第二部分　高等代数

2016-2017 学年第一学期月考 1 多项式

一、填空题

1. $x-3$ 除 $2x^4-13x^2-9x$ 的商式为____________________.

2. 若 $(x-1)^2|ax^4-bx^3+1$，则 $a=$______,$b=$_______ .

3. 能被任一多项式整除的多项式是_________，能整除任一多项式的多项式是__________.

4. 把有理系数多项式 $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x+3$ 写成一个有理数与一个本原多项式的乘积_____.

5. 多项式 $f(x)=x^5-5x^4+8x^3-8x^2+7x-3$ 的有理根集合为____________.

二、判断题(判断对错)

1. 若 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式．(　　　)

2. 有理系数多项式 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上没有有理根，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约．(　　　)

3. 若 $p(x)\,|\,f(x)g(x)$ 且 $p(x)\,|\,(f(x)+g(x))$，其中 $p(x)$ 在数域 F 上不可约，则 $p(x)\,|\,f(x)$ 且 $p(x)\,|\,g(x)$．(　　　)

三、设 $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-1$，$g(x)=x^3-2x+1$，

(1) 求 $(f(x),g(x))$；

(2) 求 $u(x),v(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

四、设 $f(x)=a(x-2)^2+b(x+1)^2+cx^2$，$g(x)=x-4$，若 $f(x)=g(x)$，求 a,b,c 的值.

五、已知多项式 $f(x)=x^3+tx^2+x+u$ 和多项式 $g(x)=x^3+(1+t)x^2+1$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t,u 的值.

六、证明：$(f(x),h(x))=1,(g(x),h(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)g(x),h(x))=1$.

2016-2017 学年第一学期月考 2 行列式

一、填空题：

1. 若$126i48k97$为奇排列，则$i=$______$,k=$______ .

2. 如果排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数是k，则排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数是________.

3. 设n阶行列式D的值为c，若D的所有元素都乘上-1，所得行列式的值为___.

4. 若$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=$____，$\begin{vmatrix} x_1 & 2x_2 & x_3 \\ 3y_1 & 6y_2 & 3y_3 \\ -z_1 & -2z_2 & -z_3 \end{vmatrix}=$____.

5. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$，则$-2A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=$_______ .

6. 四阶行列式的第三行的元素为$-1,2,-2,4$，其对应的余子式分别为$-5,3,-2,0$，则行列式等于________.

7. 四阶行列式的第三行的元素为$-1,0,2,4$，第四行元素的代数余子式分别是$2,10,a,4$，则$a=$_______.

8. 若$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0$，则$x=$______________________.

二、计算n级行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

三、计算行列式$D=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$.

四、问λ,μ取何值时？齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解.

五、证明$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

2016-2017 学年第一学期月考 3 线性方程组

一、填空题：

1. 已知 $5(1,0,-1)-3\alpha-(1,0,2)=(2,-3,-1)$，则 $\alpha=$____________.

2. 若任一 3 维向量都可由 $\alpha_1=\left(1,0,1\right),\alpha_2=\left(1,-2,3\right),\alpha_3=\left(a,1,2\right)$ 线性表出，则 a 满足________.

3. 向量组 $\alpha_1=\left(1,0,1,2\right),\alpha_2=\left(1,1,3,1\right),\alpha_3=\left(2,-1,a+1,5\right)$ 线性相关，则 $a=$____.

4. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 的秩为 r，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 的秩为 $r+1$，则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 的秩为________.

5. 设非齐次线性方程组的系数矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，若常数项组成的列向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则此方程组的通解为______________.

6. 设齐次线性方程组的系数矩阵是 n 阶方阵 A，若 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则此方程组的通解为_____________________.

7. 设一线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda \end{pmatrix}$，则当 $\lambda=$_____时，方程组无解．当 $\lambda=$_____时，方程组有无穷多解．

8. 一个齐次线性方程组含有 n 个未知量，一组基础解系含 r 个解，则该方程组系数矩阵的秩为___________.

9. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，以 A 为系数矩阵的非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件是______________________.

二、求向量组 $\alpha_1=(1,0,-1,0),\alpha_2=(-1,2,0,1),\alpha_3=(-1,4,-1,2),\ \alpha_4=(0,0,7,7)$，$\alpha_5=(0,1,1,2)$ 的秩和一个极大线性无关组．

三、问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda, \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解？没有解？有无穷多解？有解时求解.

四、求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ 的一组基础解系.

五、设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F^m$ 是 n 个列向量，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，又 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$，证明：

(1) 此方程组必有无穷多个解；

(2) 记 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为此方程组的任一解，则必有 $x_n = 1$.

2016-2017 学年第一学期期末试卷 A

一、填空题：

1. 若9级排列$63s479k18$为奇排列，则$s=$________,$k=$________.

2. 排列$(2n-1)(2n-3)\cdots 31246\cdots(2n)$的逆序数为________________.

3. 行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=$______________________________.

4. 设A是3阶方阵，$|A|=2$，则$|A^{-1}+A^*|=$________ .

5. $n(n\geq 5)$级行列式中有一个$n-2$级子式的元素全为零，则此n级行列式的值为__________.

6. 一个齐次线性方程组中有n_1个方程，n_2个未知量，系数矩阵的秩为n_3，若方程组有非零解，则基础解系所含向量的个数为___________.

7. a满足___________，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=a \end{cases}$无解.

8. 在向量空间中，若向量α可由任一向量组线性表出，则$\alpha=$______.

9. 若n阶方阵A满足$A^4=0$，则$(E-A)^{-1}=$____________________ .

10. n阶矩阵A可写成一个对称阵与一个反对称阵的和，此表达式为____.

二、计算题：

1. 求向量组$\alpha_1=(1,1,4,2),\alpha_2=(1,-1,-2,4),\alpha_3=(0,2,6,-2)$，$\alpha_4=(3,-1,3,4)$,$\alpha_5=(1,0,4,7)$的秩和一个极大线性无关组.

2. 设$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$，计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1+a_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_3 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1+a_{n-1} & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1+a_n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. a,b取什么值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$无解？有解？有解时，求通解.

4. 设$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，若$2XA-2AB=X-B$，求矩阵$X$.

三、证明题：

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，证明$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，且表示法唯一.

2. 设A是一$s\times n$阵，证明: 存在一个非零的$n\times m$阵B满足$AB=0$当且仅当A的秩$r(A)<n$.

3. 设A,B都是$s\times n$阵，证明$r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

2016-2017 学年 第一学期 期末试卷 B

一、填空题：

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，则 $AB-BA=$__________ .

2. 三阶行列式的第三行的元素为 $1,2,3$，其对应的余子式分别为 $3,2,1$，则此行列式的值为__________.

3. 若 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=2016$，则 $\begin{vmatrix}a_{12}+a_{11} & a_{11} & a_{13}\\ a_{22}+a_{21} & a_{21} & a_{23}\\ a_{32}+a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=$__________.

4. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 唯一线性表出，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩等于__________.

5.方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\ x_2-x_3=a_2,\\ x_3-x_1=a_3\end{cases}$ 有解的充要条件是__________.

6. 设 A,B 都是 3 阶方阵，$|A|=3,|B|=4$，则 $\begin{vmatrix}0 & A\\ B & 0\end{vmatrix}=$________.

7. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=$____________.

8. 使得 9 级排列 $1i74j56k9$ 是奇排列的 i,j,k 的取值共有________组.

9. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是 3 阶方阵，$|A|=1$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_2,\alpha_3)$，则 $|B|=$__________.

10. 设 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=s$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 的一个极大无关组为____________________.

二、计算题：

1. 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\3&2&3&\cdots&3\\3&3&3&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}$.

