5.二叉树

树

05-A

Two roads diverged in a yellow wood

And sorry I could not travel both

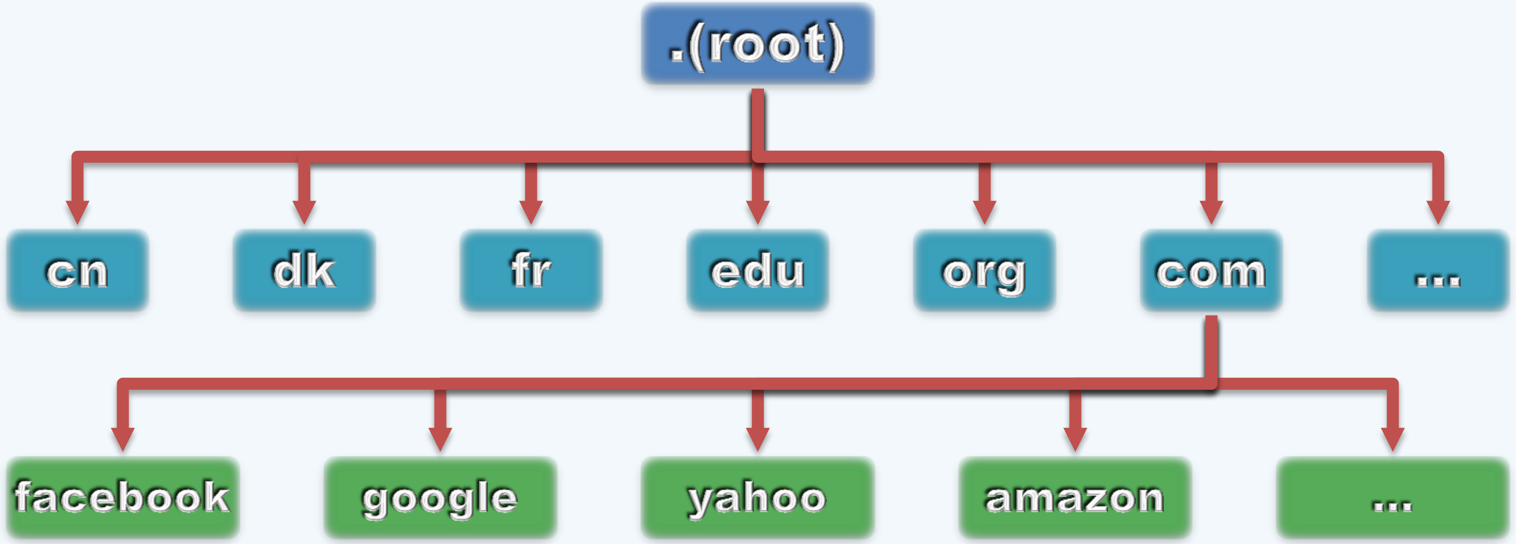
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

动机

❖ 【应用】层次结构的表示

- 表达式
- 文件系统
- URL ...

