第二章：排列与组合（续）

- 基本计数原理
- 集合的排列
- 集合的圆排列

Outline

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \leq n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解： 可按照以下步骤构造符合条件的单词：

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法；
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法；
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$. ∎

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \leq n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解：可按照以下步骤构造符合条件的单词：

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法；
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法；
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$. ∎

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \leq n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解：可按照以下步骤构造符合条件的单词：

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法；
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法；
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$. ∎

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \le n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解： 可按照以下步骤构造符合条件的单词：

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法；
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法；
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$. ∎

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \leq n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解：可按照以下步骤构造符合条件的单词:

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法;
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法;
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$. ∎

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \leq n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解： 可按照以下步骤构造符合条件的单词：

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法；
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法；
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$.

定义 1.1

设S是一个n元集，$r \leq n$. S的一个r元子集称为S的一个r-组合. 用记号$\binom{n}{r}$表示n元集的r-组合的个数.

例 1.2

用26个字母能构造多少个含有3个元音字母5个辅音字母的单词?

解： 可按照以下步骤构造符合条件的单词：

- 确定8个位置中元音字母所占的位置，有$\binom{8}{3}$种方法；
- 依次确定这三个位置上的元音字母，每一个有5种方法. 因此选定位置后，元音字母的确定有5^3种方法；
- 最后确定剩下的5个辅音字母，每一个有21种选择. 故辅音字母的确定有21^5种方法.

由乘法原理可知，符合条件的单词数为$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$. ∎

定理 1.3

对于组合数$\binom{n}{r}$，有：

- 当$r > n$时，$\binom{n}{r} = 0$；
- 对任意非负整数n，

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

- 对任意$0 \le r \le n$，有

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{1}$$

推论 1.4

设$0 \le r \le n$，则

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

证明一（代数证明）：直接用公式(1).

证明二（组合证明）： 令X, Y表示一个n-元集S的所有r-元子集和$(n-r)$-元子集所作成的集族. 令

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$A \mapsto \bar{A}$$

其中$\bar{A}$表示集合A的补集，即$\bar{A} = S \setminus A$. 显然φ是一个一一映射（双射），故$|X| = |Y|$，即

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

推论 1.4

设$0 \le r \le n$，则
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

证明一（代数证明）：直接用公式(1).

证明二（组合证明）： 令X, Y表示一个n-元集S的所有r-元子集和$(n-r)$-元子集所作成的集族. 令

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$A \mapsto \bar{A}$$

其中$\bar{A}$表示集合A的补集，即$\bar{A} = S \setminus A$. 显然φ是一个一一映射（双射），故$|X| = |Y|$，即

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

推论 1.4

设$0 \le r \le n$，则
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

证明一（代数证明）： 直接用公式(1).

证明二（组合证明）： 令X, Y表示一个n-元集S的所有r-元子集和$(n-r)$-元子集所作成的集族. 令

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow Y \\ A &\mapsto \bar{A} \end{aligned}$$

其中$\bar{A}$表示集合A的补集，即$\bar{A} = S \setminus A$. 显然φ是一个一一映射（双射），故$|X| = |Y|$，即
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

定理 1.5

对任意非负整数n，有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

证明：任意给定一个n元集：

$$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}.$$

令X表示S的所有子集所作成的集合。按照子集中元素的个数将X 划分为$n+1$个部分：

$$X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n,$$

其中X_i表示S的所有i-元子集所作成的集合. 则$|X_i|=\binom{n}{i}$。由加法原理知

$$\begin{aligned}|X|&=|X_0|+|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_n|\\&=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}.\end{aligned}$$

另一方面，S的任何一个子集A可以按照如下n个步骤确定：

- 根据$s_1 \in A$或者$s_1 \notin A$，有两种选择；
- 根据$s_2 \in A$或者$s_2 \notin A$，有两种选择；
- $\cdots\cdots$;
- 根据$s_n \in A$或者$s_n \notin A$，仍有两种选择.

由乘法原理可知$|X| = 2^n$.

