第 6 章递推关系递推关系几乎在所有的数学分支中都有重要作用, 对于组合数学更是如此. 这是因为每个组合问题都有它的组合结构, 而在许多情况下递推关系是刻画组合结构的最合适的工具. 如何建立递推关系, 已给的递推关系有何性质, 以及如何求解递推关系等, 是递推关系中的几个基本问题. 本章首先讨论递推关系的建立问题, 然后对一些常见的递推关系做比较深人的讨论, 并给出其解法. 6. 1 递推关系的建立在 4.3.2 小节中讨论集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的错排数 D_n 时, 我们建立了关于 D_n 的递推关系

$$\begin{cases} D_n=(n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}\right) \quad (n \geqslant 3), \\ D_1=0, \quad D_2=1, \end{cases}$$

并由此推出了

$$\begin{cases} D_n=nD_{n-1}+(-1)^n \quad (n \geqslant 2), \\ D_1=0. \end{cases}$$

等式 (6.1.1) 和等式 (6.1.2) 都是递推关系的例子. 等式 (6.1.1) 给出了 n 元错排数 D_n 同 $n-1$ 元错排数及 $n-2$ 元错排数 D_{n-2} 之间的关系, 这样, 由初值 D_1 和 D_2 就可以计算出 D_3, 由 D_2 和 D_3 又可以计算出 D_4, 如此可以逐个计算出错排数序列 $D_1,D_2,D_3,\cdots$. 而等式 (6.1.2) 给出了 n 元错排数 D_n 同 $n-1$ 元错排数 D_{n-1} 之间的关系, 这样由初始值 D_1 就唯一地确定了错排数序列.

定义 6.1.1 给定一个数的序列 $H(0),H(1),\cdots,H(n),\cdots$. 若存在整数 n_0, 使当 $n \geqslant n_0$ 时,可以用等号 (或大于号,小于号) 将 $H(n)$ 与其前面的某些项 $H(i)$ $(0 \leqslant i < n)$ 联系起来, 这样的式子就叫作递推关系. 下面通过几个例子来看看如何建立递推关系, 至于递推关系的求解,将在后面的几节中讨论. 例 1 (Hanoi 塔问题) 现有 A,B,C 三根立柱以及 n 个大小不等的中空圆盘, 这些圆盘自小到大套在 A 柱上形成塔形, 如图 6. 1.1 所示. 要把 n 个圆盘从 A 柱上搬到 C 柱上,并保持原来的顺序不变, 要求每次只能从一根立柱上拿下一个圆盘放在另一根立柱上,且不允许大盘压在小盘上. 问至少要搬多少次? 图 6.1.1 解记 $f(n)$ 为 n 个圆盘从 A 柱搬到 C 柱所需的最小次数. 整个搬动过程可以人分成三个阶段: (1) 将套在 A 柱上面的 $n-1$ 个圆盘从 A 柱按要求搬到 B 柱,搬动次数为 $f(n-1)$; （2）把 A 柱上最下面的那个圆盘搬到 C 柱上,搬动次数为 1 ; （3）把 B 柱上的 $n-1$ 个圆盘按要求搬到 C 柱上, 搬动次数为 $f(n-1)$. 由加法原则知

$$f(n)=2f(n-1)+1,$$

又显然 $f(1)=1$, 所以有如下带有初值的递推关系

$$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+1, \\ f(1)=1. \end{cases}$$

例 2 在信道上传输由 a,b,c 三个字母组成的长为 n 的字符串, 若字符串中有两个 a 连续出现, 则信道就不能传输. 令 $f(n)$ 表示信道可以传输的长为 n 的字符串的个数, 求 $f(n)$ 满足的递推关系. 解信道上能够传输的长度为 $n(n \geqslant 2)$ 的字符串可分成如下四类: (1) 最左字符为 b; (2) 最左字

符为 c; (3) 最左两个字符为 ab; (4) 最左两个字符为 ac. 如图 6.1.2 所示, 前两类字符串分别有 $f(n-1)$ 个, 后两类字符串分别有 $f(n-2)$ 个. 容易求出 $f(1)=3, f(2)=8$, 从而得到

$$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+2f(n-2) \quad (n \geqslant 3), \\ f(1)=3, \quad f(2)=8. \end{cases}$$