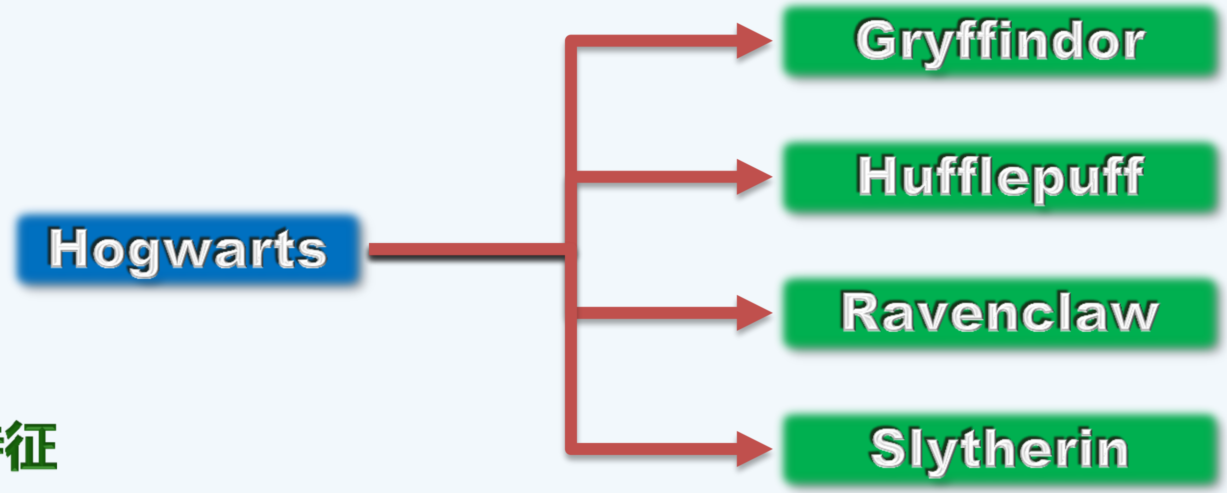


❖ 【数据结构】综合性

- 兼具Vector和List的优点
- 兼顾高效的查找、插入、删除

❖ 【半线性】

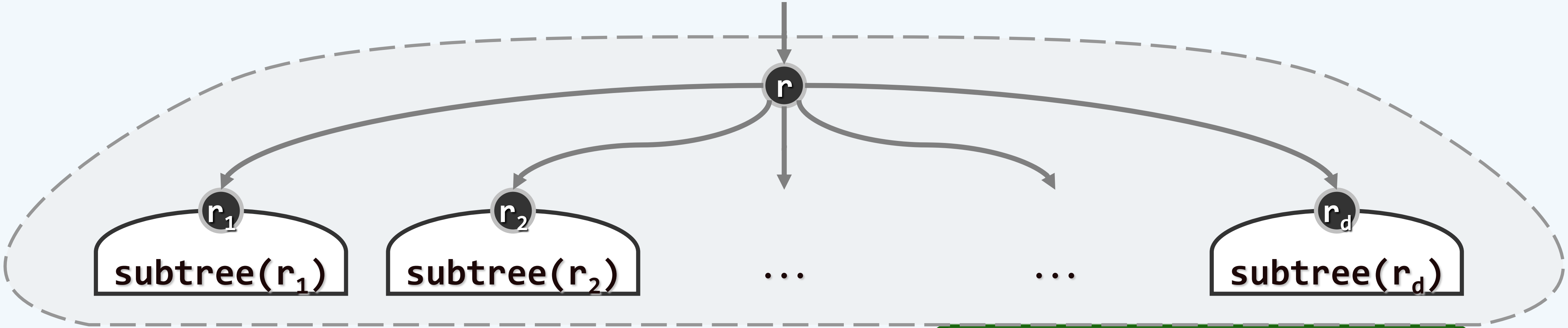
- 不再是简单的线性结构，但
- 在确定某种次序之后，具有线性特征



有根树

- 树是特殊的图 $T = (V, E)$，节点数 $|V| = n$，边数 $|E| = e$
- 指定任一节点 $r \in V$ 作为 根 后，T即称作 有根树 (rooted tree)
- 若：$T_1, T_2, \dots T_d$ 为有根树

  则：$T = ((\cup V_i) \cup \{r\}, (\cup E_i) \cup \{ \langle r, r_i \rangle \mid 1 \le i \le d \})$ 也是
- 相对于T，T_i 称作以 r_i 为根的 子树 (subtree rooted at r_i)，记作 $T_i = \text{subtree}(r_i)$



