第七章：递推关系与生成函数

Outline

定义 1.1

设$\{h_n\}$是一个数列。若存在数列$a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n)$及数列$b_n$，（其中$a_k(n) \neq 0$）使得

$$h_n = a_1(n)h_{n-1} + a_2(n)h_{n-2} + \cdots + a_k(n)h_{n-k} + b_n, (n \geq k) \tag{1}$$

则称数列$\{h_n\}$满足k阶线性递推关系。

当$b_n = 0$时，称数列$\{h_n\}$ 满足的递推关系式(1)为线性齐次递推关系。

当$a_i(n)$都为常数数列时，称之为常系数线性递推关系。

注： 一旦初始值$h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$的值确定，由递推关系(1)知，数列$\{h_n\}$就被唯一确定。

定义 1.1

设$\{h_n\}$是一个数列。若存在数列$a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n)$及数列$b_n$，（其中$a_k(n) \neq 0$）使得

$$h_n = a_1(n)h_{n-1} + a_2(n)h_{n-2} + \cdots + a_k(n)h_{n-k} + b_n, (n \geq k) \tag{1}$$

则称数列$\{h_n\}$满足k阶线性递推关系。

当$b_n = 0$时，称数列$\{h_n\}$ 满足的递推关系式(1)为线性齐次递推关系。

当$a_i(n)$都为常数数列时，称之为常系数线性递推关系。

注： 一旦初始值$h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$的值确定，由递推关系(1)知，数列$\{h_n\}$就被唯一确定。

定义 1.1

设$\{h_n\}$是一个数列。若存在数列$a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n)$及数列$b_n$，（其中$a_k(n) \neq 0$）使得

$$h_n = a_1(n)h_{n-1} + a_2(n)h_{n-2} + \cdots + a_k(n)h_{n-k} + b_n, (n \geq k) \tag{1}$$

则称数列$\{h_n\}$满足k阶线性递推关系。

当$b_n = 0$时，称数列$\{h_n\}$ 满足的递推关系式(1)为线性齐次递推关系。

当$a_i(n)$都为常数数列时，称之为常系数线性递推关系。

注： 一旦初始值$h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$的值确定，由递推关系(1)知，数列$\{h_n\}$就被唯一确定。

例 1.2

n-元集S的全排列个数$h_n = n!$满足1阶线性递推关系：

$$h_n = n \cdot h_{n-1} \quad n \geq 2.$$

例 1.3

(1) 等差数列满足：

$$h_n = h_{n-1} + d;$$

(2) 等比数列满足：

$$h_n = q \cdot h_{n-1};$$

例 1.2

n-元集S的全排列个数$h_n = n!$满足*1*阶线性递推关系：

$$h_n = n \cdot h_{n-1} \quad n \geq 2.$$

例 1.3

(1) 等差数列满足：

$$h_n = h_{n-1} + d;$$

(2) 等比数列满足：

$$h_n = q \cdot h_{n-1};$$

例 1.4

错位排列的计数数列D_n满足以下两个线性递推关系：

(1) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (n \geq 2)$;

(2) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \quad (n \geq 1)$;

Outline

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件*:*

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

定义 2.1

满足递推关系和初始条件:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

的数列$\{f_n\}$叫做*Fibonacci*数列。

Fibonacci数列的前几项为:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

例 2.2

在一年之初把性别相反的一对新生兔子放进围栏。从第二个月开始，母兔每月生出一对性别相反的小兔。每对新生兔也从它们第二个月大开始每个月生出一对新兔。求一年后围栏内兔子的对数。

例 2.3

(1) 确定$2 \times n$棋盘用多米诺牌完美覆盖方法数h_n;

(2) 确定用单牌和多米诺牌对$1 \times n$棋盘完美覆盖的方法数a_n;

(3) 确定集合$[n]$的不含任意两个相邻整数的子集S的个数b_n.

例 2.3

(1) 确定$2 \times n$棋盘用多米诺牌完美覆盖方法数h_n;

(2) 确定用单牌和多米诺牌对$1 \times n$棋盘完美覆盖的方法数a_n;

(3) 确定集合$[n]$的不含任意两个相邻整数的子集S的个数b_n.

例 2.3

(1) 确定$2 \times n$棋盘用多米诺牌完美覆盖方法数h_n;

(2) 确定用单牌和多米诺牌对$1 \times n$棋盘完美覆盖的方法数a_n;

(3) 确定集合$[n]$的不含任意两个相邻整数的子集S的个数b_n.