图 6.1.2 例 3 考虑 0,1 字符串中" 010 " 子串的相继出现问题.例如, 在 110101010101 中, 我们说"010" 在第 5 位和第 9 位出现, 而不是在第 7 位和第 11 位出现, 在整个字符串中" 010 " 共出现两次. 计算 n 位 0,1 字符串中" 010 " 子串在第 n 位出现的字符串有多少? 解设" 010 " 子串在第 n 位出现的长为 n 的 0,1 字符串的个数为 $f(n)$, 则显然 $f(3)=1, f(4)=2, f(5)=3$. 符串有 $f(n)$ 个, 而" 010 " 不在第 n 位出现, 当且仅当最后 5 位形如" 01010 ", 并且

解将所有满足要求的着色方案分成两类 $(n \geqslant 4)$: (1) D_1 与 D_{n-1} 同色. 此时, D_n 有 $k-1$ 种着色方案. 可将 D_1 与 D_{n-2} 看成相邻区域, $D_1, D_2, \cdots, D_{n-2}$ 的着色方案数为 $f(n-2)$. 故此类着色方案数为 $(k-1)$ - $f(n-2)$. (2) D_1 与 D_{n-1} 异色. 此时, D_n 有 $k-2$ 种着色方案. 此时, 可将 D_1 与 D_{n-1} 看成相邻的区域. 又 $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ 用 k 种颜色着色的方案数为 $f(n-1)$, 故此类着色方案数为 $(k-2) f(n-1)$. 而容易求得 $f(2)=k(k-1), f(3)=k(k-1)(k-2)$, 从而有

$$\begin{cases} f(n)=(k-1) f(n-2)+(k-2) f(n-1) \quad (n \geqslant 4), \\ f(2)=k(k-1), \quad f(3)=k(k-1)(k-2). \end{cases}$$

例 5 设 X 是一具有乘法运算的代数系统,乘法不满足结合律,用 xy 表示 x 对 y 之积. 如果

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X,$$

而且这 n 个元素依上面列出的顺序所能作出的一切可能的积彼此不同, 其个数记为 $f(n)$, 求 $f(n)$ 满足的递推关系. 解例如, 对于 $x_1, x_2, x_3 \in X$, 符合题意的积有 2 个:

$$\left(x_1 x_2\right) x_3, \quad x_1\left(x_2 x_3\right),$$

所以 $f(3)=2$. 如果在 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的某些字母间加上括号, 但不改变字母间的相互位置关系, 使得这 n 个字母间的乘法可以按所加括号指明的运算方式进行运算,那么 $f(n)$ 就是加括号的方法的个数. 最外层的两对括号形如

$$\left(x_1 \cdots x_r\right)\left(x_{r+1} \cdots x_n\right) \quad (1 \leqslant r \leqslant n-1),$$

当 $r=1$ 或 $n-1$ 时,通常简记为

$$x_1\left(x_2 \cdots x_n\right)=\left(x_1\right)\left(x_2 \cdots x_n\right),$$
$$\left(x_1 \cdots x_{n-1}\right) x_n=\left(x_1 \cdots x_{n-1}\right)\left(x_n\right).$$

在前一个括号中有 $f(r)$ 种加括号的方法, 在后一个括号中又有 $f(n-r)$ 种加括号的方法, 当 r 遍

历 $1,2,\cdots,n-1$ 时, 就得到

$$\begin{aligned} f(n) =& f(1)f(n-1)+f(2)f(n-2)+\cdots \\ &+f(n-2)f(2)+f(n-1)f(1) \\ =&\sum_{i=1}^{n-1} f(i)f(n-i) \quad (n>1). \end{aligned}$$

初始值为

$$f(1)=1, \quad f(2)=1$$

6. 2 常系数线性齐次递推关系的求解定义 6.2.1 设 k 是给定的正整数, 若数列 $f(0), f(1), \cdots, f(n), \cdots$ 的相邻 $k+1$ 项间满足关系

$$f(n)=c_1(n)f(n-1)+c_2(n)f(n-2)+\cdots$$

$$+c_k(n)f(n-k)+g(n),$$

对 $n \geqslant k$ 成立, 其中 $c_k(n) \neq 0$, 则称该关系为 $\{f(n)\}$ 的 k 阶线性递推关系. 如果 $c_1(n), c_2(n), \cdots, c_k(n)$ 都是常数, 则称之为 k 阶常系数线性递推关系. 如果 $g(n)=0$, 则称之为齐次的. 如果有一个数列代人递推关系 (6.2.1), 使得其对任何 $n \geqslant k$ 都成立, 则称这个数列是递推关系 (6.2.1) 的解. 常系数线性齐次递推关系的一般形式为

