08-C3

8.高级搜索树

红黑树

插入

莫赤匪狐，莫黑匪乌

惠而好我，携手同车

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

算法

❖ 按BST的常规算法，插入关键码$\boxed{e}$ //$\boxed{x}$ = insert(e)必为末端节点

不妨设$\boxed{x}$的父亲$\boxed{\texttt{p = x->parent}}$存在 //否则，即平凡的首次插入

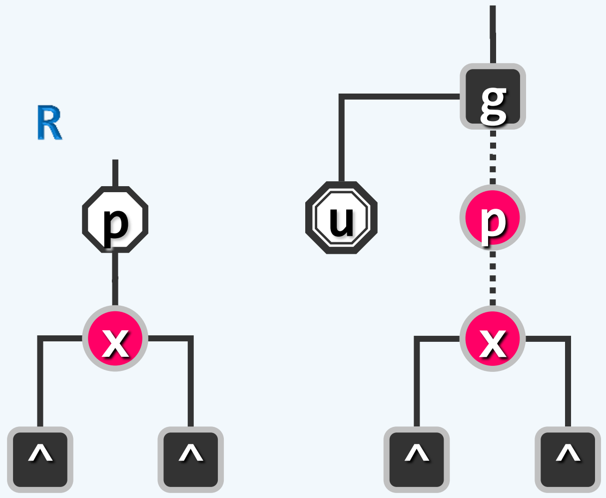
❖ 将$\boxed{x}$染红（除非它是根） //x->color = isRoot(x) ? B : R

条件$\boxed{1}$ + $\boxed{2}$ + $\boxed{4}$依然满足；但$\boxed{3}$不见得，有可能...

❖ 双红$\boxed{\texttt{double-red}}$ //p->color == x->color == R

❖ 考查：x的祖父$\boxed{\texttt{g = p->parent}}$ //g != null && g->color == B

p的兄弟$\boxed{\texttt{u = } \boxed{\boxed{\texttt{p == g->lc}}\texttt{ ? g->rc : g->lc}}}$ //即x的$\boxed{叔父}$



❖ 视$\boxed{u}$的颜色，分两种情况处理...

实现

```
❖ template <typename T> BinNodePosi(T) RedBlack<T>::insert( const T & e ) {
  // 确认目标节点不存在（留意对_hot的设置）
     BinNodePosi(T) & x = search( e ); if ( x ) return x;
  // 创建红节点x，以_hot为父，黑高度-1
     x = new BinNode<T>( e, _hot, NULL, NULL, -1 ); _size++;
  // 如有必要，需做双红修正
     solveDoubleRed( x );
  // 返回插入的节点
     return x ? x : _hot->parent;
  } //无论原树中是否存有e，返回时总有x->data == e
```

双红修正

```
❖ template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleRed( BinNodePosi(T) x ) {
    if ( IsRoot( *x ) ) { //若已（递归）转至树根，则将其转黑，整树黑高度也随之递增
        { _root->color = RB_BLACK; _root->height++; return; } //否则...
    BinNodePosi(T) p = x->parent; //考查x的父亲p（必存在）
    if ( IsBlack( p ) ) return; //若p为黑，则可终止调整；否则
    BinNodePosi(T) g = p->parent; //x祖父g必存在，且必黑
    BinNodePosi(T) u = uncle( x ); //以下视叔父u的颜色分别处理
    if ( IsBlack( u ) ) { /* ... u为黑（或NULL） ... */ }
    else               { /* ... u为红 ... */ }
}
```