从而我们有

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

∎

定理1.5的证明方法称为双计数法，即：通过对同一个集合用不同方式计数来证明恒等式的一种方法。

例 1.6

用双计数法证明等式：

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

证明：令X表示集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的所有2-元子集. 则

$$|X|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定理1.5的证明方法称为双计数法，即：通过对同一个集合用不同方式计数来证明恒等式的一种方法。

例 1.6

用双计数法证明等式：

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

证明：令X表示集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的所有2-元子集. 则

$$|X|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定理1.5的证明方法称为双计数法，即：通过对同一个集合用不同方式计数来证明恒等式的一种方法。

例 1.6

用双计数法证明等式：

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

证明：令X表示集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的所有2-元子集. 则

$$|X|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

另一方面，将X按照2-元集的最大元划分为n个部分：

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

其中X_i中每一个2-元集的最大元是i。容易看出，$|X_i| = i - 1$. 因此，由加法原理知

$$\begin{aligned} |X| &= |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n| \\ &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1). \end{aligned}$$

从而

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

∎

Outline

定义 2.1

设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为一个多重集，$S$的元素总个数$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$. S中的$r(r\leq n)$个元素的一个有序摆放称为S的一个r-排列。S的一个n-排列又称为S的一个排列。

例 2.2

$S=\{a,a,b,c,c,c,d,d\}=\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c,2\cdot d\}$是一个8元多重集。它只有四个不同类型的元素$a,b,c,d$，重数依次为$2,1,3,2$。

$$cacd, cacdcd$$

分别是S的一个4排列和一个6排列。而

$$cbdadcac$$

是S的一个排列。

定义 2.1

设$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$为一个多重集，$S$的元素总个数$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$. S中的$r(r\leq n)$个元素的一个有序摆放称为S的一个r-排列。S的一个n-排列又称为S的一个排列。

例 2.2

$S=\{a,a,b,c,c,c,d,d\}=\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c,2\cdot d\}$是一个8元多重集。它只有四个不同类型的元素$a,b,c,d$，重数依次为$2,1,3,2$。

$$cacd,cacdcd$$

分别是S的一个4排列和一个6排列。而

$$cbdadcac$$

是S的一个排列。

定理 2.3

设$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$是一个多重集。对任意非负整数$r$，$S$的$r$-排列的个数为$k^r$.

注：当S中每个元素的重数$\geq r$时，定理2.3仍然成立。

定理 2.3

设$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$是一个多重集。对任意非负整数$r$，$S$的$r$-排列的个数为$k^r$.

注：当S中每个元素的重数$\geq r$时，定理2.3仍然成立。

定理 2.4

设$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$是一个$n$元多重集。则$S$的排列个数为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}\triangleq\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

证明：在S的任一个排列所占据的n个位置中，有$\binom{n}{n_1}$个位置放置a_1，n_2个位置放置a_2，…，n_k个位置放置a_k。由乘法原理知，S的排列的个数为

$$\binom{n}{n_1}\times\binom{n-n_1}{n_2}\times\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \tag{2}$$

$$\times\cdots\times\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \tag{3}$$

定理 2.4

设$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$是一个$n$元多重集。则$S$的排列个数为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} \triangleq \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

证明: 在S的任一个排列所占据的n个位置中，有$\binom{n}{n_1}$个位置放置a_1，n_2个位置放置a_2，$\ldots$，n_k个位置放置a_k。由乘法原理知，S的排列的个数为

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \tag{2}$$

$$\times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \\
&\quad \times \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \times \cdots \\
&\quad \times \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!} \\
&\quad = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \\
&\times \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \times \cdots \\
&\times \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}
\end{aligned}
$$

■

$\downarrow$

多项式系数
(multinomial coefficient)

定理 2.5

设$n_1, n_2, \ldots, n_k$为正整数，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

(1) 将n个不同的物体放入k个有不同标号的盒子$B_1, B_2, \ldots, B_k$，使得第i个盒子放n_i个物体。有

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

种不同的放法.

(2) 设$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = m$。将这$n$个不同的物体放入$k$个相同的盒子，使得每个盒子含有$m$个物体，有

$$\frac{n!}{k! n_1! n_2! \cdots n_k!} = \frac{n!}{k!(m!)^k}$$

种不同的放法。

定理 2.5

设$n_1, n_2, \ldots, n_k$为正整数，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

(1) 将n个不同的物体放入k个有不同标号的盒子$B_1, B_2, \ldots, B_k$，使得第i个盒子放n_i个物体。有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

种不同的放法.

