Chapter 1

生成函数

1.1 生成函数

生成函数 (generating function) 方法最初是由 Laplace 和 Euler 引进的，是组合计数中一个很有效的方法。在了解生成函数的具体定义之前，我们首先从我们熟知的 Fibonacci 数列开始，了解一下生成函数的运用。

意大利数学家 Fibonacci 在 13 世纪提出了如下的一个问题：

最初有一对小兔子 (雌雄各一)，这对兔子从第二个月开始每月都产下一对雌雄各一的小兔，每对新生小兔间隔一个月后也开始每月都产下一对雌雄各一的小兔。假定兔子都不死亡，最终会有多少对兔子。

著名的 Fibonacci 数列由此而得名。若设 F_n 表示第 n 个月所有的兔子对数，则我们不难得出如下递推关系式：

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$

先给出生成函数的一个粗略的定义：令 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 为一无穷序列，则 $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 称为该无穷序列的生成函数。

由上述定义，我们现在计算一下 Fibonacci 数列的生成函数 $F(x)$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= 1 + xF(x) + x^2 F(x)
\end{aligned}$$

由此可得 $F(x) = (1 - x - x^2)^{-1}$.

此即 Fibonacci 数列的生成函数，因 $1 - x - x^2$ 的两根为

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)^{-1} &= (1-\alpha x)^{-1}(1-\beta x)^{-1}\\ &= \frac{\alpha/(1-\alpha x)-\beta/(1-\beta x)}{\alpha-\beta}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}x^n\end{aligned}$$

因此

$$F_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}). \tag{1.1}$$

通过上述的例子，我们得知通过生成函数的方法可以求解一些计数上的问题。通过生成函数的变换我们还可以得知一些数列的性质。我们同样以 Fabonacci 数列为例来进行说明。

命题 1.1.1 *Fibonacci* 数列满足如下恒等式：

$$\sum_{i=0}^{n}F_i=F_{n+2}-1.$$

证明 注意到对任意级数 $\sum_n a_nx^n$, 有 $(1-x)^{-1}\sum_n a_nx^n=\sum_n(\sum_{i=0}^n a_i)x^n$ 成立，于是从

$$1=F(x)(1-x-x^2)=F(x)(2-x-x^2)-F(x)$$

得

$$F(x)=F(x)(2-x-x^2)-1=F(x)(2+x)(1-x)-1$$

所以

$$(1-x)^{-1}F(x)=F(x)(2+x)-(1-x)^{-1}.$$

比较两边的系数，就得到上式。 ∎

通过上述我们熟知的例子，我们对生成函数的方法有个一个大致的了解。接下来我们详细给出生成函数的严格定义以及一些常用的类型。

定义 1.1.2 设 $g_i(x)(i=0,1,2,\ldots)$ 线性无关，则称

$$G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ig_i(x) \tag{1.2}$$

为 $a_i(i=0,1,2,\ldots)$ 的生成函数。

(1.2) 式称为关于未定元 x 的形式幂级数。一般情况下，形式幂级数中的 x 只是一个抽象符号，并不需要对 x 赋予具体的数值。进而也就不需要讨论级数收敛性的问题。

$\mathbb{R}$ 上关于未定元 x 的形式幂级数的全体记为 $\mathbb{R}(x)$。在集合 $\mathbb{R}(x)$ 中适当定义加法 $(+)$ 和乘法 $(\cdot)$, 则 $(\mathbb{R}(x),+,\cdot)$ 构成环。

设 $A(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ig_i(x)$, $B(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ig_i(x)$. 定义

$$A(x)+B(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)g_i(x).$$

以上是形式幂级数的加法，与 $g_i(x)$ 的具体形式无关。而形式幂级数的乘法在定义的时候会依据 $g_i(x)$ 的不同而有细微的变化。接下来我们先了解一下生成函数的一些常见形式。

