组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

二项式定理中的系数都是组合数，组合数和二项式定理有密切的关系.

本章我们就详细讨论这种关系.

回忆：表达式 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合数.

对于非负整数 n 和 k, 我们已经证明了

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 1 \le k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

由此不难得到

- 对称性：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 恒等式：$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

它还具有许多很奇妙的性质，关于它也有着许多恒等式.

Outline

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
0	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
0	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

代数证明: 直接将 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ 代入上式验证等式成立.

Pascal 三角 (杨辉三角或贾宪三角)

17 世纪, 法国数学家 Pascal 做出了下面的三角形.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

表: Pascal 三角

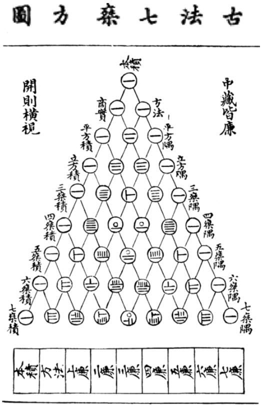


图: 朱世杰《四元玉鉴》中的“古法七乘方图”

13 世纪中国南宋数学家杨辉在《详解九章算术》里解释右边这种形式的数表, 并说明此表引自 11 世纪贾宪的《释锁算术》.

$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ 的组合证明

- 令 S 是 n 元集合，考虑它的 k-组合
- 任取 $x \in S$，将 S 的 k-组合按 x 分成两大类:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{不含元 } x \text{ 的 } k\text{-组合}\} \\ B &= \{\text{包含元 } x \text{ 的 } k\text{-组合}\} \end{aligned}$$

- 按加法原理，$\binom{n}{k}=|A|+|B|$
- A 的 k-组合恰好是集合 $S-\{x\}$ 的 k-组合，故

$$|A|=\binom{n-1}{k}$$

- B 的 k-组合是通过将 x 添加到集合 $S-\{x\}$ 的 $(k-1)$-组合得到的，故

$$|B|=\binom{n-1}{k-1}.$$

例如:

- $S=\{x,a,b,c,d\}$，
  $n=5$，$k=3$，$\binom{n}{k}=10$
- A 的 3-组合:

$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},$$
$$\{a,c,d\},\ \{b,c,d\},$$

  对应集合 $\{a,b,c,d\}$ 的 3-组合
- B 的 3-组合:

$$\{x,a,b\},\ \{x,a,c\},\ \{x,a,d\},$$
$$\{x,b,c\},\ \{x,b,d\},\ \{x,c,d\},$$

  去掉 x 后，得

$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},$$
$$\{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\},$$

  恰好是集合 $\{a,b,c,d\}$ 的 2-组合.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的另一种组合解释

- 令 n 是非负整数，且 $1 \le k \le n-1$
- $p(n,k)$: 表示从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的路径的条数，其中每条路径包含 n 步，每一步只有两种选择:

  水平向右 $(1,0) \rightarrow$ 　　水平向上 $(0,1) \uparrow$
- 从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的路径，有两种选择

  $i)$ 从点 (0,0) 到点 $(k, n-k-1)$，再水平向上移至 $(k, n-k)$；

  $ii)$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(k-1, n-k)$，再水平向右移至 $(k, n-k)$；
- 由加法原理：$p(n,k) = p(n-1,k) + p(n-1,k-1)$

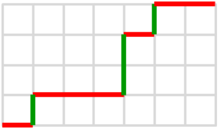


图: 格路

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t$，$s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如：$1, 3, 3, 1$

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t$， $s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如：$1, 3, 3, 1$

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$

提示：只需对 $0 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ 证明 $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.