RR-1：u->color == B

❖ 此时：

$\boxed{x}$、$\boxed{p}$、$\boxed{g}$的四个孩子

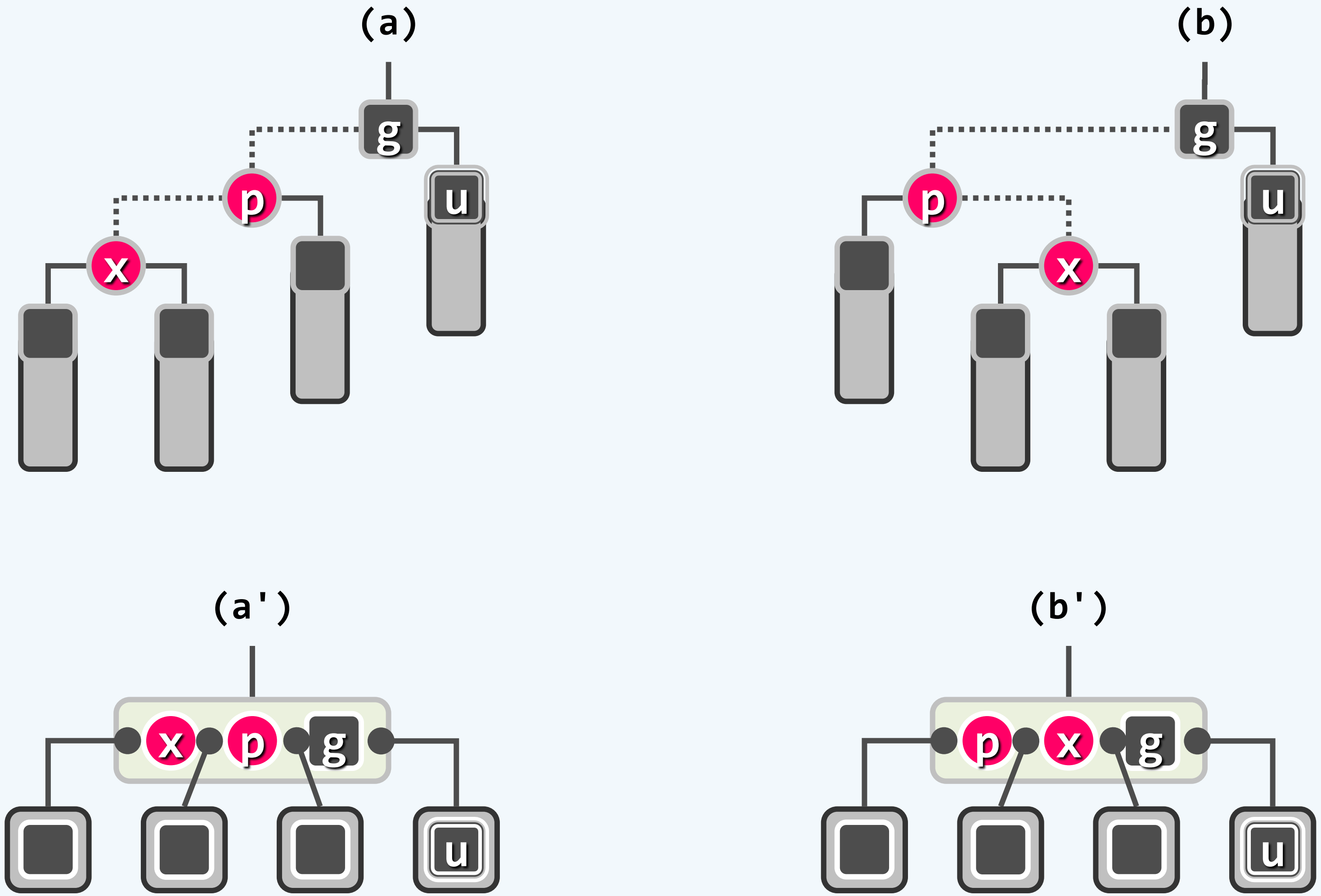
（可能是外部节点）

全为黑，且

黑高度相同

❖ 另两种对称情况

自行补充



RR-1：u->color == B

1） 参照AVL树算法，做局部 3+4 重构

2） 染色：b 转黑，a 或 c 转红

❖ 从B-树的角度，如何理解这一情况？

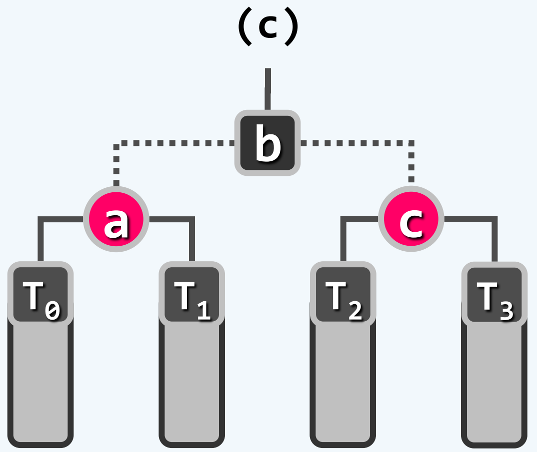
❖ 调整前之所以非法，是因为

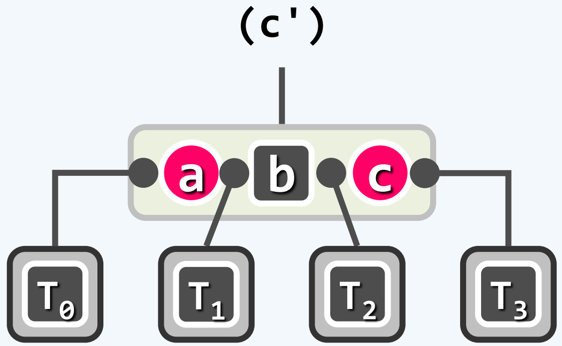
- 在某个 三叉 节点中插入红关键码，使得

- 原黑关键码不再居中 //RRB 或 BRR，出现相邻的红关键码

❖ 调整之后的效果相当于 //B-树的拓扑结构不变，但

- 在新的 四叉 节点中，三个关键码的颜色改为 RBR





RR-1：实现

❖ template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleRed(BinNodePosi(T) x) {

```
    /* ...... */
    if ( IsBlack( u ) ) { //u为黑或NULL
    // 若x与p同侧，则p由红转黑，x保持红；否则，x由红转黑，p保持红
        if ( IsLChild( *x ) == IsLChild( *p ) ) p->color = RB_BLACK;
        else                                    x->color = RB_BLACK;
        g->color = RB_RED; //g必定由黑转红
        BinNodePosi(T) gg = g->parent; //great-grand parent
        BinNodePosi(T) r = FromParentTo( *g ) = rotateAt( x );
        r->parent = gg; //调整之后的新子树，需与原曾祖父联接
    } else { /* ... u为红 ... */ }
}
```

