

### 第三章 线性方程组 练习题

#### 一 填空题

- 已知  $5(1, 0, -1) - 3\alpha - (1, 0, 2) = (2, -3, -1)$ , 则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.
- 判断向量组的线性相关性:
  - (1)  $(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (0, 0, 0, 0)$ .\_\_\_\_\_ (2)  $(a, b, c), (b, c, d), (c, d, e), (d, e, f)$ .\_\_\_\_\_
  - (3)  $(a, 1, b, 0, 0), (c, 0, d, 2, 3), (e, 4, f, 5, 6)$ . \_\_\_\_\_.
- 若任意一个3维向量都可由  $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, -2, 3), \alpha_3 = (a, 1, 2)$  线性表出, 则  $a$  满足\_\_\_\_\_.
- 向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1, 2), \alpha_2 = (1, 1, 3, 1), \alpha_3 = (2, -1, a+1, 5)$  线性相关, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (2, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$  线性无关, 则  $t$  满足\_\_\_\_\_.
- 向量组  $\alpha_1 = (1, -1, 3, 0), \alpha_2 = (-2, 1, a, 1), \alpha_3 = (1, 1, -5, -2)$  的秩为2, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 设  $r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta) = r, r(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \gamma) = r+1$ , 则  $r(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta, \gamma) =$ \_\_\_\_\_.
- 设一个齐次线性方程组的系数矩阵是  $n$  阶方阵  $A$ ,
  - 若  $A$  的各行元素之和均为0, 且  $r(A) = n-1$ , 则此方程组的通解为\_\_\_\_\_.
  - 若每个  $n$  维向量都是此方程组的解, 则  $r(A) =$ \_\_\_\_\_.
- 设非齐次方程组的系数矩阵是  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , 其中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 且  $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 若常数项组成的列向量  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 则此方程组的通解为\_\_\_\_\_.
- 若  $X_1, X_2$  是方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - ax_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + ax_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$$
 的两个不同的解向量, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$
 无解, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 设一线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为矩阵 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda \end{pmatrix}$$
, 则当  $\lambda =$ \_\_\_\_\_时, 方程组无解; 当  $\lambda =$ \_\_\_\_\_时, 方程组有无穷多解.
- 设一齐次线性方程组的系数矩阵  $A$  是  $4 \times 3$  矩阵, 则当\_\_\_\_\_时, 此方程组只有零解, 当且仅当\_\_\_\_\_时, 方程组有非零解, 此时自由未知量的个数等于\_\_\_\_\_.
- 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 以  $A$  为系数矩阵的非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件是\_\_\_\_\_.

15. 若齐次线性方程组 
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 只有零解,则  $\lambda$  应满足\_\_\_\_\_.

16. 方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = a_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = a_2 \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 = a_3 \end{cases}$$
 有解的充要条件是\_\_\_\_\_.

17. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 若  $A$  经过初等变换化为  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

18. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为一个线性无关的  $n$  维向量组, 则  $n$  与  $m$  的大小关系为\_\_\_\_\_.

19. 设  $A$  为 5 阶矩阵, 且  $|A| = 1$ , 则  $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

20. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$ , 已知  $r(A) = 1$ , 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

21. 若一个线性方程组系数矩阵的秩为  $r$ , 则其增广矩阵的秩为\_\_\_\_\_.

22. 一个齐次线性方程组含有  $n$  个未知量, 一组基础解系含  $r$  个解, 则该方程组系数矩阵的秩为\_\_\_\_\_.

23. 齐次线性方程组只有零解的充要条件是\_\_\_\_\_.

24. 若齐次线性方程组系数矩阵  $A$  是  $n$  阶矩阵, 给出此方程组有非零解的一个充要条件\_\_\_\_\_.

25. 如果向量  $\beta$  可由列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  唯一线性表出, 则矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  的秩为\_\_\_\_\_.

## 二 计算题

1. 设  $\alpha = (2, 1, -2)$ ,  $\beta = (-4, 2, 3)$ ,  $\gamma = (-8, 8, 5)$ . 问  $\gamma$  能否由  $\alpha, \beta$  线性表出, 若能,  $\alpha, \beta$  线性表出  $\gamma$ .

2. 求向量组  $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (-1, 2, 0, 1)$ ,  $\alpha_3 = (-1, 4, -1, 2)$ ,  $\alpha_4 = (0, 0, 7, 7)$ ,  $\alpha_5 = (0, 1, 1, 2)$  的一个极大线性无关组.

3. 设向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 0, 2)$ ,  $\alpha_2 = (-1, 1, 2, 4)$ ,  $\alpha_3 = (2, 3, a, 7)$ ,  $\alpha_4 = (-1, 5, -3, a+6)$ ,  $\beta = (1, 0, 2, b)$ , 求  $a, b$  的取值, 使得

(I)  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表出;

(II)  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表出, 且表出法唯一;

(III)  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表出, 且表出法不唯一, 并写出此时表达式.

4. 问  $\lambda$  取何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有唯一解? 没有解? 有无穷多解? 有解时并求解.

5. 设线性方程组为 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1 \end{cases}$$
, 讨论  $\lambda$  为何值时, 该线性方程组有唯一解? 无解? 有无穷多

解? 并在有无穷多解时求通解表达式.

6. 已知非齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = -3 \end{cases}$$
 有三个线性无关的解, 求  $a, b$  的值及方程组的通解.

7. 求齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
 的一组基础解系.

8. 求线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$
 的通解.

9. 有两个线性方程组 (I) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$
 (II) 
$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ bx_2 - x_3 + 3x_4 = -11 \\ 3x_3 - 9x_4 = c \end{cases}$$
 问当参数  $a, b, c$  为何值

时, (I) 和 (II) 同解.

### 三 证明题

1. 证明:  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) \Leftrightarrow \beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出.

2.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  个线性无关的  $n$  维向量,  $\alpha_{n+1} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$ , 且  $k_i (i=1, 2, \dots, n)$  全不为零.

证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  中任意  $n$  个向量均线性无关.

3. 设两个线性方程组: (I) 
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases}$$
, (II) 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m = 1 \end{cases},$$

证明: (I) 有解当且仅当 (II) 无解.

4. 已知  $A$  是  $n$  阶方阵, 以  $A$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ , 若  $\beta$  不是此方程组的解, 证明向量组  $\beta, \alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \dots, \alpha_t + \beta$  线性无关.

5. 向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出, 但是不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表出, 证明:  $\alpha_r$  可由

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$  线性表出.

6. 已知向量组(I)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ; (II)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ; (III)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ , 若各向量组的秩分别为  $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$ ,  $r(\text{III}) = 4$ , 证明向量组(IV)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$  的秩为 4.

7. 证明  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关当且仅当任一由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出的向量的表示法是不唯一的.

8. 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是一个齐次线性方程组的一个基础解系, 令

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m,$$

证明: 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  也是此方程组的一个基础解系.

9. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 而向量组  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 且  $\beta \neq 0$ , 证明: 向量组

$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中有且仅有一个向量  $\alpha_j (1 \leq j \leq m)$  可由其前面的向量  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$  线性表出.

10. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R^m$  是  $n$  个  $m$  维列向量, 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  线性相关,  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  线性无关, 又

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \text{ 对线性方程组 } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta, \text{ 证明:}$$

(1) 此方程组必有无穷多个解.

(2) 记  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为此方程组的任一解, 则必有  $x_n = 1$ .

11. 设向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  线性无关, 且可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出, 证明存在向量  $\alpha_k (1 \leq k \leq n)$ , 使得  $\alpha_k, \beta_2, \dots, \beta_m$  线性无关.