证明最奇怪的事情之一是，它利用了自指性悖论这些理性所讨厌的东西的根本结构，并重塑这些结构来支持自己。证明的全局策略——证明中令人高兴的容易理解的部分——可以在最古老的那个著名悖论——说谎者悖论——的背景下来理解①。我们可以用一个轻松愉快的方式来转述这个证明的要点，这就是我们下面要做的。在后面几节中我们将专注于填充更多的细节，简要说明一下这项艰苦的工作是如何实现的。

传统上，说谎者悖论被安放到克利特岛的艾皮米尼地斯身上，据说他说过的话的大意是：所有克利特岛人都是说谎者。就其自身来说，这句话并不自相矛盾，但是一定范围内它使人想到艾皮米尼地斯说的类似于这个：

正说的这句话是假的。

就像我们已经看到的一样，这句话当且仅当它为假的时候才为真，从逻辑来说，目前这句话境况不妙。哥德尔的策略包括考虑这个悖论语句的类似物，也就是命题：

---

① 在哥德尔1931年最早阐述这个证明的著名论文中，他提到了说谎者悖论和理查德悖论，将它们作为引领我们进入他那个证明的奇怪王国的启发式手柄。理查德悖论是法国数学家朱尔斯·理查德提出来的。陈述起来相当复杂，有点像哥德尔的证明本身，需要某种映射。将自然数的属性进行排序，并给每个属性指派一个数字。指派给某个属性的数字，实际上可能有也可能没有那个属性。因此，比如说，22对应于属性“是一个偶数”。那么22自己就具有它对应的理查德排序中的那个属性。现在定义这样一个属性：“不具有在理查德排序中指派给它的那个属性。”称这个属性为“有理查德性”，产生出悖论的问题是：对应于这个有理查德性的数自己有理查德性吗？

证明的所有其他形式——比如说，图灵和查汀——都在他们各自版本的证明中揉进了悖论的特性，虽然同哥德尔的悖论不同。这些悖论虽然互不相同，却都是自指性悖论。因此不完备性结果与自指性悖论的关系非常深，每种不完备性的证明背后都隐藏着某种自指性的悖论特性。

当前这个陈述在这个系统内不可证。

姑且称之为语句G。与它的类似物不同，G并不是自相矛盾，虽然它有点奇怪，所有的自指性命题都有点怪。（即便是不自相矛盾的自指性陈述“当前这个陈述是真的”也神秘难解。它在说什么？它的内容在哪里?）

借助于编码系统，“哥德尔配数化的”G（当然谦虚的哥德尔没有这样叫）可以用算术符号表示，因此它也构成一个算术陈述。这里就是难点，这一章后面部分我们将稍微深入研究一下证明的这个方面。哥德尔发现了让算术语言描述它自己的形式体系的天才方法。技巧的要点是G同时构成两个不同的陈述，既表明一个算术断言同时也表明其自身的不可证性。换句话说，除了直接的算术内容之外（这将是一个怪诞的算术命题，完全就是要把我们绕进去的无聊话），G所说的是：

G在这个系统中是不可证的。

这样G的否命题就是：

G在这个系统中是可证的。

如果G可证那么其否命题就为真——毕竟，它说了G可证。但是如果一个命题的否命题为真，那么这个命题自身就为假。因此如果G可证那它就为假。但是如果G可证，那也就是说它为真。毕竟，不管一个证明想表明的是什么，都当然认为系统是一致的（因为在一个不一致的系统中，一切命题都可证。）因此，假定系统具有一致性，如果G可证那它

就既为真也为假——矛盾——这意味着G不可证。因此如果系统是一致的，那G在其中就不可证。但那正是G所说的：即它不可证。因此G为真。这样G就既不可证又为真，这正是哥德尔证明的著名结论，如果系统是一致的，存在在系统中可以表述的为真却不可证的命题。并且因为G也有直接的算术意义，当然，如果G为真的话它也为真（因为它就是G），如果系统是一致的，那么哥德尔的证明表明存在算术真理（比如说，G!）在形式系统中不可证。这个形式系统要么不一致，要么不完备。

还不止如此，这个证明表明，如果我们把G当作公理直接加入系统，以试图补救不完备性，这样产生出了一个新的、扩展过的形式系统，那么在这个扩展系统中又能构造出G的一个对应物，其为真但是在扩展系统中不可证。结论是：在任何包含基本算术的形式系统中，假定系统一致，总能证明存在不可证但仍然为真的命题。一个丰富到足以包含算术的系统不可能既一致又完备。

