典型例题

一 矩阵的行列式:

1.(1) 设3阶方阵A,满足$|A|=-2$,设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,设$B=\begin{pmatrix}\alpha_3-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}3\alpha_2\\ 2\alpha_1\\ \alpha_1+\alpha_3\end{pmatrix}$,则

$|B|=$____. $|C|=$______.

(2) 设A是3阶方阵,$|A|=-2$,取$A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,则$|\beta_1+2\beta_2,\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,\beta_3|=$____

$|\beta_1+\beta_2+\beta_3,\beta_2+\beta_3,\beta_3|=$____

$$|B|=\begin{vmatrix}\alpha_3-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_3\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{vmatrix}=6,|C|=\begin{vmatrix}3\alpha_2\\ 2\alpha_1\\ \alpha_1+\alpha_3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{vmatrix}=12.$$

$$|\beta_1+2\beta_2,\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,\beta_3|=|\beta_1+2\beta_2,\beta_1+2\beta_2,\beta_3|=0.$$

$$|\beta_1+\beta_2+\beta_3,\beta_2+\beta_3,\beta_3|=|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=-2.$$

2. (1) 设4阶方阵$A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,$B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,其中$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$均为4维列向量,且

$|A|=4,|B|=1$,则$|A+B|=$____.

解: $A+B=(\alpha+\beta,2\gamma_1,2\gamma_2,2\gamma_3)$,则

$$|A+B|=|\alpha+\beta,2\gamma_1,2\gamma_2,2\gamma_3|=8|\alpha+\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=8(|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|)=8\times5=40.$$

3. (1) 设n阶方阵A,B,满足 $|A|=2,|B|=-3$,则$|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$________,$|A^{-1}+A^*|=$_______.

解: $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=|A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}|=|(|B|-|A|)A^{-1}B^{-1}|=(|B|-|A|)^n|A^{-1}B^{-1}|=(-5)^n(-\frac{1}{6})$.

$$|A^{-1}+A^*|=|A^{-1}+|A|A^{-1}|=|A^{-1}+2A^{-1}|=|3A^{-1}|=3^n\frac{1}{2}=\frac{3^n}{2}$$

(2) 设A是n阶方阵, $|A|=5$,则$\left|A^*-(\frac{1}{5}A)^{-1}\right|=$____. $\left|A^*-(\frac{1}{5}A)^{-1}\right|=|5A^{-1}-5A^{-1}|=$

4. 设A,B均为3阶矩阵,$|A|=2,|B|=3$,则$|2AB|=$______,$||2A|B|=$______,$\begin{vmatrix}0&3A\\ 2B&E\end{vmatrix}=$______,

$\begin{vmatrix}3A&E\\ 0&2B\end{vmatrix}=$______, $\begin{vmatrix}0&2AB\\ -A&A\end{vmatrix}=$________. $\begin{vmatrix}2AB&0\\ A&-A\end{vmatrix}=$________. $|(2A)^{-1}+3A^*|=$________.

$\begin{vmatrix} 2AB & 0 \\ A & -A \end{vmatrix} = |2AB||-A| = 2^3|A||B|(-1)^3|A| = -2^4 \cdot 3 = -48$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$, 则 $|B|=$________. $|B|=\dfrac{1}{9}$.

$ABA^*=2BA^*+E \Rightarrow ABA^*A=2BA^*A+EA \Rightarrow |A|AB=2|A|B+A$，即 $3AB=6B+A$，

$(3A-6E)B=A$，则 $|3A-6E||B|=|A|$，求解即可.

6. 设 A,B 均为 3 阶方阵,满足 $AB-3A+B=0$,若 $|A+E|=-1$,求 $|B-3E|=$________.

解: $(A+E)(B-3E)=AB-3A+B-3E=-3E$， 27

7. 若 n 阶方阵 A 与 B 只是第 j 列不同,给出 $|A+B|$ 与 $|A|+|B|$ 的关系等式________________________.

解: $|A+B|=|2\alpha_1,\cdots,\alpha+\beta,\cdots,2\alpha_n|=2^{n-1}\left(|\alpha_1,\cdots,\alpha,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta,\cdots,\alpha_n|\right)=2^{n-1}\left(|A|+|B|\right)$.

