天津师范大学考试试题参考答案及评分标准

201 —201 学年第一学期期末考试试卷（ 4 卷）

学院： 数学科学学院 专业：数学与应用数学 信息与计算科学 科目：高等代数 2-1

一、 **填空题:（每题 3 分，本大题共 30 分）**

1. $\dfrac{3n^2-n}{2}$.

2. $i=2, j=7$.

3. $2,-1$.

4. 0.
5. $a=4$.
6. $a=-1$.
7. 3.
8. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
9. -4.
10. $\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\ 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

二、 **计算题:（每小题 10 分，本大题共 40 分）**

1. 解 $\begin{vmatrix}x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ -a & a & 0 & \cdots & 0\\ -a & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\sum_{i-1}^{n}x_i+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^{n}x_i+a)a^{n-1}.$$ ……(10 分)

2. 解　增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda\end{array}\right)$,

(1) 若 $\lambda=1$,则 $\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$,此时方程组有无穷多解 $x_1=1-x_2-x_3$,其中 x_2,x_3 为自由未定元. ……(4 分)

(2) 若 $\lambda\neq 1$,则 $\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2\end{array}\right)$,

则(1) 若 $\lambda\neq-2$,有唯一解 $x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2},x_2=\dfrac{1}{\lambda+2},x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$. ……(8 分)

(2) 若 $\lambda=-2$, $r(A)=2,r(\overline{A})=3$, 无解. ……(10 分)

3. 解　增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3\end{array}\right)$化为阶梯形.

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right),r(A)=r(\overline{A})=2$.

有解,导出组的基础解系含有 3 个向量. ……(3 分)

求特解: $\gamma_0=(3,-1,0,0,0)$, ……(5 分)

导出组基础解系: $\eta_1=(-2,0,1,0,0),\eta_2=(-4,1,0,2,0),\eta_3=(-4,1,0,0,2)$, ……(8 分)

则通解为 $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$.其中 k_1,k_2,k_3 任意. ……(10 分)

4. 解　由 $AXA-BXB=AXB-BXA+E$ 可得, $(A+B)X(A-B)=E$,故

$X=(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}$,而 ……(3 分)

$(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$,则 ……(7 分)

$X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. ……(10 分)

三、　　**证明题:（每小题 10 分，本大题共 30 分）**

1.　　证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x^n.$　　　　……(10 分)

2.　　证明 $(A+B)(A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})$

$=(A+B)A^{-1}(E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})=(E+BA^{-1})(E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})$

$=B(B^{-1}+A^{-1})(E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})=B(B^{-1}+A^{-1}-(B^{-1}+A^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})$

$=B(B^{-1}+A^{-1}-A^{-1})=BB^{-1}=E$.　　　　……(10 分)

3.　　证明　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的秩为$t$,$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一个极大无关组,两个向量组等价,且$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的一个线性无关的部分组,可扩充成它的一个极大无关组.而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$秩相同,故$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组,两个向量组有相同的极大无关组,从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价.　　　　……(10 分)