷矢量 \mathbf{S} ，即能流的 x, y 和 z 分量——正如我们在前面一章中曾用不同的一种论证所证明过的那样。

这电磁胁强张量 $S_{\mu\nu}$ 的其余各分量也可用电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 来表达。这就是说，必须把胁强——或较少神秘性地说成是动量流——纳入电磁场之中。在第二十七章中在有关式 (27.21) 之处我们曾对此有所讨论，但还未将其细节算出。

那些想要锻炼他们对付四维张量的好本事的人们也许乐于见到用场来表达的关于 $S_{\mu\nu}$ 的公式：

$$S_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha, \beta} F_{\beta\alpha} F_{\beta\alpha} \right),$$

其中对于 α, β 的求和是指对于 t, x, y, z 的求和，不过（如同在相对论中所经常做的那样）我们采用那种求和符号 Σ 与符号 δ 的特别含义。在那些总和中有关 x, y, z 的项都要减去，并且 $\delta_{tt} = 1, \delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = -1$ ，对于 $\mu \neq \nu$ 则 $\delta_{\mu\nu} = 0$ 。你能否证实（令 $c=1$ ）它会给出能量密度 $S_{tt} = (\epsilon_0/2)(E^2 + B^2)$ 和坡印廷矢量 $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ？你能否证明：在其中 $\mathbf{B}=0$ 的静电场中，胁强的主轴是在静电场的方向上，而且有一个张胁强 $(\epsilon_0/2)E^2$ 是沿电场方向，还有一个相等的压强垂直于电场方向？

32

稠密材料的折射率

§ 32-1 物质的极化

我们现在要来讨论由稠密材料所引起的光之折射——因而也包括光之吸收——现象。在第一卷第三十一章中，我们曾讨论过折射率理论，但那时由于我们的数学能力有限，就不得不局限于只是找出诸如气体那样的低密度材料的折射率。然而，产生折射率的物理原理却已经弄清楚了。光波中的电场把气体里的分子极化，产生了一些振动着的电偶极矩。这些振动电荷的加速度又会辐射出新的场波。这一种新的场，与那旧的场相干，就会产生一个相当于那原来的波由于受到某一周期相移动因而经过变化了之场。由于这一周期相移动与该材料的厚度成正比，这一效应就相当于在材料里有一个不同的相速度。以前当考察这一课题时，曾经略去了诸如由于新波会改变振动偶极子所在处之场的这样一些效应所引起的复杂性。我们假定过施于原子中电荷上之力仅来自那个入射波，而事实上，它们的振动不仅由该入射波所推动，而且也由所有其他各原子的辐射波所推动。当时要把这一效应包括进去，对于我们来说会有困难，因而仅仅研究了稀薄气体，在那里上述效应变成无关紧要的了。

然而，现在我们将发现，通过利用微分方程来处理这一问题却是轻而易举了。这一办法掩盖了折射率的物理起源（如来自再辐射波与原本之波的相干作用），但却使有关稠密材料的理论简单得多。本章将从以前的工作中拼集大量材料。实际上我们将拾取一切所需要的东西，因而在引进的概念中属于全新的相对来说就很少。由于你可能需要去刷新你对将要用到的那些东西的记忆，我们便提供一个关于即将用到的式子以及每一式子的出处的清（表 32-1）。在大多数场合下，我们将不再花时间去提供物理论证，而只是要利用那些式子。

表 32-1 本章的工作将建立在下列这些曾分别见于以前各章中的材料的基础上

主 题	参 考	方 程 式
阻尼振动	第一卷第二十三章	$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F$
气体折射率	第一卷第三十一章	$n=1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \hat{m}$ $n=n' - in''$
动 性	第一卷第四十一章	$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = F$
电 导 率	第一卷第四十三章	$\mu = \frac{\tau}{m}; \quad \sigma = \frac{Nq_e^2\tau}{m}$
极 化 性 在电介质内部	第二卷第十章 第二卷第十一章	$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ $E_{\text{总场}} = E + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}$

我们从对气体折射率机制方面的回忆出发。假定每单位体积内共有 N 个粒子，而每一粒子则象谐振子那样行动。并采用这样一个模型：原子或分子中的电子受到一个正比于其位移之力所束缚住（好象是用一条弹簧来维持其位置似的）。我们曾经强调，这并非原子的正当经典模型，但以后将证明，正确的量子力学理论（在一些简单情况下）会给出相当于这一模型的结果。在以往的处理中，我们从未将原子振子中的阻尼力那种可能性包括进去，但

现在就要这样做。这种力相当于对运动的阻力，也就是与电子速度成正比之力。于是运动方程为

$$F = q_e E = m(\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x), \quad (32.1)$$

式中 x 是平行于 \mathbf{E} 方向的位移。（我们正在假设一种各向同性的振子，其恢复力在一切方向上都相同。并且，我们暂时也在考虑一个线偏振波，以便使 \mathbf{E} 不致改变方向。）如果作用于一原子上的电场是正弦式地跟着时间变化，则可以写出

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t}. \quad (32.2)$$

这样位移将以同一频率振动，即可令

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

代入 $\dot{x} = i\omega x$ 和 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ，便能够用 E 来解出 x ：

$$x = \frac{q_e/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.3)$$

如果已经知道位移，便可算出加速度 \ddot{x} ，并找出对折射率应负责的那些辐射波。这就是以前在第一卷第三十一章中曾经计算过折射率的那种办法。

然而，现在要来采取一个不同的步骤。原子的感生偶极矩 p 为 $q_s x$ ，或利用式(32.3)，即是

$$\mathbf{p} = \frac{q_e'/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \mathbf{E}. \quad (32.4)$$

既然 \mathbf{p} 与 \mathbf{E} 成正比，我们便可写成

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E}, \quad (32.5)$$

式中 α 称为原子极化率*。采用这一定义，便有

$$\alpha = \frac{q_e^2/m\epsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.6)$$

关于原子中电子运动的量子力学解答会给出除了下述一些修正之外的一个相似结果。每一种原子**拥有若干个固有频率，而每一频率有其本身的阻尼常数 γ 。并且，每一振动模式的“强度”各不相同，这可对每一频率的极化率乘以一个其数值期待为 1 的数量级的强度因数 f 来表达。对于每一振动模式，要由 ω_k 、 γ_k 和 f_k 来代表那三个参数 ω 、 γ 和 f ，并遍及各不同的模式求和，我们便把式(32.6)修改成这样：

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.7)$$

如果 N 是在该材料内每单位体积的原子数，则极化强度 P 就恰好是 $Np = \epsilon_0 N \alpha E$ ，并正比于 E ：

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 N \alpha(\omega) \mathbf{E}. \quad (32.8)$$

换句话说，当有一正弦式电场作用于材料上时，就有一个正比于该电场的每单位体积感生偶极矩——具有一个我们要强调是有赖于频率的比例常数 α 。在十分高频上， α 很小：即响应不那么厉害。并且，这个比例常数是一复数，这意味着极化强度并不刚好跟随着电场，而是在某种程度上可能被移动了位相。无论如何，总会有一个其大小正比于电场强度的每单位体积极化强度。

* 贯通本章我们将遵照第一卷第三十一章中的那种记法；并令 α 代表原子极化率，如在这里所定义的。在上一章中我们曾利用 α 代表体积极化率——即 \mathbf{P} 对 \mathbf{E} 的比率，在本章的记法中则应该是 $\mathbf{P} = N \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$ （见式 32.8）。

** 这里按原文只是“The atoms”，我们将其改成“每一种原子”，似较确切些。——译者注

請勿用於盈利之目的

§ 32-2 在电介质中的麦克斯韦方程组

在实物中极化现象的存在意味着材料内部有了极化电荷和极化电流，而这些就应该放进那完整的麦克斯韦方程组中以求得场。我们这回是要在一个电荷和电流不象在真空中那样各等于零的、而是由极化矢量所隐蔽地给出的那种情况下求解麦克斯韦方程组。我们的第一个步骤是要明显地找出电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{j} 来，这些要遍及一个当我们过去在定义 \mathbf{P} 时就曾心中有数的那同一大小的小体积来加以平均。于是，我们所需要的 ρ 和 \mathbf{j} 便可从极化强度那里获得了。

我们已在第十章中见到，当 \mathbf{P} 从一处变至另一处时，就会有一个由下式给出的电荷密度：

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (32.9)$$

我们当时正在处理静电场，但这同一公式也适用于随时间而变之场，可是，当 \mathbf{P} 随时间变化时，就有电荷在运动，因而也有一个极化电流。每一振动电荷会贡献等于其电荷 q_0 乘以其速度 v 的电流，设每单位体积共有 N 个这样的电荷，则电流密度 \mathbf{j} 为

$$\mathbf{j} = N q_0 v.$$

既然我们知道 $v = dx/dt$ ，那么 $\mathbf{j} = N q_0 (dx/dt)$ ，这恰好就是 $d\mathbf{P}/dt$ 。因此，来自变化着的极化方面的电流密度为

$$\mathbf{j}_{\text{极化}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (32.10)$$

我们的问题现在既直接而又简单。我们要利用式(32.9)和(32.10)由 \mathbf{P} 表达出电荷密度和电流密度以写出麦克斯韦方程组。（我们假定在该材料中并没有别的电流和电荷。）然后再用式(32.5)来把 \mathbf{P} 联系到 \mathbf{E} 上去，并用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 求解该方程式——寻找波的解答。

在对此事着手之前，我们想要作一个历史性的注解。麦克斯韦原本以一种与我们现在所用的不同方式写出他的方程式。由于这些方程在过去许多年中曾被写成这种不同形式——而且目前还有许多人按照那样来写——我们就要来解释其中的区别。在早期的年月里，介电常数机制还未受到充分和清楚的认识。原子的本性未被理解。因此人们并未认识到会有从 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 方面对电荷密度 ρ 的贡献。他们仅凭那些不束缚于原子中的电荷（诸如流经导线中的电荷或从表面上擦了出去的电荷）来作思考。

今天，我们倾向于让 ρ 代表总电荷密度，它包括来自受束缚的原子电荷的那一部分。若我们把这一部分称为 $\rho_{\text{束缚}}$ ，则可以写出

$$\rho = \rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{束缚}},$$

式中 $\rho_{\text{束缚}}$ 就是麦克斯韦所曾经考虑过的电荷密度，而且是指那些不会被束缚于个别原子上的电荷。于是写出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{束缚}}}{\epsilon_0}.$$

由式(32.9)代入 $\rho_{\text{极化}}$ 得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{束缚}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

或

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{束缚}}. \quad (32.11)$$

在有关 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的那个麦克斯韦方程式中的电流密度，一般也有来自受束缚的原子电流的贡献。因此可以写出

而该麦克斯韦方程则变成

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{其他}},$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_{\text{其他}}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{j}_{\text{极化}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.12)$$

利用式(32.10),便可以得

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{其他}} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (32.13)$$

现在你可以明白,假如由下式定义一个新的矢量 \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (32.14)$$

则该两个场方程就会变成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{其他}} \quad (32.15)$$

和

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{其他}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (32.16)$$

这些实际上就是麦克斯韦对于电介质所用的形式。他的其余两个方程则是,

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

和

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

这些与我们目前所用的相同。

麦克斯韦以及其他早期工作者还有一个与磁性材料(我们不久即将加以考虑)有关的问题。由于他们还未知道对原子磁性应该负责的那些环行电流,他们便用了一个还缺少这另一部分的电流密度。他们实际上写出的并非式(32.16),而是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (32.17)$$

其中 \mathbf{H} 与 $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B}$ 不同之处乃在于前者已包括了原子电流的效应在内*。(于是 \mathbf{j}' 就代表剩下的其余电流。)所以麦克斯韦拥有四个场矢量—— \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} 和 \mathbf{H} —— \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 是不理解材料内部正在进行着的过程的一种隐蔽方法。你会在许多地方找到用这种方式写下来的方程组。

要求解该方程组,有必要把 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 与其他的场联系起来,而人们往往写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{和} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (32.18)$$

然而,这些关系式对于某些材料只是近似地正确,而且即便如此也只有在场随时间变化不太迅速时才行。(对于按正弦式变化之场,人们往往能够通过把 ϵ 和 μ 各写成频率的复变函数而将式子按照这样写出,但对于场的一种任意时间变化那就不行。)所以在求解这些方程时往往受到各种形式的欺骗。我们认为,正确的办法乃是用目前所理解为基本的那些量来记录那些方程式——而这正是我们一贯所做的。

§ 32-3 电介质中的波

我们现在就要求找出:除了束缚于原子中的电荷以外便别无其他附加电荷的那种电介质中,哪一种类型的电磁波能够存在。因此我们取 $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 和 $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。这样,麦克斯韦方程组变成

* 这说法从式子的表面看似乎是对的,因为式左边只出现 \mathbf{H} (而不出现 \mathbf{B}),右边只出现 \mathbf{j}' (而不出现 \mathbf{j})。但实际上 \mathbf{H} 是不包括原子电流效应的,这可从第451页的(36.12)式看出。 \mathbf{D} 也是不包括极化电荷的效应的,但由于 $\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$,在减去此方面的效应时,负负为正得了在中间的一个正号(即 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$)。只有 \mathbf{E} 才是包括一切电荷的电场,又只有 \mathbf{B} 才是包括一切电流的磁场。这些正确观点在本书中各处都由作者经常加以反复强调。

——译者注

$$(a) \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad (b) c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} + \mathbf{E} \right), \\ (c) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (d) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (32.19)$$

可按照以前所曾做过的来求解这些方程式。即从取式(32.19a)的旋度开始：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}.$$

其次，利用矢量恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

并对于 $\nabla \times \mathbf{B}$ 代入式(32.19b)；便得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

对于 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 则利用式(32.19a)，因而得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (32.20)$$

所以我们现在所得到的并非是波方程，而是 \mathbf{E} 之达朗伯算符等于涉及极化强度 \mathbf{P} 的两项。

然而，既然 \mathbf{P} 取决于 \mathbf{E} ，方程(32.20)就仍有可能存在波解。现在我们要自行限制于各向同性电介质中，因而 \mathbf{P} 始终与 \mathbf{E} 同向。让我们试找出一个沿 z 方向行进之波。这样电场也许会按 $e^{i(\omega t - kz)}$ 变化。我们也将假定，波是在 x 方向上偏振的——即电场只有一个 x 分量。我们写出

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (32.21)$$

你知道，任一个 $(z - vt)$ 的函数代表一个以速率 v 行进之波。式(32.21)的指数可以写成

$$-ik(z - \frac{\omega}{k}t),$$

因而式(32.21)就代表一个具有如下相速之波：

$$v_{\text{ph}} = \omega/k.$$

折射率 n 是通过令

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{n}$$

而给下定义的(见第一卷第三十一章)。这样式(32.21)就变成

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - ns/c)}.$$

因此，我们可以这样来找出 n ，即找出要使式(32.21)满足那些适当场方程所需的是什么 k 值，然后再引用下式：

$$n = \frac{kc}{\omega}. \quad (32.22)$$

在一块各向同性材料中，将只有极化的一个 x 分量；因此 \mathbf{P} 不会跟 x 坐标发生变化，所以 $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ ，这样便消除了式(32.20)右边的第一项。并且，由于我们正在假定一种线性的电介质， P_x 便将按 $e^{i\omega t}$ 变化，而 $\partial^2 P_x / \partial t^2 = -\omega^2 P_x$ 。式(32.20)中的拉普拉斯算符简单地变成 $\partial^2 E_x / \partial z^2 = -k^2 E_x$ ，因而得到

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_x. \quad (32.23)$$

现在让我们暂时假定，由于 \mathbf{E} 按照正弦式变化，便可以令 \mathbf{P} 正比于 \mathbf{E} ，犹如式(32.5)那样。(以后我们将要回来讨论这一假定。)因而写出

$$P_x = \epsilon_0 N \alpha E_x.$$

这样, E_x 便从式(32.23)中除去, 从而找到

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N\alpha). \quad (32.24)$$

我们已经找出了一个象式(32.21)那样、而又具有由式(32.24)所给出的那种波数 k 之波将满足各个场方程。利用式(32.22), 折射率 n 将由下式给出:

$$n^2 = 1 + N\alpha. \quad (32.25)$$

让我们把这一个式同曾经在有关气体折射率的理论(第一卷第三十一章)中所得到的式子作比较。那里我们曾经得到式(31.19), 即

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (32.26)$$

由式(32.6)取 α , 则式(32.25)该向我们提供

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.27)$$

首先, 这里有一个新项 $i\gamma\omega$, 因为我们正在把振子的损耗包括进去。其次, 前式左边是 n 而不是 n^2 , 所以又有一个附加因数 $1/2$ 。但要注意, 如果 N 足够小以致 n 接近于 1(如在气体中所该有的), 则式(32.27)会申述 n^2 等于 1 加上一个小数目: $n^2 = 1 + \epsilon$ 。于是可以写出 $n = \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$, 而该两个表式也就彼此等价了。这样, 我们的新方法对于气体就会给出一个与以前相同的结果。

现在, 你或许认为, 式(32.27)也应同时给出关于稠密材料的折射率。然而, 由于以下几个原因它需要给予修正一下。首先, 关于这个式子的推导曾假定对每一原子所作用的极化场是 E_x 场。然而, 这一假定并不正确, 因为在稠密材料中也还有由于附近其他原子所产生的可以与 E_x 相比拟之场。当我们过去学习电介质中的静电场时也曾考虑过一个相似问题(见第十一章)。你将会记起, 我们当时是通过想象将一个单独原子置于周围电介质的一个球形小洞中而估计出它所受之场的。在这样一个洞里之场——这我们曾称之为局部电场——比起平均场 E 来要超出 $P/3\epsilon_0$ 这么多。(然而, 应该记住, 这一结果只有在各向同性材料——包括立方晶体的那种特殊情况——中才是严格正确的。)

这同一些论据对于波中的电场也将适用, 只要该波长比起原子间距来大得多便行。把我们自己限制于这一类情况, 便可以写出

$$E_{\text{局部}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (32.28)$$

这局部电场就是应该应用于式(32.3)中的 E 场; 也就是说, 式(32.8)应重新写成

$$P = \epsilon_0 N \alpha E_{\text{局部}}. \quad (32.29)$$

由式(32.28)引用 $E_{\text{局部}}$, 便得

$$P = \epsilon_0 N \alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

或

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E. \quad (32.30)$$

换句话说, 在稠密材料中 P 仍将正比于 E (对正弦式场来说)。然而, 比例常数却不是 $\epsilon_0 N \alpha$, 如在式(32.23)下面我们所曾写出的那样, 而应该是 $\epsilon_0 N \alpha / [1 - (N\alpha/3)]$ 。因此就必须将式(32.25)改正为

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}. \quad (32.31)$$

如果把这个式写成如下形式, 那就更加方便:

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha, \quad (32.32)$$

这在代数上与上式相当, 称为克劳修斯-莫索提(Clausius-Mosotti)方程.

在稠密材料中还有另一种复杂性. 由于相邻原子那么靠近, 它们之间便有强烈的相互作用. 因此, 那些内部振动模式改变了. 原子振动的各个固有频率受这些互作用所分散, 而它们往往也受到严重阻尼——阻力系数变得十分巨大. 因此, 固体中的那些 ω_0 和 γ , 与在自由原子中的相比就很不相同. 即使带着这些保留, 我们仍然至少可以近似地利用式(32.7)来表达 α . 于是就有

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ng_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.33)$$

最后一个复杂性. 如果该稠密材料是几种成分的混合物, 则每一成分都将对极化有所贡献. 总的 α 就等于这混合物中每一成分的贡献之和 [除了对有序晶体中该局部场近似式(32.28)的那一种不准确性——当过去分析铁电体时我们就曾讨论过的那些效应——外]. 把每一成分的单位体积原子数写成 N_j , 便该用下式来代替(32.32):

$$3 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) = \sum_j N_j \alpha_j, \quad (32.34)$$

其中每一 α_j 将由象式(32.7)那样的表式所给出. 于是式(32.34)就结束了我们关于折射率的理论. $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 这个量由频率的某一复变函数所给出. 而这一函数正是平均的原子极化率 $\alpha(\omega)$. 关于稠密物质中 $\alpha(\omega)$ 的准确计算(即要找出 f_k , γ_k 和 ω_{0k})是量子力学中一个困难问题. 只有对于寥寥几种特别简单的物质才曾从第一手原理完成过此事.

§ 32-4 复 折 射 率

现在要来看看上述结果, 即式(32.33)的后果. 首先, 我们注意到 α 是一复数, 因而折射率 n 也将是一复数. 这有什么意思呢? 现在试来将 n 写成一实部与一虚部之和:

$$n = n_R - in_I, \quad (32.35)$$

其中 n_R 和 n_I 都是 ω 的实数函数. 我们在 in_I 之前写上一负号, 以便在所有寻常光学材料中 n_I 将是一正值. (在普通非活动性材料——不象激光器或光源本身那样——中 γ 是一正数, 而这会使 n 的虚部为负.) 式(32.21)所代表的平面波可以用 n 来写成

$$E_z = E_0 e^{i\omega(t - nz/c)}.$$

将 n 写出象式(32.35)那样, 则有

$$E_z = E_0 e^{-in_I z/c} e^{i\omega(t - n_R z/c)}. \quad (32.36)$$

$e^{i\omega(t - n_R z/c)}$ 这个因子*代表一个以速率 c/n_R 传播着之波, 因而 n_R 就代表我们正常所认为的折射率. 但这个

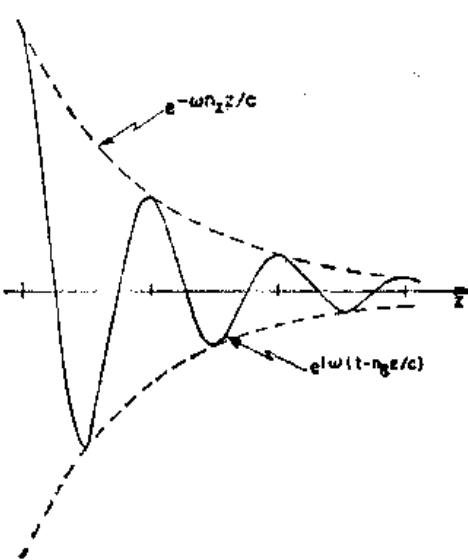


图 32-1 在某一时刻 t , $E_z(z)$ 曲线, 设 $n_I \approx n_R/2\pi$

* “因子”这个词是由原文“项”字改过来的. ——译者注

波的波幅为

$$E_0 e^{-\omega n_I z/c},$$

是指数函数式地随着 z 减弱的。当 $n_I \approx n_R/2\pi$ 时，在某一时刻，电场强度作为 z 的函数的曲线示如图 32-1。至于折射率的虚部则代表由于在原子振子中的能量损耗而引起的波之衰减。波的强度与波幅的平方成正比，因而

$$\text{强度} \propto e^{-2\omega n_I z/c}.$$

这往往被写成

$$\text{强度} \propto e^{-\beta z},$$

其中 $\beta = 2\omega n_I/c$ 称为吸收系数。这样在式(32.33)中我们就不仅有关于材料的折射率理论，而且也有关于材料的吸收理论了。

在寻常我们认为是透明的材料中， $c/\omega n_I$ 这个量——具有长度量纲——比起该材料的厚度来要大得多。

§ 32-5 混合物的折射率

关于折射率理论还有另一个可以用实验来进行核对的预言。假设我们考虑一个含有两种成分的混合物。这混合物的折射率并非是两折射率的平均值，而应当由式(32.34)所示的两个极化率之和来给出。如果我们问起比如说一糖溶液的折射率，那么总极化率就是水与糖的两极化率之和。当然，每一极化率必须用该种物质每单位体积内的分子数作为 N 来计算。换句话说，若给定溶液中有 N_1 个极化率为 α_1 的水分子和 N_2 个极化率为 α_2 的蔗糖 ($C_{12}H_{22}O_{11}$) 分子，则应该有

$$3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2. \quad (32.37)$$

可以通过测量不同浓度的蔗糖水溶液的折射率，应用此式面对实验结果检验我们的理论。然而，这里我们得作几种假设。上面的公式假定当蔗糖溶解于水中时并没有发生化学反应，而对个别原子振子的扰动在不同浓度中不会十分差异。所以上述结果肯定只是近似的。不管怎样，还是让我们来看看这个式子到底有多好。

我们选取蔗糖溶液这一例子是因为在《化学与物理学手册》(Handbook of Chemistry and Physics) 中有一个关于折射率的很好的表，而且又因为蔗糖是一种分子晶体，所以在其溶解过程中并没有发生过电离或其他任何会改变其化学状态的事情。

我们在表 32-2 的头三行中给出从手册中查出来的数据。A 行为蔗糖按重量计的百分比，B 行为测得的密度(克/厘米³)，而 C 行则为用 589.3 纳米波长之光量得的折射率。这种晶体并非各向同性的，因而所量得的折射率沿各方向就不相同。该手册给出这三个数值。

$$n_1 = 1.5376, \quad n_2 = 1.5651, \quad n_3 = 1.5705.$$

我们取其平均值。

我们本来可以试算出每一浓度之 n ，但现在并不知道要为 α_1 或 α_2 取何值。让我们就这样来检验这一理论吧：假定水之极化率(α_1)在所有各种浓度上都相同，并利用 n 的实验值而从式(32.37)解出 α_2 ，以算出蔗糖的极化率。如果这一理论正确，则应对于一切浓度都得到同一个 α_2 值。

首先，必须知道 N_1 和 N_2 ：让我们用阿伏伽德罗数 N_A 来表达。试取一升(1000 厘米³)作为体积单位。于是 N_1/N_A 就是每升的重量除以其分子量，而每升的重量则是密度(乘

表 32-2 蔗糖溶液的折射率, 与式(32.37)的预言作比较

从手册中查出来的数据								
A 蔗糖分 数含 量(以重 量计)	B 比 重 (克/厘米 ³)	C <i>n</i> (20°C)	D 每升蔗糖 ^a 克分子量 <i>N</i> ₂ / <i>N</i> ₀	E 每升水 ^b 克 分子量 <i>N</i> ₁ / <i>N</i> ₀	F $3 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)$	G <i>N</i> ₁ <i>α</i> ₁	H <i>N</i> ₂ <i>α</i> ₂	J <i>N</i> ₀ <i>α</i> ₂ (克/升)
0 ^c	0.9982	1.333	0	55.5	0.617	0.617	0	—
0.30	1.1270	1.3811	0.970	45.8	0.698	0.487	0.211	0.213
0.50	1.2296	1.4206	1.798	34.15	0.759	0.379	0.380	0.311
0.85	1.4454	1.5033	3.59	12.02	0.886	0.1335	0.752	0.210
1.00 ^d	1.588	1.5577 ^e	4.64	0	0.960	0	0.960	0.207

^a 纯水; ^b 蔗糖晶体; ^c 平均值(见书中); ^d 蔗糖的分子量=342; ^e 水的分子量=18.

1000 以获得每升克数)乘以蔗糖或水的分数重量. 就这样, 得到了记在该表 D 和 E 两行上的 *N*₂/*N*₀ 和 *N*₁/*N*₀.

在 F 行, 我们从 C 行中的实验 *n* 值算出了 $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$. 对于纯水来说, $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 为 0.617, 那恰好是 *N*₁*α*₁. 然后我们便能填上 G 行上的其余部分, 因为对于每一列 G/E 只容许有相同的比值——即 0.617:55.5. 从 F 行减去 G 行, 便得到蔗糖的 *N*₂*α*₂ 那一部分贡献, 示如 H 行. 把这些数字用 D 行中的 *N*₂/*N*₀ 值来除, 我们便得到示如 J 行上的 *N*₀*α*₂.

根据我们的理论, 应该预计所有的 *N*₀*α*₂ 值都相同. 它们并非完全相同, 但也相当接近. 可以得出结论说, 我们的看法是相当对头的. 而且还有, 也已经找出糖分子的极化率并不象会与其周围环境有太大的关系——它的极化率在一稀溶液与在一浓溶液中几乎相同.

§ 32-6 金属中的波

在本章中我们对固体材料所建立的理论也可应用于象金属那种良导体, 但得要求有十分少量的修正. 在金属中, 有某些电子缺乏把它们维系在任一特定原子上的那种结合力; 而正是这种“自由”电子才对其导电性负责. 还有别的电子则是受束缚的, 而上面的理论就直接应用于其上了. 然而, 这些束缚电子的影响往往给那些传导电子的效应所掩没. 我们现在只想来讨论自由电子方面的效应.

如果对一电子没有恢复力——但仍有对其运动的某些阻力——则它的运动方程所不同于(32.1)的就只是缺少了 $\omega_0^2 x$ 那一项. 所以在其余的推导过程中我们所必须做的一切就是令 $\omega_0^2 = 0$ ——此外还有一点不同. 过去所以要在电介质中区别平均场与局部场, 是因为在电介质中每个偶极子的位置固定, 从而就有与其他偶极子位置的某一确定关系. 但由于金属中的传导电子到处乱跑, 作用于其上之场平均说来就恰好是该平均场 **E**. 因此, 我们曾利用式(32.28)以对(32.5)所作的那种改正, 对于传导电子就不应该作了. 这样, 金属的折射率公式, 除了应令 ω_0 等于零之外, 看来就应象式(32.27), 即

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (32.38)$$

这只是来自传导电子方面的贡献, 但我们将假定这对于金属来说是主要项.

现在我们甚至懂得了怎样去找出应该用于 γ 之值, 因为它与金属的导电性有关. 在第一卷第四十三章中就曾讨论过金属的导电性如何起因于自由电子在穿越晶体中时所受到的

扩散。这些电子从一次被散射至另一次被散射之间经行锯齿形的路线，而在两次散射之间除了由于任一平均电场所引起的加速度之外，它们的运动就是自由的（如图32-2所示）。在第一卷第四十章中，我们曾找出过平均迁移速度恰好等于加速度乘以两次碰撞间的平均时间 τ ，加速度为 $q_e E/m$ ，因而

$$v_{\text{迁移}} = \frac{q_e E}{m} \tau. \quad (32.39)$$

这一公式曾假定 E 恒定不变，从而 $v_{\text{迁移}}$ 就是一个稳恒速度。由于没有平均加速度，阻尼力就会等于外加力。我们已由于提出 $\gamma m v$ 是阻尼力[见式(32.1)]而定义了 γ ，这个力应当等于 $q_e E$ ；因此就有

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (32.40)$$

虽然我们不能轻易地直接量得 τ ，但仍可以通过测量金属的电导率而确定它。从实验上发现，金属中的电场 E 会产生一个密度为 j 的电流（对于各向同性材料而言）：

$$j = \sigma E.$$

这个比例常数 σ 称为电导率。这恰好就是从式(32.39)我们所预期的，如果令

$$j = N q_e v_{\text{迁移}}$$

的话。于是

$$\sigma = \frac{N q_e^2}{m} \tau. \quad (32.41)$$

所以 τ ——因而 γ ——就可以同所测得的电导率联系起来。利用式(32.40)与(32.41)，还可以把有关折射率的公式(32.38)重写成如下形式：

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)}, \quad (32.42)$$

其中

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{N q_e^2}. \quad (32.43)$$

这是关于金属折射率的一个方便公式。

§ 32-7 低频近似与高频近似；趋肤深度与等离子体频率

上述结果，即关于金属折射率的式(32.42)，对不同频率之波的传播会预期得到很不相同的特性。首先让我们看看在十分低频上发生的情况。若 ω 足够小，则可由下式对(32.42)作近似：

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}. \quad (32.44)$$

现在，正如你能够取下式的平方而证实的*，

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

所以对于低频来说，

$$n = \sqrt{\sigma/2\epsilon_0 \omega} (1-i). \quad (32.45)$$

* 或者写出 $-i = e^{-i\pi/2}$ ； $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \cos \pi/4 - i \sin \pi/4$ ，这会给出相同的结果。

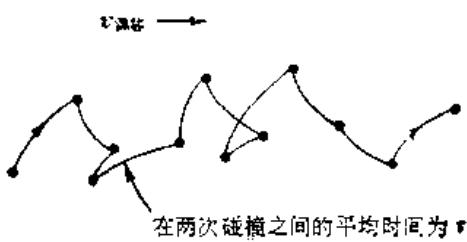


图32-2 一个自由电子的运动

請勿用於盈利之目的

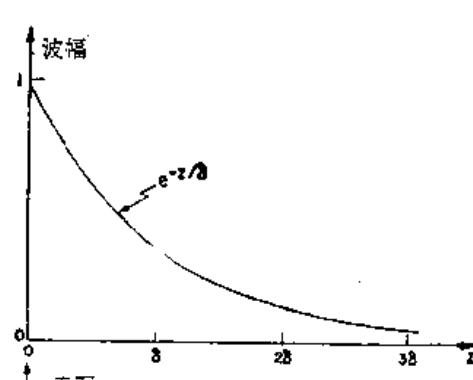


图 32-3 一个横电磁波的波幅作为进入金属中距离的函数

n 之实部与虚部的大小相同。由于 n 既有这么一个大的虚部，波在金属中就会迅速地衰减。参见式(32.36)，沿 z 方向进行之波其波幅是按照下式递减的：

$$\exp[-\sqrt{\sigma\omega/2\epsilon_0\epsilon^2}z]. \quad (32.46)$$

让我们将此式写成

$$e^{-z/\delta}, \quad (32.47)$$

这样， δ 便是波幅被削弱了 $e^{-1}=1/2.72$ ——或约三分之——这么一个因数时所经过的距离。这样一种波的波幅，作为 z 的函数，示如图 32-3。由于电磁波只能穿透金属这一段距离， δ 便称为趋肤深度。它由下式给出：

$$\delta = \sqrt{2\epsilon_0\epsilon^2/\sigma\omega}. \quad (32.48)$$

那么所谓“低”频我们指的是什么呢？试看一看式(32.42)，便可以见到，只要 $\omega\tau$ 远小于 1 而且 $\omega\epsilon_0/\sigma$ 也远小于 1，则它便可由式(32.44)作近似——这就是说，我们的低频近似适用于这么一种场合，即当

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

和

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (32.49)$$

让我们来看看，对于一种象铜那样的典型金属，这些应相当于什么频率。我们利用式(32.43)以算出 τ ，并再利用所观测到的电导率以求得 σ/ϵ_0 。从一本手册中可查出下列数据：

$$\sigma = 5.76 \times 10^7 (\text{欧}\cdot\text{米})^{-1},$$

原子量 = 63.5 克，

比重 = 8.9 克·厘米⁻³，

阿伏伽德罗数 = 6.02×10^{23} (克原子量)⁻¹。

如果我们假定每原子中有一个自由电子，则每立方米的自由电子数为

$$N = 8.5 \times 10^{28} \text{ 米}^{-3}$$

利用

$$q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ 库伦},$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ 法拉}\cdot\text{米}^{-1},$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ 千克},$$

$$\tau = 2.4 \times 10^{-14} \text{ 秒},$$

我们便得

$$\frac{1}{\tau} = 4.1 \times 10^{13} \text{ 秒}^{-1},$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.5 \times 10^{18} \text{ 秒}^{-1}.$$

所以对低于每秒约 10^{13} 赫的频率，(这意思是说，对于自由空间波长较长于 0.3 毫米之波——即十分短的无线电波) 铜将具有如我们刚才所述的那种“低频”行为。

对于这些波来说，铜里的趋肤深度为

$$\delta = \sqrt{\frac{0.028 \text{ 米}^2 \cdot \text{秒}^{-1}}{\omega}}.$$

比如对每秒 10,000 兆赫波(3 厘米波)这深度即为

$$\delta = 6.7 \times 10^{-4} \text{ 厘米}.$$

说明这个波仅仅透入十分微小的一段距离。

由此我们可以看出，为什么在研究空腔(或波导)时，我们只须顾及空腔里之场，而不须关心金属里的或在空腔外面的任何场。并且，我们也明白，为什么通过用银或金镀上一薄层就能降低空腔里能量的损失。这些损耗起因于电流，那只有在等于趋肤深度的那一薄层中才是可观的。

假设现在就要来考察象铜一类金属在高频上的折射率。对十分高的频率来说， $\omega\tau$ 比 1 要大得多，而式(32.42)便可由下式很好地作近似：

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}. \quad (32.50)$$

对于高频之波金属的折射率变成实数——并小于 1。如果该含有 γ 的耗散项可以被忽略(这对于十分巨大的 ω 就可以做到)，则从式(32.38)也可以看出那是明显的，因为式(32.38)会给出

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0 \omega^2}. \quad (32.51)$$

当然，这与式(32.50)正好相同。以前我们曾见过 $Nq_e^2/m\epsilon_0$ 这个量，那曾被称为等离子体振动频率的平方(§ 7-3 节)：

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m},$$

因此就可以将式(32.50)或(32.51)写成

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$

该等离子体频率是一种“临界”频率。

对于 $\omega < \omega_p$ ，金属的折射率有一虚部，因而波被衰减；但对于 $\omega \gg \omega_p$ ，则折射率是实数，此时金属变成透明的了。你当然懂得，金属对于 X 射线是相当透明的。但有些金属甚至在紫外光区也是透明的。表 32-3 中，对几种金属给出了它们开始变成透明时的实验观测波长。在第二行中又给出那些算出来的临界波长 $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ 。鉴于实验上的波长值并非十分确定，理论与实践的这一种符合程度就是相当之好了。

表 32-3* 低于下列各该波长，金属就会变成透明

金 属	λ (实 验 值) (埃)	$\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ (埃)
Li	1550	1550
Na	2100	2090
K	3150	2870
Rb	3400	3220

* 转录自：C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956, p.266.

你可能会觉得奇怪，为什么该等离子体频率会与金属中的电磁波传播有关。在第七章中，等离子体频率曾作为自由电子的密度振动的固有频率而出现。(一群电子由于电力作用

而彼此互相排斥，又由于这些电子的惯性引起了一种密度振动。因此，那些等离子体纵波会在 ω_p 上发生共振。可是现在我们所谈的却是电磁横波，而又已找出了这些横波是在低于 ω_p 的频率上被吸收的。（这是一个有趣的然而并不是偶然的符合。）

尽管我们谈论了金属中波之传播，但此刻你该会赏识物理现象的普适性——无论是在金属中的电子，或在地球外面电离层中无线电波的传播，我们都可应用同一个表式——当然，要采用适当的 N 和 τ 值。现在我们能够弄清楚，为什么无线电长波会被电离层吸收或反射，而短波则将一直贯穿过去。（如果要同人造卫星通信，就必须采用短波。）

我们已经谈论了对金属中高频与低频两种极端之波的传播。对于中间频率，那张满了帆的式子(32.42)就必须用到了。一般说来，折射率将有一实部和虚部；当波传入金属时会受到衰减。对于十分薄层，金属甚至在光频上也有一点透明。作为一个例子，为在高温炉旁工作的人们所制作的特种护目镜就是由蒸发一薄层金于玻璃之上而造成的。可见光能够相当好地透过——带有墨绿色——但红外线则强烈地被吸收。

最后，读者肯定会注意到，这里许多公式同第十章中所曾讨论过的有关介电常数 ϵ 的那些公式多少有点相似。介电常数量度了材料对一恒定场，即对 $\omega=0$ 的场的响应。如果你仔细地考察 n 和 ϵ 的定义，你就会见到 ϵ 不过是 n^2 当 $\omega\rightarrow 0$ 时的极限。诚然，在本章的方程中，若令 $\omega=0$ 和 $n^2=\epsilon$ ，就会重现第十一章中有关电介质理论的那些方程。

33

表面反射

§ 33-1 光之反射与折射

本章的主题是光——一般地说即是电磁波——在表面上的反射和折射。我们曾在第一卷第三十三章中讨论过反射与折射定律，下面列出在那里曾经得到的一些结果：

1. 反射角等于入射角。若采用图 33-1 所规定的那些角，则

$$\theta_r = \theta_i \quad (33.1)$$

2. 对于入射和透射波束，乘积 $n \sin \theta$ 彼此相等（斯涅耳定律）：

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (33.2)$$

3. 反射光的强度取决于入射角和偏振方向。对于与入射面正交的 E ，反射系数 R_{\perp} 为

$$R_{\perp} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (33.3)$$

对于与入射面平行的 E ，反射系数 R_{\parallel} 为

$$R_{\parallel} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (33.4)$$

4. 对于法向入射（当然，不论哪一种偏振！），

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (33.5)$$

（以前，我们曾用 i 代表入射角， r 代表折射角。由于不能对“折射”角和“反射”角两者都用 r ，所以现在就采用 θ_i = 入射角， θ_r = 反射角，而 θ_t = 透射角。）

我们以前所讨论的实际上就是任何人对这一课题的正常要求的那种深度和广度，但我们现在要用一种不同的方法来重做一遍。为什么？一个原因

是，以前我们假定了折射率是实数（在材料中没有吸收）。另一个原因却是，你应该懂得怎样从麦克斯韦方程组的观点去处理波在表面上会发生什么情况。我们将得到与以前相同的答案，但目前却是从那个波问题的一个直接解，而不是从某些聪明的论证而得到的。

我们要强调，表面反射之幅并不象折射率那样是材料的属性。它是一个“表面特性”，严格地取决于该表面是怎样造成的这样一种性质。在折射率为 n_1 和 n_2 的两种材料之间一薄层外附杂质往往会影响反射的情况。（这里有干涉的一切可能性——象油膜的五颜六色那样。适当厚度甚至可以对某一特定频率的反射幅降低至零；那就是镀膜透镜的制作道理。）我们将要导出的公式，只在折射率的改变很突然——落在一个比起波长十分微小的距离之内——时才正确。对于光来说，其波长约为 5000 埃，从而所谓“光滑”面我们指的是这样一种面：只在经过几个原子的一段距离（或几个埃）之内，条件才会改变。我们的方程式对于光在高度磨光的表面上将有效。一般说来，如果折射率是在跨越几个波长的距离上逐渐改变的，则根本很少反射。

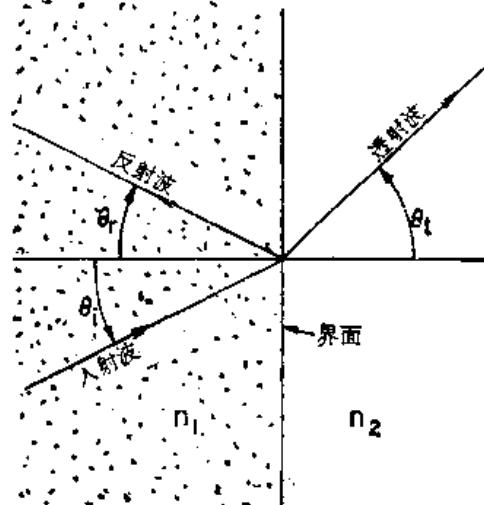


图 33-1 在表面上光波的反射与折射
(波的传播方向与各波峰正交)

§ 33-2 涠密材料中之波

首先，要向你们提起过去曾在第一卷第三十一章中采用过的那种描述平面正弦波的方便办法。在波中任一个场分量(我们用 E 作为一例)可以写成这么一个形式：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (33.6)$$

其中 E 代表 t 时刻在(从原点算起的) \mathbf{r} 点上的波幅。矢量 \mathbf{k} 指着波前进的方向，而它的大小 $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$ ，即是波数。波之相速度为 $v_{ph} = \omega/k$ ；对于在折射率为 n 的某种材料中之光波， $v_{ph} = c/n$ ，因而

$$k = \frac{\omega n}{c}. \quad (33.7)$$

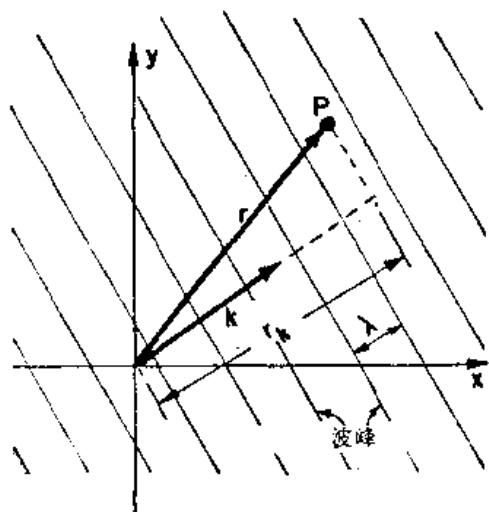


图 33-2 在 \mathbf{k} 方向上前进之波，任一点 P 上之相为 $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

假设 \mathbf{k} 沿着 z 方向；那么， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 就恰好是 kz ，正如我们经常用到的那样。对于在任一其他方向上之 \mathbf{k} ，我们应当用 r_k 来代替 z ，那是在 \mathbf{k} 方向上从原点算起的距离；也就是说，我们应该用 kr_k 代替 kz ，前者恰好是 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ (见图 33-2)。因此，式(33.6)便是在任一方向上波的方便表式。

当然，还必须记起

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

式中 k_x 、 k_y 和 k_z 乃沿三个坐标轴的 \mathbf{k} 之分量。事实上，以前就曾一度指出过：(ω ， k_x ， k_y ， k_z) 是一个四元矢，而它与 (t, x, y, z) 之积则是一个不变量。因此，波之位相即是一个不变量，而式(33.6)本来就可以写成

$$E = E_0 e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

但是我们目前还不需要那样奇妙的幻想。

对于一个如式(33.6)所示的那种正弦式 E 来说， $\partial E / \partial t$ 等于 $i\omega E$ ，而 $\partial E / \partial x$ 等于 $-ik_x E$ ，其他各分量也如此这般。你可以看出，为什么当与微分方程打交道时，运用(33.6)那种形式会十分方便——微分都被乘法代替了。还有另一个有用之处：算符 $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ 得由三个乘法 $(-ik_x, -ik_y, -ik_z)$ 所代替。但这三个因素却是按矢量 \mathbf{k} 的三个分量变换的，因而算符 ∇ 就得由 $-i\mathbf{k}$ 所代替了：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\longrightarrow i\omega, \\ \nabla &\longrightarrow -i\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (33.8)$$

这对于 ∇ 的任一种运算——不论是陡度，散度或旋度——都保持正确。例如， $\nabla \times \mathbf{E}$ 的 z 分量为

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

若 E_x 和 E_y 两者都按 $e^{-ik \cdot r}$ 变化，则可以得到

$$-ik_x E_y + ik_y E_x,$$

这你会明白即是 $-i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ 的 z 分量。

因此就有一个十分有用的普遍事实，即每当你得去对一个在三维波(这种波是物理学的

一个重要部分)上的矢量取陡度时, 你始终可凭记住 ∇ 这个运算与乘上 $-ik$ 相当, 就能够迅速地并几乎不须思索地取得那些微商。

例如, 法拉第方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

对于一个波会变成

$$-ik \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}.$$

这告诉我们

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}, \quad (33.9)$$

上式相当于以前我们对自由空间里之波所找到的结果——在波里的 \mathbf{B} 既垂直于 \mathbf{E} , 也垂直于波的传播方向。(在自由空间中, $\omega/k = c$.) 你可以从 \mathbf{k} 沿着坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的方向这么一个事实来记住式(33.9)中的符号。

如果你对其他麦克斯韦方程也运用这一法则, 你就会重新获得上一章中的那些结果, 而特别是

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}. \quad (33.10)$$

但既然我们都已经认识, 便无需再去做出来了。

如果你想要自己寻点乐趣, 可以尝试下述的令人惊骇的问题, 追溯到 1890 年代那是研究生的毕业试题: 对一种各向异性晶体, 也就是当极化强度 \mathbf{P} 是由一极化率张量来联系到电场 \mathbf{E} 时, 为平面波解出麦克斯韦方程组。当然, 你应该选取你的坐标轴使其沿该张量的主轴(这样才会有 $P_x = \alpha_a E_x$, $P_y = \alpha_b E_y$ 和 $P_z = \alpha_c E_z$), 但必须让波有一个任意方向和任意偏振。你应能够找出 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 之间的关系, 以及 \mathbf{k} 是怎样随着方向和波的偏振而变化着的。于是你将会理解一块各向异性晶体的光学, 最好是先从双折射晶体——象方解石那样——的较简单情况开始, 其中有两个极化率相等(比方说 $\alpha_b = \alpha_c$), 并看看你是否能理解为什么当你看穿这样一块晶体时会得到双象。如果你对此已能够做到, 此后便可尝试那最困难的情况, 即三个 α 都不相同的那种情况。这样, 你就会明白你是否已达到 1890 年代研究生的水平。然而, 在本章中, 我们只希望讨论各向同性物质。

从实验上我们得知, 当一平面波到达两不同材料——比如说, 空气和玻璃, 或水和油——之间的界面上时, 就有一个被反射和一个被透射之波。假设我们除此之外再不假定有其他任何东西了, 并来看看能否算出个什么来。首先, 选取坐标轴使得 yz 面就是该界面, 而 xy 面则垂直于那些入射波面, 如图 33-3 所示。

于是入射波的电矢量就可以写成

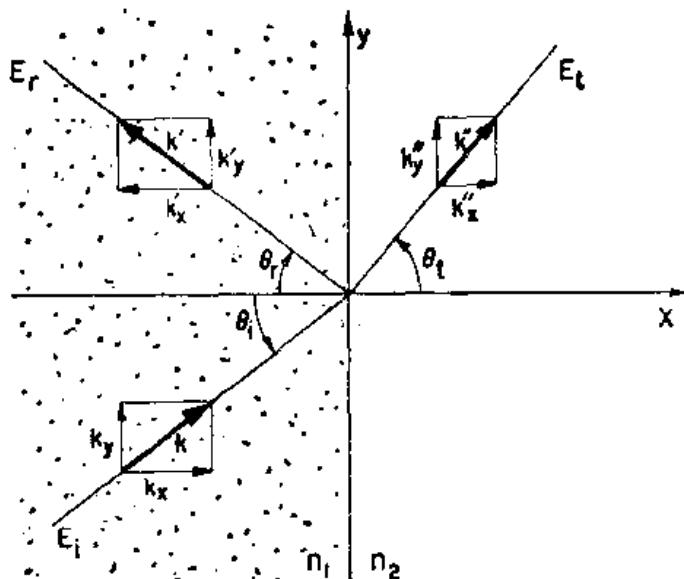


图 33-3 关于入射, 反射和透射波的传播矢量 \mathbf{k} , \mathbf{k}' 与 \mathbf{k}''

首先, 选取坐标轴使得 yz 面就是该界面, 而 xy 面

则垂直于那些入射波面, 如图 33-3 所示。

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (33.11)$$

既然 \mathbf{k} 垂直于 z 轴, 则

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y. \quad (33.12)$$

可以把反射波写成

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}, \quad (33.13)$$

使得它的频率为 ω' , 波数为 \mathbf{k}' , 而波幅为 \mathbf{E}'_0 . (当然我们知道, 频率以及 \mathbf{k} 之大小会分别与入射波的相同, 但甚至对此也可不先作假定. 我们将让它从数学的机器中滚出来.) 最后, 对于透射波则还可以写出

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}''_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})}. \quad (33.14)$$

我们知道, 麦克斯韦方程组中的一个方程会给出式(33.9), 因而对于每个波就有

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t}{\omega}, \quad \mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'}, \quad \mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''}. \quad (33.15)$$

并且, 如果把那两种媒质的折射率叫做 n_1 和 n_2 , 则由式(33.10)可得

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}. \quad (33.16)$$

由于反射波是在同一种材料中的, 因而

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1^2}{c^2}, \quad (33.17)$$

而对于透射波则为

$$k''^2 = \frac{\omega''^2 n_2^2}{c^2}. \quad (33.18)$$

§ 33-3 边界条件

迄今我们已描述了三种波; 现在的问题是要算出由入射波的各参数表达的有关反射波和透射波的各参数. 我们怎样才能做到这一点呢? 上述三个波是在均匀材料中满足麦克斯韦方程组的, 但是在两种不同材料的边界上麦氏方程组也应该被满足. 因此, 现在就必须考察一下刚好在边界上发生的事情. 我们将会发现, 麦克斯韦方程组要求这三个波应以某种方式互相配合.