8. 设 $A^2=A, A\neq E$（单位矩阵）, 证明 $|A|=0$.

证法一: 如 $|A|\neq 0$, 则 A 可逆, 那么 $A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$. 与已知条件 $A\neq E$ 矛盾.

证法二: 由 $A^2=A$, 有 $A\left(A-E\right)=0$, 从而 $A-E$ 的每一列都是齐次方程组 $Ax=0$ 的解. 又因 $A\neq E$,

故 $Ax=0$ 有非零解, 从而 $|A|=0$.

证法三: 由于 $A-E$ 的每一列 $\beta_i (i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $Ax=0$ 的解, 所以 $r(A-E)\leq n-r(A)$. 又

$A\neq E, r(A-E)>0$, 故 $r(A)\leq n-r(A-E)<n$, 则 $|A|=0$.

9. 若 $A^2=B^2=E$, 且 $|A|+|B|=0$, 证明 $|A+B|=0$.

证明: $|A||A+B|=|A^2+AB|=|B^2+AB|=|B+A||B|=-|B+A||A|$, 故 $|A||A+B|=0$, 得 $|A+B|=0$.

10. 已知 A 是 $2n+1$ 阶矩阵, 满足 $AA^T=A^TA=E$, 证明: $|E-A^2|=0$.

证明: 由行列式乘法公式, 得 $|A|^2=|A|\cdot|A^T|=|AA^T|=|E|=1$.

(1) 若 $|A|=1$, 则 $|E-A|=|AA^T-A|=\left|A\left(A^T-E^T\right)\right|=|A|\cdot|A-E|=|-\left(E-A\right)|$

$$=\left(-1\right)^{2n+1}|E-A|=-|E-A|, \text{从而} |E-A|=0.$$

(2) 若 $|A|=-1$, 由 $|E+A|=|AA^T+A|=\left|A\left(A^T+E^T\right)\right|=|A|\cdot|A+E|=-|E+A|$, 得到 $|E+A|=0$.

又因$\left|E-A^2\right|=\left|(E-A)(E+A)\right|=\left|E-A\right|\cdot\left|E+A\right|$, 所以不论$|A|$是1或$-1$, 总有$\left|E-A^2\right|=0$.

11. 设A,B为同阶方阵,满足阵$AA^T=A^TA=E, BB^T=B^TB=E$,且$\dfrac{|A|}{|B|}=-1$,证明$|A+B|=0$.

证明: $(A+B)A^T=E+BA^T=BB^T+BA^T=B(B^T+A^T)$,从而$|A+B||A|=|B|\left|B^T+A^T\right|=|B||B+A|$,

而$|A|=-|B|$,故$|A+B|=0$.

12. 已知列矩阵$C=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,行矩阵$D=(2,0,1,)$　1. 试计算$A=CD$及$B=DC$.　2. 求$A^{100}=?$

二　矩阵的逆

1. 设A是一4阶可逆阵,知$(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&1&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,则$A=$________.

设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$,则$(A^*)^{-1}=$______.

解: $(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&-6\\0&-4&-10\end{pmatrix}$.

2. (1) 已知方阵A满足$A^2-A-2E=0$,则$A^{-1}=$______. $(A+2E)^{-1}=$______.

解: $A^2-A-2E=0$,则$A(A-E)=2E$.从而$A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$.

由$A^2-A-2E=0$,得$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=-4E$,从而$(A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{4}(3E-A)$.

(2)　已知n阶矩阵A满足方程; $A^2+3A-4E=0$,其中E为n阶单位矩阵.

1. 求$(A+3E)^{-1}$.　2. 求$(A+5E)^{-1}$.　3. 问当m满足什么条件时, $(A+mE)$必可逆.

解　$A^2+3A-4E=(A-E)(A+4E)=0$, $|A-E||A+4E|=0$，故$A-E, A+4E$至少有一个不可逆.

$(A+3E)A=A^2+3A=4E$，$|A+3E||A|=|4E|\neq 0$，$A+3E$可逆，且$(A+3E)^{-1}=\dfrac{1}{4}A$.