有序树

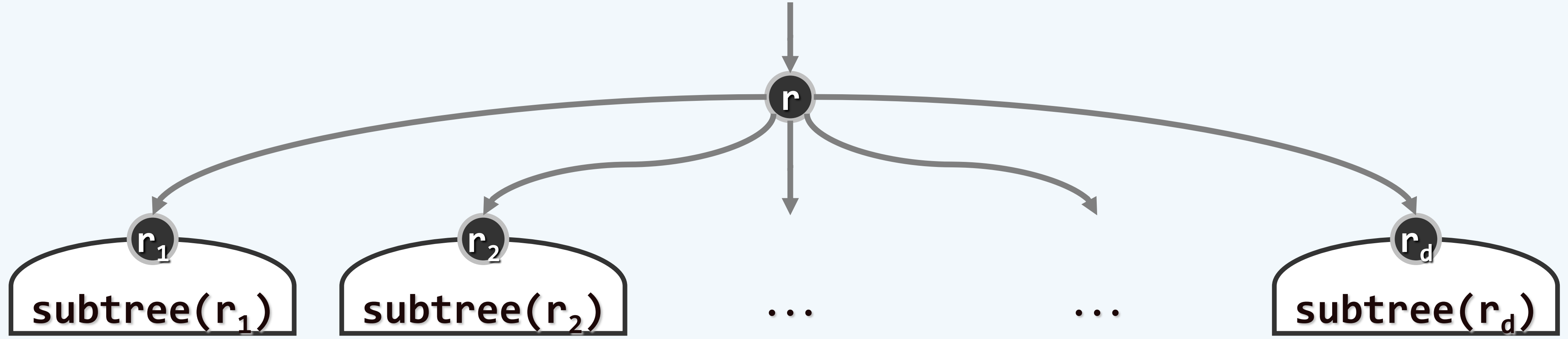
❖ r_i称作r的$\boxed{\text{孩子}}$（child），r_i之间互称$\boxed{\text{兄弟}}$（sibling）

r为其$\boxed{\text{父亲}}$（parent），d = degree(r)为r的（出）$\boxed{\text{度}}$（degree）

❖ 可归纳证明：$e = \sum_{r \in V} degree(r) = n - 1 = \boxed{\Theta(n)}$

故在衡量相关复杂度时，可以n作为参照

❖ 若指定T_i作为T的第i棵子树，r_i作为r的第i个孩子，则T称作$\boxed{\text{有序树}}$（ordered tree）



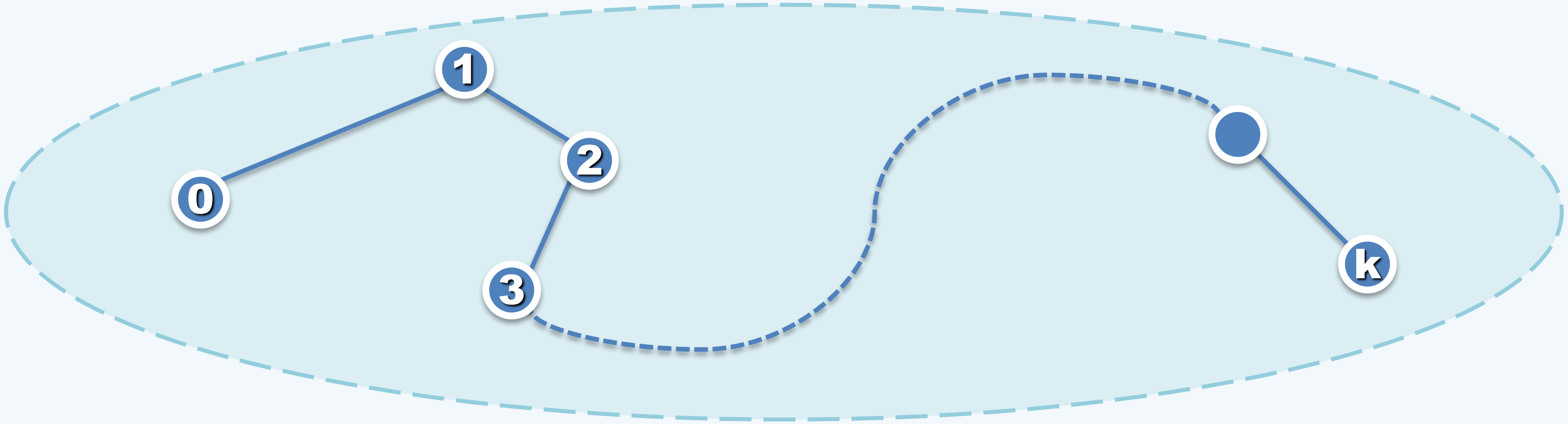
路径 + 环路

❖ V中的k+1个节点，通过E中的k条边依次相联，构成一条$\boxed{\text{路径}}$（path）　　//亦称$\boxed{\text{通路}}$

$$\pi = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots\ldots, (v_{k-1}, v_k) \}$$

❖ 路径$\boxed{\text{长度}}$：$|\pi|$ = 边数 = k　　//早期文献，或以节点数为长度

❖ $\boxed{\text{环路}}$（cycle/loop）：$v_k = v_0$



连通 + 无环

❖ 节点之间均有路径，称作 连通图 (connected)