作为一个表明我们意向的例子, 电场 \mathbf{E} 的 y 分量在边界两边一定要相同. 这是法拉第定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (33.19)$$

所要求的, 正如可以用下述方法来看出. 考虑一个横越边界的小矩形回线 Γ , 如图 33-4 所示. 式(33.19)表明环绕 Γ 的 \mathbf{E} 之线积分等于穿过该回线的 \mathbf{B} 通量之时率,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

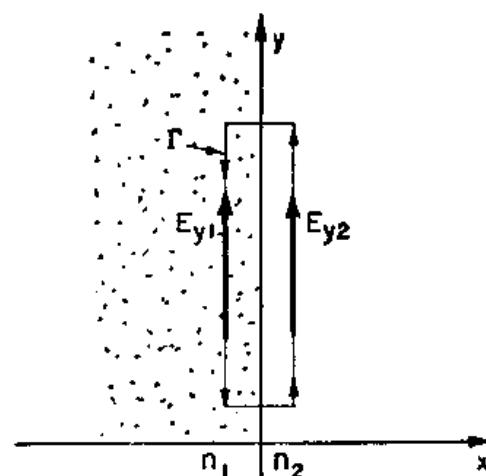


图 33-4 边界条件 $E_{y2} = E_{y1}$ 是

由 $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ 获得的

现在设想该矩形十分狭窄, 以致回线所包围的面积无限小. 如果 \mathbf{B} 仍保持有限大(没有什么理由使它在边界上应该无限大!), 则穿过该面积的通量为零. 因此 \mathbf{E} 的线积分就必然为

零。若 E_{y1} 和 E_{y2} 各代表在边界两边的场分量，又若该矩形的长度为 l ，则应有

$$E_{y1}l - E_{y2}l = 0,$$

或

$$E_{y1} = E_{y2}, \quad (33.20)$$

正如我们在上面所曾说过的，这向我们提供一个关于三个波之场的关系。

计算麦克斯韦方程组在边界上的结果这一步骤称为“确定边界条件”。一般总是这样做的：通过对诸如图33-4的那个小矩形 Γ 或对横越边界的一个小高斯面而作的论证来找出尽可能多的类似(33.20)那样的式子。尽管那是一种十分良好的进行方式，但它给人们的印象是，处理边界问题对于每一不同的物理问题都各不相同。

比方，在一个越过边界的热流问题中，两边的温度是怎样联系起来的呢？噢，你本来满可以争辩说，首先，从一边流进边界的热流应该等于从另一边流出边界的热流。由作出这样的物理论证以求得边界条件，通常有可能，而且一般也很有用。然而，有时当你在做某一问题时你可能只拥有一些方程式，而还未能立刻看出要采取什么样的物理论据。所以虽然我们目前感兴趣的只在于电磁问题，其中能够作出那些物理论证，但仍必须向你们指明一种方法，那是可用于任何一种问题的——一种直接从微分方程找出在边界上所发生的情况的普遍方法。

从写出对电介质的所有麦克斯韦方程开始——而这次我们很特别，将把一切分量都明显地写出：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \\ \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \quad (33.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial E_y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (33.22a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (33.22b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (33.22c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (33.23)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (33.24a)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (33.24b)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (33.24c)$$

现在这些方程必须在区域1(边界左侧)和区域2(边界右侧)中全都正确。我们已写出过在区域1与区域2中之解了。最后，它们也应当在边界那里，即在我们称之为区域3中被

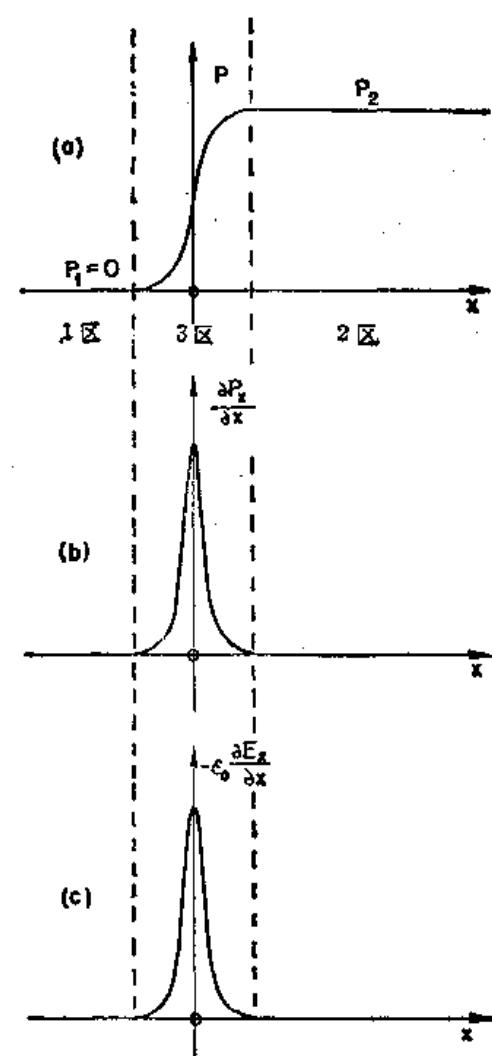


图 33-5 处于(1)区与(2)区的两种不同材料之间的过渡区(3)中之场

(33.21)怎么能够被满足呢?除非在其他一侧也有一个那么巨大的尖峰。在左边的某种东西一定也很大。唯一的候选者就只有那 $\partial E_x / \partial x$, 因为其他随 y 和随 z 的变化都只不过是我们刚才所说的小效应。因此, $-\epsilon_0 (\partial E_x / \partial x)$ 必然会如图 33-5(c) 所示的那样——刚好是 $\partial P_z / \partial x$ 的翻板。我们有

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial P_z}{\partial x}.$$

如果在 x 跨越 3 区时对这一方程积分, 就可以得出这么一个结论:

$$\epsilon_0 (E_{x2} - E_{x1}) = -(P_{z2} - P_{z1}). \quad (33.25)$$

换句话说, 从 1 区至 2 区 $\epsilon_0 E_x$ 的跳跃应等于 $-P_z$ 的跳跃。

可以将式(33.25)重新写成

$$\epsilon_0 E_{x2} + P_{z2} = \epsilon_0 E_{x1} + P_{z1}, \quad (33.26)$$

这说明在 1 区和 2 区中 $(\epsilon_0 E_x + P_z)$ 这个量具有相等之值。人们说: 越过边界时 $(\epsilon_0 E_x + P_z)$ 这个量是连续的。就这样, 我们已有了边界条件之一。

的短距离上从 1 区至 2 区间的折射率过渡得十分快, 但还是连续的。并且, 任何象 P_z 、 E_x 等的场量在 3 区中也将作相似的一种过渡。在这一区域里, 那些微分方程仍应当被满足, 而正是在这一区域中通过跟踪那些微分方程我们才能获得所需的“边界条件”。

例如, 假设有一个介乎真空(1区)与玻璃(2区)之间的边界。在真空里没有什么可极化的, 因而 $P_1 = 0$ 。让我们说在玻璃中有某一极化强度 P_2 , 介乎真空与玻璃之间有一个光滑的但却迅速的过渡。如果我们所考察的是 \mathbf{P} 的任一分量, 比方说 P_z , 则它也许会如图 33-5(a) 所示的那样变化。现在假设取第一个方程(33.21), 它含有 \mathbf{P} 的分量对于 x 、 y 和 z 的微商。那些对 y 和 z 的微商我们不感兴趣; 在那些方向上不会发生什么特别事故。可是 P_z 的 x 微商在 3 区中就将有某一很大值, 因为 P_z 的斜率那么巨大。 $\partial P_z / \partial x$ 这个微商在边界上将有一尖峰形状, 如图 33-5(b) 所示。如果我们设想将边界挤压成更薄的一层, 则该尖峰便会升得更高。如果边界对于我们所感兴趣之波的确很锐利, 则在 3 区中 $\partial P_z / \partial x$ 的大小将大大高于从边界外的波中 P 之变化所该得到的任何贡献——这样就可以忽略除由于在边界上发生的其他一切变化。

现在若在右边已有一个非常巨大的尖峰, 式

尽管我们例举了一个由于1区是真空而其中 \mathbf{P}_1 是零的情况，但很清楚，这同一论证也适用于在该两区中的任两种材料，因而式(33.26)是普遍正确的。

现在要来普查其余的麦克斯韦方程，并看看它们中的每一个会告诉我们什么。下一步我们将选取式(33.22a)。这其中并没有 x 微商，因而不会告诉我们任何东西。（记住场本身在边界上不会变得特别大；只有对于 x 的微商才能变成那么巨大以致它们支配了该方程式。）其次，我们考察式(33.22b)。啊！这里有一个 x 微商了！正是在左边上有 $\partial E_x / \partial x$ 的。假定它是一个巨大数值。但请等一等！右侧并没有什么东西可以与之匹配的；因此 E_x 在从1区进至2区时就不能有任何跳跃。[若果真有跳跃的话，就会在式(33.22b)的左边出现一个尖峰而在右边则否，因而该方程式就是错的了。]因此，我们有这么一个新的条件：

$$E_{x2} = E_{x1}. \quad (33.27)$$

通过同一种论证，式(33.22c)会给出

$$E_{y2} = E_{y1}. \quad (33.28)$$

这最后一个结果恰好就是上面曾根据线积分的论证而获得的式(33.20)。

我们继续来到式(33.23)。唯一可能具有一尖峰状之项为 $\partial B_z / \partial x$ ，但在右侧却没有什可与之匹配的，因而可以断定

$$B_{z2} = B_{z1}. \quad (33.29)$$

面临麦克斯韦方程组的最后一个了！式(33.24a)不会给出什么，因为并没有 x 微商。式(33.24b)中有一个 x 微商，即 $-c^2 \partial B_x / \partial x$ ，但再又没有什么与之匹配的，因而得

$$B_{x2} = B_{x1}. \quad (33.30)$$

那最后一个方程与此很相似，并将给出

$$B_{y2} = B_{y1}. \quad (33.31)$$

后面这三个方程向我们提供 $B_2 = B_1$ 。然而，必须强调，只有当边界两侧的材料是非磁性材料——或宁可说，当我们可以忽略材料的任何磁效应——时才会获得这么一个结果。除了铁磁性材料之外，对于大多数材料来说往往都行得通。（我们将在以后某些章中处理材料的磁性。）

表 33-1 在电介质表面上的边界条件

$$(\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1)_x = (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2)_x$$

$$(\mathbf{E}_1)_y = (\mathbf{E}_2)_y$$

$$(\mathbf{E}_1)_z = (\mathbf{E}_2)_z$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$$

(界面是 yz 面)

上述计划已使我们获得关于在1区与2区间之场的六个关系式。已经将它们汇集在表33-1上了。现在可以利用它们来匹配两个区域之间的那些波了。然而，还必须强调，刚才所用到的那种概念对于任一种这样的物理情况都适用，即当你有一些微分方程，在横越两区域之间有一个清晰界面，那里某一性质正在发生改变、而你想要求得方程的这样一个解的那种情况。对于我们眼前的目标来说，满可以利用关于在边界上通量与环流的那种论证来轻易地推导出同一些式子。（你或许想要看看能否按照那种办法来得到同一结果。）但现在你已经看到，每当你被绊住而又未曾看出关于在边界上发生的事情的物理方面的任何简易论证时便会有种行之有效的方法——你可以只处理那些方程。

請勿用於盈利之目的

§ 33-4 反射波与透射波

现在已准备好把我们的边界条件应用于曾在 § 33-2 节中写下来的那些波了。我们已经具备：

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_i x - k_i y)}, \quad (33.32)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - k'_i x - k'_i y)}, \quad (33.33)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}''_0 e^{i(\omega'' t - k''_i x - k''_i y)}, \quad (33.34)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad (33.35)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'}, \quad (33.36)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''}. \quad (33.37)$$

此外，还有进一步的一点知识：对于每一个波， \mathbf{E} 始终垂直于其传播矢量 \mathbf{k} 。

结果将取决于该入射波的 \mathbf{E} 矢量方向（偏振）。如果我们分开处理其中入射波具有平行于“入射面”（即 xy 面）的 \mathbf{E} 矢量的那种情况，以及入射波具有垂直于入射面的 \mathbf{E} 矢量的另一种情况，那么分析的手续就会简单得多。任何其他偏振的波都不过是这两种波的迭加罢了。换句话说，反射与透射强度对于不同的偏振是不同的，而最容易做的则是去拣出那两种最简单情况而加以分别处理。

我们将对一个垂直于入射面而偏振的入射波进行分析，然后对另一种情况则只给出结果。通过选取这一最简单情况我们似乎未免有点不老实，但在原理上两者都是一样的。因此我们认为 \mathbf{E}_i 只有一个 z 分量，而既然所有的 \mathbf{E} 矢量都在同一个方向上，就可以取消那矢量的符号了：

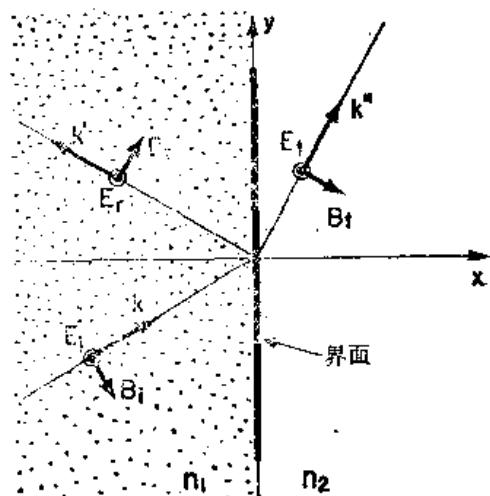


图 33-6 当入射波的 \mathbf{E} 场垂直于入射面时，反射波和透射波的偏振情形

只要两种材料都属于各向同性的，材料里电荷的感生振动便也将沿着 z 方向，而透射与辐射之波的 \mathbf{E} 场将各只有一个 z 分量。因此，对于所有之波， E_x 和 E_y ，以及 P_x 和 P_y ，都等于零。那些波的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 矢量有如图 33-6 所示。（这里我们对于原来想要从微分方程组得到一切的计划抄了一条近路。这一结果本来也可从边界条件方面得到，但通过利用物理论证我们却可节省许多代数运算。如果你有些空闲时间，不妨试试能否从那些方程获得这同一结果。很清楚，我们上面所说的一切都与那些方程相一致；只是我们还未曾证明再没有别的可能性罢了。）

现在从式(33.26)至(33.31)的边界条件会给出 1 区与 2 区中的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的各分量之间的关系。在 2 区中只有那透射波，而在 1 区中则有两个波。我们要用哪一个波呢？当然，在 1 区里之场等于入射波与反射波两场的迭加。（由于每一个场都各满足麦克斯韦方程组，因而两者之和亦然。）所以当我们应用边界条件时，就必须用到

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t,$$

对于那些 B 来说，也与此相仿。

对我们正在考虑的这种偏振，式(33.26)和(33.28)不会提供任何新的知识；只有(33.27)才有用处。它申述：在边界上，也就是在 $x=0$ 处，

$$E_i + E_r = E_t.$$

因此我们就有

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}, \quad (33.38)$$

这必须对一切的 t 和一切的 y 都正确。假设首先考察在 $y=0$ 处的情况，此时我们有

$$E_0 e^{i\omega t} + E'_0 e^{i\omega' t} = E''_0 e^{i\omega'' t}.$$

这一方程申述，两个振动项之和等于第三个振动项。这只有当所有各振动都具有同一频率时才能出现。（不可能对于三个——或任一个数目的一——具有不同频率的这样的项会在一切时刻上相加而都得到零的。）因此

$$\omega'' = \omega' = \omega. \quad (33.39)$$

正如我们过去一直都认识到的，反射波及透射波的频率与入射波的相同。

其实一开始我们本就可以将这一条件放进去以避免一些麻烦，但却曾希望要向你们表明它也可以从那些方程式获得。当你正在做一实验问题时，往往最好一开头就把你知道的一切都放到计算程序中去，而这会使你避免许多麻烦。

根据定义， k 之大小是由 $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$ 给出的，因而也就有

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k^2}{n_1^2}. \quad (33.40)$$

现在我们来考察 $t=0$ 时的式(33.38)。再度利用刚才所作的那种论证，但这一次是建筑在该方程式必须对所有 y 值都满足这一事实上的，因而得

$$k''_y = k'_y = k_y. \quad (33.41)$$

由式(33.40)，即 $k'^2 = k^2$ ，我们有

$$k_x'^2 + k_y'^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

将此式与(33.41)相结合，便得

$$k_x'^2 = k_x^2,$$

即 $k'_x = \pm k_x$ 。正号不构成任何意义；它不会给出反射波，却给出另一个入射波，而我们一开始就申明正在解只有一个入射波的问题。所以我们有

$$k'_x = -k_x. \quad (33.42)$$

(33.41)和(33.42)两式向我们提供反射角等于入射角，一如所期待的（见图 33-3）。该反射波为

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega t + k_x x - k_y y)}. \quad (33.43)$$

对于透射波，则已有

$$k''_y = k_y$$

和

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k^2}{n_1^2}; \quad (33.44)$$

因而我们能够对这两个式解出 k''_x 来。结果得到

$$k''_x^2 = k'^2 - k_y'^2 = \frac{n_1^2}{n_2^2} k^2 - k_y^2. \quad (33.45)$$

暂时假定 n_1 和 n_2 都是实数（即两折射率的虚部都十分微小），那么所有的 k 就也都是

实数，并从图 33-6 可以找出

$$\frac{k_y}{k} = \sin \theta_i, \quad \frac{k''_y}{k''} = \sin \theta_t. \quad (33.46)$$

又由式(33.44)我们得到

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i, \quad (33.47)$$

这就是斯涅耳折射定律——又是我们熟悉的某种东西。如果那些折射率不是实数，则波数将是复数，而我们就得用到式(33.45)。[仍然能够通过式(33.46)来对角度 θ_i 和 θ_t 下定义，而式(33.47)的斯涅耳方程也应该普遍正确。但此时“角度”也是复数，因而丧失了作为角度的简单几何解释。这样，最好是通过它们的 k 或 k'' 复数值来描述那些波的行为。]

迄今为止，我们还未曾找出任何新的东西。只是从复杂的数学机器中得到了某些明显答案而感到一种天真的喜悦。现在我们准备来找出还未曾弄清楚的波幅。利用关于那些 ω 和 k 的结果，式(33.38)中的指数函数因子就可以消去，因而我们得到

$$E_0 + E'_0 = E''_0. \quad (33.48)$$

既然 E'_0 和 E''_0 都属未知，那就需要另一个关系式。我们必须引用边界条件中的另一个。有关 E_x 和 E_y 的那些方程都无能为力，因为所有的 \mathbf{E} 都只有一个 z 分量。因此，必须用到有关 \mathbf{B} 方面的那些条件。让我们试一试式(33.29)：

$$B_{x2} = B_{x1}.$$

根据式(33.35)至(33.37)，

$$B_{x1} = \frac{k_y E_i}{\omega}, \quad B_{xr} = \frac{k'_y E_r}{\omega'}, \quad B_{xt} = \frac{k''_y E_t}{\omega''}.$$

并回忆起 $\omega'' = \omega' = \omega$ 和 $k''_y = k'_y = k_y$ ，我们便得

$$E_0 + E'_0 = E''_0.$$

但这不外又是式(33.48)！我们刚才只在得到已知道了的东西中浪费时间。

本来还可以试一试式(33.30)，即 $B_{x2} = B_{x1}$ ，但却没有 \mathbf{B} 的 z 分量！因此剩下来的就只有一个方程：即式(33.31)，也即 $B_{y2} = B_{y1}$ 。对于那三个波：

$$B_{yt} = -\frac{k_x E_i}{\omega}, \quad B_{yr} = -\frac{k'_x E_r}{\omega'}, \quad B_{yt} = -\frac{k''_x E_t}{\omega''}. \quad (33.49)$$

把在 $x=0$ 处（即在边界上）的波之表式作为 E_i ， E_r 和 E_t 代入，则这一边界条件便是

$$\frac{k_x}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + \frac{k'_x}{\omega'} E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = \frac{k''_x}{\omega''} E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

又再是所有的 ω 和所有的 k_y 都相等，因而上式将简化成

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0. \quad (33.50)$$

这为我们提供一个异于式(33.48)的有关各 E 间的方程。有了这两个式，便可解出 E'_0 和 E''_0 了。由于 $k'_x = -k_x$ ，我们得

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} E_0, \quad (33.51)$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x} E_0. \quad (33.52)$$

这些，再加上关于 k''_x 的式(33.45)或(33.46)，便向我们提供所希望知道的东西。将在下一节中讨论这一结果的后果。

如果从一个其中 \mathbf{E} 矢量平行于入射面的偏振波开始， \mathbf{E} 便将有 x 和 y 两分量，如图

33-7 所示。代数运算虽然直截了当，但较为复杂点。（在这种情况下通过用全都沿 \hat{z} 方向的磁场 \mathbf{B} 来表达，工作量会稍为减轻些。）人们找出

$$|E'_0| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k''_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0| \quad (33.53)$$

和

$$|E''_0| = \frac{2n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0|. \quad (33.54)$$

让我们来看看，是否上述结果与我们以前曾得到的相符。式(33.3)就是在第一卷第三十三章中我们曾经算出来的有关反射波强度与入射波强度间的比率。然而，我们当时只考虑实数折射率。对于实数折射率（以及实数 k ）来说，就可以写成

$$k_x = k \cos \theta_i = \frac{\omega n_1}{c} \cos \theta_i,$$

$$k''_x = k'' \cos \theta_t = \frac{\omega n_2}{c} \cos \theta_t.$$

把这些代入式(33.51)中，便有

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (33.55)$$

这看来还是与式(33.3)不同。然而，如果我们运用斯涅耳定律以消去那些 n ，则两式就会相同。即令 $n_2 = n_1 \sin \theta_i / \sin \theta_t$ ，并对上式中的分子和分母各乘以 $\sin \theta_t$ ，便得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\cos \theta_i \sin \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\cos \theta_i \sin \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_t}.$$

分子和分母都不过是 $(\theta_i - \theta_t)$ 和 $(\theta_i + \theta_t)$ 的正弦函数；因而得到

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}. \quad (33.56)$$

由于 E'_0 和 E_0 都在同一种材料中，强度就各正比于其电场的平方，而我们便得到与以前相同的结果。同理，式(33.53)也与式(33.4)相同。

对于法向入射之波， $\theta_i = 0$ 和 $\theta_t = 0$ 。式(33.56)便给出 $0/0$ ，那不是十分有用的。然而，我们可以返回到式(33.55)上去，它会给出

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E'_0}{E_0} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (33.57)$$

自然，这一结果适用于上述两者中的“任一种”偏振，因为对于法向入射来说不会有任何特殊的“入射面”。

§ 33-5 金属上的反射

我们现在可以引用上述结果来理解从金属上反射的那一有趣现象。为什么金属会闪闪发亮呢？在上一章中我们曾看到金属的折射率对于某些频率来说会带有一个大的虚部。让我们来看看，当光从空气($n=1$)照射到某一种具有 $n=-in_1$ 的材料中时我们会得到什么样的反射强度。这时式(33.55)会给出(对于法向入射)：

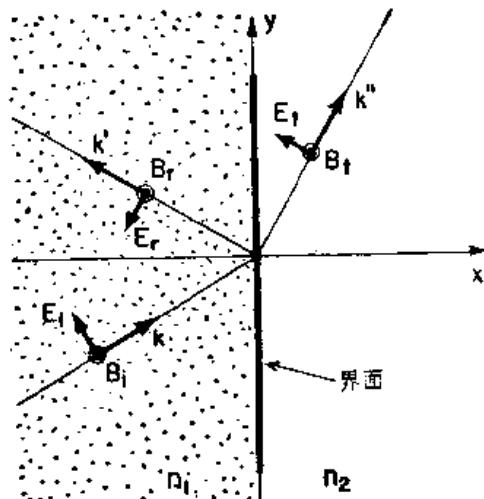


图 33-7 当入射波的 E 场平行于入射面时各波的偏振情形

請勿用於盈利之目的

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{1+in_I}{1-in_I},$$

关于反射波的强度，我们需要 E'_0 和 E_0 的绝对值的平方：

$$\frac{I_r}{I_t} = \frac{|E'_0|^2}{|E_0|^2} = \frac{|1+in_I|^2}{|1-in_I|^2},$$

或

$$\frac{I_r}{I_t} = \frac{1+n_I^2}{1+n_I^2} = 1. \quad (33.58)$$

对于具有一纯虚数的折射率的材料，会发生百分之百的反射！

金属并不会百分之百地反射，但其中有许多的确会对可见光反射得十分好。换句话说，它们的折射率的虚部很大。但我们已经明白，折射率的巨大虚部意味着强烈吸收。因此就有

这么一个普遍法则：即如果在某一频率上任一材料变成一个十分优良的吸收体，则这种波会在其表面上强烈反射而很少会进入其内部以被吸收的。你可以利用一些浓稠颜料来看清楚这一效应。最浓稠材料的纯晶体会有一种“金属”闪光。也许你曾注意到，在一个紫色墨水罐的边缘上那些干燥了的颜料会给出一种金黄色的金属反射，或干燥了的红墨水会给出一种绿色的金属反射。红墨水把透射光中的绿色给吸收掉了，因而如果该墨水很浓，它就会表现出对绿色光的那些频率的强烈表面反射。

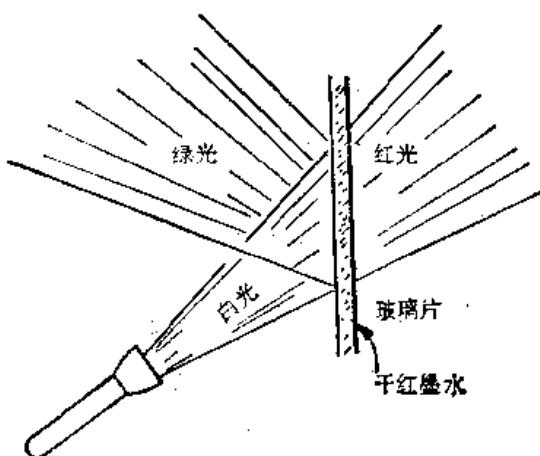


图 33-8 对频率为 ω 之光会强烈吸收的材料也能对该频率之光进行反射

你可以用红墨水涂于玻璃片之上并让它干燥后来轻易地表演这一效应。如果你用一束白光从玻璃片后面照射上去，如图 33-8 所示的那种情形，则可得到一条红色透射光束和一条绿色反射光束。

§ 33-6 全内反射

如果光是从一种象玻璃那样具有一实数折射率 n 大于 1 的材料向折射率等于 1 的空气中传播，那么斯涅耳定律便申明

$$\sin \theta_t = n \sin \theta_i.$$

该透射波之角 θ_t 会变成 90° ，当入射角等于由下式所给出的“临界角” θ_c 时：

$$n \sin \theta_c = 1. \quad (33.59)$$

对大于这临界角的 θ_i 又会发生什么种情况呢？你知道将会有全内反射。但那是怎么得来的呢？

让我们回到那个会给出透射波的波数 k'' 的式(33.45)上去。我们该有

$$k''_x^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2.$$

原来 $k_y = k \sin \theta_i$ ，而 $k = \omega n / c$ ，因而

$$k''_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_i)$$

如果 $n \sin \theta_i$ 大于 1，则 k''_x 就是负的，因而 k''_x 即是一纯虚数，比方说 $i k_I$ 。你现在就会明白

那意味着什么了！该透射波（式33.34）将有这样一种形式：

$$E_t = E_0'' e^{\pm k_1 x} e^{i(\omega t - k_1 v)}$$

波幅会随 σ 的增大而按指数函数增加或减少。很清楚，这里所要的是那个负号。这样在界面右边的波幅就将如图33-9所示的那样递减。注意 n_1 具有 ω/c 的数量级——那就是 $2\pi/\lambda_0$ ，其中 λ_0 为光之自由空间波长。当光从一玻璃空气界面上发生全内反射时，在空气里仍会有场，但只延伸到光之波长的数量级那么一段距离。

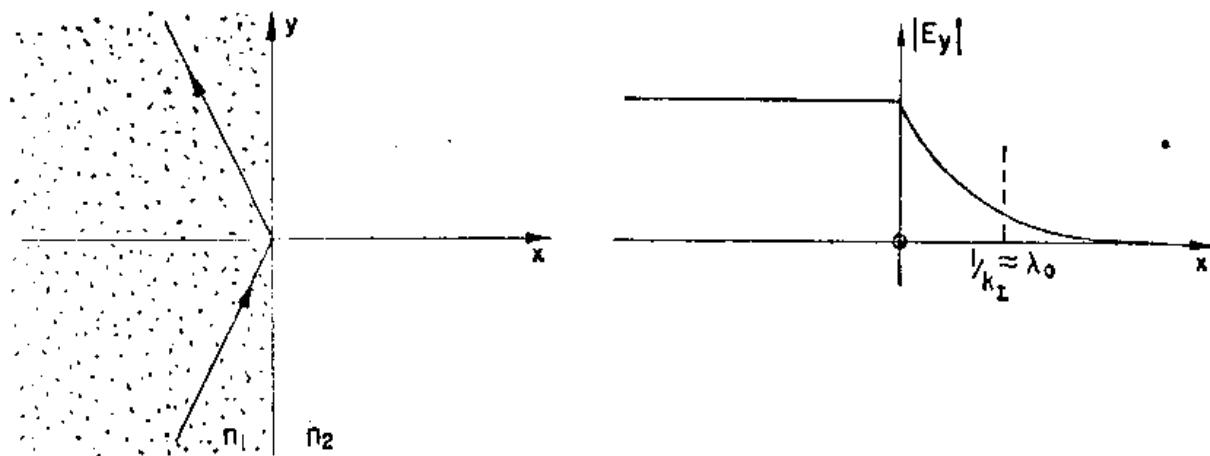


图33-9 全内反射

现在我们可以看出如何来回答下述问题：如果光波在玻璃中以一个足够大的角度到达其表面，它便会给反射回来；如果把另一块玻璃移到该表面上去（使得“表面”实际上是不见了），则此时光将透射过去。试问这恰好是在什么时候发生的呢？肯定地，必然会有从全反射变成无反射的一个连续性变化过程。答案当然是：如果该空气间隙如此之小，以致空气中的指数函数尾在那第二块玻璃中还有可观的强度，则它仍将会在那里摇动着电子而产生一个新的波，如图33-10所示。某些光将透射过去。（显然，我们的解是不完全的；本来应该就两个玻璃区域间有一薄空气层的那种情况对所有方程再解一遍。）

这种透射效应对于寻常的光只有当该空气隙十分微小（属于光之波长的数量级，诸如 10^{-5} 厘米）时才可以观察得到，但如果采用三厘米波，则可轻而易举地演示出来。这时按指数函数衰减之场就会伸展至几厘米之远。一种能表演这一效应的微波装置示如图33-11。出自一部三厘米波的小发送机之波指向一个 45° 角的石蜡棱镜。对于这种频率石蜡的折射率为1.50，因而临界角为 41.5° 。所以波会从那个 45° 面上全反射而由检波器A拾起，如图33-11(a)所示。如果将第二个石蜡棱镜与该第一个棱镜互相接触地放在一起，如图(b)中所示，则波将笔直地贯穿过去而在检波器B那里被拾起了。如果在两个棱镜之间留下几厘米厚的空隙，如图(c)所示那样，则透射波与反射波两者都同时并存。在图33-11(a)中存在于该棱镜的 45° 表面之外的电场如何，也可以通过把检波器B移至离该表面几厘米内而加以鉴定。

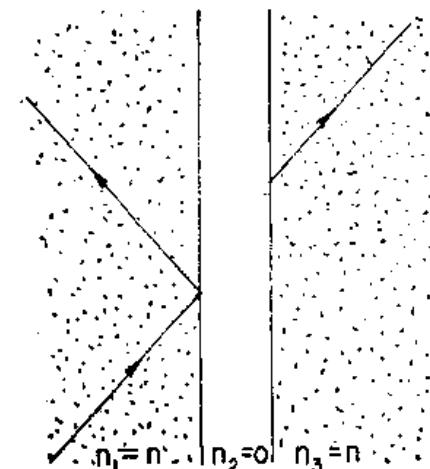


图33-10 如果有一个小间隙，则内反射就不完全；在该间隙之外会出现一个透射波

請勿用於盈利之目的

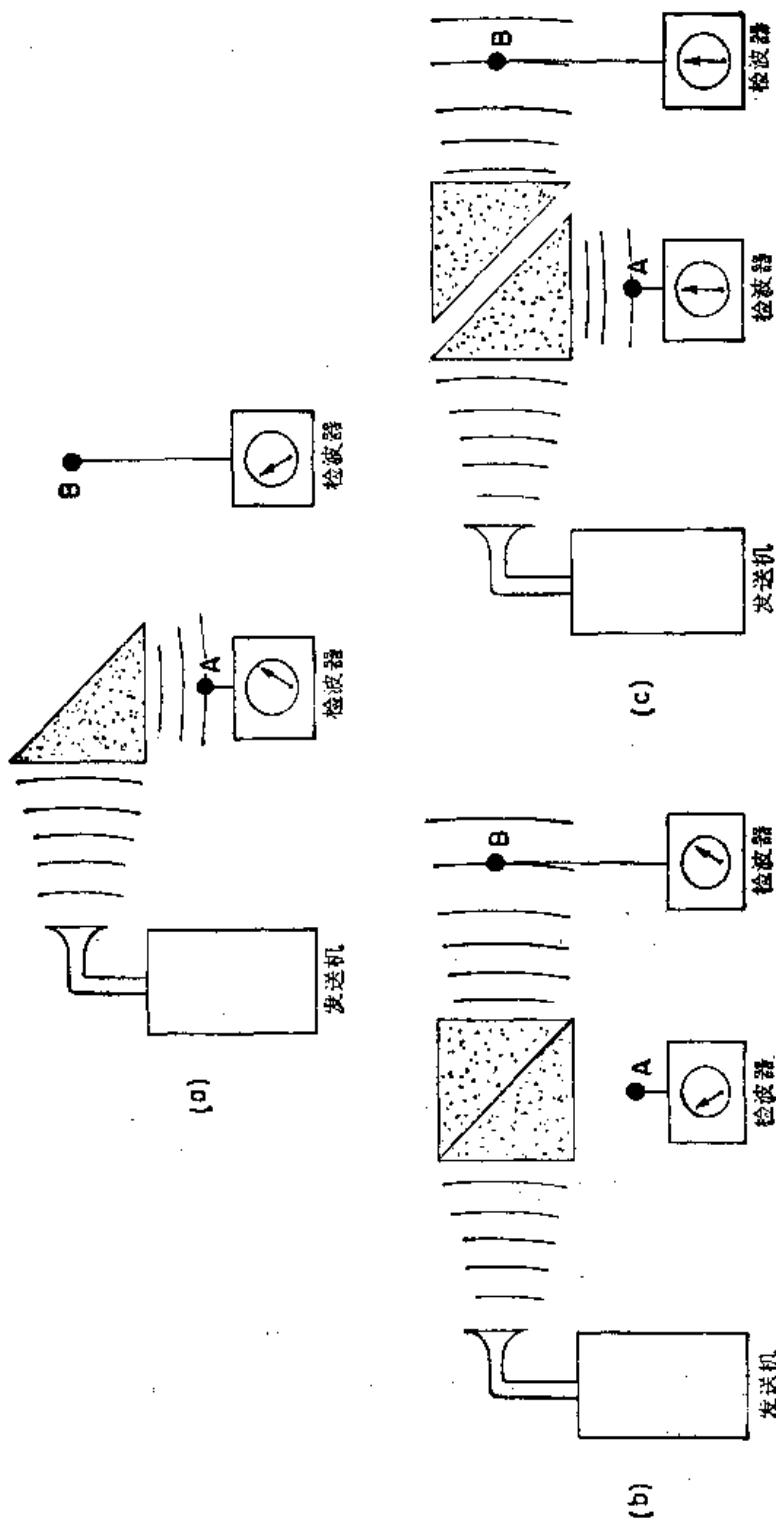


图 33-11 对内反射波的贯穿程度的演示

34

物质的磁性

§ 34-1 抗磁性和顺磁性

在本章中，我们将要谈论物质的磁性。具有最突出磁性的材料当然是铁，与此相似的磁性也为元素镍、钴，以及——在足够低的温度下（低于 16°C ）——钆和若干特种合金所共有。这一被称为铁磁性的磁性足够显著和复杂，以致我们将单独列出一章来加以讨论。然而，所有普通物质也确实会表现出某些磁效应，尽管十分微弱——比起铁磁性材料中的效应来要小千倍乃至上兆倍。这里我们要来描述普通的磁性，也就是说，除了那些铁磁性物质以外的其他物质的磁性。

这种微小磁性可分两类。有些材料会被引向磁场；而其他则被排斥。不象物质中的电效应那样，始终引起电介质被吸引，而这种磁效应却有两种符号。这两种符号可以借助于一座配备有一个尖极和一个平极的强电磁铁来轻易地加以证明，如图 34-1 所示。在尖极附近的磁场比起在平极附近的磁场要强得多。如果一小块物质由一根长线悬挂着并位于该两极之间，则一般说来，将有一微小之力作用于其上。这一个小力可在加上磁场时由对于该悬挂材料的微小位移进行观察而得到。上述那几种铁磁材料会十分强烈地被吸引至该尖极上去；其他一切材料只会感到十分微弱之力。有的被轻微地引向尖极；有的则轻微地被排斥。

用铋的一个小柱体最容易见到这一效应，它会从高场区那里被排斥开来。象这样被排斥着的物质称为抗磁性的。铋就是一种最强的抗磁性物质，但即使如此，效应仍然十分微弱。抗磁性总是十分弱的。如果一小块铝被挂在两极之间，则也会受到一微小之力，但却是指向该尖极的。象铝这类物质称为顺磁性的。（在这么一个实验中，当磁场加上或撤去之时会发生一些涡流力，而这些力就能够引起强烈冲击。你必须小心地测出在该悬挂物体静止后的那种净位移。）

现在我们要来简略地描述这两种效应的机制。首先，在许多种物质中原子都不具有永磁矩，或者毋宁说，每一原子里面的磁体都互相抵消了以致该原子的净磁矩等于零。电子自旋及其轨道运动都完全给衡消掉了，使得任一特定原子都不具有平均磁矩。在这种场合下，当你把磁场开动时，就有一个小小的额外电流由于电感作用而在原子里产生。按照楞次定律，这些电流的方向旨在反抗正在增长着的磁场。所以原子的感生磁矩的指向就与磁场的指向相反。这就是抗磁性的机制。

另外，还有某些物质，其中原子确实具有永磁矩——各电子的自旋和轨道运动拥有一个

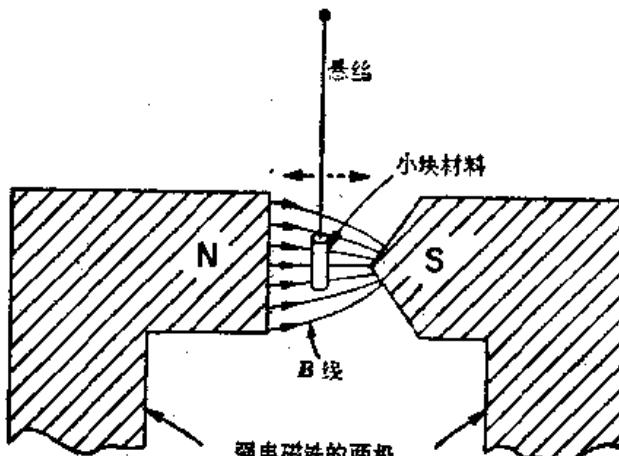


图 34-1 一块铋的小柱体会被该尖极所轻微排斥；而一块铝则会被吸引

不等于零的净环流。所以除了抗磁性(这始终会存在)之外，就还有可能把这些个别原子的磁矩排列整齐。在这一种情况下，磁矩试图偕同磁场一起排列整齐(正如电介质中的永偶极子会被电场所排齐一样)，因而这感生磁场就有加强原来磁场的倾向。这一类物质就是顺磁性的。顺磁性一般都相当弱，因为那些对准力比起那来自企图扰乱秩序的热运动之力来相当微小。由此也可以推断说，顺磁性通常都对温度敏感。(那种由金属中对导电性能要负责的自由电子的自旋所引起的顺磁性则是例外。我们将不在这里讨论这一现象。)对于普通的顺磁性，温度越低，效应就越强。在低温当碰撞的扰乱效应较少时就会有较高程度的整齐排列。反之，抗磁性则大抵与温度无关。在任一种配有磁矩的物质中抗磁和顺磁两种效应都会同时存在，但顺磁效应却往往占优势。

在第十一章中，我们曾描述过一种铁电性材料，其中所有电偶极子都给它们本身的相互电场所排齐。也有可能设想铁电性的一种磁性模拟，在其中一切原子磁矩都会排列整齐而共同锁紧起来。如果你对这应该如何发生进行一些计算，你就会发现由于磁力比起电力来小得那么多，热运动甚至在绝对温度十分之几度上就应能把这种排列冲散。因此不会在室温上存在磁矩的永恒排列。

反之，这恰好就是铁中发生的事情——磁矩的确会被排列整齐。在铁里不同原子的磁矩间有一种比起直接磁互作用要强得多的有效力。这是一种只能由量子力学加以解释的间接效应。它比直接的磁互作用约强一万倍，而这就是在铁磁性材料中能把那些磁矩都整齐排列起来之力。我们将在后面一章中讨论这一独特互作用。

现在已经试图向你们提供一个有关抗磁性与顺磁性的定性解释，但我们仍必须作出改正而申明，不可能从经典物理学的观点以任何一种忠实方式来理解材料的磁效应。这样的磁效应完全是一种量子力学现象。然而，却可以作出某些虚假的经典论据而获得关于事情进行的某种概念。我们也许可以这样说。你可作出某些经典论证并得到关于材料行为的一些猜测，但这些论证在任何意义上都不是“合法”的，因为在这些磁现象的任一种中都绝对必须牵涉到量子力学。另一方面，有一些情况，诸如在等离子体中或在一个含有许多自由电子的空间区域中，那里的电子的确会遵守经典力学。而在那些场合下，某些来自经典磁性的定理才会有点价值。并且，经典论证由于历史原因也有一些价值。人们最初几次能够猜测到磁性材料的意义及其行为，的确是用了经典论据的。最后，正如我们上面所指出的，经典力学也还能够向我们提供有关或许会发生的事态的某些有用猜测——尽管要研究这一课题的真正忠实途径应该是先去学好量子力学，然后再用量子力学来理解磁性。

另一方面，我们却不想等到量子力学都弄通了以后才来理解象抗磁性这么一种简单东西。我们不得不依靠经典力学作为对发生过程的一种半证明，但始终必须认识到，那些论据实际上是不正确的。因此，我们会作出一系列有关经典磁性的定理，这些定理将使你们发生混乱，因为它们将证明另一些东西。除了最末那一条定理外，其他每一条都将是错误的。而且，作为对物理世界的描述它们全都是错误的，因为量子力学被漏掉了。

§ 34-2 磁矩与角动量

我们所要证明的第一个来自经典力学方面的定理如下：如果电子在一个圆周轨道上运动(比方，在受一速率的影响下环绕着核旋转)，便有磁矩与角动量间的一个固定比率。对于电子在轨道上的运动，让我们称它的角动量为 \mathbf{J} ，而磁矩为 μ ，角动量的大小就是电子质量

乘速度再乘半径(见图34-2)。它的方向与轨道的平面垂直。

$$J = mvr. \quad (34.1)$$

(当然, 这是一个非相对论性公式, 但它对于原子却是一种很好近似, 因为所涉及的电子其 v/c 值一般都属于 $e^2/\hbar c = 1/137$ 或约百分之一的数量级。)

这同一轨道的磁矩是电流乘面积(见14-5节)。电流是经过轨道上任一点的电荷 q 乘以每秒次数, 也即 q 乘以转动频率。频率等于速度除以轨道的周长; 所以

$$I = q \frac{v}{2\pi r}.$$

面积则为 πr^2 , 因而磁矩为

$$\mu = \frac{qv\pi r^2}{2}. \quad (34.2)$$

这也是指向与轨道平面垂直的方向。所以 J 与 μ 是在同一个方向上:

$$\mu = -\frac{q}{2m} J \text{ (轨道).} \quad (34.3)$$

它们间的比率与速度和半径都无关。对于任一个在圆周轨道上

运动的粒子, 其磁矩等于角动量的 $q/2m$ 倍。对于一个电子来说, 电荷是负的——我们把它叫做 $-q_e$; 因而应有

$$\mu = -\frac{q_e}{2m} J \text{ (电子轨道).} \quad (34.4)$$

那是我们按照经典理论所该期待的, 但足够奇怪, 这在量子力学中却仍然正确。它属于这类事情中的一件。可是, 若你继续应用经典物理, 你就会发现在其他一些地方, 从它得出来的答案乃是错误的, 因而要试图记住哪些是对的与哪些是错的将是一场大竞技。我们也许可以立刻向你们提供在量子力学中一般正确的东西。首先, 式(34.4)是对轨道运动正确的, 但那并不是唯一存在的磁性。电子也有对其本身之轴自旋的运动(有点象地球绕地轴的转动), 而由于这一自旋的结果它也拥有角动量和磁矩。但出自纯粹是量子力学方面的原因——并没有经典方面的解释——对电子自旋的 μ 与 J 的比率乃二倍于该自旋电子的轨道运动方面的, 即

$$\mu = -\frac{q_e}{m} J \text{ (电子自旋).} \quad (34.5)$$

在任一个原子中, 一般说来, 既有几个电子, 又有关于自旋和轨道运动的某种结合, 因而会造成一个总角动量和一个总磁矩。尽管没有经典方面的理由可以说明为什么会这样, 但在量子力学中却始终正确, 即(对于一个孤立原子)磁矩的方向恰好与角动量的方向相反。这两者之间的比率不一定要或者 $-q_e/m$ 或者 $-q_e/2m$, 而是介乎这两值之间, 因为有来自轨道和自旋两方面贡献的混合。我们可以写成

$$\mu = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J, \quad (34.6)$$

式中 g 是一个标志着原子状态的因数。对于纯轨道矩它该是 1, 对于纯自旋矩它该是 2, 若对于一个象原子那样的复杂系统, 则 g 该处于 1 与 2 之间的其他某一数值。当然, 这一公式并不会告诉我们很多东西。它申述磁矩平行于角动量, 但可有任何大小。然而, 式(34.6)的形式却很方便, 因为被称作“朗德(Landé) g 因子”的这个 g 是一个大小为 1 的数量级的无量

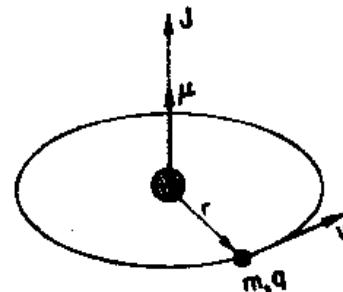


图 34-2 对任一圆周轨道,
磁矩 μ 为 $q/2m$ 乘角动量 J

纲常数。量子力学的任务之一就是对任一特定原子态预言这个 g 因数。

你或许对核里发生的情况也会感兴趣。原来在核里存在着质子和中子，它们可能在某种轨道上环行跑动，而同时，象电子一样，也有一内禀自旋，磁矩再度平行于角动量。只有现在这两者比率的数量级是你对一质子在圆周上运动时所该期待的，即式(34.3)中的 m 应等于质子质量。因此对于核来说经常可以写成

$$\mu = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) J, \quad (34.7)$$

式中 m_p 为质子质量，而 g ——称为核的 g 因子——是一个接近于 1 的常数，要对每一种核分别加以测定。

关于核的另一个重要差别就是质子的自旋磁矩并不象电子那样具有一个等于 2 的 g 因子。对于质子而言， $g=2(2.79)$ 。足够奇怪，中子也有一自旋磁矩，而此磁矩相对于其角动量则为 2 (-1.93)。换句话说，在磁的意义上，中子并不严格表现“中性”。它好象是个小磁体，而且具有一个旋转着的负电荷所该具有的那种磁矩。

§ 34-3 原子磁体的进动

磁矩与角动量成正比的一个后果是，放在磁场中的一个原子磁体将会进动。首先，我们

将按照经典方式来作论证。假设有一个在匀强磁场中自由悬挂着的磁矩 μ ，它将感觉到一个等于 $\mu \times B$ 而试图将它转至与场同向的转矩。但原子磁体乃象一回转器——它具有角动量 J 。因此，由磁场所产生的转矩并不会使该磁体排列整齐。而是，磁体将会进动，正如我们以前在第一卷第二十章中分析回转器时所见到的。角动量——因而也有磁矩——对一平行于磁场之轴进动。我们可以通过与在第一卷第二十章中所用过的相同的方法来找出这个进动速率。

假设在一段短时间 Δt 内角动量从 J 变至 J' ，如图 34-3 所示，而相对于磁场 B 的方向始终保持在一个相同角度 θ 上。让我们叫这一进动角速度为 ω_p ，使得在时间 Δt 内进动的角度为 $\omega_p \Delta t$ 。从图中的几何形态就可看出，在时间 Δt 内角动量的改变为

$$\Delta J = (J \sin \theta)(\omega_p \Delta t),$$

因而角动量的变率为

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_p J \sin \theta, \quad (34.8)$$

这应等于转矩

于是进动的角速度就是

$$\omega_p = \frac{\mu}{J} B. \quad (34.10)$$

由式(34.6)代入 μ/J ，我们便见到，对于一个原子系统来说，

$$\omega_p = g \frac{q_e B}{2m}; \quad (34.11)$$

这进动频率与 B 成正比。记住下列二个关系式很方便，即对于一个原子(或电子)

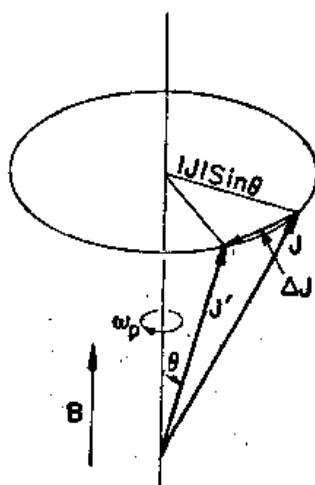


图 34-3 一个具有角动量 J 和与之平行的磁矩 μ 的物体被置在磁场 B 中时，将以角速度 ω_p 进动

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (1.4 \text{ 兆周/高斯}) gB, \quad (34.12)$$

而对于一个核

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (0.76 \text{ 千周/高斯}) gB. \quad (34.13)$$

(关于原子与核这两公式不同之处, 仅仅由于在这两种情况下有关 g 的公约不同。)

这样, 按照经典理论, 在一个原子里的电子轨道——和自旋——应在一磁场中进动。是否按照量子力学这也是正确的呢? 基本上是正确的, 但关于“进动”的意义却有所不同。在量子力学中人们不能在与经典同一种意义上谈论角动量的方向; 但无论如何, 总会存在一个十分密切类似——类似得那么密切以致我们仍称之为“进动”。以后在谈论量子力学时将对此再作讨论。

§34-4 抗磁性

其次我们从经典观点来考察抗磁性。它可以凭几种方法算出, 但其中一种美妙办法则是这样的。假设在一个原子附近我们慢慢地开动磁场。当磁场改变时, 就有一电场由于磁感应而产生。按照法拉第定律, 环绕任一闭合路线的 E 之线积分等于穿过该路线的磁通量之变率。假设我们拣取这样一条路线 Γ , 即是与该原子中心同心的一个半径为 r 的圆周, 如图 34-4 所示。环绕这一路线的平均电场 E 由下式给出:

$$E2\pi r = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2),$$

因而就有一个强度为

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

的电场 E 。

作用于原子中一个电子上的这个感生电场会产生一个等于 $-q_e E r$ 的转矩, 它应等于角动量的变率 dJ/dt :

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_e r^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (34.14)$$

从零场开始对时间积分, 我们便会找出由于开动磁场而发生的角动量改变为

$$\Delta J = \frac{q_e r^2}{2} B. \quad (34.15)$$

这就是当场开动时由于给予电子一扭而产生的额外角动量。

这附加的角动量会产生一个恰等于 $-q_e/2m$ 倍角动量的附加磁矩, 因为那是一种轨道运动。这感生的抗磁矩为

$$\Delta\mu = -\frac{q_e}{2m} \Delta J = -\frac{q_e^2 r^2}{4m} B. \quad (34.16)$$

式中负号(正如你通过应用楞次定律就可以看得出是正确的)意味着这附加磁矩与磁场反向。

我们想要把式(34.16)稍为不同地写出。在该式中出现的 r^2 是指从一原子的平行于 B 之轴量起的距离平方, 因而若 B 沿着 z 方向, 则它应是 $x^2 + y^2$ 。如果我们所考虑的是球对称原子(或对各原子的固有轴作遍及一切方向的平均), 则 $x^2 + y^2$ 的平均值将是那真正从原

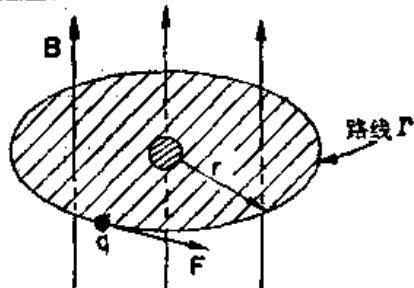


图 34-4 作用于原子中的
电子上的感生电力

子中心点量起的径向距离之平方的平均值的 $2/3$ 倍。因此，把(34.16)写成下式往往更加方便：

$$\Delta\mu = -\frac{q_e^2}{6m}\langle r^2 \rangle_{\text{平均}} B. \quad (34.17)$$

不管怎样，我们已找出了一个与磁场 B 成正比而又与之反向的感生原子磁矩。这就是物质的抗磁性。恰恰是这个磁效应对在一非均匀磁场中作用于一块铋上的那种小力要负责任。（你本来尽可以通过下述办法来算出这个力，即算出这些感生矩在磁场中的能量并看看当该材料移进或移出于一个高场区时这能量究竟是如何变化的。）

我们仍然剩下这么一个问题：半径的均方值 $\langle r^2 \rangle_{\text{平均}}$ 到底是什么？经典力学不能提供任何答案。我们必须回去并用量子力学重新做过。在原子里我们不能确实说出电子究竟在哪里，但只知道它将位于某处的几率。若把 $\langle r^2 \rangle_{\text{平均}}$ 理解为对于该几率分布从中心量起的距离之平方的平均值，则由量子力学所给出的抗磁矩就恰恰与式(34.17)相同。当然，这个式子是关于一个电子的磁矩。总磁矩应由遍及原子里所有各电子之和所给出。令人惊异的事实是，经典论证与量子力学都会给出同一答案；虽则正如我们将要看到的，这个会给出式(34.17)的经典论证在经典力学中就并非确实妥当的。

即使原子已拥有一永磁矩，这同一抗磁效应仍依然会发生。此时系统将在磁场中进动。当整个原子进动时，它取得一个附加的小角速度，而这一缓慢转动又会产生一个代表对该磁矩修正的小电流。这不过是用另一种方式表达出来的抗磁效应。但我们在谈论顺磁性时就无需真正去关心它。如果这抗磁效应按刚才所做的先行算出，则我们不必对来自进动方面的那个附加小电流操心，它已经包括在抗磁性项之内了。

§ 34-5 拉莫定理

我们已能够从迄今所获得的结果作出某种结论了。首先，在经典理论中磁矩 μ 始终正比于 \mathbf{J} ，而对于某一特定原子就有一给定比例常数。既然过去所谈及的电子都没有自旋，则该比例常数始终等于 $-q_e/2m$ ；这就是说，在式(34.6)中我们应该令 $g=1$ 。 μ 对 \mathbf{J} 的比率与电子的内部运动毫无关系。这样，按照经典理论，所有电子系统就该以同一角速度进动了。（这在量子力学中是不正确的。）这一结果与我们现在要来证明的一个经典力学定理有联系。假设我们有一组被指向一中心点的吸引力所维系住的电子——就象各电子被核所吸引似的。个别电子之间也彼此互相作用，因而一般可以有复杂的运动。假设你已对那没有磁场的情况解出过该运动，然后希望知道在有一弱磁场时运动又会变成怎么样。这一定理申述，当有一弱磁场时运动总会等于该无场解加上一个绕场之轴并具有角速度 $\omega_L = q_e B / 2m$ 的附加转动。（这与设 $g=1$ 的 ω_0 相同。）当然，会有许多种可能的运动。要点是，对于无场时的每一运动就有一个与之相对应的在场中的运动，那就是原来运动加上一个均匀转动。这称为拉莫(Larmor)定理，而 ω_L 称为拉莫频率。

我们愿意来表明这定理可以如何加以证明，但详细过程将留给你们自己去做。首先，取一个在鞍力场中的电子。对其所施之力只是朝向中心的 $\mathbf{F}(r)$ 。如果现在开动一匀强磁场，就会有一附加之力 $qv \times \mathbf{B}$ ；因而总力为

$$\mathbf{F}(r) + qv \times \mathbf{B}. \quad (34.18)$$

现在让我们来从一个以角速度 ω 环绕着一根通过该力心而与 \mathbf{B} 平行之轴旋转着的坐标系

上观察这同一系统。这不再是一个惯性系，因而就得把那些适当的膺力——在第一卷第十九章中所曾经谈及的离心力及科里奥利力——都放进去。我们在那里找出过，在一个以角速度 ω 旋转着的参照系上，会有一个正比于速度的径向分量 v_r 的表观切向力：

$$F_t = -2m\omega v_r, \quad (34.19)$$

又有一个由下式给出的表观法向力：

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_t, \quad (34.20)$$

其中 v_t 是在该转动着的参照系中量得的速度切向分量。(法向分量 v_r 则对于该转动系统和惯性系统都相同。)

现在，对于足够小的角速度(也就是，如果 $\omega r \ll v_t$)，我们可以在式(34.20)中同第二项(科里奥利力)相比忽略那第一项(离心力)。于是式(34.19)和(34.20)就可以合并写成

$$\mathbf{F} = -2m\omega \times \mathbf{v}. \quad (34.21)$$

现在若把转动和磁场联合起来，便应将式(34.21)之力加于式(34.18)那个力之上。总力便是

$$\mathbf{F}(r) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (34.22)$$

[我们掉转了式(34.21)中的叉积并改变其符号以便获得这末一项]。考察上述结果，便会明白，若

$$2m\omega = -q\mathbf{B},$$

则右边两项互相抵消，而在该转动参照系上就只有该唯一之力 $\mathbf{F}(r)$ 了。电子的运动正好如同没有磁场——而当然也就没有转动——时那样。我们已对一个电子证明了拉莫定理。由于这一证明假定了一个小 ω ，那也就意味着只有对于弱磁场这一定理才正确。我们唯一要求你们作点改进的事情就是去考虑有许多个彼此互作用着的电子的那种情况，并证明该同一定理。因此，不管一个原子多么复杂，若它有一个转动场，则这一定理便会正确。但那是经典力学的末日，因为事实上原子并不会象那样进动的。式(34.11)的进动频率只有当 g 碰巧等于1时才会等于 ω_L 。

§ 34-6 经典物理不会提供抗磁性或顺磁性

现在我们愿意来证明，按照经典力学完全不可能有抗磁性或顺磁性。这听起来有点象发疯似的——既然我们前已证明了存在顺磁性、抗磁性、进动轨道等等，而如今却又要证明那是完全错的。的确，我们将要证明若你跟随经典力学走得足够远，便不会有这样一些磁效应，它们全都对消掉了。如果你在某处开始一场经典论证而并不走得太远，你可以获得任一个希望获得的答案。但唯一合法而又正确的论证却表明不会有任何一种磁效应存在。

经典力学的一个结论是：若你有任一种系统——比如含有电子、质子或其他任何东西的气体——被禁锢在一个箱子中而这个整体又不能够转动，则不会有任何磁效应发生。如果你有一个孤立系统，比如由其本身维系在一起的一颗星体，当你开动磁场时它会开始转动，那么就可能有磁效应。但如果你有一块材料，它的位置被固定得不能开始转动，那么就不会有磁效应了。所谓将自旋抑制住，我们指的意思可以总结成：在某一给定温度下，假定只有一个热平衡状态。于是这一定理申述：如果你将磁场开动并等待到该系统已达到热平衡状态，则不会有顺磁性或抗磁性——不会有感生的磁矩。证明：按照统计力学，一个系统将有任一给定运动状态的几率与 $e^{-U/kT}$ 成正比，其中 U 为该运动的能量。那么，运动能量

又是什么呢？对于一个在匀强磁场中运动的粒子，其能量等于寻常势能加上动能 $mv^2/2$ ，磁场并不会附加任何东西。[你知道，来自电磁场之力为 $q(E + v \times B)$ ，而作功的时率 $F \cdot v$ 只不过是 $qE \cdot v$ ，并不会受磁场影响。]因此一个系统的能量，不管是否处于磁场之中，始终由动能加上势能所给出。既然任何运动的几率仅取决于能量——这就是说，取决于速度和位置——是否有磁场存在都完全一样。因此，对于热平衡来说，磁场并不会产生任何效应。如果有一个贮藏于箱子中的系统，然后又有一个贮藏于另一个箱子中的系统，不过这回是具备磁场的了，那么在第一个箱子中的任一点上具有某一特定速度的几率将同在第二个箱子中的相应几率一样。如果在第一个箱子中并没有平均环行电流（这将不会出现，倘若是与静止箱壁达成平衡的话），那就不会有平均磁矩。由于在第二个箱子中一切运动又都是一样，那里也就同样没有平均磁矩。因此，如果温度保持不变而热平衡在开动了磁场之后又重新建立起来，则按照经典力学，不可能有由磁场感生的磁矩。我们只能从量子力学方面得到有关磁现象的满意理解。

可惜，不能假定你们对量子力学已有了充分理解，因而这不可能是讨论这一课题的场所。反之，我们也不愿意在学习某一种东西时总要先学好一些正确法则然后才来学习如何把它应用于不同情况上。在本科中几乎所已考虑到的每一课题都曾经按照另一种方式处理。对于电学情况，我们曾在“第一页”就写出了麦克斯韦方程组，然后才推导出一切后果来。那是一种途径。但我们现在决不试图去创立新的“第一页”，把量子力学的各个方程都写下来并从而推导出一切东西。在你们还未弄清楚其出处以前，只能告诉你们某些量子力学结果。于是在这里我们就要来这样干。

§ 34-7 量子力学中的角动量

上面已向你们提供了在磁矩与角动量之间的一个关系式。这很令人高兴。但这磁矩和角动量在量子力学中又意味着什么呢？在量子力学中，事实证明最好是用象能量那一类的概念来对诸如磁矩等东西下定义，才能保证人们懂得到底指的是什么。原来，要用能量来定义磁矩并不困难，因为磁矩在磁场中的能量按照经典力学为 $\mu \cdot B$ 。因此，下述定义就曾为量子力学所采用：如果我们算出一个系统在磁场中的能量并发现它正比于该场强（对于弱场来说），那么这一比例系数就称为磁矩在该场向上的分量。（目前我们无需对工作要求得那么尽善尽美；可以仍然按照那种普通的、在某种程度上是经典的意义来考虑磁矩。）

现在我们愿意来讨论量子力学中的角动量概念——或者毋宁说，是在量子力学中所称为角动量的一些特性。你知道，当你得到某些新型定律时，就不能只是假定每一个词都要指与以前完全相同的东西。比方，你可以这样想，“呵，我懂得了角动量是什么。它是会受转矩改变的那种东西”。但转矩又是什么呢？在量子力学中我们不得不对一些旧物理量赋予新的定义。因此，从合法性上来说，最好就是用诸如“量子角动量”或其他相似名称来称呼它，因为它是在量子力学中定义出来的角动量。但如果你已能够在量子力学中找到一个在系统变成足够大时便与我们关于角动量的古老概念相符合的量，则去发明一个额外字眼就没有什么用处了。我们也满可以仅仅叫它做角动量。有了这么一点认识，即将加以描述的这种古怪东西也就是角动量了。它是在大系统中我们会按照经典力学认为是角动量的那种东西。

首先，我们取一个角动量守恒、即诸如在空洞的空间里的一个孤立原子的那种系统。原

來象这样一件东西(有点象对其本身之轴自转着的地球)本来就可以在寻常意义上环绕人们所任意选取的轴旋转。而对于某一种给定自旋，就会有许多不同之态，全都具有相等能量，每一个“态”相当于角动量轴的某一特定方向。所以在经典理论中，对于某一给定角动量，就有无限多个可能之态，它们全都有相同能量。

然而结果变成，在量子力学中却有若干件奇怪事情发生。首先，在这样一个系统中能够存在的状态数目是受限制的，即只有一个有限数目。如果系统很小，这一有限数目也很小，但如果系统大了，则这一有限数目便变成十分十分巨大。其次，我们不能通过给出其角动量方向以描述一个“态”，而只能通过给出沿某一方向——诸如 z 方向——的角动量分量来给予描述。按照经典理论，具有某一给定总角动量 J 的物体，对于其 z 分量该可以有任一介乎 $+J$ 与 $-J$ 间的数值。可是按照量子力学，角动量的 z 分量只能取某些分立数值。任何一种拥有某一定能量的给定系统——一个特定原子、或原子核、或任何一种东西——都各有一个特征数目 j ，而它的角动量的 z 分量就只能有下列这组数目中的一个：

$$j\hbar, -(j-1)\hbar, -(j-2)\hbar, \dots, -(j-2)\hbar, -(j-1)\hbar, -j\hbar \quad (34.23)$$

最大的 z 分量为 j 乘 \hbar ；次大的是减少一个 \hbar 单位，一直减少到 $-j\hbar$ 为止。这数值 j 叫做“该系统的自旋”(有些人却叫它做“总角动量量子数”；但我们将称之为“自旋”)。

你可能会担心我们现在所谈的只能对于某一“特殊” z 轴正确。但并非如此。对于一个自旋为 j 的系统，沿任一轴的角动量分量只能取(34.23)中所列数目中之一。虽然这看来很神秘，但却要求你们暂且接受它。以后我们才回来讨论这一点。你至少在听到 z 分量会从某一数值进至这负的同一数值时感到欣慰，使得我们至少无需乎去决定哪一个才是 z 轴的正方向。(肯定地，假如我们曾经说过它是从 $+j$ 进至负某一其他数值，那么就该会无限神秘了，因为此时我们不能将掉转过来的方向定义为 z 轴。)

现在，如果角动量的 z 分量必须从 $+j$ 起按整数递减到 $-j$ ，那么 j 就必须是整数了。非也！并不尽然； j 之二倍才必须是整数。只有在 $+j$ 与 $-j$ 之间的差值才必须是整数。所以，一般说来，自旋 j 或者是整数或者是半整数，取决于 $2j$ 是偶数还是奇数。例如，取一个象锂那样的核，它就有一个等于三个半数的自旋，即 $j=3/2$ 。于是环绕着 z 轴的角动量，按 \hbar 的单位计算，就是下列诸值中之一：

$$+3/2, +1/2, -1/2, -3/2.$$

总共有四个可能之态；若该核处在毫无外加场的空洞空间之中，则每个态各拥有相同能量。如果我们拥有一个自旋为2的系统，则角动量的 z 分量就只能有按 \hbar 的单位计算的下列诸数值：

$$2, 1, 0, -1, -2.$$

如果你点数一下对某一给定的 j 共有若干个态，则总共有 $(2j+1)$ 个可能性。换句话说，如果你将能量和自旋 j 都告诉我，结果便变成，恰恰共有 $(2j+1)$ 个具有那一能量之态，每个态相当于角动量分量的那些可能不同数值中的一个。

我们想要再加上另一项事实。如果你随意拾起一个已知其 j 值的原子而测量其角动量的 z 分量，那么你会获得那些可能数值中的任一个，而每个数值总是同样可能的。所有之态实际上都是单态，而每个态同另一个态恰恰是一样好。在世界上每个态都各具有相同“权重”。(我们假定并没有预先挑选出一个特殊试样。)这一事实偶尔有一个简单的经典类似。如果你按照经典方式提出这同一问题：若取一个全都具有相同总角动量的随机系统试样，对

于某一特定角动量分量的可能性究竟如何呢? ——答案是, 从极大至极小的所有数值都同样可能。(你可以容易对此做出证明)。这一经典结果就相当于在量子力学中那 $(2j+1)$ 个可能性的彼此相等几率。

从迄今我们所已有的, 还能够得出另一个有趣而却有点令人吃惊的结论。在某些经典计算中, 在最终结果上出现之量会是角动量 \mathbf{J} 的大小的平方——换句话说, 那就是 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 。事实证明, 通过利用经典的计算结果和下述的简单法则: 由 $j(j+1)\hbar^2$ 取代 $J^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$, 就往往能够猜出该正确的量子力学公式。这一法则经常用到, 而且往往给出正确结果, 但并非总是如此。我们可以提供下面的论据来证明为什么你也许会期待这一法则是行得通的。

