高等代数第五章练习题

一. 填空题:

1. 二次型 $X^T\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}X$ 的矩阵为_______________,二次型 X^TAX 的矩阵为______________.

2. 写出 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-3\\0&-3&-2\end{pmatrix}$ 所决定的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=$_________________________.

3. 非零二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵是________________,秩为_________________.

4. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2$ 的秩为___________________.

5. n 阶实对称矩阵按合同分类有_______________类,n 阶复对称矩阵按合同分类有____________类.

6. (1) t 取何值_________________时,实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2tx_1x_2+2tx_1x_3$ 正定.

(2) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定,t 满足条件___________.

(3) t 满足条件__________________时,二次型 $tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 负定.

7. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$ 的正惯性指数为______,负惯性指数为______,符号差为_____.

8. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$ 的规范形为____________________,其符号差为______.

9. 复二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_8\right)=x_1x_2+x_3x_4-2x_5x_6-2x_7x_8$ 的规范形是_________________.

10. n 元正定二次型 X^TAX 的正惯性指数为________,负惯性指数为________,符号差为________.

11. 实二次型 $f(X)=-X^TX$ 的符号差为________________.

12. 秩为 n 的 n 元实二次型 $f(X)$ 与 $-f(X)$ 合同,则 $f(X)$ 的正惯性指数为_________.

13. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$ 是否正定____________.

14. 设 $A=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-3&2\\0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$, A,B,C 中合同的是___________.

15. 设 n 阶正定阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$,其中 A_1 为 m 阶方阵, A_1,A_2,A_3,A_4 中哪些正定______________.

16. 设 A 是 n 阶实对称阵,若 A 正定, A^{-1},A^*,A^m 中哪些正定__________________.

17. 两个 n 阶实对称阵 A,B 合同的充要条件是____________________________.

18. 只与自身合同的矩阵是________________________.

19. 实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&7&1\\1&1&8\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&3&-\frac{3}{2}\\2&-\frac{3}{2}&-4\end{pmatrix}$中与单位阵合同的有_____.

20. 设n阶阵$A=\left(a_{ij}\right)_n$,则二次型 X^TAX 中交叉项 x_ix_j 的系数为________________.

21. 设A是n级实对称矩阵, 写出A是正定矩阵的三个充要条件

i) _______________ ii) _________________ iii) ______________________.

22. 设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$,当

$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足____________条件时,二次型f为正定二次型.

23. 实对角矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_{m+n}\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}E_m&0\\0&-E_n\end{pmatrix}$合同的充要条件是______________.

二. 计算题:

1. 用配方法求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+3x_2x_3+4x_1x_3$的标准形和规范形.

2. 给出实对称阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$,求可逆阵$C$和对角阵$D$,使得$C^TAC=D$(将$A$合同对角化).

3. 用非退化线性替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 为标准形.

4. 用非退化线性替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$为标准形.

5. 用非退化线性替换化实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3+x_3^2$ 为规范形.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&7&1\\1&1&8\end{pmatrix}$, 问$A$是否正定,若正定,求一矩阵$C$,使得$A=C^TC$.

7. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{pmatrix}$,其中$a_1\neq 0$,写出其对应的二次型,并化成标准形.

8. 判断二次型$2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$是否正定.

三. 证明题:

1. 设A是$m\times n$实矩阵,其中$m<n$,证明AA^T正定当且仅当$r(A)=m$(A^TA正定当且仅当$r(A)=n$).

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

(1) 若 A 可逆,证明二次型 f 的矩阵是 A 的伴随阵 A^*.

(2) 若 A 正定,证明二次型 f 也正定.

3. 若实对称阵 A 的主对角线上有一个元素 $a_{ii}<0$,证明 A 不是正定阵.

4. 已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^TAX$ 是半正定,k 为正实数.证明： $kE+A$ 是正定的

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵,秩为 r ,证明:存在秩为 $n-r$ 的对称矩阵 B ,使 $AB=0$.

6. 证明如果方阵 A,B 合同，那么 A,B 有相同的正定性.