观察得结论

- 三角形数: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

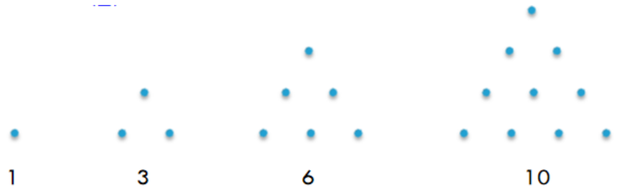


图: 三角形阵列点数

观察得结论

- 四面体数：$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

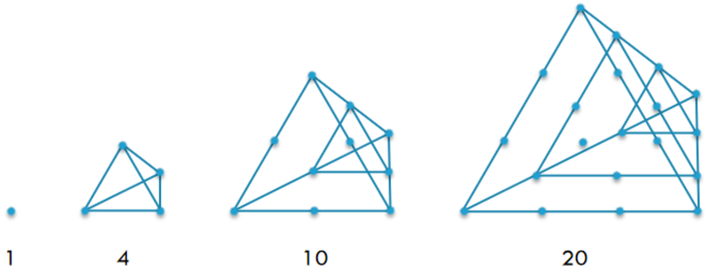
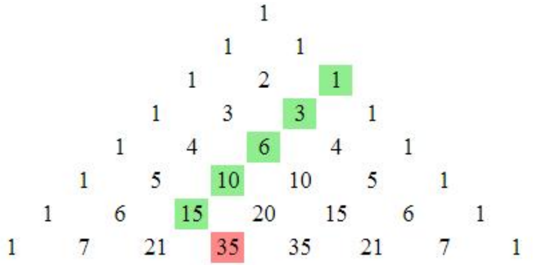


图: 四面体阵列点数



一般地，可以得到

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

Outline

二项式定理

定理 2.1

令 n 是一个正整数，对所有的 x 和 y，有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- 证明一：乘法分配律展开，再合并同类项.
- 证明二：归纳法.

等价形式

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{k} y^{n-k}$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$

特殊地，令 $y=1$，得

推论 2.2

令 n 是一个正整数，对所有的 x，有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$$

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^7$.

例 2.2

$(3x-2y)^{18}$ 的展开式中，x^5y^{13} 的系数是什么？x^8y^{10} 的系数是什么？

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^7$.

例 2.2

$(3x-2y)^{18}$ 的展开式中，x^5y^{13} 的系数是什么？x^8y^{10} 的系数是什么？

$$
\begin{aligned}
(2x-y)^7 &= \sum_{r=0}^{7}\binom{7}{r}(2x)^r(-y)^{7-r} \\
&= -\sum_{r=0}^{7}(-2)^r\binom{7}{r}x^ry^{7-r}.
\end{aligned}
$$

$$
(3x-2y)^{18} = \sum_{r=0}^{18}\binom{18}{r}(3x)^r(-2y)^{18-r}
$$

x^5y^{13} 系数：$\binom{18}{5}3^5(-2)^{13}$

x^8y^{10} 系数：$\binom{18}{8}3^8(-2)^{10}$

牛顿二项式定理

定义 2.3

设 α 是实数，k 是非负整数，定义二项式系数为

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

定理 2.4

设 α 是实数，对 $|z| < 1$ 的 z，有

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

常用展开式

- $\alpha = -n$，其中 n 为正整数

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1+z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$
- $(1+z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) z^k$

令 $-z$ 代替上面的 z

- $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$
- $(1-z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$

推论 2.5

$(1-z)^{-n}$ 中 z^k 的系数等于 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ 的非负整数解，即 $\binom{n+k-1}{k}$.

$$
\begin{aligned}
(1-z)^{-n} &= (1-z)^{-1}(1-z)^{-1} \cdots (1-z)^{-1} \\
&= (1+z+z^2+\cdots) \cdots (1+z+z^2+\cdots)
\end{aligned}
$$

从第一个因子选取 z^{k_1}，从第二个因子选取 $z^{k_2} \cdots$

常用展开式

- $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!\cdot(2k-2)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k-2)!!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k!\cdot(k-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1} z^k$$

Outline

回顾——重集的排列数

定理 3.1

令 S 是一个有 t 个不同类型的元的多重集，各个元的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_t$，满足 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$，则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

定义 3.2

多项式系数定义为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

这里 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$.

多项式定理

定理 3.3

对于 t 个不同的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n,\\ n_1,n_2,\cdots,n_t \geqslant 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$$

- 证明：利用乘法的分配律将乘积完全展开，再考虑合并同类项，$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 有 $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 种排列.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中，$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中，$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3 (-3)^1 5^2 = -36000$$

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中，$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3(-3)^1 5^2 = -36000$$

$$\binom{10}{3,1,4,2} = \frac{10!}{3!1!4!2!} = 12600$$

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中，共有多少不同的项?

例 3.3

展开式 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 中，共有多少不同的项?

展开式中，一般项为 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$，满足

$$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$$

因此不同的项的数目等同于上述方程的非负整数解的个数，即 $\binom{n+t-1}{n}$.

Outline

组合恒等式

等式 1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

组合恒等式

等式 1

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

- 对应着二项式定理中：$x=1$，$y=1$；
- 如果 S 是 n 个元素的集合，则 S 的所有组合有多少个?