$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 这一标积可以写成

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

由于它是一个标量, 就应当对于自旋的任一取向都相同。假设我们随意从任一给定的原子系统中摄取试样并作出对 J_x^2 、 J_y^2 或 J_z^2 的测量, 那么对于其中每一个的平均值应该相同。(并没有对各不同方向中的任何一个方向会有任何特殊优待。)因此, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 的平均值就恰恰是任一分量的平方——比方说 J_z^2 ——的平均值之三倍:

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \rangle_{\text{平均}} = 3\langle J_z^2 \rangle.$$

但由于 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 对所有一切取向都相同, 当然它的平均值也就刚好是它的恒定值; 我们便有

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 3\langle J_z^2 \rangle. \quad (34.24)$$

如果我们现在说, 对于量子力学也将采用这同一个式, 则可以容易找出 $\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}}$ 来。我们只须取那 $(2j+1)$ 个可能的 J_z^2 值之和并给该总数除:

$$\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}} = \frac{j^2 + (j-1)^2 + \cdots + (-j+1)^2 + (-j)^2}{2j+1} \hbar^2. \quad (34.25)$$

对于一个其自旋为 $3/2$ 的系统, 这个式象是这样;

$$\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}} = \frac{(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2}{4} \hbar^2 = \frac{5}{4} \hbar^2.$$

$$\text{我们断定 } \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 3\langle J_z^2 \rangle_{\text{平均}} = 3 \cdot \frac{5}{4} \hbar^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \hbar^2.$$

将留给你们自己去证明, 式(34.25)加上式(34.24)就会给出这个普遍结果:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = j(j+1)\hbar^2. \quad (34.26)$$

虽然我们应从经典理论想到 J 的 z 分量之最大可能值会恰等于 \mathbf{J} 的大小——也即 $\sqrt{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}$ ——但按照量子力学 J_z 的极大值却总要比这略为小些, 因为 $j\hbar$ 总是小于 $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ 的。角动量从未“完全沿 z 方向”。

§ 34-8 原子的磁能

现在, 我们又要再来谈论磁矩。上面曾经说过, 在量子力学中一个特定原子系统的磁矩可用角动量由式(34.6)写出:

$$\mu = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \mathbf{J}, \quad (34.27)$$

其中 $-q_e$ 和 m 各代表电子的电荷和质量。

一个置于外加磁场中的原子磁体将拥有一额外能量, 这取决于它的磁矩在沿场向上的分量。我们知道,

$$U_{\text{mag}} = -\mu \cdot \mathbf{B}. \quad (34.28)$$

选择 z 轴使其沿 \mathbf{B} 方向，则

$$U_{\text{mag}} = -\mu_z B_z. \quad (34.29)$$

利用式(34.27)，我们便有

$$U_{\text{mag}} = g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J_z B_z.$$

量子力学申述， J_z 只能有某些数值： $j\hbar, (j-1)\hbar, \dots, -j\hbar$ 。因此，一个原子系统的磁能并不是任意的；它只能有某些值。例如，它的极大值为

$$g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \hbar j B_z.$$

$q_e\hbar/2m$ 这个量往往被赋予“玻尔磁子”这一名称而被写成 μ_B ：

$$\mu_B = \frac{q_e\hbar}{2m}.$$

磁能的可能值便是

$$U_{\text{mag}} = g\mu_B B \frac{J_z}{\hbar},$$

其中 J_z/\hbar 会取这些可能之值： $j, (j-1), (j-2), \dots, (-j+1), -j$ 。

换句话说，一个原子系统当被置于磁场中时其能量改变了一个正比于场而也正比于 J_z 的量。我们讲，一个原子系统已被磁场“分裂成 $2j+1$ 个能级”。例如，在磁场外的能量为 U_0 而 j 值为 $3/2$ 的一个原子，当被置在磁场中时，就会有四个可能能量。我们可以通过画出一个象图 34-5 那样的能级简图来表明这些能量。任一个特定原子在任一给定磁场中只

能有这四个可能能量中的一个。这就是量子力学关于一个原子系统在磁场中的行为所说的。

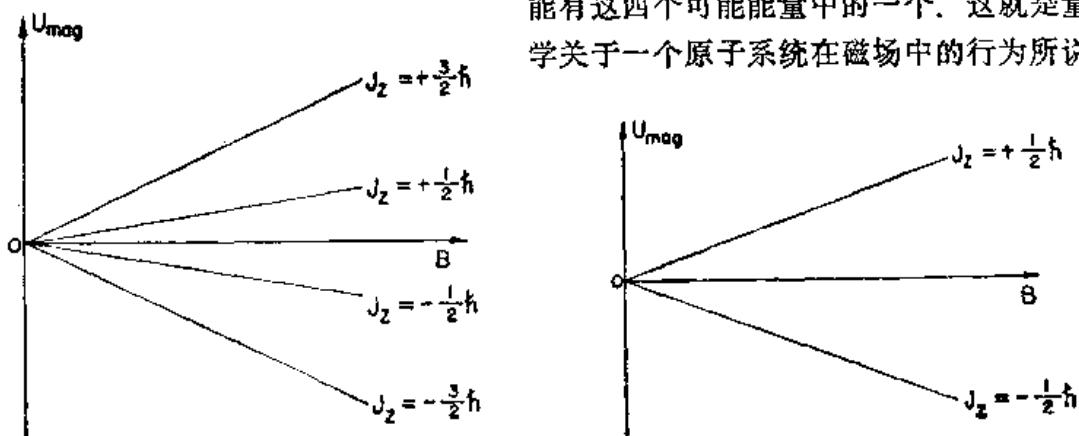


图 34-5 具有自旋为 $3/2$ 的原子系统在一磁场 \mathbf{B} 中的可能磁能

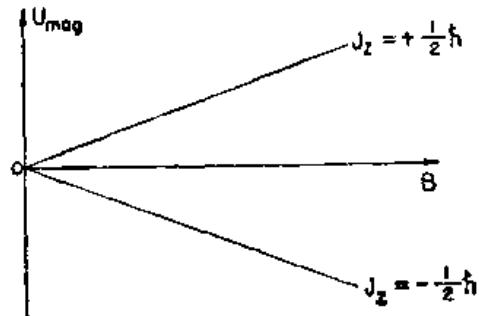


图 34-6 电子在一磁场 \mathbf{B} 中的两个可能能量

最简单的“原子”系统乃是一个单独电子。电子的自旋为 $1/2$ ，因而就有两个可能状态： $J_z = \hbar/2$ 和 $J_z = -\hbar/2$ 。对于一个静止（没有轨道运动的）电子来说，自旋磁矩具有等于 2 的 g 值，因而磁能可以是 $\pm \mu_B B$ 中之一。在磁场中的可能能量示如图 34-6。讲得随便一点，我们提出电子或者具有“向上”（沿场向的）自旋，或者具有“向下”（反场向的）自旋。

对具有较高自旋的系统，就会有更多之态了。我们可以设想自旋是“向上”，还是“向下”，还是翘起某一个中间“角度”，都要取决于 J_z 值。

在下一章中我们将应用这些量子力学结果来讨论材料的磁性。

35

顺磁性与磁共振

§ 35-1 量子化磁态

上一章我们曾描述过在量子力学中一物体的角动量如何不会具有任意方向，但在一给定轴上它的分量却只能取某些间隔相同的分立值。那是一件令人震惊而又独特的事情。你可能会想到，在你的思维达到更高水平并准备好接受这种概念之前也许不应该进入这样的东西中去。实际上，你的思维将永远不会变得更高级——就能够轻易地接受这样一种东西的意义上来说。并没有任一种定性描述方法可以使其得到理解，而同时在其本身的形式上又不会那么微妙和高级以致比起你企图要加以解释的东西还更为复杂。在小规模上的物质行为——正如我们曾经多次提到的——与寻常所熟悉的任何东西都不相同，而且确实十分奇怪。当我们沿着经典物理进行时，试图对小型东西的行为得到一个逐渐增长的认识，首先作为一种缺乏任何深刻理解的经验，乃是一个好主意。对这些事情的理解，那怕只有一点点，也是很慢很慢地成长起来的。当然，人们逐步变成能够更好地懂得在量子力学情况下所发生的事情——如果这就是所谓理解的涵义——但人们却将永远不能够得到一个认为量子力学法则是“自然的”的那种舒舒服服感觉。当然那些法则的确是“自然的”，但却不是对于我们本身在普通水平的经验上来说是自然的。我们对待这一角动量的法则的态度与过去对待许多曾经谈到的其他东西的态度很不相同这一点必须有所解释。我们并不试图解释“它”，但至少必须向你们陈述所发生的情况；要对材料磁性进行解释而又不提及有关磁性——包括角动量和磁矩——的那种经典解释乃是不正确的，那根本就不老实。

关于量子力学的一个最令人震惊而又激动的形势是：如果你沿任一条特定轴取角动量，你将会找到总是等于一整数或半整数乘以 \hbar 。不管你取的是哪一条轴，终归是一样。这一奇怪事实——你可取任一条其他轴并发现它上面的分量也被锁住在那同一组数值上——所涉及的微妙之处我们将留在后面一章中讨论，到那时你将看到这一表观佯谬如何最后获得解决时，会感到一种欢欣鼓舞。

目前我们将仅仅接受这么一个事实，即对于每一原子系统就有一个数值 j ，称为该系统的自旋——那必须是一个整数或一个半整数——而沿任一特定轴的角动量分量则将始终具有下列在 $+j\hbar$ 与 $-j\hbar$ 间的那些值之一：

$$J_z = \left\{ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ j-2 \\ \vdots \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{array} \right\} \cdot \frac{\hbar}{\text{之一。}} \quad (35.1)$$

我们也曾提及每一简单原子系统都有一个与角动量的方向相同的磁矩。这不仅对于原

子和核正确，而且对于基本粒子也都正确。每一基本粒子有其本身的特征值 j 和磁矩。（对于某些粒子来说，这两者均为零）。在这一句话中，所谓磁矩我们指的是比方在一个沿 z 方向的磁场中，系统的能量对于小磁场来说可以写成 $-\mu_s B$ 。我们一定要有磁场务必不太大的那一条件，否则它就可能会干扰该系统的内部运动，从而使能量不会成为对在磁场发动前就已存在的那个磁矩的一种量度。但如果场足够弱，则由该场所改变的能量就是这么多：

$$\Delta U = -\mu_s B, \quad (35.2)$$

默认在这个式子里的 μ_s 要由下式来代替：

$$\mu_s = g \left(\frac{q}{2m} \right) J_z, \quad (35.3)$$

其中 J_z 就是式(35.1)中那些数值之一。

假设考虑一个自旋为 $j=3/2$ 的系统。在没有磁场时，该系统就有四个不同状态，这些状态对应于那些不同 J_z 值，但都具有完全相同的能量。可是一旦我们将磁场加上，就有一个附加的互作用能量把这些状态分隔开，形成稍为不同的能级。这些能级的能量是由某些与 B 成正比而又乘以 $3/2, 1/2, -1/2$ 和 $-3/2$ 个 \hbar 的各 J_z 值而给出的。关于自旋分别为 $1/2, 1$ 和 $3/2$ 的原子系统的能级分裂，示如图 35-1 的那些简图上。（记住对于电子的任何一种安排，磁矩始终与角动量反向。）

你将从图上注意到，那些能级的“重心”在有磁场和没有磁场时都一样。并且注意到，对于某一给定粒子在一给定磁场中从一个能级至次一能级之间的间隔总是相等。我们要来对在某一给定磁场 B 中的能量间隔写成 $\hbar\omega_p$ ——这不过是关于 ω_p 的定义罢了。利用式(35.2)和(35.3)，我们便有

$$\hbar\omega_p = g \frac{q}{2m} \hbar B$$

或

$$\omega_p = g \frac{q}{2m} B. \quad (35.4)$$

$g(q/2m)$ 这个量恰好就是磁矩对角动量的比率——是该粒子的一种性质。式(35.4)与我们在第三十四章中所得到的有关一个角动量为 \mathbf{J} 而磁矩为 μ 的回转器在磁场中的进动角速度的公式相同。

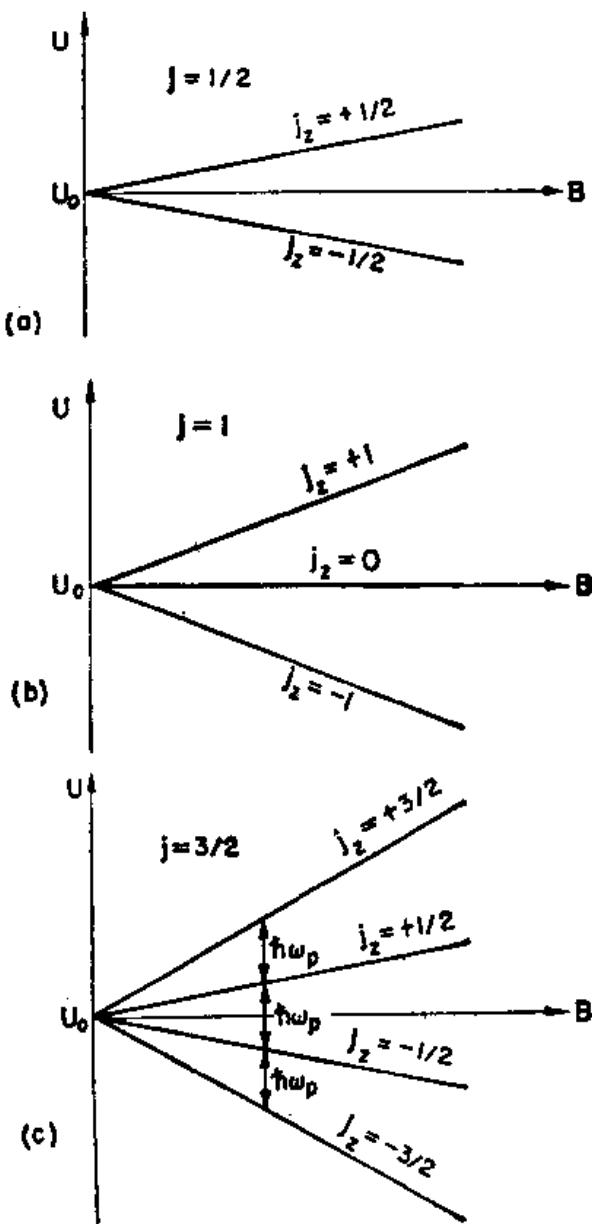


图 35-1 自旋为 j 的一个原子系统在磁场 B 中拥有 $(2j+1)$ 个可能能量，对于小场来说，这一能量分裂与 B 成正比

§ 35-2 斯特恩-革拉赫实验

角动量被量子化这一事实是那么令人惊异以致我们得稍为从历史的角度来谈论它。从它被发现的那一刻起就开始形成一种震动（尽管在理论上已预期到了的）。最初由斯特恩-革拉赫（Stern-Gerlach）于1922年在一个实验上找到。如果你愿意的话，尽可以认为斯特恩-革拉赫实验就是关于角动量量子化这一信念的直接验证。斯特恩和革拉赫创造出一种为测量个别银原子的磁矩的实验。他们通过在一个热炉中把银汽化并让某些银蒸气穿过一系列小孔而产生出一条银原子束来。这一束射线指向一块独特磁铁的极尖之间的空隙，如图35-2所示。他们的意图如下：如果银原子有一磁矩 μ ，则在磁场 B 中便具有能量 $-\mu_z B$ ，其中 z 为磁场方向。在经典理论中， μ_z 该等于磁矩乘以矩与场间所夹之角的余弦，因而在场中的附加能量该是

$$\Delta U = -\mu B \cos \theta. \quad (35.5)$$

当然，当原子从炉里跑出来时，它们的磁矩会指向每一个可能方向，因而应有 θ 的一切值。现在如果磁场随 z 变化得很快——有一个强大场陡度——那么磁能也将随位置变化，便将有一个力施于磁矩之上，这力的方向取决于 $\cos \theta$ 或正或负。原子将受一个正比于磁能的微商之力拉上或拉下；根据虚功原理，

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos \theta \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (35.6)$$

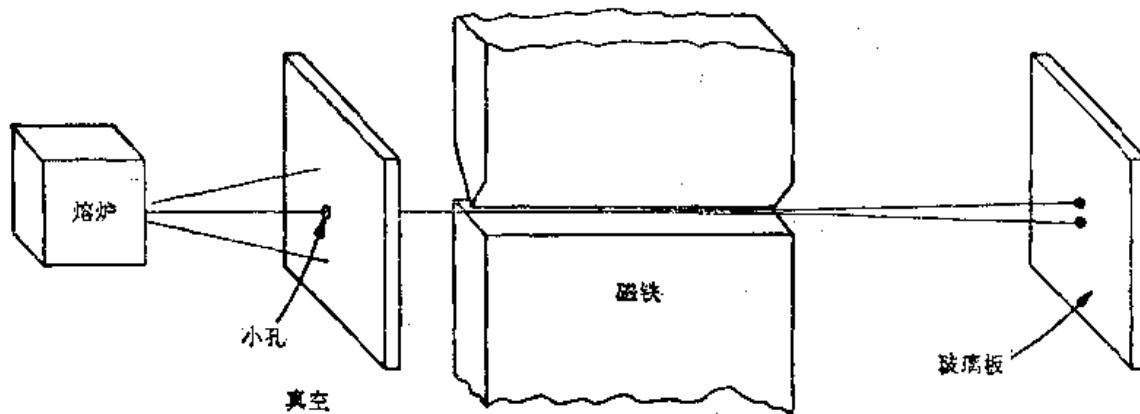


图 35-2 斯特恩-革拉赫实验

斯特恩和革拉赫所制成的磁铁，其中一个极形成十分尖锐的棱以便产生迅速变化的磁场。银原子束恰好沿这一尖锐棱边穿射而过，使得原子会在那个非均匀磁场中感到一个竖向力。一个其磁矩按水平取向的银原子不会受任何力的作用并将笔直地经过该磁铁。一个其磁矩恰好是竖向的原子则该受到一个拉其向上指着磁铁尖棱之力。一个其磁矩指向下的原子则该感到一向下推力。于是，当这些原子离开磁铁时，它们就会按照其磁矩的竖向分量而给分散开了。在经典理论中所有一切角速度都属可能，以致当这些原子由于淀积在玻璃板上面而加以收集时，人们应该期望在竖向上出现一抹银斑。这条银线高度该与磁矩的大小成正比。当斯特恩和革拉赫看到实际所发生的情况时，经典概念的沮丧失败完全被揭露了。他们在玻璃板上所找到的乃是两个明晰斑点。那些银原子形成了两条束线。

一束自旋显然是杂乱指向的原子竟被分裂成两条分开的束线，这是最令人感到惊奇的。磁矩怎么会知道只允许它去在磁场的方向上取某些分量呢？噢，那实际上就是角动量量子化被发现的开始，而与其试图给你一个理论上的解释，倒不如只是说你被这一实验结果所绊

住的程度正如当年当这一实验刚做出来时物理学家们不得不接受该结果的那一种情况。这是原子在磁场中的能量会取一系列分立值的实验事实。对于这些数值中的每一个，能量总是正比于磁场强度的。因而在一个其中场在变化的区域中，虚功原理告诉我们，作用于原子上的可能磁力将会有一系列的分立值；对每个态所作用之力不同，因而该原子束就会分裂成一个小数目的分开束线。从对这些束线的偏移进行量度，人们就能找出磁矩的大小来。

§ 35-3 勒比分子束法

现在我们要来描述一种由勒比(Rabi)及其同事们所发展起来的为量度磁矩用的仪器。在斯特恩-革拉赫实验中原子的偏移很小，因而对磁矩的量度并不十分精密。勒比的技术允许在测量磁矩上达到一种奇妙的精密度。这一方法建立在这么一桩事实上，即原子的本来能量在磁场中被分裂成一个有限数目的能级。一个原子在磁场中的能量只能有某些分立值，实际上并不比原子一般只拥有某些分立能级那一事实——我们在第一卷中就经常曾提及的事情——更为令人诧异。为什么这同一事态在原子处于磁场中时就不可以保持着呢？它仍然保持着。但正是希望把这一事实联系到那取向磁矩的概念上去的意图才给量子力学带来某些奇怪的内容。

当一原子具有在能量上相差为 ΔU 的两个能级时，它可以通过发射一个满足下式

$$\hbar\omega = \Delta U \quad (35.7)$$

的频率为 ω 的光量子，从一个较高能级跃迁到一较低能级。这同一事情也可以发生在处于磁场中的原子。只是此时，能量差竟会那么小以致频率并非对应于光，而是对应于微波或无线电波。原子从低能级至较高能级的跃迁，也可通过对光的吸收或在原子处于磁场中的情况下通过对微波能量的吸收而实现。这样，如果有一个原子处于磁场中，我们便可以通过加一频率适当的附加电磁波而使其从一态跃迁至另一态。换句话说，若有一个放在强磁场中的原子，而我们用一个弱的变化电磁场来对该原子“搔痒”，则会有某一能把它撞到另一个能级上去的几率，倘若频率接近于式(35.7)中的 ω 值的话。对于一个处在磁场中的原子，这一频率恰好就是我们以前曾称之为 ω_p 的而由式(35.4)用磁场所给出的那个频率。若该原子受一错误频率所搔动，则能够引起跃迁的机会将十分微小。于是在引起跃迁的几率上就有一个在 ω_p 上的尖锐共振。通过在一已知磁场 B 中测量这一共振频率，我们便能以巨大精密度测得 $g(g/2m)$ 这个量——从而也测得该 g 因子。

十分有趣，人们从经典的观点也会得出这一结论。按照经典图象，当我们把一个磁矩为 μ 而角动量为 J 的小回转器置于一外加磁场中时，该回转器便将环绕一条平行于磁场之轴而进动（见图 35-3）。假设我们问起：如何来改变该经典回转器相对于场——也即相对于 z 轴——的角度呢？磁场会产生一个环绕着一条水平轴的转矩。这样的转矩你会认为是正在试图把该磁体转至与场同向，可是它却仅仅引起了进动。如果想要来改变该回转器相对于 z 轴的角度，那就必须对它施一环绕 z 轴的转矩。倘若所施的是一与进动同向的转矩，则该回转器的角度将会这样改变以给出一个在 z 向上较小的 J 分量。在图 35-3 中， J 与 z 轴间的夹角将会增大。若试图阻止进动， J 会朝着竖向运动。

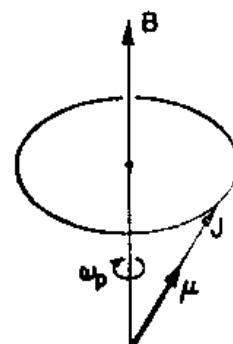


图 35-3 具有磁矩 μ 和角动量 J 的原子的经典进动

对一个在均匀场中正在作进动的原子，我们如何才能加上所必需的转矩呢？答案是，从旁加以一个弱磁场。你也许最初认为这一磁场的方向应该同磁矩的进动一样旋转，使得它总是垂直于磁矩，如图 35-4(a) 中由场 B' 所指出的那样。象这样的场会工作得很好，但一个交变的水平场几乎也同样优良。如果有一个小水平场 B' ，它总是在(正的或负的) x 方向上而且以频率 ω_p 振动着，那么在每个半周期中施于磁矩上的转矩就将掉转方向，使得它具有一个积累效应，几乎与一转动的磁场同样有效。于是，从经典方面说，我们就该期待，若有一个恰恰以频率 ω_p 振动着的弱磁场，则磁矩沿 z 方向的分量就应该改变。当然，按照经典理论， μ_z 应该是连续变化的，但在量子力学中这磁矩的 z 分量就不能作连续调整。它必须从一个值突然跳跃至另一个值。我们已作出了经典力学与量子力学两种结果的比较，来向你们提供某种有关也许会在经典上发生的事情如何与在量子力学中实际发生的事情互相联系起来的线索。你将会偶尔注意到，该期待着的共振频率在这两种情况下彼此相同。

又一附注：从我们关于量子力学所曾谈到的，并没有明显的理由说明为什么不能够在 $2\omega_p$ 的频率上也发生跃迁。碰巧在经典情况下既没有任一与此类似的东西，而在量子力学中也不会发生这一种跃迁——至少在我们刚才所述的那种独特诱导跃迁的方法上是不会发生的。采用一个水平方向的振动磁场，以频率 $2\omega_p$ 来引起同时作两步跳跃的几率等于零。只有在频率 ω_p 上，无论向上或向下的跃迁才会有机会发生。

现在，我们准备来描述有关测量磁矩的喇比法。这里将仅仅考虑对自旋为 $1/2$ 的那种原子的运用。仪器设备的一个简图示如图 35-5。有一个熔炉，它会提供一条中性原子流一直径行过三块磁铁。磁铁 1 恰好象在图 35-2 中的那一件，会产生出具有强大陡度之场——比方说，其 $\partial B_z / \partial z$ 是正的。如果原子带有一磁矩，而且 $J_z = +\hbar/2$ ，则它会被偏转向下；如果 $J_z = -\hbar/2$ ，则将被偏转向上(因为对于电子来说， μ 的方向与 J 的方向相反)。若只考虑

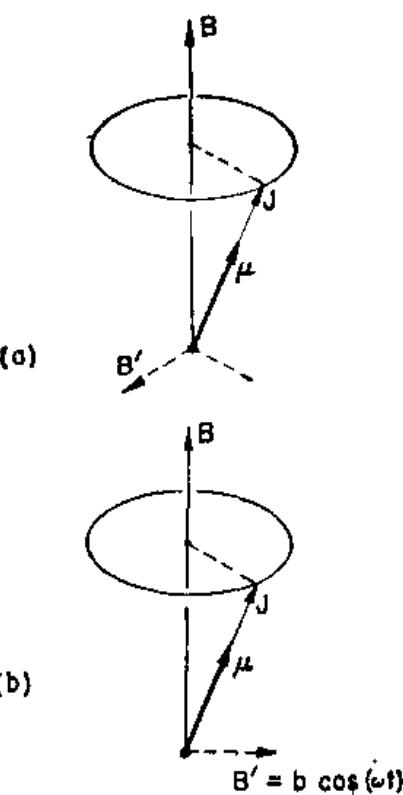


图 35-4 一个原子磁体的进动，角速度可以通过一个始终垂直于 μ ，如在 (a) 上的；或一个振动着、如在 (b) 上的水平磁场来加以改变

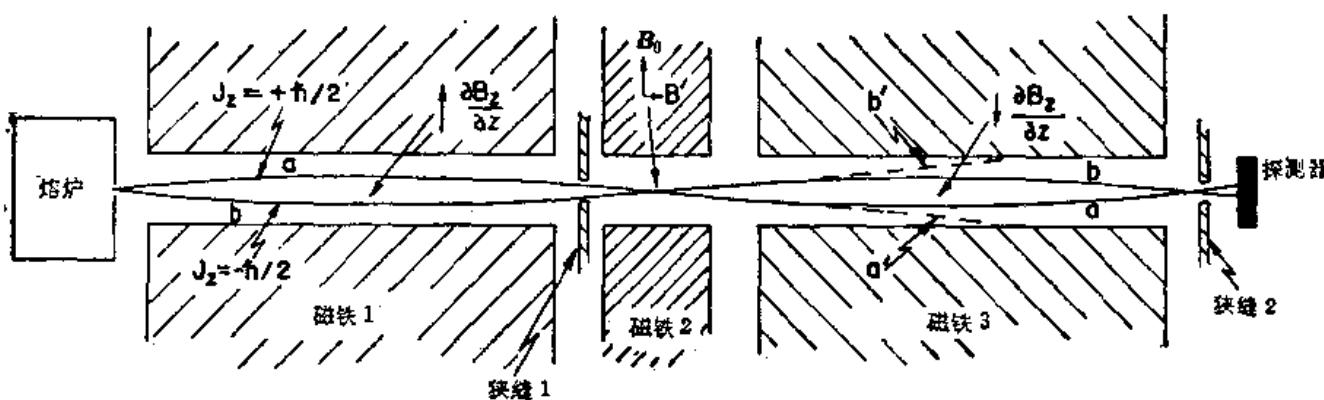


图 35-5 喇比的分子束仪器设备

那些能穿过狭缝 S_1 的原子，就有如图所示的那两条轨道。凡具有 $J_z = +\hbar/2$ 的原子应该沿曲线 a 穿过该狭缝，而凡具有 $J_z = -\hbar/2$ 的则应该沿曲线 b 。从熔炉跑出来沿其他路线的原子将不会穿过该狭缝。

磁铁 2 产生一个匀强场，在这一区域中不会有施于原子上之力，因而它们将沿直线进入到磁铁 3 中去。磁铁 3 恰好象磁铁 1，但其场反转过来，使得 $\partial B_z / \partial z$ 具有相反符号。那些具有 $J_z = +\hbar/2$ （我们讲“具有向上自旋”）的原子，先前在磁铁 1 中被推向下的，现在在磁铁 3 中却被推向上了；它们将继续沿着路线 a 并穿过狭缝 S_2 而到达探测器。那些具有 $J_z = -\hbar/2$ （即“具有向下自旋”）的原子，在磁铁 1 和磁铁 3 中也各受到反向之力而沿路线 b 穿过狭缝 S_2 以达到探测器。

探测器可以按各种不同方式制成，取决于被测量的原子。例如，对于象钠一类的碱金属，探测器可以是一根连接至一灵敏电流计的细热钨丝。当钠原子到达钨丝上时，它们被作为 Na^+ 离子蒸发了出去，一个电子便遗留下来。从这一根导线出来的就有一个正比于每秒到达的原子数目的电流。

在磁铁 2 的间隙中有一套能产生一个小水平磁场 \mathbf{B}' 的线圈。这些线圈由以一可变频率 ω 振动着的电流所推动。所以在磁铁 2 的两极间就有一个强大而恒定的竖向磁场 \mathbf{B}_0 和一个弱小的振动着的水平磁场 \mathbf{B}' 。

现在假设该振动场的频率 ω 被调在 ω_p ——即处于场 \mathbf{B} 中原子的“进动”频率——上。这交变场将使某些经过的原子作出从一个 J_z 值至另一个 J_z 值的跃迁。一个原来自旋“向上”($J_z = +\hbar/2$)的原子可能给翻个筋斗而变成“向下”($J_z = -\hbar/2$)。现在这个原子已把它的磁矩方向倒转了，因而它将在磁铁 3 中感觉到一个向下之力并将沿着路线 a' 运动，如图 35-5 所示。它将不再穿过狭缝 S_2 而到达探测器了。同理，有些原子的原来自旋是向下($J_z = -\hbar/2$)的，当经过磁铁 2 时将被翻转向上($J_z = +\hbar/2$)。于是它们将沿着路线 b' 而不会到达探测器。

若该振动场 \mathbf{B}' 具有一个与 ω_p 相当不同的频率，则它将不会引起自旋的任何倒转，从而各原子将按照它们不受干扰的路线到达探测器上。因此你可以看到，原子在该 \mathbf{B}_0 场中的“进动”频率 ω_p 是可以这样找出来的，即通过变更场 \mathbf{B}' 的频率 ω 一直到了一个对抵达探测器的原子流的减弱被观测出来。原子流的下降将发生在 ω 与 ω_p 出现“共振”时。该探测器流作为 ω 的函数画成曲线或许看来就会象图 35-6 所示的那样。既然知道了 ω_p ，就能得到原子的 g 值。

象这样的原子束、或往往被称为“分子”束的共振实验，是测量原子客体的磁性的一种漂亮而又精细的方法。这共振频率可以测量至极高的精密度——事实上，比起我们能够对那个必须预先知道才能找出 g 值来的磁场 \mathbf{B}_0 进行的测量要准确得多。

§ 35-4 大块材料的顺磁性

现在我们愿意来描述大块材料的顺磁现象。假设有一种其原子具有永磁矩的物质，比

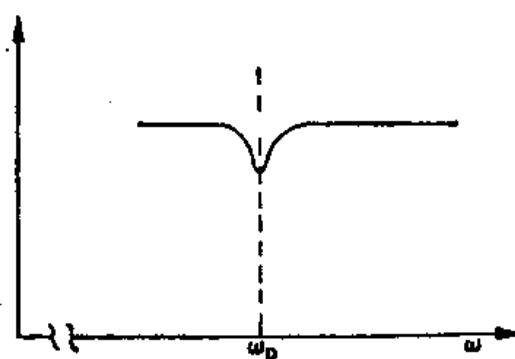


图 35-6 当 $\omega = \omega_p$ 时，在该束线中的原子流就会减弱

如象硫酸铜那样的晶体。在这种晶体中存在这样的铜离子，在其内电子壳层中有一净角动量和一净磁矩。所以这种铜离子就是一个具备永磁矩的东西。让我们只来说一句，哪些原子会拥有磁矩而哪些不会拥有。任一个比如象钠那种含有奇数个电子的原子，将具有磁矩。钠有一个电子位于未填满的壳层上。这个电子将会给该原子一个自旋和一个磁矩。然而，一般当化合物形成时，在外壳层中的额外电子便会与自旋方向恰与之相反的其他电子互相耦合，使得所有价电子的角动量和磁矩都经常被抵消掉。这就是为什么分子一般都不拥有磁矩的原因。当然，如果你所拥有的乃是钠原子的气体，则不会有这样的抵消作用*。并且，如果你有那种在化学中所谓“自由基”的——一种具有奇数个价电子的东西——则键不会完全被满足，因而就有一个净角动量。

在大多数成块材料中，只有当其中存在一些其内电子壳层未曾填满的原子才会拥有净磁矩。此时会有一个净角动量和磁矩。象这样的原子要在周期表中的“过渡元素”部分才能找到——诸如铬、锰、铁、镍、钴、钯和铂等就是这一类元素。此外，所有的稀土元素也都具有未填满的内壳层和永磁矩。还有其他两三种奇怪的东西也碰巧具有磁矩，诸如液态氧，但我们将把它留给化学系去解释其原因。

现在，假设有一个充满了具备永磁矩的原子或分子的箱子。我们想要知道，当加上一外磁场时将会发生的情况。当没有磁场时，原子被热运动撞来撞去，因而它们的矩在所有方向上穿来插去。一旦有了磁场时，它便会对那些小磁体起到排列整齐的作用；于是朝向场的矩比起离场的矩就会多些。即该材料已被“磁化”了。

我们将把材料的磁化强度 M 定义为每单位体积中的净磁矩，而这指的就是在单位体积内这些原子磁矩的矢量和。如果每单位体积中有 N 个原子，它们的平均磁矩为 $\langle \mu \rangle_{\text{平均}}$ ，则 M 可以写成 N 乘以这一平均原子磁矩：

$$M = N \langle \mu \rangle_{\text{平均}}. \quad (35.8)$$

M 的定义相当于第十章中关于电极化强度 P 的定义。

顺磁性的经典理论恰好就象第十一章中曾向你们表明的有关介电常数的理论。人们假定每一原子有一磁矩 μ ，它的大小固定，但其方向是任意的。在场 B 中，其磁能为 $-\mu \cdot B = -\mu B \cos \theta$ ，其中 θ 为矩与场间的夹角。根据统计力学，取任一个角度的相对几率为 $e^{-\mu B / kT}$ ，因而靠近零度之角比靠近 π 之角要较为可能发生。同以前在 § 11-3 节中所曾进行的步骤一样，我们会找出对于小磁场来说 M 既平行于 B 又具有这么一个量值

$$M = \frac{N \mu^2 B}{3kT} \quad (35.9)$$

[见式(11.20)]。这一近似公式只有对于 $\mu B / kT$ 比起 1 小得多的那些情况才正确。

我们已经找出了感生磁化强度——每单位体积中的磁矩——与磁场成正比。这即是顺磁性现象。你将会看到，这效应在低温上较强而在高温上较弱。当我们加一磁场于该物质上时，对于小场会发生一个正比于场的磁矩。 M 对 B 的比率（对于小场而言）称为磁化率。

现在，我们按量子力学观点来考察顺磁性。首先考虑一个自旋为 $1/2$ 的原子。在不存在磁场时，原子具有某一能量；但当处于磁场中时，就有两个可能能量，每一能量相当于每一 J_z 值。对于 $J_z = +\hbar/2$ ，能量受磁场改变了这么一个量

* 寻常的钠蒸气大多是单原子的，虽则也有一些 Na_2 分子存在。

$$\Delta U_1 = +g\left(\frac{q_e \hbar}{2m}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B. \quad (35.10)$$

(由于电子的电荷为负*, 因此 ΔU_1 这一能量移动对于一个原子来说就是正的.) 对于 $J_z = -\hbar/2$, 能量被改变了一个量

$$\Delta U_2 = -g\left(\frac{q_e \hbar}{2m}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B. \quad (35.11)$$

为了简化书写, 让我们令

$$\mu_0 = g\left(\frac{q_e \hbar}{2m}\right) \cdot \frac{1}{2}; \quad (35.12)$$

于是

$$\Delta U = \pm \mu_0 B. \quad (35.13)$$

μ_0 的意义很明显: $-\mu_0$ 是自旋向上的那种情况下磁矩的 z 分量, 而 $+\mu_0$ 则是自旋向下的那种情况下磁矩的 z 分量.

原来统计力学告诉过我们, 一个原子在一个态或另一个态上的几率正比于

$$e^{-(\text{态之能量})/kT}.$$

当没有磁场时, 这两个态具有相同能量; 所以当在一磁场中建立了平衡时, 几率就正比于

$$e^{-\Delta U/kT}. \quad (35.14)$$

每单位体积中自旋向上的原子数为

$$N_{\text{向上}} = a e^{-\mu_0 B/kT}, \quad (35.15)$$

而自旋向下的数目为

$$N_{\text{向下}} = a e^{+\mu_0 B/kT}. \quad (35.16)$$

常数 a 要从这么一个关系中确定下来:

$$N_{\text{向上}} + N_{\text{向下}} = N, \quad (35.17)$$

式中 N 为单位体积中的原子总数. 因此就得到

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.18)$$

我们所感兴趣的乃是沿 z 轴的平均磁矩. 自旋向上的那些原子将各贡献一个 $-\mu_0$ 之矩, 而自旋向下的那些原子则各贡献一个 $+\mu_0$ 之矩; 因而平均矩为

$$\langle \mu \rangle_{\text{平均}} = \frac{N_{\text{向上}}(-\mu_0) + N_{\text{向下}}(+\mu_0)}{N}. \quad (35.19)$$

于是每单位体积中的磁矩 M 就是 $N\langle \mu \rangle_{\text{平均}}$. 利用式(35.15)、(35.16)和(35.17), 便可得到

$$M = N\mu_0 \frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.20)$$

这就是关于具有 $j=1/2$ 的原子的 M 的量子力学公式. 偶尔, 这个式也可以用双曲正切函数来较紧凑地写出:

$$M = N\mu_0 \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}. \quad (35.21)$$

M 作为 B 的函数画成曲线示如图 35-7. 当 B 变得十分巨大时, 双曲正切函数会趋于 1, 因而 M 会趋于其极限值 $N\mu_0$. 所以在高场上, 磁化达到饱和. 我们可以明白为什么会这

* 在上一章 §34-2 节中曾令电子电荷为 $-q_e$, 因此 q_e 已是正的了. ——译者注

样；在足够高的场中，所有磁矩都被排列在同一个方向上了。换句话说，它们全都处于自旋向下的状态，因而每一原子贡献了一个磁矩 μ_0 。

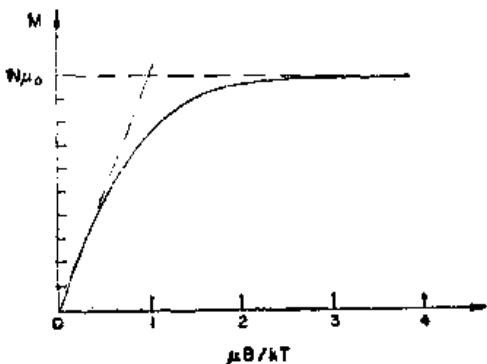


图 35-7 顺磁性磁化强度随
磁场强度 B 的变化

在大多数正常情况下——比如说，对于典型矩、室温以及我们通常能够获得的场强（诸如 10,000 高斯）—— $\mu_0 B / kT$ 这个比值约等于 0.02。人们一定要在极低温度上才能见到饱和。对于常温来说，我们往往能够用 x 来代替 $\tanh x$ ，因而可以写成

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT}. \quad (35.22)$$

正如我们曾在经典理论中见到的， M 与 B 成正比。事实上，这个式子几乎和以前的完全相同，除了有一个 $1/3$ 的因数似乎不见了以外。但我们仍需要把量子力学中的 μ_0 同在那经典结果即式(35.9)中所出现的 μ 联系起来。

在那经典公式中，出现的是 $\mu^2 = \mu \cdot \mu$ ，即该矢量磁矩的平方，也即

$$\mu \cdot \mu = \left(g \frac{q_e}{2m}\right)^2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}. \quad (35.23)$$

我们曾在上一章中指出，通过用 $j(j+1)\hbar^2$ 代替 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，你就很可能会从经典的计算结果中得到正确答案。在我们这一特殊例子中， $j=1/2$ ，因而

$$j(j+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2.$$

若用此来顶替式(35.23)中的 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，则可得

$$\mu \cdot \mu = \left(g \frac{q_e}{2m}\right)^2 \frac{3\hbar^2}{4},$$

或者用式(35.12)所定义的 μ_0 来表达，又可得

$$\mu \cdot \mu = 3\mu_0^2.$$

把这一结果代入该经典公式(35.9)中的 μ^2 ，的确会再现那正确的量子公式(35.22)。

关于顺磁性的量子理论很容易引伸至具有任一自旋 j 的原子。该低场磁化强度为

$$M = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{\mu_B^2 B}{kT}, \quad (35.24)$$

其中

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m} \quad (35.25)$$

是一个具有磁矩量纲的各常数的组合。大多数原子都拥有大概这么大小的磁矩。它被称为玻尔(Bohr)磁子。电子的自旋磁矩就几乎恰好是一个玻尔磁子。

§ 35-5 绝热去磁冷却法

有一种十分有趣的关于顺磁性的特殊应用。在十分低的温度下，在一个强磁场中有可能把原子磁体都排列整齐起来。这时就能够通过一种所谓的绝热去磁过程来获得非常低的温度。我们可取一种顺磁性盐（比方，象硝酸镨铵那样含有一些稀土原子的盐），并在强磁场中用液态氮来把它降低到绝对 1 或 2 度。这时该因数 $\mu B / kT$ 就会大于 1——比如说比 2 或 3 还要大。大多数自旋已被排列整齐了，因而磁化就几乎达到了饱和。让我们轻松一点

地说，磁场很强而温度很低，因而几乎所有原子都被排列整齐了吧。然后，你就从热方面使该盐隔离（比如说，通过移去液态氮并留下一个高真空），并将磁场撤除。盐的温度便会降低下来。

现在假如你突然把磁场除去，那么晶格里的原子的那种轻摇慢摆就会逐渐把所有自旋都从整齐排列中撞散开来。它们有些会自旋向上，而有些则会自旋向下。但若没有磁场（并略去原子间的互作用，那只会造成微小误差），则翻转那些原子磁体时可不需要任何能量。它们会在能量不发生改变的条件下打乱本身的自旋，从而也就不会有任何温度变化。

然而，假定正当那些原子磁体被热运动所翻转时还存在一些磁场。那么当把它们背着场翻转时就需要作某些功——它们必须反抗场而作功。这会从那些热运动中取出能量，从而降低了温度。因此，如果该强磁场并非消除得太快，则盐之温度将会降低——它是被去磁所冷却的。根据量子力学观点，当场十分强大时所有原子都处于最低能态，因为要反抗任何会处于较高能态上的几率非常之大。但当场降低时，就逐渐较有可能使热起伏把一个原子撞至其较高态上。当此事发生时，该原子吸收了能量 $\Delta U = \mu_0 B$ 。因此，若场慢慢除去，则这些磁性跃迁会从晶体的热振动中取去能量，因而就把它冷却了。用这种办法能够将绝对温度几度降低至千分之几度。

你是否愿意造成甚至比这还要冷的东西？事实证明，大自然已提供了一条途径。我们曾经提到过原子核也有磁矩。关于顺磁性的公式对核也同样适用，不同之处仅在于核磁矩约比原子磁矩小千倍。[它们具有 $q\hbar/2m_p$ 的数量级，其中 m_p 为质子质量，所以磁矩较小的程度就是电子质量与质子质量两者之比。]对于这样的磁矩，即便在 2 K 的温度上，该因数 $\mu B/kT$ 也才只有千分之几。但如果已利用顺磁性的去磁过程来把温度降低至千分之几度，那么 $\mu B/kT$ 就会变成一个接近于 1 之值——在这种低温下，我们便能开始使核磁矩饱和。那算是幸运，因为此后便可利用核磁性的绝热去磁效应来达到更低温度。这样，就有可能做出两级的磁冷却。首先，利用顺磁性离子的绝热去磁来达到千分之几度。然后，再利用这寒冷的顺磁性盐来冷却某些具有强核磁性的材料。最后，当我们从这一材料中移去磁场时，它的温度就会降低到兆分之一的绝对度数以内——如果对一切事情都曾十分小心地去做的话。

§ 35-6 核 磁 共 振

我们曾经说过，虽然原子顺磁性已很小，而核的磁性甚至比它还要小近千倍。因此通过核磁共振的方法来观测核方面的磁性是相当容易的。假设取一种象水那样的物质，其中一切电子自旋都完全互相对消，使得它们的净磁矩为零。但水分子仍将有一个十分十分微小的磁矩，那是起因于氢核的核磁矩的。假设将水的一个小试样放在磁场 B 之中。由于（属于氢的）质子具有一个等于 $1/2$ 的自旋，它便将有两个可能能态。如果水处于热平衡中，则在那较低能态上将有较多的质子——它们的磁矩指向与场平行的方向。在每单位体积中便有一个小净磁矩。既然核磁矩才约等于原子磁矩的千分之一，与 μ^2 成正比的磁化强度——应用式(35.22)——就只有典型原子顺磁性的约兆分之一那么强。（这就是为什么我们得先挑选一种不具有原子磁矩的材料。）如果你把它算出来，那些自旋指向上的质子数目与那些自旋指向下的质子数目相差只有一亿中的一个，因而这效应的确十分微小！然而，它仍然可以按下述办法测出来。

假设对该水试样用一个能产生一小水平振动磁场的小线圈来加以包围。如果这个场以频率 ω_p 振动，则它将在该两能态之间诱导跃迁——正如在 35-3 节中我们曾对喇比实验所描述的那样。当一质子从一较高能态跃迁至一较低能态时，它便将给出能量 $\mu_p B$ ，而这正如我们曾经见到的，乃等于 $\hbar\omega_p$ 。如果它是从低能态跃迁到较高能态，则它会从线圈那里吸收能量 $\hbar\omega_p$ 。由于在较低态上的质子数略微多于在较高态上的，便将有从该线圈的净能量吸收。虽然这一效应十分微弱，但那轻微的能量吸收仍可以用一部灵敏的电子放大器来加以观测。

正如在喇比的分子束实验中那样，这能量吸收将只在该振动场处于共振之中，也即当

$$\omega = \omega_p = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) B$$

时，才能见到。通过变更 B 而保持 ω 固定不变来寻找共振往往较为方便。能量吸收显然将在

$$B = \frac{2m_p}{gq_e} \omega$$

时出现。

一部典型的核磁共振仪器示如图 35-8。一个高频振荡器驱动着置于一座大电磁铁的两极间的一个小线圈，两个绕于极尖上的小附加线圈由一每秒 60 赫的电流驱动着，以便使

整个磁场围绕其平均值作十分微小的“摇摆”。作为一例，比方说该磁铁的主电流被调至会给出一个等于 5000 高斯的磁场，而这些附加线圈则围绕这一值产生一个 ± 1 高斯的变化。如果该振荡器被调至每秒 21.2 兆赫，那么每次当场扫过 5000 高斯时它就会处在质子的共振中了[应用式(34.13)，对于质子要用 $g=5.58$]。

这振荡器电路还被安排得能够给出一个附加的输出信号，这信号与从该振荡器所吸收的功率的任何改变成正比。把这一信号馈给一示波器的竖向偏转放大器中。示波器的水平扫描在该磁场摇摆的每一周中触发一次。（更经常的是，这水平偏转被布置成与该摇摆场的大小成正比。）

在水试样还未放进该高频线圈内之前，从振荡器所吸收的功率就有某一定值。（它不会随磁场改变。）然而，当一小瓶水放在线圈中时，示波器上就出现一个信号，如图所示。我们见到由于质子翻转所引起的功率被吸收的一个图象！

在实践中，很难掌握如何去把主磁场恰恰调在 5000 高斯上。人们所做的事是将主磁电流调至使共振出现在示波器上为止。事实证明，这是目前对磁场强度作出精密测量的最方便办法。当然，过去得要有人对磁场和频率加以准确量度才能测定质子的 g 值。但现在这一步已经做过了，因此一部如图所示的那种质子共振仪就可用作“质子共振磁强计”了。

应该提一句关于该信号的形状。假如磁场十分缓慢地摇摆，就该期待会看到一条正常的共振曲线。当 ω_p 恰好达到振荡器频率时，能量吸收就会表现出一个极大值。在附近的频率也有一些吸收，因为并不是所有质子都处在完全相同的场上——而不同之场就意味着稍

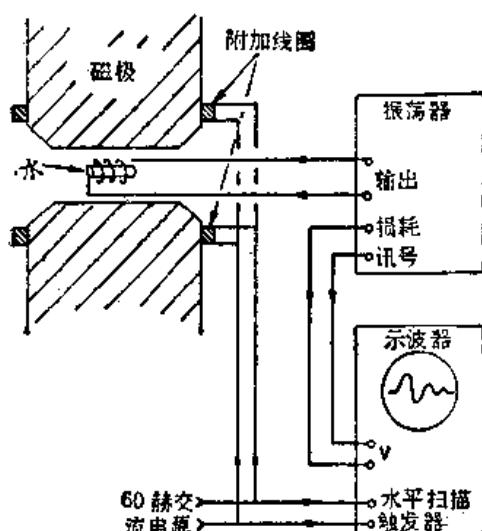


图 35-8 一部核磁共振仪器

为不同的共振频率。

偶尔，人们也许会怀疑，是否在那共振频率上真的会看到任何信号。我们应否期望该高场会把在那两个态上占据的粒子数都弄到相等——使得除了水刚放入的那一瞬间之外就该没有任何信号？不完全是这样，因为尽管我们企图使该两态的占据粒子数相等，但热运动方面却总在试图把对于温度 T 所应有的那一种适当比率保持住。如果处在共振态上，则被核所吸收的功率恰好就是丢失给予热运动方面的。然而，在质子磁矩与原子运动之间只有相对微弱的“热接触”。质子被相对地隔离开，以处于一些电子分布的中心。因此在纯水中，该共振信号实际上往往太小，以致不能够观察到。要增加吸收，就必须加强“热接触”。这通常是通过添加一点点氧化铁于水中而做到的。这些铁原子象小磁体一样；当它们在其热舞蹈中到处震摇时，就会在质子上造成一种微小的摇摆磁场。这些变化着的场会把质子磁体“耦合”到原子振动之上并倾向于建立起热平衡。正是通过这一“耦合”，才使处于较高能态上的那些质子能够丢失它们的能量，以便再有可能从振荡器方面吸取能量。

实际上核共振仪器的输出信号看来并不象一条正常的共振曲线，经常是一个更复杂的还含有一些振动的信号——象图上所示的那样。这种信号的出现是由于该变动着的磁场。解释本应由量子力学来提供，但也可以证明，在这种实验中有关磁矩进动的那些经典概念总会给出正确的答案。按照经典概念，我们便应该说，当到达共振时就开始在同步地驱动一大堆进动着的核磁体。当这样做时，就是在促使它们一起共同进动。当这些核磁体全部一起转动时，将在该振荡器线圈中以频率 ω_0 建立起一个感生电动势，但由于磁场正在随着时间增长，该进动频率也将随着提高，因而这感生电压不久就会处在比振荡器频率稍为高一点的频率上。当这感生电动势与振荡器间交替地同相与异相时，该“被吸收”功率就会交替地或正或负。因而在示波器上我们就会见到在质子频率与振荡器频率之间的那种拍频。由于质子频率并非全都相同（不同质子会处在稍为不同的磁场），而也可能由于来自水里的氧化铁的干扰，那些自由进动着的磁矩不久就会异相，从而该拍频信号也消失不见了。

这些磁共振现象已有广泛应用，作为寻找关于物质的新东西的工具——特别是在化学和核物理上。不用说关于核磁矩的数值会告诉我们有关核的结构。在化学中，从共振的结构（或形态）中使许多东西已被弄清楚了。由于从附近核所产生的磁场，核共振的准确位置稍微有点移动，这取决于任一特定之核本身所处的环境。测量出这些移动会帮助人们去确定哪些原子靠近其他哪些原子，并帮助解释分子结构中的细节。同样重要的是关于自由基的电子自旋共振。虽然在平衡时并不会存在太多，这种自由基往往是化学反应中的中间态。对电子自旋共振的测量是对自由基存在的一种精细检验，而往往也是理解某些化学反应机制的一把钥匙。

36

铁磁性

§ 36-1 磁化电流

在本章中，我们将讨论某些材料磁矩的净效应远大于顺磁性或抗磁性的那种情况。这一现象称为铁磁性。在顺磁性或抗磁性材料中，感生磁矩往往过于微弱，以致我们无需担心磁矩所产生的附加场。然而，对铁磁性材料来说，那些由外加磁场所感生的磁矩就很大并对场本身会产生巨大影响。事实上，感生磁矩竟会如此之强大，以致它们往往是产生所观测到之场的主要效应。因此，我们必须关心的事情之一，就是有关那些巨大磁矩的数学理论。当然，那不过是一个技术性问题。真正的问题是，为什么磁矩会那么强——到底是怎么一回事？过了一会我们就要来讨论这一问题。

找铁磁性材料中的磁场与在有电介质时找出静电场的问题相当相似。你将会记起，我们曾用一矢量场 \mathbf{P} ——即单位体积中的偶极矩——开始描述电介质的内部特性。然后，算出这极化效应， \mathbf{P} 之散度相当于由电荷密度 $\rho_{\text{极化}}$ 所提供的：

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (36.1)$$

在任一种情况下，总电荷都可以写成这一极化电荷再加上所有其他电荷，其密度我们将写成^{*} $\rho_{\text{其他}}$ 。于是那个会把 \mathbf{E} 之散度联系到电荷密度上去的麦克斯韦方程便变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0},$$

$$\text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}.$$

然后，我们便可把电荷的极化部分抽出来并置于方程式的另一边，以得到一个新的定律：

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{其他}}. \quad (36.2)$$

这一定律申述， $(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$ 这个量的散度等于其他电荷的密度。

象式(36.2)中那样把 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 扯在一起，当然只有当我们懂得了它们间的关系时才会有用。以前就曾经见过，将感生偶极矩联系到场上去的理论是一件相当复杂的事情，而实际上只能应用于某些简单情况，并且即使那样也还只是一种近

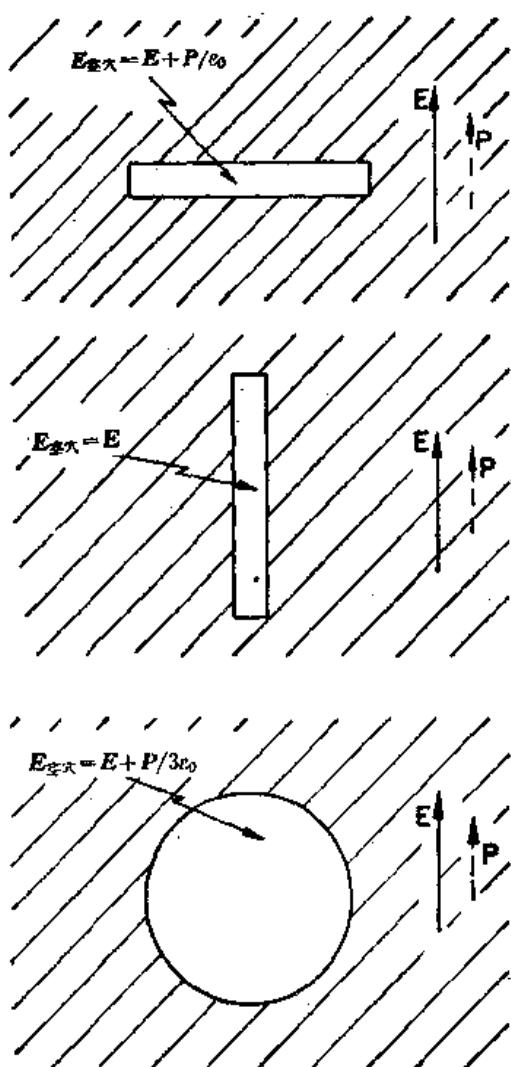


图 36-1 在电介质里的空穴中，电场取决于该空穴的形状

* 假如所有其他电荷都是在导体上，这 $\rho_{\text{其他}}$ 就会与我们在第十章中的 $\rho_{\text{自由}}$ 相同。

似，我们想向你们提醒有关曾经用过的那些近似概念之一。即要得出在电介质内部一个原子的感生偶极矩，就必须知道作用于各别原子上的电场。我们作过这么一种近似——那在许多情况下还是不太坏的——即作用于原子上之场与我们把该原子挖出来（保持所有附近其他原子的偶极矩都不变）而留下的小洞中其中心处所该有之场相同。你也会记起，在受极化了的电介质中的空穴里，电场取决于该空穴的形状。我们就把以前的结果都总结在图36-1上。对于一个垂直于极化的薄盘形空穴，穴里的电场由下式给出：

$$E_{\text{空穴}} = E_{\text{电介质}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

这是我们用了高斯定律而证明的。另一方面，在一个针状而平行于极化的槽沟里，我们曾经证明——利用 \mathbf{E} 之旋度等于零那一事实——槽内电场与槽外电场相同。最后，对于一个球形空穴我们曾找出过其中的电场是在槽里之场与盘里之场间走过了三分之一的路程：

$$\mathbf{E}_{\text{空穴}} = \mathbf{E}_{\text{电介质}} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{对于球形空穴}). \quad (36.3)$$

这就是我们在考虑受了极化的电介质中一个原子的遭遇时所曾用过之场。

现在我们必须用这一类似来讨论磁的情况：为完成此事而采取的一种抄捷径的简单办法是在于申明：每单位体积中的磁矩 \mathbf{M} ，完全与单位体积中的电偶极矩 \mathbf{P} 相似，因而 \mathbf{M} 的负散度就应相当于一个“磁荷密度” ρ_m ——不管它可能指的是什么。当然，困难在于物理世界中并没有任何象“磁荷”那样的东西。正如我们所知道的， \mathbf{B} 之散度总是零。但这并不应阻止我们去作一个人为的模拟并写出

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m, \quad (36.4)$$

其中 ρ_m 默认是纯数学形式的。于是就自然地能够作出一个与静电情况完全类似并从静电力学中引用我们所有的旧方程。人们往往做过象那样的一些事情。事实上，从历史方面讲，人们甚至相信这种模拟是正确的。他们确信 ρ_m 这个量就是代表“磁荷”密度。然而，一些日子以来我们知道，材料的磁化乃起因于原子里的环行电流——或者来自电子本身的自旋，或者来自原子中电子的运动。因此，依照物理观点，对事情如实地用原子电流而不用某种神秘莫测的“磁荷”密度来加以描述，是较为美妙的。偶尔，这些电流有时被称为“安培”电流，因为安培最早提出物质磁性起因于环行的原子电流。

当然，在磁化物质中的实际微观电流其密度十分复杂，它的数值有赖于你在原子里的那个地方进行观察——它在某些地方会较大而在其他地方则较小；它在原子中某一部分会指向这一方向而在另一部分又指向相反方向（正如微观电场在电介质中变化很大一样）。然而，在许多实际问题中，我们所感兴趣的只是在物质外面之场，或在物质里面的平均场——那我们指的是对许许多多个原子取的平均。只有对于这种宏观问题，用每单位体积中的平均偶极矩 \mathbf{M} 来描写物质的磁态才有意义。我们现在所要证明的是，磁化物质中的原子电流能够产生一种与 \mathbf{M} 联系起来的大规模电流。

于是，我们要做的就是，把电流密度 \mathbf{j} ——那是磁场的真正来源——分成几个部分：一部分是描述那些原子磁矩的环行电流；而其他部分则为描述那里可能会存在的其他电流。把电流分成三部分往往最为方便。在第三十二章中我们曾作过这样的区别，即在导体中能够自由流动的电流，以及在电介质中由于束缚电荷的来回运动所引起的电流。在 § 32-2 节

中我们就曾写出

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{其他}}$$

式中 $\mathbf{j}_{\text{极化}}$ 代表来自电介质里那些束缚电荷的运动的电流，而 $\mathbf{j}_{\text{其他}}$ 则代表所有其他各种电流。现在我们要再进一步，即把 $\mathbf{j}_{\text{极化}}$ 再分成一部分 $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$ 描述该磁化材料内部的平均电流，以及一个对任何遗留下来的我们可称之为 $\mathbf{j}_{\text{传导}}$ 的那种电流的附加项。这最后一项一般将指导体中的电流，但也可包括其他电流——比如由穿过空洞空间里的自由运动着的电荷所产生的电流。所以我们对于总电流密度将写成：

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{磁化}} + \mathbf{j}_{\text{传导}} \quad (36.5)$$

当然，正是这个总电流才是在麦克斯韦方程

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (36.6)$$

中属于 \mathbf{B} 之旋度的。

现在必须把电流 $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$ 联系到磁化强度矢量 \mathbf{M} 上去。为了使你们能够明白今后将往何处去，此刻就告诉你们即将得到的结果无非是

$$\mathbf{j}_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (36.7)$$

若在一磁性材料中给出每一处的磁化强度矢量 \mathbf{M} ，那么该环行电流密度就要由 \mathbf{M} 之旋度来提供。让我们来看看能否理解为什么会这样。

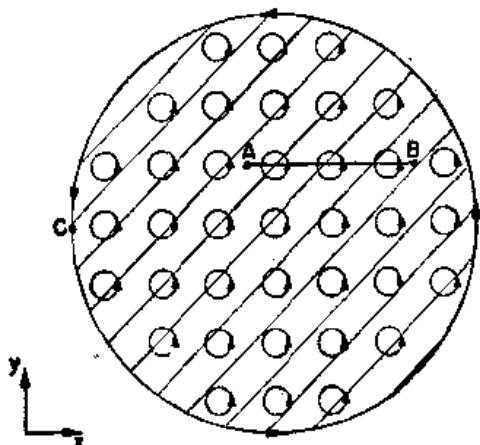


图 36-2 从一根沿 z 方向被磁化了的铁棒横截面上所看到的原子环行电流的简略图形

首先考虑一根柱形棒中有一个平行于其轴心的均匀磁化的那种情况。从物理方面讲，我们懂得象这样的均匀磁化，实际上意味着在材料内部每一处都有原子环行电流的均匀密度。假设我们试图想象在这材料的横截面上那些电流看来象个什么。应该期望，会看到如图 36-2 所示的那种电流。每一原子电流在一个小圆周上兜着圈子，而且所有这些环行电流都是沿同一方向打转转的。那么这一物体的有效电流究竟怎么样呢？噢，在棒里的大多数地方并没有什么效应，因为在每一电流旁边恰好有另一个与之反向的电流。如果设想一个小面积——但比起一单独原子来却要大得多的面积——诸如图 36-2 中由 AB 线所标明的那个面，穿过这个面的净电流等于零。在该材料内部任一处都没有净电流。可是要注意，在材料表面上会有未被其附近的反向电流所抵消的一些原子电流。在表面上有一个始终以同一方向环绕着该棒的净电流。现在我们明白，为什么以前曾经说过，一根均匀磁化之棒会相当于载有电流的一个长螺线管。

这个观点怎么会与式(36.7)相符呢？首先，在材料内部，磁化强度 \mathbf{M} 是一恒量，因而它的一切微商就都等于零。这与我们的几何图象相符。可是，在表面上， \mathbf{M} 却不是真正的恒量——它只在到达边缘之前才不变，然后便突然龟缩至零。因此，刚好在表面上会有巨大陡度，而这按照式(36.7)将会给出一个高电流密度。假设我们是在考察图 36-2 中 O 点附近所发生的情况。选取如图中的那种 x 和 y 方向，则磁化强度 \mathbf{M} 将沿 z 方向。把式(36.7)的各分量写出，便有

請勿用於盈利之目的

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} = (j_{\text{面化}})_x, \quad (36.8)$$

$$-\frac{\partial M_z}{\partial x} = (j_{\text{面化}})_y.$$

在 O 点上, 微商 $\partial M_z / \partial y$ 为零, 而 $\partial M_z / \partial x$ 则很大并为正值. 式(36.7)申述, 在负 y 方向上有一个巨大电流密度. 这符合于环绕该棒的表面电流的上述图象.

