巴拿赫不动点定理

❶ 介绍

> **巴拿赫**不动点定理，又称为压缩映射定理或压缩映射原理，是度量空间理论的一个重要工具。它保证了度量空间的一定自映射的不动点的存在性和唯一性，并提供了求出这些不动点的构造性方法。这个定理是以斯特凡·巴拿赫命名的，他在1922年提出了这个定理。

巴拿赫

Stefan Banach，（1892～1945）

> **巴拿赫**的主要工作是引进线性赋范空间概念，建立其上的线性算子理论，他证明的三个基本定理概括了许多经典的分析结果，在理论上和应用上都有重要的价值。人们把完备的线性赋范空间称为巴拿赫空间。此外，在实变函数论方面，他在1929年同K.库拉托夫斯基合作解决了一般测度问题。在集合论方面，他于1924年同 A.塔尔斯基合作提出巴拿赫-塔尔斯基悖论。

❷ 定理

巴拿赫不动点定理-压缩映射定理：

设

$$(X,\rho)$$

是一个完备距离空间， T 是

$$(X,\rho)$$

到其身的一个**压缩映射**，那么在 X 中**存在唯一的** T **不动点**.

(注:

$$\rho(x,y)$$

是 x,y 之间的距离)

> **压缩映射的定义**:
>
> $$T:(X,\rho)\rightarrow(X,\rho)$$
>
> ，且满足对于
>
> $$\forall x,y\in X$$
>
> ,存在一个
>
> $$0<a<1$$
>
> 使得
>
> $$\rho(Tx,Ty)\leq a\rho(x,y)$$
>
> .则称 T 为压缩映射。

❸ 证明

任取

$$x_0\in X$$

，令

$$x_1=Tx_0$$

，然后定义

$$x_{n+1}=Tx_n$$

,

$$n\in Z^+$$

.可以发现，由

$$\{x_n\}$$

组成的序列满足以下关系:

$$\begin{gathered}\rho(x_{n+1},x_n)\\ =\rho(Tx_n,Tx_{n-1})\\ \leq a\rho(x_n,x_{n-1})\\ \leq\cdots\leq a^n\rho(x_1,x_0)\end{gathered}$$

所以对于任意

$$m\in N^+$$

有:

$$\begin{gathered}\rho(x_{n+m},x_n)\\ \leq\sum_{j=1}^{m}\rho(x_{n+j},x_{n+j-1})\\ \leq\frac{a^n}{1-a}\rho(x_1,x_0)\to 0\\ (n\to\infty)\end{gathered}$$

由此可得

$$\{x_n\}$$

是一个基本列，又因为 X 是完备的，所以这个基本列的极限在 X 中，记 x^*为这个极限.

由

$$\{x_n\}$$

的定义 可以知道

$$Tx_n=x_{n+1}$$

,因此，两边取极限就可以得到

$$Tx^*=x^*$$

,也就是说， x^* 就是压缩变换 T 的不动点.

下面证明只有一个不动点:

设还有一个不动点为 x^{**} ,则由不动点的定义可得

$$\rho(x^*,x^{**})=\rho(Tx^*,Tx^{**})\leq a\rho(x^*,x^{**})$$

,又因为

$$0 < a < 1$$

,所以可得

$$x^* = x^{**}$$

.

证毕.

