10.优先级队列

多叉堆

10-XA

他说到一件事，时常萦绕我的心头，就是每个人若能窥清其他人的心意，那么愿意下来的人会多于愿意高升的人

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

优先级搜索

❖ 回顾图的优先级搜索以及统一框架：g->pfs()...

❖ 无论何种算法，差异仅在于所采用的优先级更新器 `prioUpdater()`

- Prim算法： `g->pfs( 0, PrimPU() );`
- Dijkstra算法： `g->pfs( 0, DijkstraPU() );`

❖ 每一节点引入遍历树后，都需要

- 更新树外顶点的优先级（数），并
- 选出新的优先级最高者

❖ 若采用邻接表，两类操作的累计时间，分别为 $\mathcal{O}(n + e)$ 和 $\mathcal{O}(n^2)$

❖ 能否更快呢？

优先级队列

❖ 自然地，PFS中的各顶点可组织为 $\boxed{\text{优先级队列}}$ 形式

❖ 为此需要使用 $\boxed{\text{PQ}}$ 接口

heapify():	由n个顶点创建初始PQ	总计$\mathcal{O}(n)$
delMax():	取优先级最高（极短）跨边(u, w)	总计$\mathcal{O}(\boxed{n} * \log n)$
increase():	更新所有关联顶点到U的距离，提高优先级	总计$\mathcal{O}(\boxed{e} * \log n)$

❖ 总体运行时间 = $\boxed{\mathcal{O}(\boxed{(n+e)} * \log n)}$

对于 $\boxed{\text{稀疏图}}$，处理效率很高；对于 $\boxed{\text{稠密图}}$，反而不如常规实现的版本

❖ 有无更好的算法？如果PQ的接口效率能够更高的话...

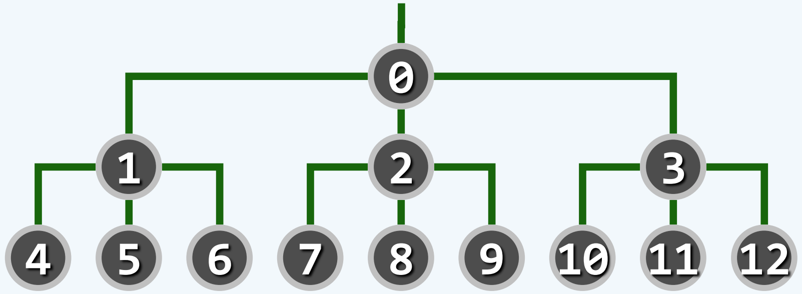
❖ 不太现实？异想天开？不妨先试试...

多叉堆

❖ heapify() : O(n)　不可能再快了 //直接写入，亦不过如此

delMax() : O(logn)　实质就是percolateDown() //已是极限了

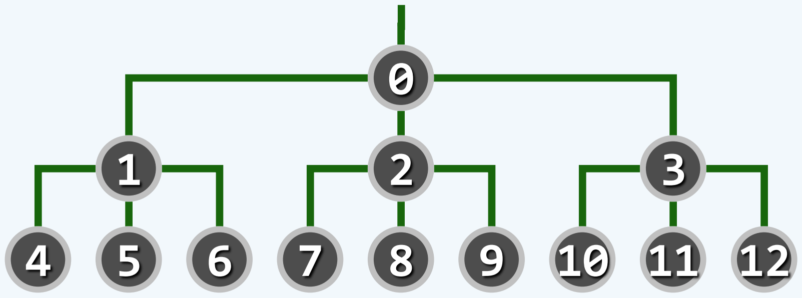
increase() : O(logn)　实质就是percolateUp() //似乎仍有余地



多叉堆

❖ 若将二叉堆改成多叉堆（d-heap）

则堆高降至 $\mathcal{O}(log_d n)$



❖ 上山容易下山难

- 上滤成本可降至 $log_d n$，但
- 下滤成本却增至 $d \cdot log_d n \ > \ d \cdot \frac{ln2}{lnd} \cdot log_2 n$

