月考（行列式）

班级_________姓名___________学号_____________

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 若$91i25k487$为偶排列，则$i=$______, $k=$_______.

2. $2n$阶排列$246\cdots(2n)(2n-1)\cdots 31$的逆序数为____________.

3. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \\ x & 2 & 6 \end{vmatrix}$，则多项式中 x^2 的系数为_____________.

4. 行列式$\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=$_________.

5. 设$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d$, 则

$$\begin{vmatrix} ma_1+na_2+la_3 & mb_1+nb_2+lb_3 & mc_1+nc_2+lc_3 \\ na_2+la_3 & nb_2+lb_3 & nc_2+lc_3 \\ la_3 & lb_3 & lc_3 \end{vmatrix}=$$__________.

6. 已知$D=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1$，则 $x=$__________ .

7. 行列式$D=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}=$____________ .

8. 已知行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2019$，那么$\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}=$_______.

9. 两个排列逆序数的和$\tau(x_1x_2\cdots x_9x_{10})+\tau(x_{10}x_9\cdots x_2x_1)=$_______________.

二、(20 分)计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$.

三、(20 分)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

五、(20 分)证明

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

其中 $\theta\neq k\pi$（k 为任意整数）.

四、(20 分)利用克拉默法则解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ x_1+2x_2+2x_3=-1. \end{cases}$