(2) 设$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = m$。将这$n$个不同的物体放入$k$个相同的盒子，使得每个盒子含有$m$个物体，有

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!} = \frac{n!}{k!(m!)^k}$$

种不同的放法。

证明:

(1) 设$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$表示物体所构成的集合。则符合条件的一种放法相当于S的一列子集$(A_1,A_2,\cdots,A_k)$, 其中$|A_i|=n_i$, $i\neq j$时，$A_i\cap A_j=\emptyset$, 且$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=S$. 令$X$ 表示所有这样的子集列作成的集合，则由乘法原理易知：

$$
\begin{aligned}
|X|=&\binom{n}{n_1}\times\binom{n-n_1}{n_2}\times\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\\
&\times\cdots\times\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}\\
=&\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.
\end{aligned}
$$

(2) 当$n=km$, $n_1=n_2=\cdots=n_k=m$ 且盒子相同时，每一种放法相当于将S 平均划分为k个部分且每个部分m个元素，记Y表示所有这样的划分构成的集合，即

$$\begin{aligned}Y=\{\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}|\ \ |A_i|=m, A_i\cap A_j=\emptyset,\\ i\neq j,\ A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=S\}.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}X=\{(A_1,A_2,\cdots,A_k)|\ \ |A_i|=m, A_i\cap A_j=\emptyset,\\ i\neq j,\ A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=S\}.\end{aligned}$$

由(1)知，

$$X=\frac{n!}{(m!)^k}.$$

令

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$(A_1, A_2, \cdots, A_k) \mapsto \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}.$$

则φ为满射，且对任意的$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \in Y$,

$$|\varphi^{-1}(\{A_1, A_2, \cdots, A_k\})| = k!.$$

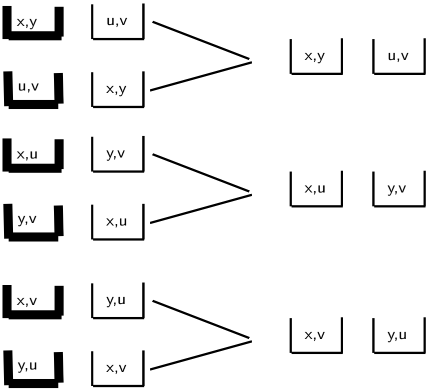
由除法原理知，

$$|Y| = \frac{|X|}{k!} = \frac{n!}{(m!)^k k!}.$$

∎

例 2.6

将不同的四个物体u, v, w, x放入2个盒子，每个盒子放2个。按照(1)的放法，若盒子不同，则有$\frac{4!}{2!2!} = 6$种放法。盒子相同，则只有3种放法。如下图所示。



定理 2.7

将n个不同物体放入k个相同的盒子，使得恰好有m_i个盒子放入i个物体（$1 \leq i \leq n$），其中$m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n$. 不同的放法数为：

$$\frac{n!}{m_1!(1!)^{m_1} m_2!(2!)^{m_2} \cdots m_n!(n!)^{m_n}}.$$

为了给出以上结论的另一个等价表述，我们首先定义集合划分的类型：

定义 2.8

设$\Pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$是集合$S$的一个划分，若多重集

$$\{|B_1|, |B_2|, \ldots, |B_k|\} = \{m_1 \cdot 1, m_2 \cdot 2, \cdots, m_n \cdot n\}$$