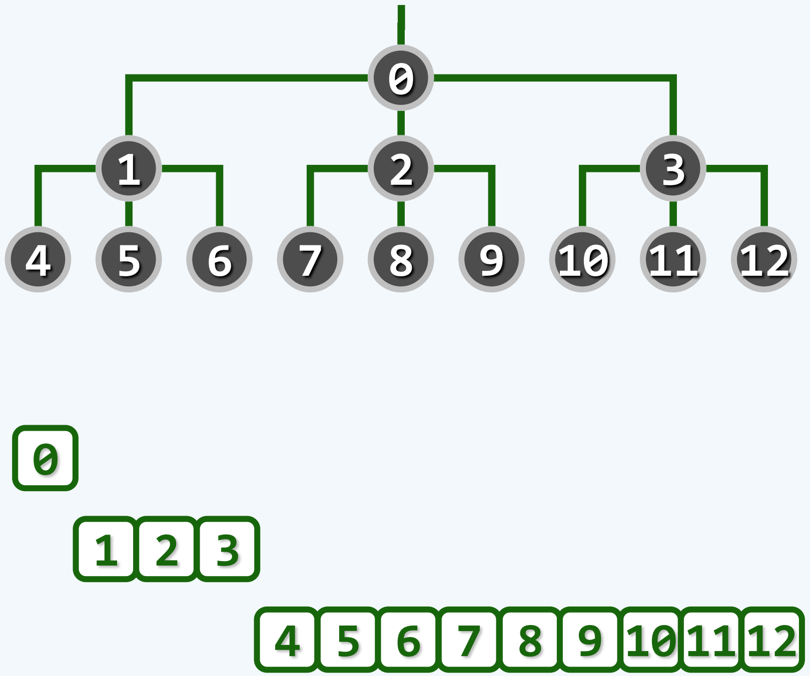
❖ 对于稠密图，两类操作的次数相差悬殊 —— 故而利大于弊...

多叉堆

❖ 如此，PFS的运行时间将是： $n \cdot d \cdot log_d n \ + \ e \cdot log_d n \ = \ (n \cdot d \ + \ e) \cdot log_d n$

❖ 两相权衡，大致取 $d \ = \ e/n + 2$ 时

总体性能达到最优的 $\mathcal{O}(e \cdot log_{(e/n+2)} n)$



❖ 对于稀疏图保持高效：

$$e \cdot log_{(e/n+2)} n \ \approx \ n \cdot log_{(n/n+2)} n \ = \ \mathcal{O}(nlogn)$$

对于稠密图改进极大：

$$e \cdot log_{(e/n+2)} n \ \approx \ n^2 \cdot log_{(n^2/n+2)} n \ \approx \ n^2 \ = \ \mathcal{O}(e)$$

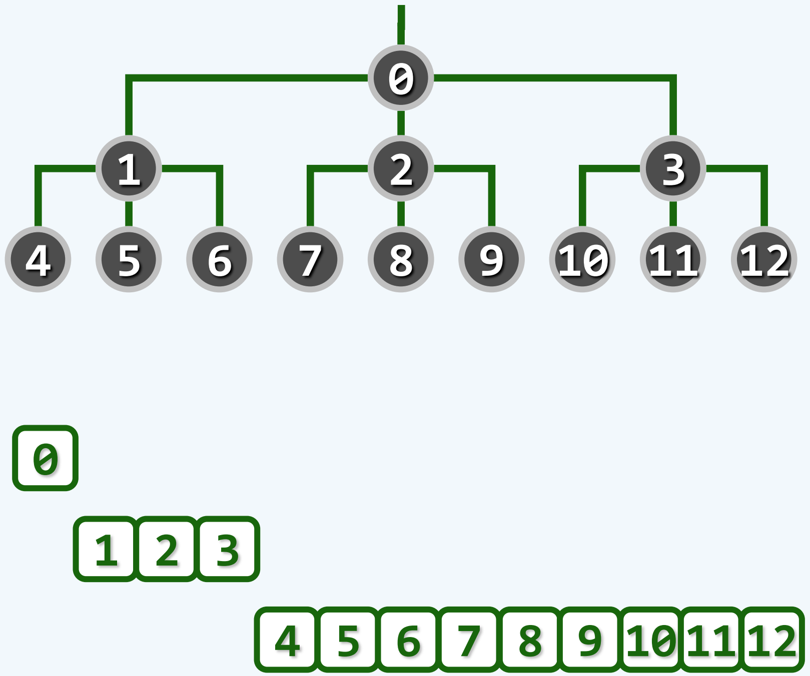
对于一般的图，会自适应地实现最优

多叉堆

❖ 实现方面，依然可以基于向量

$$\mathrm{parent}(k) = \lfloor (k-1) / d \rfloor$$

$$\mathrm{child}(k, i) = kd + i, \quad 0 < i \leq d$$



❖ 当然，d不再是2的幂时

将不再能够借助移位加速秩的换算

❖ 不过反过来，特别适用于

不主要取决依赖于秩换算效率的场合

比如，数据规模大到需要跨越存储层次时 //策略上，与B-树完全一致

Fibonacci堆

❖ 左式堆 x （ 新的上滤算法 + 懒惰合并 ）

❖ 各接口的分摊复杂度

delMax() $\mathcal{O}(\boxed{logn})$

insert() $\mathcal{O}(\boxed{1})$

merge() $\mathcal{O}(\boxed{1})$

increase() $\mathcal{O}(\boxed{1})$

❖ 于是，基于PFS框架的算法采用Fibonacci堆后，运行时间自然就是

$$n \cdot \mathcal{O}(logn) \ + \ e \cdot \mathcal{O}(1) \quad = \quad \mathcal{O}(e + nlogn)$$