5.二叉树

Huffman编码树

正确性

05-J3

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

正确性？

- 贪婪策略？

  在多数场合并不适用

  不见得能得到最优解

  甚至反而得到最差解　　//比如，最短路径

- Huffman树的构造采用了贪婪策略，它是最优编码树？总是？

- 易见：任一指定频率的字符集，都存在对应的最优编码树

- 然而，最优编码树可能不止一棵

- 断言：Huffman树必是其中之一　　//为什么？

- 不妨，先来考察最优编码树的特性...

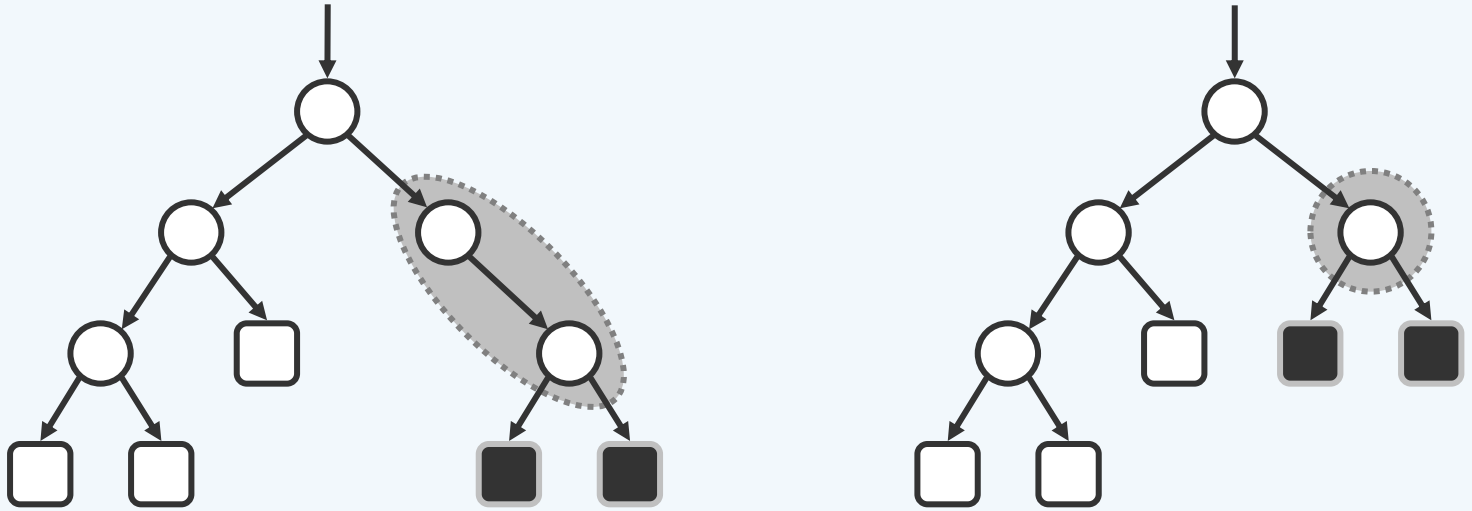
双子性

- 只要|Σ| > 1，最优编码树中每一内部节点都有两个孩子，亦即

  节点度数均为偶数（0或2）

  Huffman树必为真二叉树

- 否则，将1度节点替换为其唯一的孩子，则新树的wald将更小



不唯一性

- 对任一内部节点而言

  左、右子树互换之后wald不变

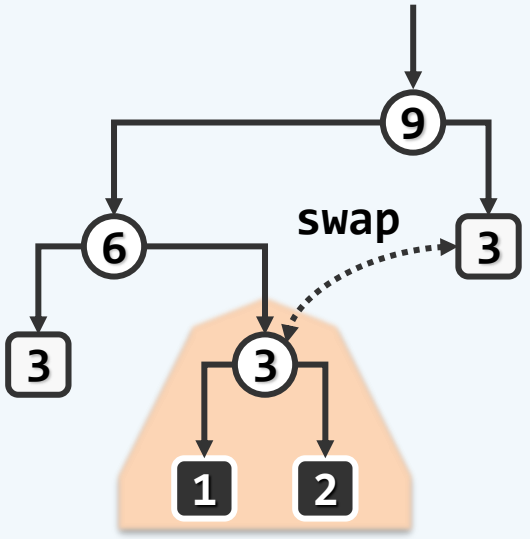
- 上述算法中，兄弟子树的次序随机选取，故...