❹ 理解

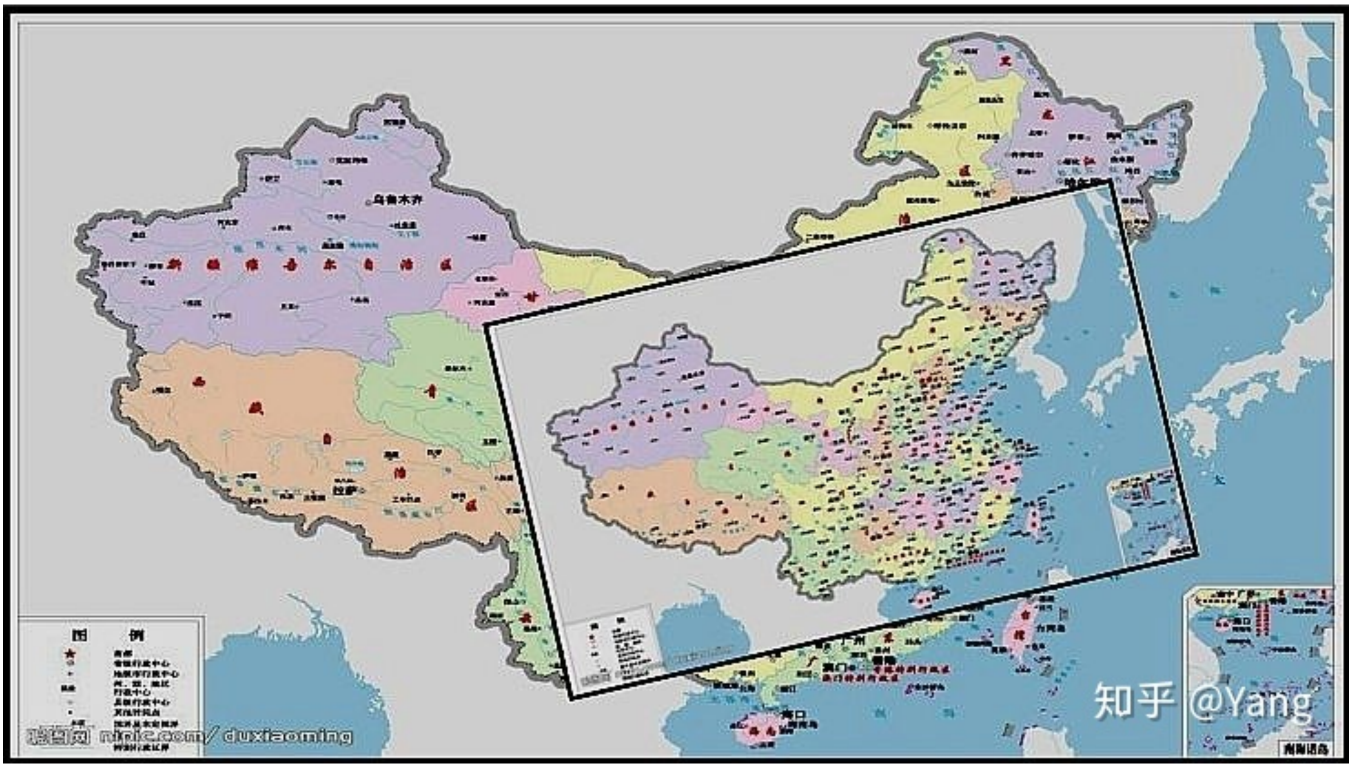
下面给定理的证明一种直观的解释：

这个定理的证明其实就是构造了一个点列

$$\{x_n\}$$

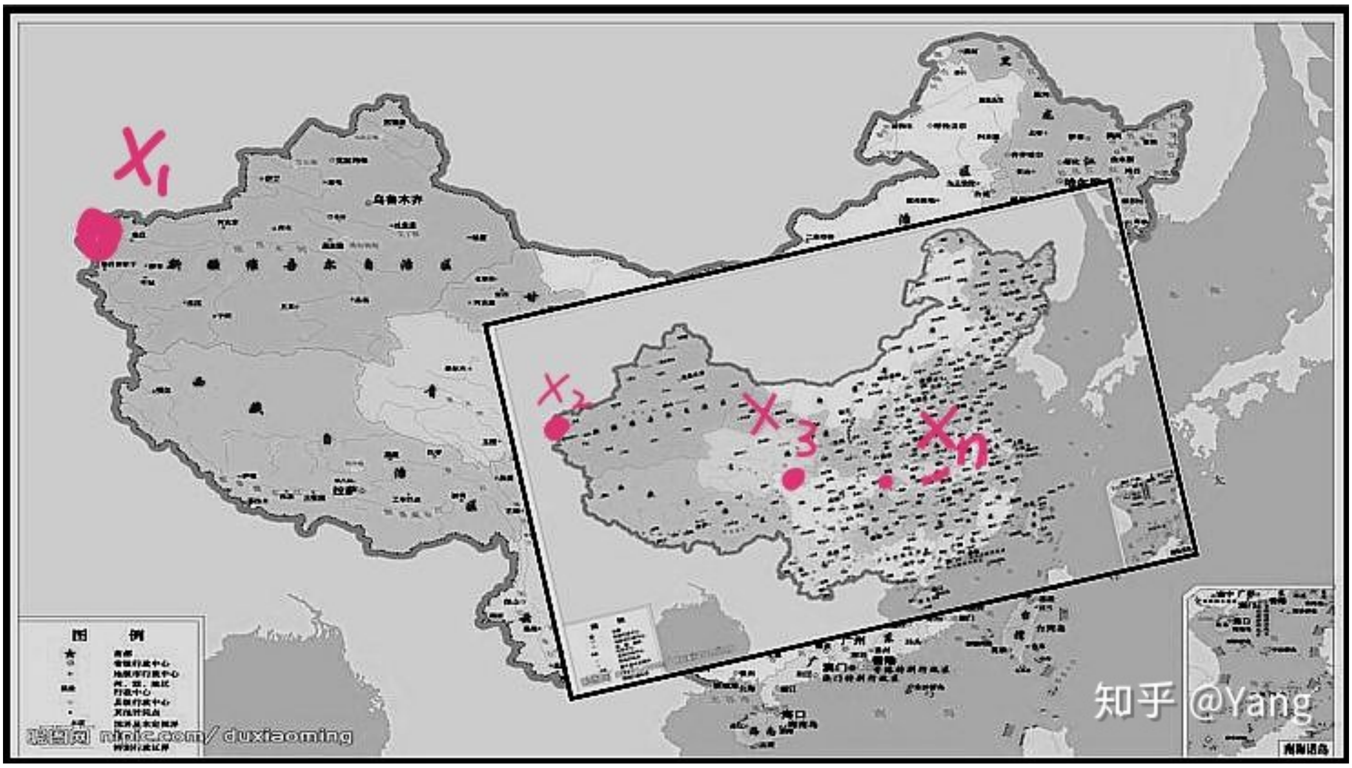
(然后证明这是一个基本列)，这个点列是从第一个点开始依次被映射得到的，也就是说每一个点都是上一个点经过压缩映射得到的。