命题 2.4

令$S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$表示*Fibonacci*数列的部分和，则

$$S_n = f_{n+2} - 1.$$

命题 2.5

*Fibonacci*数f_n是偶数当且仅当n能被3整除。

命题 2.4

令$S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$表示*Fibonacci*数列的部分和，则

$$S_n = f_{n+2} - 1.$$

命题 2.5

*Fibonacci*数f_n是偶数当且仅当n能被3整除。

命题 2.6

沿*Pascal*三角形左下到右上对角线上的二项式系数的和是*Fibonacci*数。即：

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots$$
$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k}$$

命题 2.7

对任意的$n \geq 0$, 第n个*Fibonacci*数f_n满足：

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Outline

递推关系

Fibonacci数列

线性齐次递推关系

生成函数

指数生成函数

定理 3.1

设$q \neq 0$.则$h_n = q^n$是常系数线性齐次递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0 \quad , \; a_k \neq 0 \; (n \geq k) \tag{2}$$

的解当且仅当q是多项式方程

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \tag{3}$$

的一个根。如果方程(3)有k个不同的根$q_1, q_2, \ldots, q_k$，则

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n \tag{4}$$

是递推关系(2)的一般解，即：对任意给定的初始值$h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$，都存在唯一的一组数$c_1, c_2, \ldots, c_k$，使得(4)是满足该初始值和递推关系(2)的唯一解。

定理 3.2

令$q_1, q_2, \ldots, q_t$为常系数线性齐次递推关系：

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0 \quad , \ a_k \neq 0 \ (n \geq k) \tag{5}$$

的特征方程的互异的根，其中q_i是s_i重根。对任意$1 \leq i \leq t$，令：

$$\begin{aligned} H_n^{(i)} &= c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \cdots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n \\ &= (c_1 + c_2 n + \cdots + c_{s_i} n^{s_i - 1}) q_i^n, \end{aligned}$$

则递推关系(5)的一般解为

$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \cdots + H_n^{(t)}.$$

例 3.3

求解满足初始条件$h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 0$的递推关系：

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \quad (n \geq 3).$$

解： 该递推关系的特征方程

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

有3个不同的根：$1, -1, 2$。因此一般解为

$$h_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 2^n.$$

由初始值知，

例 3.3

求解满足初始条件$h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 0$的递推关系：

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \quad (n \geq 3).$$

解： 该递推关系的特征方程

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

有3个不同的根：$1, -1, 2$。因此一般解为

$$h_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 2^n.$$

由初始值知，

例 3.3

求解满足初始条件$h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 0$的递推关系：

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \quad (n \geq 3).$$

解： 该递推关系的特征方程

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

有3个不同的根：$1, -1, 2$。因此一般解为

$$h_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 2^n.$$

由初始值知，

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 1, \\ c_1 - c_2 + 2c_3 &= 2, \\ c_1 + c_2 + 4c_3 &= 0, \end{cases}$$

解该方程组得唯一解：$c_1 = 2, c_2 = -\frac{2}{3}, c_3 = -\frac{1}{3}$. 因此，

$$h_n = 2 - \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2^n}{3}.$$

例 3.4

只由三个字母a, b, c组成的长度为n的一些单词将在通信信道上传输，满足条件：传输中不得有两个a连续出现在任一单词中。确定通信信道允许传输的长度为n的单词个数。

例 3.5

求递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4}$$

满足初始值$h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2$的解。

解 该递推关系的特征方程：

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

有三重根-1及单根2. 因此其一般解为

$$h_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n.$$

例 3.5

求递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4}$$

满足初始值$h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2$的解。

解 该递推关系的特征方程：

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

有三重根-1及单根2. 因此其一般解为

$$h_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n.$$

例 3.5

求递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4}$$

满足初始值$h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2$的解。

解 该递推关系的特征方程：

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

有三重根-1及单根2. 因此其一般解为

$$h_n = c_1(-1)^n + c_2n(-1)^n + c_3n^2(-1)^n + c_4 2^n.$$

例 3.5

求递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4}$$

满足初始值$h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = 2$的解。

解 该递推关系的特征方程：

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

有三重根-1及单根2. 因此其一般解为

$$h_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n.$$

由初始值知，

$$\begin{cases} c_1 + c_4 & = 1, \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 & = 0, \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 & = 1, \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 & = 2. \end{cases}$$

解之得唯一解：$c_1 = \frac{7}{9}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = 0, c_4 = \frac{2}{9}$. 因此，

$$h_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{1}{9}2^{n+1}.$$

Outline

定义 4.1

给定数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$. 称形式幂级数

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n + \cdots$$

为数列$\{h_n\}$的生成函数。

注： 对于有限数列: $h_0, h_1, \ldots, h_m$，可将其视为无穷数列：

$$h_0, h_1, \ldots, h_m, 0, 0, \ldots,$$

则它的生成函数为多项式：

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_m x^m.$$

定义 4.1

给定数列$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$. 称形式幂级数

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n + \cdots$$

为数列$\{h_n\}$的生成函数。

注： 对于有限数列: $h_0, h_1, \ldots, h_m$，可将其视为无穷数列：

$$h_0, h_1, \ldots, h_m, 0, 0, \ldots,$$

则它的生成函数为多项式：

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_m x^m.$$

例 4.2

常数数列$h_n \equiv C$的生成函数为

$$\begin{aligned} g(x) &= C + Cx + Cx^2 + \cdots + Cx^n + \cdots \\ &= \frac{C}{1-x}. \end{aligned}$$