$(A+5E)(A-2E)=A^2+3A-10E=-6E$，可逆，且$(A+5E)^{-1}=\dfrac{1}{6}(2E-A)$.

$(A+mE)(A+(3-m)E)=A^2+3A+m(3-m)E=(4+3m-m^2)E$,只要$4+3m-m^2\neq 0$，即

$m \neq -1, m \neq 4$，矩阵$(A+mE)$可逆，且$(A+mE)^{-1} = \dfrac{1}{4+3m-m^2}(A+(3-m)E)$.

3. 设n阶方阵A, B　(1) 若$A^2 = A$,证明:$E-2A$可逆.　(2) 若$2A(A-E) = A^3$,证明$E-A$可逆.

(3) 若$A+B = AB$,证明$E-A$可逆,且$AB = BA$.

(4) 若$A, B, A+B$都可逆,证明$A^{-1}+B^{-1}$也可逆,并求其逆.

解　$(E-2A)(E-2A) = E$；

$2A(A-E)-E = A^3 - E = (A^2+A+E)(A-E)$, $2A(A-E)-(A^2+A+E)(A-E) = E$,

$(2A-A^2-E)(A-E) = E$.

$A+B = AB$，$A-AB+B-E = -E$，$A(E-B)-(E-B) = -E$，$(A-E)(E-B) = -E$.

且$(E-B)(A-E) = -E$，则$A+B = AB$；$AB = BA$可得.

$A(A^{-1}+B^{-1})B = A+B$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (E+2A)^{-1}(E-A)$,则$(2B+E)^{-1} =$ ______.

解　$2B+E = 2(E+2A)^{-1}(E-A)+E = 2(E+2A)^{-1}(E-A)+(E+2A)^{-1}(E+2A)$

$= (E+2A)^{-1}(2E-2A+E+2A) = 3(E+2A)^{-1}$.

则$(2B+E)^{-1} = \dfrac{1}{3}(E+2A)$.

5. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,且$A^*X(\frac{1}{2}A^*)^* = 8A^{-1}X+E$,求矩阵$X$.

解: 首先, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$,从而$A^* = |A|A^{-1} = 4A^{-1}$.

$(\frac{1}{2}A^*)^* = (2A^{-1})^* = |2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1} = A$.代入$A^*X(\frac{1}{2}A^*)^* = 8A^{-1}X+E$,得到$4A^{-1}XA = 8A^{-1}X+E$,

左乘A,得到$4XA = 8X+A$,即$X(4A-8E) = A$,从而

$$X = A(4A-8E)^{-1} = A\frac{1}{4}(A-2E)^{-1} = \frac{1}{4}A\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$,又 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,求 $(E+B)^{-1}$.（类似于 4）

7.设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$____.

设 n 阶矩阵 A,B 满足 $|A|=2,|B|=3,|A+B|=4$,则 $|A^{-1}+B^{-1}|=$_______.（同 3）

8. 若 A,B 都是 n 阶方阵,且 $E+AB$ 可逆,证明 $E+BA$ 也可逆,求其逆.

证明: $(E+AB)A=A+ABA=A(E+BA)$,由于 $E+AB$ 可逆,则

$A=(E+AB)^{-1}A(E+BA)$,两边左乘 B,得到 $BA=B(E+AB)^{-1}A(E+BA)$,则

$E+BA=E+B(E+AB)^{-1}A(E+BA)$ 则 $E+BA-B(E+AB)^{-1}A(E+BA)=E$,即

$(E-B(E+AB)^{-1}A)(E+BA)=E$,从而 $E+BA$ 可逆,且其逆为: $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$.

三 矩阵的运算

1. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,求矩阵 B

解: 由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,右乘 A^{-1} 得 $AB=B+3A$,则 $(A-E)B=3A$,从而 $B=3(A-E)^{-1}A$,否定.

$A^{-1}(A-E)B=3E$, $(E-A^{-1})B=(E-\frac{1}{|A|}A^*)B=3E$, $|A^*|=8=|A|^3$,则 $|A|=2$, $B=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}$

2. 已知 $2CA-2AB=C-B$,其中 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $C^3=$______.