等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

- 对应着二项式定理中：$x = 1, y = -1$
- S 的具有偶数个元素的组合有多少个？具有奇数个元素的组合有多少个?
- 可否建立奇组合与偶组合之间的一一对应?

推论

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k\ \text{为奇数}} \binom{n}{k} = \sum_{k\ \text{为偶数}} \binom{n}{k}$$

证明　设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, 则

$$A = \{S \subseteq X : |S|\ \text{为偶数且} 1 \in S\},$$

$$B = \{S \subseteq X : |S|\ \text{为奇数且} 1 \in S\},$$

$$C = \{S \subseteq X : |S|\ \text{为偶数且} 1 \notin S\},$$

$$D = \{S \subseteq X : |S|\ \text{为奇数且} 1 \notin S\}.$$

构造映射 $f : A \to D$ 为 $f(S) = S \setminus \{1\}$, 显然 f 为双射. 所以 $|A| = |D|$.

类似地 $|B| = |C|$.

因此

$$\sum_{k\ \text{为奇数}} \binom{n}{k} = |B| + |D| = |A| + |C| = \sum_{k\ \text{为偶数}} \binom{n}{k}$$

等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

- 考虑从 n 人中选出带队长的 k 人小队:
- 可先从 n 人中选出 k 人做队员，再从 k 人中选出一人做队长;
- 也可以从 n 人中选出一人做队长，然后再从 $n-1$ 人中选出 $k-1$ 人做队员.

等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

方法 1：对 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ 两边同时求导得

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

再令 $x = 1$.

方法 2：应用等式 3

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}.$$

方法 3：从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个队，并选择一人为队长，有多少种方法?

等式 5

对于整数 $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

等式 5

对于整数 $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

证明 对 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 求导, 得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

将上式左右两边同乘 x, 得

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k}$$

对上式左右两边求导, 得

$$n\left((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n\left(2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right) = n(n+1)2^{n-2}$$

等式 5

对于整数 $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级，并选择班长、团支书各一人 (可兼任)，有多少种方法?

等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

证明 对

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k ,$$

两边对 x 求从 0 到 1 的定积分,

$$\int_0^1 (1+x)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k+1} x^{k+1}\Big|_0^1$$

$$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

此即所证等式.

注：使用这种方法证明不等式时一定要取定积分，否则易出现常数确定上的错误

例 4.1

利用

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

计算

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

例 4.1

利用

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

计算

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n\cdot 2^{n-1}$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$ $= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

等式 7 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数，则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

等式 7 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数，则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

方法 1：比较等式 $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m (x+1)^n$ 两边 x^k 的系数.

方法 2：

- $\binom{m+n}{k}$ 是 $(m+n)$ 元集合 $A \cup B$ 中 k-子集的个数, 其中 $A = \{1, \ldots, m\}, B = \{m+1, \ldots, m+n\}$,
- 而其中包含 A 中 i 个元素的这样的 k-子集的个数为 $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$,
- 所以和式 $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 便是对所有的 i 来计这些子集的个数.

特别地, 当 $m = n$ 时,

推论

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

等式 8 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

等式 8 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

组合证明:

- 从 $n+1$ 个人中挑选 $k+1$ 个人组成一个队.
- 先从 $n+1$ 个人当中挑出一个人，令他的号码是 $i+1$ $(i = k, \cdots, n)$，作为小队当中号码最大的人.
- 接下来只要从前 i 个人当中挑出剩下的 k 个人即可.

代数证明：提取

$$\sum_{i=0}^{n} (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$$

两边 x^k 的系数.

邻差算子（Creative telescoping）

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

对于 $f(i,k)$, 如果存在 $g(i,k)$ 满足

$$f(i,k) = g(i+1,k) - g(i,k)$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} f(i,k) &= \sum_{i=m}^{n} g(i+1,k) - \sum_{i=m}^{n} g(i,k)\\ &= \sum_{i=m+1}^{n+1} g(i,k) - \sum_{i=m}^{n} g(i \cdot k).\\ &= g(n+1,k) - g(m,k)\end{aligned}$$

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

利用临差算子

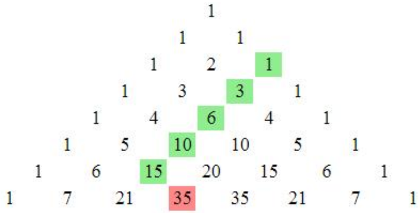
$$\binom{i}{k}=\binom{i+1}{k+1}-\binom{i}{k+1}$$