$$f(n)=c_1 f(n-1)+c_2 f(n-2)+\cdots$$

$$+c_k f(n-k) \quad (n \geqslant k, c_k \neq 0).$$

定义 6.2.2 方程

$$x^k-c_1 x^{k-1}-c_2 x^{k-2}-\cdots-c_k=0$$

叫作递推关系 (6.2.2) 的特征方程. 它的 k 个根 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ (可能有重根) 叫作该递推关系的特征根, 其中, $q_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是复数. 引理 6.2.1 设 q 是非零复数, 则 $f(n)=q^n$ 是递推关系 (6.2.2) 的解, 当且仅当 q 是它的特征根. 证明设 $f(n)=q^n$ 是递推关系 (6.2.2) 的解, 即

$$q^n=c_1 q^{n-1}+c_2 q^{n-2}+\cdots+c_k q^{n-k} \quad (n \geqslant k).$$

因为 $q \neq 0$, 所以

$$q^k=c_1 q^{k-1}+c_2 q^{k-2}+\cdots+c_k,$$

即 q 是递推关系 (6.2.2) 的特征根. 反之亦然. 引理 6.2.2 如果 $h_1(n), h_2(n)$ 都是递推关系 (6.2.2) 的解, b_1, b_2 是常数, 则 $b_1 h_1(n)+b_2 h_2(n)$ 也是递推关系 (6.2.2) 的解. 证明因为 $h_1(n), h_2(n)$ 都是递推关系 (6.2.2) 的解, 所以

$$b_1 h_1(n)+b_2 h_2(n)=b_1\left[c_1 h_1(n-1)+\cdots+c_k h_1(n-k)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+b_2\left[c_1h_2(n-1)+\cdots+c_kh_2(n-k)\right]\\
=&c_1\left[b_1h_1(n-1)+b_2h_2(n-1)\right]+\cdots\\
&+c_k\left[b_1h_1(n-k)+b_2h_2(n-k)\right],
\end{aligned}
$$

从而 $b_1h_1(n)+b_2h_2(n)$ 也是递推关系 (6.2.2) 的解. 由引理 6.2.1 和引理 6.2.2 知, 若 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 是递推关系 (6.2.2) 的特征根, $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 是常数,那么

$$f(n)=b_1{q_1}^n+b_2{q_2}^n+\cdots+b_k{q_k}^n$$

也是递推关系 (6.2.2) 的解. 定义 6.2.3 如果对于递推关系 (6.2.2) 的每个解 $h(n)$, 都可以选择一组常数 ${c_1}',{c_2}',\cdots,{c_k}'$, 使得

$$h(n)={c_1}'{q_1}^n+{c_2}'{q_2}^n+\cdots+{c_k}'{q_k}^n$$

成立, 则称 $b_1{q_1}^n+b_2{q_2}^n+\cdots+b_k{q_k}^n$ 是递推关系 (6.2.2) 的通解, 其中, $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 为任意常数. 定理 6.2.1 设 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 是递推关系 (6.2.2) 的 k 个互不相等的特征根, 则

$$f(n)=b_1{q_1}^n+b_2{q_2}^n+\cdots+b_k{q_k}^n$$

是递推关系 (6.2.2) 的通解. 证明由前面的分析可知, 对任意一组 $b_1,b_2,\cdots,b_k,f(n)$ 是递推关系 (6.2.2) 的解. 下面证明: 递推关系 (6.2.2) 的任意一个解 $h(n)$ 都可以表示成 (6.2.4) 的形式. $h(n)$ 是 (6.2.2) 的解, 故 $h(n)$ 由 k 个初值 $h(0)=a_0,h(1)=a_1,\cdots,h(k-1)=a_{k-1}$ 唯一地确定. 若 $h(n)$ 可以表示成式(6.2.4) 的形式, 则有

$$
\begin{cases}
b_1+b_2+\cdots+b_k=a_0,\\
b_1q_1+b_2q_2+\cdots+b_kq_k=a_1,\\
\cdots,\\
b_1{q_1}^{k-1}+b_2{q_2}^{k-1}+\cdots+b_k{q_k}^{k-1}=a_{k-1}.
\end{cases}
$$

如果方程组 (6.2.5) 有唯一解 ${b_1}',{b_2}',\cdots,{b_k}'$, 这说明可以找到 k 个常数 ${b_1}',{b_2}',\cdots,{b_k}'$, 使得

$$h(n)={b_1}'{q_1}^n+{b_2}'{q_2}^n+\cdots+{b_k}'{q_k}^n$$

成立, 从而 $b_1{q_1}^n+b_2{q_2}^n+\cdots+b_k{q_k}^n$ 是该递推关系的通解. 考察方程组 (6.2.5), 它的系数行列式为