例 4.3

给定正整数m，二项式数列$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m}$的生成函数为

$$\begin{aligned} g_m(x) &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m \\ &= (1+x)^m. \end{aligned}$$

例 4.2

常数数列$h_n \equiv C$的生成函数为

$$\begin{aligned} g(x) &= C + Cx + Cx^2 + \cdots + Cx^n + \cdots \\ &= \frac{C}{1-x}. \end{aligned}$$

例 4.3

给定正整数m，二项式数列$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m}$的生成函数为

$$\begin{aligned} g_m(x) &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m \\ &= (1+x)^m. \end{aligned}$$

例 4.2

常数数列$h_n \equiv C$的生成函数为

$$\begin{aligned} g(x) &= C + Cx + Cx^2 + \cdots + Cx^n + \cdots \\ &= \frac{C}{1-x}. \end{aligned}$$

例 4.3

给定正整数m，二项式数列$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m}$的生成函数为

$$\begin{aligned} g_m(x) &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m \\ &= (1+x)^m. \end{aligned}$$

例 4.4

设α是一个实数，定义

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

由广义的牛顿二项式定理知，数列

$$\binom{\alpha}{0}, \binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \ldots, \binom{\alpha}{n}, \ldots$$

的生成函数为

$$g(x) = (1+x)^{\alpha}.$$

例 4.5

设r是给定的正整数。令

$$h_n = \left(\binom{r}{n}\right) = \binom{r+n-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

求

$$g_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n.$$

例 4.5

设r是给定的正整数。令

$$h_n = \left(\binom{r}{n}\right) = \binom{r+n-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

求

$$g_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n.$$

例 4.5

设r是给定的正整数。令

$$h_n = \left(\!\!\binom{r}{n}\!\!\right) = \binom{r+n-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

求

$$g_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n.$$

例 4.5

设r是给定的正整数。令

$$h_n = \left(\binom{r}{n}\right) = \binom{r+n-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

求

$$g_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n.$$

例 4.6

令

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

设$g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$。则$h_n$ 的组合解释为?

例 4.7

设h_n表示方程

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = n$$

的满足条件

$$2|e_1,\ 2\nmid e_2,\ 0\leq e_3 \leq 4,\ e_4 \geq 1$$

的非负整数解的个数。求$g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$.

例 4.6

令

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

设$g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$。则$h_n$ 的组合解释为？

例 4.7

设h_n表示方程

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = n$$

的满足条件

$$2|e_1,\ 2\nmid e_2,\ 0 \leq e_3 \leq 4,\ e_4 \geq 1$$

的非负整数解的个数。求$g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$.

例 4.8

往一个果篮里装苹果、香蕉、橘子和梨四种水果，要求苹果数为偶数，香蕉数是5的倍数，橘子最多装4个，而梨最多放1个。要装一个共含n个水果的果篮，一共有h_n种方法，求$\sum_{n\geq 0} h_n x^n$.

例 4.9

设h_n表示方程

$$3e_1 + 4e_2 + 2e_3 + 5e_4 = n$$

的非负整数解的个数。求$g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$.

例 4.8

往一个果篮里装苹果、香蕉、橘子和梨四种水果，要求苹果数为偶数，香蕉数是*5*的倍数，橘子最多装*4*个，而梨最多放*1*个。要装一个共含n个水果的果篮，一共有h_n种方法，求$\sum_{n\geq 0} h_n x^n$.

例 4.9

设h_n表示方程

$$3e_1 + 4e_2 + 2e_3 + 5e_4 = n$$

的非负整数解的个数。求$g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$.

Outline

定义 5.1

给定数列

$$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots,$$

它的指数生成函数定义为

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{x^n}{n!} \\ &= h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + h_n \frac{x^n}{n!} + \cdots . \end{aligned}$$

定义 5.1

给定数列

$$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots,$$

它的指数生成函数定义为

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{x^n}{n!} \\ &= h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + h_n \frac{x^n}{n!} + \cdots . \end{aligned}$$

定理 5.2

设$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$为一个多重集。令

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!},$$

记S的n排列的个数为h_n，则

$$\sum_{n\geq 0}h_n\frac{x^n}{n!}=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x).$$

例 5.3

设h_n表示由数字$1,2,3$组成的n位数的个数，其中要求数字1出现偶数次，数字2至少出现3次，数字3出现最多4次。求

$$g^{(e)}(x)=\sum_{n\geq 0}h_n\frac{x^n}{n!}.$$

例 5.4

用红色、白色及蓝色将$1 \times n$的方格进行染色，要求染红色的方格个数为偶数。求不同的方法数h_n。

例 5.5

求每位数字都是奇数、且数字1和数字3都出现偶数次的n位数的个数。

例 5.4

用红色、白色及蓝色将$1 \times n$的方格进行染色，要求染红色的方格个数为偶数。求不同的方法数h_n。

例 5.5

求每位数字都是奇数、且数字1和数字3都出现偶数次的n位数的个数。

作业：

- 习题4；
- 习题14；
- 习题18；
- 习题19；
- 习题24；
- 习题33；
- 习题35；