这就是全局策略。在某种意义上（一旦理解了一个命题能同时谈论算术和它自身这个古怪的思想），它很简单。当然，魔鬼藏在细节中，现在我们就来看看这些魔鬼般的细节。

第一步：设计一个形式系统

哥德尔通过设计一个形式系统来开始他的证明，像所有的形式系统一样，其包含有一个符号字母表、将这些符号组成wff的规则、一组特别的称为“公理”的wff集合，以及从其他公理或公理推论的wff推出（作为“逻辑推论”的）wff的推理器。

在大部分形式逻辑系统中，有表示“与”（合取）和

“或”（析取）以及表达式“如果……就……”（实质蕴涵）和“……当且仅当……”的符号。另外还有表示“所有”和“一些”这样的量词概念的符号。不过，基本符号越少越好。我们可以利用析取消去合取，因为“p 与 q”与“p 为假或 q 为假不对”是一回事。我想吃而且我想苗条与我不想吃又或我不想苗条不是真的是等价的。消去还可以更进一步，因为析取可以用实质蕴涵消去，因为“如果 p，那么 q”与“非 p 或 q”是一回事。利用概念“所有”我们还可以消去概念“一些”，因为“有一些 x 具有 F”与“不是所有 x 都不具有 F”是一样的。有一些逻辑学家是理性的与不是所有逻辑学家都不理性是等价的。通过消去，我们留下了九个基本概念以及相应的符号，用它们表示一个形式系统中的所有算术。

第二步：哥德尔配数

证明的下一步是发明一种方法，自动给系统中每个命题配一个独一无二的数。正是通过配数完成了声调的调和，从而算术陈述同时也是元数学陈述。

逻辑学家科琴向我漂亮地揭示了哥德尔的证明同卡夫卡的作品具有的明显相似性（哥德尔刚好也很欣赏他的作品）。不管是卡夫卡还是哥德尔，都有一种爱丽丝漫游奇境的特性，一种进入了一个怪诞世界的感觉，在这个世界中事物会变成其他东西——包括它们自身的含义。然而一切又都是根据严格受限于规则的逻辑逐步推进。（卡夫卡的严格逻辑没有被充分欣赏。）用科琴的话说，哥德尔的许多工作实际上就是“记账”。科琴还说，这个证明的两面性也反映出哥德尔头脑里某种本质性的东西，狂野的想象力同单调的循规蹈矩结合在一起。每一面都展现在哥德尔配数中。我们来看看它的基本

思想：

回想一下，形式系统包含有各种类型的对象：字母表中的符号、符号组成的 wff、wff 的特定序列（也就是证明），一切都是建立在字母表的基本符号之上：wff 是这些符号的一个序列，然后证明又是 wff 的一个序列（结论就是序列的最后一条）。

哥德尔配数从给字母表中每个基本符号指配一个数开始。一旦给每个基本符号配了数，就可以继续根据规则，依据 wff 的组成给 wff 指派数字。然后，一旦每个 wff 都有了对应的哥德尔数，就可以根据规则给 wff 的序列也就是证明指配数字，从而完成哥德尔配数。

更进一步，一旦每个 wff 都被指配了相应的数字，我们只需分析命题的相应配数之间的算术关系就能分析命题之间的结构关系。反过来也是一样。比如说，如果两个 wff 的哥德尔数相互之间正好以某种方式的算术相关，则一个 wff 就正好是另一个的推论。换句话说，两个不同类型的描述相互重叠：算术描述——阐述在形式系统内可以表达的数之间的关系；元描述——论及系统内 wff 之间的逻辑关系。这些元语句是纯粹语法式的，因为它们纯粹是形式系统语法——也就是规则——的结果。

哥德尔配数的思想基本就是编码的思想，它使你可以在原始命题与编码之间来回腾挪。在小学时我和朋友用相似的编码在课堂上递纸条，给字母表上每个字母指定 1 到 26 之间的一个数，“A”定为 1，“B”定为 2，等等。“和我碰头（Meet me）”被表示成：13 5 5 20 13 5。

哥德尔使用的编码体系必须确保同一个哥德尔数不会被指配给不同的对象，比如既指向某个 wff 同时又指向一个 wff 的序列（一个证明）。编码规则给我们提供了一个算法