则称数列$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 为划分Π的类型。

定理2.8的结论可等价表述为：

定理 2.9

一个n元集S的类型为

$$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$$

的划分个数为

$$\frac{n!}{m_1!(1!)^{m_1} m_2!(2!)^{m_2} \cdots m_n!(n!)^{m_n}}.$$

例 2.10

设$S = \{a, b, c, d, e\}$，将S划分成大小为$1, 2, 2$的三个部分，有多少种方法？

解： 由定理2.9知，共有

$$\frac{5!}{1!(1!)^1 2!(2!)^2} = 15$$

种方法。 ∎

例 2.11

在8×8棋盘上放置8个相同的非攻击型車，共有多少种放法？

解：用(i,j) 表示棋盘上第i行第j列的方格的位置，则8个非攻击型車的位置必为

$$(1,j_1),(2,j_2),(3,j_3),\ldots,(8,j_8),$$

其中$j_1,j_2,\ldots,j_8$互不相同。故$j_1,j_2,\ldots,j_8$是$\{1,2,\ldots,8\}$的一个排列。反过来，如果

$$j_1,j_2,\ldots,j_8$$

是$\{1,2,\ldots,8\}$ 的一个排列，则放在位置

$$(1,j_1),(2,j_2),(3,j_3),\ldots,(8,j_8)$$

上的8个車就是非攻击型的。因此8 个非攻击型車的放法有$8!$个。

例 2.11

在8×8棋盘上放置8个相同的非攻击型車，共有多少种放法？

解： 用(i, j) 表示棋盘上第i行第j列的方格的位置，则8个非攻击型車的位置必为

$$(1, j_1), (2, j_2), (3, j_3), \ldots, (8, j_8),$$

其中$j_1, j_2, \ldots, j_8$互不相同。故$j_1, j_2, \ldots, j_8$是$\{1, 2, \ldots, 8\}$的一个排列。反过来，如果

$$j_1, j_2, \ldots, j_8$$

是$\{1, 2, \ldots, 8\}$ 的一个排列，则放在位置

$$(1, j_1), (2, j_2), (3, j_3), \ldots, (8, j_8)$$

上的8个車就是非攻击型的。因此8 个非攻击型車的放法有$8!$个。 ∎

更一般地，我们有如下结论:

定理 2.12

有k种颜色的n个車，其中第i种颜色有n_i个（这n_i个同颜色的車完全相同）。将这些車放置在$n \times n$棋盘上，使得没有車能互相攻击。总的放置数是

$$n! \times \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{(n!)^2}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

证明：要得到符合条件的放置方法，只需以下两个步骤：

(1) 先在棋盘上选n个位置，使得每行每列都恰好只选了一个位置，一共有$n!$ 种方法；

(2) 确定每一种颜色的車的位置，一共有

更一般地，我们有如下结论:

定理 2.12

有k种颜色的n个車，其中第i种颜色有n_i个（这n_i个同颜色的車完全相同）。将这些車放置在$n \times n$棋盘上，使得没有車能互相攻击。总的放置数是

$$n! \times \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{(n!)^2}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

证明: 要得到符合条件的放置方法，只需以下两个步骤：

(1) 先在棋盘上选n个位置，使得每行每列都恰好只选了一个位置，一共有$n!$ 种方法；

(2) 确定每一种颜色的車的位置, 一共有

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3}$$
$$\times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

种方法。
因此由乘法原理可知，本定理成立。 ∎

多项式系数的几何解释——格路（Lattice Path）：

令$\mathbb{Z}^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$。序列

$$L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

称为$\mathbb{Z}^d$ 中的一条从v_0到v_k的长为k的格路，其中$v_i \in \mathbb{Z}^d$。对任意的$1 \le i \le k$，向量$v_i - v_{i-1} \in \mathbb{Z}^d$称为$L$的步（Step）。

定理 2.13

设$v = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$．则$\mathbb{Z}^d$中从原点$(0, 0, \ldots, 0)$ 到v且每一步取自$\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$的格路共有

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_d}$$

条，其中$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_d$.

多项式系数的几何解释——格路（Lattice Path）：

令$\mathbb{Z}^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$。序列

$$L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

称为$\mathbb{Z}^d$ 中的一条从v_0到v_k的长为k的格路，其中$v_i \in \mathbb{Z}^d$。对任意的$1 \leq i \leq k$，向量$v_i - v_{i-1} \in \mathbb{Z}^d$称为$L$的步（Step）。

定理 2.13

设$v = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. 则$\mathbb{Z}^d$中从原点$(0, 0, \ldots, 0)$ 到v且每一步取自$\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$的格路共有

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_d}$$

条，其中$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_d$.

多项式系数的几何解释——格路（Lattice Path）：

令$\mathbb{Z}^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$。序列

$$L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

称为$\mathbb{Z}^d$ 中的一条从v_0到v_k的长为k的格路，其中$v_i \in \mathbb{Z}^d$。对任意的$1 \leq i \leq k$，向量$v_i - v_{i-1} \in \mathbb{Z}^d$称为$L$的步（Step）。

定理 2.13

设$v = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. 则$\mathbb{Z}^d$中从原点$(0, 0, \ldots, 0)$ 到v且每一步取自$\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$的格路共有

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_d}$$

条，其中$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_d$.

