

---

# 三自由度直升机 实验指导书

---

GHP2002 型

---

V2018

2018.05

[www.googoltech.com.cn](http://www.googoltech.com.cn)

© 2018 Googol Technology. All rights reserved

## 版本更新记录表

版本号	升 级 信 息	更改日期
V1.2	初次发布	2014.08
V2.0	1、硬件由 GT-400 运动控制卡更换为 GTS-400 运动控制卡； 2、Matlab 软件下的控制程序更新为基于 GTS 运动控制卡开发的程序 3、删除 DOS 系统软件及实验内容。	2018. 05

## 版权声明

固高科技有限公司版权所有. 固高科技保留所有版权以及相关的知识产权。

*GHP2002* 型三自由度直升机实验指导书

在版权法保护下，在没有固高科技的书面许可下，任何人都不能直接的或是间接的复制、生产、加工本产品以及附属产品。

## 声明

固高科技保留在没有预先通知的情况下修改产品或其特性的权利。 固高科技并不承担由于使用产品不当而产生的直接或是间接的伤害或损坏的责任。

## 商标

Windows 和 Microsoft 是 Microsoft 的注册商标。

MATLAB 是 MathWorks 公司的商标。

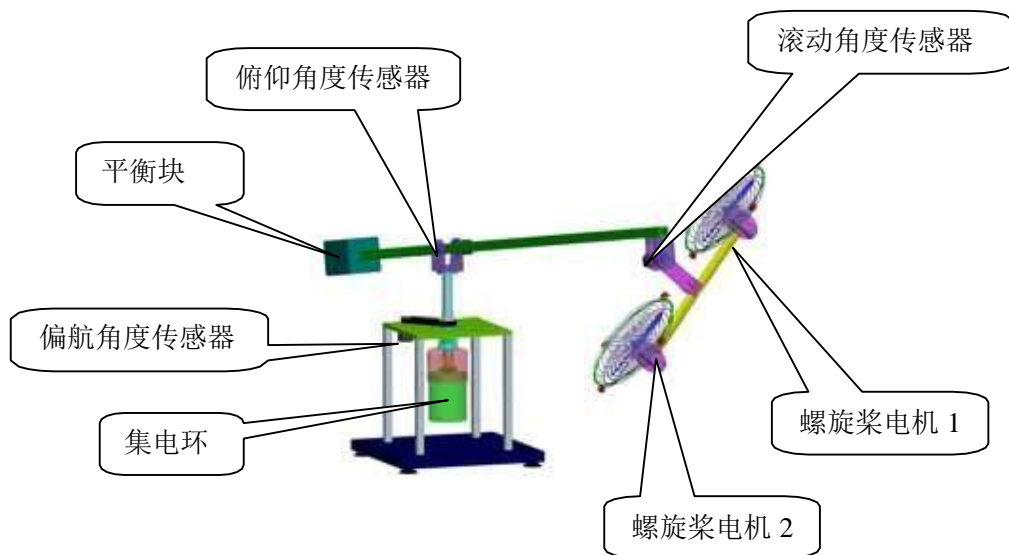
## 联系我们

固高科技（香港）有限公司  
香港九龙观塘伟业街 108 号丝宝国际大厦 10 楼  
1008-09 室  
Tel.: (852) 2358 1033, (852) 2719 8310  
Fax: (852) 2719 8399  
<http://www.googoltech.com>

固高科技（深圳）有限公司 深圳市南山区高新科技园深港产学研基地西二楼 Tel: (86) 755 2697 0817;  
(86) 755 2697 0835  
Fax: (86) 755 2697 0846  
<http://www.googoltech.com.cn>

## 前 言

三自由度直升机系统（简称直升机）由基座、平衡杆、平衡块和螺旋桨等部分组成。平衡杆以基座为支点，进行俯仰和转动动作。螺旋桨和平衡块分别安装在平衡杆的两端。螺旋桨旋转产生的升力可以使平衡杆以基座为支点做俯仰运动，利用两个螺旋桨的速度差可以使平衡杆以基座为轴做偏航运动。平衡杆的俯仰、滚动、偏航方向分别安装了编码器用以测量平衡杆俯仰、滚动、偏航角度数据。两个螺旋桨分别由两个直流无刷电机驱动，为直升机提供动力。通过调节安装在平衡杆另一侧的平衡块可以改变螺旋桨电机的出力大小。安装在基座的集电环保证了系统本体和电控箱之间的信号传送，不受直升机转动的影响。如下图所示：



直升机是二输入三输出的系统。二输入为：两个电机的电压；三输出为：俯仰角、滚动角、偏航角。

由于滚动运动和偏航运动相互耦合，所以可以选用三轴 PID 控制，或者俯仰、滚动方向采用 LQR 线性二次型最优控制，偏航方向采用 PID 控制的方法。本实验指导书采用上述方法设计了两个实验，通过本设备，学生可以学习 LQR 调节器的设计和实现，PID 控制，非线性控制等方法，并通过对对比分析影响系统性能指标提高的因素。

在您开始实验之前，请先认真阅读《三自由度直升机系统用户手册》

# 目 录

## 目录

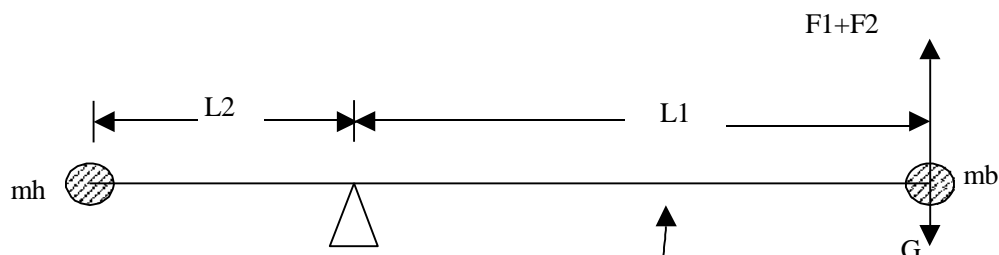
版本更新记录表 .....	II
版权声明 .....	III
声明 .....	III
商标 .....	III
联系我们 .....	III
前 言 .....	IV
目 录 .....	V
第一章 机理法建立三自由度直升机的数学模型 .....	1
一、动力学数学模型 .....	1
二、系统分析 .....	2
第二章 PID 控制器设计和实现 .....	3
一、PID 控制器简介 .....	3
二、PID 控制器设计、仿真和实现 .....	4
三、小结 .....	11
第三章 LQR 调节器的设计和实现 .....	12
一、线性二次型最优调节器 .....	12
二、LQR 调节器的仿真和实现 .....	14
三、小结 .....	19
四、系统性误差分析 .....	19
五、注意事项 .....	19

# 第一章 机理法建立三自由度直升机的数学模型

## 一、动力学数学模型

- 1、建立三维坐标系根据系统的特点分为三个轴（自由度）来分别建模。

### A、俯仰方向：



由上图可知，俯仰轴的转矩是由两个螺旋桨电机产生的升力  $F_1$  和  $F_2$ 。故螺旋桨的升力  $F_h = F_1 + F_2$ 。当升力  $F_h$  大于重力  $G$  时，直升机上升；反之直升机下降。调整平衡块的位置可以改变  $G$  的大小。现假定直升机悬在中处于平衡状态，俯仰角为零，就可得到下列等式：

$$J_e \ddot{\epsilon} = L_1 F_h - L_1 G = L_1 (F_1 + F_2) - L_1 G$$

$$J_e \ddot{\epsilon} = L_1 K_c (V_1 + V_2) - T_g$$

其中， $J$  是俯仰方向转动惯量： $J_e = m_h L_1^2 + m_b L_2^2$

$V_1$  和  $V_2$  是两个电机的电压，它们产生升力  $F_1$  和  $F_2$ ；

$K_c$  螺旋桨电机的升力常数；

$L_1$  是支点到电机的距离；

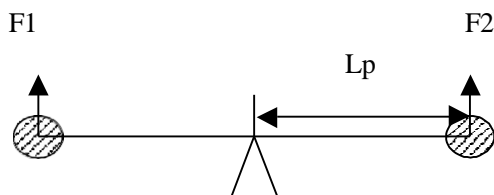
$L_2$  是支点到平衡块的距离；

$T_g$  是由俯仰轴  $G$  产生的有效重力矩： $T_g = m_h g L_1 - m_b g L_2$

$m_h$  和  $m_b$  则分别是直升机螺旋桨部分和平衡块的质量；

$\ddot{\epsilon}$  是俯仰轴的俯仰加速度。

### B、滚动方向：



由上图可知，滚动方向由两个螺旋桨产生的升力差控制，如果  $F_1$  产生的升力大于  $F_2$  产生的升力，螺旋桨本体就会产生倾斜，这样就会产生一个侧向力使直升机围绕基座旋转。