不含环路，称作 无环图 (acyclic)

❖ 树： 无环连通图

极小连通图

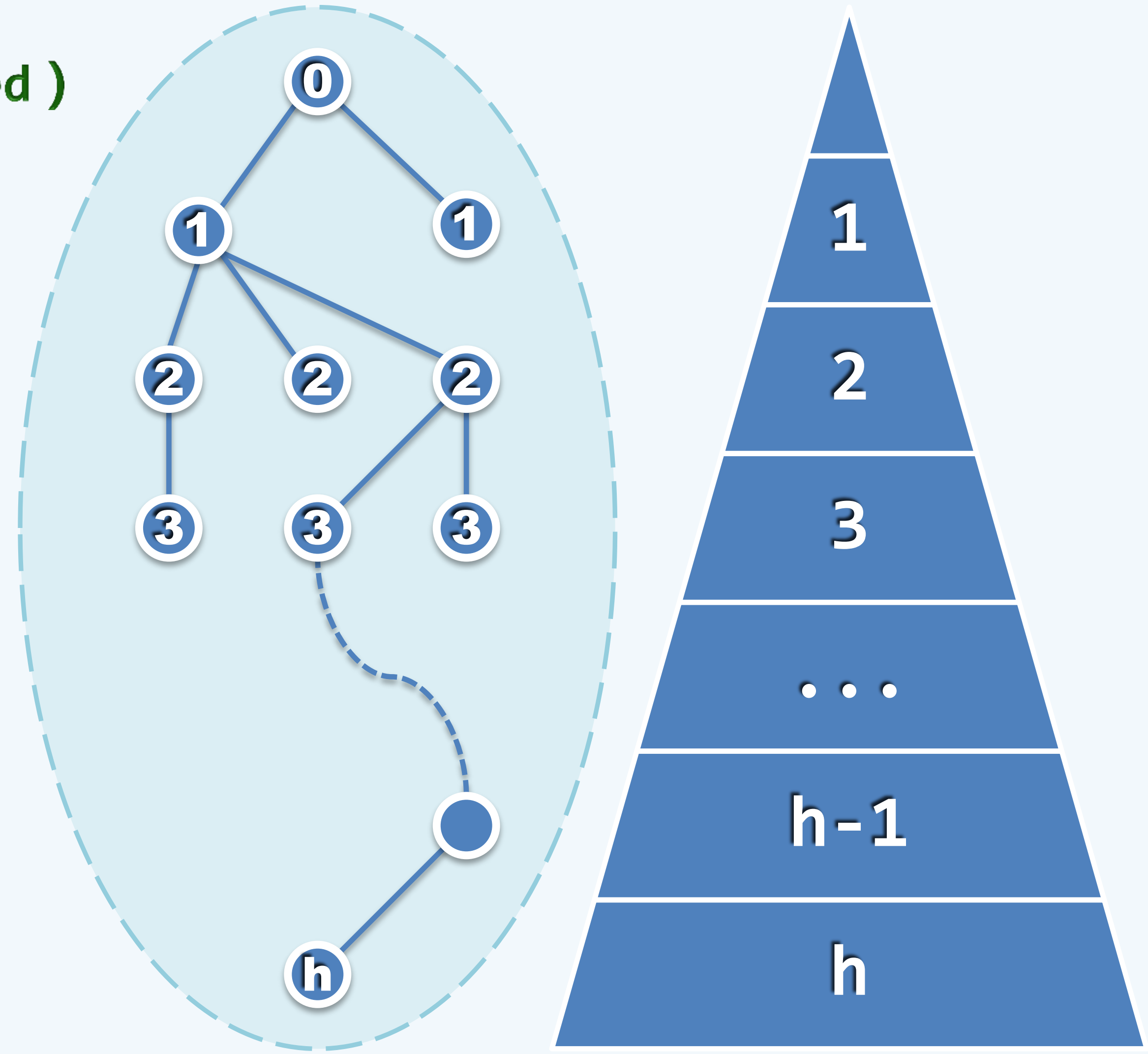
极大无环图

❖ 故： 任一节点v与根之间存在 唯一 路径

`path(v, r) = path(v)`

❖ 于是：以|path(v)|为指标

可对所有节点做 等价类 划分...