（回忆一下，算法就是告诉我们在每一步如何推进的规则集，经常是基于我们前面应用规则后得出的结果推进）来从任何 wff 或 wff 的序列得到独一无二的哥德尔数。逆过程同样也有算法：给定一个哥德尔数，我们可以指出它代表的是系统中哪个形式对象。哥德尔配数还必须符合一个进一步的条件：它从系统中 wff 之间逻辑关系的语法描述翻译出来的算术命题本身在系统内部必须是可表示的。

如果我们像哥德尔那样严格，编码没有这么简单，但哥德尔配数的思想还是能被简单表述出来。十进制记数法对于我们过于熟悉，以至于忘了它也是一套编码系统，需要在形式系统中进行证明。因此，比如说，通常的数字符号 365 是一个缩写，表示 3 乘以 10 的平方，加上 6 乘以 10，加上 5。哥德尔的编码系统使用了素数的幂积，并依赖于素数分解定理，即每个数都能被分解为唯一的素数乘积。素数分解定理确保存在从任何 wff 或 wff 序列得到哥德尔数以及相反过程的算法。我们下面使用的数字对应，如果严格构造，完全可以像哥德尔的系统一样复杂。但我们不用太严格。

首先，我们给形式系统的字母表中每个符号任意指定一个自然数。在描述一个算术形式系统时，只要我们能限定自己只用九个符号，给每个指定一个哥德尔数，我们就能做我们需要的一切：

基本记号	哥德尔数	意义
$\sim$	1	非
$\rightarrow$	2	如果……就……
x	3	变量
$=$	4	等于
0	5	零

续表

基本记号	哥德尔数	意义
s	6	的后继
(	7	标点符号
)	8	标点符号
′	9	撇号

量词“所有”，用括号和变量表示。这样，比如说，$(x)F(x)$ 的意思是：所有 x 都有 F。撇号可以让我们构造出额外的变量：x，x'，x''，x'''，等等。我们还有表示 0 的符号以及表示后继的方法，这样我们就能表示所有的自然数。

现在我们规定一个为 wff 指配哥德尔数的规则。这里 wff 当然也就是字母表中符号组成的序列。我们采用尽可能简单的规则，借鉴一下我和朋友在小学用的编码。我们只需简单地将 wff 中每个符号的哥德尔数排在一起，就能得到这个 wff 的哥德尔数。

现在考虑以下 wff：

(P_1) $$(x)(x')[s(x)=s(x')\rightarrow(x=x')]$$

假定我们的论域（变量被解读为对其进行指称的对象）是自然数，P_1 的意思就是如果两个数有同样的后继，那它们就是同一个数。换句话说，一个数不可能是两个不同的数的后继。更专业点：对于所有 x 和所有 x'，如果 x 的后继与 x'的后继相同，那么 x 就与 x'相同。

现在我们只需顺着 wff 往后，将每个符号用其哥德尔数替换，这样将 wff 转换成数字。式子 P_1 中的每个符号都已被指定一个数字：开括号是 7，x 是 3，闭括号是 8，否定号是 1。将式子中每个成分用相应的哥德尔数替换，得到一个大数，就是这个 wff 的哥德尔数。将“命题 P 的哥德尔数”缩

写为 GN(P)，我们得到：

$$GN(P)=73873987767384673988273439 8$$

这样哥德尔数就被指配给了 wff，符号的序列，从而也给了命题，它们不过是特殊的 wff。用同样的方法，利用已经指配给命题的哥德尔数，哥德尔数也能被指配给命题序列，尤其是可能的证明，它们不过就是命题序列。注意！在我们的简化版中，一个命题序列（一个证明）的哥德尔数基本上是通过将相继命题的哥德尔数放在一起得到；不过，能将原始命题序列无歧义地从数字中提取出来也很重要，因此我们需要用某种记号指出一个命题结束另一个命题开始的地方——有点类似键盘上的回车键。我们将用 0 作为我们的回车，标明现在我们要进入新的一行证明。