$$J_p \ddot{P} = F_1 L_p - F_2 L_p$$

$$J_p \ddot{P} = K_c L_p (V_1 - V_2)$$

$J_p$  是滚动方向的转动惯量；

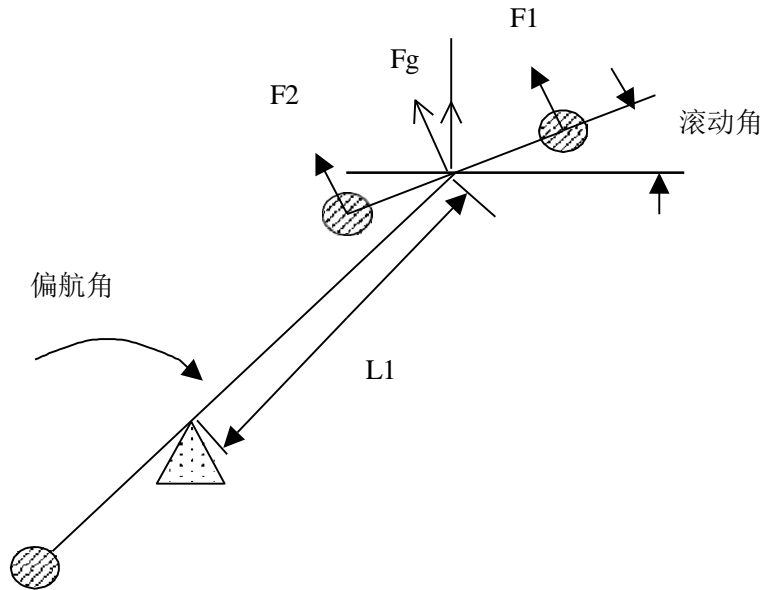
$L_p$  是滚动轴到电机的距离；

$\ddot{P}$  是滚动方向角加速度。

### C、偏航方向

偏航方向的动力来源是螺旋桨滚动轴倾斜时产生的水平方向分力。并且对于比较小的滚动角，垂直方向的分力需要使直升机在垂直方向上保持平衡。

两个螺旋桨合力的水平分量会在偏航方向产生一个力矩，由这个力产生偏航方向的加速度。如下图所示：



其动力学方程如下：

$$J_t \ddot{r} = -(F_1 + F_2) \sin(p) L_1 = -K_c (V_1 + V_2) \sin(p) L_1$$

$\ddot{r}$  是偏航角加速度

$p$  是滚动角，由于  $p$  很小， $\sin(p) \approx p$

## 二、系统分析

偏航角加速度是滚动角的正弦值和电机输入电压乘积，二者耦合，难以解耦。因此偏航方向的控制器设计可以采用 PID 控制器，凑试法确定参数。

俯仰角加速度和滚动角加速度都两个电机电压的函数，可以采用 PID、LQR 控制方法设计控制器。

实际系统的微分方程如下式所示：

$$\begin{cases} \ddot{\epsilon} = 1.38(V_1 + V_2) \\ \ddot{P} = -3.03\dot{P} - 3.03P + 0.48(V_2 - V_1) \\ \ddot{r} = 1.38(V_1 + V_2)p \end{cases}$$

由于直升机系统非线性严重，上述方程是综合了机理法建模、非线性分析和系统辨识的模型后得出的近似模型，供用户参考

## 第二章 PID 控制器设计和实现

### 一、PID 控制器简介

PID 的控制算法有很多，不同的算法各有其针对性。图 2.1、图 2.2、图 2.3 给出了三种不同的算法。在模拟控制系统中，控制器最常用的控制规律是 PID 控制。模拟 PID 控制系统原理框图如图 5.1 所示。系统由模拟 PID 控制器和被控对象组成。

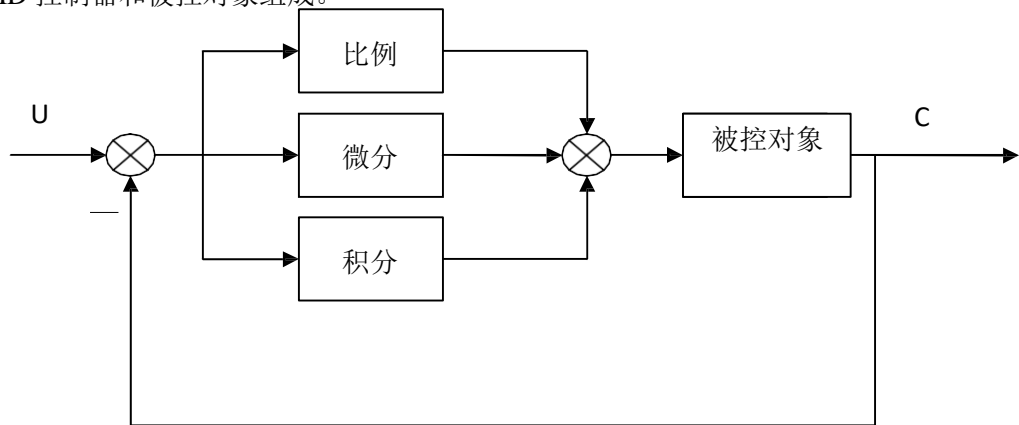


图 2.1 模拟 PID 控制系统原理框图

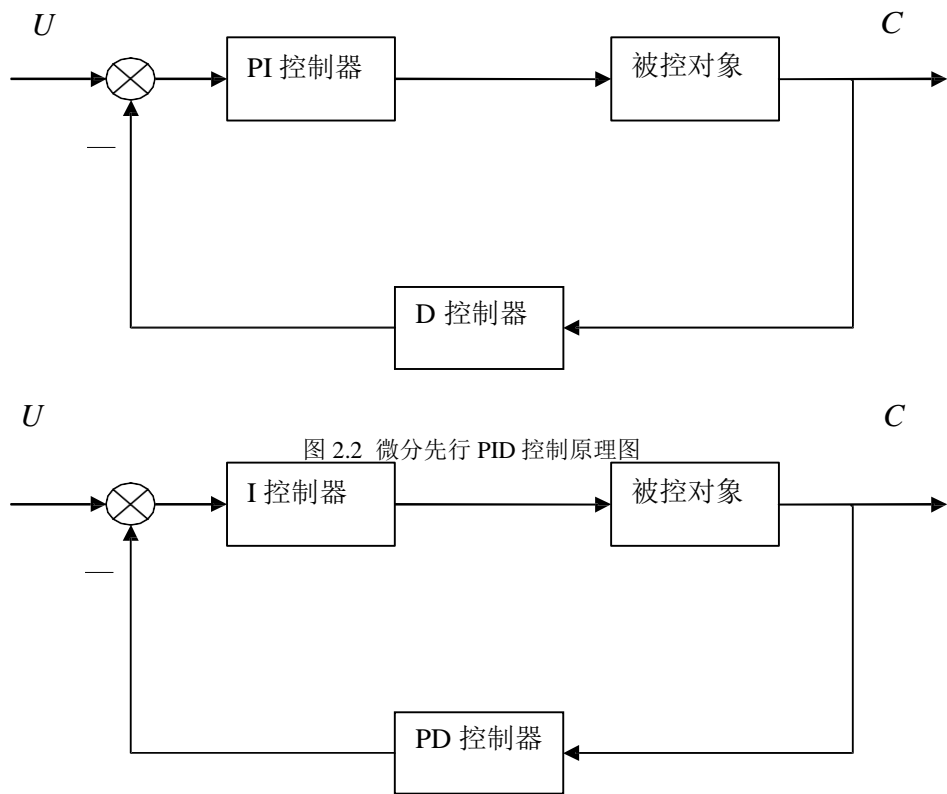


图 2.2 微分先行 PID 控制原理图

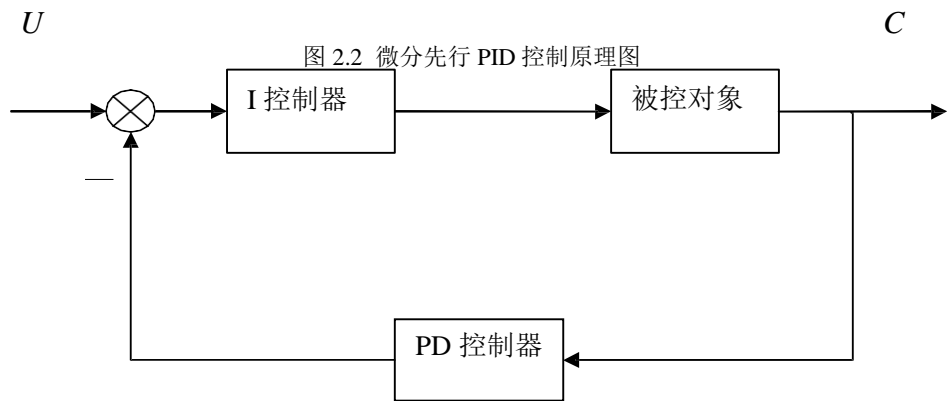


图 2.3 伪 PID 控制原理图

PID 控制器是一种线性控制器，它根据给定值  $r(t)$  与实际输出值  $y(t)$  构成控制偏差  $e(t)$

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{2.1}$$

将偏差的比例（P）、积分（I）和微分（D）通过线性组合构成控制量，对被控对象进行控制，故称 PID 控制器。其控制规律为



$$u(t) = K_p \left[ \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (2.2)$$

写成传递函数的形式：

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (2.3)$$

式中： $K_p$ ——比例系数； $T_I$ ——积分时间常数； $T_D$ ——微分时间常数。  
在控制系统设计和仿真中，也将传递函数写成：

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s} \quad (2.4)$$

式中： $K_p$ ——比例系数； $K_I$ ——积分系数； $K_D$ ——微分系数。上式从根轨迹角度看，相当于给系统增加了一个位于原点的极点和两个位置可变的零点。

简单说来，PID 控制器各校正环节的作用如下：

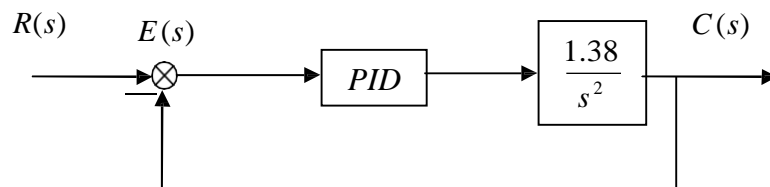
A、比例环节：成比例地反映控制系统的偏差信号  $e(t)$ ，偏差一旦产生，控制器立即产生控制作用，以减少偏差。