现在要来找出材料里的磁化强度会逐点变化的那种较复杂情况的电流密度. 定性地看出这一点挺容易, 即如果在相邻区域里磁化强度有所不同, 则那些环行电流便不会完全抵消, 因而将在该材料体积中存在着净电流.

我们想要来定量算出的正是这一效应.

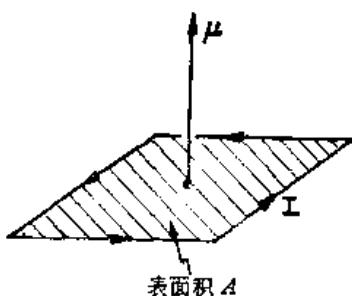


图 36-3 一个电流回路的磁偶极矩 μ 为 IA

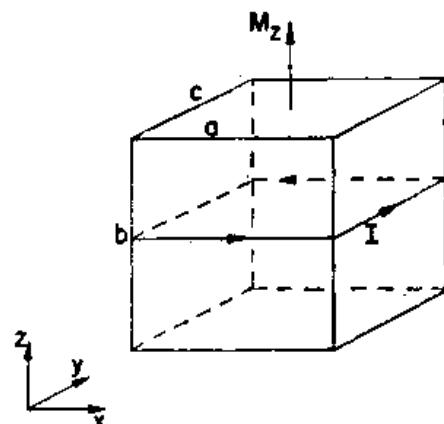


图 36-4 受了磁化的一小块材料与一环行的表面电流相当

首先, 我们必须回忆起 § 14-5 节中的结果, 即环行电流 I 具有一个由下式所给出的磁矩 μ :

$$\mu = IA, \quad (36.9)$$

其中 A 为该电流回路的面积(见图 36-3). 现在让我们考虑在一磁化材料中的一个小矩形块, 如图 36-4 中所草画出来的那种模样. 我们选取这块材料是那么小, 以致能够将其中的磁化强度视为均匀的. 若这一块材料在 z 方向上有一磁化强度 M_z , 则其净效应将如同一个围绕着图上所示的那些竖立面上的面电流. 我们能够从式(36.9)找出这些电流的大小. 这块材料的总磁矩等于磁化强度乘以其体积:

$$\mu = M_z(abc),$$

由此得到(取该回路的面积为 ac)

$$I = M_z b.$$

换句话说, 在每一竖立面上每单位(竖向)长度的电流等于 M_z .

现在假设我们想象两个彼此相邻的小块, 如图 36-5 所示. 由于第二块与第一块间稍为有点位移, 它便将有一稍为不同的磁化强度垂直分量, 这我们称之为 $M_z + \Delta M_z$. 在两块之间的界面上, 对总电流现有两种贡献. 第一块将产生一个流向正 y 的电流 I_1 , 而第二块则将产生一个在负 y 方向上的面电流 I_2 .

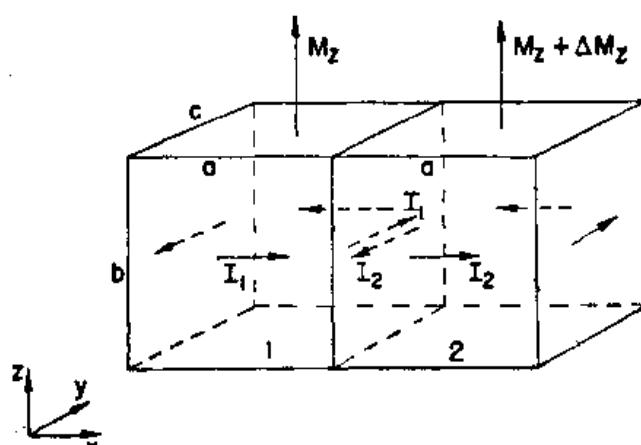


图 36-5 如果两相邻块中的磁化强度不一样, 便将有一表面电流存在于其间

沿正 y 向的总面电流等于两者的代数和*:

$$I = I_1 - I_2 = M_x b - (M_x + \Delta M_x) b = -\Delta M_x b.$$

可以将 ΔM_x 写成 M_x 在 x 方向上的微商乘以从第一块至第二块的位移, 那刚好是 a :

$$\Delta M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} a.$$

这样在两块间所流经的电流就是

$$I = -\frac{\partial M_x}{\partial x} ab.$$

要把电流 I 联系到平均的体积电流密度 j 上去, 就必须认识到, 这一电流 I 实际上乃布满于某一横截面上的。如果我们设想材料的整个体积是由这样的一些小块充填起来的, 则每一个(垂直于 x 轴的)这样的侧面便可以与每一小块联系起来**。于是我们便看到要与电流 I 联系的面积就恰好是那些表面中之一的面积 ab 。

我们得到这样一个结果:

$$j_y = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_x}{\partial x}.$$

至少已有了 M 之旋度的初步。

在 j_y 中, 还应有来自磁化强度 x 分量跟着 z 变化的另一项。对 j 的这一贡献, 起因于如图 36-6 所示的那种上下重迭的两块。利用刚才所作的论证, 你便可以证明这一个面将对 j_y 贡献一个 $\partial M_x / \partial z$ 之量。这些就是能够对电流 y 分量作出贡献的唯一一些面, 因而我们便有在 y 方向上的总电流密度

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_x}{\partial x}.$$

计算在一个立方体其余表面上的电流——或者在利

用了上述 z 方向完全是任意的这一事实——我们便能够断定, 该电流密度矢量确实是下式给出的:

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}.$$

因此, 若我们选择用每单位体积的平均磁矩 M 来描述物质中的磁性情况, 则便可发现, 那些环行的原子电流乃相当于由式(36.7)所给出的在物质里的一个平均电流密度。如果该材料也是一种电介质, 则除此之外还可能有一极化电流 $\mathbf{j}_{\text{极化}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。倘若该物质又是导体, 则还有可能出现一传导电流 $\mathbf{j}_{\text{传导}}$ 。我们可以将总电流写成

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (36.10)$$

§ 36-2 H 场

其次, 要来将式(36.10)中所写出的电流代入麦克斯韦方程组中, 得出:

$$\epsilon_0^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\mathbf{j}_{\text{传导}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

* 这里原文是“和”, 我们将其改为“代数和”, 似较确切些。——译者注

** 或者如果你乐意的话, 每一个面上的电流 I 应可以用那些小块块在两侧上分裂成 50×50 个。

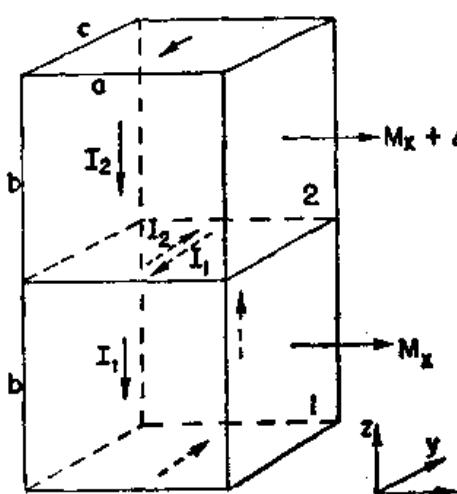


图 36-6 高低相重迭的两块也可贡献出 j_y 来

可以将 \mathbf{M} 项移至式的左边:

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times (\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}) = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}). \quad (36.11)$$

正如曾在第三十二章中提过的,许多人喜欢把 $(\mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0)$ 写成一个新的矢量场 \mathbf{D}/ϵ_0 . 同理, 把 $(\mathbf{B} - \mathbf{M}/\epsilon_0 c^2)$ 写成一个单独的矢量场也往往相当方便. 我们决定由下式定义一个新的矢量场 \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.12)$$

于是式(36.11)便变成:

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.13)$$

这看来似乎很简单,但一切复杂性都被隐藏在 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 这两个字母之中了.

现在必须给你一个警告. 许多采用米·千克·秒(mks)制的人们却曾选择用一个与这里的 \mathbf{H} 不同的定义. 将他们的场叫做 \mathbf{H}' (当然,他们也仍然叫它为 \mathbf{H} ,而不加上一撇的). 那是这样下定义的:

$$\mathbf{H}' = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (36.14)$$

(并且,他们还往往把 $\epsilon_0 c^2$ 写成另一个新的符号 $1/\mu_0$;那么他们所要记住的常数就又多了一个!)采用这一定义,式(36.13)甚至会表现出更为简单:

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.15)$$

但这一个关于 \mathbf{H}' 的定义其困难之处在于: 第一, 它与不采用米·千克·秒制的人们的定义不相符,而且第二, 它还使得 \mathbf{H}' 和 \mathbf{B} 有不同的单位. 我们认为, \mathbf{H} 具有与 \mathbf{B} 相同的单位——而不是象 \mathbf{H}' 那样具有 \mathbf{M} 的单位——那是较方便的. 但如果你将要去当一名工程师, 并且正在从事对变压器、电磁铁等的设计工作, 那你就得小心注意. 你将会发现许多书本是采用式(36.14)作为 \mathbf{H} 的定义,而不是采用我们的定义,即式(36.12)的,还有其他许多书——特别是有关磁性材料的手册——还把 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 按照我们所已做的那种方式联系起来. 你得小心估计他们用的是哪一种惯例.

一种判断的办法是根据他们所用的单位如何. 应该记住在米·千克·秒制中, \mathbf{B} ——从而我们的 \mathbf{H} ——都是以如下单位计算的: 每平方米一韦伯等于 10,000 高斯. 在米·千克·秒制中, 磁矩(电流乘以一面积)具有这么一个单位: 1 安培·米². 于是磁化强度 \mathbf{M} 就具有单位: 1 安培每米. 对于 \mathbf{H}' 来说, 其单位与 \mathbf{M} 的一样. 你可以看到, 这也与式(36.15)相符, 因为 ∇ 具有 1 被长度除的量纲. 那些从事电磁铁工作的人们, 也有把 \mathbf{H} (采用那 \mathbf{H}' 的定义)的单位叫作“1 安培匝每米”的习惯——想到绕组上的导线匝数. 可是一“匝”实际上是一个无量纲数目, 因而不至于打扰你们. 既然我们的 \mathbf{H} 乃等于 $\mathbf{H}'/\epsilon_0 c^2$, 所以如果你正在采用米·千克·秒制, 则 \mathbf{H} (以韦伯/米²计的)就等于 $4\pi \times 10^{-7}$ 乘以 \mathbf{H}' (以安培每米计的). 记住 \mathbf{H} (以高斯计) = 0.0126 \mathbf{H}' (以安培/米计), 也许会更方便.

还有另一桩更令人吃惊的事情. 许多采用我们关于 \mathbf{H} 的定义的人们还决意要对 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 的单位赋予不同名称! 尽管它们具有相同量纲, 但人们还是要叫 \mathbf{B} 的单位为高斯, 而 \mathbf{H} 的单位叫做奥斯特(当然,是为了纪念高斯和奥斯特两人). 因此, 在许多书本中你会找到一些用高斯表达的 \mathbf{B} 和用奥斯特表达的 \mathbf{H} 而作成的曲线. 它们实际上是同一种单位——即米·千克·秒制的单位的 10^{-4} 倍. 关于磁性单位的混乱情况我们已将其综合列于表 36-1 上.

請勿用於盈利之目的

表 36-1 磁量单位

$[B]$ = 韦伯/米² = 10^4 高斯
 $[H]$ = 韦伯/米² = 10^4 高斯或 10^4 奥斯忒
 $[M]$ = 安培/米
 $[H']$ = 安培/米

方便的换算式:

$$B(\text{高斯}) = 10^4 B(\text{韦伯}/\text{米}^2)$$

$$H(\text{高斯}) = H(\text{奥斯特}) = 0.0126 H'(\text{安培}/\text{米})$$

§ 36-3 磁化曲线

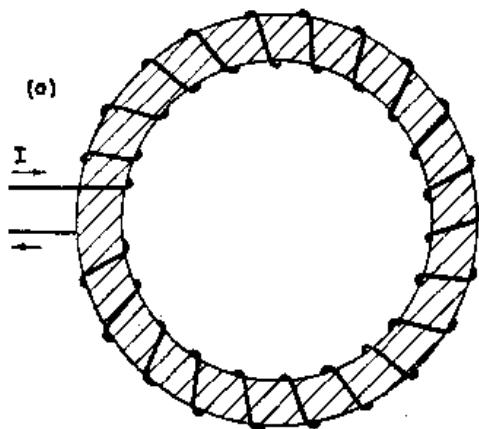
现在要来考察某些磁场为恒量、或其中场变化得足够缓慢以致同 $\mathbf{j}_{\text{自由}}$ 相比可以略去 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 的那些简单情况。于是场便将遵守这些方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (36.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{自由}} / \epsilon_0 c^2, \quad (36.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M} / \epsilon_0 c^2. \quad (36.18)$$

假设有一个由铜线圈包围着的铁环(炸面圈模样),如图 36-7(a)所示。导线中有电流 I



流动。这样,磁场将会怎么样呢?磁场将主要存在于铁环之内;那里, \mathbf{B} 线将是一些圆圈,如图 36-7(b)所示。由于 \mathbf{B} 通量是连续的,它的散度便是零,而式(36.16)被满足了。其次,通过环绕图 36-7(b)所示的那个闭合曲线 Γ 进行积分而把式(36.17)写成另一种形式。根据斯托克斯定理,我们有

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j}_{\text{自由}} \cdot n da, \quad (36.19)$$

其中对 \mathbf{j} 的积分是要遍及任一个由 Γ 围绕着的面积而进行的。这一面积被绕线的每一匝都穿过了一次。每一匝对积分都贡献了电流 I ,若总共有 N 匝,该积分便是 NI 。根据我们问题中的对称性, \mathbf{B} 环绕整个曲线 Γ 都处处相同;若还假定磁化强度——从而 \mathbf{H} 场——沿着 Γ 线也是恒定不变的,则式(36.19)便变成

$$Hl = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

其中 l 为该曲线 Γ 的长度。因此,

$$H = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{NI}{l}. \quad (36.20)$$

正是由于象在这样一种情况下 \mathbf{H} 与磁化电流成正比,因而 \mathbf{H} 才有时被称为 磁化场。

现在,我们所需要的一切就是一个将 \mathbf{H} 联系到

\mathbf{B} 上去的式子。但不存在任何这样的式子!当然,我们有个式子(36.18),不过那没有什么帮助,因为对于象铁那样的铁磁性材料并没有 \mathbf{M} 与 \mathbf{B} 之间的直接关系式。磁化强度 \mathbf{M} 取

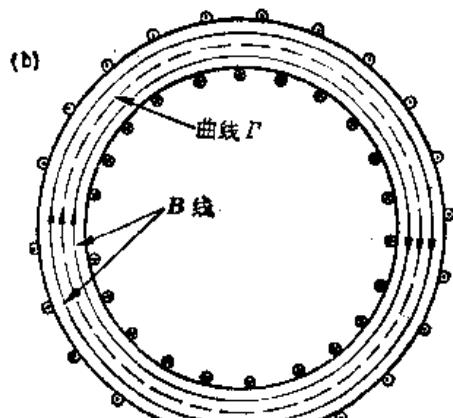


图 36-7 (a)一个绕上了绝缘导线的铁环; (b)铁环截面中的场线

决于铁的整个过去历史，而不仅取决于在该时刻上 B 之值。

然而，并不是一切都输掉了。在某些简单情况下我们还是能够获得解答的。如果从一块未曾起磁化的铁质开始——让我们说该块铁已在高温上退了火——那么在铁环的那种简单几何中，所有一切之铁就都有相同的磁性历史。这样，我们就能根据实验测量结果对 M ——从而对 B ——和 H 间的关系说出某些东西来。根据式(36.20)，铁环里的 H 场是由一常数乘以绕线中的电流 I 给出的。而 B 场则可通过对在线圈中（或在绕于图示的那个起磁线圈上面的另一个附加线圈中）的电动势遍及时间的积分而量度出来。电动势等于 B 通量之变率，因而对电动势的时间积分就等于 B 乘以该铁环的横截面积。

图 36-8 显示出用一个软铁环所观测到的 B 和 H 间的关系。当电流初接通时， B 沿曲线 a 随着 H 的增大而增大。要注意， B 和 H 的不同标度；起初，只要一相对小的 H 就能造成一个大的 B 。为什么一用了铁， B 就会比在空气中该得到的大那么多呢？这是因为有一个大的磁化强度 M ，那相当于在铁表面上有一个庞大表面电流—— B 场乃是来自这一电流与在绕线中的传导电流两者之和。为什么 M 会那么大，我们将在以后讨论。

在较高的 H 值上，磁化曲线变得平坦，我们就说那铁块已经饱和了。用图上的那种标尺，曲线看来已变成水平。实际上，它还稍为有点继续升高——对于大场来说， B 变成正比于 H ，并有一单位斜率。 M 不会再增加了。顺便提一下，我们应该指出，假如该环是由某一非磁性材料所制成的，则对于所有之场 M 均为零，而 B 便就等于 H 了。

我们所注意到的第一件事，是图 36-8 中曲线 a ——那就是被称为磁化曲线的——的高度非线性。可是下述情况比这还要糟：若达到了饱和之后，我们把线圈里的电流减少以便将 H 带回到零，则磁场 B 将沿曲线 b 下降。当 H 达到零时，仍会有些 B 遗留下来。即使没有磁化电流，在铁里仍有磁场——它已被永远磁化了。如果我们现在接通一负电流于线圈中，则 $B-H$ 曲线仍将继续沿着 b 走下去，一直到了铁在负向上饱和为止。此时若我们再把电流带回到零，则 B 将沿曲线 c 变化。如果将电流在大正值与大负值之间交变，则 $B-H$ 曲线将会沿着极接近于 b 与 c 的两条曲线来回奔跑。然而，若对 H 按照某一任意方式变化，则可获得更为复杂的曲线，那一般是处在 b 与 c 两曲线之间的某些地方。由场的反复摆动所形成的回线称为铁的磁滞回线。

于是我们见到，不能够写出一个象 $B=f(H)$ 的函数关系，因为在任一时刻 B 值不但取决于在该时刻之 H 值如何，而且还取决于它的整个过去历史。自然，磁化曲线和磁滞回线对于不同物质是不同的。这些曲线的形状密切依赖于该材料的化学成分，也依赖于在其制备时及在其后受物理处理时的细节。我们将在下一章中讨论对这些复杂性的某些物理解释。

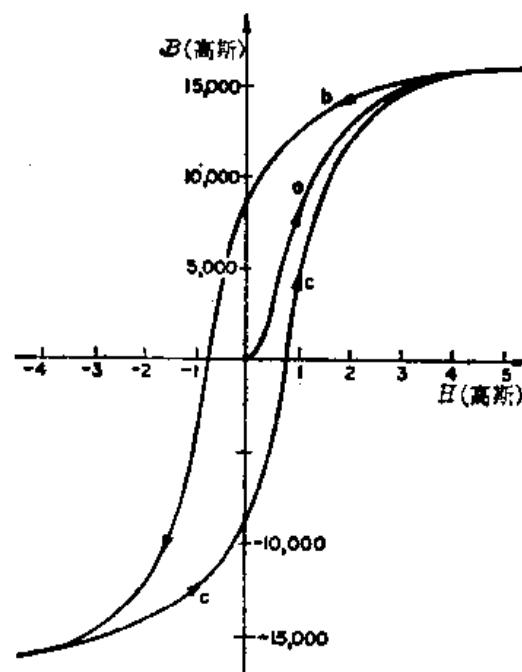


图 36-8 软铁的典型磁化曲线和磁滞回线

§ 36-4 铁芯电感

磁性材料的最重要应用，是在电路中——诸如在变压器、电动机等器件中用到。一个原因是，有了铁我们就能够控制磁场的走向，并且对于某一给定电流能够获得远为巨大之场。例如，那种典型“环式”电感就很象图 36-7 所示那样的物体。对于某一给定电感，在体积上就比一个等值的“空芯”电感要小得多，所用的铜也少得多。对于一给定电感，我们可以得到在绕组中小得多的电阻，从而该电感就更接近于“理想”的了——特别对于低频更是如此。要在定性上理解这样一个电感如何动作将十分容易。如果 I 是绕组中的电流，则在其内部产生之场 H 会正比于 I ——如式(36.20)所给出的那样。跨越线端的电压 V 与磁场 B 有关。略去绕线中的电阻，这电压 V 便与 $\partial B / \partial t$ 成正比。自感 L ，那是 V 对 $\partial I / \partial t$ 的比率（见 § 17-7 节），因此就牵涉到在铁中 B 与 H 的关系。由于 B 远大于 H ，我们便在电感中得到一个很大倍数。从物理上讲，发生的情况是：在线圈里的小电流，寻常仅会产生一个小磁场的，在铁里就会引起一些小“奴隶”磁体全都排列整齐因而产生了一个比起在绕组里的外电流来要大得非常多的“磁性”电流。似乎我们已有了比实际流经线圈中大得多的电流了。当我们把电流的方向掉转时，所有这些小磁体都翻转了过来——所有那些内在电流就都掉转了方向——从而得到一个比起没有铁时该会得到的要高得多的感生电动势。如果我们要算出自感，则可通过算出能量而做到——如在 § 17-8 节中所曾描述过的那样。从电流源释放出来的能量的时率为 IV ，电压 V 等于该铁芯的截面积 A ，乘以 N ，再乘以 dB/dt 。

根据式(36.20)， $I = (\epsilon_0 c^2 l / N) H$ 。因而我们有

$$\frac{dU}{dt} = VI = (\epsilon_0 c^2 l A) H \frac{dB}{dt}.$$

对时间积分，得到

$$U = (\epsilon_0 c^2 l A) \int H dB. \quad (36.21)$$

注意 lA 乃是该环的体积，所以我们就已证明了在一磁性材料中的能量密度 $u = U/\text{体积}$ ，是由下式给出的：

$$u = \epsilon_0 c^2 \int H dB. \quad (36.22)$$

这里涉及一种有趣的事态。当我们运用交变电流时，铁环中的磁性会循着一条磁滞回线被驱动。由于 B 并非 H 的一个单值函数，所以环绕一个完整循环的 $\int H dB$ 积分便不会等于零，而是等于该磁滞曲线所包围的面积。这样，策动源在一周期内就会付出某一定净能量——一个正比于磁滞回线内的面积的能量。而这一能量“损失”了。它是从电磁行为方面丧失了的，但却变成了铁里之热。这称为磁滞损失。要确保这种能量损失小，我们该希望磁滞回线尽可能地窄。减少回线面积的一种办法是将每周中所达到的最高场值降低。对于较小的极大场，我们可得到一条象图 36-9 所示的那种磁滞曲线。并且，具有十分狭窄的回线的特殊材料亦已设计出来。那种所谓变压器用铁——含有

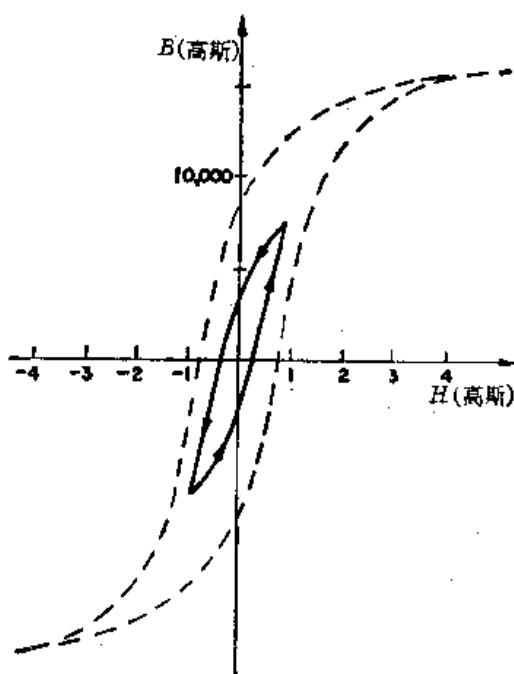


图 36-9 一条未达到饱和的磁滞回线

少量硅的铁合金——就是为具备这种特性而发展起来的。

当环绕一小磁滞回线而运用电感时， B 和 H 的关系可用一个线性方程来近似。人们经常写成

$$B = \mu H. \quad (36.23)$$

μ 这个常数并非我们以前曾用过的磁矩。它称为该铁质的磁导率。（有时称为“相对磁导率”。）寻常铁的磁导率其典型值为几千。有几种象“超透磁合金”的那类合金，磁导率可高达一兆。

如果我们把 $B = \mu H$ 这一种近似式应用到(36.21)中去，便可将一环形电感的能量写成

$$U = (\epsilon_0 c^2 l A) \mu \int H dH = (\epsilon_0 c^2 l A) \frac{\mu H^2}{2}. \quad (36.24)$$

因而能量密度近似地为

$$u \approx \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mu H^2.$$

现在可令式(36.24)的能量等于一电感的能量 $LI^2/2$ ，并解出 L ，从而获得

$$L = (\epsilon_0 c^2 l A) \mu \left(\frac{H}{I}\right)^2.$$

利用来自式(36.20)的 H/I ，就有

$$L = \frac{\mu N^2 A}{\epsilon_0 c^2 l}. \quad (36.25)$$

自感与 μ 成正比。如果你想要有一件诸如为声频放大器这一类东西用的电感，你就得尝试将其运用于 $B-H$ 关系尽可能线性的那种磁滞回线上。（你将会记起，我们曾在第一卷第五十章中谈论过关于非线性系统中谐波的产生。）对于诸如这样的目的，式(36.23)乃是一个有用的近似。反之，如果你希望产生谐波，则可以采用一种故意按高度非线性方式而运用的电感。此时你就得利用全部 $B-H$ 曲线，并由图解法或数值计算法分析出所发生的情况。

变压器通常是由安置两个线圈于同一个磁性材料的环——或芯——上而制成。（对于较大型的变压器，为了方便起见，铁芯是按矩形的尺寸比例制作的。）这样在“原”绕组中变化着的电流就会引起铁芯中磁场的变化，而那又会感生一电动势于“副”绕组中。由于穿过两绕组中每匝的磁通量都相同，该两绕组的电动势比值就会与其匝数的比值相同。加于原绕组上的电压在副绕组中就变成一个不同的电压。既然要产生那一必需的磁场变化就要求环绕铁芯有某一净电流，因而两绕组中的电流代数和就被确定，并且等于所必须的“磁化”电流。若从副绕组所取出的电流增加，则原绕组中的电流也应按比例增加——既有电压方面的，也有电流方面的相互“转变”。

§ 36-5 电磁铁

现在让我们来讨论一种稍为复杂些的实用情况。假设有一块属于相当标准形式的电磁铁示如图 36-10——由一块“C 形”轭铁，和一个多匝导线围绕在这块轭铁上制成。这样在缝隙中的磁场 B 将会怎么样呢？

如果缝隙厚度比起所有其他尺寸来都很小，作为第一次近似，可以认为 B 线将环绕整个回路，正如它们以前在铁环中所表现的那样。它们看来有点象图 36-11(a)，在缝隙处将稍微倾向于散开，但若缝隙很窄，这散开只是一微小效应。假设 B 通量在轭铁的任一截面上

都恒定不变，这就是一个相当好的近似。如果轭铁有一个均匀横截面积——而我们又忽略在缝隙处和在转弯处的边界效应——那么便可以讲，在环绕轭铁中之 B 处处都均匀。

并且，在缝隙中 B 将有同一数值。这是从式(36.16)得出来的结论。试想象那示如图 36-11(b)的闭合面 S ，它包括一个位于缝隙中的平面和另一个位于铁中的平面。从这个闭合面跑出来的总 B 通量应为零。如果把那缝隙中之场称为 B_1 ，而铁里之场称为 B_2 ，则我们有

$$B_1 A_1 - B_2 A_2 = 0.$$

既然 $A_1 = A_2$ (在我们的近似程度上)，便可推断 $B_1 = B_2$ 。

现在让我们来看看 H 。可以再利用式(36.19)，取图 36-11(b)中环绕曲线 Γ 的线积分。右边照旧是 NI ，即匝数乘电流。然而，现在在铁里和空气中的 H 将不相同。把在铁里的场称为 H_2 ，环绕轭铁的路线长度称为 l_2 ，则这一部分的曲线将对该积分贡献一个 $H_2 l_2$ 之量。把在缝隙里之场称为 H_1 ，缝隙厚度假定为 l_1 ，则可获得来自缝隙的贡献为 $H_1 l_1$ 。于是我们有

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.26)$$

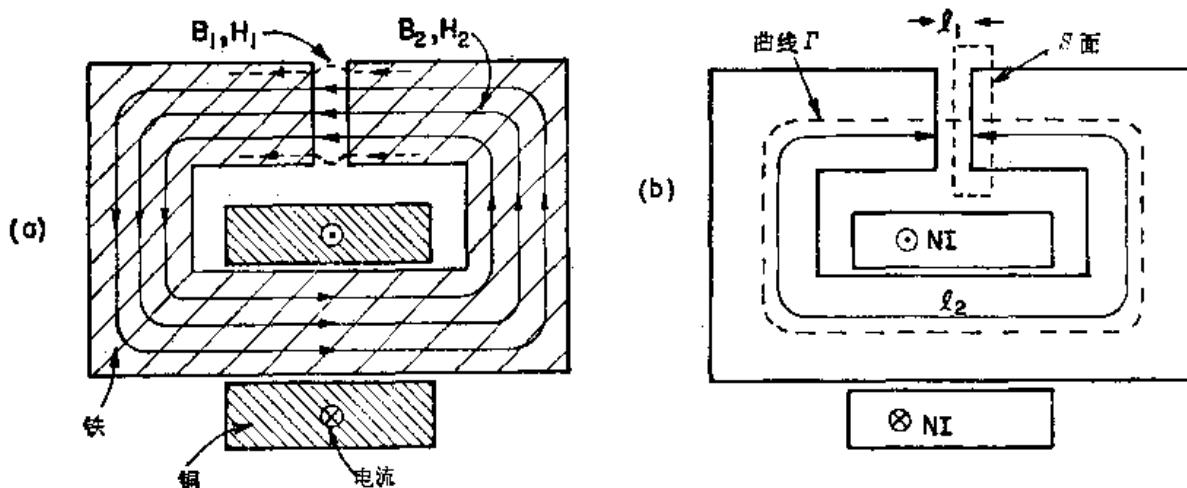


图 36-11 电磁铁的截面

现在还知道另一点情况：在空气缝隙里，磁化强度可以忽略，因而 $B_1 = H_1$ 。由于 $B_1 = B_2$ ，式(36.26)便变成

$$B_2 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.27)$$

我们仍然有两个未知数。要找出 B_2 和 H_2 来，还需要另一个关系式——即一个把在铁中的 B 联系到 H 上去的关系式。

如果可作 $B_2 = \mu H_2$ ，这么一个近似，则能用代数法解上述方程式。然而，让我们来考虑那种普遍情况，即其中铁的磁化曲线有如图 36-8 所示的。我们希望得到的就是这一函数关系与式(36.27)结合后的联立解。这个解可以这样找到，在磁化曲线的同一个图上划出式

(36.27)那样的曲线，如图 36-12 所示在两条曲线相交之处，便有了我们之解。

对于一给定电流 I ，函数(36.17)就是那条在图 36-12 上标明为 $I>0$ 的直线。这条线在 H 轴 ($B_2=0$) 上割于 $H_2=NI/\epsilon_0c^2l_2$ 处，而其斜率则为 $-l_2/l_1$ 。不同的电流只不过将该直线沿水平方向移动罢了。从图 36-12 我们见到，对于一给定电流可以有几个不同之解，这取决于你怎样到达那里。如果你刚好制成该块磁铁，并接通电流而达到了 I ，则 B_2 场（也即 B_1 场）就将有如点 a 所给出之值。如果你已经通入某一十分巨大电流而正在降低到 I 上去的，则场将由 b 点给出。或者，如果在磁铁中你刚好有一个高负值电流然后才把它升高至 I ，则场是在 c 点上了。因此，缝隙里之场将取决于你在过去曾干过什么事情。

当磁铁中的电流为零时，式(36.27)中 B_2 和 H_2 的关系示如图上标明为 $I=0$ 的那条直线。仍然会有各种不同之解。如果你已经先把铁弄饱和了，便可能有一个由 d 点所给出的存在于磁铁里的相当大的剩余磁场。你可以将线圈除掉，从而得到一个永磁体。由此可见，若要制成一块优质永磁体，你应该需要具有宽磁滞回线的材料。铝镍钴 V 那一类特种合金，就具有十分宽阔的回线。

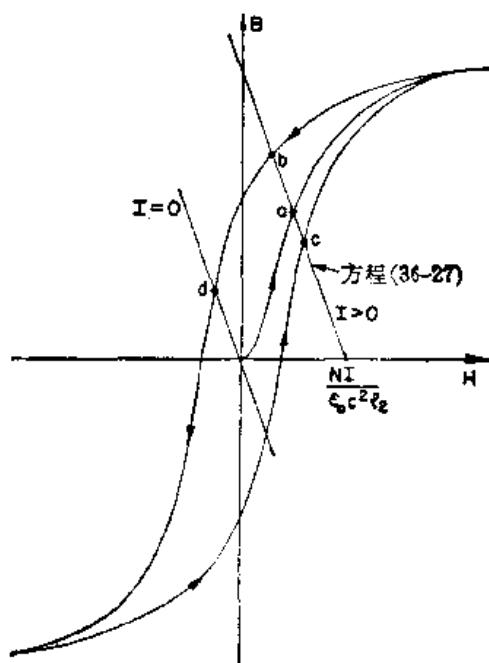


图 36-12 求解电磁铁中之场

§ 36-6 自发磁化

现在要转到这样一个问题上来，为什么铁磁性材料中一个小磁场就足以产生那么巨大的磁化强度。诸如铁和镍那种铁磁性材料的磁化强度乃来自原子内壳层中电子的磁矩。每一电子都具有一个等于 $q/2m$ 乘以其 g 因数，再乘以其角动量 \mathbf{J} 的磁矩 μ 。对于一个不具有净轨道运动的电子， $g=2$ ，而 \mathbf{J} 在任一方向——比如在 z 方向——上的分量为 $\pm\hbar/2$ ，因而沿 z 轴的磁矩分量就是

$$\mu_z = \frac{q\hbar}{2m} = 0.928 \times 10^{-23} \text{ 安培}\cdot\text{米}^2. \quad (36.28)$$

一个铁原子中，实际上存在两个会对铁磁性有所贡献的电子。为了使讨论比较简单，我们将论述有关镍方面的磁性，它是与铁相似的一种铁磁性材料，不过在其内壳层中却只有一个电子。（要把论证引伸到铁也挺容易。）

现在重要之点是，在一外加场 \mathbf{B} 存在的情况下，那些原子磁矩倾向于与场一起排列整齐，但受到热运动的冲撞，正如同我们对顺磁性材料所曾经描述过的那样。在上一章中，我们曾找出企图把原子磁体排列整齐之场与企图把它们打乱的热运动之间的平衡会产生出这么一个结果，即每单位体积内的平均磁矩将归结为

$$M = N\mu \tanh \frac{\mu B_0}{kT}. \quad (36.29)$$

所谓 B_0 ，我们意指作用于原子上之场； kT 为玻耳兹曼能量。在顺磁性理论中，我们曾仅仅用了 B 本身作为 B_0 ，忽略了由附近其他原子对任一给定原子所贡献的那一部分场。在铁磁性情况下，却有一种复杂性。我们不应当引用铁里的平均场作为作用于一个个别原子上的

$B_{\text{空穴}}$. 反之, 必须象在电介质情况下所曾做过的那样来做——我们必须找出作用于一单独原子上的局部磁场. 在精密计算中, 我们应当把由晶体点阵中所有其他原子对该有关原子所贡献之场都相加起来. 但正如我们对电介质所做过的那样, 将作这样一种近似, 即在一个原子上之场与我们在该材料里一个小球形空穴中应找到之场相同——假定在其附近的原子磁矩都不会受该空穴的存在所改变.

根据我们曾在第十一章中所作出的论证, 也许会认为应当写成

$$B_{\text{空穴}} = \mathbf{B} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \quad (\text{错的!}).$$

但这却不对了. 然而, 若我们把第十一章中的式子和本章中有关铁磁性的式子仔细比较一下, 就会发现那里的一些结果还是可以利用的. 让我们把对应的方程都并列在一起, 对不存在传导电流或传导电荷的那种区域里, 我们就有:

静电学	静铁磁性
$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = 0$

(36.30)

这两组方程可认为彼此相类似, 只要作出如下的纯数学性对应:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}, \quad \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{B}.$$

这与作出下列的比拟相同:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}/c^2. \quad (36.31)$$

换句话说, 若我们将铁磁性的方程写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (36.32)$$

那末它们看来就很象那些静电力学方程了.

这一纯代数的对应性, 过去曾经引起过某些混乱. 人们倾向于认为 \mathbf{H} 就是“该磁场”了. 可是, 正如我们已经见到的, 在物理上 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 才是基本场, 而 \mathbf{H} 只是一种导出来的概念. 所以尽管方程式彼此类似, 但其物理内容却不类似. 然而, 这不必阻止我们去运用相同方程就有相同解答的那一原理.

可以利用有关电介质中各种不同形状的空穴里之电场的以前结果——归纳在图 36-1 上的——来找出在各对应空穴中的 \mathbf{H} 场. 一旦知道了 \mathbf{H} , 便可以确定 \mathbf{B} . 例如(利用那些我们在第 1 节中总结出来的结果), 在一个平行于 \mathbf{M} 的针状空穴中, 其 \mathbf{H} 场与在材料里的 \mathbf{H} 相同,

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}}.$$

但既然在空穴中的 \mathbf{M} 等于零, 便应该有

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.33)$$

另一方面, 在一个垂直于 \mathbf{M} 的盘状空穴中, 我们曾经有过

$$\mathbf{E}_{\text{空穴}} = \mathbf{E}_{\text{电介质}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

这可翻译成

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}.$$

或者用 \mathbf{B} 来表达, 则是

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}}. \quad (36.34)$$

最后, 对于一个球状空穴, 通过与式(36.3)作对比, 我们便应有

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}} + \frac{\mathbf{M}}{3\epsilon_0 c^2}$$

或

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}} - \frac{2}{3} \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.35)$$

这一结果与我们以前对于 \mathbf{E} 所得的很不相同。

当然, 通过直接利用麦克斯韦方程组, 有可能更能按照物理的途径来获得这些结果。例如, 式(36.34)就是直接从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 推断得来的。(你可以用一个一半在材料里而另一半在材料外的高斯面。)同理, 你可通过利用沿一条在空穴里往上跑而在材料里又跑回来的曲线的线积分而得到式(36.33)。在物理上, 空穴中之场, 由于表面电流——那是由 $\nabla \times \mathbf{M}$ 提供的——而被削弱了。将留给你们去证明: 式(36.35)也可通过考虑在该球形空穴的边界上的表面电流效应而获得。

要由式(36.29)求得在平衡态上的磁化强度, 事实证明, 最方便的乃是去同 \mathbf{H} 打交道; 从而写出

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{H} + \lambda \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.36)$$

在那球形空穴的近似中, 我们该有 $\lambda = 1/3$, 但是, 正如你将会看到的, 我们以后要用到某一其他值, 因而就保留它作为一个可调整的参数。而且, 我们还将假定所有之场都在同一个方向上, 使得无需去担心那些矢量方向。假如现在将式(36.36)代入(36.29)中, 就会有一个把磁化强度 M 联系到磁化场 H 上去的方程:

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{H + \lambda M/\epsilon_0 c^2}{kT}\right).$$

然而, 这是一个不能够明显解出的方程, 因而将用图解法来做。

让我们把式(36.29)写成

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \tanh x \quad (36.37)$$

而将问题置于一种普遍形式之上, 其中 $M_{\text{饱和}}$ 为

磁化强度的饱和值, 即 $N\mu$, 而 x 则代表 $\mu B_a/kT$ 。 $M/M_{\text{饱和}}$ 对 x 的依存关系由图 36-13 中的曲线 a 所表示。我们也可以把 x 写成 M 的函数——利用关于 B_a 的式(36.36)——如下:

$$x = \frac{\mu B_a}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \left(\frac{\mu \lambda M_{\text{饱和}}}{\epsilon_0 c^2 kT}\right) \frac{M}{M_{\text{饱和}}}. \quad (36.38)$$

对于任一给定 H 值, 这是一个介乎 $M/M_{\text{饱和}}$ 与 x 间的直线关系。其 x 交点落在 $x = \mu H/kT$ 处, 而其斜率则为 $\epsilon_0 c^2 kT / \mu \lambda M_{\text{饱和}}$ 。对于某一特定 H , 我们该有一条象在图 36-13 上标明为 b 的直线。曲线 a 与直线 b 的交点向我们提供有关 $M/M_{\text{饱和}}$ 之解。这样我们就解决了问题。

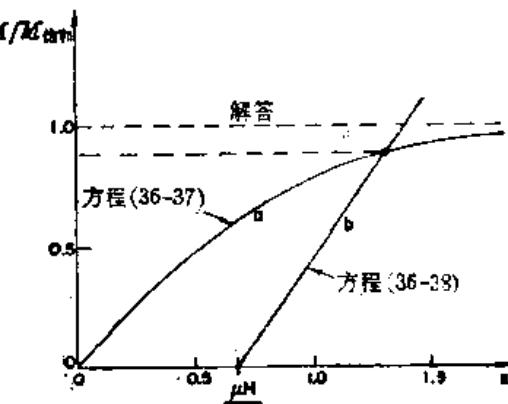


图 36-13 (36.37) 和 (36.38) 两方程的图解法

让我们看一看，各种不同情况下的解答将会怎样。从 $H=0$ 处开始，有两种可能情况，分别示如图 36-14 上的 b_1 和 b_2 两直线。你将从式(36.38)注意到，这直线的斜率与绝对温度 T 成正比。因此，在高温上就该有一条象 b_1 的线，其解答为 $M/M_{\text{饱和}}=0$ 。当磁化场 H 为零时，磁化强度也为零。但在低温上，我们会有一条象 b_2 之线，而对于 $M/M_{\text{饱和}}$ 就有两个解答——一个是 $M/M_{\text{饱和}}=0$ ，而另一个则是 $M/M_{\text{饱和}} \approx 1$ 。

事实证明，只有那个较高之解才是稳定的——正如你可以通过考虑围绕这些解的微小变化而看到的。

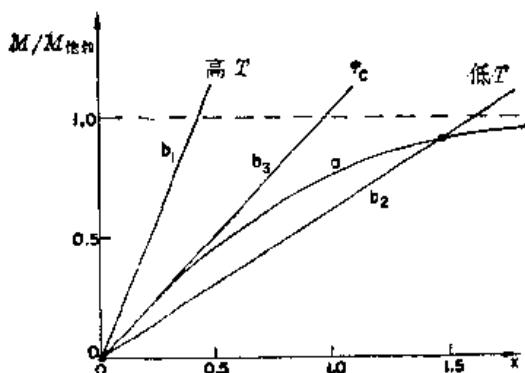


图 36-14 找出当 $H=0$ 时的磁化强度

那么，按照这些概念，磁性材料在足够低的温度下就应当自发地将其本身磁化。总之，当热运动足够小时，在原子磁体间的耦合作用就会引起它们全都平行地排列起来——我们已有了一种与第十一章中曾经讨论过的铁电性相仿的永磁材料。

若我们从高温出发而逐渐降低温度，则会有一个称为居里点 T_c 的临界温度，在那里铁磁性行为突然开始出现。这一温度对应于图 36-14 上的曲线 b_2 ，那是切于曲线 a 上的，因而具有等于 1 的斜率。居里温度是由下式给出的：

$$\frac{\epsilon_0 c^2 k T_c}{\mu \lambda M_{\text{饱和}}} = 1. \quad (36.39)$$

如果我们乐意的话，还可以利用 T_c 将式(36.38)写成简单些：

$$x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left(\frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right). \quad (36.40)$$

现在要来看看，对于小的磁化场 H 有什么情况会发生。我们可以从图 36-14 上看出，如果将那些直线稍为往右挪动一下情形将会怎么样。对于低温情况，交点将沿着曲线 a 的低斜率部分移出一点点，而 M 就将改变得相当少。然而，对于高温情况，交点却沿曲线 a 的陡峭部分往上升，而 M 便将改变得相当迅速。事实上，可以将曲线 a 的这一部分用一条具有单位斜率的直线来作近似，并写成：

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left(\frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right).$$

现在就可以解出 $M/M_{\text{饱和}}$ ：

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \frac{\mu H}{k(T - T_c)}. \quad (36.41)$$

这里有一条象过去曾对顺磁性所有过的定律。关于顺磁性，我们曾有

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \frac{\mu B}{kT}. \quad (36.42)$$

眼前一个差别在于，我们有一个用 H 表达的磁化强度，在 H 中含有各原子磁体互作用的某些效应；但主要的差别还在于，磁化强度是与 T 和 T_c 之间的差值、而不是仅仅与绝对温度 T 成反比的。略去相邻原子间的互作用就相当于选取 $\lambda=0$ ，这根据式(36.39)乃意味着取 $T_c=0$ 。于是结果便是第三十五章中我们所曾有过的。

可以把有关镍的理论图象与其实验数据作一对照。在实验上已经观测到，当温度升高

至超过 631 K 时镍的铁磁性行为便消失。我们可将此值与由式(36.39)所计算出来的 T_c 相比较。记住 $M_{\text{饱和}} = N\mu$, 便有

$$T_c = \lambda \frac{N\mu^2}{k\epsilon_0 c^2}.$$

根据镍的密度和原子量, 可以得到

$$N = 9.1 \times 10^{28} \text{ 米}^{-3}.$$

从式(36.28)取 μ , 并代入 $\lambda = \frac{1}{3}$, 便得

$$T_c = 0.24 \text{ K}.$$

竟有一个约等于 2600 倍数的差异! 我们关于铁磁性的理论竟完全失败了。

可以象外斯(Weiss)曾经做过的那样, 通过申明由于某种未知原因, λ 不是等于三分之一, 而是等于 $(2600) \times \frac{1}{3}$ ——或约 900 ——来试图“补缀”我们的理论。其结果使人们对诸如铁那样的其他铁磁性材料也获得一些相似之值。要看出这意味着什么, 让我们回到式(36.36)上去。我们看到, 一个巨大 λ 值意味着作用于原子上的局部场 B_a 表现出比起我们所想到的要大得多。事实上, 若写成 $H = B - M/\epsilon_0 c^2$, 便将有

$$B_a = B + \frac{(\lambda - 1)M}{\epsilon_0 c^2}.$$

按照我们原来的意思——令 $\lambda = \frac{1}{3}$ ——局部磁化强度 M 会把有效场 B_a 削弱了 $-\frac{2}{3}M/\epsilon_0$ 这么多。即使我们的球形空穴假定不见得十分好, 仍然预期会有某种削弱。与此相反, 要解释铁磁现象, 我们却必须想象场之磁化作用会把局部场增强某一巨大——比如一千或更多的——倍数。似乎没有任何合理办法, 在一个原子上造成这么巨大之场——甚至属于适当符号之场也都不可能! 显然, 我们关于铁磁性的“磁”性理论竟是一场可悲的失败。于是必须断定, 铁磁性应该与相邻原子里的自旋电子间的某种非磁性互作用有关。这一互作用必然会在一切相互靠近的自旋之间产生出沿一个方向整齐排列的强大趋势。以后我们将会明白这是与量子力学以及泡利(Pauli)不相容原理有关的。

最后, 还要来考察在低温——即 $T < T_c$ ——下所发生的情况。我们已经看到, 此时将有一种自发磁化——即使对 $H = 0$ ——由图 36-14 上 a 与 b_2 两曲线之交点所给出。如果对于各不同温度——通过变更该直线 b_2 的斜率——解出 M , 我们便能得到那条示如图 36-15 的曲线。这条曲线, 对于所有其中原子磁矩都起因于一个单独电子的那些铁磁性材料都应相同。对于其他材料的曲线, 只稍微有点不同。

在极限上, 当 T 趋于绝对零度时, M 变成 $M_{\text{饱和}}$ 。当温度升高时, 磁化强度会逐渐减少, 直至居里温度就降低至零。图 36-15 中的那些点是对镍进行观测而得到的实验值。它们与该理论曲线符合得相当好。尽管我们并不理解其基本机制, 但理论的一般情势却似乎是正确的。

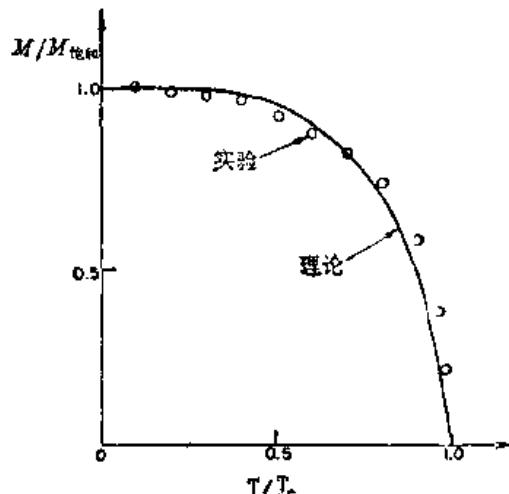


图 36-15 镍的自发磁化作为温度的函数

請勿用於盈利之目的

最后，在对铁磁性理解的尝试中，还有一个令人烦恼的偏差。我们已发现，在高于某一温度时该材料应该象一顺磁物质，其磁化强度 M 与 H (或 B)成正比，而在低于该温度之下则它应变成自发磁化。但那不是我们曾对铁测定其磁化曲线时所找到的。只有在我们对它“磁化了”之后，它才会变成永远磁化。按照刚才所讨论过的意思，它就应当本身磁化嘛！毛病出在哪里呢？噢！事实证明，如果你对一块足够小的铁或镍晶体进行观察，它的确是完全磁化了的！但在一大块铁中，就有许多沿不同方向而磁化了的区域或“畴”，使得在大规模上该平均磁化强度表现为零。然而，在每个小畴中，铁已有了被锁住的几乎等于 M_{sat} 的磁化强度 M 。这种畴结构的后果是，大块材料的宏观性质与刚才实际在进行处理的微观性质很不相同。我们将在下一次演讲中谈谈大块磁性材料的实际行为。

§ 37-1 已知的铁磁性

在本章中，我们将讨论铁磁性材料和其他一些奇特磁性材料的行为和特点。然而，在对磁性材料进行研究以前，我们将十分迅速地复习某些曾在上一章中学过的有关磁铁方面的普遍理论。

首先，试想象材料内部那些要对磁性负责的原子电流，然后再用一个体积电流密度 $j_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M}$ 来描述它。我们要强调，这并不能认为它就代表了那些实际电流。当磁化强度均匀时，电流也并非真的恰好互相抵消；也就是说，在甲原子中一个电子的旋转电流与在乙原子中另一个电子的旋转电流并不是这样互相交迭，以致其总和恰好等于零的。即使在一单独原子内部，磁性的分布仍然不是平滑的。比方，在一铁原子中，磁化强度被分布在一个多少是球形的壳层上，它既不很靠近于核，也不离核太远。这样，物质中的磁性在其细节上乃是一桩复杂的东西；它十分不规则。然而，我们现在不得不略去这种过细的复杂性，而从一个粗大的平均观点来讨论那些现象。于是在任一个比原子为大的有限面积上，当 $M=0$ 时，那在内部区域里的平均电流就确实是零。因此，在我们目前正在考虑的那种水平上，所谓单位体积的磁化强度以及 $j_{\text{磁化}}$ 等等，我们指的都是对于比一个单独原子所占空间要大的区域里的一种平均。

在上一章中，我们也曾发现铁磁材料具有如下的有趣性质：在超过某一温度时，它并不带有强磁性，而在这一温度之下才会变成磁性的。这一事实容易加以演示。一段镍线在室温上会受一块磁铁所吸引。然而，如果用一盏气灯把它加热至高出其居里点之上，则它便变成非磁性的，此时即使被带至磁铁近旁，也不会为磁铁所吸引。如果让它在磁铁近旁冷却，则当温度降至临界温度以下时便会突然再度为磁铁所吸引！

我们一般采用的有关铁磁性的理论，都假定电子的自旋对磁性要负责。电子具有等于一半的自旋并带着一个玻尔磁子的磁矩 $\mu = \mu_B = q_e \hbar / 2m$ 。这种电子自旋可朝“向上”也可朝“向下”。由于电子拥有一个负电荷，所以当其自旋“向上”时，就有一个负矩，而当其自旋“向下”时则有一个正矩。按照我们经常用的惯例，电子的磁矩 μ 与其自旋反向。我们已找到一个磁偶极子在一给定的外加磁场 \mathbf{B} 中其取向能量为 $-\mu \cdot \mathbf{B}$ ，可是一个旋转着的电子其能量也有赖于邻近的别的自旋的排列情况。在铁中，若一原子的磁矩是“向上”的，则与之相邻的另一原子就有使其本身磁矩也同样“向上”的强烈倾向。这就是促使铁、钴、镍等具有那么强大磁性的因素——磁矩全都情愿互相平行。我们必须讨论的第一个问题就是这个为什么。

在量子力学发展起来之后不久，人们就注意到有一个十分强大的表现力——不是一种磁力，也不是任何其他种类的真实力，而只是一种表现力——试图把相邻电子的自旋互相反向排列。这些力与化学键力密切相关。在量子力学中有一个原理——称为不相容原理——两电子不能处于完全相同的态上，即它们的位置和自旋取向不能处于完全相同的状况上。

例如, 若它们位于同一点上, 则唯一的可能就是它们的自旋相反。因此, 如果两原子之间有一个空间区域, 其间的电子们乐于互相靠拢(象在化学键中那样)而我们也想把另一个电子放在已经呆在那里的一个电子之上, 则唯一办法就是将这第二个电子的自旋指着与第一个电子的自旋相反的方向。要它们的自旋互成平行是违反规律的, 除非电子间互相离得很开。这样就产生了一个效应, 即一对互相靠拢的自旋平行的电子拥有比一对自旋相反的电子大得多的能量; 净效应就好象是有一个企图把自旋翻转过来之力。有时这种使自旋翻转过来之力称为交换力, 但那不过使它更加神秘而已——并非是一个很好的名称。只是由于不相容原理才使得电子具有一个促使其自旋相反的倾向。事实上, 这就是对为何几乎一切物质都缺乏磁性的解释! 在原子外部的自由电子的自旋具有一个由相反方向而互相抵消的强大趋势。问题是要来解释为什么象铁那样的材料却恰恰是我们所该预期的反面。

对所假定的排列效应我们已在能量公式中加上一个适当的项而加以概括, 即宣布如果那些附近的电子磁体具有一个平均磁化强度 M , 则这个电子的磁矩就会有一个要同这些附近原子的平均磁化强度方向相同的强大趋势。这样, 便可以将那两种可能的自旋取向如此写下*:

$$\begin{aligned} \text{自旋“向上”的能量} &= +\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right), \\ \text{自旋“向下”的能量} &= -\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right). \end{aligned} \quad (37.1)$$

当弄清楚量子力学会提供这么一个巨大的自旋取向力时——虽则显然带有错误符号——人们就曾经建议过, 铁磁性也许都起因于这同一种力, 基于铁的复杂性以及牵涉到的大量电子, 这互作用能的符号该表现恰恰相反。自从这一主意被想出来之后——约在 1927 年, 当量子力学开始被理解的时候——许多人就曾做出各种估计和半计算, 企图得到一个关于 λ 的理论预言。关于在铁里两电子自旋间的能量的最新计算——假定互作用是一种介乎两相邻原子里两个电子间的直接互作用——仍然会给出一个错误符号。目前对此的理解依旧假定情况的复杂性总得要负责, 并希望下一个根据更复杂情况而进行计算的人能获得正确答案!