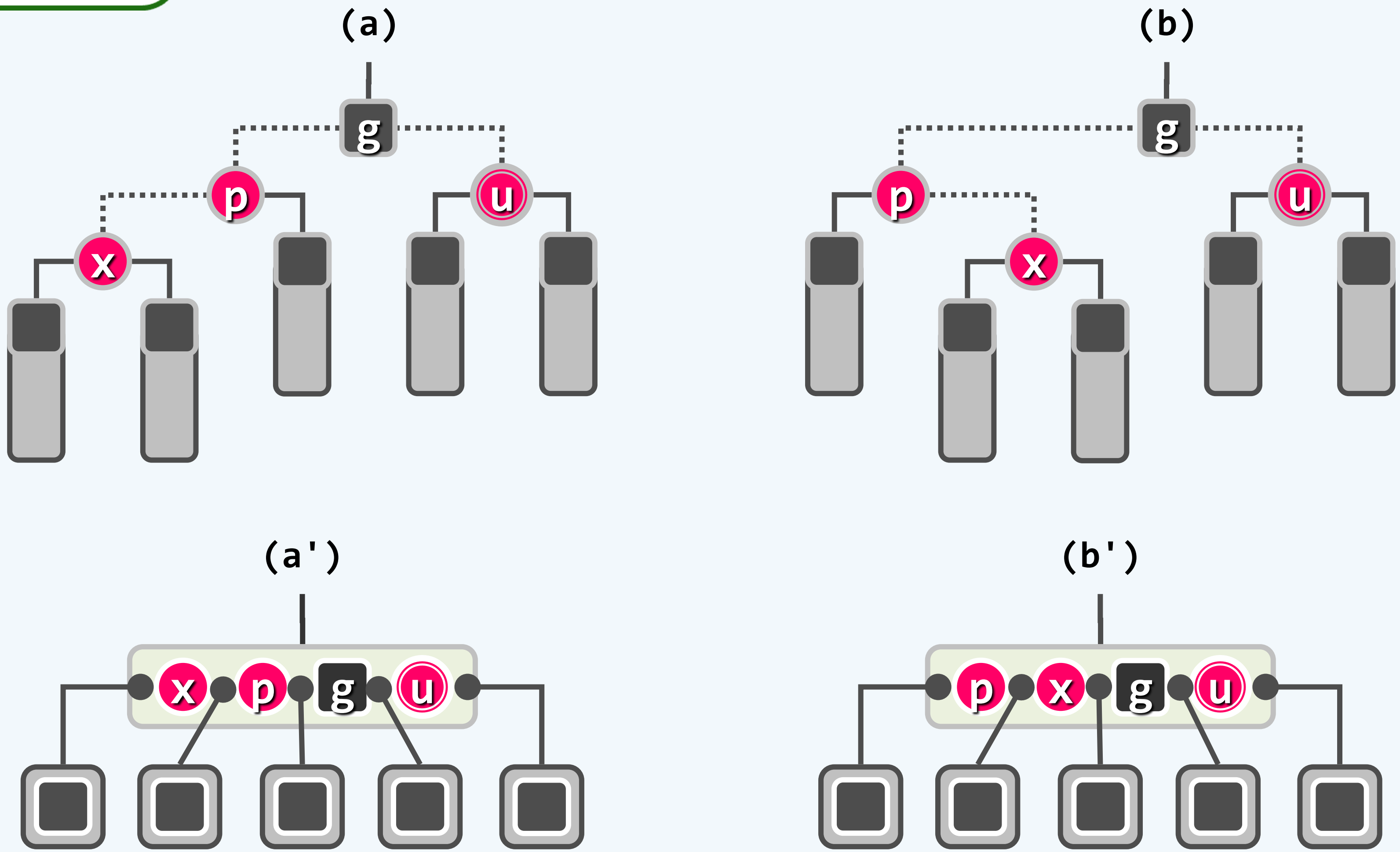
RR-2：u->color == R

❖ 在B-树中，等效于

超级节点发生$\boxed{\text{上溢}}$

//另两种对称情况

//请自行补充



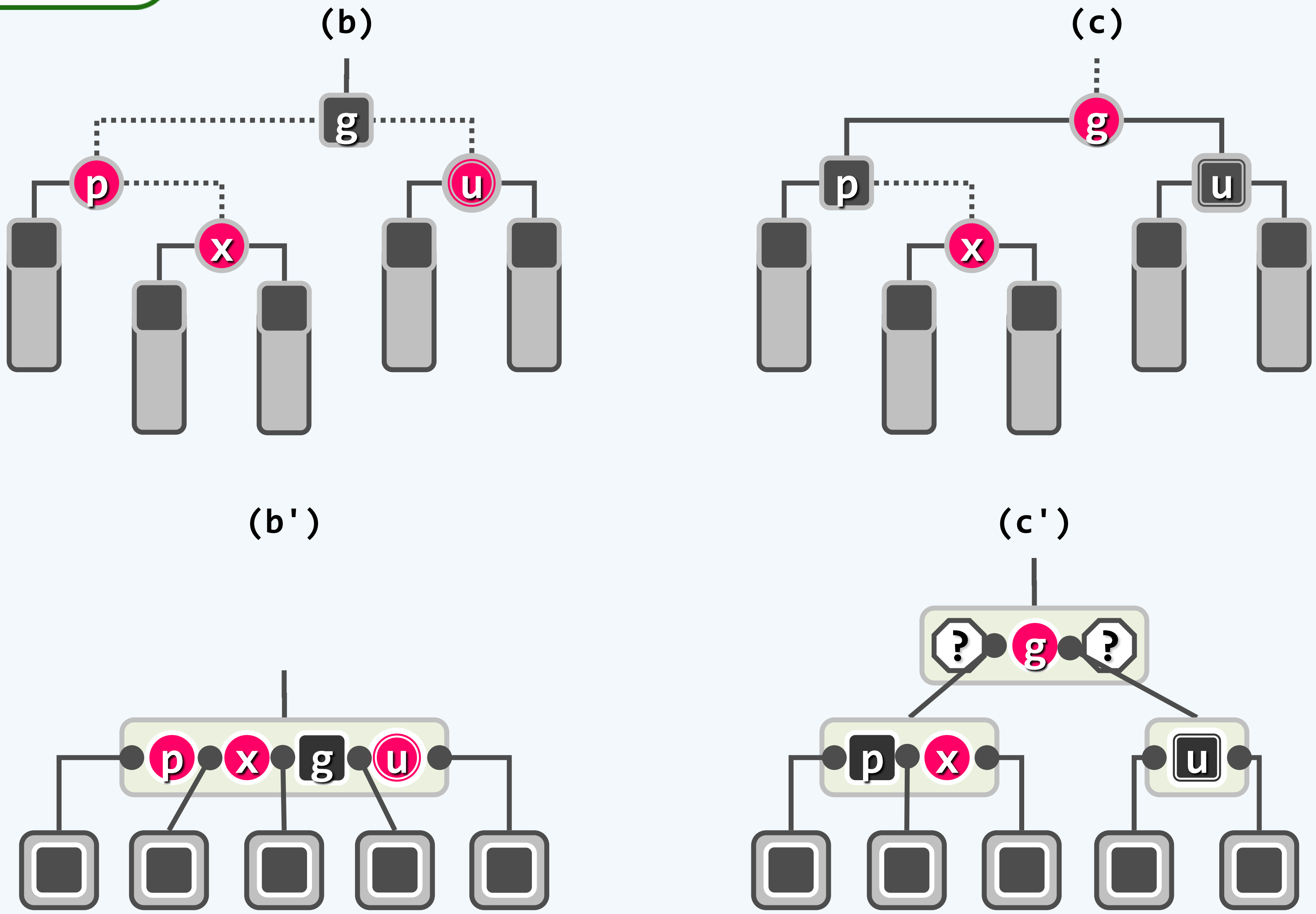
RR-2：u->color == R

❖ p与u转黑，g转红

❖ 在B-树中，等效于

节点 $\boxed{\text{分裂}}$

关键码g上升一层



RR-2：u->color == R

❖ 既然是分裂，也应有可能继续向上传递

亦即，g与parent(g) 再次 构成 双红

❖ 果真如此，可

等效地将g视作新插入的节点

区分以上两种情况，如法处置

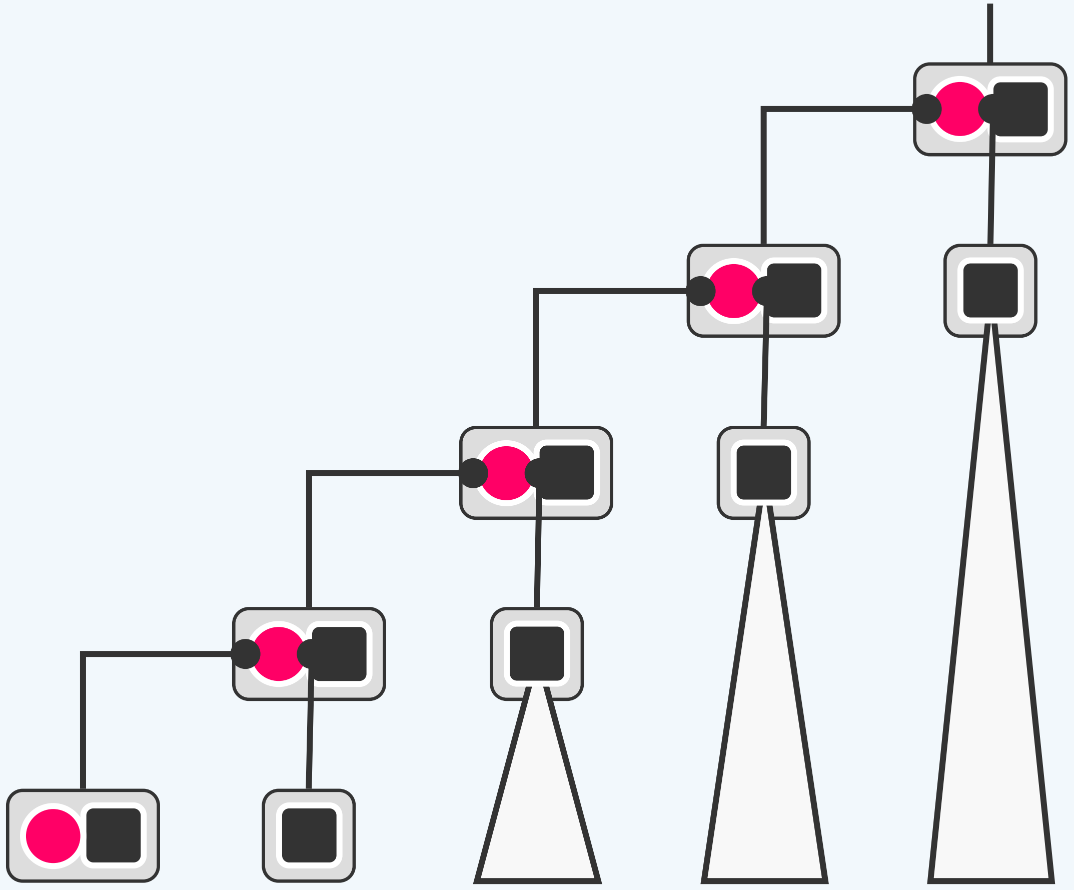