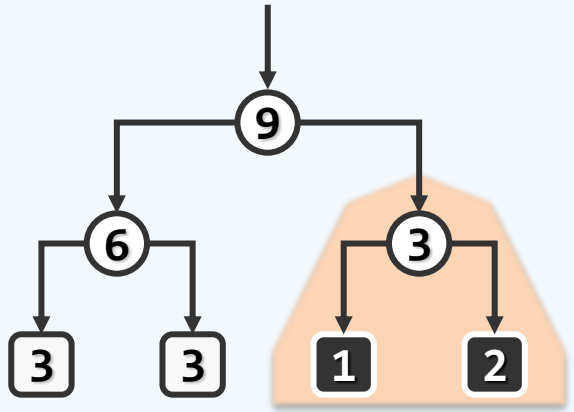
- 为消除这种歧义，可以（比如）

  明确要求左子树的频率更低

- 不过，倘若

  它们（甚至更多节点）的频率恰好相等...



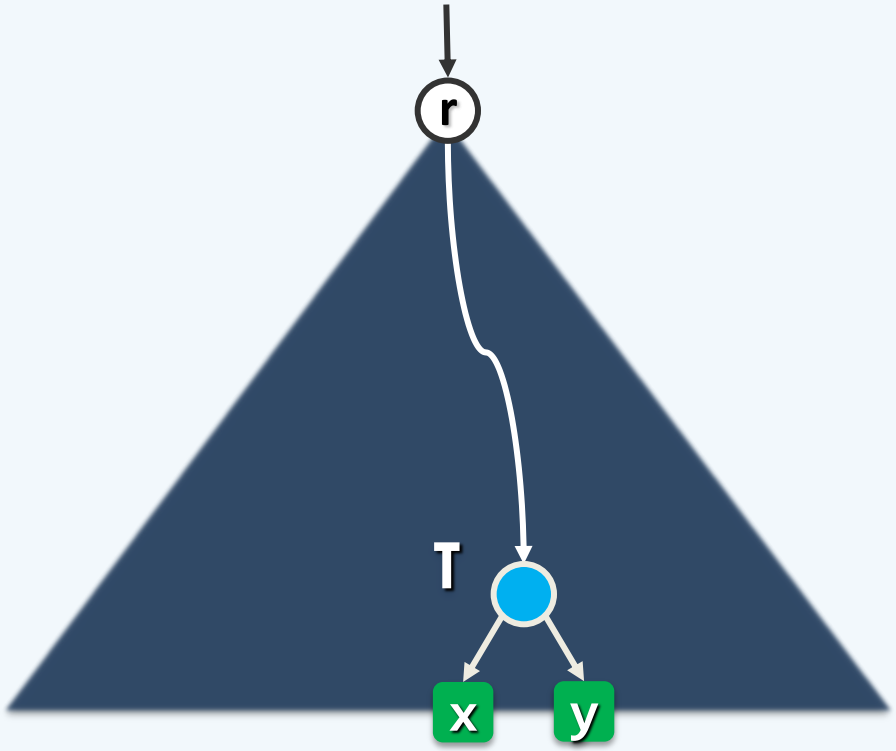


层次性

❖ 若：在字符表中，x和y是出现频率最低的两个字符

则：存在某棵最优编码树，x和y在其中处于最底层，且互为兄弟

❖ 为什么？



层次性

❖ 任取一棵最优编码树 //注意T的存在性