2. 设$\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,a),\alpha_3=(1,a+2,-2)$，$\beta_1=(1,3,4)$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\beta_2=(0,1,2)$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求$a$的值.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求所有与$A$可交换的矩阵.

4. 设A,B满足$A^*BA=2BA-8E$，其中$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵$B$.

三、证明题：

1. 假设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，证明：表示法唯一的充要条件是

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

2. 设A是n阶方阵，满足$A^2=A$，若$A\neq E$，证明A不可逆.

3. 设A,B都是$s\times n$矩阵，证明$r(A,B)\le r(A)+r(B)$.

2017-2018 学年第一学期月考 1 多项式

一、填空题

1. $x-3$ 除 $2x^4-4x^3-5x^2+10x-4$ 的商式为____________________.

2. 若 $(x+1)^2|ax^4-bx^3+1$，则 $a=$______, $b=$_______ .

3. 性质“若 $p(x)\,|\,f(x)g(x)$，则 $p(x)\,|\,f(x)$ 或 $p(x)\,|\,g(x)$”是否正确_______.

4. $(x^3-1, x^4-1)=$___________.

5. 多项式 $f(x)=x^5-5x^3+9x^2-8x+3$ 有________个有理根(重根按重数计).

6. 设 n 是正整数，若 $(x^3-1)\,|\,(x^n-1)$，则 n 的取值为________.

7. x^4-4 在有理数域上因式分解表达式是_______，在复数域上因式分解表达式是_____.

8. 设 $(f,g)=1$，任给正整数 m,n，则 $(f^m,g^n)=$__________.

二、设 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$， $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$，

(1) 求 $(f(x),g(x))$；

(2) 求 $u(x),v(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

三、求一个二次多项式 $f(x)$，使得 $f(x)$ 在 $x=1,2,4$ 处与 $\log_2{}^x$ 有相同的值.

四、设 $a\neq b$，$x-a,x-b$ 除 $f(x)$ 所得余式分别为 r_1,r_2，求 $(x-a)(x-b)$ 除 $f(x)$ 的余式.

五、证明：$(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

2017-2018 学年第一学期月考 2 行列式

一、填空题

1. 当 $i=$_____, $j=$_____时，5 阶行列式的项 $a_{14}a_{2i}a_{32}a_{41}a_{5j}$ 取负号.

2. 四阶行列式 $\left|a_{ij}\right|_4$ 的展开式中含有因子 a_{23} 的项的个数是________.

3. $\begin{vmatrix} 2017 & 2015 \\ 2016 & 2014 \end{vmatrix} =$ ________.

4. 9 阶反对称行列式的值为__________.

5. 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ 有唯一解，则 λ 满足____________________.

6. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2015 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2016 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2017 \end{vmatrix} =$ ____________________.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} =$ _________________________.

8. 排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数为______________.

9. 排列 $x_1x_2\cdots x_9x_{10}$ 的逆序数是 k，则排列 $x_{10}x_9\cdots x_2x_1$ 的逆序数是_________.

二、计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

三、计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

四、利用克拉默法则求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

五、n 阶行列式 D 中每个数 a_{ij} 分别用 2^{i-j} 乘所得的行列式记为 D_1，求行列式 D_1 的值.

2017-2018 学年第一学期月考 3 线性方程组

一、填空题

1. 一个向量$\boldsymbol{\alpha}$线性无关的充要条件是____________.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{R}^3$中的3个列向量，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，且$\beta=2\alpha_1+2\alpha_2$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解是____________.

3. 线性方程组$AX=\beta$无解，且$r(A)=3$，则$r(A,\beta)=$________.

4. n阶方阵A的行列式$|A|=0 \Leftrightarrow A$的秩满足___________.

5. 非齐次线性方程组$AX=\beta$ (A是$s\times n$矩阵)有唯一解的充要条件是__________.

6. $n+1$个n维向量组成的向量组是线性___________的向量组.