目前人们相信, 在内壳层上那些造成磁性的电子中之一的向上自旋会倾向于使在外层上到处奔跑的传导电子具有反向自旋。人们也许期待此事该会发生, 因为那些传导电子已来到了与“磁性”电子相同的区域了。由于这些传导电子到处乱跑, 它们可带同其自旋已经翻转过来了的偏见来到另一个原子附近; 这就是说, 一个“磁性”电子企图强迫一个传导电子与之反向, 此后这传导电子又会促使次一个“磁性”电子与它本身反向。这双重互作用就相当于企图使那两个“磁性”电子相互平行排列的一种互作用。换句话说, 造成两自旋平行的趋势是由于一种媒介物作用的结果, 这媒介物在某种程度上有与两者都相反的倾向。这一机制并不要求传导电子完全“被翻转”过来。它们尽可以只有稍为把自旋指向下的偏见, 刚刚足够促使那些“磁性”电子指向另一方向就行。这正是那些曾经计算过这类东西的人们目前所认为应对铁磁性负责的一种机制。但我们仍必须强调, 直到如今还没有人能够只由于知道了该材料是属于周期表上的第 26 号而便算出 λ 的大小来。总之, 我们对它还未曾充分了解。

* 为了要同上一章中的工作一致, 我们用 $H = B - M/\epsilon_0 c^2$, 而不是用 B 来写出这些方程。你也许喜欢把它写成 $H = \pm \mu B_a = \pm \mu (B + \lambda' M/\epsilon_0 c^2)$, 其中 $\lambda' = \lambda - 1$ 。但那是同一码事。

现在让我们继续来谈谈这一理论，待以后再回来讨论某一项涉及我们对这一问题的提法上的错误。如果某一电子的磁矩是“向上”的，能量便会来自外加磁场，也会来自使各自旋都互相平行的那种倾向这两方面。由于当自旋互相平行时能量较低，这效应有时被认为是起因于一种“有效内场”。但要记住，这并非由于一真实磁力；而是一个更为复杂的互作用。不管怎样，我们取式(37.1)作为对一个“磁性”电子的两个自旋态的能量公式。在温度 T 上，这两个态的相对几率正比于 $e^{-\frac{\text{能量}}{kT}}$ ，那我们可写成 $e^{\pm x}$ ，其中 $x = \mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)/kT$ 。然后，若我们计算该磁矩的平均值，则会(如同上一章中那样)找出

$$M = N\mu \tanh x, \quad (37.2)$$

现在，我们想要来算出该材料的内能。我们注意到一个电子的能量恰与磁矩成正比，因而对于平均能量的计算就与对于平均磁矩的计算相同——除了在式(37.2)中，我们该用 $-\mu B$ 也即 $-\mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)$ 来代替 μ 之外。于是平均能量就是

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -N\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x.$$

原来这并非十分正确。 $\lambda M/\epsilon_0 c^2$ 这一项代表所有各可能原子对之间的互作用，但仍须记住，每一对只能算进一次。(当我们考虑一个电子在其他电子之场中的能量而后又考虑第二个电子在其他电子之场中的能量时，我们就已将第一个能量中的一部分多算了一次。)这样，我们就应当对该互作用能项除以 2，因而有关能量的公式变成

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -N\mu \left(H + \frac{\lambda M}{2\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x. \quad (37.3)$$

在上一章中，我们曾经发现过一件有趣事情——在低于某一温度之下，该材料找到了一个即使没有外加磁化场其磁矩也并不是零的方程组之解。当我们在式(37.2)中令 $H=0$ 时，就曾经找出过

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \tanh \left(\frac{T_c}{T} - \frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right), \quad (37.4)$$

式中 $M_{\text{饱和}} = N\mu$ ，而 $T_c = \mu\lambda M_{\text{饱和}}/k\epsilon_0 c^2$ 。当(按图解法或其他方法)解这一方程时，就发现比率 $M/M_{\text{饱和}}$ 作为 T/T_c 的函数是一条象图 37-1 中标明为“量子理论”的那种曲线。而那条标明为“钴、镍”的虚曲线则表示这些元素晶体的实验结果。理论和实验符合得相当好。在这图上也显示出经典理论的结果，其计算是在假定原子磁体可在空间中拥有一切可能的取向而进行的。你可以看出，这一假定提供了一个甚至不会与实验事实接近的预言。

即使是量子理论，在高温和低温两区域中，也都与所观测到的行为有所歧离。发生歧离的原因是，在该理论中我们曾经作出过一个草率近似：即假定一个原子的能量取决于它的附近原子的平均磁化强度。换句话说，对每个在一给定原子附近的“向上”磁矩，就有由于那种量子力学排列效应而引起的能量贡献。但究竟有若干个指“向上”的磁矩呢？在平均上，

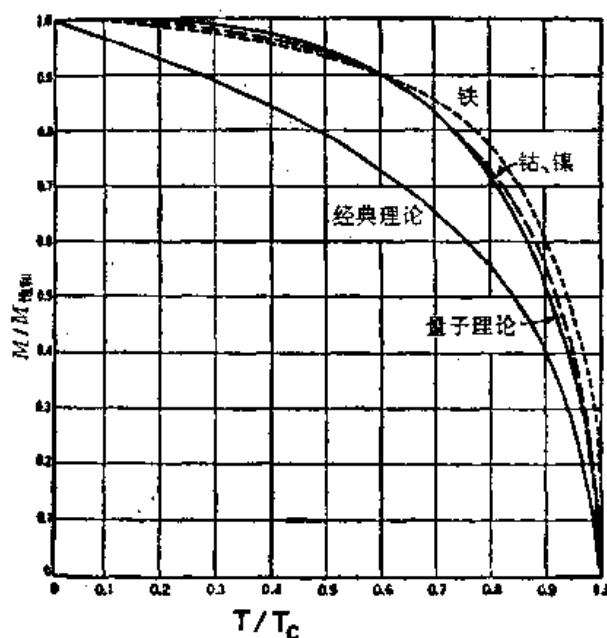


图 37-1 铁磁性晶体的自发磁化强度($H=0$)作为温度的函数[摘自 Encyclopaedia Britannica]

这是由磁化强度 M 所量度出来的——不过只是在平均上。某处一个特定原子也许会发现所有它的邻居都是指“向上”的。这样，它的能量便会大于平均值。另一个原子磁矩可能发现其邻居有些“向上”，而有些“向下”，或许平均为零，因而就该没有来自这一项的能量，如此等等。我们所应当做的是，采用一种较复杂的平均法，因为在不同位置上的原子总会有不同环境，因而对于不同原子就有不同数目的向上和向下的邻居。不仅仅考虑一个受到平均影响的原子，而是应该考虑每一个处于实际情况下的原子，算出它的能量，并找出平均能量。但我们如何来找出在其附近的原子中，究竟有多少个“向上”和多少个“向下”呢？当然，这就恰恰是我们企图要算出的东西——“向上”的和“向下”的数目——因而就有一个十分复杂的有关关联方面的相互联系问题，即是一个从未得到解决的问题。这是一个错综复杂而又令人振奋的问题，已存在了许多年，而某些鼎鼎有名的物理学界人士对此也曾写过一些论文，但即使是他们也仍未能完全解决该问题。

结果变成，在低温时，当几乎一切原子磁矩都指“向上”而只有少数几个指“向下”时，问题易于解决；而在比居里温度还要高得多的高温上，当它们几乎全都混乱时，问题又再度容易解决。往往还不难算出某种简单而又理想的情况下微小的歧离，因而对于为什么会在低温时与该简单理论有所歧离这方面就已有相当的理解。在物理上也已理解到基于统计原因

磁化强度应该在高温上有所差异。但对于在接近居里点的准确行为就从未完全算出来。那是一个有朝一日会给做出来的有趣问题，如果你希望有一个从未得到解决的问题的话。

§ 37-2 热力学性质

在上一章中，我们已奠定了为计算铁磁性材料的热力学性质所必需的基础。这些性质自然与包括各不同自旋的互作用在内而由式(37.3)所给出的那种晶体内能有关。对于比居里点为低的自发磁化能量，可以令式(37.3)中的 $H=0$ ，因而——注意到 $\tanh x = M/M_{\text{饱和}}$ ——找出了一个正比于 M^2 的平均能量：

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -\frac{N\mu\lambda M^2}{2\epsilon_0 c^2 M_{\text{饱和}}} \quad (37.5)$$

如果现在把来自磁性方面的能量作为温度函数而作图，我们便会得到一条等于图 37-1 上那条曲线的负平方的曲线，示如图 37-2(a)。要是此时测量这样一种材料的比热，我们便会得到一条作为图 37-2(a)那条曲线的微商的曲线。这示如图 37-2(b)。它随温度增加而缓慢地上升，但在 $T=T_c$ 上就突然降低至零。这一急剧下降起因于磁化能量曲线的斜率刚

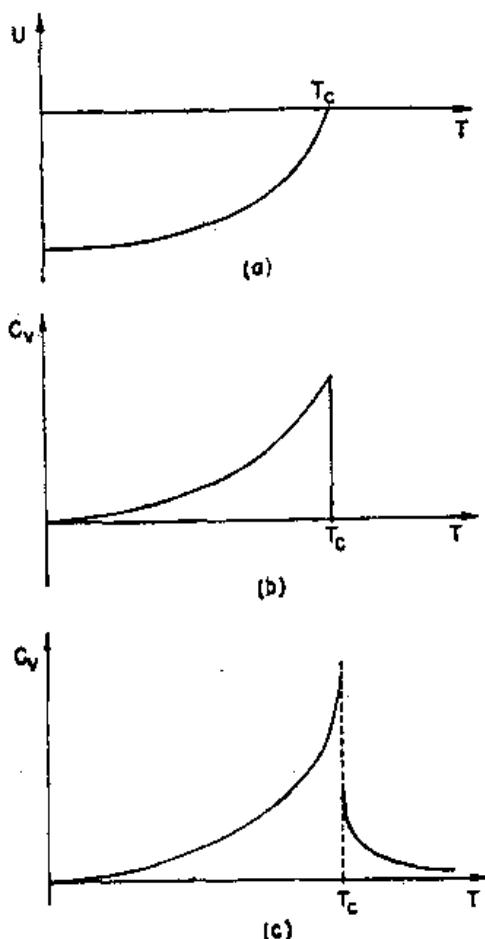


图 37-2 一块铁磁性晶体的单位体积能量和比热

好在居里点上出现巨大改变。因此，完全不需要任何磁性测量，只凭观测这一热力学性质，我们本来就可以发现有某一事态正在铁或镍中进行着。然而，实验和经过了改进的理论（包

括涨落)却都提示这一简单曲线是错误的,而真正的情况确实更加复杂。该曲线在那尖峰处升得更高,而下降至零时则有点缓慢。即使温度已高至足以使在平均上打乱了那些自旋,但仍然会有局部区域在那里存在着某些磁化量,而在这些区域中各自旋之间便仍有一小量的额外互作用能——这只有在温度进一步升高而事态变得更加混乱时才能缓慢地消失。因此,实际的曲线看来就象图37-2(c)那样。今天理论物理学的一个挑战就是要找出在居里转变点附近关于比热特性的一个准确的理论性描述——一个还未得到解答的盘根错节问题。自然,这一问题与在同一区域里的磁化曲线形状会十分密切相关。

现在要来描述某些越出热力学范围以外的实验,这些实验证明,我们对磁性的解释有某些是正确的。当材料在低温被磁化至饱和程度时, M 很接近于 M_{sat} ——几乎所有自旋,以及它们的磁矩,都互相平行排列了。这可以通过下述实验来加以核实。假设将一条形磁铁用一根细丝悬挂起来,然后对它包围上一个线圈,使得不须接触到磁铁或施加任何转矩于其上便能使磁场倒转过来。这是一个十分难做的实验,因为磁力那么巨大以致任何不规则性、任何一种偏向、或在铁里任何一种欠完美性都会产生一些偶发转矩。然而,该实验已在减除这种偶发转矩的小心谨慎条件下做出来了。利用包围在磁铁上的那个线圈的磁场,我们一下子就将所有的原子磁体全都翻转过来了。当我们这样做时,也将所有自旋的角动量都由“向上”变成了“向下”(见图27-3)。如果在这全部自旋都翻转过来时角动量守恒,则铁条的其余部分就必须在角动量上有相反的改变。整块磁体将开始旋转。足够确实,当我们做这一实验时,就曾发现磁铁的微小转动。可以测出给予整条磁铁的总角动量,而这不过是 N 乘以 \hbar ,后者就是每一个自旋在角动量上的变化。由这样量得的角动量与磁矩的比率同我们计算出来之值相差约在百分之十以内。实际上,我们的计算曾假定那些原子磁体纯粹起因于电子自旋,但在大多数材料中除了自旋之外,还有某些轨道运动。在晶格里,这种轨道运动不是完全自由的,因而对于磁性的贡献就不会超出百分之几很多。事实上,人们通过取 $M_{\text{sat}} = N\mu$ 并利用铁的密度为7.9和自旋电子的磁矩 μ 所得到的饱和磁场约为20,000高斯。但根据实验,它实际上是在21,500高斯左右。这就是由于略去了轨道磁矩方面的贡献、不把它包括在所作的分析之内、因而犯的错误的典型大小——百分之五至十。于是,上述回转磁测量中的小歧离就可容易得到理解。

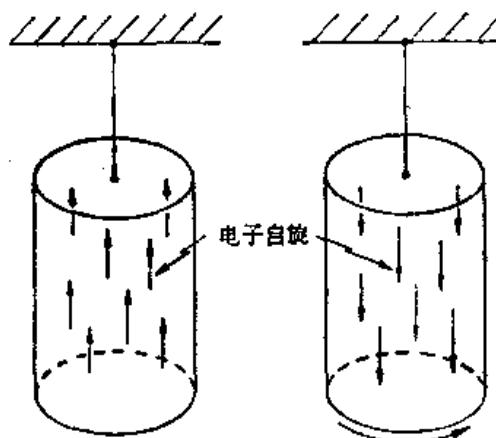


图37-3 当铁条中的磁化方向倒转过来时,铁条会得到某一角速度

§ 37-3 磁滞回线

从理论分析上我们已断定,在某一定温度之下铁磁性材料应当自发地磁化,以使一切磁性都指向同一方向。可是我们知道,这对于一块寻常尚未经磁化的铁来说是不正确的。为什么并非所有之铁都被磁化了呢?我们可以借助于图37-4而加以解释。假定铁全部是一大块如图37-4(a)所示的那种形状的单晶,并都已在一个方向上自发地磁化了。那么便有相当多的体外磁场,即拥有大量能量。我们能够减少这一种场能量,如果布置得使铁块一边被“向上”磁化,而另一边则被“向下”磁化、如图37-4(b)那种情况的话。当然,这时在铁外

之场就会伸展至较小体积，因而使那里有较少能量。

啊，还须等一等！在两个区域的边界层上，我们已有了向上自旋的电子紧靠着向下自旋的电子。

但铁磁性只在这样的材料中才会表现出来，即其中电子自旋若互相平行而非互相反向，则能量会削减。因此，我们在沿图 37-4(b)的那条虚线上就已加进了一些额外能量；这种能量有时称为壁能。一个仅有单一磁化方向的区域叫做磁畴，在两磁畴间的界面——“壁”——上，会存在两边按不同方向自旋着的原子，因而拥有每单位面积的壁能。我们已把它描写成好象是有两个相邻原子，以恰恰相反的方向在自旋，但事实却证明，大自然会把事情调整得使转变较为渐近些。然而眼下我们无需关心这样的细节。

现在的问题是：在这个时刻去造成一个壁才算有利或有弊呢？答案是，这取决于那些磁畴的大小。假设把某一铁块的大小线度按比例增加，以致整个东西增大一倍，则在体外充满某一给定磁场强度的空间就会

增大八倍，从而正比于体积的磁场能量也会增大八倍。可是在两邻畴间的界面面积，那将会给出壁能的，却只有四倍之大。因此，如果铁块足够大，那么要把它分裂成多个磁畴便属有利可图。这就是为什么只有那些十分微小的晶体才能仅仅拥有单一磁畴的缘故。任何大的东西——比起百分之一毫米还要大的——将至少有一个磁畴壁；而任一寻常“厘米大小”的东西则将分裂成如图所示的许许多多个磁畴。分裂成磁畴的这种过程将继续下去，一直到再添置一面壁所需的能量与晶体外面磁场能量的降低同样大时为止。

实际上大自然还发现了另一种降低能量的途径。完全不须有任何磁场跑出外面，只要有一小块三角形区域被侧向磁化了，如图 37-4(d)所示的那样就行*。这时既有了图 37-4(d)的那种安排，我们就不会见到有体外磁场存在，只不过增加了一点点畴壁而已。

然而，那又会引起一个新的问题。事实证明，当一单独的铁晶体被磁化时，在该磁化方向上长度给改变了。因而一个“理想”立方体当其磁化强度比如是“向上”时，就不再是一个完美的立方体了。该“竖向”尺寸将不同于“水平”尺寸。这一种效应叫做磁致伸缩。由于这种几何形态上的变化，图 37-4(d)中那些小块三角体便不再，比如说，“配合”到那些可利用的空间里去——该块晶体在一方已变得太长，而另一方则太短了。当然，实际上还是配合得上的，只不过是硬挤进去罢了；而这就会牵涉到某些机械胁强。因此，这种安排也引进了一种附加能量。正是所有这些不同能量的互相平衡，才决定在一块未经磁化的铁中磁畴如何最后按照那种复杂方式来安排它们自己的。

现在，当加上一个外加磁场时又将有什么情况发生呢？为了挑选一个简单场合，试考虑磁畴有如图 37-4(d)所示的那一块晶体。如果我们加上一个方向指向上的外磁场，该晶体将以怎样一种方式进行磁化的呢？首先，那一中间畴壁可以侧向（向右）移动。之所以这样

* 你可能会觉得奇怪，那些或者“向上”或者“向下”的自旋怎么又能够“侧向”着了呢！这问题提得好。但我们此刻不必去担心它。我们将采取经典观点，认为原子磁体都是一些经典的磁偶极子，可以在侧向上受到磁化。量子力学要求相当老练的技巧，才能理解物体如何能够同时既受了“上与下”的量子化而又受了“左与右”的量子化。

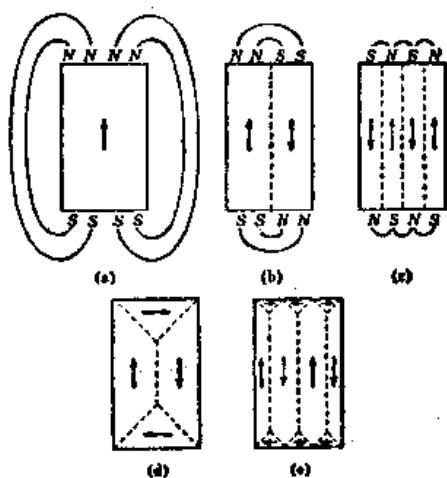


图 37-4 铁的一块单晶中磁畴的形成 [转载自 C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., 1956]

移动，其目的在于使“向上”区域变成大于“向下”区域。有更多的基本磁体与场排列整齐了，而这就提供一个较低能量。因此，一块铁在弱场中——即在磁化过程中的起初阶段——那些畴壁会开始移动并挤进磁化与场反向的区域中。当场继续增强时，整块晶体便逐渐转变成一个单独大畴，那是外场帮助排列起来的。在一强场中晶体“喜欢”全都排列成一个方向，只是为了在外磁场中它的能量会被降低——这时有关的就不再仅仅是晶体本身的外场。

如果几何形态不那么简单又会怎么样呢？若晶体的轴与其自发磁化方向相合，但我们将所加磁场却在某一其他方向上——比如说在 45° 上——那又会成个什么样子？我们也许想到，各磁畴会将其本身改造成使得磁化都与外场平行；然后和以前一样，它们就都可长成一个畴了。但这对于铁来说是不容易办到的，因为所需以磁化一块晶体的能量依赖于相对于该晶轴的磁化方向。要把铁在平行于其晶轴的方向上磁化是相对容易的，但要在某一其他方向——比如相对于其中一轴是 45° 角的方向——上把它磁化就需要较多能量。因此，如果我们就在这样一个方向上加一磁场，则首先发生的是，那些指着各从优方向中之一而又接

近于该外加磁场方向的磁畴将会长大，直到磁化全都沿着这些方向中之一为止。此后加上更强大之场，磁化强度只会逐渐被扭转至与场平行的方向，如图37-5所粗略表示的那样。

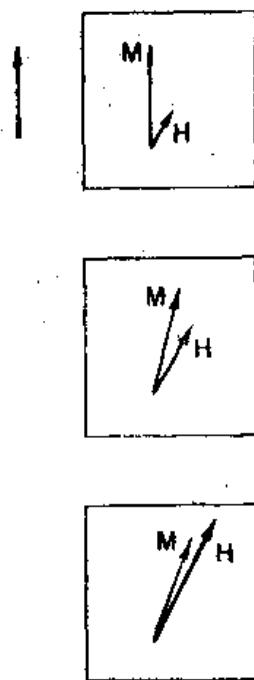


图37-5 一个与晶轴作某角度的磁化场 H 将逐渐改变磁化强度的方向，而不会改变其大小

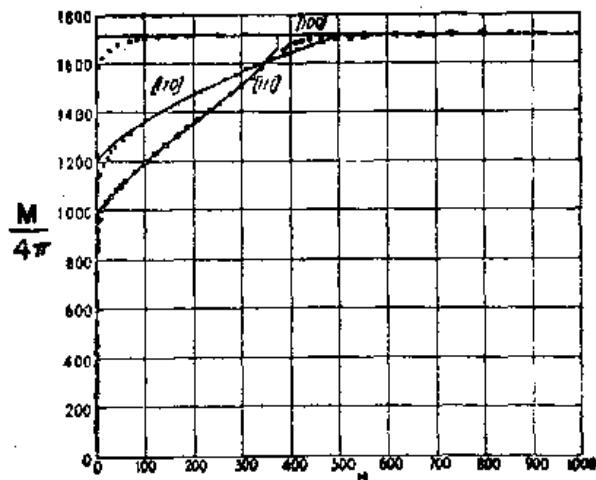


图37-6 对各不同的 H 向(相对于晶轴而言)，与 H 平行的 M 分量 [转载自 F. Bitter, Introduction to Ferromagnetism, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1937]

在图37-6上画出了铁单晶的磁化曲线的一些观测结果。为了便于进行理解，我们必须首先解释一些用来描述晶体中有关方向的符号的东西。一块晶体可以按照多种不同方式来撕开成在其上面会布满许多许多原子的一些平面。任何曾驱车经过果树园或葡萄园的人们都会知道这么一件事——对之了望会使人消魂荡魄。如果你朝一个方向望去，会见到若干行树——若朝另一方向望，又会见到另外若干行树，如此等等。同样地，一块晶体也有一些收容许多原子在其上的明确的平面族，而这些平面都具有这么一个重要特点（为较易于理解起见只考虑立方晶体）：即如果观察这些面与那三条坐标轴相交于什么地方——我们便发现这些交点与原点间的距离的倒数会形成一些简单整数比率。就取这三个整数作为该组平面的定义。例如图37-7(a)中我们把一个平行于 yz 面的平面描绘出来了。这叫做[100]晶面；

它与 y 轴和 z 轴的交点的倒数都是零。对于(立方晶体中的)这种面的垂直方向也给予这同

一组数目。在立方晶体中要理解这个意思是容易的,因为此时 [100] 这些指数意味着在 x 方向具有单位分量,而在 y 和 z 方向则都没有任何分量的一个矢量。 $[110]$ 这一方位是同 x 轴和 y 轴均作成 45° 角的那一个方向,示如图 37-7(b);而方位 [111] 则是沿立方体对角线的方向,如图 37-7(c) 所示。

现在回到图 37-6,我们看到了铁的单晶在各个方向上的磁化曲线。首先应当注意,对于十分微小之场——弱至在标度上极难见到——磁化强度非常迅速地达到了一个十分大值。如果这个场是在 [100] 方向上——即是沿那些漂亮而容易磁化的方向之一——则该曲线会上升至一个高值,稍为弯曲一点,然后就饱和了。所发生的情况是,那些已经呆在那里的磁畴非常易于移动。只要有一小小之场,便足以召致畴壁移动而吃掉所有那些“方向错误”的磁畴。单晶铁比起寻常的多晶铁,其导磁本领要大得多。一块理想晶体非常易于磁化。为什么毕竟还要弯一下呢?为什么它不会立刻就达到饱和呢?我们不十分肯定。你或许会有一天要学习到的。但我们的理解到,在高场上该曲线很平坦。当整块都已是一个单畴时,额外磁场就不能造成任何更多的磁化——它已经是在 $M_{\text{饱和}}$ 上,其中一切电子都已经排列整齐了。

现在,若试图在 [110] 方向上——那是与晶轴作成 45° 角的——也做这一事情,那会发生什么呢?我们试开动一个小小的场,而当那些磁畴长大时磁化就会跳跃上去。然后,当把场再增大时,我们便发现需要有一个相当大的场才能达到饱和,因为此刻磁化已偏离了那个“容易”方向。如果这一解释正确,则该 [110] 曲线外推回至竖轴上的交点应为饱和值的 $1/\sqrt{2}$ 倍。事实上,已经知道这的确非常接近于 $1/\sqrt{2}$ 。同理,在

[111] 方向上——那是沿立方体的对角线——我们发现,正如期待的那样,曲线会外推回至约 $1/\sqrt{3}$ 倍于饱和值。

图 37-8 显示有关其他两种材料镍和钴的对应情况。镍与铁不同,在镍中,事实证明 [111] 方向才是易磁化方向。钴具有六角晶形,而人们对于这一种情况就曾笨拙地补缀了该命名系统。他们希望有三个用于六角柱的底面上的指数和另一个与之垂直的指数,因此一共用了四个指数。 $[0001]$ 这个方向指沿六角轴的方向,而 $[1010]$ 则是垂直于这一条轴的。我们看到不同种类金属的晶体其行为各不相同。

现在我们应该讨论诸如一块寻常铁的多晶材料。在这种材料中,有许许多多小晶体其晶轴各指着任意方向。这些是与磁畴不同的。应该记住,几个磁畴可能属于同一单晶,但在

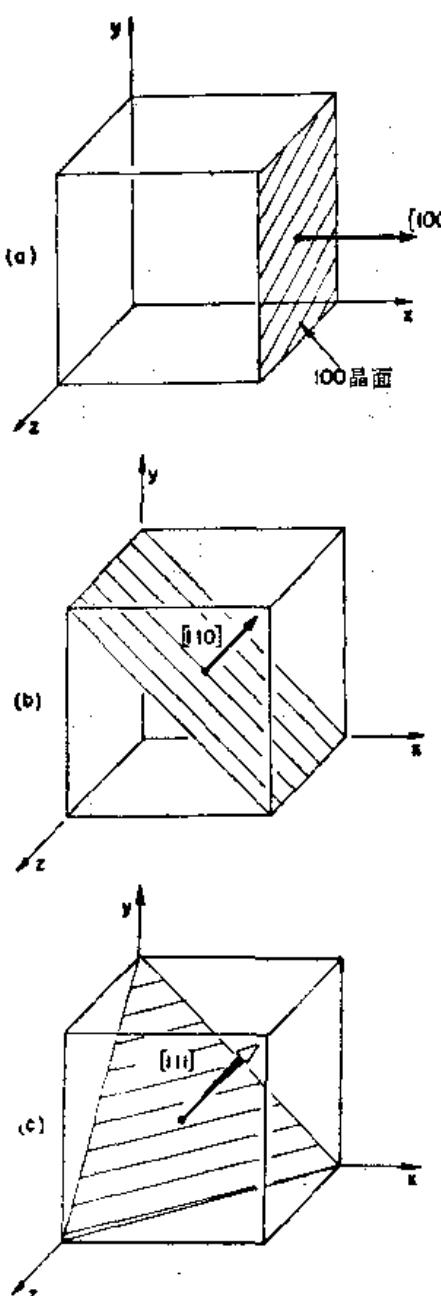


图 37-7 标明各晶面的方法

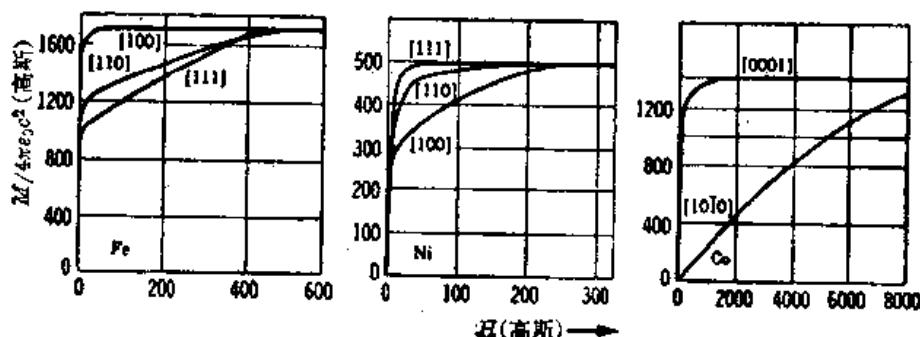


图 37-8 铁、镍和钴单晶的磁化曲线[转载自 C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., 1956]

一块铁中就有许多其轴取不同方向的不同晶体，如图 37-9 所示。在这些晶体的每一个中，一般也将有几个磁畴，当对一多晶材料加上一个小磁场时，所发生的情况是：畴壁开始移动，而那些具有易磁化的有利方向的畴体积将会变得大些。这一种成长过程是可逆的，只要场保持极小——若我们把场除去，磁化强度就会返回到零。磁化曲线的这一部分在图 37-10 中标明为 *a*。

对于较大之场——在所示磁化曲线的 *b* 区中——情况变得较复杂。在材料的每一小晶体中，会有应变和位错存在；同时也会有杂质、尘埃和欠完美性。而除了极小的场之外，在一切场上当畴壁移动时就会被这些东西所阻挡住。在畴壁与一位错间、与一晶粒间界间、或与一杂质原子间，总会有一种互作用能。因而当畴壁到达其中之一时，它就会被阻挡住。这是在某一磁场上

被阻住的，但若此时将场逐渐增大，则畴壁会突然猛扑过去。因此畴壁的运动并不象理想晶体中那样顺利——它不时被挂住，然后又作跳跃式的运动。要是我们从微观尺度来注视这一磁化过程，便会见到有些象在图 37-10 中那个插入圆圈内的情况。

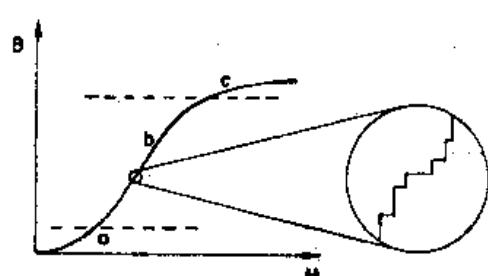


图 37-10 多晶铁的磁化曲线

现在重要之点是，这些在磁化过程中的急剧跳跃会引起能量损失。首先，当磁畴边界最后滑过一个障碍物时，它会很快地移到次一个障碍物上去，因为场已超过对无障碍运动所需的了。迅速运动意味着有迅速变化的磁场，这会在晶体中产生出涡电流。这些电流在引起金属发热，丧失了能量。第二种效应则是，当磁畴突然变化时，晶体的一部分由于磁致伸缩而改变了它的大小。畴壁的每一突然移动会造成一个带走了能量的小声波。由于这些效应，磁化曲线的第二部分就是不可逆的，并有能量损失。这便是磁滞效应的来源，因为要把畴壁向前移动——猛扑一下——然后又向后移动——又猛扑一下——会产生不同的结果。它象一种“痉挛”式阻力，因而带走了能量。

最后，对于足够高的场，当我们已把所有畴壁都移动并将每一晶体都在其最佳的方向上磁化了时，仍然会有某些小晶体的易磁化方向不在我们所加的外磁场方向上。这时要将那

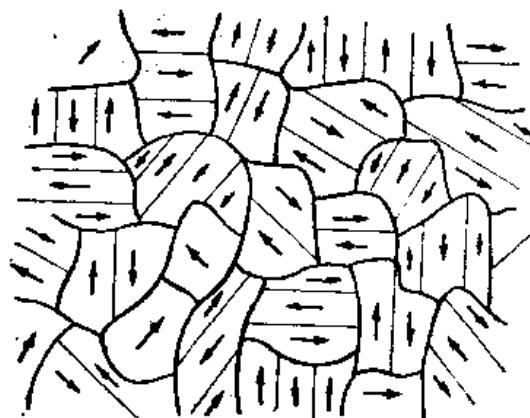


图 37-9 未被磁化的铁磁性材料的微观结构。每一晶粒具有一个易磁化方向，并分裂成一些平行于这一方向的自发磁化的畴

些磁矩转动就需要一大堆额外能量。因此对于高场来说，磁化曲线会慢慢地但却平稳地升高——即在图上标明为c的那个区域里。磁化强度并不会急剧达到它的饱和值，因为在该曲线的最后部分原子磁矩是在一个强场中进行转动的。因此，我们就见到为什么寻常多晶材料的磁化曲线，如图37-10中所示的那样，会在开头升高一点点并且是可逆的，然后就不可

逆地升高，最后才再慢慢地弯过去。当然，在这三个区域之间并没有明确的转折点——它们会平滑地互相搀混。

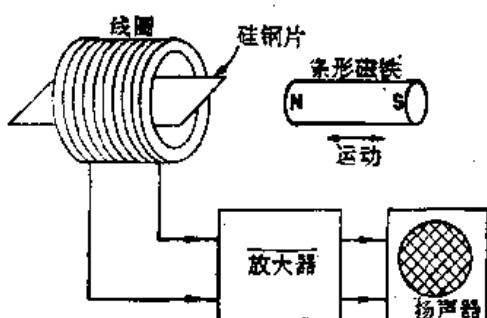


图 37-11 钢片里磁化的突然变化在扬声器中发出滴嗒响声

要证明那磁化曲线中部磁化过程是跳跃式的——畴壁在移动时作了急跳猛扑——并不困难。你所需要的一切就是将一个——绕上了许多千匝的——线圈接至放大器及扬声器上，如图37-11所示。如果你把几张硅钢片（如在变压器中所用的那一种）放置在该线圈中心并将一条形磁铁慢慢地移近该硅钢片，那么磁化的突然改变就会在线圈中产生一些脉冲电动势，那又将在扬声器中听到分明的滴嗒声。当你把磁铁移近铁片时，你将听到一大串的滴嗒声，有点象把一罐沙子朝一边倒时沙粒竟相落下来的那种嘈杂声。当场增强时，畴壁就在跳跃、猛扑和摇动。这一现象叫做巴克好森(Barkhausen)效应。

当你把磁铁再移近铁片时，这噪声有一段时间变成越来越响亮，但之后当磁铁移至十分靠近铁片时又只有相对少的噪声了。为什么呢？因为几乎所有畴壁都已移至尽可能远了。任何更大的场都只是在转动着每一磁畴中的磁化矢量，那是一种平稳过程。

如果你现在将磁铁拉出，以便使它沿磁滞回线的那条下降支路返回来，那么各磁畴便全都企图再回到低能量上去，而你就会听到另一大串回头急跳。你也可注意到，若把磁铁带到某一指定地点而在那里稍为来回移动一些，便将只有相对少的噪声。再又象是把一罐沙倾倒——但一旦那些沙粒已经站稳了位置，罐的小量运动便将不会对之造成扰动。在铁中磁场的小变化不足以促使任何边界越过任何“驼峰”障碍。

§ 37-4 铁磁性材料

现在我们愿意来谈谈在技术中用到的各种磁性材料，并讨论为不同目的而设计磁性材料时所涉及的某些问题。首先，“铁的磁性”这个人们经常听到的名词是一种误称——并没有这么回事。“铁”不是一种完全确定的材料——铁的性质苛刻地取决于所含杂质份量和该块铁是怎样制成的过程。你可以体会到磁性将依赖于畴壁移动有多么容易，但那是一种较大规模的性质，而不是个别原子的属性。所以凡实用的铁磁性实际上并非一个铁原子的一种性质——它是处于某一形态上的铁固体的性质。比方，铁可取两种不同的结晶形式。普通形式具有体心立方点阵，但它也可有面心立方点阵，不过那只在超过 1100°C 的温度上才会稳定。当然，在该温度上体心立方的结构早已越过其居里点了。可是，通过加入铬和镍于铁中而形成合金（一种可能的混合物，其中含有百分之十八的铬和百分之八的镍），我们便可得到所称为不锈钢的，这虽然主要含的是铁，但即使在低温上也仍保留其面心点阵。由于它的晶体结构不同，它便具有完全不同的磁性。大多数不锈钢品种并未带有可观程度的磁性，尽管有某些品种稍为带点磁性——这取决于该合金的成分。即使当这样一种合金是磁性

的，它仍不是象寻常铁的那种铁磁性——尽管它所含的成分大多数是铁。

现在我们愿意来描述几种为某些特定磁性而发展起来的特种材料。首先，如果想制成一块永磁体，就喜欢那种具有宽磁滞回线的材料，使得当撤去电流而把磁化场降低至零时，磁化强度仍会保持强大。对于这样的材料，畴壁边界应该尽可能“冻结”在原地。这种材料中的一种就是“铝镍钴V”（含有51%铁，8%铝，14%镍，24%钴，3%铜）。（这一种合金的相当复杂成分标志着要制成优质磁铁所必须经历过的那种繁琐努力。要把五种东西混合起来，并试验到获得那最理想的物质，需要多少耐性啊！）当铝镍钴凝固时，就有一种“第二相”沉淀下来，造成许多微小晶粒和十分高的内应变。在这种材料中，畴壁根本难于移动。除了应具备准确的成分外，铝镍钴在机械上是这样“加工”的，即促使其中的小晶体会形成一种磁化将要取的那个方向上的长粒。这样，磁化就有在这些方向上被排列起来的一种自然趋势，而凭这样的各向异性效应磁化也就给保持在那里了。而且，材料在制造时甚至被置在一外加磁场中冷却，以便使晶粒按正确的晶体取向成长。铝镍钴V的磁滞回线示如图37-12。你看它比在上一章图36-8中为软铁所画出的那条磁滞回线要宽约500倍。

现在让我们转到另一种不同的材料上来。在制造变压器和电动机时，需要一种“软”磁材料——一种磁性很容易改变，以便从一个十分微小的外加磁场就能产生大量的磁化。为此作好安排，我们需要一些纯净的而又退火退得很好的材料，其中将只含有十分稀少的位错和杂质，使得畴壁能够容易移动。要是我们能使各向异性微小，那就该是美妙的。这时，即使材料中有一个相对于场已取错了角度的晶粒，它也仍然容易被磁化。原来我们已经说过，铁倾向于沿[100]方向磁化，而镍则倾向于[111]方向；因此如果我们把铁和镍以各种不同的比例混合，也许就可希望用刚好恰当的比例来找到一种不会偏爱于任何一个方向的合金——[100]和[111]两个方向彼此等价。事实证明，这发生于在混合物中含有百分之七十镍和百分之三十铁时。此外——也许由于幸运，或可能由于在各向异性与磁致伸缩之间存在某种物理关系——已经查明，铁与镍的磁致伸缩具有相反符号。而在这两种金属的合金中，当含有约百分之八十的镍时，这一性质就会通过零值。因此，在约含镍百分之七十至八十之间，我们将获得一种十分“软”磁材料——极易于磁化的合金。这叫做透磁合金。这种透磁合金用于优质（在低信号水平的）变压器中，但对于永磁则毫无用处。透磁合金一定要很小心地制造和使用。一块透磁合金的性质将严重发生变化，倘若它被强制超过弹性限度以外的话——即不能把它弯曲。如果把它弯曲，其磁导率将由于机械畸变所产生的位错、滑移带等等而降低。畴壁再也不容易移动了。然而，这高磁导率是可以通过在高温中退火而恢复的。

用某些数字来表征各种不同磁性材料往往很方便。有两个有用数字，那就是磁滞回线与B轴和H轴间的截距，如图37-12所标明出来的那样。这些截距分别称为剩余磁场 B_r 和矫顽磁力 H_c 。在表37-1上我们把几种磁性材料的这些数字列举了出来。

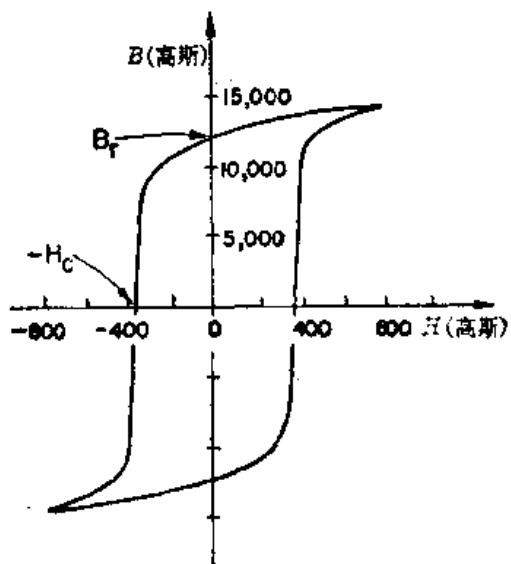


图37-12 铝镍钴V的磁滞曲线

表 37-1 某些铁磁性材料的性质

材 料 名 称	剩磁场 B_r (高斯)	矫顽力 H_c (高斯)
超透磁合金	(≈ 5000)	0.004
硅钢(变压器)	12000	0.05
阿姆科铁(工业用纯铁)	4000	0.6
铝 镍 钴 V	13000	500

§ 37-5 特殊磁性材料

我们现在想要来讨论一些样式更为奇特的磁性材料。在周期表上有许多元素其内电子壳层尚未填充完毕因而具有原子磁矩。例如，紧靠着铁、镍、钴那些铁磁性元素你就会找到

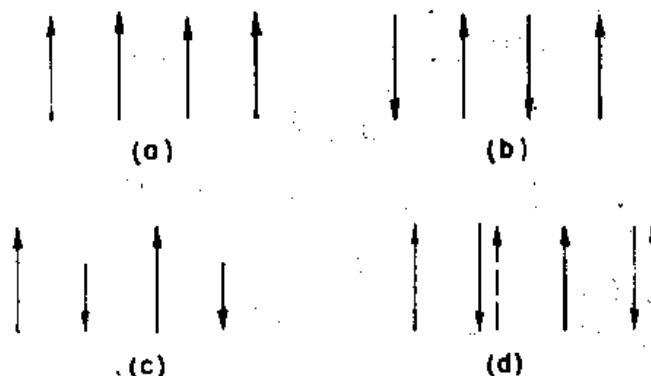


图 37-13 在各种不同材料中电子自旋的相对取向：(a)铁磁性；(b)反铁磁性；(c)铁氧体；(d)钇铁合金(虚线箭头代表包括轨道运动在内的总角动量)

铬和锰。为什么它们并非属于铁磁性的呢？答案是，对于这些元素式(37.1)中的 λ 项有了相反符号。比方，在铬点阵中，铬原子的自旋逐个掉转方向，如图 37-13(b)所示。所以铬从它本身的观点来看是带磁性的，但在技术上却不会令人感兴趣，因为缺乏外部磁性效应。这样，铬就是量子力学效应使自旋交错的那类材料的一个例子。象这样一种材料称为反铁磁性的。反铁磁材料中的自旋排列也与温度有关。低于某一临界温度，所有自旋都会在每隔一列上排列整齐。

齐，但当晶体被加热到高于这一温度——还是称为居里温度——时，自旋便突然变成杂乱无章了。在内部发生了一次突然转变。这一转变可以从比热曲线中看到，也在某些独特的“磁性”效应中表现出来。例如，这种交错自旋的存在可通过使中子从铬晶体中散射出来而加以证实。由于中子本身拥有自旋(和磁矩)，它就具有不同的散射波，取决于它的自旋是平行还是反向于散射体中的自旋。这样，当晶体中的自旋交错时与当它们具有无规分布时我们会得到不同的干涉图样。

还有另一种物质，其中量子力学效应促使电子自旋交错着，但无论如何却始终是铁磁性的——这就是说，这种晶体具有净永磁化。在这一类物质中，其布置格局如图 37-14 所示。图上显示出尖晶石、即氧化镁铝的晶体结构，这如同图上所示，乃是不带磁性的。这一氧化物含有两种金属原子：镁和铝。现在，若用两种象铁和镍、或锌和锰的磁性元素来代替这镁和铝——换句话说，如果放进磁性原子而不是原来的非磁性原

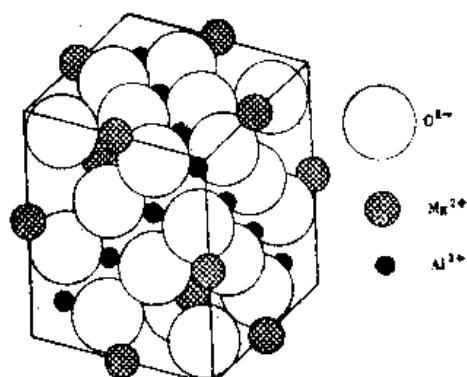


图 37-14 尖晶石 ($MgAl_2O_4$) 矿物的晶体结构。 Mg^{2+} 离子占据正四面体位置，每个被四个氧离子所包围； Al^{3+} 离子占据八面体位置，每个被六个氧离子所包围 [转载自 C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., 1956]

子——一件有趣的事情就会发生。让我们称其中一种金属为 a 而另一种金属为 b ；那么下

述各种力的组合就必须加以考虑。有一种 $a-b$ 互作用，企图促使 a 原子与 b 原子具有相反自旋——因为量子力学总是提供那个相反符号（除了铁、镍和钴那些神秘的晶体以外）。然后，还有直接的 $a-a$ 互作用，企图促使 a 与 a 间反向，另外还有企图促使 b 与 b 间反向的那种 $b-b$ 互作用。现在，我们当然不能使每一件东西与其他每一件东西都相反—— a 与 b 反， a 与 a 反，而 b 又与 b 反。大概是由于 a 与 a 间的距离较大并有氧原子存在（尽管我们实际上还不知道其所以然），已弄清楚 $a-b$ 互作用比起 $a-a$ 或 $b-b$ 的都较强。因此，大自然在这一场合下所采取的解答是使所有之 a 都互相平行，而所有之 b 也都互相平行，可是这两系统却互相反向。这会给出最低能量，因为 $a-b$ 互作用是较强的。结果变成：所有之 a 都是自旋向上，而所有之 b 则都是自旋向下——当然，或者与此相反。但如果 a 型原子与 b 型原子的磁矩不相等，则我们该得到示如图 37-13(c) 的那种情况，而在材料中就可以有一净磁化强度了。于是材料将属于铁磁性的——虽则弱了一点。象这样的材料叫做铁氧体。它们不具有象铁那么高的饱和磁化强度——由于明显的原因——因而只对较弱的场才有用。但有一个十分重要的差别——它们都是绝缘体；铁氧体是铁磁性绝缘体。在高频场中，它们将有十分微小的涡电流，并从而可用于诸如微波系统中。微波场能够进入象这样的一种绝缘材料的内部，而在象铁那样的导体中则场将被涡流逐出于体外。

还有另一类直至最近才为人们所发现的磁性物质——称为石榴石的那一族正交硅酸盐中的各成员。它们也是在点阵中含有两种金属原子的晶体，因而我们又有几乎可以随心所欲地代替其中两原子的那种情况。在许多感兴趣的化合物中，有一种是完全磁性的。它在该石榴石结构中含有钇和铁，而它所以具有铁磁性的原因又是很奇特的。这里量子力学又再使相邻的自旋反向，从而形成铁中电子自旋指向一方，而钇中电子自旋则相反指向的一个锁紧系统。但钇原子比较复杂。它是一种稀土元素，并从电子的轨道运动中获得对其磁矩的一个大的贡献。对于钇来说，轨道运动的贡献与自旋方面的贡献相反，并且还比较大。于是，以不相容原理而工作的量子力学，虽然会使钇的自旋与铁的自旋反向，但由于轨道效应就仍能使钇的总磁矩平行于铁的——如图 37-13(d) 所简略指明的那样。因此，该化合物就是一种正常铁磁体。

铁磁性的另一个有趣例子发生于某些稀土元素中。它与自旋的一种更特殊的安排有关。该材料既非在自旋全都互相平行的意义上形成铁磁性，也不在每一原子的自旋都相反的意义上形成反铁磁性。在这些晶体中，处于某一层上的所有自旋都互相平行，并躺在该层的平面之上。在次一层上，所有自旋又彼此平行，但却指着稍为不同的方向。在下面一层又再有另一个方向，如此等等。结果是，局部的磁化强度矢量按螺旋式变化——当沿一条垂直于各层的直线通过时，逐层的磁矩在旋转。试图分析当加一磁场于这样一个螺旋体时会发生什么情况——在所有各原子磁体中所必须进行的一切扭动和旋转——很有趣味。（有些人就喜欢用这些东西的理论来自我取乐！）不仅存在“平坦”螺旋的那些情况，也还存在逐层磁矩会形成一个锥面、以致它既具备一个螺旋分量而又具备沿某一方向的匀强铁磁性分量！

物质的磁性，在比我们这里所能做出的更高的水平上，曾经使各种类型的物理学家都神魂颠倒。首先，有些实际工作者，他们喜欢寻找以更佳方式制造出各种东西来的途径——他们乐于去设计出更为优良而又更加有意义的磁性材料。象铁氧体那类东西的发现或其应用，立即把那些喜欢看到以较聪颖的新措施来做出东西的人们逗乐了。除此之外，还有那些对于大自然能够用几条基本定律就产生出那么令人惊异的复杂性方面感到欢欣鼓舞的人

们。仅从唯一一个相同的普遍概念出发，大自然便从铁的铁磁性和磁畴开始，至铬的反铁磁性，又至铁氧体和石榴石的那种磁性，以至一些稀土元素的螺旋结构，等等，等等。要在实验上找出在这些特殊物质中所发生的一切奇异事态来，是挺令人向往的。然后，对于那些理论物理学家来说，铁磁性代表着若干项十分有趣，但尚未得到解决，而又挺漂亮的挑战。一项挑战就是去理解为什么铁磁性毕竟会存在。另一项挑战则是去预言在一理想点阵中那些彼此互作用着的自旋的统计性。即使忽略任何可能的附加复杂性，这一问题迄今仍不允许人们去得到充分理解。之所以那么有趣的原因是它竟会是一个这么容易说出来的问题：给定一大堆存在于一有规点阵中的、以如此这般的规律互作用着的电子，它们将如何动作呢？问题虽然简单地提出来了，但就是多年不让人们对它作完全的分析。尽管对于不太靠近居里点的温度它已相当详尽地得到了分析，但在居里点上的突然转变的理论却仍有待完成。

最后，有关自旋的原子磁体系统——在铁磁性材料、或在顺磁性材料、以及在核磁性中——的整门学科，对于物理系的高年级学生来说，也已是一种具有魅力的东西。这些自旋系统可借外加磁场来加以推推挽挽，从而人们就能够利用共振、张弛效应、自旋回波、以及其他各种效应而做出许多把戏来。它被用作许多复杂热力学系统的原型。但在顺磁性材料中情况却往往相当简单，而人们对于做实验以及如何从理论上解释那些情况这两方面都曾感到高兴。

我们现在已结束了电学和磁学。在第一章中，我们曾谈到自从早期希腊人对于琥珀和磁石的奇怪行为进行了观察以来，已经迈过的一些巨大步伐。可是在我们一切冗长而又繁琐的讨论中，却从未解释过为什么当我们摩擦一块琥珀时会在它上面获得电荷，而我们也并未解释过为什么一块磁石会被磁化！你可能会说，“呵！我们不过未能得到一个正确符号罢了。”不，比这还要糟些。因为即使我们假定会获得该正确符号，仍然会有这么一个问题：为什么在地壳里的磁石会被磁化呢？当然，存在那个地球磁场，但地球磁场又从哪里来的呢？实际上并没有任何人知道——只能有一些良好猜测。所以你看，我们这一套物理学竟是一大堆骗术——从磁石和琥珀的现象出发，而就在对这两者都不很了解处收场。不过，我们在这一过程中也就已经学到了大量十分令人振奋而又非常实用的知识！

§ 38-1 胡克定律

弹性学这一学科，是与具有当产生形变之力被撤去后即能恢复其大小和形状的那些物质行为打交道的。对于所有固态物体，我们都在某种程度上发现了这种弹性。要是我们拥有用来详尽处理这一课题的时间，便应该乐于去考究下列许多事情：材料行为、弹性的一般规律、弹性学普遍理论、决定弹性的原子机制、以及最后当力大至足以导致范性流动和破裂发生时的弹性定律限度。要包括全部这些课题该花费比我们所拥有的更多的时间，因而将不得不遗漏其中某些东西。比方，我们将不讨论范性或弹性定律的限度。（当过去谈论金属中的位错时，就曾稍为接触过这些课题。）并且，也将不能讨论弹性的内在机制——所以下述处理就将不会有如我们在以前各章中所试图达到的那种完整程度。目的主要在于使你们熟悉怎样去处理诸如梁的弯曲那样的实际问题的某些途径。

当你对一块材料挤压时，它将“屈服”——材料发生了形变。如果力足够小，材料中各点的相对位移与力成正比——我们说这行为是弹性的。下面将仅仅讨论弹性行为。首先，要将弹性的基本定律写下，然后，又将其应用于各种不同情况。

假设取一根长度为 l 、宽度为 w 、而高度为 h 的矩形杆，如图 38-1 所示。如果在其两端用力 F 来拉，其长度将伸长 Δl 。我们将在一切情况下都假定这长度的改变是原来长度的一个微小分数。事实上，对于诸如木材和钢的材料，若长度改变超过其原长的百分之几，则该材料便将断裂。对于大多数材料，实验证明，在伸长足够小时，力与伸长成正比：

$$F \propto \Delta l. \quad (38.1)$$

这一关系称为胡克定律。

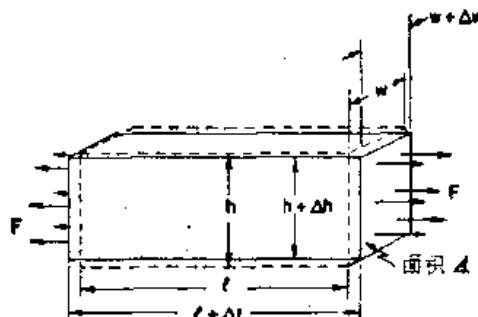


图 38-1 一根杆在受均匀张力时发生的伸长

杆的这一伸长 Δl 也取决于其长度。我们将通过下述论证来理解怎么会是这样。若把全同的两块一头接一头地互相粘着，而施于每块上之力彼此又相同；则每块都将伸长 Δl 。这样，长为 $2l$ 的一块的伸长即为横截面与之相同但长度为 l 的另一块的伸长之二倍。为要得到一个更能表征该材料，而却较少表征任何一种特殊形状的数字，我们将选择与伸长对原长之比率 $\Delta l/l$ 打交道。这一比率与力成正比但与 l 无关：

$$F \propto \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.2)$$

力 F 也将取决于该块材料的横截面积。假设将两块材料侧面对侧面地并列。那么，对于一给定伸长 Δl ，我们加于每块上之力就各为 F ，亦即对这两块的组合加上了二倍之力。对于一给定伸长量，力应该同该块材料的横截面积 A 成正比。为获得一个比例系数与物体的大小无关的定律，我们把对于一矩形块的胡克定律写成这么一个形式：

$$F = Y A \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.3)$$

常数 Y 仅代表材料属性的一种性质; 被称为杨氏模量。(你将经常见到杨氏模量写成 E , 但我们已把 E 用于电场、能量和电动势了, 因而就倾向于采用另一个字母。)

每单位面积之力称为胁强, 而每单位长度之伸长——分数伸长——则称为胁变。因此式(38.3)便可重新写成:

$$\frac{F}{A} = Y \times \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.4)$$

$$\text{胁强} = (\text{杨氏模量}) \times (\text{胁变}).$$

对于胡克定律还应加进另一部分: 当你在一个方向上对一块材料拉伸时, 它将在与这一伸长垂直的方向上收缩。宽度的收缩正比于原来宽度, 也正比于 $\Delta l/l$ 。这侧向收缩对于宽度和高度两方面都有相同比例, 并经常被写成

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.5)$$

其中 σ 是另一种称为泊松比的材料性质。在符号上它总是正的, 而且是一个小于 $1/2$ 的数目。(σ 一般应取正值, 那是“合理”的, 但为什么一定要这样, 就不十分清楚。)

Y 和 σ 这两常数就完全规定了一种均匀各向同性(即非晶体)材料的弹性。在结晶材料中, 伸长和收缩在不同方向上可以不同, 因而可以有比这多得多的弹性系数。我们将暂时把讨论局限于其性质可以由 Y 和 σ 加以描述的那些均匀、而又各向同性的材料中。照例会有描述事物的各种不同方式——有些人喜欢用不同的常数来描述材料的弹性。但始终需要两个, 而且它们都可联系到 σ 和 Y 上来。

我们所需要的最后一个普遍原理是迭加原理。既然(38.4)和(38.5)两定律在力和位移上都是属于线性的, 迭加就将有效。如果你有一组力并得到某些位移, 然后你再加上一组新的力并得到某些新加上去的位移, 则合位移将是你从这两组力独立作用时所该得到的两位移之和。

现在, 你已有了所有的普遍原理——迭加原理和式(38.4)与(38.5)——而弹性学也就不过如此了。但这也好象是在说, 一旦有了牛顿定律, 力学也不过如此。或者, 给出了麦克斯韦方程组, 电学也就不过如此了。当然, 有了这些原理你便可以得到许多东西, 因为具备了你目前的数学本领你该能够跑过一段很长的距离了。不过, 我们还将演算几个特殊应用问题。

§ 38-2 匀 胁 变

作为第一个例子, 让我们来找出在均匀的流体静压强的作用下, 一个矩形块将会发生什么情况。

现在把一块东西放进压力柜的水里, 那么, 对于这一块东西的每一个面就都会施加一个正比于该面积的向内力(见图 38-2)。由于流体静压强是均匀的, 所以施于该块每一面上的胁变(每单位面积之力)就都相同。我们将首先算出在长度上的变化。该块东西的长度变化可以想象成是图 38-3 中所简示出来的那三个独立问题中会

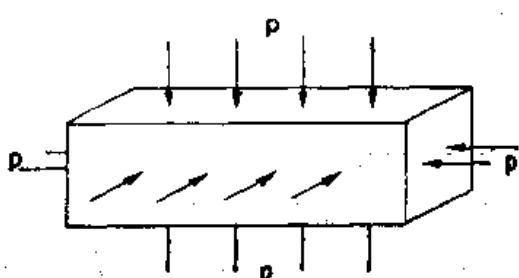


图 38-2 受到均匀的流体静压强作用的一根杆

发生的长度变化之和。

问题1 若在该块材料两端我们用压强 p 将其推挤，则压缩应变为 p/Y ，而且符号是负的，

$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y}.$$

问题2 若加压强 p 于该块材料两侧，则压缩胁变又是 p/Y ，但此刻我们所要的乃是纵向胁变，可以通过把侧向胁变乘以 $-\sigma$ 而得到它。该侧向胁变为

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y};$$

因而 $\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}.$

问题3 若在该块的顶上加以挤压，则压缩胁变又是 p/Y ，而在其侧向上的相应胁变再是 $-\sigma p/Y$ 。因而得到

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}.$$

把这三个问题的结果都合并起来——也就是说，取 $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$ ——我们便得

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1-2\sigma). \quad (38.6)$$

当然，这一问题在所有三个方向上都对称；因此可以断言，

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1-2\sigma). \quad (38.7)$$

在受流体静压强作用下的体积变化也多少会令人感兴趣。既然 $V = lwh$ ，便可以对于小位移写成

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}.$$

利用(38.6)和(38.7)，我们便有

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{p}{Y}(1-2\sigma). \quad (38.8)$$

人们喜欢叫 $\Delta V/V$ 做体积胁变，并写为

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}.$$

该体积胁强 p 与体积胁变成正比——又再是胡克定律。系数 K 称为体积弹性模量。它与其他常数间的关系为

$$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}. \quad (38.9)$$

由于 K 具有某种实用价值，许多手册便常给出 Y 和 K 而不是给出 Y 和 σ 。如果你想要得到 σ ，就总可以由式(38.9)获得它。我们也可从式(38.9)看出，泊松比 σ 必然会比一半为小。假如不是这样的话，体积弹性模量便该是负的，而材料便会在增大压强时发膨胀。这使得