比如下面这副地图就是把大地图压缩映射成了一个小地图:



如果我们随便从一个点开始，就可以按之前的方法得到一个基本列。

任意从一个点开始，比如从 x_1开始 ，然后迭代，可以得到以下点列：



也就是把 x_1 映射到小地图上的位置 x_2 ， 然后把 x_2 在大地图上的位置映射到小地图上对应的位置 x_3 ,以此类推(x_3 之后的点都没有标出来,太多了，因为这是一个无穷点列，x_n为这个点列的极限)，最后就发现这个点列就收敛到了 x_n ， 也就是说 x_n 就是不动点，很明显，这里的不动点就是两张地图的重合点。

❺ 结尾

巴拿赫不动点理论作为一个重要的结论，可以用来证明常微分方程初值问题解的存在性，那里的序列称为Picard序列。这里就不多作介绍了。

下面再介绍一下巴拿赫作为结尾：

> 巴拿赫不仅自己在科学上作出了巨大贡献，而且培育了一大批青年数学家，为形成强大的利沃夫泛函分析学派奠定了基础．他培养青年的方式中有一种很特别，这就是“咖啡馆聚会”．当年利沃夫学派的一个年青学者S．乌拉姆(后来去美国定居，在二次大战中参与原子弹的研制)，曾

> 写过一篇文章，题为“回忆苏格兰咖啡馆”，其中写道：“巴拿赫一天生活中有相当多的时间消磨在咖啡馆，当有同事和年轻同行围坐时，他可以滔滔不绝地讲上几个钟头．...咖啡桌跟大学研究所和数学会的会场一样，成了爆发数学思想火花的圣地．”“在苏格兰咖啡馆(利沃夫城内一间受数学家欢迎的咖啡馆)的频繁聚会中，数学家提出了各种问题．有时问题很多，大家觉得应该记录下来，于是在咖啡馆内专门准备了记录本，以便随时使用(咖啡馆的侍者也乐意给以方便，因为这免得他们擦洗涂在桌上的数学式子)．于是，这些记录本就产生了一部传奇式的书：‘苏格兰书’．由于提问者当时或后来都很著名，使得这些记录具有重要的科学与历史价值，而且具有一种引起人们求知欲望的力量．由于巴拿赫夫人的功劳，这些‘苏格兰书’免遭战火，奇迹般地保存了下来”．此书后来由E．马尔采夫斯基(Marczewski)和斯泰因豪斯负责编辑出版．原稿由巴拿赫的儿子(一位博士)献给了巴拿赫国际数学中心。

影响

> 斯泰因豪斯在描绘巴拿赫个性时曾指出，巴拿赫所处的那个时代，波兰科学家还受到宗教那种殉道观念的束缚，即知识分子应当远离尘世的欢乐，象苦行僧那样清贫寡欲．但巴拿赫没有向这种观念屈服，不愿做圣徒的候选人．他是一位现实主义者，甚至到了接近玩世不恭的程度．他强调自己祖先的山民血统，并对那些无所专长的所谓有教养的知识分子持蔑视态度．

参考文献

1. 实变函数与泛函分析/郭懋正编著[M]. 北京:北京大学出版社,2005.2
2. 百度百科“巴拿赫”[EB].https://m.baidu.com/sf_bk/item/Banach/8769009?ms=1&rid=11118598384474011714.