07-C1

7.二叉搜索树

平衡

期望树高

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

树高

- 由以上的实现与分析，BST主要接口search()、insert()和remove()的运行时间

  在最坏情况下，均线性正比于其高度 $\boxed{O(h)}$

- 因此，若不能有效地控制树高，则就实际的性能而言

  较之此前的向量和列表等数据结构，BST将无法体现出明显优势

- 比如在最坏情况下，二叉搜索树可能彻底地 退化 为列表

  此时的查找效率甚至会降至 $\boxed{O(n)}$ ，线性正比于树（列表）的规模

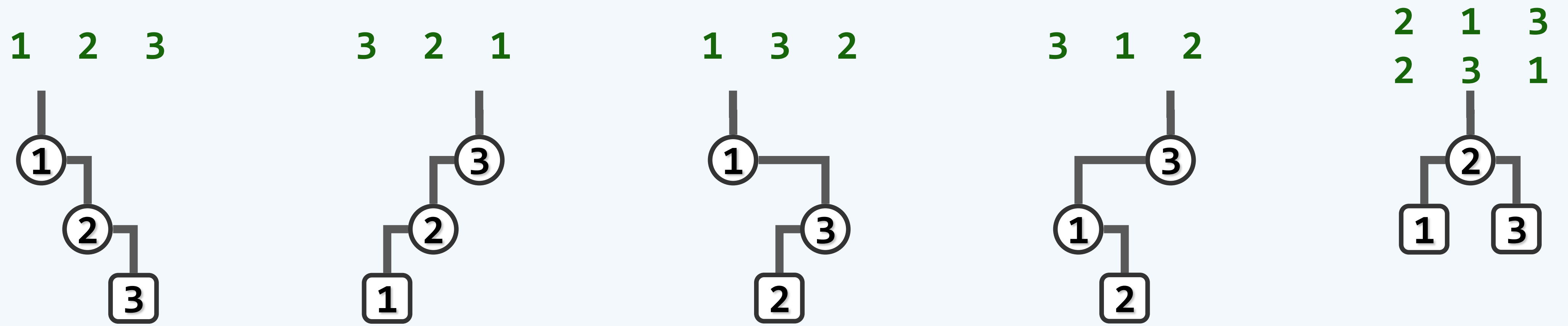
- 那么，出现此类最坏或较坏情况的概率有多大？

  或者，从平均复杂度的角度看，二叉搜索树的性能究竟如何呢？

- 以下按两种常用的随机统计 口径 ，就BST的 平均性能 做一分析和对比

随机生成

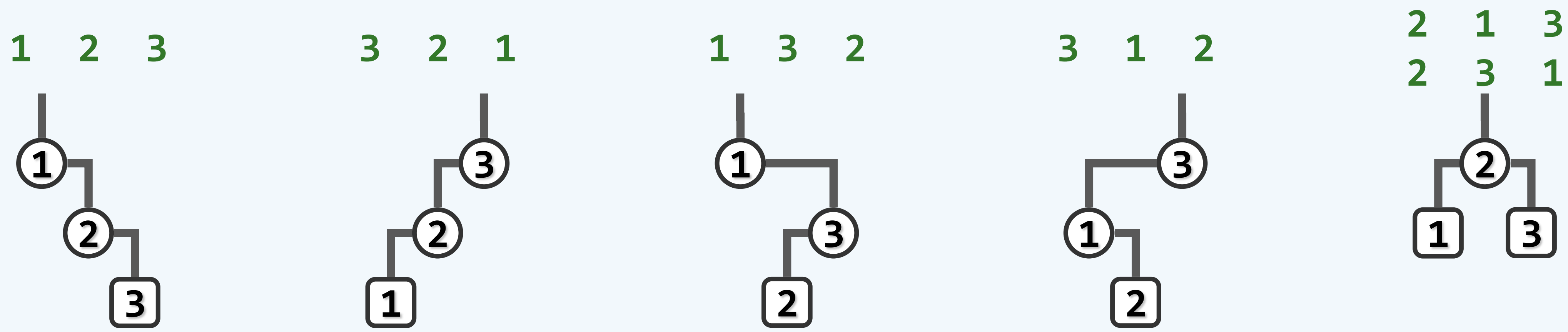
- 考查n个互异词条$\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$，对任一排列$\sigma = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}) \ldots$
- 从空树开始，反复调用insert()接口将各词条 依次插入 ，得到T(σ)
- 与σ相对应的T(σ)，称由σ 随机生成 (randomly generated)



- 若假定任一排列σ作为输入的概率均等 1/n!
  则由n个互异词条随机生成的二叉搜索树，平均高度为 $\Theta(\log n)$

随机组成

- n个互异节点，在遵守顺序性的前提下，可随机确定拓扑联接关系
- 如此所得的BST，称由这组节点随机组成（randomly composed）



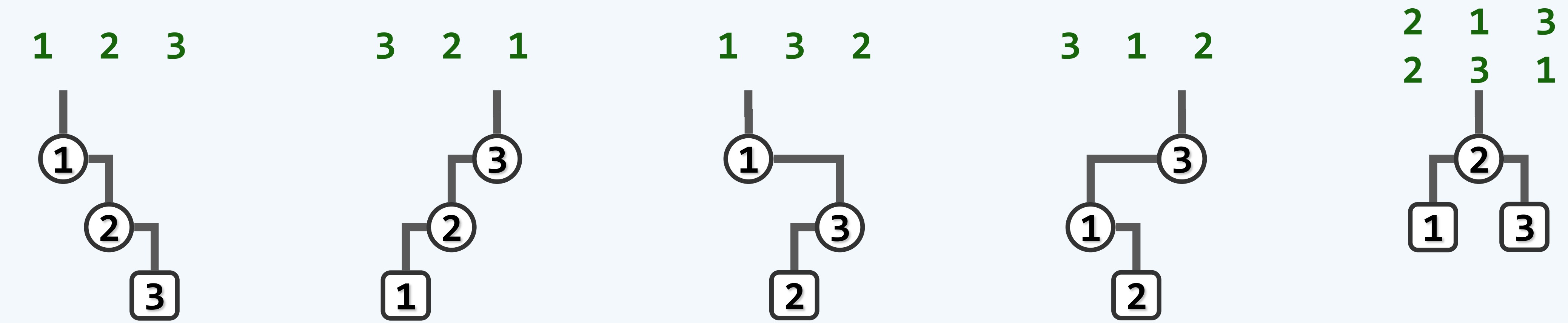
- 由n个互异节点随机组成的BST，若共计T(n)棵，则有

T(n) = $\boxed{\sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k)}$ = Catalan(n) = (2n)! / (n+1)! / n!

- 假定所有BST等概率出现，则其平均高度为$\boxed{\Theta(\sqrt{n})}$

Θ(logn) vs. Θ(sqrt(n))

❖ 按两种口径所估计的平均性能，差异极大——谁更可信？谁更接近于真实情况？



❖ 前一口径中，越低的BST被重复统计更多次——故嫌过于乐观

❖ 若删除算法固定使用succ()，则每棵BST都有越来越左倾的趋势

❖ 理想随机在实际中并不常见，关键码往往按单调甚至线性的次序出现

极高的BST频繁出现，不足为怪