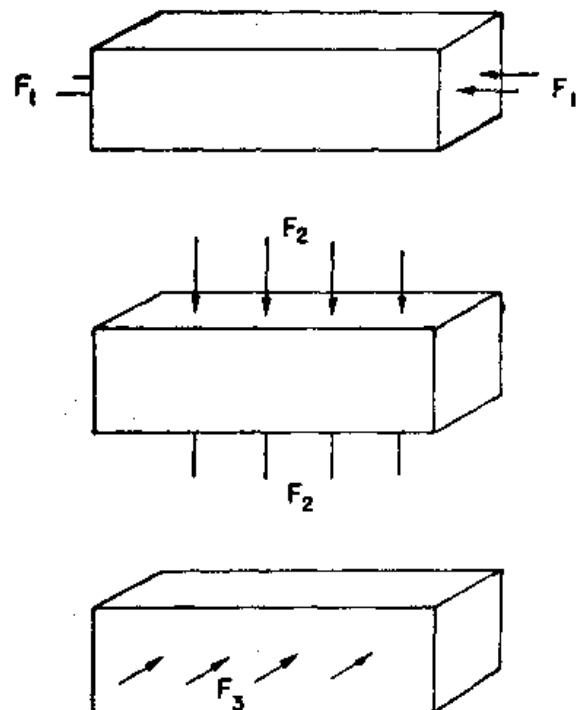


图 38-3 流体静压强是三个纵向压缩力的叠加

我们能够从任一块老相识的东西中获得机械能量——这意味着该块东西处于一种不稳定的平衡中。如果我们开始让它膨胀，它就会继续膨胀而释放出能量来。

现在我们要来讨论，当加一“切”变于某件东西上时将会发生的情况。所谓切变，我们指图38-4所示的那种畸变。作为对这一问题的准备，让我们考察受如图38-5所示的那种力的一块立方形材料的胁变。再度可以把它分解成两个问题：竖向推力和水平拉力。若这立方体每一面的面积为A，则对于水平长度的变化便是

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} + \sigma \frac{1}{Y} \frac{F}{A} = \frac{1+\sigma}{Y} \frac{F}{A}. \quad (38.10)$$

竖向高度的变化恰好就是此式的负值。

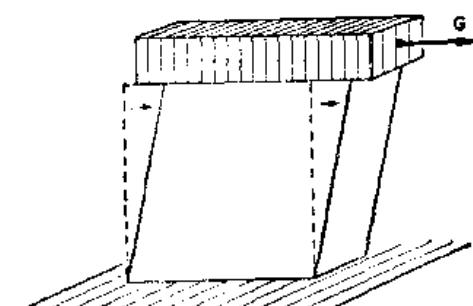


图38-4 受匀切力作用的一个立方体

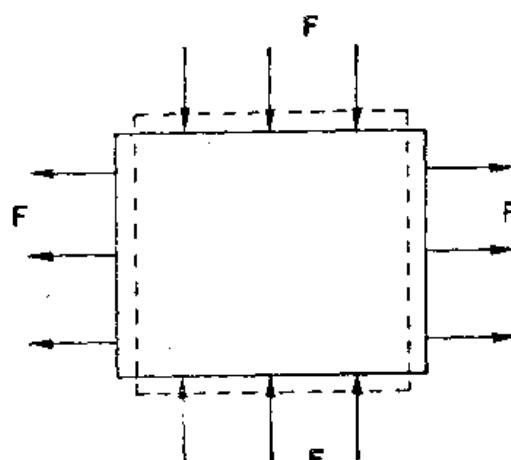


图38-5 在顶部和底部都受到压缩力而在两侧
则受到相等的拉伸力的一个立方体

现在假设该同一立方体受到图38-6(a)所示的那些切力。注意！若不会有净转矩而该立方体得以处于平衡之中，则所有之力势必相等。（相似之力也必须在图38-4中出现，因为该块东西是处于平衡态上。这种力是由使这块东西能够紧贴于台面上的那种“粘胶”提供的。）这时，该立方体被认为是处于纯切力状态上。但必须注意，若用一个 45° 角之面——比如说图中的沿A对角线——来割切该立方体，则作用于这一截面积上的总力乃垂直于这一面积并等于 $\sqrt{2}G$ 。受这个力所作用的面积为 $\sqrt{2}A$ ；因此，垂直于这个面上的张胁强就不过是 G/A 。同理，如果我们检查一下与另一方向作成 45° 角之面——图上的对角线B——便会看到一个垂直于这个面的压缩胁强 $-G/A$ 。由此可以见到，在一“纯切力”中的胁强相当于彼此大小相等、互相正交、并与原立方体的面作成 45° 角的那个张胁强和压胁强的组合。内胁强和内胁变与我们在图38-6(b)所示的那种力作用下的较大块材料中所该找到的相同。但这正是我们刚才解答过的问题。对角线长度的改变由式(38.10)给出：

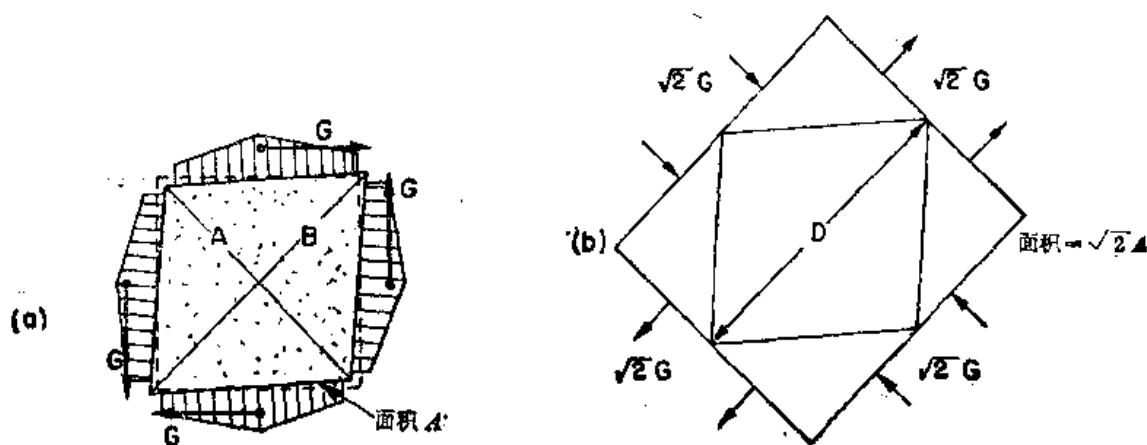


图38-6 (a)中的两对切力产生了与在(b)中的压缩和拉伸力相同的胁强

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1+\sigma}{Y} \frac{G}{A}, \quad (38.11)$$

(其中一条对角线缩短; 另一条则伸长。)

把切肋变用该立方体受扭歪的角度——图38-7中的 θ 角——来表达往往很方便。从这个图的几何形态上你便可以看出, 顶边的水平移位 δ 等于 $\sqrt{2}\Delta D$ 。因此

$$\theta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{l} = 2 \frac{\Delta D}{D}. \quad (38.12)$$

切肋强 g 被定义为施于一个面上的切力除以该面面积, 即 $g=G/A$ 。引用式(38.11)于(38.12)中, 便可得

$$\theta = 2 \frac{1+\sigma}{Y} g.$$

或者, 把这个式子写成“肋强=常数乘肋变”的形式, 即

$$g = \mu \theta. \quad (38.13)$$

μ 这个比例系数称为切变模量(或者有时称为刚性系数)。如果用 Y 和 σ 来表达, 则是

$$\mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}. \quad (38.14)$$

顺便提一下, 这切变模量必须是个正值——要不然

你就可以从正在其本身作自切的一块材料中获得功。根据式(38.14), σ 必须大于-1。这样, 我们便知道 σ 一定要在-1与 $+\frac{1}{2}$ 之间; 然而, 实际上, 它却总是大于零的。

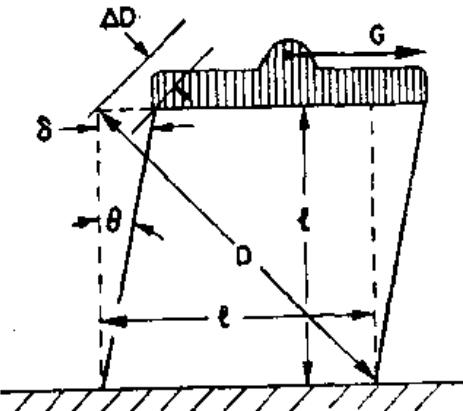


图38-7 切肋变 θ 为 $2\Delta D/D$

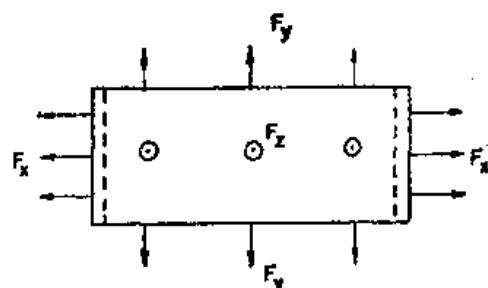


图38-8 没有侧向收缩的伸长

作为贯穿全部材料其中肋强都均匀的那种类型情况的最后一个例子, 让我们考虑一块受了拉伸而同时又受了约束使其不得发生任何侧向压缩的那种问题。(在技术上, 要对它进行压缩而同时又保持不在侧向上凸起来会稍为容易些的——但这毕竟是同一问题。)究竟会发生什么情况呢?噢, 必然会有为保持它的厚度不变的那种侧向力的——一些我们并非马上懂得但又必须给计算出来之力。这与上面曾经

做过的问题种类相同, 只是要稍用一点不同的代数罢了。我们设想如图38-8所示施于所有三对面上之力; 要算出各种线度的改变, 并要选择一些横向力以便使宽度和高度都保持不变。按照寻常论证, 对那三个肋变可以得到:

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y} \frac{F_x}{A_x} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_y}{A_y} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_z}{A_z} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_x}{A_x} - \sigma \left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right], \quad (38.15)$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_y}{A_y} - \sigma \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right], \quad (38.16)$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_z}{A_z} - \sigma \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right) \right]. \quad (38.17)$$

现在, 既然 Δl_y 和 Δl_z 都假定为零, 式(38.16)和(38.17)便可提供两个会把 F_y 和 F_z 联系到 F_x 上去的方程式。对它们一起求解, 得到

$$\frac{F_x}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{F_z}{A_z}, \quad (38.18)$$

代入式(38.15)中,便有

$$\frac{\Delta l_x}{l_s} = \frac{1}{Y} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma} \right) \frac{F_z}{A_z} = \frac{1}{Y} \left(\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma} \right) \frac{F_z}{A_z}. \quad (38.19)$$

你以后会经常看到这个式倒过来的形式,并将那个 σ 二项式分解成因子,即写成

$$\frac{F}{A} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} Y \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.20)$$

当我们把各侧都约束住时,杨氏模量就得变成由一个复杂的 σ 函数乘上。正如你可以由式(38.19)最容易见到的,在 Y 前面的那个因子总会大于1。当各侧都固紧时,要把一块东西伸长较为困难——这也就意味着,一块东西当其各侧都被固紧时会比不固紧时为强。

§ 38-3 扭棒; 切变波

现在让我们把注意力转到一个较复杂的例子上来,因为这里材料的不同部分会受到不等量的胁强。试考虑诸如你会找到作为某种机械的驱动轴的一根被扭转的棒,或在一部精密仪器中用来作为悬丝的一条被扭转的石英纤维。正如你可能会从各有关扭摆实验中知道的,作用于一根受扭转的棒上之转矩与角度成正比——该比例常数显然取决于棒之长度、棒之半径、以及材料的性质。问题是:按怎样一种方式? 我们目前才处于能够解决这一问题的地位;因为那不过是演算某一个几何问题罢了。

图38-9(a)表明一根长度为 L 、半径为 a 、其一端相对于另一端被扭过一个角度 ϕ 的柱形棒。如果要把这胁变同我们所已知道的东西联系起来,便可以设想该棒是由许多个柱形壳所构成的,并分别算出每个壳所发生的情况。从对一个薄而短的、半径为 r (小于 a)、而厚度为 Δr 的柱形壳——如图38-9(b)所示的那样——进行考察开始。现在,如果我们考察这个柱壳上原本是一个小正方形的部分,那么便会发现它已被扭歪成一个平行四边形了。象这样的每一柱壳元受到了切力,而其切角则为

$$\theta = \frac{r\phi}{L}.$$

因此,材料中的切胁强 g [根据式(38.13)]就是

$$g = \mu\theta = \mu \frac{r\phi}{L}. \quad (38.21)$$

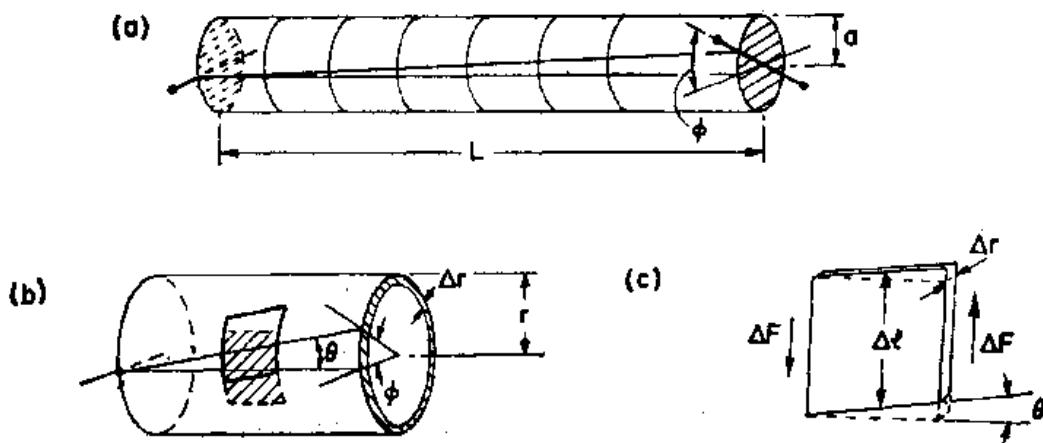


图38-9 (a)一根受扭转的柱形棒; (b)一个受扭转了的柱形壳; (c)壳中每一小部分都会受到切力

切胁强乃作用于该正方体一端上之力 ΔF 除以其端面积 $\Delta A \Delta r$ [见图 38-9(c)],

$$g = \frac{\Delta F}{\Delta A \Delta r}.$$

施于这么一个正方体一端上之力 ΔF 贡献出一个等于下式的环绕着柱轴的转矩 $\Delta \tau$:

$$\Delta \tau = r \Delta F = rg \Delta A \Delta r. \quad (38.22)$$

总转矩 τ 就是绕该柱壳一个整圆周的这种转矩之和, 所以把足够多的部分拼凑在一起使得所有 $\Delta \tau$ 之和为 $2\pi r$, 我们便得到一个空心管的总转矩为

$$rg(2\pi r) \Delta r. \quad (38.23)$$

或者, 利用(38.21), 则

$$\tau = 2\pi \mu \frac{r^3 \Delta r \phi}{L}. \quad (38.24)$$

我们得到一根空心管的转动劲度 τ/θ 是与该管半径 r 的立方和厚度 Δr 成正比、而与其长度 L 成反比的。

现在可以想象一根实心棒是由一系列同心管所构成, 而每个管受到同一个角度 ϕ 的扭转(虽则对于每个管内胁强是彼此不同的), 总转矩为所需以转动每一个壳的这些转矩之和; 因此对于该实心棒

$$\tau = 2\pi \mu \frac{\phi}{Y} \int r^3 dr,$$

其中积分是从 $r=0$ 积至 $r=a$ 的, a 为该棒的半径。经过积分后, 便有

$$\tau = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \phi. \quad (38.25)$$

对于一根受扭转之棒, 转矩与角度和直径的四次幂都成正比——一根二倍粗的棒对于扭转将有十六倍的强硬。

在离开扭转这一课题之前, 让我们把刚才所学到的东西应用到一个有趣的问题, 即扭波上。如果你取一根长棒并突然扭转其一端, 则一个扭波将会沿该棒发展下去, 如图 38-10(a) 所简略表示出来的那样。这比一个稳恒扭转更令人精神振奋——让我们看看是否能算出所发生的情况。

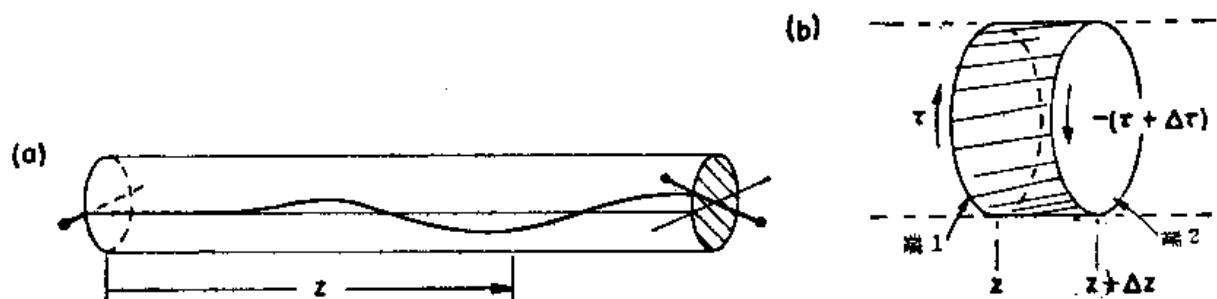


图 38-10 (a) 在一根棒上行进的扭波; (b) 棒中的一个体积元

令 z 为沿棒从一端至某一点的距离。对于一个静扭转来说沿棒每一处都有相同的转矩, 并且正比于 ϕ/L , 即总扭转角给总长度除。就材料方面说, 有关紧要的乃是局部扭转胁变, 那你该体会到即是 $\partial\phi/\partial z$, 当沿棒的扭转不均匀时, 便应由下式来代替(38.25):

$$\tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (38.26)$$

现在让我们来看看放大后示如图 38-10(b)的那个长度为 Δz 的体积元所发生的事情。在该

小段棒的端 1 处会有转矩 $\tau(z)$, 而在端 2 处则有一不同的转矩 $\tau(z+\Delta z)$, 如果 Δz 足够小, 则可采用泰勒级数展开写成

$$\tau(z+\Delta z) = \tau(z) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \Delta z. \quad (38.27)$$

施于 z 与 $z+\Delta z$ 间那一小段棒上的净转矩显然等于 $\tau(z)$ 与 $\tau(z+\Delta z)$ 之差, 即 $\Delta \tau = (\partial \tau / \partial z) \Delta z$. 对式(38.26)取微分, 便得

$$\Delta \tau = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z. \quad (38.28)$$

这一净转矩的效应是对该小段棒提供一个角加速度, 小段的质量为

$$\Delta M = (\pi a^2 \Delta z) \rho,$$

式中 ρ 代表材料密度. 我们曾经在第一卷第十九章中算出过一根圆棒的转动惯量为 $m r^2 / 2$; 若把上述那一段材料的转动惯量叫作 ΔI , 便有

$$\Delta I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z. \quad (38.29)$$

牛顿定律陈述: 转矩等于转动惯量乘以角加速度, 即

$$\Delta \tau = \Delta I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (38.30)$$

把一切东西都拉来凑在一起, 我们便得

$$\mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

或

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (38.31)$$

你将会认识到这是一个一维的波方程. 我们就已找出了扭波将以这一速率沿棒传播下去:

$$C_{\text{切变波}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (38.32)$$

棒越致密——对于相同的劲度来说——波行得就越慢; 而棒越坚硬, 则波发展下去就越快. 这速率与棒的直径无关.

扭波是切变波的一个特例. 一般说来, 切变波是剪变不会改变材料里任一部分的体积的那种波. 在扭波中, 我们有这种切变强的一个特殊分布——即分布于一个圆周上. 但对于切变强的任一种安排, 波将以同一速率——即由式(38.32)所给出的那一速率——传播. 例如, 地震学家会发现, 这种波在地球内部四处奔驰.

在一固体材料内部, 我们还可以有另一种波存在于弹性世界中. 如果你推动某一件东西, 你就可以发动“纵”波——也称为“压缩”波. 这有如空气或水中的声波——位移与波之传播沿同一方向. (在一弹性体的表面上也还可以有其他类型之波——叫“瑞利(Rayleigh)波”或“乐甫(Love)波”. 在其中剪变既不是纯纵向的也不是纯横向的. 我们目前没有时间来对此作任何研究.)

乘我们还在波的这一课题上, 试问象地球这样一块巨大的固体中纯压缩波的速度究竟如何? 我们讲“巨大”, 因为在一粗而厚的物体中的声速与在一根比如细棒中的声速会有所不同的. 所谓“粗厚”物体, 指的是其横向尺寸比起声音的波长来要大得多. 于是, 当我们推压该物体时, 它就不能向旁伸展——只能在一维上受挤压. 幸亏, 我们已曾算出过一块受约束弹性材料的特殊压缩情况. 亦曾在第一卷第四十七章中算出过气体中声波的速率. 按照

同一些论证你可以看出，在固体中声音的速度会等于 $\sqrt{Y'/\rho}$ ，其中 Y' 为受约束情况下的“纵向模量”——或压强给长度的相对变化除。这恰好就是我们曾在式(38.20)中得到的 F/A 对 $\Delta l/l$ 的比率。因此，纵波的速率就是由下式给出的：

$$C_{\text{纵}}^2 = \frac{Y'}{\rho} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{Y}{\rho}. \quad (38.33)$$

只要 σ 落在零与 $\frac{1}{2}$ 之间，那切变模量 μ 就会比杨氏模量 Y 小些，而 Y' 则比 Y 还要大，因而

$$\mu < Y < Y'.$$

这意味着纵波比切变波跑得更快。一种用来量度物质弹性常数的最精密方法，就是来测量该材料的密度和两种波的速率。从这一种知识我们就能得到 Y 和 σ 。偶尔，通过对发自一次地震的那两种波到达时间之差的测量，一位地震学家——甚至仅从一个站所收到的信号——就能够估计出振源的距离。

§ 38-4 弯 梁

现在要来考察另一项实际事务——棒或梁的弯曲。当我们对一根具有任意截面之棒进行挠曲时，力会怎么样呢？试设想一根具有一圆截面之棒而将其算出来，其答案会对任一种形状都适用。可是，为了节省时间，我们宁走捷径，因而即将得到的理论仅仅是近似的。我们的结果将只在弯曲的半径比起梁的厚度来要大得多时才正确。

假定你抓住一根直棒的两端而把它弯成象图 38-11 那样的曲线。在该棒内部会发生什么情况呢？噢，如果它被挠曲了，那意味着在该曲线之内受到压缩，而在曲线之外则受到拉伸。有某一个多少与棒轴平行的面既不被拉长也不被缩短。这个面叫做中立面。你该会指望，这个面接近于横截面的“中间”。可以证明（但我们将不在这里做出）：对于简单之梁的微小弯曲，这中立面会穿过横截面的“重心”。这只有对于“纯”挠曲——即如你不同时对梁拉挽或挤压——才正确。

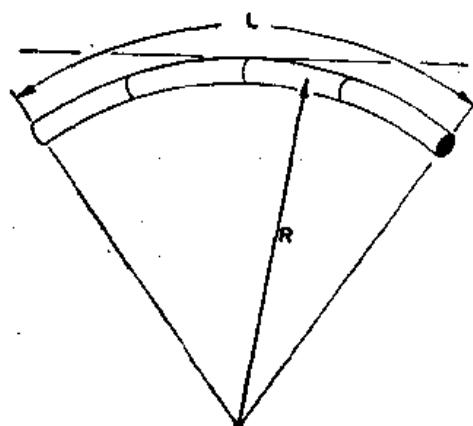


图 38-11 一根弯梁

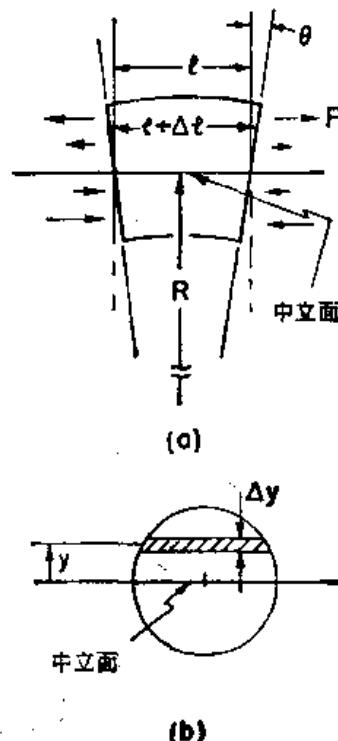


图 38-12 (a)一根弯梁中的一小片段；
(b)梁的横截面

这样，对于纯挠曲来说，梁的一块横向薄片就会如图 38-12(a)所示的那样变形。在该中立面之下的材料具有与从这一中立面量起的距离成正比的压缩胁变；而在其上的材料则

被拉伸，也是正比于与这一中立面间的距离。因此，纵向伸长 Δl 与高度 y 成正比。其比例常数恰好就是 l 给该棒的曲率半径除——见图 38-12：

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}.$$

所以在 y 处的一条小带上每单位面积的力——胁强——也与从该中立面量起的距离成正比：

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y \frac{y}{R}. \quad (38.34)$$

现在让我们来看看产生出的这一胁变之力如何。施于图 38-12 中那一小段上的各个力示如图。如果设想任一个横向剖面，则作用于其上之力在中立面之上是朝向一方，而在中立面之下则是朝另一方。它们成双成对地构成一个“挠矩” M ——这指的是围绕着该中立线的转矩。我们可通过对图 38-12 中那样一小段的一个面上之力乘以与中立面间的距离，然后进行积分因而计算出总转矩来：

$$M = \int_{\text{横截面}} y dF. \quad (38.35)$$

根据式(38.34)， $dF = (Yy/R)dA$ ，因而

$$M = \frac{Y}{R} \int y^2 dA.$$

$y^2 dA$ 的积分就是我们可称之为该几何截面围绕着一根穿过其“质心”的水平轴的“转动惯量”**；我们将它叫作 I ：

$$M = \frac{YI}{R}, \quad (38.36)$$

$$I = \int y^2 dA. \quad (38.37)$$

于是，式(38.36)向我们提供有关挠矩 M 与梁之曲率 $1/R$ 间的关系。梁之“劲度”与 Y 和转动惯量 I 均成正比。换句话说，如果你要用比如说某一定数量之铝来造成一根尽可能强硬之梁，那你就得把尽可能多的铝放在离中立面较远的地方，以便形成一个大的转动惯量。然而，不能把此推至极端，因为这么一来该件东西就将不会如我们所假定的那样弯曲——但却将弯折或扭曲，因而又会变成较脆弱了。可是现在你已明白，为什么结构梁要造成工字形或 H 字形——如图 38-13 所示的那样。

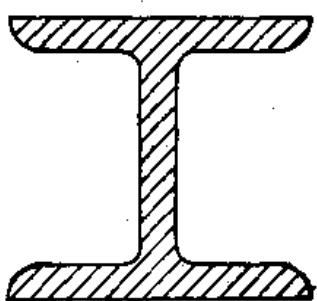


图 38-13 “工字”梁

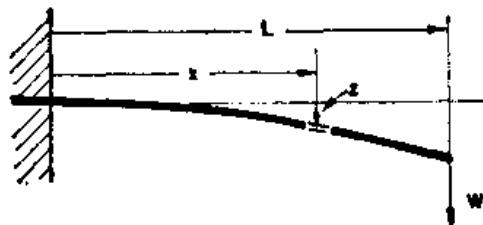


图 38-14 一端加有重量的一根肱梁

作为梁方程(38.36)的一个应用例子，让我们算出有一个集中力 W 作用于其自由端的一根肱梁的偏斜，如图 38-14 所约略示意的那样。（所谓“肱”我们指的只是梁被支持得使其

* 当然，那实际上就是每单位面积具有单位质量的那么一片东西的转动惯量。

一端的位置和斜率都保持固定——它被紧固于一面水泥墙之内。)这根梁的形状将会怎么样呢? 让我们把从固定端量起、距离为 x 处的偏斜量叫作 z ; 我们希望知道 $z(x)$ 。只想对于小的偏斜计算出结果来。并同时假定梁的长度比其截面要大得多。现在, 正如你从数学课中所懂得的, 任一条曲线 $z(x)$ 的曲率 $1/R$ 是由下式给出的:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z / dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}}, \quad (38.38)$$

既然我们只对于小斜率感兴趣——这往往是在工程结构中出现的情况——就可以对 1 比较起来略去 $(dz/dx)^2$, 从而取

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (38.39)$$

我们同时需要知道那挠矩 M 。它是一个 x 函数, 因为它等于围绕任一个横截面的中立轴的转矩。让我们略去梁本身的重量而仅仅考虑在梁端的那个向下之力 W 。(如果有需要的话, 你满可以把梁之重量也放进去。)于是在 x 处的挠矩就是

$$M(x) = W(L-x),$$

因为这正是由重量 W 所施加的围绕着 x 点的转矩——梁必须在 x 处加以承受的转矩。我们就得到

$$W(L-x) = \frac{YI}{R} = YI \frac{d^2 z}{dx^2}$$

或

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{W}{YI}(L-x). \quad (38.40)$$

对此人们可以不施任何技巧就能算出来; 结果得到

$$z = \frac{W}{YI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (38.41)$$

我们已利用了在 $x=0$ 处 $z(0)=0$, 而 dz/dx 也等于零的那些假定。那就是梁的形状。梁端的位移为

$$z(L) = \frac{W}{YI} \frac{L^3}{3}; \quad (38.42)$$

即一根梁的端位移是随长度的立方增加的。

上面在导出梁的近似理论时, 我们曾经假定过梁之横截面不会因梁受挠曲而改变。当梁的厚度比曲率半径微小时, 横截面改变得十分轻微因而我们的结果便是对的。不过, 一般说来, 这一效应是不能忽略的, 正如你能够通过把一块软橡皮擦放在手指上挠曲而容易自行验证出来的那样。如果原来的横截面是一个矩形, 你将会发现, 当它被挠曲时在其底部会鼓胀起来(见图 38-15)。此事之所以发生, 是因为当我们挤压其底部时, 材料便向旁伸

张——正如由泊松比所描述的那样。橡胶是容易弯曲或伸长的, 但它有点象液体, 即很难改变其体积——犹如你在挠曲那块橡皮擦时它所明白表现出来的那样。对于不可压缩的材料, 泊松比应该恰好等于 $1/2$ ——橡胶几乎就是这样。

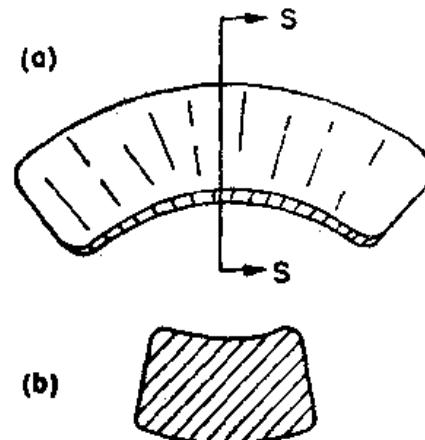


图 38-15 (a)一块被挠曲的橡皮擦; (b)横截面

§ 38-5 弯折

现在要用我们关于梁的理论来理解有关梁或者柱和棒的弯折道理。考虑图 38-16 中一根原来是直的棒，在其两端受一对反向力所挤压而保持为弯曲形状的那种情况。我们要来算出这根棒的形状和施于两端上之力的大小。

令在棒两端之间任一点与直线的偏移为 $y(x)$ ，其中 x 为从一端量起的距离。在图中

P 点的挠矩 M 等于力 F 乘以矩臂，那就是垂直距离 y ，

$$M(x) = Fy. \quad (38.43)$$

利用关于梁的方程 (38.36)，便有

$$\frac{YI}{R} = Fy. \quad (38.44)$$

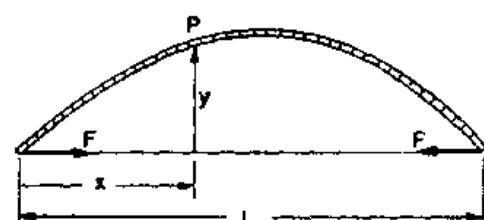


图 38-16 一根被弄弯了的梁

对于小偏移来说，可以取 $1/R = -d^2y/dx^2$ （负号来源于该曲率朝向下）。我们就得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{YI} y, \quad (38.45)$$

这是有关正弦波的微分方程。因而对于小偏移，这样一根受挠曲之梁其曲线为一正弦曲线。这正弦波的“波长” λ 为两端间距离 L 的二倍。若弯曲程度很小，则只是两倍于未受挠曲的棒长。因而该曲线为

$$y = K \sin \pi x/L.$$

对此式取二次微商，便得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} y.$$

将其同式 (38.45) 比较，可以看到力是

$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2}. \quad (38.46)$$

对于微小弯曲来说，力与弯曲位移 y 毫无关系！

这样，在物理上就出现下述事态：如果力小于式 (38.46) 所给出的 F ，那根本就没有什么弯曲。但如果稍为超过这个力，则材料将突然严重弯曲——这就是说，对于超过这一临界力 $\pi^2 YI/L^2$ （常称为“欧勒力”）的那些力，梁是会“弯折”的。如果一座建筑物的楼上负载会超过支柱中的这一欧勒力，则该建筑物即将坍塌。另一个显示这种弯折力最重要的地方是在太空火箭上。一方面，火箭必须在发射台上能够支持它本身的重量并在加速期间能够经得起那些胁强；另方面，有必要把结构重量保持极小，以便使有效负载和燃料容量尽可能地大。

事实上，当力超过欧勒力时，梁未必就完全垮下来。当位移变大时，力会大于上面所求得的，因为过去我们曾略去了式 (38.38)

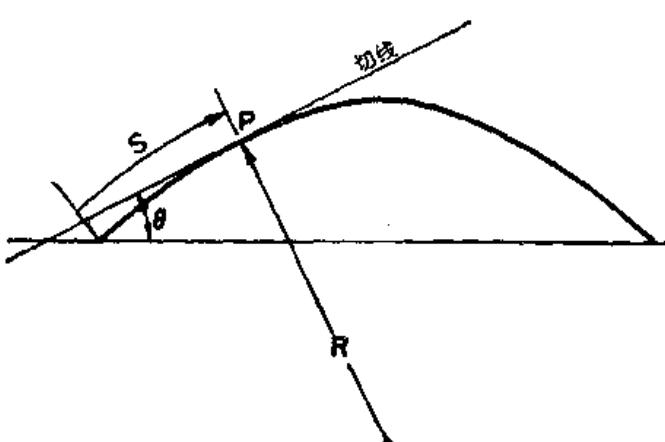


图 38-17 对一根弯曲之梁的曲线可用的 s 和 θ 两坐标

有关 $1/R$ 中的一些项，要求得使梁发生严重弯曲之力，就必须回到那个准确的方程式(38.44)上去，那是在我们采用有关 R 与 y 间的近似关系以前就已经得到了的。式(38.44)具有一种相当简单的几何性质*。要把它算出来稍为有点复杂，但却是相当有趣的。不要用 x 和 y 来描述该曲线，我们宁可用两个新的变数： S ，即沿曲线的距离； θ ，即对于该曲线的切线的倾角。参阅图 38-17。曲率就是该角对于距离的变率：

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}.$$

因此，我们能够将那个准确方程(38.44)写成

$$\frac{d\theta}{dS} = -\frac{F}{YI} y.$$

如果取上式对于 S 的微商并用 $\sin \theta$ 代替 dy/dS ，则我们得

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{YI} \sin \theta. \quad (38.47)$$

[如果 θ 很小，便会回到式(38.45)。一切事情都很顺利。]

现在，这或许会使你感到喜悦或不喜悦，当你知道式(38.47)刚好就是对于大幅度振动之摆所曾获得的同一个方程式——当然，其中 F/YI 是要用另一个常数来代替的。我们早就在第一卷第九章中学习过如何通过数值计算法来求得这样一个方程之解**。你所得到的解答就是某些令人神往的曲线——称为“弹性”曲线。图 38-18 显示对于不同 F/YI 值的三条曲线。

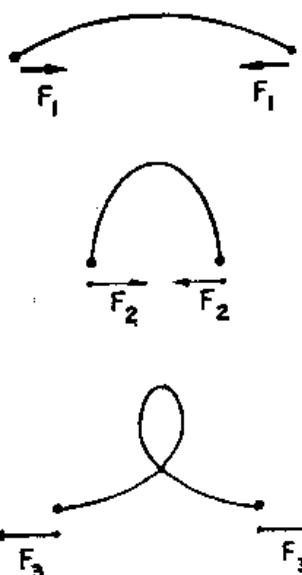


图 38-18 一根受挠曲的棒的曲线

* 偶尔，这一方程也出现在其他的物理情况中——例如，在两块平行平面之间所包含液体的弯月面——而同一种几何解答便都可以通用。

** 这些解也可用那种称为“雅可比(Jacobi)椭圆函数”的一些函数来表达，那是别人曾经算出来的。

39

弹性材料

§ 39-1 胁变张量

上一章我们曾谈到一些特殊弹性体的形变。本章我们将考察一般弹性材料内部所可能发生的情况。我们愿意来描述按某一复杂方式把一大块胶质扭转和挤压时，其内部的胁强和胁变的情况。要完成此事，就得描写在一弹性体中每一点上的局部胁变；对此，我们可以给出每一点上的六个数目的一组分量——那是一个对称张量——来做到。以前我们就曾谈及胁强张量（第三十一章）；现在却需要一个胁变张量。

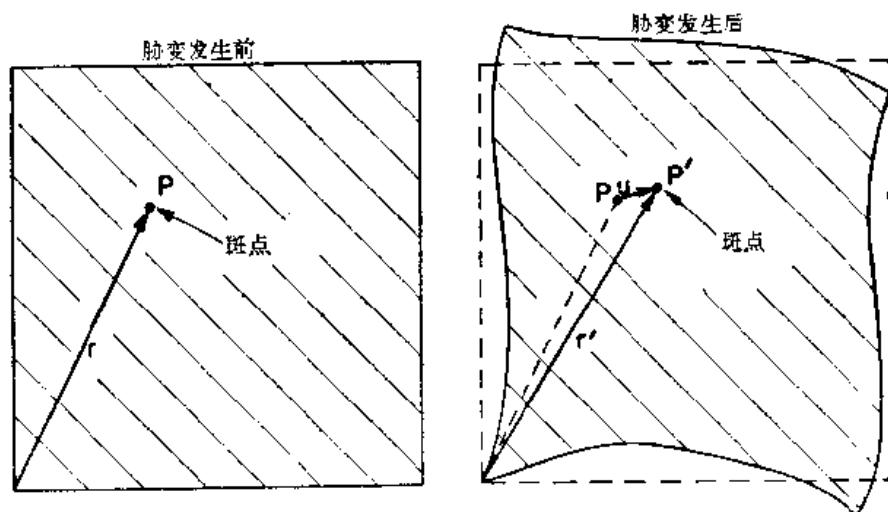


图 39-1 在未受胁变的一块材料中位于 P 点上的斑点，当材料受胁变时会移到 P' 点上来

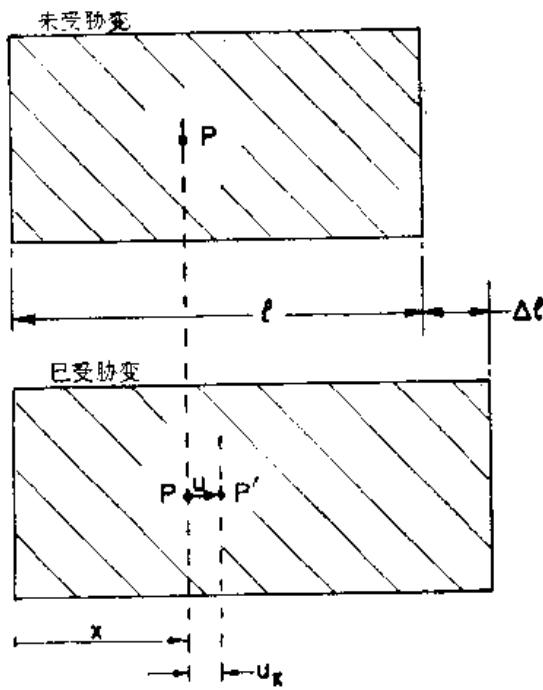


图 39-2 匀拉伸型胁变

考虑从一块起初未受任何胁变的材料出发，并注意当使其受胁变时曾埋置在材料里的一小斑点“灰尘”的运动。原来被置在 P 点、即 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处的斑点，移到如图 39-1 所示的 P' 点、即 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ 处。我们把从 P 至 P' 的矢量位移记作 \mathbf{u} 。于是

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}. \quad (39.1)$$

当然，这位移 \mathbf{u} 依赖于我们是从哪一点 P 出发。因而 \mathbf{u} 就是 \mathbf{r} 的一个矢量函数——或者，如果你喜欢的话，也即是 (x, y, z) 的函数。

让我们首先来考察胁变在整块材料中是常数的那一种简单情况——因而我们就有所谓匀胁变。比方，假设有一块材料，将其作均匀拉伸。仅仅在一个方向——比如在 x 方向——上改变它的长度，如图 39-2 所示。处于 x 处的

点的位移 u_x 与 x 成正比。实际上，

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta l}{l}.$$

我们将 u_x 写成这样：

$$u_x = e_{xx}x,$$

当然，比例常数 e_{xx} 与 $\Delta l/l$ 是同一码事。（你不久就会看到为什么我们要用一个双重下标。）

如果胁变不均匀，则 u_x 与 x 的关系将在材料里逐点改变。对于普遍情况来说，就要用一种局部的 $\Delta l/l$ ，即用下式来对 e_{xx} 下定义：

$$e_{xx} = \partial u_x / \partial x. \quad (39.2)$$

这个数目——它现在是 x , y 和 z 的函数——贯穿整块胶体描述 x 方向的伸长量。当然，此外还可以有沿 y 向和 z 向的伸长。我们用下列两个数值来对之作描述：

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (39.3)$$

也需要能描写那种切型胁变。假设我们想象有一个小立方体在原未受胁变的胶体中表示出来。当这一块胶体被压挤而变形时，立方体可能就要变成一个平行四边形，如图 39-3 所简略指明的那样*。在这一种胁变中，每一质点的 x 方向移动与 y 坐标成正比，

$$u_x = \frac{\theta}{2} y. \quad (39.4)$$

并有一个正比于 x 的 y 向位移，

$$u_y = \frac{\theta}{2} x. \quad (39.5)$$

因此，我们就能够通过写出

$$u_x = e_{xy}y, \quad u_y = e_{yx}x,$$

使其中

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\theta}{2}$$

来描述这一种切型胁变。

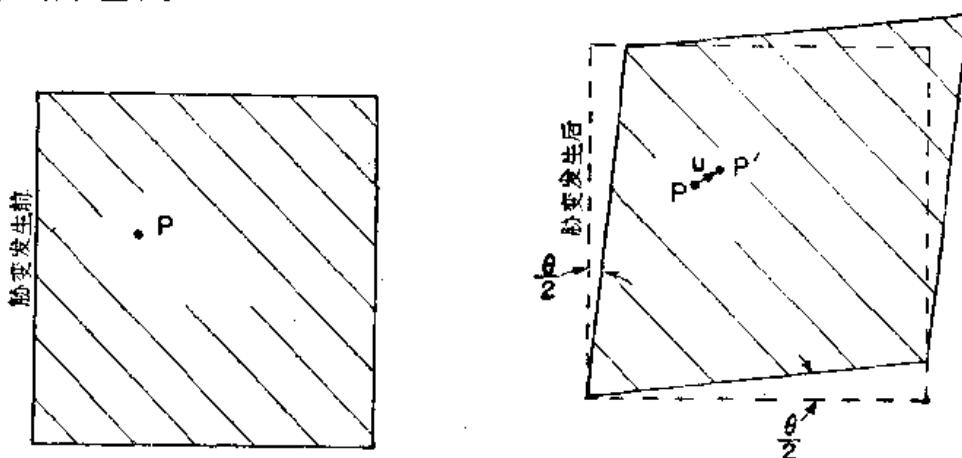


图 39-3 均匀胁变

现在你也许会想到，当胁变不均匀时，我们该可以用下面对 e_{xy} 和 e_{yx} 这两个量所下的定义来描述那普遍型的切胁变：

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (39.6)$$

* 我们暂时选择把总切变角 θ 分成两个相等部分，并使该胁变相对于 x 和 y 对称。

不过这里有一点困难。假定位移 u_x 和 u_y 分别由下式给出：

$$u_x = \frac{\theta}{2} y, \quad u_y = -\frac{\theta}{2} x.$$

这些除了 u_y 的符号倒转过来之外就很象式(39.4)和(39.5)。具备这些位移，胶体中一个小立方体将仅仅转过一个角度 $\theta/2$ ，如图 39-4 所示。并没有什么形变——只不过在空间中的转动罢了，材料未发生过变形；所有原子的相对位置都根本没有改变。应当想办法使纯转动不致包括在我们对切形变的定义之中。关键之点在于：若 $\partial u_y / \partial x$ 和 $\partial u_x / \partial y$ 相等而相反，则将不会有形变；因此，我们可借下列定义来把事情安排妥当：

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y).$$

对于纯转动来说，两者均等于零，但对于纯切变则会得到 e_{xy} 等于 e_{yx} ，正如我们该乐于拥有的那种关系。

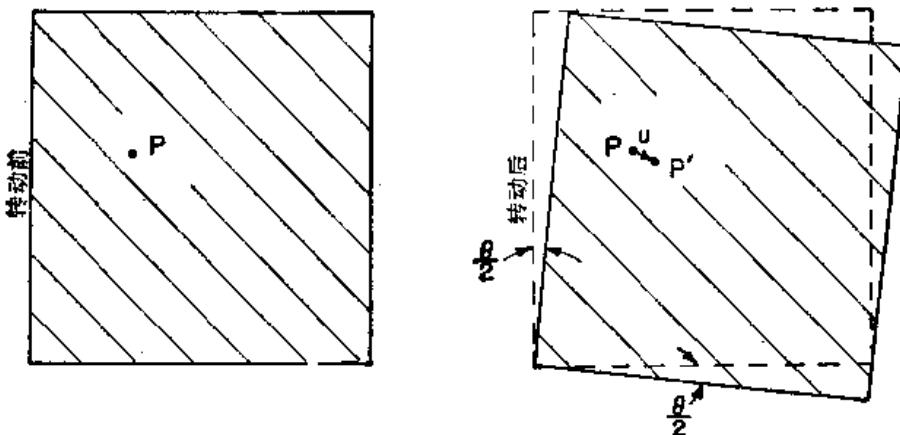


图 39-4 匀转动——没有形变

在最普遍的形变中——这可能包括伸长或收缩以及切变都在内——我们可通过给出九个数值把形变张量定义下来：

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ &\vdots \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{39.7}$$

这些就是形变张量的各项。由于它是一个对称张量——我们的定义使得总是 $e_{xy} = e_{yx}$ ——实际上，它只有六个不同数值。你会记起(见第三十一章)，张量的共同特点是：那些项都会像两个矢量的分量之积那样变换。(若 A 和 B 都是矢量，则 $C_{ij} = A_i B_j$ 便是一个张量。) e_{ij} 的每一项乃是矢量 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ 和算符 $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ 的各分量之积(或这种积之和)，后者我们知道是如同一个矢量那样变换的。让我们令 x_1, x_2, x_3 各代表 x, y, z ，而 u_1, u_2, u_3 各代表 u_x, u_y, u_z ，则可以将这一形变张量的普遍项 e_{ij} 写成

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i), \tag{39.8}$$

式中， i 和 j 各可以是 1, 2, 或 3.

当有一匀胁变——这可包括拉伸和切变——时，所有之 e_{ij} 都是常数，因而可以写出

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z. \quad (39.9)$$

(我们选取了 u 为零的那一点作为 x, y, z 坐标系的原点) 在这种情况下，胁变张量 e_{ij} 会给出坐标矢量 $r = (x, y, z)$ 和位移矢量 $u = (u_x, u_y, u_z)$ 之间的关系。

当胁变不均匀时，胶体的任一部分可能也受到扭转——将有一个局部转动。若形变全都很小，则应该有

$$\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} - \omega_{ij}) \Delta x_j, \quad (39.10)$$

式中 ω_{ij} 是一个反对称张量，

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_j / \partial x_i - \partial u_i / \partial x_j), \quad (39.11)$$

上式能够描述转动。可是，我们将不再对转动关心，因而所关心的就只有那个由对称张量 e_{ij} 所描述的胁变。

§ 39-2 弹性张量

我们已描述了胁变，现在把这些胁变联系到那些内力——材料中的胁强——上去。对于材料中每一部分，假定胡克定律都成立，因而将胁强写成正比于胁变。在第三十一章中，我们曾把胁强张量 S_{ij} 定义为在跨越垂直于 j 轴的单位面积上之力的第 i 个分量。胡克定律申述， S_{ij} 的每一个分量与胁变分量中的每一个都应形成线性关系。由于无论 S 或 e 都各拥有九个分量，因此就会有 $9 \times 9 = 81$ 个可能的系数用来描述材料的弹性。如果材料本身是均匀的，则它们都是常数。现在把这些系数写成 C_{ijkl} ，并由下式定义：

$$S_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (39.12)$$

其中 i, j, k, l 都可取 1, 2, 或 3 的值。既然这些系数 C_{ijkl} 是为把一个张量联系到另一个张量上去的，它们本身也就形成一个张量——一个四阶张量。可以称之为弹性张量。

假定所有的 C 均为已知，而你将一个复杂之力施于某一特殊形状的物体之上，将会有各式各样的形变，而该物体就将形成某一被扭歪了的形状。位移将会怎样呢？你可以看出那是一个复杂的问题。假如你知道了胁变，你便能够由式(39.12)找出胁强来——或者相反。但在任一点上，你所获得的胁强和胁变都将取决于材料的所有其他部分发生的情形。

解决这一问题的最捷途径就是考虑能量。当有一正比于位移 x 之力 F 时，比如说 $F = kx$ ，则对于任一位移 x 所需之功为 $kx^2/2$ 。同理，为使材料发生形变而流入于每单位体积内之功 w 得知是

$$w = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (39.13)$$

在使物体变形时所作的总功则为 w 遍及全部体积的积分：

$$W = \int \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV. \quad (39.14)$$

那么，这就是储藏于材料的内胁强中的势能。现在当物体处于平衡态时，这内能必须是在极小点上。因此，要找出物体中的胁变的问题就可以通过找出贯穿整个物体将能够使 W 取一极小值的那一套位移 u 而得到解决。我们曾在第十九章中提供处理象这一类极小值问题

时所用到的变分法的某些普遍概念。这里不能对这一问题进行更详尽的讨论。

现在我们主要感兴趣的是，关于弹性张量的一般性质我们能够说些什么。首先，很明显，实际上在 C_{ijkl} 中并没有 81 个不同项。由于 S_{ij} 和 e_{ij} 两者都是对称张量，每个就只有六个不同项，因而在 C_{ijkl} 中至多也只能有 36 个不同项。然而，往往比这还会少得多。

让我们来看看立方晶体的特殊情况，在其中，能量密度 w 象是按这样来开始的：

$$w = \frac{1}{2} \{ C_{xxxx} e_{xx}^2 + C_{xxyy} e_{xx} e_{yy} + C_{xyxy} e_{yy} e_{xx} + C_{xyyx} e_{yy} e_{xx} + C_{yyyy} e_{yy}^2 + \dots + C_{vvvv} e_{yy}^2 + \dots \}, \quad (39.15)$$

总共 81 项！但是立方晶体是具有某些对称性的。特别是，如果晶体转过了 90° ，它将具有相同的物理性质。对于在 y 向上拉伸的劲度与对于在 x 向上拉伸的劲度彼此相同。因此，如果我们改变式(39.15)中关于 x 和 y 两坐标方向的定义，能量就不应该改变。对于立方晶体来说，必然有

$$C_{xxxx} = C_{vvvv} = C_{zzzz}. \quad (39.16)$$

其次，我们还能够证明，象 C_{xxyy} 那些项一定会等于零的。立方晶体具有这么一种性质，即在与其中一根晶轴正交的任何一个面的反射之下它是对称的。若我们用 $-y$ 代替 y ，不会有什差别。但当由 y 变至 $-y$ 时 e_{xy} 会变成 $-e_{xy}$ ——以前朝向 $+y$ 的位移现在朝向 $-y$ 了。如果能量不会改变，则当我们作一次反射时， C_{xxyy} 就必须变成 $-C_{xxyy}$ 。但一块经过反射后的晶体与以前的相同，因此 C_{xxyy} 就必须与 $-C_{xxyy}$ 相等。这只有当两者均等于零时才能实现。

你会说，“但同一论证也将使 $C_{vvvv} = 0$ 啊！”不，因为这里共有四个 y 。对于每个 y ，符号都要改动一次，而四个负号就会造成一个正号。因此，若有二个或四个 y ，该项未必是零。只有当出现一或三个 y 时，它才是零。所以，对于立方晶体来说， C 的任一不等于零之项将只有偶数个相同的下标。（上面我们对于 y 所作的论证，显然对于 x 和 z 也都有效。）于是，也许会有象 C_{xxyy} ， C_{zyzy} ， C_{zyyx} ，等等的项。然而已经证明，若把所有的 x 都改成 y ，以及相反（或把所有的 z 和所有的 x 对换，等等），则我们应得——对于立方晶体来说——那同一数值。这意味着，只有三种不同的非零可能性：

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{vvvv} = C_{zzzz}, \\ C_{xxyy} &= -C_{yyxx} = C_{zzzz}, \text{ 等等}, \\ C_{zyzy} &= -C_{yzyx} = C_{zzzz}, \text{ 等等}. \end{aligned} \quad (39.17)$$

于是，就立方晶体来说，能量密度看来象是这样：

$$w = \frac{1}{2} \{ C_{xxxx} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2C_{xxyy} (e_{xx} e_{yy} + e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx}) + 4C_{zyzy} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) \}. \quad (39.18)$$

就各向同性——也就是，非晶的——材料而言，对称性还会更高。那些 C 应该对于坐标系的任一种选择都相同。这时结果变成，在那些 C 中还存在另一个关系式，即

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + C_{zyzy}. \quad (39.19)$$

可以通过下面的一般论证中看出的确是这样。该胁强张量 S_{ij} 必须与 e_{ij} 维持一种同坐标方向完全无关的关系形式——必须只由标量来联系。你会说，“那很容易”。“要从 e_{ij} 得到 S_{ij} 的唯一途径，就是由一个标量常数来乘上。它不过是胡克定律。所以就必须是 $S_{ij} = (\text{常$

数) e_{ij} ”, 那却并不完全对; 因为本来也有可能由单位张量 δ_{ij} 乘以与 e_{ij} 形成线性关系的某一个标量。在这些 e 中, 你能够构成的属于线性的唯一不变量乃是 $\sum e_{ii}$ 。(它如同 $x^2+y^2+z^2$ 那样变换, 是一个标量。)因此, 把 S_{ij} 联系到 e_{ij} 上去的方程的最普遍形式——对于各向同性材料来说——便是

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda (\sum_k e_{kk}) \delta_{ij}. \quad (39.20)$$

(第一个常数往往被写成 2 乘以 μ ; 这样该系数 μ 才会等于我们在上一章中所曾定义过的切变模量。) μ 和 λ 这两常数称为兰美(Lamé)弹性常数。将(39.20)和(39.12)两式比较, 你就会看出

$$\begin{aligned} C_{xxyy} &= \lambda, \\ C_{xyxy} &= 2\mu, \\ C_{xxxx} &= 2\mu + \lambda. \end{aligned} \quad (39.21)$$

因此, 我们已经证明了式(39.19)的确是正确的。你也会看到, 各向同性材料的弹性可由两常数完全提供, 正如我们曾在上一章中说过的。

这些 C 可用以前曾经用过的任两个弹性常数——例如杨氏模量 Y 和泊松比 σ ——来表达。将留给你们对下列各式作出证明:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \frac{Y}{1+\sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \right), \\ C_{xxyy} &= \frac{Y}{1+\sigma} \left(\frac{\sigma}{1-2\sigma} \right), \\ C_{xyxy} &= \frac{Y}{1+\sigma}. \end{aligned} \quad (39.22)$$

§ 39-3 在弹性体中的运动

我们已经指出, 处于平衡中的弹性体其内力本身会自作调整, 以使其能量为极小。现在要来看看, 当内力不平衡时会发生什么情况。让我们说, 有一小部分材料落在某一表面 A 之内, 见图 39-5。如果这一部分处于平衡, 则施于其上的总力 F 就必然为零。可以设想, 这一个力是由两部分组成的。一部分可能发源于象重力那样的“外”力, 它是从某一距离上施于该部分材料而产生的每单位体积之力 f_n 。而总外力 F_n 就是这 f_n 遍及该材料体积的积分:

$$F_n = \int f_n dV. \quad (39.23)$$

在平衡态中, 这个力会被来自附近材料跨越表面 A 所作用之总力 F_n 所抵消。当这部分材料不是处于平衡中时——如果它在运动——则这个内力与外力之和就应等于质量乘加速度。我们该有

$$F_n + F_n = \int \rho \ddot{r} dV, \quad (39.24)$$

其中 ρ 为材料密度, 而 \ddot{r} 为其加速度。现在我们可以结合(39.23)和(39.24)两式, 从而写成

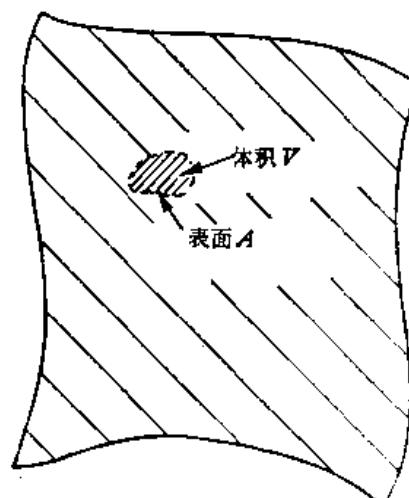


图 39-5 由表面 A 所包围的一个小体积元 V

$$\mathbf{F}_n = \int_V (-\mathbf{f}_n + \rho \ddot{\mathbf{r}}) dV. \quad (39.25)$$

将通过

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}_n + \rho \ddot{\mathbf{r}} \quad (39.26)$$

这一定义来简化我们的写法。于是，式(39.25)便可以写成

$$\mathbf{F}_n = \int_V \mathbf{f} dV. \quad (39.27)$$

被称为 \mathbf{F}_n 的这个量与材料中的胁强有关。该胁强张量 S_{ij} 曾(在第三十一章中)被定义为使跨越单位法线为 \mathbf{n} 的一个表面元 da 上之力 $d\mathbf{F}$ 的 x 分量，由下式给出：

$$dF_x = (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) da. \quad (39.28)$$

于是作用于那一小部分材料上之 \mathbf{F}_n 的 x 分量，就是 dF_x 遍及该表面的积分。将此式代入式(39.27)中的 x 分量，便得

$$\int (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) da = \int_V f_x dV. \quad (39.29)$$

我们已具备一个面积分与体积分间的关系——而这就向我们提醒某种曾在电学中学过的东西。注意，如果忽略式(39.29)左边每个 S 上的第一个下角标 x ，那么它看来就恰好象一个“ \mathbf{S} ”· \mathbf{n} 量——即一个矢量的法向分量——遍及面积的积分。它应该是“ \mathbf{S} ”从该体积跑出去的通量。而倘若利用高斯定律，则可以写成“ \mathbf{S} ”之散度的体积分。事实上，无论该 x 下标存在与否，它总是正确的——不过是一个你可以通过分部积分而得到的数学定理罢了。换句话说，我们可将式(39.29)改写成

$$\int_V \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int_V f_x dV. \quad (39.30)$$