Outline

定义 3.1

设$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$为一个多重集。如果$m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2, \ldots, m_k \leq n_k$，则称多重集

$$\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_k \cdot a_k\}$$

为S的一个子多重集。S的一个r-元子多重集也称为S的一个r-组合。

例 3.2

集合$S = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$的所有3-组合有

$$\{2 \cdot a, 1 \cdot b\},\quad \{2 \cdot a, 1 \cdot c\},\quad \{1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c\}$$
$$\{1 \cdot a, 2 \cdot c\},\quad \{1 \cdot b, 2 \cdot c\},\quad \{3 \cdot c\}.$$

定义 3.1

设$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$为一个多重集。如果$m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2, \ldots, m_k \leq n_k$，则称多重集

$$\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_k \cdot a_k\}$$

为S的一个子多重集。S的一个r-元子多重集也称为S的一个r-组合。

例 3.2

集合$S = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$的所有3-组合有

$$\begin{aligned} &\{2 \cdot a, 1 \cdot b\}, \quad \{2 \cdot a, 1 \cdot c\}, \quad \{1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c\} \\ &\{1 \cdot a, 2 \cdot c\}, \quad \{1 \cdot b, 2 \cdot c\}, \quad \{3 \cdot c\}. \end{aligned}$$

定理 3.3

多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$的$r$-组合的个数，记为$\left(\binom{k}{r}\right)$. 则

$$\left(\binom{k}{r}\right)=\binom{k+r-1}{r}.$$

证明：由于S的任一个子多重集A由每一个a_i在A中的重数x_i唯一确定，因此，S的r-多重集的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r \tag{4}$$

的非负整数解(weak k-composition of r)的个数。通过建立这些解与集合

$$\{r\cdot *,(k-1)\cdot |\}$$

的排列之间的双射，即可完成证明。 ∎

定理 3.3

多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$的$r$-组合的个数，记为$\left(\binom{k}{r}\right)$. 则

$$\left(\binom{k}{r}\right)=\binom{k+r-1}{r}.$$

证明：由于S的任一个子多重集A由每一个a_i在A中的重数x_i唯一确定，因此，S的r-多重集的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r \tag{4}$$

的非负整数解(weak k-composition of r)的个数。通过建立这些解与集合

$$\{r\cdot *,(k-1)\cdot |\}$$

的排列之间的双射，即可完成证明。

定理 3.3

多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$的$r$-组合的个数，记为$\left(\binom{k}{r}\right)$. 则

$$\left(\binom{k}{r}\right)=\binom{k+r-1}{r}.$$

证明：由于S的任一个子多重集A由每一个a_i在A中的重数x_i唯一确定，因此，S的r-多重集的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r \tag{4}$$

的非负整数解(weak k-composition of r)的个数。通过建立这些解与集合

$$\{r\cdot *,(k-1)\cdot |\}$$

的排列之间的双射，即可完成证明。 ∎

例 3.4

一家面包房生产8 种炸面饼圈。如果一盒装一打（12个）且不考虑面包圈之间的顺序，那一共有多少种不同的装法？

解： 由题意，每一种装法唯一地由各种面包圈的个数唯一决定，因此所求装法数为方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 12$$

的非负整数解的个数，即

$$\left(\!\binom{8}{12}\!\right) = \binom{8+12-1}{12} = \binom{19}{12} = 50388.$$

例 3.4

一家面包房生产8 种炸面饼圈。如果一盒装一打（12个）且不考虑面包圈之间的顺序，那一共有多少种不同的装法？

解： 由题意，每一种装法唯一地由各种面包圈的个数唯一决定，因此所求装法数为方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 12$$

的非负整数解的个数，即

$$\left(\!\!\binom{8}{12}\!\!\right) = \binom{8+12-1}{12} = \binom{19}{12} = 50388.$$

∎

例 3.5

在例*3.4*中，若要求每一盒中每一种炸面饼圈都至少装一个，有多少不同的装法？

解：显然，该问题等价于求方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 12 \tag{5}$$

的正整数解的个数。令

$$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, \ldots, y_8 = x_8 - 1,$$

则$x_1, x_2, \ldots, x_8$是方程(5)的正整数解的充要条件是$y_1, y_2, \ldots, y_8$是方程$y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 4$的非负整数解。因此所求的炸面饼圈的装法总数为

$$\binom{4+8-1}{4} = \binom{11}{4} = 330.$$

例 3.5

在例3.4中，若要求每一盒中每一种炸面饼圈都至少装一个，有多少不同的装法？

解：显然，该问题等价于求方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 12 \tag{5}$$

的正整数解的个数。令

$$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, \ldots, y_8 = x_8 - 1,$$