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1\\
q_1 & q_2 & \cdots & q_k\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
{q_1}^{k-1} & {q_2}^{k-1} & \cdots & {q_k}^{k-1}
\end{vmatrix}
=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(q_j-q_i)
$$

这是著名的 Vandermonde 行列式. 因为 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 互不相等, 所以该行列式不等于零,这也就是说方程组 (6.2.5) 有唯一解. 所以, $h(n)$ 可以表示成式 (6.2.4) 的形式. 故式 (6.2.4) 是递推关系

(6.2.2) 的通解. 例 1 求解 6.1 节例 2 中的递推关系

$$\begin{cases} f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2), \\ f(1) = 3, \quad f(2) = 8. \end{cases}$$

解先求这个递推关系的通解. 它的特征方程为解这个方程,得

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

所以，通解为

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

$f(n) = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n$. c_2 ，得

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 3, \\ c_1(1+\sqrt{3})^2 + c_2(1-\sqrt{3})^2 = 8. \end{cases}$$

求解这个方程组, 得

$$c_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

因此, 所求的字符串个数为

$$f(n) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

例 2 核反应堆中有 α 和 β 两种粒子,每秒钟内一个 α 粒子可反应产生三个 β 粒子,而一个 β 粒子又可反应产生一个 α 粒子和两个 β 粒子. 若在时刻 $t = 0$ 时反应堆中只有一个 α 粒子, 问 $t = 100$ 秒时反应堆中将有多少个 α 粒子?多少个 β 粒子? 共有多少个粒子? 解设在 t 时刻的 α 粒子数为 $f(t)$,β 粒子数为 $g(t)$, 根据题设,可以列出下面的递推关系

$$\begin{cases} g(t) = 3f(t-1) + 2g(t-1) \quad (t \geqslant 1) \\ f(t) = g(t-1) \quad (t \geqslant 1) \\ g(0) = 0, \quad f(0) = 1 \end{cases}$$

由式(6.2.7) 得到 $f(t-1) = g(t-2)$,

$$\begin{cases} g(t) = 3g(t-2) + 2g(t-1) \quad (t \geqslant 2), \\ g(0) = 0, \quad g(1) = 3. \end{cases}$$

递推关系 (6.2.8) 的特征方程为其特征根为

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

所以,该递推关系的通解为

$$g(t) = c_1 \cdot 3^t + c_2 \cdot (-1)^t.$$

代人初值 $g(0)=0, g(1)=3$, 得

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ 3c_1-c_2=3. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$c_1=\frac{3}{4}, \quad c_2=-\frac{3}{4}.$$

所以，该递推关系的解为

$$g(t)=\frac{3}{4}\cdot 3^t-\frac{3}{4}\cdot(-1)^t.$$

从而求得

$$\begin{aligned} f(t)=g(t-1)&=\frac{3}{4}\cdot 3^{t-1}-\frac{3}{4}\cdot(-1)^{t-1}, \\ f(t)+g(t)&=\frac{3}{4}\cdot 3^{t-1}-\frac{3}{4}\cdot(-1)^{t-1}+\frac{3}{4}\cdot 3^t-\frac{3}{4}\cdot(-1)^t=3^t. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f(100)&=\frac{3}{4}\cdot 3^{99}-\frac{3}{4}\cdot(-1)^{99} \\ &=\frac{3}{4}\left(3^{99}+1\right), \\ g(100)&=\frac{3}{4}\cdot 3^{100}-\frac{3}{4}\cdot(-1)^{100}=\frac{3}{4}\left(3^{100}-1\right), \end{aligned}$$

故

$$f(100)+g(100)=3^{100}.$$

对于 k 阶常系数线性齐次递推关系, 当特征根 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 互不相等时, 我们已经给出了求通解的方法. 但是, 当 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中有重根时, 这种方法就不再适用, 换句话说, $c_1{q_1}^n+c_2{q_2}^n+\cdots+c_k{q_k}^n$ 就不再是原递推关系的通解. 请看下面的例子. 例 3 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n)=4f(n-1)-4f(n-2), \\ f(0)=1, \quad f(1)=3. \end{cases}$$