这样，假设在某个特定的命题序列中，P_1 后面跟着 P_2，P_2 定义为

(P_2) $$s(0)=s(0)$$

对应于 P_2 跟着 P_1 这个序列的哥德尔数是

$$GN(P_1, P_2)=738739877673846739882734398067584675 8$$

利用哥德尔的天才发明，所有在形式系统的命题间成立的逻辑关系成了用系统本身的算术语言可以表示的算术关系。这就是整个事情那令人窒息的美丽的精华部分。因此，比如说，如果 wff_1 逻辑蕴涵 wff_2，那么 $GN(wff_1)$ 同 $GN(wff_2)$ 将有某种纯粹的算术关系。比如，假设能证明，如果 wff_1 逻辑蕴涵 wff_2，那么 $GN(wff_2)$ 就是 $GN(wff_1)$ 的一个因子。那我们就能用两种方法证明 wff_1 逻辑蕴涵 wff_2：我们可以用

形式系统的规则从 wff_1 演绎出 wff_2；我们也可以证明将 GN(wff_2) 同某个整数相乘能得到 GN(wff_1)。假设 GN(wff_1) ＝195589，而 GN(wff_2)＝317。317 是 195589 的因子，因为 317 乘以 617＝195589。这样用从 wff_1 得到 wff_2 的形式规则，或者用 617 乘以 317[GN(wff_2)] 等于 195589 [GN(wff_1)] 的算术规则，都能证明 wff_1 逻辑蕴涵 wff_2。元语法和算术相互重叠。

一旦有了这种逻辑含义和算术关系的重叠，我们就能继续往下揭示特定的 wff 序列——构成证明的那些——具有一个可以在系统中表示的算术属性。证明是建立在逻辑蕴涵之上的。因此从前面讨论的那类重叠也可以得出（所有且只有系统中的证明的哥德尔数具有的）算术属性。在系统中构成证明的一组 wff 的哥德尔数会具有某种算术属性，比如说，它们都是偶数或都是奇数，或者它们都是素数或素数平方，或者更有可能是复杂得多的某个属性。换句话说，可证性这个元语法关系将成为一个算术关系；一组 wff 将是某种数字属性的一个证明。基于此将有可能表明，所有且只有系统中的可证 wff（即定理）具有某种特定的算术属性。你可以看出我们在向哪里前进：可以在系统中表示的算术命题同时也可以谈论它们自己在系统中的可证性。哥德尔配数允许某些命题进行一种有趣的一语双关，谈论算术同时又谈论它们自己在系统中的情况——即它们是否可证。

这些命题的一语双关可以与偶尔在戏剧中发生的一种情形相比较。在这种情形中，演员作为角色，在戏剧中有他们自己的“真实生活”关系，然后这些角色又是戏中戏的演员。通过精心设计，在戏中戏里，演员的对白同时也可以被解读为在戏中戏外（在真正的戏剧中）的关系中具有现实意义。哥德尔的策略要求我们领会的某种东西，类似于观众在欣赏

列昂卡瓦罗的歌剧《丑角》时觉察到演员的对白在戏剧里有意义，在他们的舞台外生活中（歌剧中）也有意义时所领会的东西。在哥德尔才华横溢的表演中，对白既谈论系统内——戏中戏——的形式关系，同时也揭示实在的算术关系。哥德尔的证明所构造的命题，将既宣称其自身（可证）的不可证性，又宣称一个为真（不可证）的算术关系，与小丑最后的悲泣是同样类型的一语双关，“*La commedia è finita*!”——喜剧结束了。

第三步：构造一个命题，它为真是因为它说它不可证

构造了巧妙的意义层次后，哥德尔将变出一个非常惊人的算术属性，“可证”，我们记为“Pr”。“Pr”是纯粹的算术属性，但它也正是所有这些精巧构思力图到达的那个属性。它是一个对所有且只有系统中可证命题的哥德尔数为真的算术属性。我特意使用动词“变出”，因为即便知道元语法和算术的重叠是想要达到“Pr”，“Pr”的出现也仍然给人一种变戏法的感觉。

在得到这个属性之前，说明属性有一个小小的技术：利用单变量的命题函数。单变量的命题函数可以表示成 $F(x)$ 的形式。这是形式系统中包含一个变量的表达式——x 是虚变量，可以填入整个定义域（客体域）的可能值。如果你填入值，将得到一个要么为真要么为假的 wff，也就是一个命题。也正因如此，其本身既不真也不假。因此打个比方，$F(x)$ 表示：x 是 1 的后继。这既不真也不假；它不是一个命题，不是一个确定的陈述，因为它所说的依赖于 x 实际代表的东西。x 填 2 产生真命题，填其他的产生假命题。系统中的属性正是用单变量的命题函数来表示。