则$x_1, x_2, \ldots, x_8$是方程(5)的正整数解的充要条件是$y_1, y_2, \ldots, y_8$是方程$y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 4$的非负整数解。因此所求的炸面饼圈的装法总数为

$$\binom{4+8-1}{4} = \binom{11}{4} = 330.$$

∎

一般地，方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

的正整数解(k-composition of r)的个数为:

$$\binom{r-1}{k-1}.$$

思考：给定正整数n，n的composition有多少个？

一般地，方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

的正整数解(k-composition of r)的个数为:

$$\binom{r-1}{k-1}.$$

思考：给定正整数n，n的composition有多少个？

例 3.6

方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$的满足条件:

$$x_1 \geq 3, x_2 \geq 1, x_3 \geq 0, x_4 \geq 5$$

的整数解有多少个?

解：引入新变量:

$$y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 5.$$

可将原问题转化成求方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

的非负整数解的个数。该个数为：

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = 364.$$

例 3.6

方程$x_1+x_2+x_3+x_4=20$的满足条件:

$$x_1\geq 3, x_2\geq 1, x_3\geq 0, x_4\geq 5$$

的整数解有多少个?

解： 引入新变量:

$$y_1=x_1-3, y_2=x_2-1, y_3=x_3, y_4=x_4-5.$$

可将原问题转化成求方程

$$y_1+y_2+y_3+y_4=11$$

的非负整数解的个数。该个数为：

$$\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}=364.$$

∎

例 3.7

求不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

的非负整数解的个数？

例 3.8

每一项都取自$\{1,2,\ldots,k\}$的、长为r的非减序列的个数是多少？

解：对任意一个符合条件的序列

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r,$$

集合$\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$是多重集

$$S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\ldots,\infty\cdot k\}$$

的一个r-组合。反之，任给集合S的一个r-组合，将其中的元素按照从小到大的顺序排序，可得到唯一一个符合条件的序列。由此可见，所求的序列个数等于S的r-组合数$\binom{r+k-1}{r}$. ∎

（其他解法？）

例 3.8

每一项都取自$\{1, 2, \ldots, k\}$的、长为r的非减序列的个数是多少？

解： 对任意一个符合条件的序列

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r,$$

集合$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$是多重集

$$S = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \ldots, \infty \cdot k\}$$

的一个r-组合。反之，任给集合S的一个r-组合，将其中的元素按照从小到大的顺序排序，可得到唯一一个符合条件的序列。由此可见，所求的序列个数等于S的r-组合数$\binom{r+k-1}{r}$. ∎

（其他解法？）

例 3.8

每一项都取自$\{1,2,\ldots,k\}$的、长为r的非减序列的个数是多少？

解：对任意一个符合条件的序列

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_r,$$

集合$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$是多重集

$$S = \{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot k\}$$

的一个r-组合。反之，任给集合S的一个r-组合，将其中的元素按照从小到大的顺序排序，可得到唯一一个符合条件的序列。由此可见，所求的序列个数等于S的r-组合数$\binom{r+k-1}{r}$. ∎

（其他解法？）

例 3.8

每一项都取自$\{1,2,\ldots,k\}$的、长为r的非减序列的个数是多少？

解： 对任意一个符合条件的序列

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_r,$$

集合$\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$是多重集

$$S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\ldots,\infty\cdot k\}$$

的一个r-组合。反之，任给集合S的一个r-组合，将其中的元素按照从小到大的顺序排序，可得到唯一一个符合条件的序列。由此可见，所求的序列个数等于S的r-组合数$\binom{r+k-1}{r}$. ∎

（其他解法？）

例 3.8

每一项都取自$\{1, 2, \ldots, k\}$的、长为r的非减序列的个数是多少？

解： 对任意一个符合条件的序列

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r,$$

集合$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$是多重集

$$S = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \ldots, \infty \cdot k\}$$

的一个r-组合。反之，任给集合S的一个r-组合，将其中的元素按照从小到大的顺序排序，可得到唯一一个符合条件的序列。由此可见，所求的序列个数等于S的r-组合数$\binom{r+k-1}{r}$. ∎

（其他解法？）

作业：

- P37 习题2
- P38 习题6
- P38 习题8
- P38 习题10
- P39 习题38
- P40 习题44
- P40 习题46