解递推关系 (6.2.9) 的特征方程为其特征根为

$$x^2-4x+4=0,$$

$x_1=x_2=2$. 生特根为由引理 6. 2.1, 可知 2^n 是递推关系 (6.2.9) 的解(不考虑初值). 我们不妨试试 $n2^n$, 把它代人式 (6.2.9), 得

$$\begin{aligned} n2^n-4(n-1)2^{n-1}+4(n-2)2^{n-2}&=n2^n-(n-1)2^{n+1}+(n-2)2^n \\ &=2^n[n-2(n-1)+(n-2)] \\ &=0, \end{aligned}$$

这说明 $n2^n$ 也是递推关系 (6.2.9) 的解. 易知 $n2^n$ 与 2^n 线性无关, 所以原递推关系的通解为代人初值 $f(0)=1, f(1)=3$, 得

$$\begin{cases} c_1=1, \\ 2c_1+2c_2=3. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

所以,原递推关系的解为

$$f(n) = 2^n + 2^{n-1}n.$$

下面分析, 当特征根有重根时, 常系数线性齐次递推关系 (6.2.2) 的通解的一般形式. 设递推关系

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \cdots + c_k f(n-k) \quad (n \geqslant k, c_k \neq 0)$$

的特征方程为

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0.$$

令

$$\begin{aligned} P(\cdot x) &= x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k, \\ P_n(x) &= x^{n-k} \cdot P(x) \\ &= x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_k x^{n-k}. \end{aligned}$$

如果 q 是 $P(x) = 0$ 的二重根, 则 q 也是 $P_n(x) = 0$ 的二重根, 那么 q 是 $P_n{}'(x) = 0$ 的根. 其中, $P_n{}'(x)$ 是 $P_n(x)$ 的微商, 即

$$P_n{}'(x) = nx^{n-1} - c_1(n-1)x^{n-2} - c_2(n-2)x^{n-3}$$

因此, q 是 $xP_n'(x) = 0$ 的根. 而

$$\begin{aligned} xP_n{}'(x) =& nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - c_2(n-2)x^{n-2} \\ & - \cdots - c_k(n-k)x^{n-k}, \end{aligned}$$

代人 $x = q$, 得

$$nq^n - c_1(n-1)q^{n-1} - c_2(n-2)q^{n-2} - \cdots - c_k(n-k)q^{n-k} = 0.$$

这说明 nq^n 是原递推关系的解. 类似地可以证明, 如果 q 是 $P(x) = 0$ 的三重根, 那么 q 就是 $xP_n{}'(x) = 0$ 的二重根, 即 q 是 $xP_n{}'(x) = 0$ 和 $x\left[xP_n{}'(x)\right]' = 0$ 的根, 从而证明 nq^n, n^2q^n 也是原递推关系的解. 一般地, 可以证明以下的结论: 如果 q 是 $P(x) = 0$ 的 e 重根, 则 $q^n, nq^n, n^2q^n, \cdots, n^{c-1}q^n$ 都是原递推关系的解. 定理 6.2.2 设 $q_1, q_2, \cdots, q_{\mathrm{t}}$ 是递推关系 (6.2.2) 的全部不同的特征根, 其重数分别为 $e_1, e_2, \cdots, e_t\ (e_1 + e_2 + \cdots + e_t = k)$, 那么递推关系 (6.2.2) 的通解为

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_1(n),$$

其中

$$f_i(n) = \left(b_{i_1} + b_{i_2}n + \cdots + b_{i_c}n^{e^e - 1}\right) \cdot q_i{}^n \quad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

证明由前面的讨论知

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_t(n)$$

是递推关系 (6.2.2) 的解. 再由初值 $f(0)=a_0, f(1)=a_1, \cdots, f(k-1)=a_k$, 得到关于 b_{ij} , $1 \leqslant i \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant e_i$) 的线性方程组,其系数行列式的值为 (证明略)

$$\prod_{i=1}^{t} (-q_i)^{\binom{e_i}{i}} \prod_{1 \leqslant i < j < t} (q_j - q_i)^{e_i \cdot e_i} \neq 0,$$

故可由初值唯一地确定 b_i, 这说明递推关系 (6.2.2) 的任意解均可写成

$$f(n) = \sum_{i=1}^{t} f_i(n)$$

的形式,其中, $f_i(n)$ 如前所示. 例 4 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n) = -f(n-1) + 3f(n-2) + 5f(n-3) + 2f(n-4), \\ f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2. \end{cases}$$