B、积分环节：主要用于消除稳态误差，提高系统的型别。积分作用的强弱取决于积分时间常数  $T_I$ ， $T_I$  越大，积分作用越弱，反之则越强。

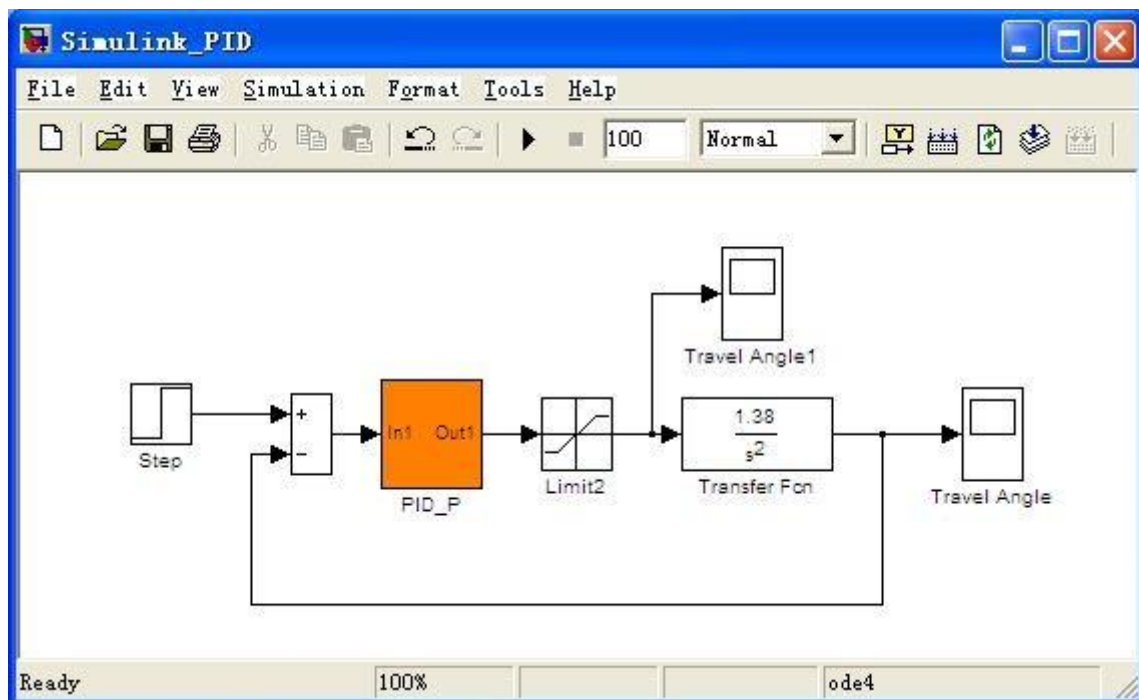
C、微分环节：反映偏差信号的变化趋势（变化速率），并能在偏差信号值变得太大之前，在系统中引入一个有效的早期修正信号，从而加快系统的动作速度，减小调节时间。

## 二、PID 控制器设计、仿真和实现

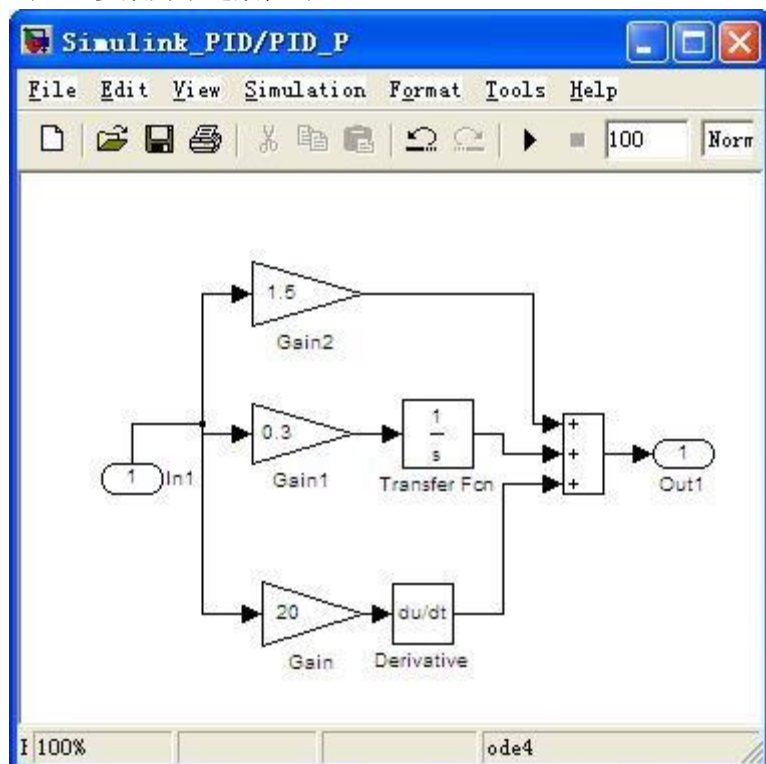
1、俯仰通道 PID 控制器设计 A、凑试法整定 PID 参数 设俯仰通道系统的结构图如下图示：



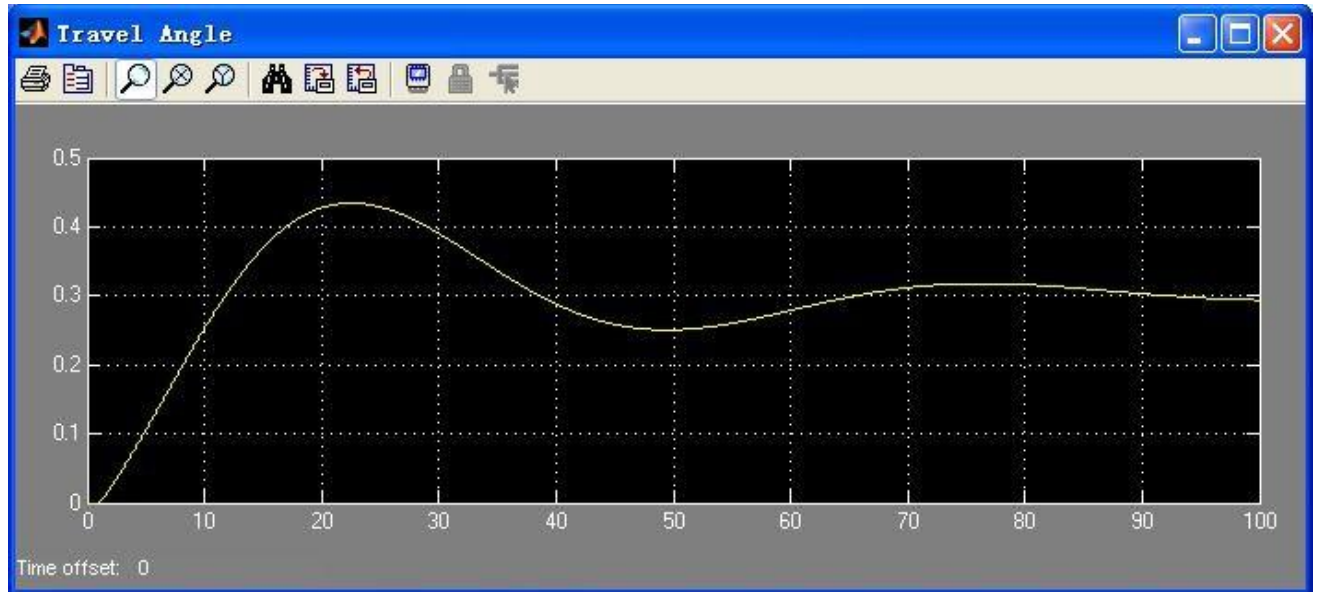
在 Simulink 中打开 PID 仿真程序 “Simulink\_PID.slx”，如下图示：



当 PID 参数为下述数值时:



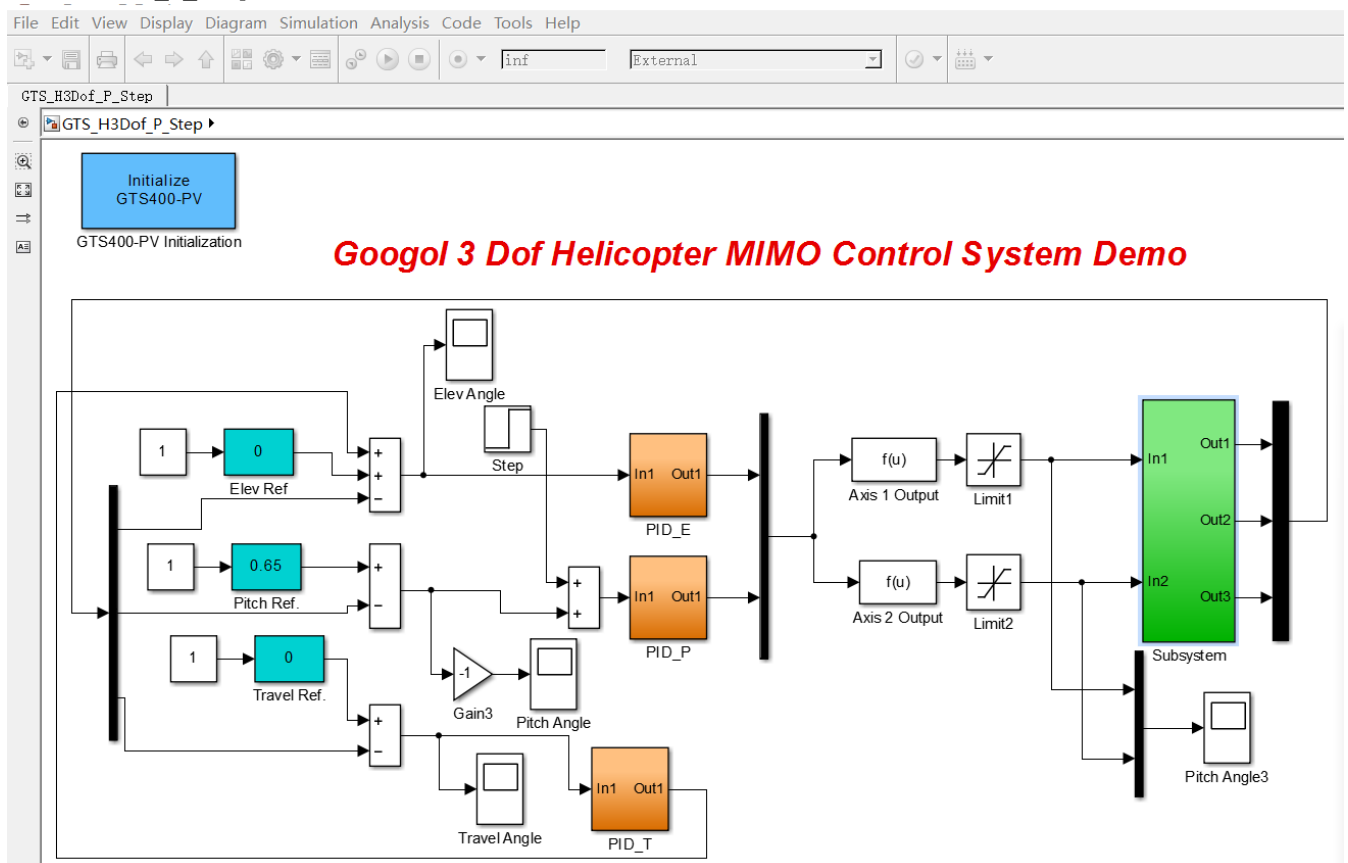
加入 0.3rad 的阶跃输入，阶跃响应曲线如下图所示



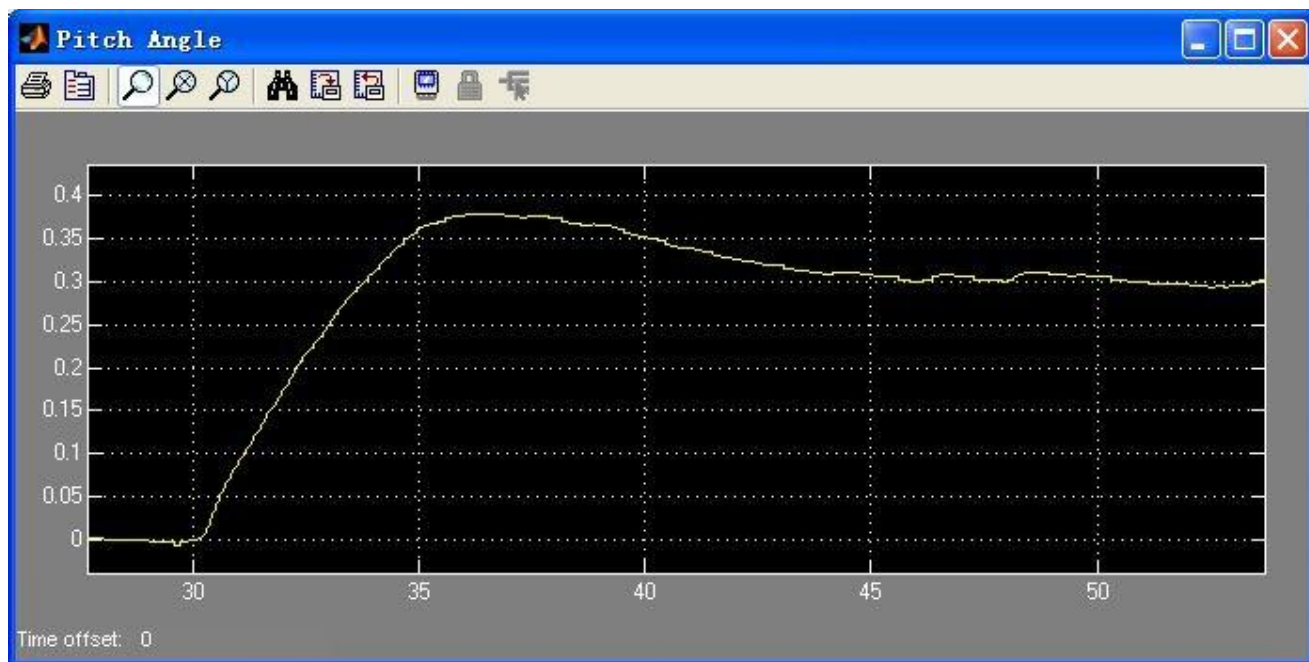
调节时间约 60 秒，超调量约 43%。

B、俯仰通道阶跃响应测试

打开 H3Dof\_P\_Step.slx，如下图示：



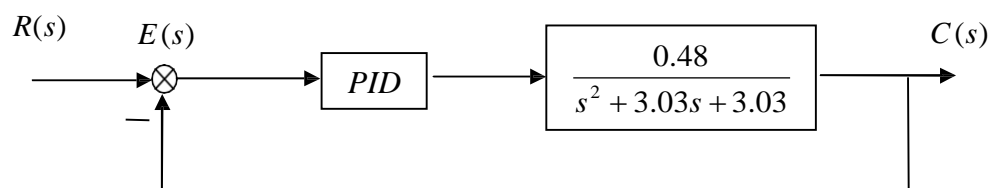
Step 中加入 0.3rad 的阶跃响应，系统响应曲线如下图示：



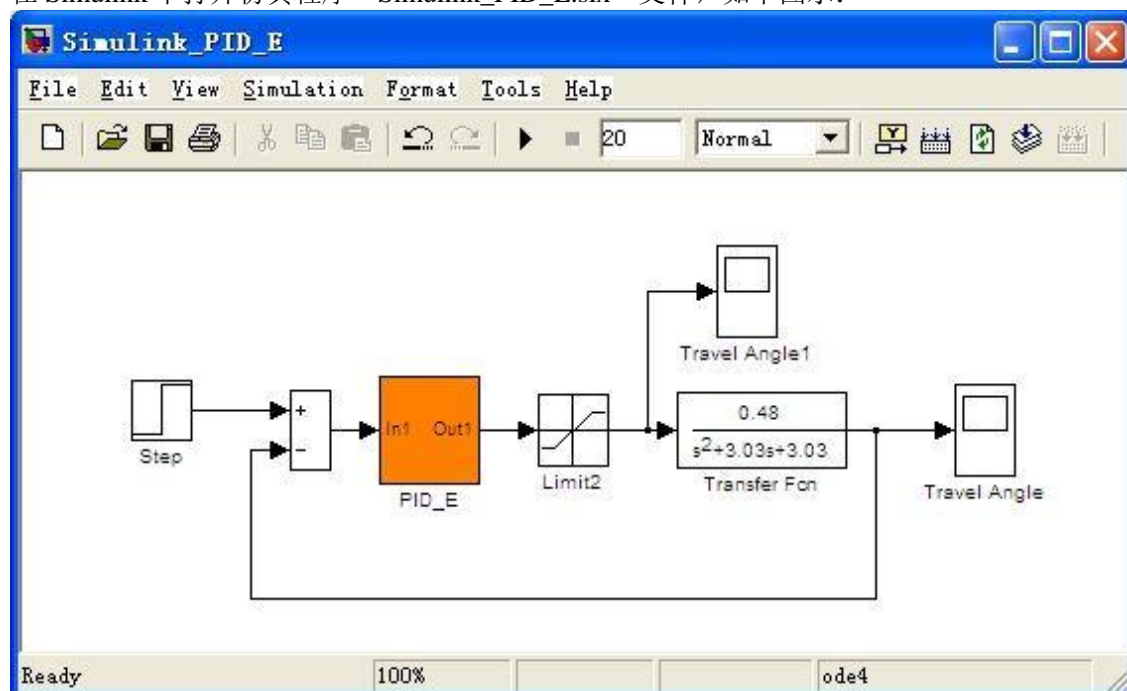
调节时间约 15 秒，超调量约 26.7%。

## 2、滚动通道 PID 控制器设计

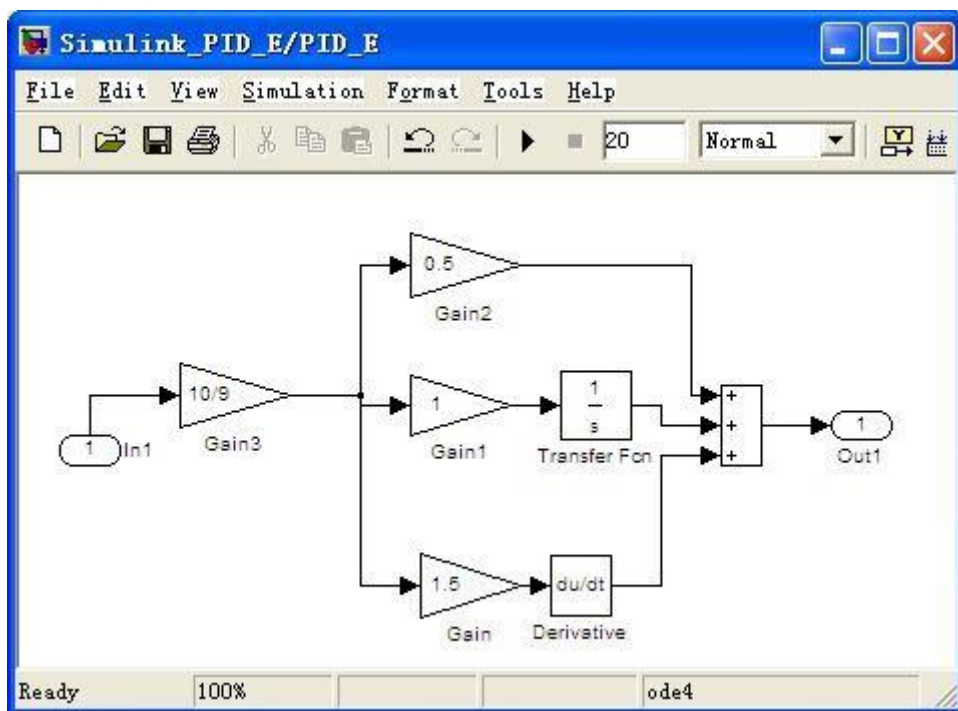
A、凑试法整定 PID 参数 设滚动通道系统的结构如下图示：



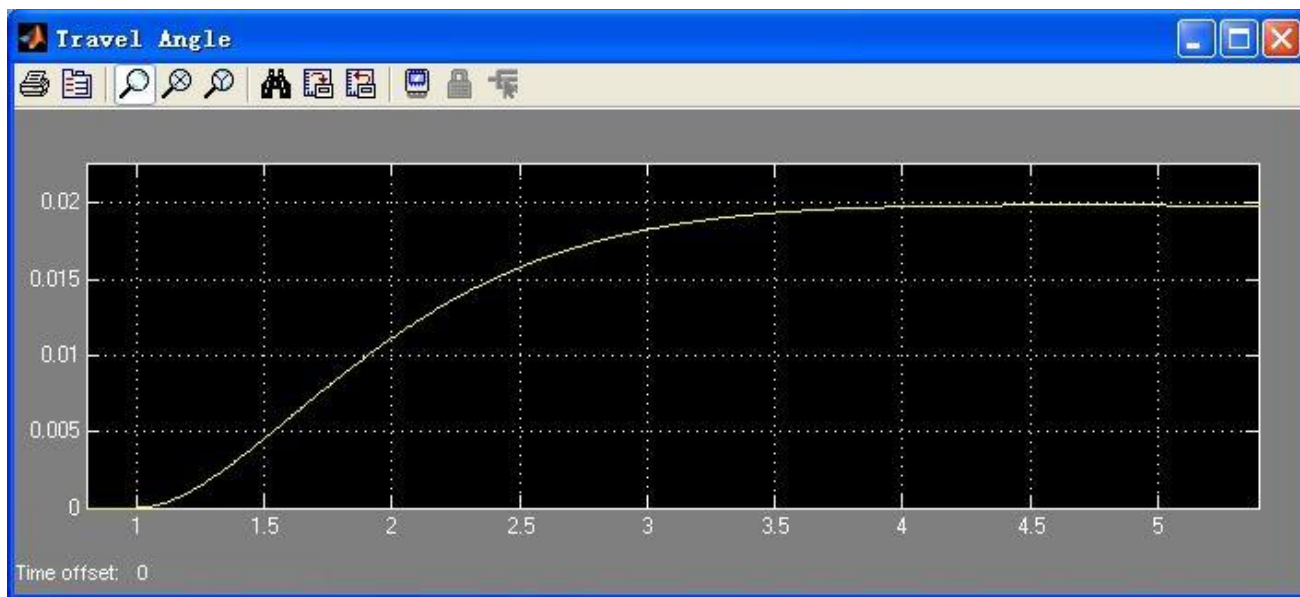
在 Simulink 中打开仿真程序“Simulink\_PID\_E.slx”文件，如下图示：