现在来看 Pr(x)，这是一个关于数的属性，稍微有点复杂。首先，回想一下，形式系统的每个 wff 都通过神奇的哥德尔配数被赋予了一个数。因此对每个 wff p，我们都有 GN(p)，某个自然数。而定理是系统中 wff 的一个特定子集，即可证命题。因此给定任意自然数 n，它可能对应于形式系统的某个定理，也可能没有对应。也就是说，给定 n，可能有也可能没有形式系统的定理 p，使得 n=GN(p)。

现在来定义 Pr(x)。命题函数的定义域，我们对变量 x 填入的东西，是自然数（的表达式）。对于任意自然数 n，如果存在系统中的定理 p 使得 n=GN(p)，那我们就说 n 满足属性 Pr(x)，也就是说，Pr(n) 为真。哥德尔证明这个属性实际上可以在形式系统中被表示，也就是说，它也是 $F(x)$ 的一个例子。Pr(x) 是可以形式化表示的算术属性，虽然它极为复杂，在这里不能明确给出。通过这个属性，哥德尔可以得到论及这个系统的元语句，其规定哪些命题是系统中的定理，并将它们转换成系统中的算术语句：“p 是一个定理”被转换成“Pr[GN（p)]”。说某个特定的 n 具有属性 Pr(x) 就等同于说这个数对应于此形式系统中的一个定理。

现在也许你已经在思考某种类似这样的东西：一个特定的数 n 具有的属性 Pr(x) 并不是 n *真正的*属性。比如说，数字 n 可能是奇数也可能是偶数，如果可以被 2 整除那它就是偶数。姑且说它是。那么它的偶数性就是一个真正的算术属性；如果 n 不是偶数那它就不会是那个数。而属性 Pr(x) 是在元系统层面，它完全不像是严格意义上的数字属性。数字 n 只是人为地具有了这个属性，因为哪个 n 被联系到命题是人为地，这只不过是哥德尔配数这个天才发明所导致的结

果①。的确是这样，不过，虽然可能是人为的，$\mathrm{Pr}(x)$ 仍然是一个真正的算术属性，数字 n 要么具有要么就不具有它。而且除非 n 具有或不具有它，否则 n 就不会是它所是的那个数。正因为 $\mathrm{Pr}(x)$ 具有不是从其算术性质中提取出来的元意义，这个属性 $\mathrm{Pr}(x)$ 才着实惊人，它带我们进入了证明的核心。

下一步我们要用到所谓的对角线引理。它是一个一般性引理，在证明哥德尔定理时我们要用到的是它的一个特例。(哥德尔并没有用它，而是自己推导出了这个特例。) 利用这个一般性引理（当然，我们不会去证明它）将会让事情大为简化。[82]

对角线引理说的是哥德尔配数具有以下性质，对于任意的单变量命题函数 $F(x)$，都存在一个数 n 使得 $F(n)$ ——当我们将 n 代入函数 $F(x)$ 时得到的命题——的哥德尔配数正好就是 n 本身。[对于每个 $F(x)$ 都必然存在一个数，这似乎暗示某种超人力量进入了哥德尔配数。] 换句话说，对角线引理断言对任意的 $F(x)$ 都存在一个 n 使得

$$n=\mathrm{GN}[F(n)] \tag{0}$$

你得到的数就是你开始的同一个数，与给定的 F 相联系的特定的 n 正好对应于 $y=\mathrm{GN}[F(x)]$ 的图与对角线 $y=x$ 的图的交点，也就是，$x=n$。因此得名“对角线引理”。

[注意：陈述 $n=\mathrm{GN}[F(n)]$ 用的是元语言。它是一个

① 作为理解他的证明的启发，同哥德尔与说谎者悖论一起引用过的理查德悖论（前面脚注）比较一下。理查德悖论也具有将一个人为或不真实的属性（理查德性）赋予一个数的（虚假）感觉，一个数将因为属性被人为地指派而具有或不具有它。

“常规陈述”（也就是说非形式化陈述），而且左边的 n 表示一个（常规）自然数。而右边的 n 代表形式系统中表示数字 n 的表达式 $s(s(s(\cdots s(s(0)))))$，其中 s 出现 n 次。]