定义 1.1.3 取 $g_i(x)=x^i$, 则有

$$f(x)=\sum_{i\geq 0}a_ix^i$$

称为 a_i 的普通型生成函数。例如：$\{1,1,1,1,\ldots\}$ 的普通型生成函数为：

$$f(x)=\sum_{i\geq 0}x^i=\frac{1}{1-x}.$$

定义 1.1.4 取 $g_i(x)=\frac{x^i}{i!}$, 则有

$$f(x)=\sum_{i\geq 0}a_i\frac{x^i}{i!}$$

称为 a_i 的指数型生成函数。例如：$\{0!,1!,2!,3!,\cdots\}$ 的指数型生成函数为：

$$f(x)=\sum_{i\geq 0}i!\frac{x^i}{i!}=\frac{1}{1-x}.$$

$\{1,1,1,\ldots\}$ 的指数型生成函数为：

$$f(x)=\sum_{i\geq 0}\frac{x^i}{i!}=e^x.$$

以上是常用的两种生成函数的形式，下来我们就依据两者的具体形式给出生成函数乘法的定义。对于普通性生成函数而言：

定理 1.1.5 $f(x)=\sum a_1x^i$ 和 $g(x)=\sum b_ix^i$ 是两个生成函数，则：

$$f(x)g(x)=\sum c_ix^i,$$

其中 $c_i=\sum_{k=0}^{i}a_kb_{i-k}$.

对于指数型生成函数而言：

定理 1.1.6 $f(x)=\sum a_i\frac{x^i}{i!}$ 和 $g(x)=\sum b_i\frac{x^i}{i!}$ 是两个生成函数，则：

$$f(x)g(x)=\sum c_i\frac{x^i}{i!},$$

其中 $c_i=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_kb_{n-k}$.

生成函数的乘法有严格的组合意义。假设 a_i 所计数的组合结构称为 A-结构，b_i 计数的是 B-结构，那么 c_i 计数的则是由部分 A-结构和部分 B-结构组合而成的结构。

1.2 生成函数的计算

在了解完生成函数的具体定义之后，我们现在具体看一下怎么利用生成函数进行计算。如果我们已知了 a_i, b_i 之间的关系，如何推出 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ 与 $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ 之间的关系。

如下我们列出一些常见的关系：

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \Rightarrow B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

证明 由假设可得：

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 x &= (a_0 + a_1)x \\ b_2 x^2 &= (a_0 + a_1 + a_2)x^2 \\ &\cdots \\ b_n x^n &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x^n \\ &\cdots \end{aligned}$$

等式左端相加为 $B(x)$. 等式右端相加，得

$$\begin{aligned} & a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots \\ &= a_0 \sum_{i=0}^{\infty} x^i + a_1 x \sum_{i=0}^{\infty} x^i + a_2 x^2 \sum_{i=0}^{\infty} x^i + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{i=0}^{\infty} x^i \\ &= \frac{A(x)}{1-x}. \end{aligned}$$

因此

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

用类似的方法还可以证明如下几个等式：

$$\begin{aligned} & 若 \sum_{i=0}^{\infty} a_i 收敛，且 b_k = \sum_{i=k}^{\infty} \Rightarrow B(x) = \frac{A(x) - xA(x)}{1-x} \\ & b_k = k a_k \Rightarrow B(x) = xA(x)' \\ & b_k = \frac{a_k}{1+k} \Rightarrow B(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 A(x) dx \end{aligned}$$

1.3 生成函数的运用

与组合相关的很多计数问题都会用到生成函数这一工具。现在我们看一下有关二叉树的例子。设 c_n 表示有 n 个结点的不同的二叉树的个数。则有 $c_0 = 1$. 在 $n > 0$

时，二叉树由一个根节点和 $n-1$ 个儿子结点，设左子树 T_l 有 k 个结点，则右子树 T_r 有 $n-1-k$ 个结点，从而

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}, \quad n > 0.$$

设 c_n 的生成函数为 $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, 于是 $B(x)$ 满足如下方程：

$$xB(x)^2 = B(x) - 1, \quad B(0) = 1.$$

解方程得

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= \frac{1-\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4x)^n}{2x} \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n+1}(-1)^n 2^{2n+1}x^n \end{aligned}$$

因此

$$c_n = \binom{1/2}{n+1}(-1)^n 2^{2n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

c_n 常称为 Catalan 数。是在组合计数中常见的数，可以用来计数很多组合物体。