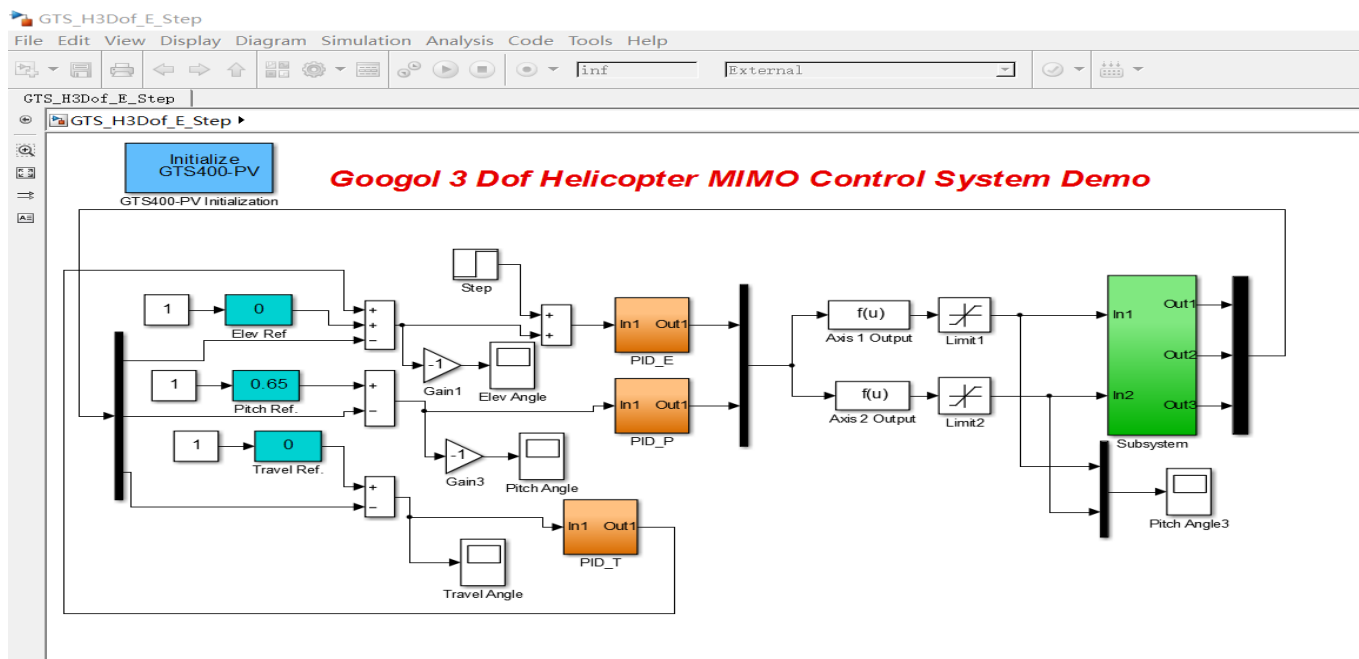
PID 参数取值如下：



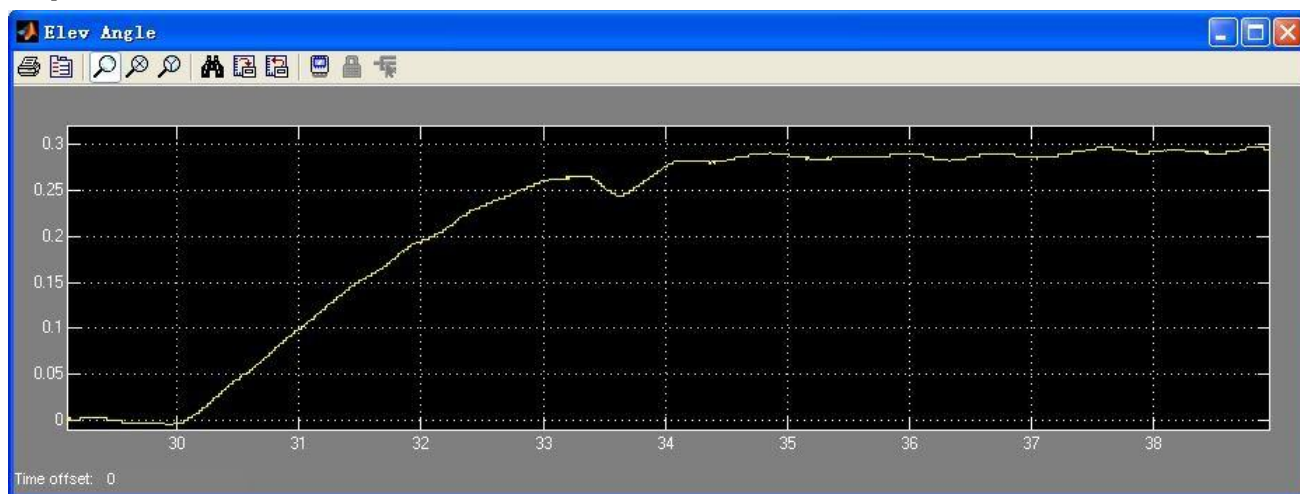
加入 0.3rad 的激励，阶跃响应曲线如下图所示：



调节时间约为 4 秒，超调量为 0B、滚动通道阶跃响应测试打开文件：H3Dof\_E\_Step.slx，如下图所示



Step 中加入 0.3rad 的阶跃激励，系统响应如下图所示：

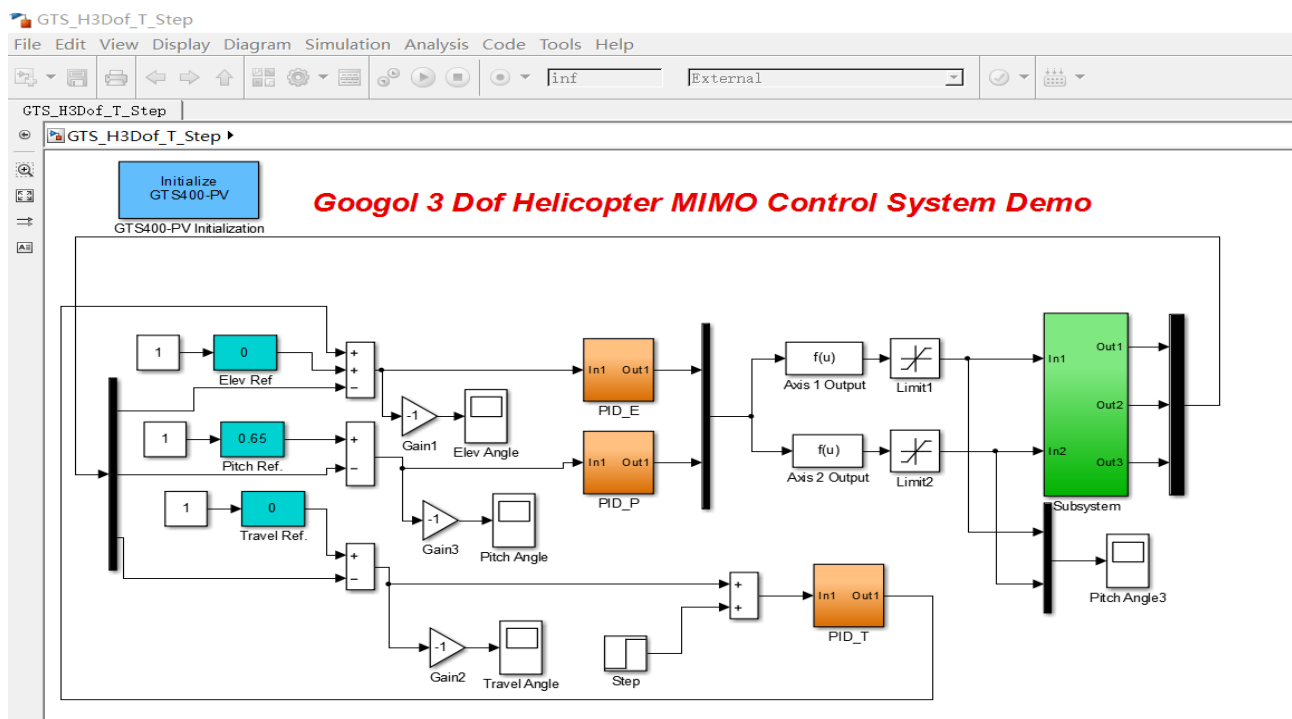


调节时间约 5 秒，超调量为 0，稳态误差为 3%。

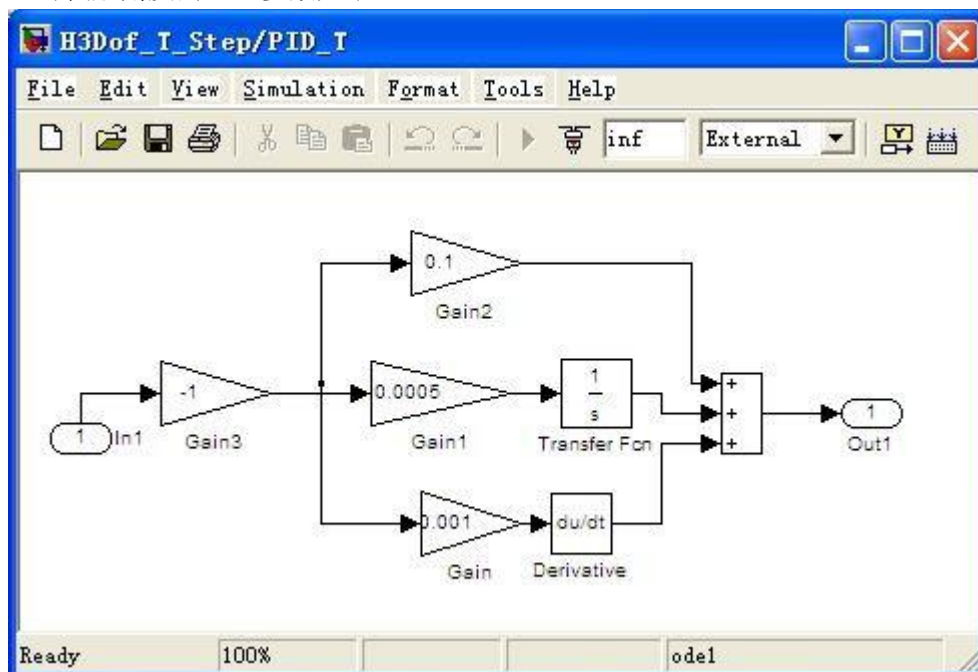
### 3、偏航通道 PID 控制器设计

P 为滚动通道的角度， $-0.35 \leq p \leq 0.35$ ，P 的角度直接影响偏航方向的分力，影响偏航角度，因此通过改变滚动角度也可以改变偏航角。将偏航角经 PID 校正后，改变滚动角度，当偏航角达到目标位置之后，PID 输出为 0，进而保持原来的滚动角。

实际测试系统如下，打开“H3Dof\_T\_Step.slx”

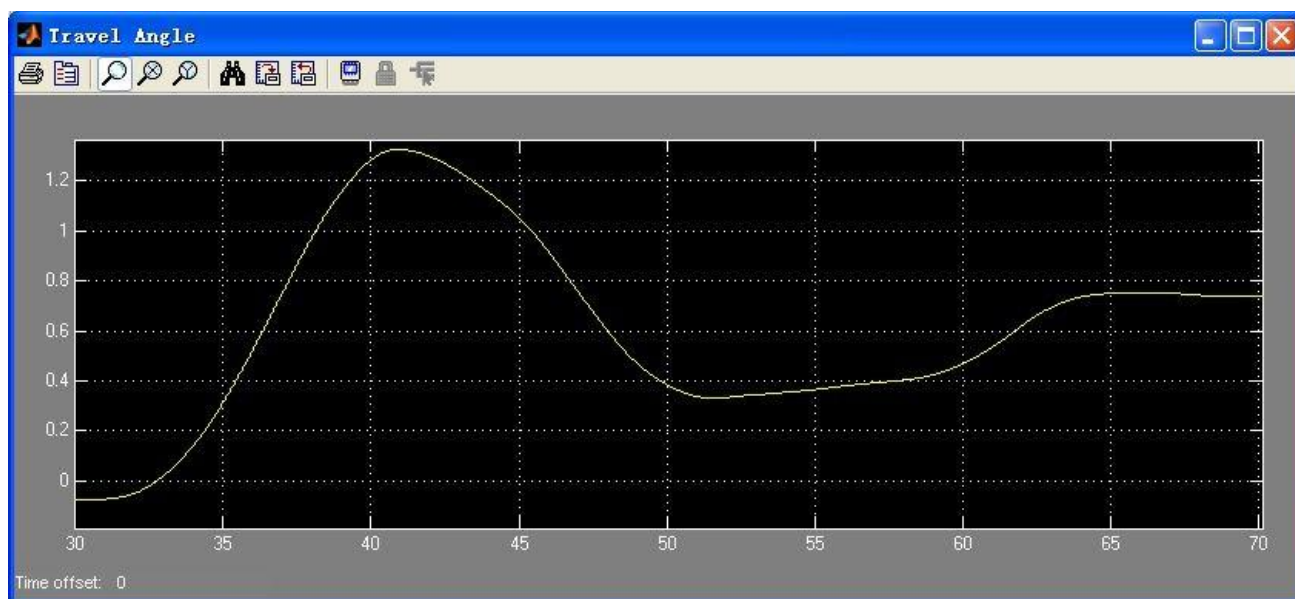


此时偏航角度的 PID 参数如下



Step 中加入 1rad 的阶跃激励，阶跃响应曲线如下图示：





调节时间约 35 秒，超调量 79%，稳态误差：35%。

### 三、小结

从上述实验结果可以看出，系统的数学模型差异较大，由于三个轴分别设计 PID 控制器，因此动态性能难以兼顾，尤其是偏航通道，动态性能更差。其原因是偏航通道的 PID 校正后输出滚动角度，其角度需要滚动通道快速跟踪上。因为滚动通道已经很慢，所以偏航通道必须更慢，否则容易不稳定。

由于俯仰通道和滚动通道是二输入单输出模型，因此可以用 LQR 控制，而偏航通道的输出除了与两个电机的转速有关外还与滚动角度有关，而且转速和滚动角度耦合一起，难以解耦，所以采用 PID 校正设计偏航通道控制器。通过提高俯仰通道和滚动通道的响应速度，进而提高偏航通道的性能。



### 第三章 LQR 调节器的设计和实现

#### 一、线性二次型最优调节器

线性二次型（LQ—Linear Quadratic）是指系统的状态方程是线性的，指标函数是状态变量和控制变量的二次型。线性二次型控制理论已成为反馈系统设计的一种重要工具，广泛适用于 MIMO 系统。其特点是：为多变量反馈系统的设计提供了一种有效的分析方法，可以适应于时变系统，可以处理扰动信号和测量噪声问题，可以处理有限和无限的时间区间，设计的闭环系统具有良好的稳定裕度。

A、LQR 线性二次型最优调节器的原理

考虑系统的状态方程如式(2-8)、(2-9)所示，找一状态反馈控制律

$$u = -Kx$$

使得如下性能指标最小

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [x^T Q_x + u^T R u] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) M x(t_f)$$