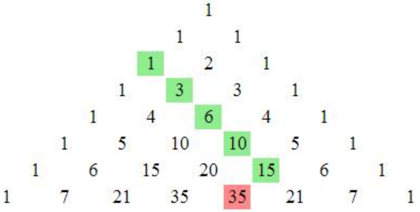
可知

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}&=\sum_{i=k}^{n}\left(\binom{i+1}{k+1}-\binom{i}{k+1}\right)\\&=\sum_{i=k}^{n}\binom{i+1}{k+1}-\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k+1}\\&=\sum_{i=k+1}^{n+1}\binom{i}{k+1}-\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k+1}\\&=\binom{n+1}{k+1}-\underbrace{\binom{k}{k+1}}_{0}=\binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$





等式 9

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

例 4.2

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

例 4.2

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \sum_{m=1}^{n} m^2 = \sum_{m=1}^{n} \left(2\binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right) \\ &= 2\sum_{m=1}^{n} \binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n} \binom{m}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{6} n \left(n+1 \right) \left(2n+1 \right). \end{aligned}$$

例 4.3

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \qquad (*)$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

例 4.3

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

将 $m = 1, 2, 3$ 分别代入 (*) 式得

$$\begin{aligned} 1 &= c \\ 8 &= b + 2c \\ 27 &= a + 3b + 3c \end{aligned}$$

解方程组得 $a = 6, b = 6, c = 1$.

例

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

因此，

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3 &= \sum_{m=1}^{n} \left(6\binom{m}{3}\right) + 6\left(\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right) \\
&= 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

例

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

因此,

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3 &= \sum_{m=1}^{n} \left(6\binom{m}{3}\right) + 6\left(\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right) \\
&= 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

证明

例 4.4

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$;
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$

例 4.4

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$;
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{j!(k-j)!} = \frac{n}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{m}{k}$
   $= \binom{n}{m}\sum_k(-1)^k\binom{m}{k} = \binom{n}{m}0 = 0$
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}$
   $= \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m}$

例 4.5

设 n 和 k 均为正整数, 给出下面式子的一个组合证明:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

例 4.6

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ (-1)^m \binom{2m}{m}, & n \text{ 为偶数} 2m. \end{cases}$$

提示: 考虑 $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数.

例 4.7

设 n 是正整数，证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

例 4.8 (李善兰恒等式)

证明下列恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

李善兰恒等式为组合数学中的一个恒等式，由中国清代数学家李善兰于 1859 年在《垛积比类》一书中首次提出，因此得名.

Outline

定义 5.1

设 n 和 k 为非负整数，且 $0 \le k \le n$. 称

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$$

为**高斯系数**.

- 例如, $n=4$, $k=2$ 时,
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1.$$
- 记 $[n]! = [1][2]\cdots[n]$, 其中 $[n] = 1+q+\ldots+q^{n-1}$, 则高斯系数可以写为
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$
- 高斯系数是二项式系数的 q－模拟. 由定义可知
$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$
因此，高斯系数 也称为**q－二项式系数**.

高斯系数的性质

定理 5.2

高斯系数具有以下性质：

1. $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1;$
2. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix};$
3. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix};$
4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$

定理 5.3 (Cauchy 二项式定理)

$$\prod_{k=1}^{n}(1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

- $q \to 1$ 时，$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

高斯系数的组合解释

首先给出排列中逆序数的概念.

给定一个多重集合的排列 $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_n$, 一对元素 (i,j) 称为是 π 的一个逆序(inversion), 如果满足 $i<j$ 且 $\pi_i > \pi_j$.

π 的逆序的个数为 π 的逆序数, 记作 $\mathrm{inv}(\pi)$.

定理 5.4

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi\in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

定理

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

证明 对 n 用归纳法．当 $n=1$ 时，性质显然成立．现在假设对 $n-1$ 成立.

考虑 n 的情形．对于 $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n \in S(1^k 2^{n-k})$，分两种情况考虑：

- 若 $a_n = 2$，则将 a_n 去掉后，π 的逆序数不发生变化，且此时
$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \in S(1^k 2^{n-k-1});$$
- 若 $a_n = 1$，则因为 π 中的每个 2 皆对 a_n 产生一个逆序数，故去掉 a_n 后，逆序数减少 $n-k$ 个，且
$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \in S(1^{k-1} 2^{n-k}).$$

所以

$$\sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

高斯系数的组合解释

先给出有限域上的线性空间的一些概念.