解该递推关系的特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

其特征根为

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, \quad x_4 = 2.$$

由定理 6.2.2, 对应于 $x = -1$ 的解为

$$f_1(n) = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2 (-1)^n,$$

对应于 $x = 2$ 的解为

$$f_2(n) = c_4 2^n.$$

因此,递推关系的通解为

$$\begin{aligned} f(n) &= f_1(n) + f_2(n) \\ &= c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2 (-1)^n + c_4 2^n. \end{aligned}$$

代人初始值,得到方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1, \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1, \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2, \end{cases}$$

解这个方程组,得

$$c_1 = \frac{7}{9}, \quad c_2 = -\frac{1}{3}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{2}{9}.$$

所以,原递推关系的解为

$$f(n) = (-1)^n \frac{7}{9} - (-1)^n \frac{1}{3} n + \frac{2}{9} \cdot 2^n.$$

6.3 常系数线性非齐次递推关系的求解 k 阶常系数线性非齐次递推关系的一般形式为

$$f(n)=c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+\cdots+c_kf(n-k)+g(n)\quad(n\geqslant k),$$

其中, $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为常数, $c_k\neq 0, g(n)\neq 0$. 递推关系 (6.3.1) 对应的齐次递推关系为

$$f(n)=c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+\cdots+c_kf(n-k).\quad(6.3.2)$$

定理 6.3.1 k 阶常系数线性非齐次递推关系 (6.3.1) 的通解是递推关系 (6.3.1) 的特解加上其相应的齐次递推关系 (6.3.2) 的通解. 证明设 $f'(n)$ 是递推关系 (6.3.1) 的特解, $f''(n)$ 是递推关系 (6.3.2) 的解, 则

$$\begin{aligned}f'(n)+f''(n)=&[c_1f'(n-1)+c_2f'(n-2)+\cdots\\&+c_kf'(n-k)+g(n)]\\&+[c_1f''(n-1)+c_2f''(n-2)+\cdots+c_kf''(n-k)]\\=&c_1[f'(n-1)+f''(n-1)]+\cdots\\&+c_k[f'(n-k)+f''(n-k)]+g(n).\end{aligned}$$

所以, $f'(n)+f''(n)$ 是递推关系 (6.3.1) 的解. 反之, 任给递推关系 (6.3.1) 的一个解 $f(n)$, 与上类似, 可以证明 $f(n)-f'(n)$ 是递推关系 (6.3.2) 的解. 而 $f(n)=[f(n)-f'(n)]+f'(n)$, 所以 $f(n)$ 可以表示成 $f'(n)$ 与递推关系 (6.3.2) 的解之和. 综合以上分析, 定理成立. 对于一般的 $g(n)$, k 阶常系数线性非齐次递推关系 (6.3.1) 没有普遍的解法, 只有在某些简单的情况下, 可以用待定系数法求出递推关系 (6.3.1) 的特解. 表 6.3.1 对于几种 $g(n)$ 给出了递推关系 (6.3.1) 的特解 $f'(n)$ 的一般形式. 在 6.5 节, 我们将用生成函数的方法证明表 6.3.1 中特解的正确性. 表 6.3.1

$g(n)$	特征多项式 $P(x)$	特解 $f'(n)$ 的一般形式
β^n	$P(\beta)\neq 0$	$a\beta^n$
	β 是 $P(x)=0$ 的 m 重根	$an^m\beta^n$
n^s	$P(1)\neq 0$	$b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+\cdots+b_1n+b_0$
	1 是 $P(x)=0$ 的 m 重根	$n^m\left(b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+\cdots+b_1n+b_0\right)$
$n^s\beta^n$	$P(\beta)\neq 0$	$\left(b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+\cdots+b_1n+b_0\right)\beta^n$
	β 是 $P(x)=0$ 的 m 重根	$n^m\left(b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+\cdots+b_1n+b_0\right)\beta^n$

例 1 求解递推关系

$$\begin{cases}f(n)=2f(n-1)+4^{n-1},\\ f(0)=1.\end{cases}$$

解因为 4 不是特征方程的根, 所以该递推关系的非齐次特解为 $4^{n-1}a$. 将其代人递推关系, 得比较等式两边 4^{n-1} 的系数, 得

$$a=\frac{1}{2}a+1,$$

从而而相应齐次递推关系的通解为 $2^n c$, 由定理 6.3.1 知, 非齐次递推关系的通解为由初值 $f(0)=1$, 得

$$f(n)=2^n c+4^{n-1}\cdot 2.$$

$$2^0 c+4^{0-1}\cdot 2=1,$$

从而

$$c=\frac{1}{2},$$

故

$$f(n)=\frac{1}{2}\left(2^n+4^n\right).$$

从例 1 可以看出, 求解常系数线性非齐次递推关系的基本步联是: 首先用待定系数法通过递推关系 (不带初值) 求出特解, 然后用常系数线性齐次递推关系的通解与初值解出递推关系的解. 例 2 求和 $1^4+2^4+\cdots+n^4$. 解令

$$f(n)=1^4+2^4+\cdots+n^4,$$

它满足递推关系

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+n^4, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