注意通过对角线引理与命题函数 $F(x)$ 相联系的数字 n 有这样的特性，哥德尔数 n 对应的命题［即 $F(n)$］，声称 n 自身具有属性 F。简单地说，它的形式是这样：当前这个句子具有属性 F。寂静的空气中回响起自指的轻柔的耳语声。

现在让我们回到哥德尔创造的那个神奇属性，Pr，它对所有并且只对系统中的定理——可证的 wff——的哥德尔数为真。一个数当且仅当它通过哥德尔配数对应于一个可证命题时才具有算术属性 Pr。换句话说：

$$\mathrm{Pr}[\mathrm{GN}(p)] \text{ 当且仅当 } p \text{ 可证。}$$

我们知道 $\mathrm{Pr}(x)$ 的元语法意义（不过不知道它的算术意义；你只是有我的保证它具有算术意义）。现在我们来研究下面这个属性：

$$\sim \mathrm{Pr}(x)$$

这个属性对于所有并且只有那些非定理的哥德尔数为真。也就是说，它对于系统中不可证命题的哥德尔数为真。换句话说：

$$\sim \mathrm{Pr}[\mathrm{GN}(p)] \text{ 当且仅当 } p \text{ 不可证} \qquad (1)$$

（1）是个什么样的语句？它是元数学语句。它本身并不是形式系统中的语句，也不是算术语句。但是通过（1）我们

可以将某些元数学语句转换成算术语句。

既然对角线引理对任意命题函数 $F(x)$ 都成立，那我们就可以把它应用到 $F(x)=\sim\mathrm{Pr}(x)$。回想一下，对角线引理声称，对于任意单变量命题函数 $F(x)$，都存在一个数 n。如果我们将 n 自身代入这个函数，n 就正好是这个命题的哥德尔数。我们马上考虑命题函数 $\sim\mathrm{Pr}(x)$。根据对角线引理，存在某个数，姑且称之为 g，使得：

$$g=\mathrm{GN}[\sim\mathrm{Pr}(g)] \tag{2}$$

用 $\sim\mathrm{Pr}$ 和 g 分别替换（0）中的 F 和 n 我们就能得到（2）。等式（2）宣称 g 是陈述 g 不具有算术属性 Pr（其属于所有而且只属于那些是可证命题的哥德尔数）的命题的哥德尔数。

下面我们准备构造出我们的命题 G。令

$$\mathrm{G}=\sim\mathrm{Pr}(g) \tag{3}$$

命题 G 声称数字 g 缺乏属性 Pr。根据（2）和（3），我们有：

$$\mathrm{GN}(\mathrm{G})=g$$

现在我们回到（1）做一些替换。下面再写一遍（1）：

$$\sim\mathrm{Pr}[\mathrm{GN}(p)] \text{ 当且仅当 } p \text{ 不可证}$$

令在（1）中 $p=\mathrm{G}$，根据 $\mathrm{GN}(\mathrm{G})=g$，我们得到：

$$\sim \mathrm{Pr}(g) \text{ 当且仅当 G 不可证} \qquad (4)$$

再一次应用（3），G 成立当且仅当 G 不可证。（4）说的是 G 为真当且仅当 G 不可证！

当然，G 是一个纯粹的算术陈述，但它同时也在谈论它自身，并且它所说的是它不可证。它说的是真的吗？嗯，它不太可能是假的，因为那样它就可证从而不管怎样都为真。当然，除非算术形式系统不一致，那样它所有的命题都可证，虽然会产生矛盾。这就是在证明中形式系统一致性假设起作用的地方。这样一来，G 就既不可证，同时因为这正是它所说的，它也为真。在表明它为真时，我们没有在形式系统内利用系统纯粹的机械规则去为它寻找一个证明，也就是说，去演绎它。相反，具有讽刺意味的是，我们跳出系统，通过表明不可能在系统内为它构造证明来表明它为真。我们通过表明 G 不可证——正是它所说的——来表明它为真。

此外，哥德尔展示的实际上不仅是在我们所讨论的算术形式系统中，同时也是在所有包含了算术的形式系统中如何构造一个为真但又不可证的命题。因此如果我们想将 G 扩展为公理，构造一个新的形式系统，以此来逃离哥德尔第一不完备性定理，一个新的成问题的命题就又能从那个系统中构造出来。这样一直下去，直到无穷。在任何包含小学数学的形式系统中，假定系统是一致的，总存在不可证但仍然为真的命题。

这就是哥德尔的第一不完备性定理。