现在就可以抛弃那些体积分，而对 \mathbf{f} 的一般分量写出其微分方程：

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (39.31)$$

上式告诉我们有关每单位体积之力，如何同胁强张量 S_{ij} 联系起来。

关于固体内部运动的理论就是这样作出来的。如果从认识其初位移——比如说，由 \mathbf{u} 所给出的——开始，便可以算出 e_{ij} 。从这些胁变又可以根据式(39.12)而得到胁强。再从这些胁强算出式(39.31)中的力密度 \mathbf{f} ，一旦知道了 \mathbf{f} ，便可以根据式(39.26)而获得材料的加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ ，这会告诉我们关于位移将如何变化的情况。把一切东西都拼凑在一起，便会得到那个令人可怕的有关弹性固体运动的方程式。我们只准备写下对各向同性材料所得到的结果。如果你采用式(39.20)以表达 S_{ij} ，并将 e_{ij} 写成 $\frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ ，则你在最后会得到这么一个矢量方程：

$$\mathbf{f} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.32)$$

事实上，你能够看出 \mathbf{f} 与 \mathbf{u} 的关系必然会具有这一形式。力一定是取决于位移 \mathbf{u} 的二次微商。但 \mathbf{u} 的二次微商依然代表一个矢量的到底有哪些呢？其一，是 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ ；那是一个真正的矢量，唯一的另一个则是 $\nabla^2 \mathbf{u}$ ，因此最普遍的形式即为

$$\mathbf{f} = a \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + b \nabla^2 \mathbf{u},$$

这只是对各常数下了不同定义的式(39.32)罢了。你可能会觉得奇怪，为什么我们没有用到 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ 作为第三项，因为它也是一个矢量嘛。但要记住， $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ 同 $\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ 是一

码事，因而它就是我们所已经有的那两项的一个线性组合。把它加进去不会增加任何新的东西。我们再一次证明了各向同性材料只会有两个弹性常数。

对于这种材料的运动方程，可以令式(39.32)等于 $\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ ——目前略去任何象重力那样的彻体力——并得到

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.33)$$

它看来有点象我们以前在电磁学中所曾有过的波方程式，只不过有一个附加的复杂项。对于弹性处处相同的材料，还可按下述办法看到其一般解的表现情形。你将会记起，任一矢量场都可以写成两矢量之和：一个其散度为零；和另一个其旋度为零。换句话说，我们可令

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (39.34)$$

其中

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0. \quad (39.35)$$

把式(39.33)中的 \mathbf{u} 代以 $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ ，我们便得

$$\rho \partial^2 / \partial t^2 [\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2] = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \mu \nabla^2 (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2). \quad (39.36)$$

通过取这一方程的散度而消去 \mathbf{u}_1 ，

$$\rho \partial^2 / \partial t^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) = (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \mu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_2.$$

由于算符 (∇^2) 和 $(\nabla \cdot)$ 可以掉换位置，我们便能将散度作为一个因子而分解出来，

$$\nabla \cdot \{ \rho \partial^2 \mathbf{u}_2 / \partial t^2 - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_2 \} = 0. \quad (39.37)$$

既然根据定义， $\nabla \times \mathbf{u}_2 = 0$ ，则整个括号 { } 的旋度也会等于零；因而该括号本身就应恒等于零，即

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_2 / \partial t^2 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_2. \quad (39.38)$$

这是关于以速率 $c_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ 运动之波的矢量波方程。由于 \mathbf{u}_2 之旋度为零，就没有任何切变会与这一种波有联系；这种波不过是上一章中曾经讨论过的那种压缩——声音型的——波，而其速度就恰恰是我们曾为 $c_{\text{声速}}$ 所找到的。

同样地——通过取式(39.36)的旋度——我们能够证明 \mathbf{u}_1 会满足方程

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_1 / \partial t^2 = \mu \nabla^2 \mathbf{u}_1. \quad (39.39)$$

这又是关于具有速率 $c_1 = \sqrt{\mu / \rho}$ 之波的矢量波方程。由于 $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$ 为零， \mathbf{u}_1 便不会产生密度变化；这个矢量 \mathbf{u}_1 相当于上一章中我们曾见过的那种横波或切型波，而 $c_1 = c_{\text{切型波}}$ 。

要是我们希望知道在一各向同性材料中的各静态胁强，原则上本来可以通过令 f 等于零——或等于象来自重力 ρg 的那种静彻体力——在与施于该大块材料的表面上之力有关的一些条件下，求解方程(39.32)而找到。这比起电磁学中的相应问题稍为困难一些。之所以较难，首先由于方程稍微难于掌握；而其次，则由于我们很可能感兴趣的弹性物体其形状往往远较复杂。在电磁学中，我们所感兴趣的通常是对于环绕象柱体、球体等相对简单的几何形状来求解麦克斯韦方程组，因为这些都是电学设备的合适形状。在弹性学中，我们所希望分析的东西却可能具有十分复杂的形状——象一个曲柄钩，或汽车里的曲轴，或汽轮机中的转子。象这样的问题有时可以通过数值计算法，即应用我们以前曾提及过的最小能量原理来近似地算出。另一种办法是采用物体模型，利用偏振光以在实验上测量出那些胁变。

工作是这样进行的：当一种透明的各向同性材料——比如，一种象留西特那样的透明塑料——被置于胁强之下时，它就会变成双折射的了。如果你用偏振光照射它，偏振面会被旋转一个与胁强有关的角度。通过测量这个旋转角度，你就能测定该胁强了。图 39-6 表明这

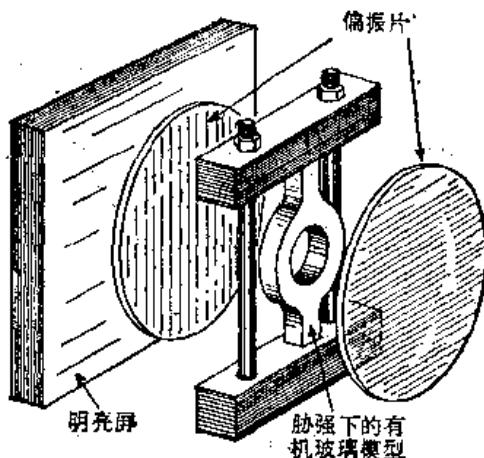


图 39-6 用偏振光测量内胁强

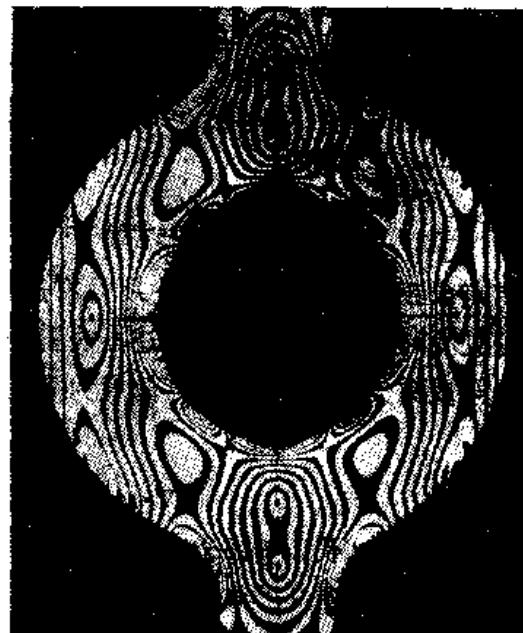


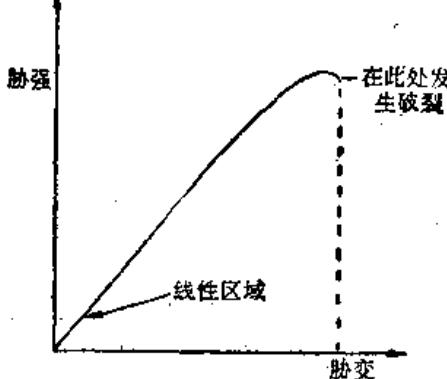
图 39-7 从两块互相交叉的偏振片间所看到的一件受到胁力的塑料模型 [转载自 F. W. Sears, Optics, 1949]

样一部装置看来会象个什么样子。图 39-7 则是处于胁强之下的一件形状复杂的光测弹性模型的照片。

§ 39-4 非弹性行为

迄今在我们所谈及的一切情况中都曾假定胁强正比于胁变；一般说来，这是不真实的。图 39-8 显示一种可延性材料的典型胁强-胁变曲线。对于小胁变来说，胁强与胁变的确成正比。可是，当越过了某一点之后，胁强与胁变的关系就开始与直线有所偏离了。就许多种

——我们每称之为“脆”的——材料来说，只要稍为超过该曲线在那里开始弯下去的那个胁变，物体就会破裂。一般说来，在该胁强-胁变关系中还有其他复杂性。例如，若你对一物体施加胁变，则胁强可能最初会很高，但随着时间胁强就会慢慢降低。而且，如果你已达到了一个高胁强，但仍未达到该“破裂”点，则当你减少胁变时，胁强将会沿另一条曲线返回来。即有一个小小滞后效应（象在磁性材料中我们曾在 B 和 H 的关系上见到的）。

图 39-8 大胁变的一个典型
胁强-胁变关系

时发生断裂。另一些材料则会在最大切胁强达到某一个值时破裂。粉笔是一种张性比切性弱得多的材料的例子。如果你将一支粉笔在黑板上拉一拉，粉笔将在垂直于所加胁强的方向上断裂，如图 39-9(a)所示。之所以在垂直于外加力的方向上断裂，是由于粉笔不过是一堆易于拉开的凑合在一起的粒子而已。然而，这一材料却较难于发生切变，因为其中粒子会彼此互相妨碍。现在你必然会记起，当有一根处于扭转中之棒时，是有切力环绕着它的。并且，也曾经证明过，切力相当于张力与压力在 45° 角上的组合。为了这些原因，如果你扭转

材料将会破裂的那个胁强，一种材料与另一种材料的差异很大。有些材料在最大张胁强达到某一定值

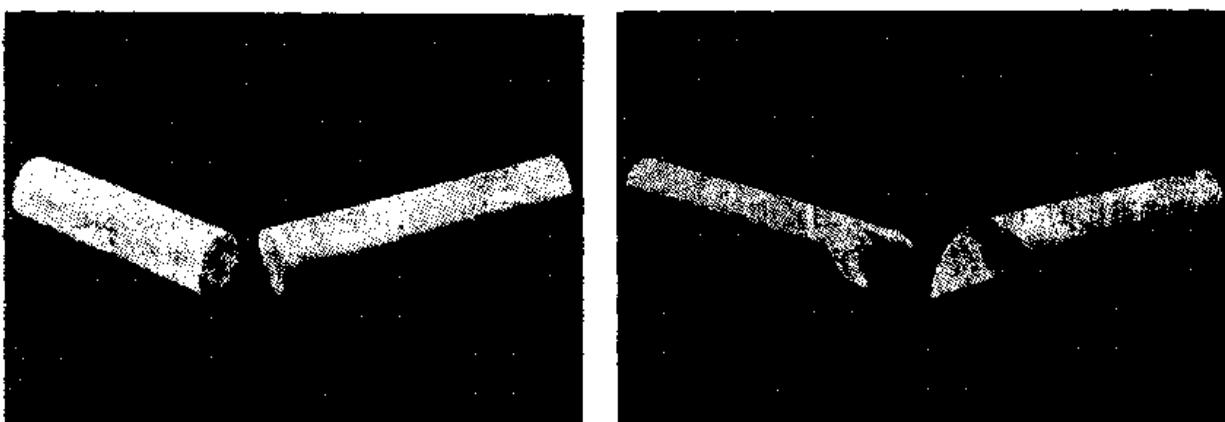


图 39-9 (a)对两端拉拽而引起断裂的一支粉笔; (b)由扭转而断裂的粉笔

一支黑板上用的粉笔，它将沿着起初与轴成 45° 角的一个复杂的面而破裂。一支这样破裂了的粉笔的照片示如图39-9(b)，粉笔是在张力最大的地方破裂的。

别的材料会以奇特而复杂的方式行动。材料越复杂，其行为就越发有趣。如果取一条“耐火塑胶布围巾”，把它揉成一团，并将其投掷到桌面上，它将会缓慢地自己舒展开来从而恢复它原来的平坦形式。乍一看来，我们也许会误认为是惯性在阻碍着它回复它的原来样子。然而，简单的计算表明，惯性对于发生该效应还要小好几个数量级。看来会有两种重要的互相对抗的效果：材料内部存在某种会“记起”它原先所有过的形状的“东西”，并“试图”恢复原样；但还有某种其他东西则是“较疼爱”那新的形状，而正在“阻碍”着回到其先前的形态上去。

我们将不尝试去描写耐火塑胶布中起作用的那种机制，但你可从下述模型中获得关于这种效应会怎样得来的一些概念。假设你想象有一种由长而柔顺但却坚韧的纤维与充满着粘滞性液体的某些空洞互相混合在一起而构成的材料。也想象从一个洞到另一个洞存在一些狭窄渠道使得液体能够从一个洞缓慢地流入它的邻洞。当我们揉搓一片这样的材料时，就已经弄弯了那些长纤维，把在一处洞里的液体挤压出来而逼进到那些正在被拉伸着的其他洞穴中去。当我们把那片材料释放时，长纤维会试图恢复它们原来的形状。但要这样做时，必须将液体全都逼回到原先的位置上去——由于粘滞性的缘故这将进行得相当慢。在我们将该片东西揉搓时所加之力，比起由那些纤维所施之力要大得多。我们能够迅速地将其揉搓，但恢复的过程就较为缓慢了。这无疑是那些大而强硬的分子与一些较小而易移动的分子在该耐火塑胶布围巾中互相配合才对它的行为负责的。这一概念也符合于这么一桩事实：材料当较暖时会比冷时更迅速恢复它的原来形状——热量使那些小分子的可动性提高了（降低了粘滞性。）

虽然我们刚才正在讨论胡克定律如何会崩溃，但引人注目之处却是胡克定律不但对于大的胁变会发生崩溃，而且一般都应该是这样。可通过考察材料中的胁变能量而获得为什么会有这样的某些概念。提出胁强正比于胁变，同提出胁变能量随胁变的平方而变化，是同一回事。假设把一根棒扭转了一个小角度 θ 。如果胡克定律正确，则胁变能量应当与 θ 的平方成正比。如果我们假定这一能量为旋转角度的一个任意函数；那就可把它写成环绕着零角度的泰勒展开式：

$$U(\theta) = U(0) + U'(0)\theta + \frac{1}{2}U''(0)\theta^2 + \frac{1}{6}U'''(0)\theta^3 + \dots \quad (39.40)$$

转矩 τ 等于 U 对角度的微商; 我们该有

$$\tau(\theta) = U'(0) + U''(0)\theta + \frac{1}{2}U'''(0)\theta^2 + \dots \quad (39.41)$$

现在, 若从那平衡位置算起来量度我们的角度, 则第一项便是零。因而第一个留下来之项是与 θ 成正比的; 而对于足够小的角度, 它将比那个 θ^2 项占优势。[事实上, 材料内部会足够对称, 以致 $\tau(\theta) = -\tau(-\theta)$; 于是这个 θ^2 项便将为零, 因而与线性的歧离就该只有来自那 θ^3 项了。然而, 为什么这对于压缩和伸张都应该适用, 就找不出理由来了。]我们还未能加以解释的事情在于, 为什么材料往往会在那些高阶项变成明显之后不久就断裂。

§ 39-5 计算弹性常数

作为有关弹性学的最后一个题目, 我们愿意来证明: 从那些构成材料的原子的性质的某些知识, 人们本就可试图算出该材料的弹性常数来的。我们将仅仅考虑象氯化钠那样的离子立方晶体的简单情况。当一晶体被施以胁力而呈现胁变时, 它的体积和形状都会发生变化。这种变化引起了晶体中势能的增加。要算出这胁变能量的变化, 得先弄清楚原子将会跑到哪里去。在一些复杂晶体中, 原子将按十分复杂的方式重新安排它们自己, 以便使其总能量尽可能地小。这使得对胁变能量的计算相当困难。然而, 在一简单立方晶体的情况下, 就很容易看到将会发生的事情。晶体内部的形变在几何形态上将与晶体外部边界的形变相似。

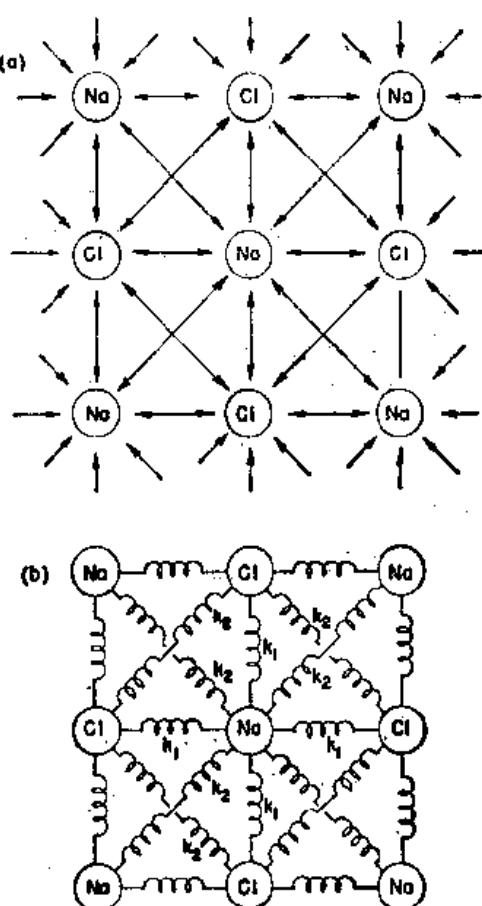


图 39-10 (a) 我们正在计入的一些原子间力; (b) 各原子由弹簧联系起来的模型

我们能够按照下述办法对立方晶体算出其弹性常数。首先, 在晶体中每一对原子之间, 我们假定某一力律。然后, 算出当晶体离开其平衡状态而发生形变时其中内能的变化。这将向我们提供与所有胁变的平方都成正比的一个在能量与胁变之间的关系。将这样所得到的能量与式(39.13)相比较, 就能够验明每一项的系数与哪一个弹性常数 C_{ijkl} 符合一致。

在我们的例子中, 将假定一个简单力律: 两相邻原子之间的力乃是~~簇力~~, 即力作用于两原子的连线上。应该预期, 离子晶体中之力与此相类似, 因为它们基本上都只是库仑力。(共价键力往往较为复杂, 因为它们能够施一侧向力于相邻原子之上; 我们将不考虑这种复杂性。)我们也将仅仅包括每一原子与其最近邻及次近邻之间的力。换句话说, 我们将做出略去超过次近邻的一切力的一种近似化。在 xy 平面上将要包括进去之力示如图 39-10(a)。当然, 在 yz 和 zx 两平面上的相应之力也都应当包括进去。

由于我们只对适用于小胁变的那种弹性常数感兴趣, 因而就只需要在能量中与胁变的平方成正比的那些项, 所以就可以想象每一对原子间之力是随位移按线性变化的。于是, 我们还可以设

想，每一对原子是由一条线性弹簧联系着的，如图39-10(b)所示。所有连接一个钠原子与一个氯原子间的弹簧都应具有同一弹性常数，比方说 k_1 。在两钠原子间和两氯原子间的弹簧本来可具有不同常数，但将通过取它们相等而使讨论较简单些；我们将统称之为 k_2 。（在看出了计算如何进行之后，就该可以在以后的计算中取不同的 k 值。）

现在假定晶体的形变是通过由胁变张量 e_{ij} 所描述的那种匀胁变产生的。在一般情况下，它将具有牵涉到 x 、 y 和 z 的各种分量，但现在我们将仅仅考虑具有 e_{xx} 、 e_{yy} 和 e_{zz} 这三个分量的那种胁变，以便易于形象化地来进行考察。如果我们挑出一个原子作为原点，则其他每一原子的位移都可由象(39.9)那样的方程来给出：

$$\begin{aligned} u_x &= e_{xx}x + e_{xy}y, \\ u_y &= e_{zy}x + e_{yy}y. \end{aligned} \quad (39.42)$$

假设把那个在 $x=y=0$ 处的原子叫做“1号原子”，并如图39-11所示的那样对在 xy 平面上它的一些近邻也加上号码。又把点阵常数称为 a ，我们便得到罗列于表39-1 上的那些 x 向和 y 向位移 u_x 和 u_y 。

现在可以算出储藏于那些弹簧中的势能，那是 $k/2$ 乘以每一条弹簧的伸长之平方。例如，在原子 1 与原子 2 间的水平弹簧中的能量就是

$$\frac{k_1(e_{xx}a)^2}{2}. \quad (39.43)$$

注意在第一级近似上，原子 2 的 y 向位移并不会改变连结原子 1 与原子 2 间的那条弹簧的长度。然而，要获得一条象连接到原子 3 的那种对角线弹簧的胁变能量，就必须算出由于水平和竖向两位移所引起的长度改变。对于偏离该原来立方体的微小位移来说，我们可以写出到达原子 3 那个距离的改变乃等于 u_x 和 u_y 分别在该对角线方向上的分量之和，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y).$$

利用从表上所得到的 u_x 和 u_y 值，便可获得能量

$$\frac{k_2}{2} \left(\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{k_2 a^2}{4} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yx})^2. \quad (39.44)$$

对于在 xy 平面上的所有弹簧的总能量，我们需要八个象(39.43)和(39.44)式那样的项之和，称这一能量为 U_0 ，便有

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{a^2}{2} &\left\{ k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yx})^2 + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yy} - e_{xy} + e_{yx})^2 + k_1 e_{xy}^2 \right. \\ &\left. + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yx})^2 + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yy} - e_{xy} + e_{yx})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (39.45)$$

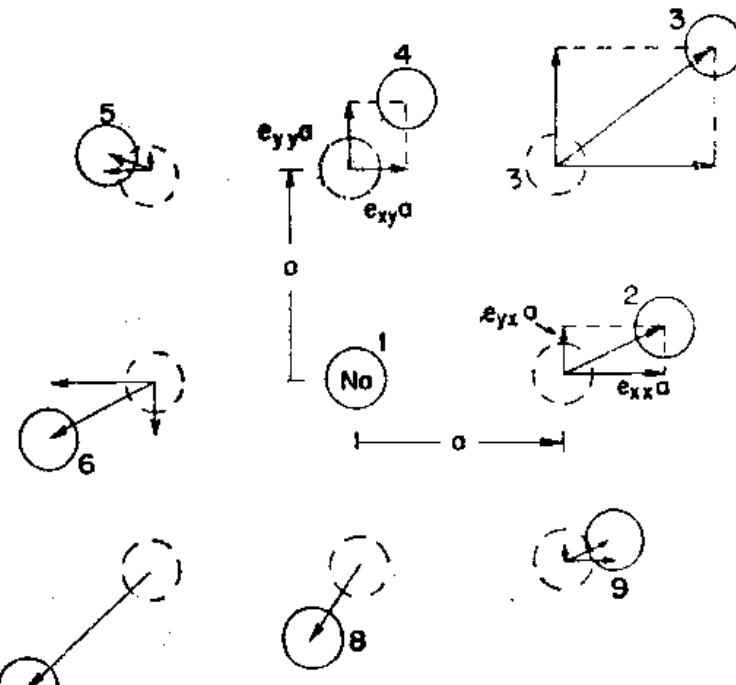


图 39-11 1 号原子的最近邻及次近邻的位移(经过夸大的)

表 39-1

原 子	位 置 x, y	u_x	v_y	k
1	0, 0	0	0	—
2	$a, 0$	$e_{xx}a$	$e_{yy}a$	k_1
3	a, a	$(e_{xx}+e_{yy})a$	$(e_{yx}+e_{yy})a$	k_2
4	$0, a$	$e_{yy}a$	$e_{yy}a$	k_1
5	$-a, a$	$(-e_{xx}+e_{yy})a$	$(-e_{yx}+e_{yy})a$	k_2
6	$-a, 0$	$-e_{xx}a$	$-e_{yx}a$	k_1
7	$-a, -a$	$(e_{xx}+e_{yy})a$	$(e_{yx}+e_{yy})a$	k_2
8	$0, -a$	$-e_{yy}a$	$-e_{yy}a$	k_1
9	$a, -a$	$(e_{xx}-e_{yy})a$	$(e_{yx}-e_{yy})a$	k_2

要获得连接到原子 1 上去的所有弹簧的总能量，还必须对式(39.45)中的能量再添加一项。虽然我们只有随变的 x 向和 y 向分量，但仍然有在 xy 平面以外的与次近邻联系着的某些能量，这附加的能量就是

$$k_2(e_{xx}^2a^2+e_{yy}^2a^2). \quad (39.46)$$

弹性常数与能量密度 w 间的关系由式(39.13)给出。我们已计算出来的能量是与一个原子联系着的，或毋宁说，是两倍于每一原子的能量，因为每条弹簧的能量之半必须配给由它连接着的两个原子中的每一个。由于每单位体积里共有 $1/a^3$ 个原子， w 与 U_0 的关系便是

$$w = \frac{U_0}{2a^3}.$$

要找出弹性常数 C_{ijkl} ，只须展开式(39.45)中的那些平方式——再加上式(39.46)的那些项——并把 $e_{ij}e_{kl}$ 的系数同式(39.13)中的相应系数作比较。例如，把 e_{xx}^2 和 e_{yy}^2 项都搜集起来，我们便得到这样一个因子

$$(k_1+2k_2)a^2,$$

因而

$$C_{xxxx}=C_{yyyy}=\frac{k_1+2k_2}{a},$$

对于那些剩下来之项，就有一点儿复杂了。由于我们不能够对诸如 $e_{xx}e_{yy}$ 和 $e_{yy}e_{xx}$ 这两种积之项区别开，在这里的能量表达式中这种项的系数就应等于式(39.13)中该两项之和。在式(39.45)中 $e_{xx}e_{yy}$ 的系数为 $2k_2$ ，因而我们有

$$(C_{xxyy}+C_{yyxx})=\frac{2k_2}{a}.$$

但由于在我们的晶体中的对称性， $C_{xxyy}=C_{yyxx}$ ，因而就有

$$C_{xxyy}=C_{yyxx}=\frac{k_2}{a}.$$

按照相似过程，也可以得到

$$C_{xyxy}=C_{yxyx}=\frac{k_2}{a}.$$

最后我们将注意到，任一牵涉到 x 或 y 只有一次之项都为零——正如上面曾从对称方面的论证所断定的。综合上述结果：

$$\begin{aligned}
 C_{xxxx} = C_{yyyy} &= \frac{k_1 + 2k_2}{a}, \\
 C_{xyxy} = C_{yxzx} &= \frac{k_2}{a}, \\
 C_{xxyy} = C_{yyxx} = C_{zyyz} = C_{yzzx} &= \frac{k_3}{a}, \\
 C_{zxxz} = C_{zyzy} = \dots &= 0
 \end{aligned} \tag{39.47}$$

我们已能够把大块材料的弹性常数联系到出现在常数 k_1 和 k_3 的那些原子性质上去了。在我们的特殊情况下, $C_{xyxy} = C_{xxyy}$ 。结果变成——正如你也许会从计算进行的方式中看到的——对于立方晶体来说, 这些项始终相等, 不管被计进去的力项共有多少个, 只要力是沿着连接每对原子间之线作用着的——这就是说, 只要存在于原子之间的力是象弹簧那样, 而不具有你也许会从一根肱梁那里得到的(以及你在共价键中所确实得到的)那种偏向部分。

我们可以用测定弹性常数的实验结果来核对这一结论。在表 39-2 上所给出的是若干种立方晶体的三个弹性系数的观测值*。你将会注意到, C_{zxxz} 与 C_{xyxy} 一般不相等。原因是, 在象钠和钾那些金属中原子间的力并不沿连接着原子间的直线, 如同我们在上述模型中所假定的。金刚石也不会服从该定律, 因为其中之力是共价力, 具有某些方向性——那些键会倾向于指着四面体角。象氟化锂、氯化钠那样的离子晶体, 的确具有我们在模型中所假定的几乎全部那些物理性质, 因而 C_{xxyy} 和 C_{xyxy} 就几乎相等。但不清楚为什么氯化银就不满足 $C_{xxyy} = C_{xyxy}$ 这一条件。

表 39-2* 立方晶体的弹性模量(以 10^{12} 达因/厘米²为单位)

	C_{xxxx}	C_{zxxz}	C_{xyxy}
Na	0.055	0.042	0.049
K	0.046	0.037	0.026
Fe	2.37	1.41	1.16
金刚石	10.76	1.25	5.76
Al	1.08	0.62	0.23
LiF	1.19	0.54	0.53
NaCl	0.486	0.127	0.128
KCl	0.40	0.062	0.062
NaBr	0.33	0.13	0.13
KI	0.27	0.043	0.042
AgCl	0.60	0.36	0.062

* 转载自 C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956, p. 93.

* 在文献中你将常看到另一种不同记法也在使用。比如, 人们往往写成 $C_{xxxx} = C_{11}$, $C_{xxyy} = C_{12}$ 和 $C_{zyzy} = C_{44}$ 。

40

干水的流动

§ 40-1 流体静力学

流体，特别是水的流动这一课题使每个人都神魂颠倒。我们均能记起自己小时候，在澡盆里或在泥浆水坑里与那种奇怪的东西玩耍。当我们逐渐长大时，便会注视着河流、瀑布、以及旋涡水塘，因而被这种相对于固体来说似乎象是活生生的物质所迷住。流体的行为在许多方面都很出人意外并且十分有趣——它是本章和下一章的课题。一个小孩企图在街道上阻塞一股小水流的努力，以及他对水会选择它的途径的那种奇特方式所感到的惊异，与我们长年来对认识流体流动的尝试，具有类似性质。我们试图获得描述流动的那些定律和方程式——在我们的认识方面——来垒筑我们的水坝。我们将在这一章中描述这些尝试。而在下一章中，将描述水如何会冲出水坝而逃避我们探索它的一切尝试的那种独特方式。

假定关于水的基本性质你们都已熟悉了。区别流体与固体的一个主要性质就是流体不能在任何时间内维持一个切胁强。如果我们对流体施以一切力，它将在这切力之下运动。象蜜糖那样较稠的液体，比起象空气或水的流体来就不那么容易流动。对一流体量度其屈服的难易程度的乃是它的粘滞性。在本章中，我们将只考虑其中粘滞性可以忽略的那些情况。粘滞性将在下一章中才考虑进去。

我们将从考虑流体静力学，即流体在静止不动时的理论开始。当流体静止时，并没有任何切力（甚至对于粘滞性液体亦然）。因此，流体静力学的定律是：胁强总是垂直于流体内的任一个面。每单位面积的这一法向力叫做压强。从在一静止流体中不存在切力这一事实出发，就可以推断出压强对于一切方向都相等（图 40-1）。我们将让你这样来取乐，即证明若在流体中的任一个面上没有切力，则压强必然会在任一方向上都相同。

在一流体中的压强，可以逐点变化。例如，在地面上某一种静流体中，压强将由于流体

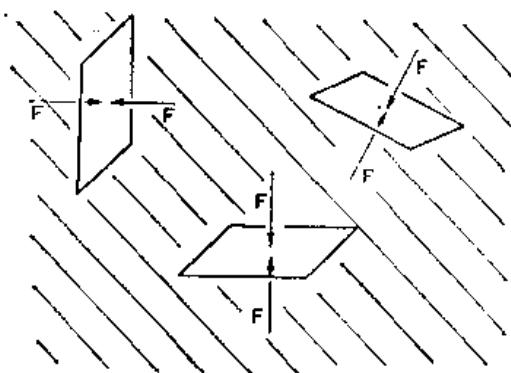


图 40-1 在一静流体中，跨过任一个面的单位面积之力与该面垂直，并且对于所有一切取向之面都相同

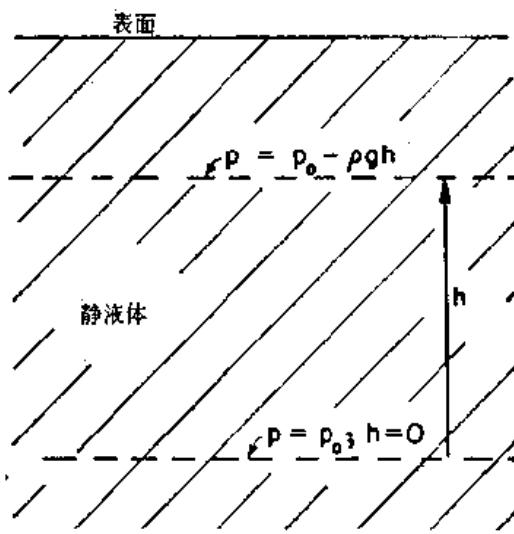


图 40-2 在一静液体中的压强

的重量而随高度变化，如果该流体的密度被认为不变，并如果称某一任意零水平的压强为 p_0 （图40-2），则在高于这一点的高度 h 上的压强就是 $p = p_0 - \rho gh$ ，其中 g 为每单位质量的重力。因此，这一组合

$$p + \rho gh$$

在静流体中是一恒量。这个关系式你们总会熟悉，但现在却要来导出一个上式只不过是一种特殊情况的更为普遍的结果。

如果考虑水的一个小立方体，那么作用于其上的来自压强方面的净力是什么呢？因为在任一点压强在所有各个方向上都相同，所以就只有由于压强逐点变化才会形成每单位体积中的净力。假设压强在 x 方向上正在变化——而我们所选取的各坐标轴方向都平行于该立方体的各边。这样施于 x 处之面上的压强就会提供一个 $p\Delta y\Delta z$ 之力（图40-3），而在 $x+\Delta x$ 处之面上的压强则提供 $-[p + (\partial p / \partial x) \Delta x]\Delta y\Delta z$ 之力，因而净力为 $-(\partial p / \partial x)\Delta x\Delta y\Delta z$ 。如果我们考虑这一立方体的其余各对表面，便将容易看出，每单位体积的来自压强方面之力为 $-\nabla p$ 。若除此之外还有别种力——诸如重力——则这一压强就必须对之抵消才能得到平衡。

让我们取一个这种附加力可以由一势能来加以描述——诸如在重力情况下就理该如此的——那种场合；我们将令 ϕ 代表每单位质量的势能。（比如，对于重力， ϕ 就恰好是 gz ）。每单位质量之力通过 $-\nabla\phi$ 用这势来表出，因而若 ρ 为该流体密度，则每单位体积之力就是 $-\rho\nabla\phi$ 。为取得平衡，这种每单位体积之力加上那种压强方面的每单位体积之力就必须给出零：

$$-\nabla p - \rho\nabla\phi = 0. \quad (40.1)$$

式(40.1)就是流体静力学方程。在一般情况下，它不会有解答。若密度在空间中按任意方式变化，就没有办法使得这些力互相抵消，因而该流体就不会处于一静态平衡中。此时对流将开始出现。我们从这一方程就可以清楚地看出，因为那压强项是一纯粹陡度，而对于一个可变的 ρ 则那另一项并不是陡度。只有当 ρ 是一常数时，该势项才是一纯粹陡度。此时方程就有一个解答

$$p + \rho\phi = \text{常数}.$$

另一种容许流体静力平衡的可能性是， ρ 仅为 p 的函数。然而，我们将丢下流体静力学这一课题，因为它比起那流体动起来的情况总不那么有趣。

§ 40-2 运动方程

首先，将按照一种纯抽象的、理论的方式来讨论流体的运动，然后才考虑一些特殊例子。要描述流体的运动，我们必须给出它在每一点上的性质。比方，在不同地方，水（让我们称该流体为“水”吧）以不同速度运动。因此，要规定流动的特性，就必须给出在任一点和任一时刻速度的三个分量。如果能够找出确定速度的方程式，那么我们便该懂得流体在任何时刻是怎样运动着了。然而，速度并非流体所具有的逐点变化的唯一性质。我们刚才已讨论过从一点至另一点的压强变化。此外还有其他各种变量，可能也有密度方面的逐点变化，并

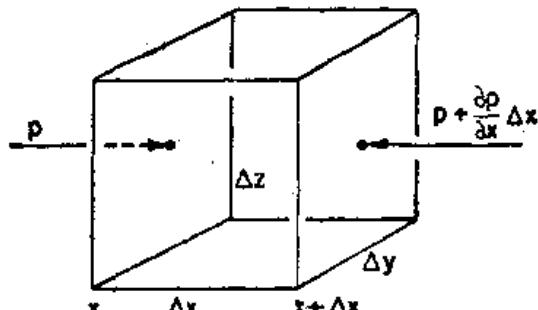


图40-3 施于立方体上的净压
力为每单位体积 $-\nabla p$

且, 该流体可能是一导体, 其中载有在大小和方向上都会发生变化的密度为 j 的电流。可能又有逐点变化着的温度或磁场, 等等。因此, 所需用以描述整个情况之场的数目就将取决于问题到底有多么复杂。有在其中电流和磁场对于确定流体行为都会起主要作用的一些有趣现象; 这一部门称为磁流体动力学, 目前已受到极大注意。然而, 我们将不讨论这些较复杂情况, 因为在复杂性较低的水平上就已经有一些满有趣味的现象, 而即使这些较初级的水平也将表现出足够的复杂性。

我们将考虑其中没有磁场也没有导电的那种情况, 并将不对温度操心, 因为我们将假定密度和压强会按照唯一的方式确定任一点的温度。事实上, 还要作出密度不变的假定——设想该流体基本上是不可压缩的——以减少工作的复杂性。换句话说, 我们是在假定压强变化竟会那么小, 以致由之而产生的密度变化可以忽略不计。如果情况不是这样, 则将遇到越出这里即将要加以讨论的范围之外的一些现象——比如说, 声波或冲击波的传播。我们已在某种程度上讨论过声波和冲击波的传播, 因而现在就将通过作密度 ρ 是一恒量的假定, 把我们关于流体动力学的考虑与这些其他现象隔离开来。不难判定, 在什么时候这 ρ 不变的假定才是一个好的假定。我们可以说, 若在流体中的流动速度比起声波的速率来小得多, 则无需担心密度的变化。水逃避我们对之作理解的尝试并不与密度不变这一近似性有关。那些的确会容许它逃避为人们所理解的复杂性将在下一章中讨论。

在有关流体的普遍理论中, 人们必须从物态方程出发, 那是联系该流体中的压强和密度的。在我们的近似程度上, 这一物态方程只不过是

$$\rho = \text{常数}.$$

那么, 这就是关于我们各变量间的一个关系式了。次一个关系式表达物质守恒——若物质是从某一点流出的, 则所遗留下来的量中就一定有所减少。设该物体的速度为 v , 则单位时间流经单位面积的质量就是 ρv 垂直于该面的分量。我们曾在电学中有过一个相似关系式。也已从电学中认识到这么一个量的散度会给出每单位时间密度的减少率。同样, 方程

$$\nabla \cdot (\rho v) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (40.2)$$

表达了关于流体的质量守恒; 它是流体动力学中的连续性方程。在我们的近似程度、即在不可压缩流体的那种近似上, ρ 是恒量, 因而连续性方程就仅仅是

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (40.3)$$

流体速度 v ——象磁场 B 那样——具有零散度。(流体动力学方程往往酷似电动力学方程; 这就是为什么我们要先学习电动力学的缘故。有些人却从相反方面论证; 认为人们应先学习流体动力学, 以便此后能更易于理解电学。可是电动力学实际上要比流体动力学容易得多。)

我们要从牛顿定律得到下一个方程, 而牛顿定律向我们说明速度是如何由于力的作用而发生变化的。流体中一个体积元的质量乘以其加速度就应等于施于此体积元上之力。取一个单位体积元, 并将每单位体积之力写成 f , 便有

$$\rho \times (\text{加速度}) = f.$$

我们将把这个力密度写成下述三项之和。曾经讨论过每单位体积的压强方面之力为 $-\nabla p$ 。此外, 还有从远处作用着——象重力或电力那样——的一些“外”力。当它们具有每单位质量的势 ϕ 时, 就会提供一个力密度 $-\rho \nabla \phi$ 。(若这些外力并非保守的, 则必须对每单位体积的

外力写成 $\mathbf{f}_{\text{外}}$) 然后, 又再有另一种每单位体积的“内”力, 那是基于在流动流体中也可能会存在切胁强这一桩事实的。这称为粘滞力, 我们将把它写成 $\mathbf{f}_{\text{粘滞}}$ 。于是, 流体的运动方程就是

$$\rho \times (\text{加速度}) = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \mathbf{f}_{\text{粘滞}}. \quad (40.4)$$

在本章中, 我们将假定液体是“稀薄”的, 以表明粘滞性不重要, 从而将略去 $\mathbf{f}_{\text{粘滞}}$ 。当丢掉这一粘滞项时, 我们就正在作出这样一种近似, 即所描写的乃是某一种理想材料而并非真正的水。约翰·冯·诺埃曼 (John von Neumann) 就曾深切地意识到当没有这一粘滞项与有这一项时所发生巨大差别, 而他也意识到, 在直到约 1900 年时流体动力学的大部分发展中, 几乎主要兴趣都集中在求解具有这一假定而几乎与实际流体毫无关系的那些华丽数学问题上。他把那种从事于这样分析的理论家标志为研究“干水”的人们。这样的分析漏掉了流体的一个基本性质。正是因为我们在本章的计算中都要漏掉这一性质, 所以才给它“干水的流动”这么一个标题。我们把对真实的水的讨论推迟到下一章中。

如果丢掉 $\mathbf{f}_{\text{粘滞}}$, 则在式 (40.4) 中除了关于加速度的表式以外, 我们就有了所需的一切。你或许会认为, 关于一流体质点的加速度公式会十分简单, 因为似乎很明显, 若 \mathbf{v} 是流体中一个质点在某处的速度, 则加速度该不过是 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 罢了。但这并不对——而且是由于某一相当微妙的原因。这一微商 $\partial \mathbf{v} / \partial t$

是在空间一个固定点上的速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 的变率。我们所需要的却是有关流体一个特定部分的速度变化有多快。试想象对其中一滴水用有色斑点来标明, 以便能够对它进行观察。在一个时间小间隔 Δt 内, 这一点将移动至一个不同位置。如果该水滴正在沿某一如图 40-4 所示的路线运动, 则它可能在 Δt 内从 P_1 移至 P_2 。事实上, 它将在 x 向上移过 $v_x \Delta t$, 在 y 向上移过 $v_y \Delta t$, 并在 z 向上移过 $v_z \Delta t$ 。我们看到, 若 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 代表在 (x, y, z) 点和在 t 时刻的流体质点速度, 则这一质点在 $t + \Delta t$ 时刻的速度就要由 $\mathbf{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t)$ 来给出, 其中

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t.$$

根据偏微分的定义——回顾式(2.7)——我们对它展开至一阶, 便有

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) \\ &= \mathbf{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t. \end{aligned}$$

因而加速度 $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 就是

$$v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

可以将这个式用算符形式——把 ∇ 当成一个矢量看待——来写成

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (40.5)$$

注意, 即使 $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, 以致在一给定点上速度并非正在变化, 仍可能有加速度。作为一个例子, 在一圆周上以恒定速率流动着的水是在加速着的, 尽管在一给定点上的速度并不发生变

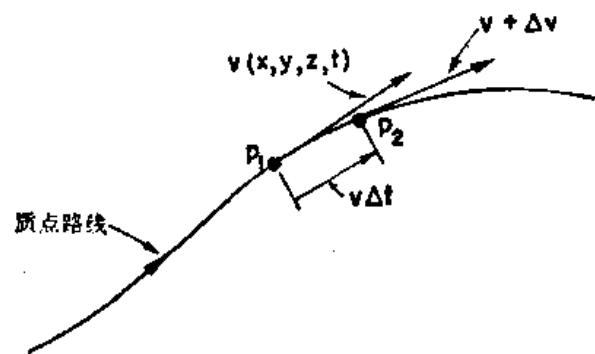


图 40-4 表明一流体质点的加速度

化。当然，原因是，起初在圆周某点的特定部分之水其速度在一会儿之后，已经具有不同的方向了；这表明有一个向心加速度。

上述理论的其余部分就只是属于数学方面——求解将式(40.5)中的加速度代入式(40.4)而得到的运动方程。我们得到

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (40.6)$$

在此式中粘滯性已被略去。可以通过利用从矢量分析得来的下列恒等式：

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

而把上述方程作重新安排。如果现在就定义一个新的矢量场 Ω ，即 \mathbf{v} 之旋度，

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (40.7)$$

则这一矢量恒等式还可以写成

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2,$$

而我们的运动方程(40.6)将会变成

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi. \quad (40.8)$$

你可以通过核对(40.6)和(40.8)两方程中两边的各分量都彼此相等——并利用式(40.7)——而证实该两方程是等效的。

这矢量场 Ω 称为涡旋度。如果涡旋度处处为零，就应该说流动是无旋的。我们曾在 § 3-5 节中定义过一个称为矢量场的环流的东西。在流体中环绕任一闭合回线的环流就是在某一时刻流体速度环绕该回线的线积分：

$$(环流) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}.$$

于是对于一个无限小的回线来说，每单位面积的环流——利用斯托克斯定理——就会等于 $\nabla \times \mathbf{v}$ 。因此，涡旋度 Ω 就是围绕一单位面积(垂直于 Ω 的方向)的环流。由此也可推断出：如果你将一小点灰尘——不是无限小之点——放进该液体中任一处，它就会以角速度 $\Omega/2$ 旋转着。试看你能否加以证明。你也可以对放在一个转盘上的一桶水，其 Ω 乃二倍于水之局部角速度，而加以核对。

如果我们仅对于速度场感兴趣，便可将压强从各式中消去。取式(40.8)两边的旋度，记住 ρ 是恒量，而任一速度的旋度都为零，并利用式(40.3)，便得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = 0. \quad (40.9)$$

上述方程，联合下列两式

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (40.10)$$

和

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (40.11)$$

便完整地描述了速度场 \mathbf{v} 。从数学方面讲，如果在某一时刻知道了 Ω ，那么我们就会知道速度的旋度，而同时也明白速度的散度为零，因而若给定该物理情况，我们便具有确定每一处之 \mathbf{v} 所需的一切了。（这刚好象在磁学情况中，曾经有过 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ 那样。）于是，一个给定的 Ω 会确定 \mathbf{v} ，就正如一个给定的 \mathbf{j} 会确定 \mathbf{B} 一样。然后，一旦知道了 \mathbf{v} ，

式(40.9)便告诉我们关于 Ω 的变率，由此便可获得在下一时刻一个新的 Ω 。利用式(40.10)，我们又找出了一个新的 v 来，如此等等。你看这些方程怎么会含有为算出流动所需的一切机制。然而，要注意这一手续只会给出速度场；而我们已丧失了有关压强方面的一切知识了。

还要指出该方程的一个特殊后果。若在任一时刻 t 处处的 $\Omega=0$ ，则 $\partial\Omega/\partial t$ 也是零，因而在 $t+4t$ 时刻 Ω 仍然处处为零。我们对该方程便已有了一个解：流动是永远无旋的。假如流动从零转动开始，就会永远没有旋转。此时，待解的方程组为

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \times v = 0.$$

这些刚好象在自由空间中有关静电场或静磁场的那种方程组。对此我们以后将回来再作讨论，并考察其中某些特殊问题。

§ 40-3 稳流——伯努利定理

现在要回到运动方程(40.8)上来，但将限于讨论“稳恒”流动的情况。所谓稳流我们指的是，在流体中任一处的速度永远不会发生变化的那种流动。在任一点处的流体，总是由新的流体以完全相同的方式进行填补。速度图形看起来总是一样—— v 是一个静态矢量场。如同在静磁学中我们曾画出那些“场线”一样，现在也可以把那些始终切于流体速度的线画出来，如图 40-5 所示。这些线称为流线。对于稳流来说，它们显然就是流体质点的实际路线。（在非稳流中，这个流线图案会随时间改变，因而在任一时刻这一流线图形就并非代表一个流体质点的路线。）

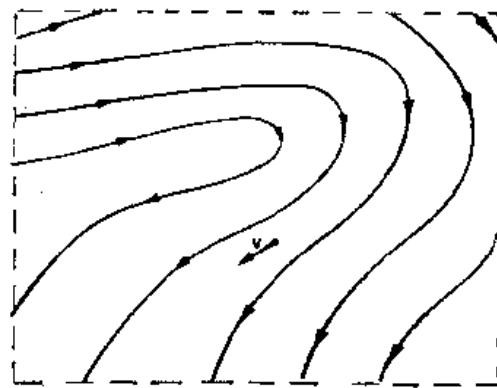


图 40-5 流体稳恒流动中的流线

稳流并不意味没有什么情况发生——流体中的原子正在运动，并变更其速度。那仅仅意味着 $\partial v / \partial t = 0$ 。于是，若我们对该运动方程点乘以 v ，则 $v \cdot (\Omega \times v)$ 项会取消，而仅遗留下

$$v \cdot \nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right\} = 0. \quad (40.12)$$

上述方程申述，对于在流体速度的方向上的一个小位移，这括号内之量不会改变。现在，在一稳流中每一位移都会沿着流线，因而式(40.12)就会告诉我们：对于沿一流线的一切点，我们能够写出

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{常数} \text{ (沿着流线).} \quad (40.13)$$

这就是伯努利(Bernoulli)定理。右边那个常数，一般地说，对于不同流线可以有所不同；我们所知道的一切就是式(40.13)左边沿一给定流线之值全都相同。偶尔，我们可注意到，对于 $\Omega=0$ 的那种稳恒无旋运动，运动方程(40.8)会向我们提供这么一个关系式

$$\nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right\} = 0,$$

使得

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{常数} \text{ (处处).} \quad (40.14)$$

这除了目前该常数对于整个流体都具有同一数值之外, 与式(40.13)完全相同。

事实上, 伯努利定理只不过是有关能量守恒的一种表述。象这样一个守恒定理会提供关于流动的大量知识, 而不须实际去解那些详尽方程。伯努利定理竟是那么重要而又那么简单, 使得我们愿意向你们表明, 如何可通过一种与刚才所用的那种正规运算不同的方式来将其推导出来。设想如图 40-6 所示的由一束相邻流线所形成的一个流管。既然这个管的壁是由流线构成的, 便不会有流体穿越管壁而流出。让我们把这个流管一端的截面叫做 A_1 , 那里的流速为 v_1 , 密度为 ρ_1 , 而势能为 ϕ_1 。在管的另一端, 这些对应之量则分别为 A_2 , v_2 , ρ_2 和 ϕ_2 。现在, 在经历了一个短时间间隔 Δt 之后, 在 A_1 处的流体已经移过一小段距离 $v_1 \Delta t$, 而在 A_2 处的流体则移过 $v_2 \Delta t$ 另一段距离[图 40-6(b)]。质量守恒要求凡通过 A_1 而进入的质量必须等于通过 A_2 而离开的质量。在管两端处这两质量应该相同:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t.$$

因此, 就有这么一个等式

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \quad (40.15)$$

这个式子告诉我们: 若 ρ 是一恒量, 则速度与流管的截面积互成反比。

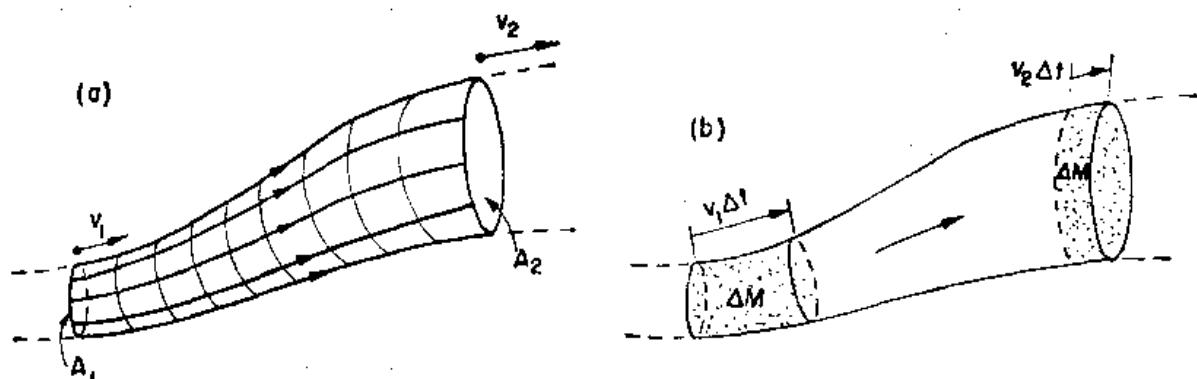


图 40-6 在一个流管里流体的运动

现在要来计算由流体压强所作之功。对那些进入 A_1 的流体所作之功为 $p_1 A_1 v_1 \Delta t$, 而在 A_2 处流体所付出之功则为 $p_2 A_2 v_2 \Delta t$ 。因此, 作于 A_1 与 A_2 间的流体上的净功为

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t,$$

这应当等于该流体质量 ΔM 在从 A_1 至 A_2 中所增加的能量, 换句话说,

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \Delta M (E_2 - E_1), \quad (40.16)$$

其中 E_1 为在 A_1 处每单位质量的流体能量, 而 E_2 则为在 A_2 处每单位质量的能量。流体的每单位质量能量可以写成

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \phi + U,$$

其中 $\frac{1}{2} v^2$ 为每单位质量的动能, ϕ 为每单位质量的势能, 而 U 则代表流体每单位质量的内能的一个附加项。比方, 内能也许相当于在一可压缩流体中的热能, 或相当于化学能。所有这些量都可以逐点变化。引用这一种形式的能量于式(40.16)中, 便有

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 + U_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \phi_1 - U_1.$$

但我们已见到 $\Delta M = \rho A v \Delta t$, 因而即可获得

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 + U_2, \quad (40.17)$$

这是带有内能这一附加项的伯努利结果。若流体是不可压缩的，则该内能项在两边相等，而我们又再一次得到了那个对于任一流线都适用的式(40.14)。

现在考虑某些简单例子，其中伯努利积分向我们提供对该流动的描述。假设有从靠近桶底一个小孔流出来之水，如图 40-7 所示。我们考虑这么一种情况，即其中小孔处的流速 $v_{出}$ 比起靠近桶顶处的流速要大得多；换句话说，设想桶的直径有那么大以致我们可略去水位的降落。在桶顶处压强为 p_0 ，即大气压，而在喷口处之旁压强也是 p_0 。现在就对诸如图上所画出来的那条流线写出伯努利方程。在桶顶，我们取 v 等于零，同时也取重力势 ϕ 为零。在喷口处速率为 $v_{出}$ ，而 $\phi = -gh$ ，因而

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{出}^2 - \rho gh,$$

也即

$$v_{出} = \sqrt{2gh}. \quad (40.18)$$

这一速度恰好就是对降落了 h 距离的某一物体所该得到的。这不会太令人惊异，因为在喷口处的水以在桶顶的势能作为代价而获得了动能。然而，却不要由此得出这么一个概念，即可以通过用这一速度乘该小孔面积而算出流体从该桶涌出的时率。当喷流离开小孔时，流

体的速度并非完全平行，而是带有内向于流管中心线的分量——喷流会逐渐收缩。在经历了一小段路程后，这喷流的收缩便停止，而速度确实会变成平行。因此，总流量乃是速度乘以该点处的面积。事实上，若我们有一个仅仅是圆形而却有锐利边缘的小孔的那一种排水口，则喷流将缩小至小孔面积的百分之六十二。对于不同形状的排水管，这缩小了的有效排泄面积会不相同，而关于这种实验收缩率的射流系数表可从手册中查得。

如果排水管属于重入式的，示如图 40-8，则人们可用最漂亮的方式证明这射流系数恰为百分之五十。下面将给出如何作这一证明的一点暗示。我们曾用能量守恒以获得速

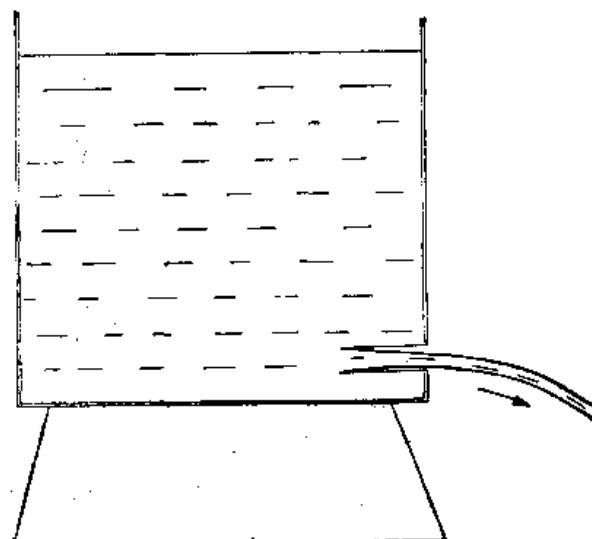


图 40-7 从水桶涌出来的水流

度，即式(40.18)，但也有动量守恒方面必须加以考虑。既然在排出喷流中有动量流出，就一定有一个力作用于排水管的横截面上。这力是从哪里来的呢？力必须来自桶壁上的压强。

請勿用於盈利之目的

只要该射流孔细小并远离桶壁，则靠近桶壁的流速将十分微小。因此，施于每个面上的压强就几乎与在静止流体中的静压强——从式(40.14)中得出的一完全一样。于是，在桶的侧

壁任一点上的静压强就必须为对面壁一对应点上的相等压强所抵消，除了面对该排出管的壁上的那些点以外。如果我们算出由这一压强所引起的通过该喷流而倾倒出来的动量，则能够证明该射流系数为 $1/2$ 。然而，对于象图 40-7 所示的那种排水孔我们就不能应用这一方法，因为速度沿桶壁在接近该排水孔面积处就一直在增大，这会产生一个压强降，那是我们无法算出的。

让我们来看另一例子——一个具有变化截面的水平管，示如图 40-9，水从一端流入，而由另一端流出。能量守恒，亦即伯努利公式所述：在速度较高的那个颈缩区压强会比较低。我们可以通过

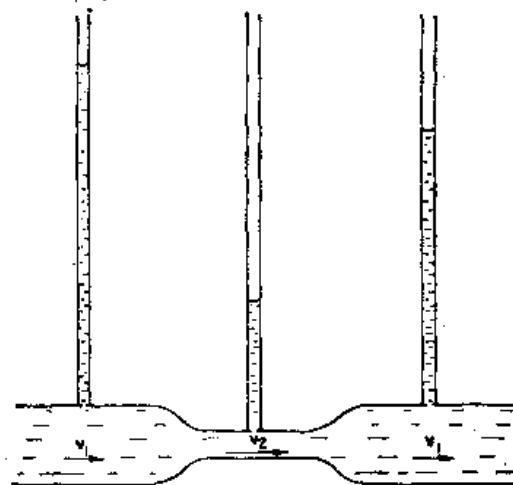


图 40-9 在速度最大处压强最低

下述办法来轻易地演示这一效应，即利用在流管的不同截面处接上去的一些小口径竖管——小到足以使它们不会影响流动——来量度各处的压强。这时，压强是由这些竖管中的水柱高度来给予量度的。在颈缩处所找到的压强会小于在任何一侧上的。如果在经过颈缩区之后，面积又恢复到未经颈缩区前的同一数值，则压强又会再升高。伯努利公式该会预言，在颈缩区下游的压强应与上游的一样，但实际上却显著地出现较低。我们的预言所以有误，是由于忽略了那些摩擦性粘滞力，这些力会引起压强沿着管道下降。但即使不管这一种压强降，在颈缩处的压强（由于增大了的速率）仍明显地低于其任一侧的——正如伯努利所预言的那样。速率 v_2 肯定应当超过 v_1 才能使同一水量流经那较窄的管道。因此，水在从宽处流至窄处时是被加速的。提供这一加速度之力则来自那压强降。

还可用另一个简单演示来核对我们的结果。假设有一个人接于桶旁而会向上喷射的排水管，如图 40-10 所示。要是射流速度恰好等于 $\sqrt{2gh}$ ，则这排出之水就应当上升至与桶顶水面相平的高度。根据实验，它稍为达不到。我们的预言大体正确，但在能量守恒公式中那还未被包括进去的粘滞阻力又一次引起了能量损耗。

你有没有拿着两块互相靠近的纸片而试图把它们吹开？试试看。它们反而会互相贴紧的。当然，其中的原因是，空气流经两纸片中间那缩窄了的空间时，比起流经外面具有较高速率。在两片之间的压强比大气压低，因而它们就互相贴紧而不是互相离开。

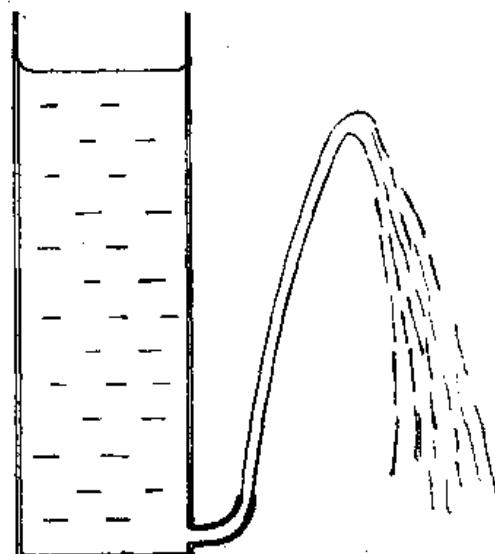


图 40-10 v 不会等于 $\sqrt{2gh}$ 的证明

§ 40-4 环流

在上一节的开头我们曾经见到，若有不存在环流的不可压缩流体，则流动会满足下列两

式：

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \times v = 0. \quad (40.19)$$