因为 1 是特征方程的一重根, 所以该递推关系的特解为

$$n\left(b_4 n^4+b_3 n^3+b_2 n^2+b_1 n+b_0\right).$$

将其代人递推关系, 并比较等号两边 $n^i(0\leqslant i\leqslant 4)$ 的系数, 得到

$$\begin{cases} -5b_4+b_3+1=b_3, \\ 10b_4-4b_3+b_2=b_2, \\ -10b_4+6b_3-3b_2+b_1=b_1, \\ 5b_4-4b_3+3b_2+2b_1+b_0=b_0, \\ -b_4+b_3-b_2+b_1-b_0=0. \end{cases}$$

解得

$$b_0=\frac{1}{30}, b_1=0, b_2=\frac{1}{3}, b_3=\frac{1}{2}, b_4=\frac{1}{5},$$

即非齐次特解为

$$f'(n)=\frac{n}{30}\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right).$$

而相应齐次递推关系的通解为由定理 6.3.1 知, 非齐次通解为

$$\begin{aligned} f(n)&=f'(n)+f''(n) \\ &=c+\frac{n}{30}\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right). \end{aligned}$$

又由 $f(0)=0$ 可求得 $c=0$, 故

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n}{30}\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right) \\ &= \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right). \end{aligned}$$

例 3 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n)-4f(n-1)+4f(n-2)=n\cdot 2^n, \\ f(0)=0, \quad f(1)=1. \end{cases}$$

解由于 2 是特征方程的二重根, 所以该递推关系的特解为

$$f'(n)=n^2\left(b_1 n+b_0\right)\cdot 2^n.$$

将它代人递推关系, 并比较等号两边 n 的系数及常数项,得到

$$\begin{cases} 6b_1=1, \\ -6b_1+2b_0=0, \end{cases}$$

解得

$$b_0=\frac{1}{2}, \quad b_1=\frac{1}{6}.$$

而相应齐次递推关系的通解为 $(c_0+c_1 n)\cdot 2^n$, 从而非齐次递推关系的通解为

$$f(n)=\left[(c_0+c_1 n)+n^2\left(\frac{n}{6}+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 2^n.$$

再由初值 $f(0)=0, f(1)=1$, 求得 $c_0=0, c_1=-\frac{1}{6}$.于是

$$f(n)=\frac{1}{6}\left(n^3+3n^2-n\right)\cdot 2^n.$$

例 4 求解 Hanoi 塔问题满足的递推关系

$$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+1, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

解相应的特征方程为 $x=2$, 故齐次通解为 $2^n c$. 设非齐次特解为 b, 代人原递推关系, 得

$$b-2b=1,$$

所以特解为 $b=-1$. 根据前面的分析, 可知该递推关系的通解为 $f(n)=2^n c-1$.

$$f(n)=2^n-1.$$

6.4 用迭代归纳法求解递推关系迭代归纳法也是求解递推关系的一种方法, 尤其对于某些非线性的递推关系, 不存在求解的一般性方法和公式, 不妨用这种方法来试一试. 下面通过几个例子来说明.

例 1 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+n^3, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

解先用迭代法求解该递推关系, 得

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1)+n^3 \\
&= f(n-2)+(n-1)^3+n^3 \\
&= \cdots \\
&= f(1)+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 \\
&= f(0)+1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 \\
&= 1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3.
\end{aligned}
$$

能否找到 $f(n)$ 的一个简单表达式呢?为此,我们考察该数列的前 5 项,得

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 = 0^2 \\
f(1) &= 1^3 = 1 = 1^2 \\
f(2) &= 1^3+2^3 = 9 = 3^2 \\
&= (1+2)^2, \\
f(3) &= 1^3+2^3+3^3 = 36 = 6^2 \\
&= (1+2+3)^2 \\
f(4) &= 1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = 10^2 \\
&= (1+2+3+4)^2
\end{aligned}
$$

由此,我们得出 $f(n)$ 的前 5 项满足

$$
\begin{aligned}
f(n) &= (0+1+\cdots+n)^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