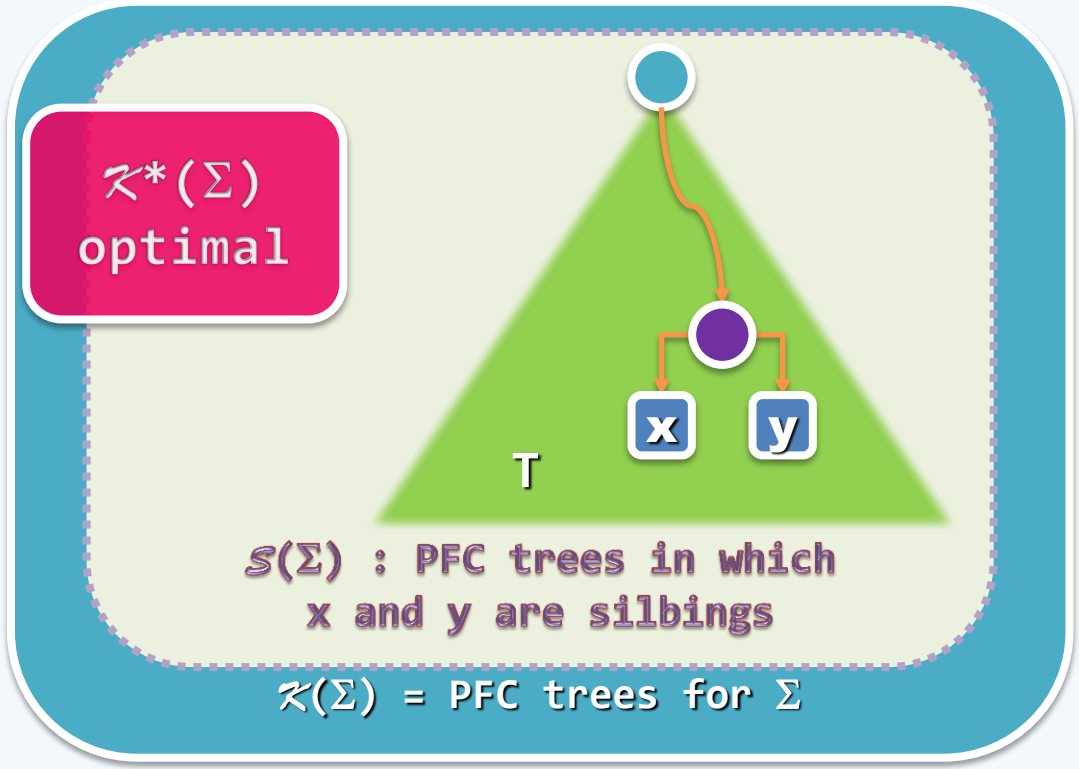
在其最底层，任取一对兄弟a和b //同样，注意其存在性

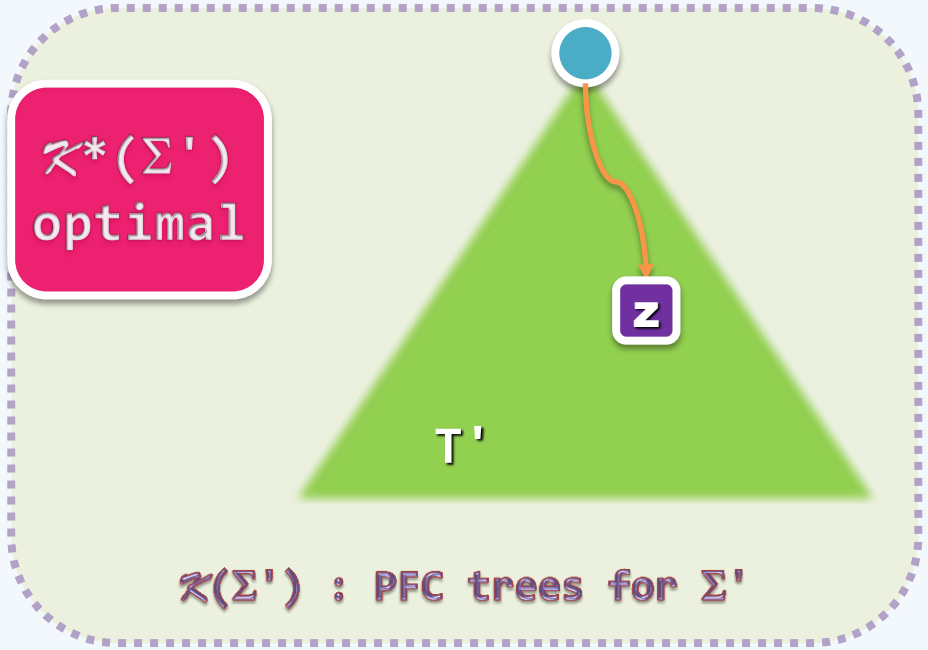
交换a和x，交换b和y之后，wald绝不会增加 //正如此前已看到的

正确性

- Huffman（算法所生成的）编码树，的确最优！
- 对|Σ|做归纳：|Σ| < 3时显然

  设|Σ| < n时Huffman算法都能最优编码，考虑|Σ| = n的情况...