这些与在自由空间的静电或静磁方程组相同。当没有电荷时，电场之散度为零，而电场的旋度则总是等于零的。若没有电流，磁场的旋度为零，而磁场的散度则永远等于零。因此，方程组(40.19)与静电学中对于 E ，或静磁学中对于 B 都具有相同之解。事实上，我们曾在 § 12-5 节中，作为对静电学的类比，解过流体流经一个球体的那种流动问题。该电学模拟就是一匀强电场加上一偶极子场。这偶极子场被调整到使得垂直于球面上的流速为零。对经由一根柱体的同一类流动问题，可以按相似的办法即利用一个适当的线型偶极子场和一均匀流场来算出。这一种解答，对于在远处的流速——包括大小和方向——为恒量的那种情况，是正确的。这个解简略地示如图 40-11(a)。

当条件使得在远处的流体都是在围绕着该柱体的一些圆周上作运动时，对于围绕一根柱体的流动就有另一个解。于是，流动处处都环绕着圆周，如图 40-11(b) 所示。象这样的流动有一个环流围绕着该柱体，尽管此时在流体中 $\nabla \times v$ 仍为零。怎样才能有环流而没有旋度呢？围绕该柱体有环流是因为环绕任一包括柱体在内的回线的 v 的线积分不等于零。同时， v 围绕任一不包括该柱体在内的闭合路线的线积分却都是零。当我们过去求围绕一根导线的磁场时，也曾见过这同一事态。 B 之旋度在导线外为零，虽则围绕一条包括该导线在内的路线 B 之线积分却不为零。在围绕一根柱体的环流中的速度场，与围绕一根导线的磁场，恰好彼此相同。对于以柱体的轴心为中心的一条圆周路线，速度的线积分为

$$\oint v \cdot ds = 2\pi r v.$$

在无旋流动中这一积分必然与 r 无关。让我们叫这一常数之值做 c ，那么便有

$$v = \frac{c}{2\pi r}, \quad (40.20)$$

式中 v 是切向速度，而 r 则是从轴心量起的距离。

关于围绕一小孔的流体环流可以作一个精彩的演示。你取一个在底面中心处开有一个排水孔的透明柱形桶。把这个桶装满了水，用一根棍子在其中搅起一些环流，然后拉开孔塞。你便会获得如图 40-12 所示的那一优美效应。（你在浴盆中也曾多次见过与此相类似的东西！）虽然你在开头时加入某一 ω ，但由于粘滞性的缘故它不久就会消失而流动变成无旋的了——尽管此时还有围绕着该排水孔的环流。

根据理论，我们能够算出水之内部表面形状。当一水质点向中心流入时，它会拾得速

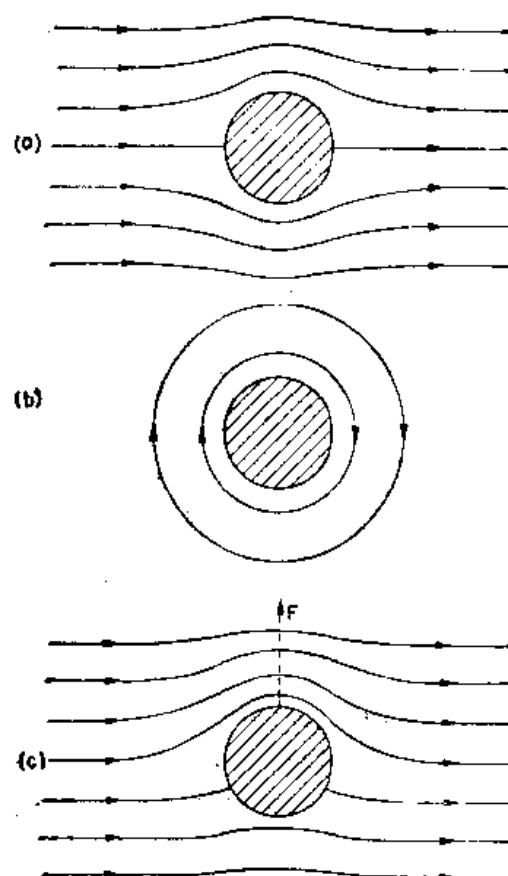


图 40-11 (a) 理想流体正流经一球体；(b) 围绕一柱体的环流；(c) 是 (a) 和 (b) 两者的迭加

率。根据式(40.20), 该切向速度与 $1/r$ 成正比——这恰好出自角动量守恒——正如溜冰者缩回两只手臂一样。并且径向速度也正比于 $1/r$ 。若略去切向速度, 就有沿着径向而朝向

中心流进孔里去之水; 根据 $\nabla \cdot v = 0$, 可以推断出径向速度会正比于 $1/r$ 。因此, 总速度也与 $1/r$ 成正比, 从而水将沿着阿基米德(Archimede)螺线奔流。空气与水间的界面全都处于大气压强之下, 因而它必须具有——根据式(40.14)——这么一种性质。

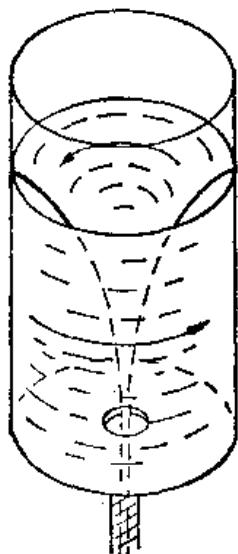


图 40-12 带有环流之水从桶中排出

$$gz + \frac{1}{2} v^2 = \text{常数}.$$

但由于 v 与 $1/r$ 成正比, 从而该表面形状便是

$$(z - z_0) = \frac{k}{r^2}.$$

一个有趣之点——这普遍地说是不正确的, 但对于不可压缩的无旋流动则是正确的——乃是: 若我们拥有两个解, 则它们之和又将是一个解。这属正确, 因为方程组(40.19)是线性的。流体动力学的完整方程组(40.8)、(40.9)、和(40.10)却都不是线性的, 那会造成重大差别。然而, 对于围绕柱体的无旋流动来说, 我们可以将图 40-11(a)的流动迭加于图 40-11(b)的流动之上, 而获得一个示如图 40-11(c)的那种新型流动图案。这一种流动特别令人感兴趣。在柱体上面的流速高于在其下面的。因此, 在上面的压强就会低于在下面的。这样, 当一个围绕着柱体的环流与一个纯水平方向流动相结合时, 就会有一个净竖向力作用于该柱体上——这称为升力。当然, 按照我们关于“干”水的理论, 若没有环流, 就不会有净力作用于任何物体上。

§ 40-5 涡 旋 线

对于其中可能有涡旋的不可压缩流体, 其流动的一般方程式为

- I. $\nabla \cdot v = 0,$
- II. $\Omega = \nabla \times v,$
- III. $\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = 0.$

这些方程的物理内容曾由亥姆霍兹(Helmholtz)通过三个定理用语言描述过。首先, 设想在流体中我们所画出来的乃是涡旋线而不是流线。所谓涡旋线, 指的是具有 Ω 的方向并在任一区域里都具有与 Ω 的大小成正比的密度的那种场线。根据上列方程 II, Ω 的散度始终等于零(回忆起——§ 3-7——旋度的散度总是零)。因此, 涡旋线就象 B 线那样——它们从来既没有始点也没有终点, 因而将会倾向于形成闭合回线。现在亥姆霍兹通过下述这一句话来描述 III: 涡旋线同流体一起在运动。这意味着: 假如你对沿某些涡旋线的流体质点加以标志——比如用墨水来给它们染上——那么当流体在运动而带上那些质点一起奔跑时, 它们将始终标志着那些涡旋线的新位置。无论流体中的原子怎样运动, 涡旋线总是跟着它们一起奔跑。这是描述那些定律的一种方式。

它也暗示着求解任一问题的一种方法。给出起初的流动图案——比如, 处处的 v 值——那么你便可以算出 Ω 来。根据 v 你也可以道出在一会儿之后那些涡旋线将会跑到哪里去——它们以速度 v 运动。既有了新的 Ω , 你便可以应用方程 I 和 II 来找出新的 v 。(这

恰好就象给定了电流而要找出 \mathbf{B} 的那种问题。)如果我们被授予在某一时刻的流动图案, 则在原则上是可以算出尔后一切时刻的图案来的。我们已有了关于非粘滞流动的一般解了。

现在要来说明: 亥姆霍兹的这种表述方式——因而也就是 III——如何可以至少部分地加以理解。实际上它不过是应用于流体上的角动量守恒定律。试设想一个其轴平行于涡旋线的液态小柱体, 如图 40-13(a)所示的那样。此后在某一时刻, 这同一部分流体将移至别处。一般说来, 它将占据一个直径不同的柱体并将位于不同的地方了。它也可以有一个不同取向, 比如图 40-13(b)所示的那样。但是, 若直径已经变小, 则长度就会增长, 以保持该体积不变(因为我们假定的是一种不可压缩的流体)。并且, 由于涡旋总粘着在材料之上, 其密度就会随截面的缩小而增大。涡旋度 Ω 与该柱体的截面积 A 两者之积将保持不变, 因而按照亥姆霍兹, 便应有

$$\Omega_2 A_2 = \Omega_1 A_1. \quad (40.21)$$

现在要注意: 既然粘滞性为零, 则所有施于该柱体(就此事来说, 乃是任一体积)的表面上之力就都垂直于该表面上了, 这种压力能够导致该体积从一处移至另一处, 也能使它改变形状; 但既然没有切向力, 则在物质内部的角动量就不能够改变。该小柱体内的液体其角动量会等于转动惯量 I 乘以液体的角速度, 那是正比于涡旋度的。对于柱体来说, 转动惯量正比于 mr^2 。因此根据角动量守恒, 我们就应该断定

$$(M_1 R_1^2) \Omega_1 = (M_2 R_2^2) \Omega_2.$$

可是质量彼此相同, 即 $M_1 = M_2$, 而截面积则正比于 R^2 , 因而我们又再获得式(40.21)了。

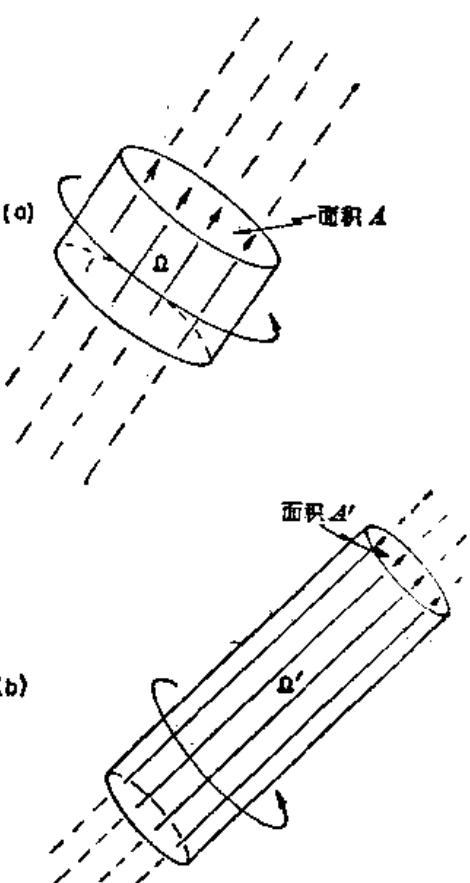


图 40-13 (a) 在 t 时刻的一群涡旋线;
(b) 同一群线在较迟的 t' 时刻

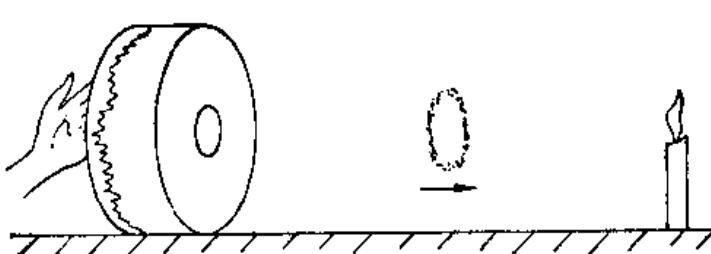


图 40-14 造成一个正在移动的涡环

“箱”的开端处的一张厚橡胶膜所构成的一个“鼓”, 鼓的直径 2 英尺, 深也是 2 英尺。鼓“底”——这个鼓被翻转而靠它的侧壁支持着——除了有一个直径 3 英寸的孔外, 周围都密闭。如果你用手在橡胶膜上猛击一下, 一个涡环会从孔投射出来, 尽管涡旋还看不见, 但你却能宣布它的存在, 因为它会吹熄一支放在 10~20 英尺远处的蜡烛。根据这一效应的迟延时间, 你可以说出有“某种东西”正在以一确定速率行进着。如果你先将一些烟雾吹进箱子里, 则还能对进行着的情况看得更清楚。这时你会把涡旋看成一个美丽的圆“烟圈”了。

亥姆霍兹的表述方式——那是与 III 等效的——不过是在没有粘滞性的条件下流体元的角动量不可能发生改变这一事实的后果。

有一个仅凭图 40-14 的那种简单设备就可以形成运动着的涡旋的精彩演示。那是由绷紧于一个柱形

烟圈是一束环状的涡线，如图 40-15(a) 所示。由于 $\Omega = \nabla \times v$ ，这些涡线也代表图(b) 中的 v 之环流。我们可以按照下述办法来理解烟圈的前进运动：围绕着圈底的环流速度会

延伸到圈顶上去，而那里就有一个前进运动了。由于 Ω 线同流体一起运动，这些线也就以速度 v 前进。（当然，围绕着圈顶那部分的 v 之环流则要对圈底的涡线的前进运动负责。）

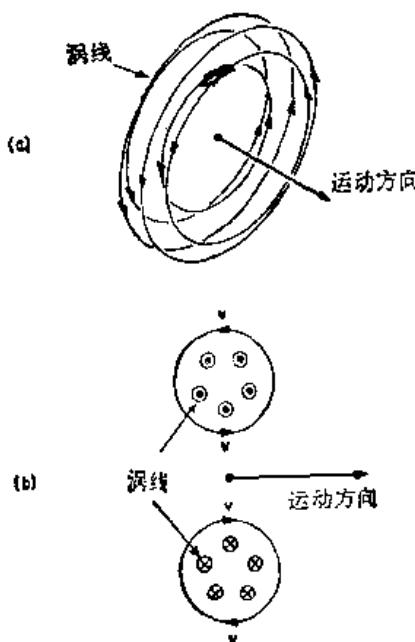


图 40-15 一个运动着的涡环(烟圈)。

(a) 涡线; (b) 涡环的截面

现在我们必须提出一个严重的困难。已经注意到式 (40.9) 会申述：若 Ω 起初为零，则它将永远为零。这一结果表明“干”水理论的大失败，因为它意味着，一旦 Ω 为零，则它将永远为零——在任何场合下都不能产生任何涡旋。可是，在我们利用那个鼓的简单演示中，却能够从原来是静止的空气里产生出涡环来。（肯定在我们击鼓以前，鼓箱里处处都是 $v=0$ 、 $\Omega=0$ 的。）并且，我们全都知道，可以在湖水中用一柄桨来发动一些涡旋。显然，必须进入到“湿”水的理论中去才能得到有关流体行为的充分理解。

干水理论的另一不正确之点是，它在固体表面边界上的流动我们所作过的那种假设。过去当讨论经由一根

柱体的流动——诸如在图 40-11 上的那种流动——时，我们曾容许流体能沿固体表面滑移。在我们的理论中，固体表面上的速度可以有任何值，这取决于该流动是怎样开始的，而我们就从未考虑过在流体与固体之间的任何“摩擦”。然而，那是一桩实验事实，实际流体的速度在一固态物体的表面上总是趋于零的。因此，我们关于柱体之解，不管有无环流，都是错误的——正如有关产生涡旋性的那种结果一样。我们将在下一章中告诉你们有关较正确的一些理论。

41

粘滞流体

§ 41-1 粘滞性

在上一章我们曾在忽略粘滞现象的情况下讨论过水的行为。现在想要来讨论包括粘滞效应在内的流体流动。我们希望考察流体的实际行为。定性地讨论在各种不同场合下流体的实际行为，使得你对这一课题有某些感触。尽管你将看到某些复杂方程，并听到对某些复杂事态的描述，但因而你就必须学习所有这些东西，却并非我们的目的。在某种意义上，这将是给予你有关这个世界如何行动的某些概念的“文化”课的一章，其中只有一项是值得学习的，那就是我们即将加以讨论的有关粘滞性的简单定义。其余的就都只是为了你们的娱乐而谈的了。

上一章中我们曾经发现，流体运动的规律全都包含在这么一个方程中，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi + \frac{\mathbf{f}_{\text{粘滞}}}{\rho}. \quad (41.1)$$

在我们的“干”水近似中曾丢掉了末项，从而忽略了所有的粘滞效应。并且，有时还认为流体是不可压缩的而作出一个附加近似；这时我们就有过一个补充的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

这最后一种近似往往很好——特别是当流速比起声速来小得多的时候。但在实际流体中，几乎从未确实可以略去我们所称之为粘滞性的那种内阻力；发生的大部分有趣事态总是来自这种阻力。例如，我们曾见到在“干”水中环流永不会改变——如果开始时没有一个环流，往后也永不会有。可是，流体内的环流却是每天都要发生的事情。我们必须整顿好我们的理论。

将从一桩重要的实验事实开始。当我们过去在算出“干”水环绕或经过一根柱体而流动——即所谓“有势流动”——时，我们没有理由不容许水具有切于表面上的速度，只有法向分量才必须等于零。我们并未计人在液体与固体之间或许会存在切力的那种可能性。事实是——虽然根本并不是自明的——在实验上已证实的一切场合下，流体速度在固体表面上都恰好是零。无疑，你一定曾注意到风扇叶片会积聚一层薄薄灰尘——而当风扇已经把空气搅动后灰尘仍然留在那里。甚至在风洞中的大型风扇上，你也可以看到这同一效应。为什么灰尘不会给空气吹跑了呢？不管扇叶是以高速穿越空气而运动，但空气相对于扇叶的速度恰好就在叶面上降低至零。因此，那些最小的尘埃粒子才不会受到扰动*。我们必须对理论作出修正，以便能够与这么一桩事实相符，即在一切寻常流体中，那些靠近固体表面的分子都会有零速度（相对于表面而言）**。

我们原来是由这么一桩事实来标志液体的，即如果你给它施以一个切胁强——不管多

* 你能够将大的尘埃粒子从桌面上吹掉，但不能吹去十分微细的灰尘。那些大的才会挺进到微风里去。

** 你能够想象出一些情况，其中这一点是真实的：玻璃在理论上虽然是一种“液体”，但肯定能够使其沿一钢面滑动，因此，我们的说法必然会在某处崩溃。

么小——它总会屈服。它流动了，在静止情况下，并不会有切力，但在达到平衡之前——只要你仍然推动它——那里就可存在切力。

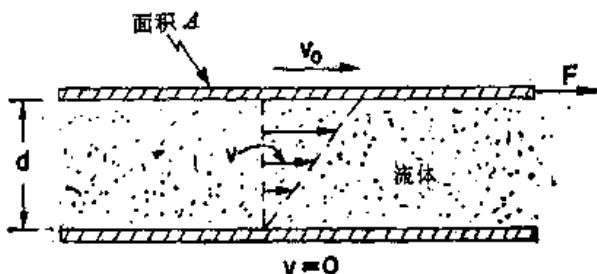


图 41-1 在两平行板之间的粘滞阻力

粘滞性便是描述这种存在于运动流体中的切力的。要得到对流体流动时这种切力的量度，我们考虑下述实验。假设有两块其间夹有水的固体板面，如图 41-1 所示，保持其中一块固定，另一块则以低速率 v_0 对之作平行运动。如果你对所需以保持上板

运动之力进行测量，你便会发现这力与板的面积和 v_0/d 都成正比，其中 d 为两板间的距离。因此，切力 F/A 就会正比于 v_0/d 。

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}.$$

这个比例常数 η 称为粘滞系数。

如果我们有一较复杂情况，但总可以考虑水中一个小而平坦的矩形池，其上下两面都平行于流动，如图 41-2 所示。横过这个池的切力由下式给出：

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (41.2)$$

原来， $\partial v_x / \partial y$ 就是我们曾在第三十八章中定义过的切变的变率，因而对于液体来说，切力与切变的变率成正比。

在一般情况下，我们写成

$$S_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (41.3)$$

如果流体有一匀速转动，则 $\partial v_x / \partial y$ 为 $\partial v_y / \partial x$ 的负值，因而 S_{xy} 为零——正应如此，因为在一作匀速转动的流体中不会存在任何切力的。（我们在第三十九章中当对 e_{xy} 下定义时就曾做过与此类似的事情。）当然，还有关于 S_{yy} 和 S_{xx} 的对应表达式。

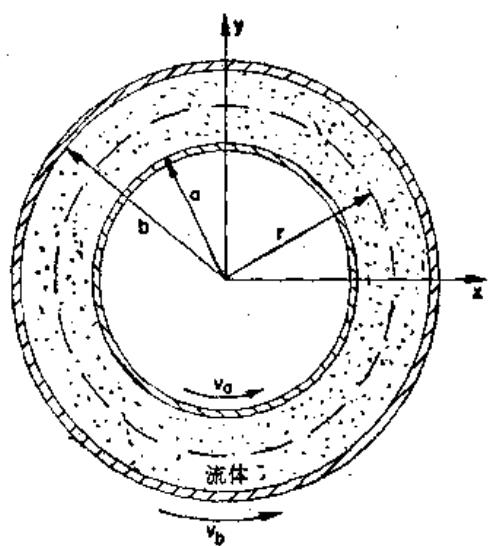


图 41-3 在以不同角速度旋转着的两个同心筒之间流体的流动

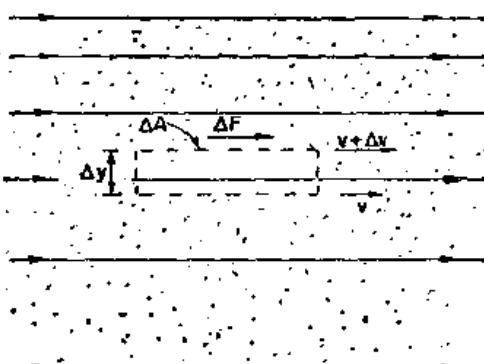


图 41-2 在一粘滞流体中的切力

作为应用这些概念的一个例子，我们考虑在两个同心筒间流体的运动。令该内筒具有半径 a 和筒壁线速度 v_a ，而外筒则具有半径 b 和筒壁线速度 v_b ，见图 41-3。我们也许会问，在两筒之间的速度分布如何？为回答这一问题，我们从找出一个在距轴心为 r 处的粘滞切力公式开始。根据这一问题的对称性，我们可以假定流动总是沿着切向，而其大小则仅取决于 r ； $v = v(r)$ 。如果注视水里在半径 r 处的一个小斑点，它的坐标作为时间的函数为

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t,$$

其中 $\omega = v/r$ 。于是速度的 x 和 y 分量就是

$$v_x = -r\omega \sin \omega t = -\omega y$$

和

$$v_y = r\omega \cos \omega t = \omega x. \quad (41.4)$$

根据式(41.3), 我们便有

$$S_{xy} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\omega) - \frac{\partial}{\partial y} (y\omega) \right] = \eta \left[x \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]. \quad (41.5)$$

对于 $y=0$ 那一点, $\partial \omega / \partial y = 0$, 而 $x \partial \omega / \partial x$ 与 $r d\omega / dr$ 则彼此相同. 因此在该点上,

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r \frac{d\omega}{dr}. \quad (41.6)$$

(S 应依赖于 $\partial \omega / \partial r$ 是合理的; 当 ω 不随 r 变化时, 流体便在作匀速转动而不会有任何胁强了.)

我们所算出来的这一胁强是一个切胁强, 围绕着整个柱面都相同. 可以通过对切胁强乘以矩臂 r 和面积 $2\pi rl$ 而获得作用于围绕一个半径为 r 的柱形面上的转矩. 我们得到

$$\tau = 2\pi r^3 l (S_{xy})_{y=0} = 2\pi \eta l r^3 \frac{d\omega}{dr}. \quad (41.7)$$

由于水的运动是稳恒的——没有角加速度——因而施于 r 与 $r+dr$ 间的柱壳中之水的净转矩就必须为零; 这就是说, 在 r 处的转矩势必被在 $r+dr$ 处的一个相等而相反的转矩所抵消, 使得 τ 必须与 r 无关. 换句话说, $r^3 d\omega / dr$ 等于某一恒量, 比方说 A , 因而

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3}. \quad (41.8)$$

积分后, 我们便找出 ω 是这样随 r 而变的:

$$\omega = -\frac{A}{2r^2} + B. \quad (41.9)$$

A 和 B 两常数, 由适应在 $r=a$ 处 $\omega=\omega_a$, 和在 $r=b$ 处 $\omega=\omega_b$ 的条件而被确定下来. 结果得到

$$A = \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a),$$

$$B = \frac{b^2 \omega_b - a^2 \omega_a}{b^2 - a^2}. \quad (41.10)$$

所以我们就知道 ω 作为 r 的函数, 从而也知道 $v=\omega r$ 的函数.

如果希望得到转矩, 便可由(41.7)和(41.8)两式得到:

$$\tau = 2\pi \eta l A$$

或

$$\tau = \frac{4\pi \eta l a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a). \quad (41.11)$$

它与两筒的相对角速度成正比. 一种作为测量粘滞系数用的标准仪器就是这样制成的. 其中一个圆筒——比方说外筒——安装在一个支枢上, 但由一条可借以测量施于筒上转矩的弹簧来保持其竖立不动, 而内筒则是以恒角速度旋转着的. 这样, 粘滞系数便可由式(41.11)确定.

根据 η 的定义, 你可以看出它的单位是牛顿·秒/米². 对于 20°C 之水,

$$\eta = 10^3 \text{ 牛顿·秒/米}^2.$$

采用比粘滞度, 即 η 除以 ρ , 往往较为方便. 此时水与空气之值便可以进行比较:

$$\text{在 } 20^\circ\text{C 之水, } \eta/\rho = 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}; \quad (41.12)$$

$$\text{在 } 20^\circ\text{C 之空气, } \eta/\rho = 15 \times 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}.$$

粘滞性通常强烈地依赖于温度。例如，对于恰好在凝固点上之水，其 η/ρ 比在 20°C 上的要大 1.8 倍。

§ 41-2 粘滞流动

现在我们要进入粘滞流动的最普遍理论——至少是人类所知道的最普遍形式——中去。已经了解到切向分量与速度分量的各种空间微商（诸如 $\partial v_x/\partial y$ 或 $\partial v_y/\partial x$ ）之间适成正比。然而，在一种可压缩流体的普遍情况下，剪强中还有另一个要取决于速度的其他微商之项。总表达式为

$$S_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (41.13)$$

式中 x_i 是直角坐标 x, y , 或 z 中的任一个，而 v_i 则是速度的直角分量中的任一个。（ δ_{ij} 是克朗内克符号，当 $i=j$ 时为 1，而当 $i \neq j$ 时为零。）该附加项对于剪强张量的所有对角线元 S_{ii} 都增添了 $\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}$ 。如果流体是不可压缩的，则 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，而这一附加项就不见了。所以它与受压缩时的内力有关。因此要描述流体就需要两个常数，正如我们过去在描述均匀弹性固体时曾有过两个常数一样。系数 η 即我们曾遇到的“寻常”粘滞系数。它也称为第一粘滞系数或“切粘滞系数”，而那一个新的系数 η' 则称为第二粘滞系数。

现在要来确定每单位体积里的粘滞力 $\mathbf{f}_{\text{粘滞}}$ ，以便能将其代入式 (41.1) 中而获得实际流体的运动方程。施于流体中一小立方体上之力，即是作用于所有六个面上之力的合力。每次取其中两个面，便会获得其差值，那是由剪强的微商、亦即速度的二次微商决定的。这很好，因为将会使我们回到一个矢量方程式上来。每单位体积的粘滞力在直角坐标 x_i 的方向上其分量为

$$(f_{\text{粘滞}})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.14)$$

粘滞系数随位置的变化通常并不显著，可以忽略，因而每单位体积的粘滞力就仅含有速度的二次微商。在第三十九章中，我们曾见过能在一个矢量方程中存在的二次微商的最普遍形式，为一拉普拉斯项 ($\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}$) 与一散度的陡度项 ($\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$) 两者之和。式 (41.14) 就恰恰是具有系数 η 和 $(\eta + \eta')$ 的这样一个和。我们得到

$$\mathbf{f}_{\text{粘滞}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.15)$$

在不可压缩的情况下， $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，因而每单位体积的粘滞力便不过是 $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ 。那就是许多人所用到的一切；然而，如果你一定要算出流体对声波的吸收，那你就该需要那第二项了。

现在，我们可以完成关于一实际流体的普遍运动方程。把式 (41.15) 代入 (41.1) 中，便得

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

这很复杂，但却是大自然安排的一种做法。

如果象以往一样引进涡旋度 $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$ ，那么便可将上述方程写成

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.16)$$

再度假定唯一作用的彻体力是象重力那样的保守力，要看出该新项的意义如何，让我们来看不可压缩流体的情况。这时，如果取式 (41.16) 的旋度，便得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \Omega. \quad (41.17)$$

这除了在其右边有一新项外就很象式(40.9)了。当右边为零时，我们曾有过关于涡旋度同流体伴随在一起的亥姆霍兹定理。现在，在右边已有那个相当复杂而又不等于零之项，然而，它却具有简单明了的物理后果。如果暂时略去那一 $\nabla \times (\Omega \times v)$ 项，便会得到一个扩散方程，该新项意味着涡旋度 Ω 经由流体而扩散。如果在涡旋度中有一个大的陡度，则它将扩散到其邻近的流体中去。

这就是引起烟圈在前进时会变得越来越厚的那一项。并且，如果你把一个“洁净”的涡环(由上一章所描述的那部仪器造成的“无烟”圈)送进烟雾之中，也就可以漂亮地表现出来。当它从烟雾里跑出来时，它会吸取某些烟雾，而你便将看到一个空心的烟圈壳了。有些 Ω 会向外扩散而进入烟雾之中，但仍能保持与涡旋相同的前进运动。

§ 41-3 雷 诺 数

现在我们要来描述由该新的粘滞项在流体流动特性中所造成的一些变化。我们将相当详尽地探讨两个问题。第一个是经过柱体的流动——那是我们在上一章就曾试图用非粘滞性流动的理论来加以算出的问题。事实证明，今天人们只能对几种特殊情况解答该粘滞性方程组。因此有些将要告诉你们的东西乃是建基于实验测量方面的——假定实验模型满足了方程(41.17)。

数学的问题是：我们该愿意来求解一种不可压缩的粘滞性流体流经一根直径为 D 的长柱体的那种流动。这一种流动应该由式(41.17)和式

$$\Omega = \nabla \times v \quad (41.18)$$

所给出，配合下述两条件：在远处的速度为某一恒速，比方说 V (平行于 x 轴)；以及在柱体的表面上速度为零，即对于表面

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4},$$

会有

$$v_x = v_y = v_z = 0. \quad (41.19)$$

那就完全规定了该数学问题。

如果你注意那些方程式，你就会明白对于该问题有四个不同常数： η ， ρ ， D 和 V 。你也许会想到应该对于不同的 V 、不同的 D 等等给出一整系列情况。然而，实际情况却并非如此。所有这些不同的可能解答均相当于一个参数的不同数值。这就是关于粘滞性流动我们所能说的最重要而又最普遍的东西。要看出其所以然，首先应当注意粘滞性和密度只出现在比率 η/ρ ——即比粘滞性上。这可把独立参数的数目减少到三，现在假定我们采用出现于这一问题上的唯一长度、即柱体的直径 D 来量度所有一切长度；这就是说，用按照下列关系的新变量 x' ， y' ， z' 来代替 x ， y ， z ：

$$x = x'D, \quad y = y'D, \quad z = z'D.$$

这样 D 便从式(41.19)中消失了。同样地，若我们用 V 来量度所有的速度——即是令 $v = v'V$ ——则可以消去 V ，而在大距离上 v' 不过等于 1 罢了。既然已确定了长度和速度的单位，现在我们的时间单位就是 D/V ；因而应该令

$$t = t' \frac{D}{V}. \quad (41.20)$$

采用这一套新的变量，式(41.18)中的那些微商就得从 $\partial/\partial x$ 改成 $(1/D)\partial/\partial x'$ ，以及其他等等；因而式(41.18)就变成

$$\Omega = \nabla \times v = \frac{V}{D} \nabla' \times v' = \frac{V}{D} \Omega'. \quad (41.21)$$

于是我们的主方程(41.17)可以读成

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t'} + \nabla' \times (\Omega' \times v') = -\frac{\eta}{\rho V D} \nabla^2 \Omega'.$$

一切常数都凝结成一个我们根据传统将其写成 $1/R$ 的因子：

$$R = \frac{\rho}{\eta} V D. \quad (41.22)$$

如果仅仅记住全部方程式都是以这些新单位的量来写出的，则可以省略一切撇号。于是该流动方程组就是

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = \frac{1}{R} \nabla^2 \Omega \quad (41.23)$$

和

$$\Omega = \nabla \times v.$$

所附带的条件则为：对于

$$x^2 + y^2 = 1/4, \quad (41.24)$$

$$v = 0;$$

以及对于

$$x^2 + y^2 + z^2 \gg 1,$$

$$v_x = 1, \quad v_y = v_z = 0.$$

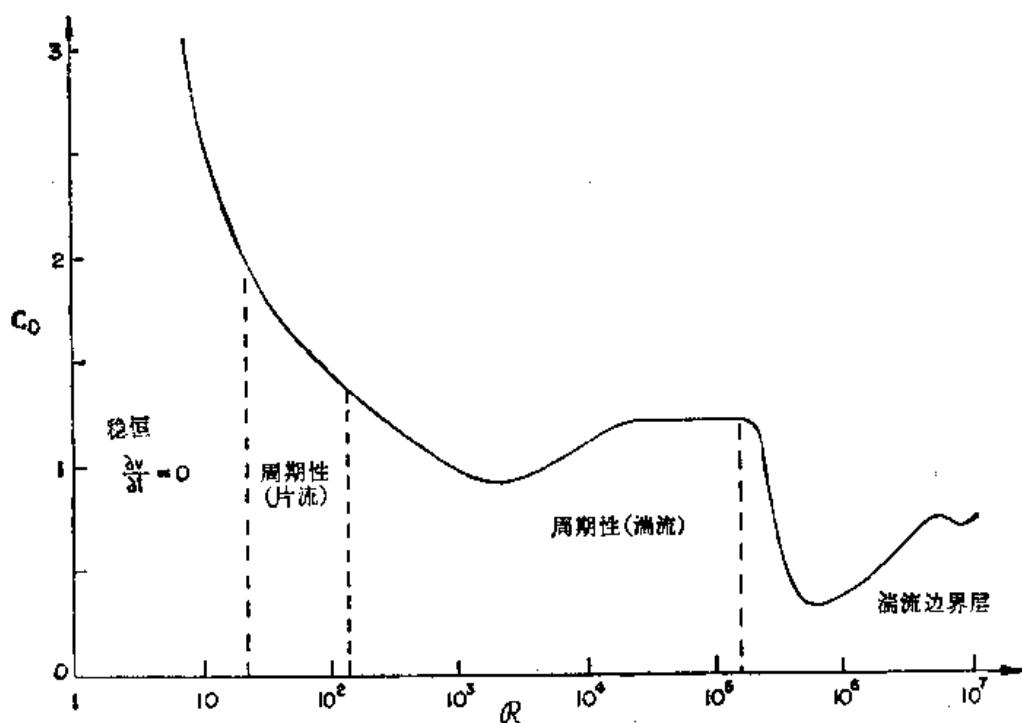
这在物理上所包含的全部意义十分有趣。比如，它意味着：若我们已对某速度 V_1 和某一柱体直径 D_1 解决了该流动问题，然后又问起关于一个不同之 D_2 以及另一种流体的流动，那么对于会给出同一雷诺数的速度 V_2 ——也就是说，当

$$R_1 = \frac{\rho_1}{\eta_1} V_1 D_1 = R_2 = \frac{\rho_2}{\eta_2} V_2 D_2, \quad (41.25)$$

时，流动将会相同。关于雷诺数相同的任两种情况，流动“看来”将是一样的——采用适当的比例尺 x' , y' , z' 和 t' 。这是一个重要定理，因为它意味着我们不须制成一架飞机来作试验，就可以确定空气流经机翼时的行为如何。作为代替的是，可以造成一个模型并用一种会给出同一雷诺数的速度来进行测量。这是一条容许我们把小型飞机所作的“风洞”测量结果，或把按比例缩小了的模型船在“模型池”中的试验结果应用于实际尺寸的物体上的原理。然而应当记住，只有在流体的压缩性可以忽略时，我们才能这样做。要不然，一个新的量——声速——就会闯进来。而只有在 V 对声速的比率也相同时，不同的情况才会真正互相对应。这后一比率称为马赫数。因此，对于接近声速或超过声速的速度，若在两情况中马赫数和雷诺数两者都各各相等，则在这两种情况下的流动才会彼此相同。

§ 41-4 经过一圆柱体的流动

让我们回到流经一柱体的低速(几乎是不可压缩的)流动上来。将对一实际流体的流动给予定性描述。有许多关于这类流动的情况我们很想知道——诸如施于柱体上的曳力如何？施于柱体上的曳力作为 R 的函数在图 41-4 上被画成曲线。若其他一切都保持固定，

图 41-4 一根圆柱体的曳力系数 C_D 作为雷诺数的函数

则 R 与空气流速 V 会成正比。实际上所画出来的乃是所谓曳力系数 C_D ，那是一个无量纲的数值，等于力除以 $\frac{1}{2} \rho V^2 Dl$ ，其中 D 和 l 分别代表柱体的直径和长度，而 ρ 则是流体密度：

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 Dl}.$$

这曳力系数按某一相当复杂的形式变化，并为我们提供一种预示，即有某些相当有趣而又复杂的情况在该流动中发生了。我们现在要对雷诺数的不同范围描述该流动的性质。首先，当雷诺数十分小时，流动很稳定；这就是说，在任何一处速度都固定，因而流动会环绕该柱体。可是，流线的实际分布却不像在有势流动中那样，它们是一个稍为不同的方程式之解。当速度十分低，或等效地说，当粘滞性十分高以致该物质很象蜂蜜那样时，则那些惯性项都可以忽略，而流动便可由下式描写：

$$\nabla^2 \Omega = 0.$$

这一方程首先由斯托克斯解出；他也曾对球体解出这一同一问题。若你有一个小球在这种低雷诺数的条件下运动，那须用以拉曳它之力便等于 $6\pi\eta aV$ ，其中 a 为球体半径而 V 为其速度。这是一个十分有用的公式，因为它确定尘埃微粒（或可近似地视作球体的其他粒子）在一给定力的作用下穿过一流体——诸如在一离心机中，或在沉淀或扩散过程中——的那种运动。在雷诺数低——即比 1 为小的 R ——的区域里，围绕一根柱体的 v 线如图 41-5 所示。

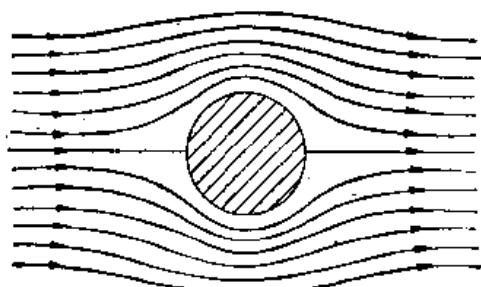


图 41-5 围绕一根圆柱体的粘滞性流动(低速流动)

如果现在将流体速率增大以便获得一个多少比 1 为大的雷诺数，则我们发现流动表现不同了。在该柱体后面存在环流，如图 41-6(b) 所示。是否那怕在雷诺数最小时就总会有环流存在，或要在某一定雷诺数上事态才突然发生变化，这仍然是个未决问题。过去人们往往认为环流是逐渐成长的。但现在却认为环流是突然出现的，并肯定它是随着 R 的增大而增长起来的。无论如何，对于 $20 \sim 30$ 的范围内之 R ，流动就有一个不同特性。在该柱体后面存在一对涡旋。

当达到 40 左右的数目时，流动又再发生变化，在运动特性上突然有一个完全的变化。

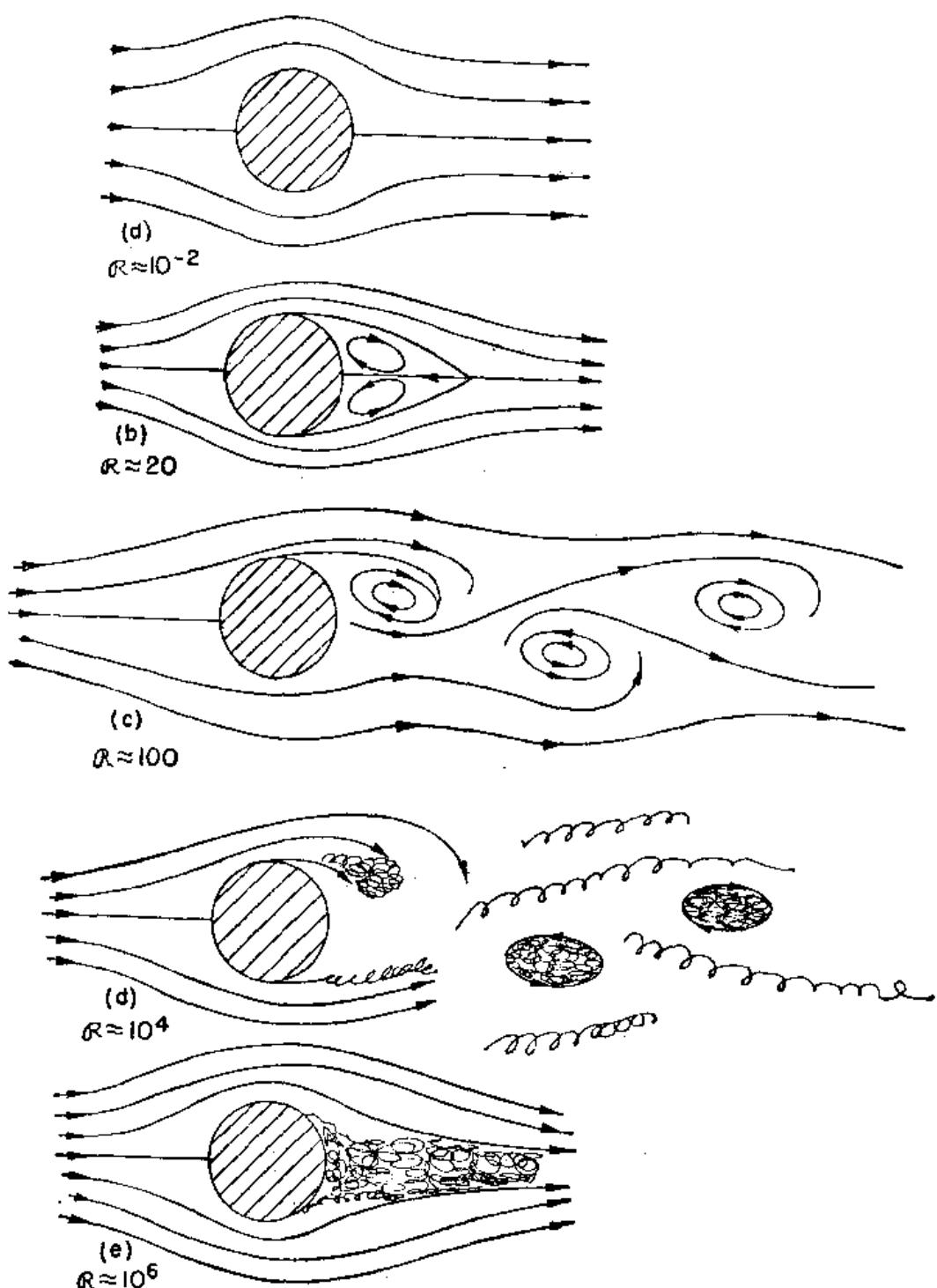


图 41-6 各不同雷诺数流经一柱体的流动

所发生的事态乃是，在该柱体后面有一个涡旋竟变得那么长，以致分裂开来并随液体猛向下游奔跑。这时在柱体后面的流体又会卷起来而形成另一个新的涡旋，这些涡旋在每一边交替地剥落，因而流动的一个瞬间形象看来就约略象图 41-6(c) 所草画出来的那样，这些涡旋的流注称为“卡尔曼(Kármán) 涡旋街道”。它们总是在 $R > 40$ 时出现。这样一种流动的照片如图 41-7 所示。

在图 41-6 中，(a) 与 (b) 或 (c) 这两种流动间的差别几乎在方式上就已完全不同。在图 (a) 或 (b) 中，速度是恒定的，而在 (c) 中，则在任一点的速度都会随时间变化。超越 $R = 40$ 时——这在图 41-4 上是用一条虚线标示出来的——就不会有稳恒之解了。对于这些较高的雷诺数，流动会随时间变化，但还是以有规则的周期性方式进行的。

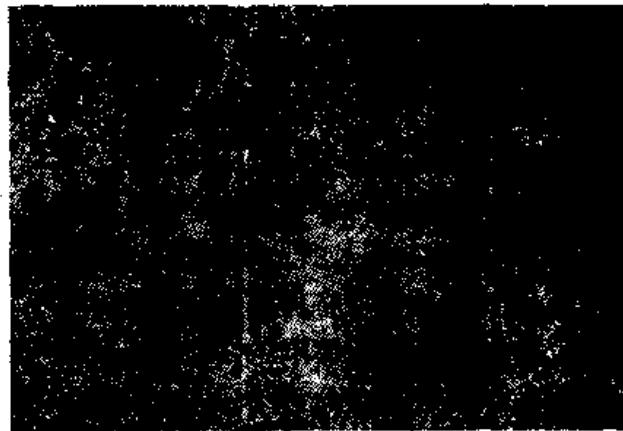


图 41-7 由陆维·潘德耳(Ludwig·Prandtl)拍摄
的在柱体后面的流动中出现的“涡旋街道”照片

关于这些涡旋如何产生，我们可得到一个物理概念。我们知道，流体速度在柱体表面上应当为零，也知道在离开表面后速度便迅速增长。涡旋性就是由这种在流体速度中巨大的局部变化所产生的。现在，当主流速还足够低时，便会有充分时间给这种涡旋性从靠近柱面它的出生地的那个薄区处扩散开来而长成一个大涡旋区。这一物理图象应该会帮助我们对下一步当主流速或 R 再度增大时在流动性质方面的变化作好准备。

当速度变得越来越高时，为便于涡旋性扩散至较大的流体区域中所耗用的时间就越越来越少了。当雷诺数达到几百时，涡旋性便开始充满一条薄薄的带，如图 41-6(d) 所示。在这一薄层中，流动既杂乱而又无章。这一个区域叫做边界层，而当 R 增大时这个无规流动区会逐渐往上游伸展。处于这一湍流区中，速度非常无规，而又“嘈杂不休”；流动也不再是二维的，而是在整个三维中都出现扭动和转动。但仍然有一整齐的交替运动迭加于这种湍流之上。

当雷诺数再度增大——对约比 $R = 10^6$ 为高的那种流动——这湍流区便向前伸展直到它抵达流线刚离开柱体的那一处。这种流动示如图 41-6(e)，因而我们就有了所谓“湍流边界层”。并且，在曳力方面会有一个猛烈变化：它降低了一个大倍数，如图 41-4 中所示。在这一速率范围内，曳力的确会随速度的增加而降低。周期性的迹象似乎很少。

对于比这还要大的雷诺数将会发生什么呢？当我们进一步提高速度时，那尾流的尺寸会再度增大，而曳力又复增加。最近期的实验——达到 $R = 10^7$ 左右——指明：有一种新的周期性出现在尾流之中，这或者是由于整个尾流在大幅度运动中发生了来回振动，或者是由于伴随那不规则的嘈杂运动中还有某种新类型的涡流产生。详细的情况迄今还不完全清楚，人们仍在用实验方法进行研究之中。

§ 41-5 零粘滞性极限

我们愿意指出，在所描述的那些流动中，还没有一种象在上一章所曾经找到的那一种有势流动解。乍一看来，似乎很奇怪。 R 总是与 $1/\eta$ 成正比，因而 η 趋于零与 R 趋于无限

大等效。但若在式(41.23)中取大 R 的极限, 便会把右边清除掉, 而只得到上一章的那些方程。可是, 你该会发现, 在 $R=10^7$ 的那种高度湍流竟会趋向于从“干”水的方程组所算出来的那种平滑流动, 那是难于置信的。怎么能够当我们接近 $R=\infty$ 时, 由方程(41.23)所描述的流动会完全不同于过去由取 $\eta=0$ 开始而获得之解呢? 答案十分有趣。应当注意式(41.23)右边存在 $1/R$ 乘一个二次微商, 它是高于该式中任何其他微商的微商。发生的情况是: 虽然 $1/R$ 这一系数变小了, 但在表面附近的空间却存在着 Ω 的十分迅速的变化。这些迅速变化补偿了那个小的系数, 因而两者之积就不会随 R 的增大而趋于零。解答就不会趋于当 $\nabla^2\Omega$ 的系数变成零时的那种极限情况。

你可能会觉得奇怪, “那结构精细的湍流究竟是个什么东西而它又是怎样维持它本身的呢? 在柱体边缘某处所造成的涡旋如何能在背景中产生那么多的噪声呢?”答案又再是很有趣的。原来涡旋性有将其本身扩大的倾向。如果我们暂时忘却那种会引起涡旋性损失的涡旋扩散现象, 则流动规律申述(正如我们以前见过的): 涡线会以速度 v 借同流体一起运动。可以想象, 有一定数目的 Ω 线正被 v 之复杂流动方式所扭曲和弄歪。这会将那些线拉得彼此更加靠拢而又互相掺混了。先前的那些简单涡线将会纠缠成结而且互相拉紧。涡旋性强度将会增加, 而其无规性——包括正的和负的——一般也将增加。因此, 当将流体扭来扭去时, 在三维中的涡旋量就总会增大的。

你也许满可以问, “什么时候那种有势流动才算得是一个满意的理论呢?”首先, 在湍流区以外、即在涡旋性还未通过扩散而明显进入的地区, 它是令人满意的。通过造成特殊的流线型物体, 我们就能把湍流区保持尽可能小; 环绕机翼——那是经过精心设计的——的那种流动就几乎完全是真正的有势流动。

§ 41-6 库艾特流动

对于流经一柱体那种流动的复杂而易变特性并非特殊, 而流动可能性的千变万化却一般总会发生, 这是可以演示的。在第一节中我们曾经对在两个圆筒间的粘滞性流动算出了一个解, 并能够把这一结果与实际发生的情况互相比较。若取两个同心筒, 在它们之间的空隙里装进油, 并放进一些铝粉以作为油中的悬浮物, 这样流动就可容易观察到。现在, 若缓慢地转动该外筒, 并不会有什幺意料不到的事情发生; 这可从图 41-8(a)上看到。相反, 若慢慢转动内筒, 也不会有十分显著的事情发生。然而, 若以较高速度转动内筒, 则我们会感到诧异。流体已破裂成一些水平带, 如图 41-8(b)所指出来的那样。当外筒以一相似速度转动而保持内筒固定不动时, 却没有这种效应发生。怎能在转动内筒或转动外筒之间有这

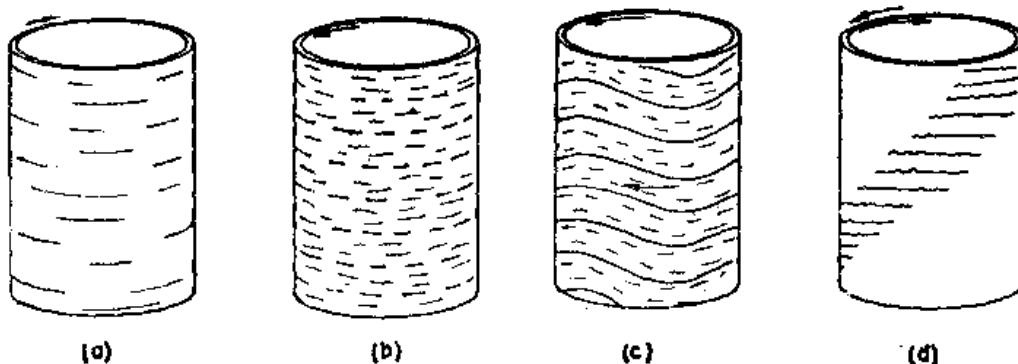


图 41-8 在两个透明的旋转圆筒间液体流动的花样

种差别呢？在第一节中，我们曾导出的那种流动图样仅仅依赖于 $\omega_b - \omega_a$ 。但通过对图 41-9 所示的那些截面进行考察是可以得到答案的。当内层流体转动得比外层流体更快时，它们便趋向于向外奔跑——离心力大于把它们维持在原位置上的压强。不可能让整层流体都均匀地向外移动，因为外层还在那里阻塞着。因此就必然会破裂成蜂房式并作环流，如图 41-9(b) 所示的那样。有点象房间里，当底部空气较热时发生的那种对流。当内筒不动而外筒有一高速度时，离心力会建立起一个把一切都维持在平衡状态中的压强陡度——见图 41-9(c)（正如在一问顶部空气较热的房子）。

现在让我们提高内筒的转速。起初，带的数目增加了。然后你会突然看到那些带变成波状了，如图 41-8(c) 所示，而这些波正在环绕着筒行进。波的速率很容易测量出来。对于内筒的高转速来说，这波速会接近于内筒速率的三分之一。但没有谁能知其所以然！这就存在一种挑战。一个象 $1/3$ 的简单数目，还得不到任何解释。事实上，这种波形成的整个机制并未得到太好理解；而它却是一种稳恒片流。

如果我们现在也开始转动外筒——不过是沿相反方向——则该流动花样便将开始瓦解。所获得的乃是波区与表面上看来的静止区相互交替的一种情形，如图 41-8(d) 所示，构成一种螺旋式的花样。然而，在这些“静止”区中，我们能够看到流动实在很不规则；它实际上是完全湍流式的。那些波区也开始表现出无规的湍流了。如果内外筒继而转得更快，则整个流动便会变成混乱不堪的那种湍流了。

在这一简单实验中，我们看到了许多有趣的流动状态，它们之间大不相同，但却全都包含在一个对于唯一参数 R 的不同数值的简单方程式中。用我们的两个旋转圆筒，就能看到许多发生于流经柱体的流动中的那些效应：首先，有一种稳恒流动；其次，一种随时间变化的但仍以有规而又平滑的方式表现出来的流动产生了；最后，流动却变成完全无规的了。你们大家都曾在静穆空气中，从点燃着的一支纸烟升起的一股烟柱看到这同一些效应。有一股平滑而稳定的烟柱，跟着在这股烟流开始破裂时就有一系列的扭转和弯曲，最后才形成一股无规而被搅乱了的烟云。

从所有这些经验中我们能够得到的主要教训是，一大堆不同的行为会隐藏在(41.23)那组简单的方程式中。所有一切之解都是属于同一些方程的，不过配上不同的 R 值罢了。我们并没有理由认为在这些方程式中会有任何遗漏之项。唯一的困难在于，今天除了对十分小的雷诺数——即完全粘滞性的那种情况——以外我们仍然缺乏数学本领来对各种情况进行分析。我们虽然写下了个方程，但这并不会从流体的流动中剥夺掉它的美妙、它的神秘、或它的令人惊异之处。

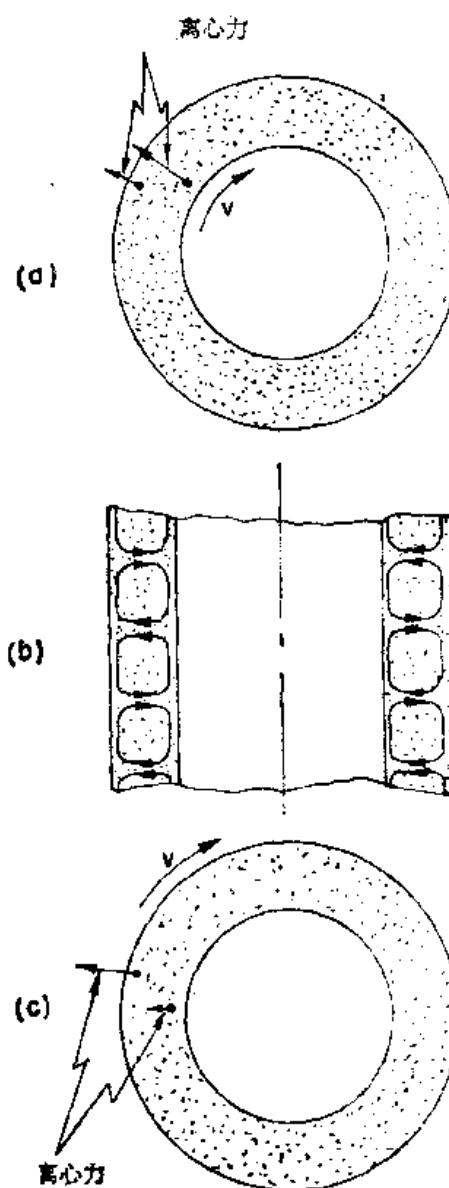


图 41-9 为什么流动会破裂成带状

若在一个只有单一参数的方程中，这样的变化就已属可能，那么对于更复杂的一些方程又该有比此多多少的可能性呢！也许用以描述旋涡星云以及那些正在凝结着的、正在旋转着的、正在炸开着的众星球和众银河的基本方程也不过是一个对于几乎是纯氢气的流体动力学的简单方程。经常有某些对物理学怀着没有理由的恐惧心理的人们总会说，你不能够写出关于生命的一个方程式来。噢，也许我们能够。事实上，当我们写出量子力学的方程式

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

时，我们就已十分可能在足够近似的程度上拥有这么一个方程式了。刚才已经看到，事情的复杂性能够那么容易而又戏剧性地逃避用来描写它们的那些方程式的简单性。还未认识到一些简单方程式的统辖范围，人们往往就会断言，要解释世界的复杂性少不了需要一个上帝，决非单凭方程式所能济事的。

我们已写下了关于水流的方程组。从实验方面，也曾找出了一套用来讨论其解答的概念和近似性——涡旋街道、湍性尾流、边界层等等。当在一种我们不那么熟悉的、而同时又还未能做出实验的情况下拥有一些相似的方程式时，就企图按照一种原始的、踌躇不决的、而又混乱不堪的方式求解那些方程，希望确定有什么新的定性特点可能会出现，或有什么新的定性形式是那些方程的一种后果。例如，当我们把太阳作为一个氢气球看待时，方程式把太阳描绘成没有太阳黑点的、没有表面上的谷粒状结构的、而又不带有太阳红焰和日冕的。可是，所有这些，实际上都存在于该方程式中；只是我们还未找到借以获得它们的方法罢了。

还有那些对于在其他行星上尚未找到生物而感到失望的人们。我却不是那种人——我希望能通过行星级探索，以及从这么简单的原理就能产生出那种变化无穷而又瑰奇谲幻的各种现象，这样再度受到提醒、受到鼓舞、并感到惊异。对科学的考验乃是其预言的本领。假如你从未探望过地球，难道你能预言雷电、火山、海涛、极光、以及五彩缤纷的晚霞吗？当我们获悉在那些死寂的行星——八个或十个球体，每个都各由同一种尘埃云所凝聚而成，而且每个又都遵循着完全相同的一套物理规律——的每一个上所发生的一切事情时，那将是有益的一课。

下一个人类智慧的伟大启蒙期，可能会产生出一种对方程式能够理解其定性内容的方法。目前我们还不能够。今天不能看出那些流动方程会含有人们从两个转动圆筒间所见得到的那种理发店招牌杆式的湍流结构。今天还不能看出是否薛定谔方程就含有青蛙、音乐作曲家、或者伦理道德——也许它不会。我们无从对超越这一界限以外诸如上帝是否需要这一类问题说三道四，因而人们可以在这两方面各死抱着自己的强硬见解。