设 $\mathbb{F}_q$ 为有限域, 其中 $q=p^r$, p 为素数.

对正整数 n, 我们定义 $V_n(q)$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的有序 n 元组

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{F}_q, \quad i=1,2,\cdots,n$$

组成的集合，并满足线性运算

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q$$

则 $V_n(q)$ 构成 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间, 其中的元素称为向量.

若向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{F}_q \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i=1,2,\cdots,m$$

则称向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是线性无关的.

线性空间 $V_n(q)$ 中线性无关的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成 $V_n(q)$ 的一组基.

$V_n(q)$ 中的任意向量都可以由 $V_n(q)$ 的一组基线性表示, 即对任意向量 $X \in V_n(q)$, 存在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

用坐标表示为

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

高斯系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的组合含义由下面定理给出.

定理 5.5

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

例如, $n = 3$, $k = 1$ 时, 有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 3 维线性空间的所有 1 维子空间的个数是

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + q.$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

证明思路:

- 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的线性无关的 (有序) 向量组的个数，它们生成一个 k 维子空间.
- 再计算一个 k 维子空间的 (有序) 基的个数.

证明 首先，从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的元组构成一个 k 维子空间的 (有序) 基.

为此，我们需要从空间 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量.

- 第一个向量 v_1，可以选取任意非零向量，因此由 $q^n - 1$ 中选择.
- 第二个向量 v_2，不能选取 v_1 的倍数，因此有 $q^n - q$ 种选择.
- 第三个向量 v_3，有 q^2 个不能选取的向量，它们是 v_1 和 v_2 的线性组合.

以此类推，从 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量的方法数为

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}), \tag{1}$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

其次，一个子空间可以有很多组 (有序) 基.

类似上面的讨论，选定一个 k 维子空间，在其中选一组基的方法数为

$$(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

这就是(1)中每个子空间重复计数的数目.

因此，$V_n(q)$ 的 k 维子空间的个数是

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

高斯系数的组合解释——格路

- 我们考虑从原点到点 (m,n) 的格路，其中 m,n 为非负整数且只允许向东与向北. 因为我们共要走 $m+n$ 步，且一定有 m 步向东走 n 步向北走，故这样的路径有 $\binom{m+n}{m}$ 条.
- 对于每一条这样的路径 p，在路径、x 轴和直线 $x=m$ 之间都有一个确定的封闭区域 $A(p)$. 右图展示了 $m=n=2$ 时的六条路径及每种情况下所包围的区域面积.
- 如果我们对这个区域取变量为 q 的生成函数，也就是说，一条面积为 A 的路径对求和的贡献为 q^A, 那么我们可以得

$$1+q+2q^2+q^3+q^4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

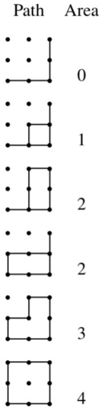


图: 格路

设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 (0,0) 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位，最终走到 (m,n) 点的格路组成的集合.

对 $p \in \mathscr{P}(m,n)$，设 $A(p)$ 为由格路 p、x 轴和直线 $x=m$ 包围图形的面积.

定理 5.6

$$\sum_{p\in\mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 (0,0) 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位，最终走到 (m,n) 点的格路组成的集合.

对 $p \in \mathscr{P}(m,n)$，设 $A(p)$ 为由格路 p、x 轴和直线 $x=m$ 包围图形的面积.

定理 5.6

$$\sum_{p \in \mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

证明 我们记等式左边为 $F(n,k)$，显然 $F(0,n)=F(m,0)=0$.

现考虑 $F(m,n)$ 的两种情况:

- 如果路径的最后一步是向北的，那么它是一条从 $(0,0)$ 到 $(k,n-k-1)$ 再接着往北一步的路径，且最后一步不会改变面积.
- 如果路径的最后一步是向东的，那么它是一条从 $(0,0)$ 到 $(k-1,n-k)$ 再接着往东一步的路径，这里最后一步会使面积增加 $n-k$.

故我们有 $F(n,k)=F(n-1,k)+q^{n-k}F(n,k-1)$.

再由定理5.2知，$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 也具有相同的初值条件和递推关系，因此定理得证.