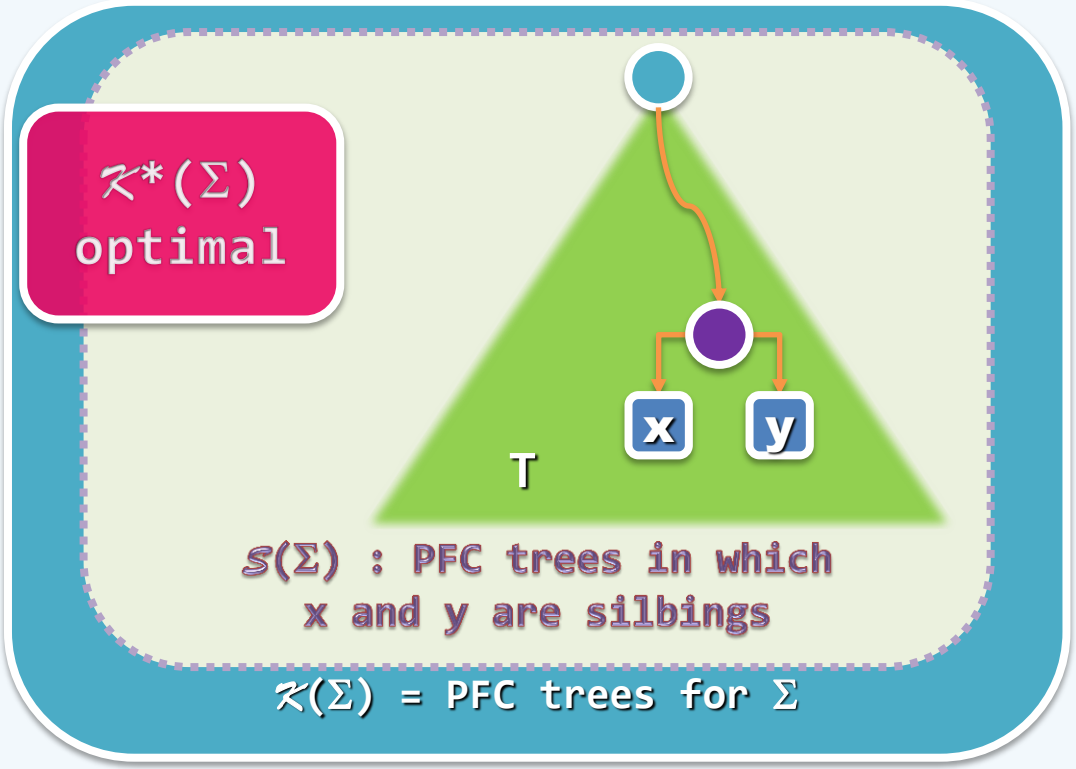
正确性

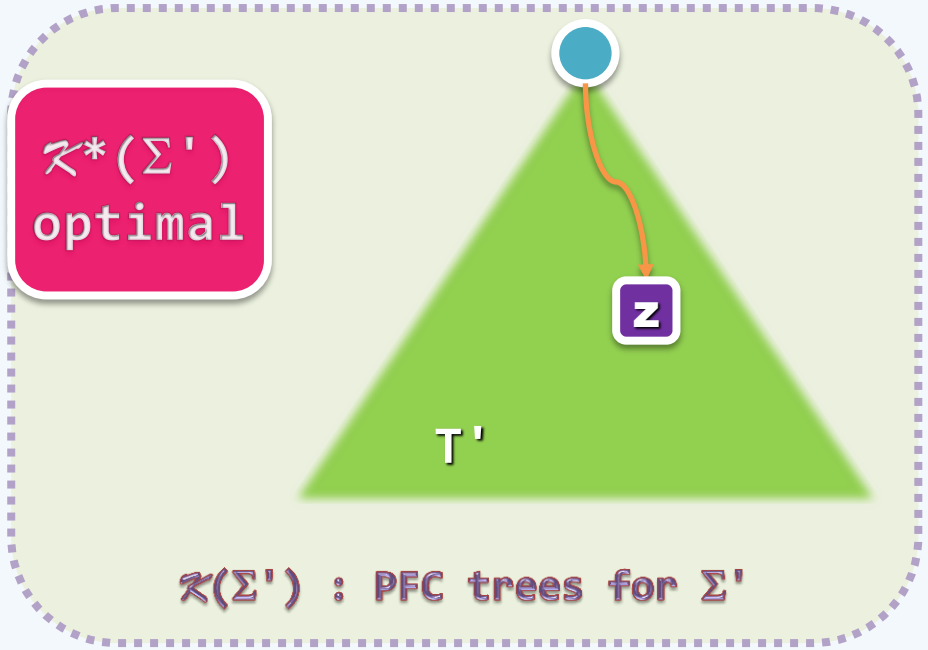
❖ 取Σ中频率最低的x和y

//由层次性，仅考虑其互为兄弟的情形

❖ 令 Σ' = (Σ\{x, y}) ∪ {z}

w(z) = w(x) + w(y)