深度 + 层次

❖ 不致歧义时，路径、节点和子树可相互指代

path(v) ~ v ~ subtree(v)

❖ v的深度：depth(v) = |path(v)|

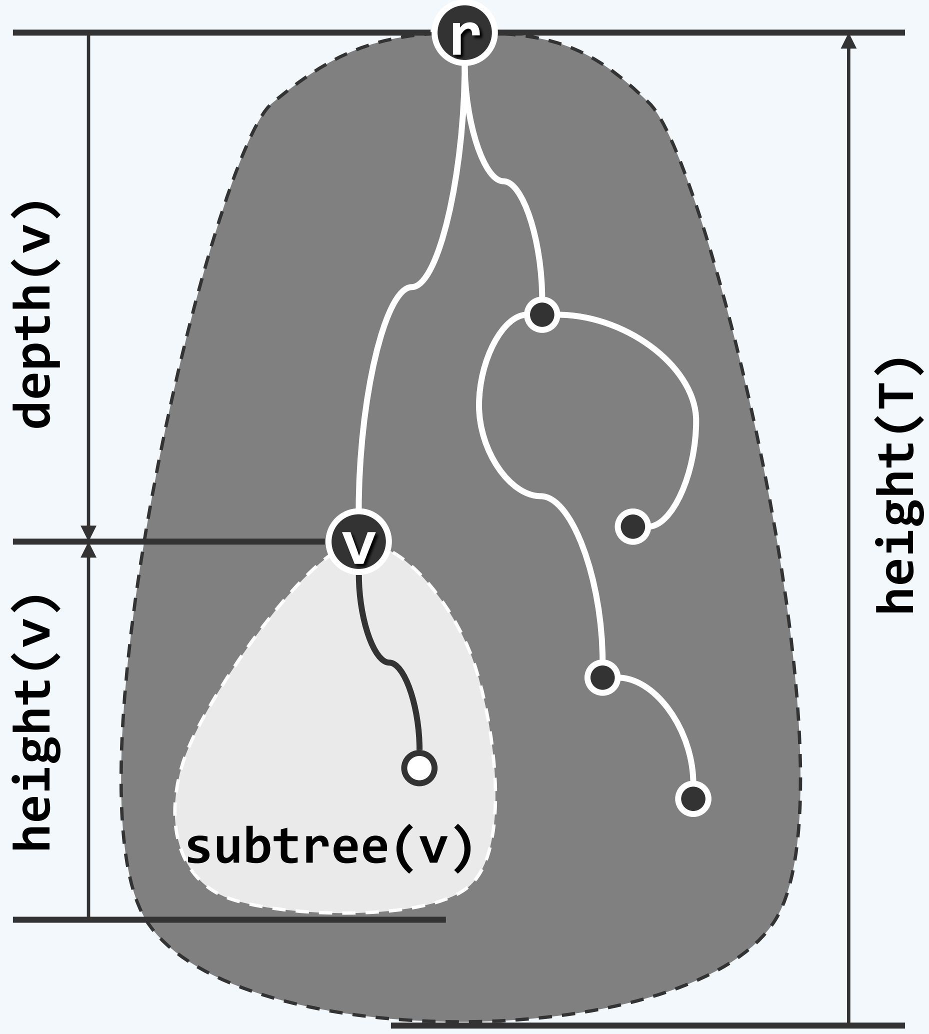
❖ path(v)上节点，均为v的祖先（ancestor）

v是它们的后代（descendent）

❖ 其中，除自身以外，是真（proper）祖先/后代

❖ 半线性：在任一深度

v的祖先/后代若存在，则必然/未必唯一



深度 + 层次

❖ 根节点是所有节点的 $\boxed{\text{公共祖先}}$ ，深度为0

❖ 没有后代的节点称作 $\boxed{\text{叶子}}$ (leaf)

❖ 所有叶子深度中的最大者

称作（子）树（根）的 $\boxed{\text{高度}}$

height(v) = height(subtree(v))

❖ 特别地，空树的高度取作 $\boxed{-1}$

❖ depth(v) + height(v) ≤ height(T)

何时取等号？