其中  $Q$ 、 $M$  是半正定矩阵， $R$  是正定矩阵， $Q$ 、 $M$  分别是对状态变量和输入向量的加权矩阵， $x$  是  $n$  维状态变量， $u$  是  $m$  维输入变量，终端时间  $t_f$  固定，终端状态  $x(t_f)$  自由。要使性能函数  $J$  最小，则可首先构造一个 Hamilton 函数

$$H = -\frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u] + \lambda^T [A x + B u]$$

当输入信号不受约束时，则可对 Hamilton 函数进行求导并令其值为 0，求出最小值

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -R u + B^T \lambda = 0$$

从而得到最优控制信号

$$u^* = R^{-1} B^T \lambda$$

可由下式求出

$$\lambda = -P x$$

$P$  可由 Riccati 方程求出

$$P = -P A - A^T P + P B R^{-1} B^T P - Q$$

当  $t_f \rightarrow \infty$  时， $P$  趋近于一个常值矩阵，且  $\dot{P} = 0$ ，因此，上式给出的 Riccati 方程就简化为

$$-P A - A^T P + P B R^{-1} B^T P - Q = 0$$

LQR 问题的解是一个全状态反馈调节器，有非常好的鲁棒性能。它可以通过适当选取权矩阵  $Q$  和  $R$ ，在控制信号能量和输出性能之间进行调节。

利用 MATLAB 的 LQR 函数可以很方便、准确地求出 LQR 的解—— $K$  阵。

## B、LQR 线性二次型最优调节器的计算

LQR 线性二次型最优调节器通过选取权矩阵  $Q$  和  $R$  使求解的全状态反馈阵  $K$  与系统的性能指标联系起来。其实质是设计最优的全状态反馈阵。从而比全状态反馈调节器更易设计出性能鲁棒性更强的控制系统

## 二、LQR 调节器的仿真和实现

1、俯仰通道和滚动通道 LQR 仿真，m 文件如下

```
clear;
```

```
clc;
```

```
A=[ 0  1  0  0   ;  
    0  0  0  0   ;  
    0  0  0  1   ;  
    0  0 -3.03 -3.03 ]
```

```
B=[ 0  0 ;  
    1.38  1.38 ;  
    0  0 ;  
    -0.48  0.48 ]
```

```
C=[ 1  0  0  0   ;  
    0  1  0  0   ;  
    0  0  1  0   ;  
    0  0  0  1   ]
```

```
D=[ 0  0 ;  
    0  0 ;  
    0  0 ;  
    0  0 ]
```

```
Q11=50;Q22=10;Q33=5; Q44=1;
```

```
Q=[Q11 0 0 0   ;  
   0 Q22 0 0   ;  
   0 0 Q33 0   ;  
   0 0 0 Q44   ];
```

```
R = [1 0  
      0 1];
```

```
K = lqr(A,B,Q,R)
```

```
Ac=(A-B*K); Bc=B;
```