要证明上式的确是原递推关系的解,我们用归纳法. 当 $n=0$ 时, $f(0)=0$,上式成立. 假设 $n=k$ 时上式成立, 即

$$
f(k) = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2,
$$

则由递推关系, 有

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= f(k)+(k+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.
\end{aligned}
$$

故由归纳法知

$$
f(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
$$

是原递推关系的解. 迭代法并不仅仅局限于如例 1 所示的直接导出 $f(n)$ 的表达式. 利用迭代法, 还可以先将原递推关系化简, 然后再求解. 下面介绍解递推关系常用的几个技巧. 1. 将非齐次递

推关系齐次化例 2 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n) = 2f(n-1) + 4^{n-1} \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

解由递推关系 (6.4.1) 可以得到

$$f(n-1) = 2f(n-2) + 4^{n-2},$$

将上式乘以 -4 后再与式 (6.4.1) 相加, 得

$$f(n) = 6f(n-1) - 8f(n-2).$$

如此我们得到了二阶齐次递推关系 (6.4.2), 它需要两个初值才能确定解. 将 $f(1) = 3$ 代人递推关系 (6.4.1), 得所以有

$$f(2) = 2f(1) + 4^{2-1} = 10.$$

$$\begin{cases} f(n) = 6f(n-1) - 8f(n-2), \\ f(1) = 3, \quad f(2) = 10. \end{cases}$$

它的特征方程为

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

解得两个特征根为于是, 通解为

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4,$$

$$f(n) = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n.$$

由初值 $f(1) = 3, f(2) = 10$, 求得 $A = B = \frac{1}{2}$. 故

$$f(n) = \frac{1}{2}\left(2^n + 4^n\right).$$

2. 将变系数的一阶线性递推关系化为常系数线性递推关系例 3 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n) = \frac{n+1}{2n} f(n-1) + 1, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

解令

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n}{2(n-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2 \cdot 1} \cdot h(n) \\ &= \frac{n+1}{2^n} h(n), \end{aligned}$$

代人上述递推关系并化简, 即得到关于 $h(n)$ 的递推关系

$$\begin{cases} h(n) = h(n-1) + \frac{2^n}{n+1}, \\ h(0) = 1. \end{cases}$$

解得

$$h(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1},$$

$$f(n)=\frac{n+1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1}.$$

一般地,一阶线性递推关系可以表示成

$$f(n)=c(n)f(n-1)+g(n).$$

令

$$f(n)=c(n)c(n-1)\cdots c(1)h(n),$$

$$(n)=h(n-1)+\frac{g(n)}{c(n)c(n-1)\cdots c(1)},$$

它把变系数化为常系数. 3. 将一阶高次递推关系通过变量代换化为一阶线性递推关系例 4 求解递推关系

$$\begin{cases} f(n)=3f^2(n-1),\\ f(0)=1. \end{cases}$$

解对递推关系 (6.4.3) 两边取自然对数, 得

$$\ln f(n)=\ln 3+2\ln f(n-1).$$

令 $h(n)=\ln f(n)$, 得

$$\begin{cases} h(n)=2h(n-1)+\ln 3,\\ h(0)=0 \end{cases}$$

解得

$$h(n)=(2^n-1)\ln 3,$$

从而

$$f(n)=3^{3^n-1}$$

$$\begin{cases} f(n)=4f(n-1)-4f(n-2) \quad (n\geqslant 2)\\ f(0)=0, \quad f(1)=1. \end{cases}$$

解令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n,$$

则有

$$
\begin{aligned}
A(x)-f(0)-f(1)x &= \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} [4f(n-1)-4f(n-2)]x^n \\
&= 4x\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n - 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n \\
&= 4x\cdot[A(x)-f(0)]-4x^2A(x).
\end{aligned}
$$

将 $f(0)=0, f(1)=1$ 代人上式并整理, 得

$$
A(x)=\frac{x}{4x^2-4x+1}=\frac{x}{(1-2x)^2}.
$$

设

$$
A(x)=\frac{C_1}{1-2x}+\frac{C_2}{(1-2x)^2},
$$

其中, C_1, C_2 为待定系数. 通过比较等式两边分子的常数项与 1 次项系数, 可得

$$
\begin{cases}
C_1+C_2=0, \\
-2\cdot C_1=1,
\end{cases}
$$

所以, $C_1=-\frac{1}{2}, C_2=\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-2x)^2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix}\cdot 2^n\cdot x^n.
\end{aligned}
$$

故

$$
f(n)=-\frac{1}{2}\cdot 2^n+\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot 2^n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2^n.
$$