7. 齐次线性方程组有非零解的充要条件是__________________________.

8. 设向量组(I)是向量组(II)的部分组，则(I)线性_______，可得(II)线性______.

9. 方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$的基础解系含有 ________个向量.

二、试讨论a,b的取值，解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3, \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3. \end{cases}$

三、求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),$ $\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表出.

四、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，设

$$\beta_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\beta_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\beta_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的线性相关性.

五、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，证明:

(1) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$k_1,k_2,\cdots,k_m$或者全为$0$，或者全不为$0$.

(2) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$和$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$都成立，其中$l_1\neq 0$，则

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

2017-2018 学年第一学期期末试卷 A

一、填空题：

1. n 级排列中，偶排列的个数为____________.

2. 若 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数为 k，则 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数为____________.

3. 设 A,B 均为 3 阶方阵，$|A|=-2,|B|=3$，则 $\left|2|A|B\right|=$ _______ .

4. 设 A 是一个 n 阶方阵，若 $r(A)=n-1$，则 $r(A^*)=$____________.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$B$ 是 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $a=$_______.

6. 设方阵 A 满足 $A^2+2A+3E=0$，则 $A^{-1}=$ ___________ .

7. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，秩为 r，则以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的一组基础解系所含向量的个数为_________.

8. 若 $\beta=(1,2,t)$ 不能由 $\alpha_1=(2,1,1),\alpha_2=(-1,2,7),\alpha_3=(1,-1,-4)$ 线性表出，则 t 满足________.

9. 设 A,B 都是可逆矩阵，则矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为___________.

10. 向量组 $\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$ 的一个极大线性无关组为_____________.

二、计算题：

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求与 A 可交换的矩阵的全体.

3. 求 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=1\\x_1\qquad\quad+2x_3+2x_4+2x_5=3\\2x_1+2x_2+4x_3+3x_4+3x_5=a\\3x_1+8x_2+6x_3+2x_4+2x_5=b\end{cases}$ 有解;有解时，求通解.

4. 设 3 阶方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA,$ 且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$,

求矩阵 B .

三、证明题：

1. 证明 n 级行列式 $\begin{vmatrix}6&1&0&\cdots&0&0\\8&6&1&\cdots&0&0\\0&8&6&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&6&1\\0&0&0&\cdots&8&6\end{vmatrix}=2^{2n+1}-2^{n}$.

2. 设 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵，证明:若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$.

3. 两个向量组有相同的秩，且其中一个可由另一个线性表出，证明这两个向量组等价.

2017-2018 学年 第一学期 期末试卷 B

一、填空题：

1. 排列 $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为__________.

2. 若 9 级排列 $9i4813j65$ 是奇排列，则 $i=$______, $j=$______ .

3. $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 3 & 2 \\ x & x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & x & -1 \\ -1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数是__________， x^3 的系数是__________.

4. 设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$__________.

5. 设 $\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(a,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$，且 $3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$，

则 $a=$________.

6. 向量组 $\alpha_1=(1,0,1,2),\alpha_2=(1,1,3,1),\alpha_3=(2,-1,a+1,5)$ 线性相关，则 $a=$____.

7. 向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4),\alpha_2=(2,0,-1,1),\alpha_3=(6,0,0,5)$ 的秩为________.

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$________________.

9. 设 A,B 均为 3 阶方阵，满足 $AB-A+2B=0$，若 $|A+2E|=2$，则 $|B-E|=$____.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n=$______________ .

二、计算题：

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a \end{vmatrix}$.

2. 求 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷多个解? 在有解时求解.

3. 求方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$ 的通解.

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA-BXB=AXB-BXA+E$，求 X .

三、证明题：

1. 证明: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^n + (-1)^{n+1} x^n$.

2. 设 A, B 都是 n 阶可逆阵，且 $A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，证明

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1} A^{-1}.$$

3. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 有相同的秩，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 等价.