月考（行列式）

班级________姓名__________学号____________

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1.若 $91i25k487$ 为偶排列，则 $\underline{i=3,k=6}$.

2. $2n$ 阶排列 $246\cdots(2n)(2n-1)\cdots31$ 的逆序数为 $\underline{n^2}$.

3.设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \\ x & 2 & 6 \end{vmatrix}$，则多项式中 x^2 的系数为 $\underline{0}$.

4.行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\underline{-12}$.

5.设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d$，则

$$\begin{vmatrix} ma_1+na_2+la_3 & mb_1+nb_2+lb_3 & mc_1+nc_2+lc_3 \\ na_2+la_3 & nb_2+lb_3 & nc_2+lc_3 \\ la_3 & lb_3 & lc_3 \end{vmatrix}=\underline{mnld}.$$

6. 已知 $D=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1$，则 $x=\underline{-\dfrac{1}{6}}$.

7.行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}=\underline{0}$.

8.已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2019$，那么 $\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}=\underline{-2019}$.

9.两个排列逆序数的和 $\tau(x_1x_2\cdots x_9x_{10})+\tau(x_{10}x_9\cdots x_2x_1)=\underline{45}$.

二、(20 分)计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ 0 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2b_n & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ b_2 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_2b_n & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_nb_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}+a_2b_2+a_1b_1=\cdots=1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

三、(20 分)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1+\sum_{i=1}^{n} i & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right).$$

四、(20 分)利用克拉默法则解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ x_1+2x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

解 $d=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9, d_1=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-3$，

$d_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6, d_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3$，解为，$(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

五、(20 分)证明

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

其中 $\theta\neq k\pi$（k 为任意整数）.

第二数学归纳法：假设结论对所有小于 n 的自然数都成立，则

$$D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}=2\cos\theta\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin n\theta-\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin n\theta-\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$