❖ 直到所有条件满足（即不再双红）

或者抵达树根

❖ g若果真到达树根，则

1. 强行将g转为黑色

2. 整树（黑）高度加一



RR-2：实现

```
❖ template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleRed( BinNodePosi(T) x ) {
     /* ...... */
     if ( IsBlack( u ) ) { /* ... u为黑（或NULL） ... */ }
     else { //u为红色
        p->color = RB_BLACK; p->height++; //p由红转黑，增高
        u->color = RB_BLACK; u->height++; //u由红转黑，增高
        if ( ! IsRoot( *g ) ) g->color = RB_RED; //g若非根则转红
        solveDoubleRed( g ); //继续调整g（类似于尾递归，可优化）
     }
}
```

复杂度

❖ 重构、染色均属常数时间的局部操作

故只需统计其总次数

❖ 红黑树的每一次插入操作

都可在 $\boxed{\mathcal{O}(\log n)}$ 时间内完成

❖ 其中至多做：

1. $\boxed{\mathcal{O}(\log n)\text{次}}$节点染色

2. $\boxed{\text{一次}}$“3+4”重构

情况	旋转次数	染色次数	此后
u为黑	1~2	2	调整随即完成
u为红	0	3	可能再次双红 但必上升$\boxed{\text{两}}$层