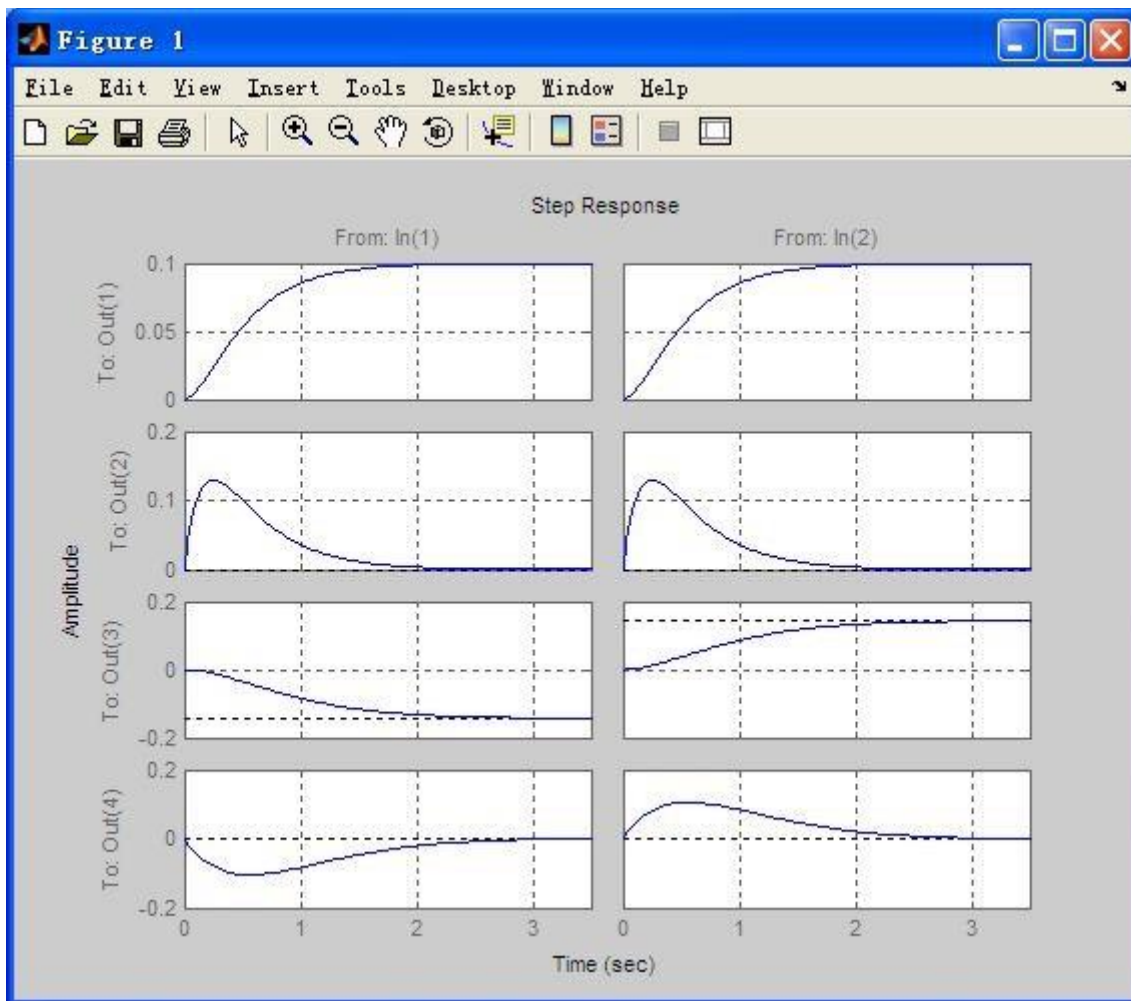
```
Cc=C;
```

```
Dc=D;
```

```
sys=ss(Ac,Bc,Cc,Dc); step(sys)
```

```
grid;
```

仿真曲线如下图所示：



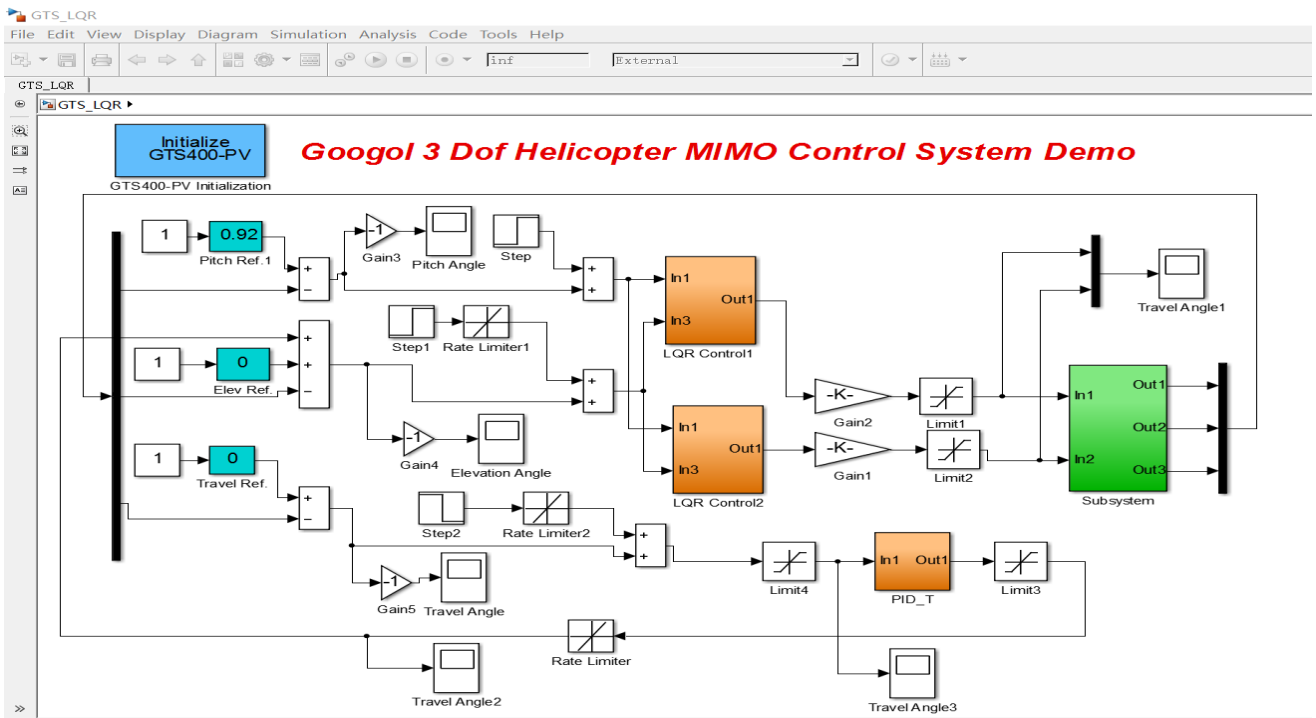
从图中可以看出，俯仰通道的调节时间约 2 秒，滚动通道的调节时间约 2.5 秒。俯仰通道和滚动通道的性能得以提高。

求得，

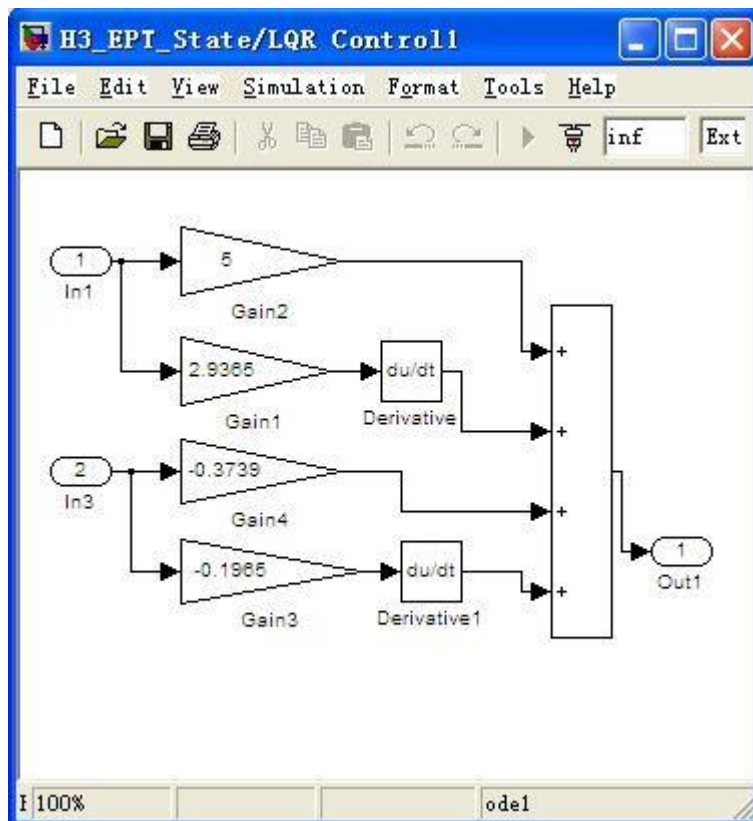
$$K = \begin{bmatrix} 5.0000 & 2.9365 & -0.3739 & -0.1965 \\ 5.0000 & 2.9365 & 0.3739 & 0.1965 \end{bmatrix}$$

