第二章　行列式

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

1. 利用定义计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

2. 利用行列式性质把行列式化为上、下三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

3. 行列式按一行 (一列) 展开, 或按多行 (多列) 展开 (Laplace 定理)

公式:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C_1 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C_2 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_2 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|B\ |,$$

其中 A, B 分别是 m, n 阶的方阵.

3. 行列式按一行 (一列) 展开, 或按多行 (多列) 展开 (Laplace 定理)

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) \, .$$

4. 箭头形行列式或者可以化为箭头形的行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) a_1 a_2 \cdots a_n
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
x_1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\
x_1 & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
m & -m & 0 & \cdots & 0 \\
m & 0 & -m & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
m & 0 & 0 & \cdots & 0 - m
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\
0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 - m
\end{vmatrix}
= \left(\sum_{i=1}^n x_i - m \right) (-m)^{n-1}
$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$$

$$\begin{vmatrix} b & \cdots & b & b & a \\ b & \cdots & b & a & b \\ b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & b & b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & b-a \\ a-b & 0 & \cdots & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a+(n-1)b \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$