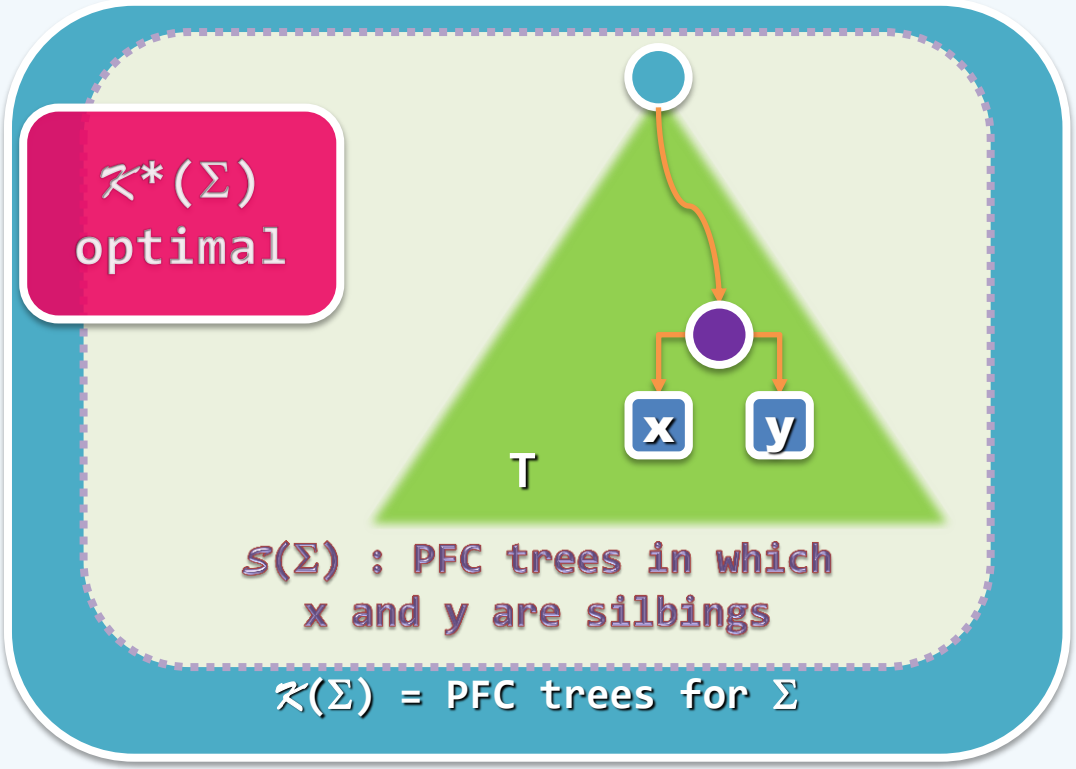


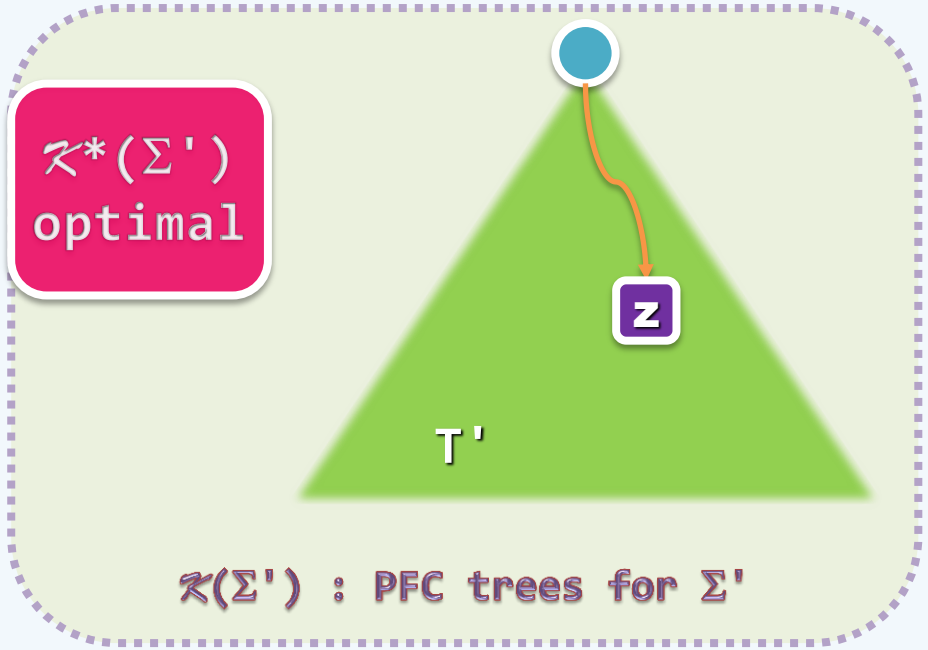


正确性

❖ 对于Σ'的任一编码树T'，只要为z添加孩子x和y，即可得到Σ的一棵编码树T，且 wd(T) - wd(T') = w(x) + w(y) = w(z)

❖ 可见，如此对应的T和T'，wd之差与T的具体形态无关





正确性

- 因此，只要T'是Σ'的最优编码树，则T也必是Σ的最优编码树（之一）
- 实际上，Huffman算法的过程，与上述归纳过程完全一致：

  每一步迭代都可视作，从某棵T转入对应的T'