2、系统阶跃响应测试：

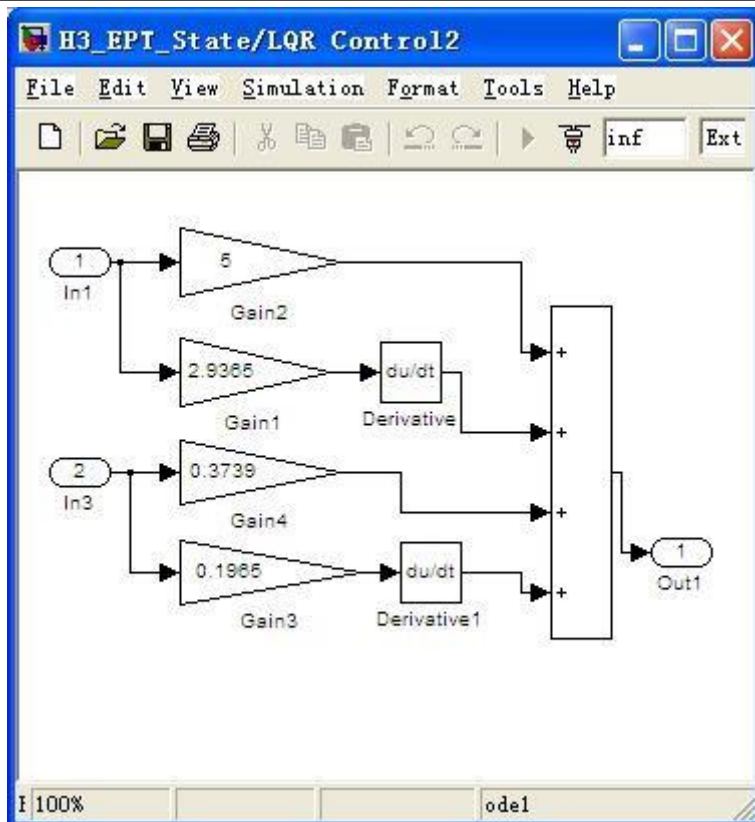
打开文件：H3\_EPT\_State.slx，如下图所示



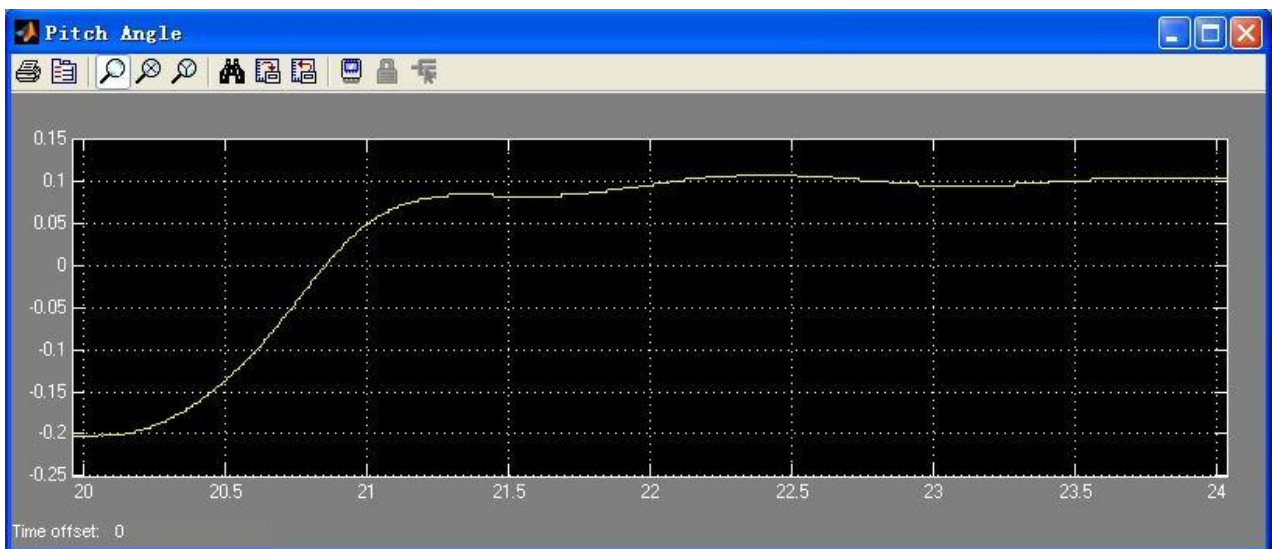
LQR Control1 的参数如下图所示:



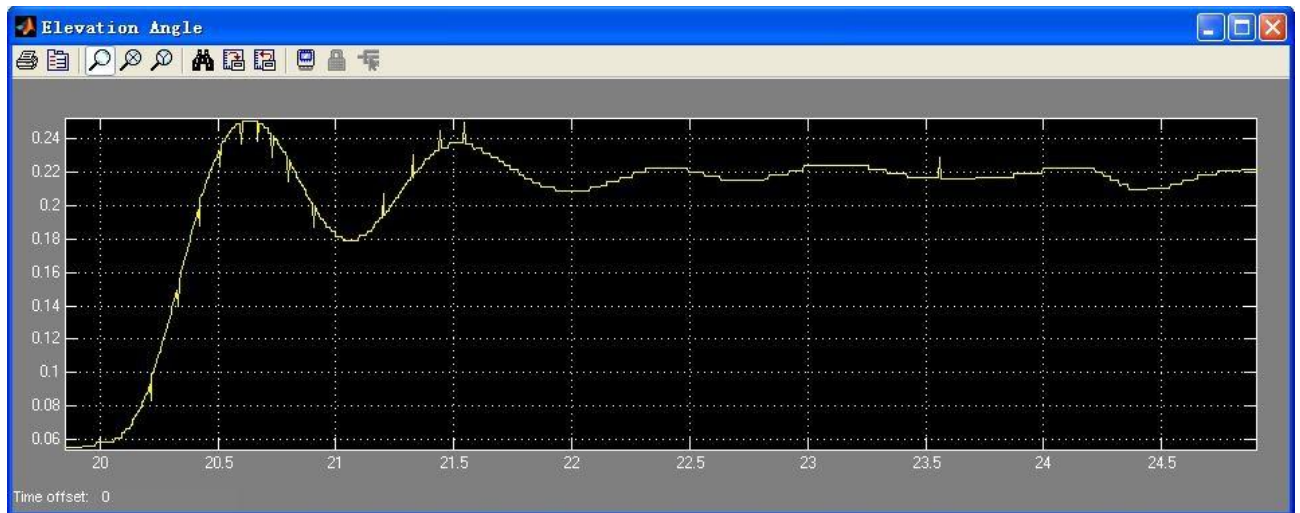
LRQ Controll2 的参数如下图所示:



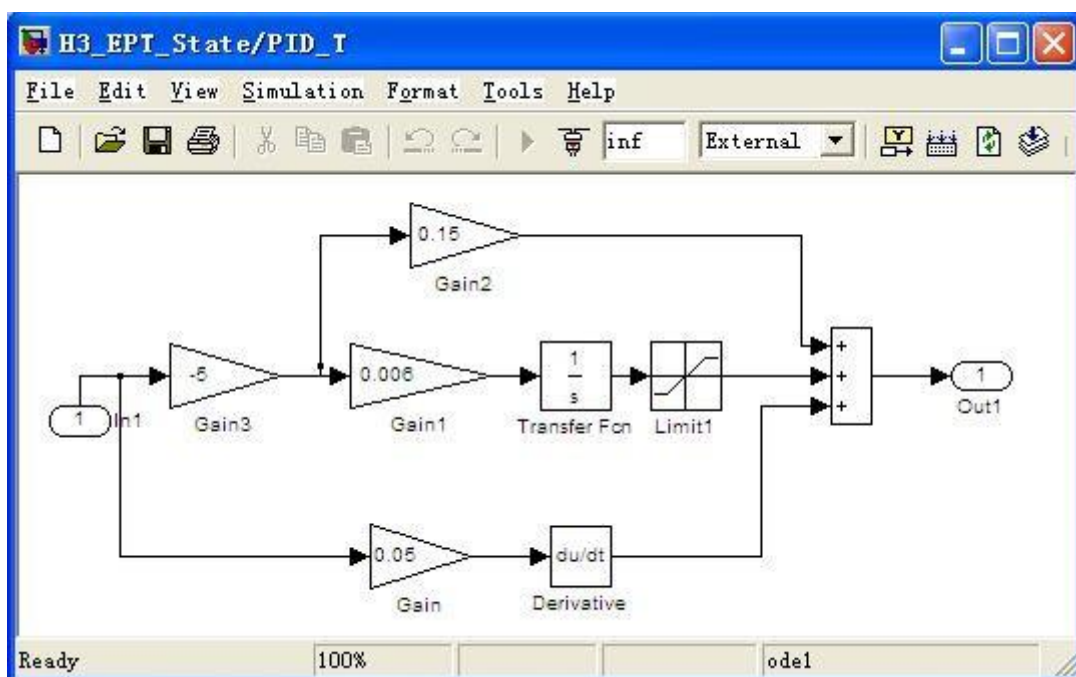
在俯仰通道上加 0.3rad 阶跃激励，阶跃响应如下图所示：



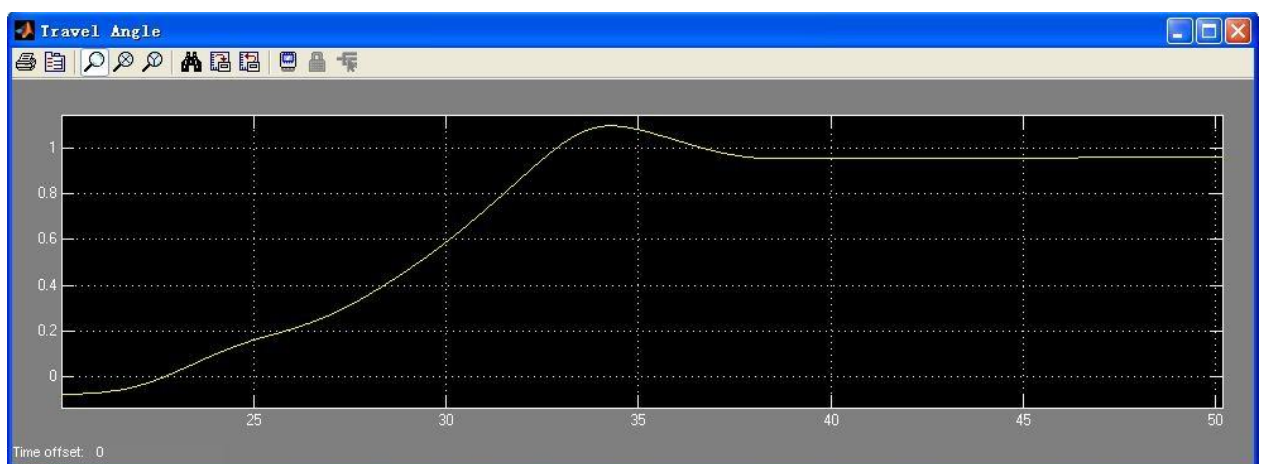
调节时间约 2 秒，超调量为 0，稳态值 0.1rad。滚动通道加入 0.5rad 的阶跃激励，阶跃响应曲线如下图所示：



调节时间约 2.2 秒，超调量约 18%，稳态值 0.16rad  
偏航通道 PID 参数如下：



偏航通道加入阶跃激励 1rad，阶跃响应曲线如下图所示：



调节时间 38 秒，超调量 12%，稳态值 1rad

### 三、小结

LQR+PID 控制的效果明显比纯粹的 PID 校正效果好。主要原因是应用现代控制理论完成多入多出系统设计，偏航通道采用 PID 补偿。由于滚动通道的动态特性明显变好，因此偏航通道的动态特性也有所提高。系统鲁棒性更强。

通过改变 PID 参数，偏航通道的性能还可以进一步提高。

### 四、系统性误差分析

从实测的阶跃响应曲线可以看出，系统的实际性能指标和仿真的性能指标有差异，产生误差的原因主要有以下几点：

- 1、输入电压和力之间不一定是线性关系；
- 2、高速旋转时螺旋桨变形造成力偏差；
- 3、系统三个姿态角不可能处于绝对的水平零度，各个姿态角运动时会有干涉。
- 4、通过实际系统响应修正数学模型，可以进一步提高系统的控制效果。

### 五、注意事项

不要改变安装尺寸，否则影响控制效果。