16

二、计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

法一

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{inv(n\cdots 21)}(1-n)^{n-1}.$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-n)^{n-1}$$

法二

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{inv(n\cdots 21)}(1-n)^{n-1}.$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-n)^{n-1}$$

法三

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{1-n} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-n)^{n-1}.$$

16

三、计算行列式$D=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & a+x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\left(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

四、问λ,μ取何值时？齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解.

解

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 2\mu-1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \mu-1 & 1 \\ 2\mu-1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(-\mu)=0$$

当$\lambda=1$或$\mu=0$时，这个方程组有非零解.

五、证明$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

证

对n用数学归纳法.

$n=1$时，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$.

假设等式对$n-1$成立. 由Laplace定理，有

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}D_{2n-2}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)\prod_{i=1}^{n-1}(a_id_i-b_ic_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$