天津师范大学考试试题参考答案及评分标准

2019—2020 学年第一学期期末考试试卷（1 卷）

学院： 数学科学学院　　专业：数学与应用数学 信息与计算科学　科目： 高等代数 2-1

一、 **填空题:（每题 3 分, 本大题共 30 分）**

1. 1.
2. $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.
3. $a=-2$.
4. 12.
5. 7.
6. 3.
7. 0.
8. 4.
9. $\lambda\neq 1$.
10. $a=3$.

二、 **计算题:（每小题 10 分, 本大题共 40 分）**

1. 解 计算可得

$f(x)=g(x)(x+1)+x^2+3x+2$， ……(1 分)

$g(x)=(x^2+3x+2)(x-2)+(3x+3)$， ……(2 分)

$x^2+3x+2=(3x+3)(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})$. ……(3 分)

故 $3x+3$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，从而 $(f(x),g(x))=x+1$. ……(6 分)

且 $3x+3=g(x)-(x^2+3x+2)(x-2)=g(x)-(f(x)-g(x)(x+1))(x-2)$

$=-(x-2)f(x)+(1+(x+1)(x-2))g(x)=-(x-2)f(x)+(x^2-x-1)g(x)$

故 $(f(x),g(x))=(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})f(x)+(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})g(x)$. ……(10 分)

2. 解 $D_1=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&2&3&4\\1&5&1&2&3\\1&4&5&1&2\\1&3&4&5&1\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\0&-4&1&1&1\\0&1&-4&1&1\\0&1&1&-4&1\\1&3&4&5&1\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\0&-5&0&0&0\\0&0&-5&0&0\\0&0&0&-5&0\\1&3&4&5&1\end{vmatrix}$

$=15\cdot(-1)\cdot(-5)^3=125\cdot 15=1875$. ……(5 分)

第二个行列式按照最后一列展开

$D_2=x(-1)^{n+1}x^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}+yy^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}((-1)^{n+1}x^n+y^n)$.

或 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(x^n+(-1)^{n+1}y^n)$. ……(10 分)

3. 解　若方程组有唯一解，则系数矩阵行列式非零，

系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{pmatrix}$， $|A|=a(b^2-1)$， ……(4 分)

故 $a\neq 0$ 且 $b\neq \pm 1$ 时，方程组有唯一解. ……(6 分)

求解 $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array}\right)$,

则得解为 $x_1=\dfrac{5-b}{a(b+1)}, x_2=\dfrac{-2}{b+1}, x_3=\dfrac{2b-2}{b+1}$. ……(10 分)

4. 解 增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，已为阶梯形， ……(3 分)

导出组系数矩阵的秩为 4，有非零解，其基础解系为

$\eta_1=(1,0,0,-1,1,0,0)^T, \eta_2=(0,1,0,-1,0,1,0)^T, \eta_3=(0,0,1,-1,0,0,1)^T$. ……(6 分)

原方程组的一个特解为 $\gamma_0=(-1,-1,-1,4,0,0,0)^T$， ……(8 分)

则一般解为 $\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数. ……(10 分)

三、 **证明题:（每小题 10 分, 本大题共 30 分）**

1. 证明　$\Rightarrow$. 若 $p(x)$ 不可约，则任给多项式 $f(x)$，假设 $(p(x),f(x))=d(x)$，则 $d(x)\mid p(x)$，故 $d(x)=1$ 或者 $d(x)=cp(x)$.若 $d(x)=1$，则 $(p(x),f(x))=1$；若 $d(x)=cp(x)$，则 $p(x)\mid f(x)$. ……(5 分)

$\Leftarrow$. 假设 $p(x)$ 可约，则 $p(x)$ 可分解成次数比 $p(x)$ 次数低的多项式的乘积，

设 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$，则取 $f(x)=p_1(x)$，则 $(p(x),f(x))=cp_1(x)$，不互素；

同时 $p(x)\nmid f(x)$，与题意矛盾，故假设不成立，$p(x)$ 不可约. ……(10 分)

2. 证明 $\Rightarrow$. 向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，设 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s$，对线性组合

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，有 $\beta=(l_1+k_1)\alpha_1+(l_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(l_s+k_s)\alpha_s$，

由 β 的表示法唯一得 $l_i+k_i=l_i, \forall i=1,2,\cdots,n$，故 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，即

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. ……(5 分)

$\Leftarrow$. 假设表示法不唯一，设 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$，

其中存在 i，使得 $k_i \neq l_i$，有关系式 $(l_1 - k_1)\alpha_1 + (l_2 - k_2)\alpha_2 + \cdots + (l_s - k_s)\alpha_s = 0$，

由 $k_i \neq l_i$，得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，矛盾，故表示法唯一. ……(10 分)

3. 证明 $D_n = \begin{vmatrix} a+(x-a) & a+0 & a+0 & \cdots & a+0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix} + (x-a)D_{n-1} = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1}.$$ ……(4 分)

同理，$D_n = \begin{vmatrix} -a+(x+a) & a & a & \cdots & a \\ -a+0 & x & a & \cdots & a \\ -a+0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a+0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}$. ……(8 分)

则 $\left(x+a\right)D_n = a\left(x+a\right)^n + \left(x^2 - a^2\right)D_{n-1}, \left(x-a\right)D_n = -a\left(x-a\right)^n + \left(x^2 - a^2\right)D_{n-1}$,

两式相减得 $2aD_n = a\left[\left(x+a\right)^n + \left(x-a\right)^n\right]$,

当 $a \neq 0$ 时，$D_n = \dfrac{\left(x+a\right)^n + \left(x-a\right)^n}{2}$,

当 $a = 0$ 时，$D_n = x^n = \dfrac{\left(x+a\right)^n + \left(x-a\right)^n}{2}$. ……(10 分)