解: 由 $2CA-2AB=C-B$,得 $2CA-C=2AB-B$,故 $C(2A-E)=(2A-E)B$,从而

$C=(2A-E)B(2A-E)^{-1}$ $C^3=(2A-E)B^3(2A-E)^{-1}$

$2A-E=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ $B^3=\begin{pmatrix}27&18&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $(2A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^TC^T=E$.求 A

解: $A(E-B^T(C^T)^{-1})C^T=E$,则 $A(C-B)^T=E$,从而 $A=((C-B)^T)^{-1}$

4. 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$,其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,求 B.

解: $AA^*BA=2ABA-8A$,得 $-2B=2AB-8E$, $AB+B=4E$, $(A+E)B=4E$, $B=4(A+E)^{-1}$

5. 设 A 是 3 阶可逆方阵,将 A 的第一行的 -3 倍加到第三行,再互换第二行和第三行后得到矩阵 B,则

$BA^{-1}=$____________.

解 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}A=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}=BA^{-1}$

四 矩阵的秩

1. $A\in\mathbf{M}_{m\times n},B\in\mathbf{M}_{n\times k}$,且 $r(A)=n$,证明 $r(AB)=r(B)$ (若 $r(B)=n$,则 $r(AB)=r(A)$).

$r(AB)\le r(B)$, $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n=r(B)$.

2. 设 A,B 是 n 阶方阵,且 $r(A)=r$, $r(B)=s$ 则 $r(A,AB)=$_________, $r\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}=$________.

$(A,AB)\to(A,0)$ 列变换, $\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}$行变换.

3. 设矩阵 $A_{s\times m}$, $B_{m\times n}$,证明 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解当且仅当 $r(AB)=r(B)$.

证明:必要性:设同解,则基础解系相同,则所含向量个数为 $n-r(AB)=n-r(B)$,从而 $r(AB)=r(B)$.

充分性:设 $r(AB)=r(B)$,则 $n-r(AB)=n-r(B)$,同时若列向量 x_0 满足 $Bx_0=0$,则 $ABx_0=0$,即 $BX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解,从而 $BX=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 可以看做是 $ABX=0$ 的解集中的一个无关向量组,从而可以扩充为 $ABX=0$ 的一个基础解系,但是 $n-r(AB)=n-r(B)$,所以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 也是 $ABX=0$ 的一个基础解系,即同解.

3, 设 $m\times n$ 实矩阵 A,证明 $r(A^TA)=r(A)$.

证明:考察两个齐次线性方程组: $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$. 首先 $Ax=0$ 的解都是 $A^TAx=0$ 的解.

其次,若 x_0 满足 $A^TAx_0=0$,则 $x_0^TA^TAx_0=0$,即 $(Ax_0)^TAx_0=0$.设 $Ax_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,则

$(Ax_0)^TAx_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$ 从而 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,即

$Ax_0=0$,从而 $A^TAx=0$ 的解也是 $Ax=0$ 的解,即 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解,则 $r(A^TA)=r(A)$.

五　矩阵的等价标准形

1. (1) 任一秩为 r 的矩阵都可表示为 r 个秩为1的矩阵之和.

(2) 任一秩为 r 的对称矩阵都可表示为 r 个秩为1的对称矩阵之和.

(3) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,存在列满秩 $n\times r$ 阵 P,行满秩 $r\times n$ 阵 Q,使得 $A=PQ$.

(4) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,证明

(a) 存在秩为 $n-r$ 的 n 阶阵 B,使得 $AB=0$.

(b) 存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 阶阵 B,使得 $AB=0$.

证明: (1) 对 $m\times n$ 阵 A,若 $r(A)=r$,存在可逆阵 P,Q,使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$,记 S_i ($1\le i\le r$)为 i 行 i 列位置元素为1其余元素为0的 $m\times n$ 阵,则 $A=P(S_1+S_2+\cdots+S_r)Q$,则

$A=PS_1Q+PS_2Q+\cdots+PS_rQ$.且 $r(PS_iQ)=1$ ($1\le i\le r$).

(2) 合同标准形（第五章二次型，可先不做）.

(3) 对 A,存在 m 阶可逆阵 P_1 和 n 阶可逆阵 Q_1,使得 $A=P_1\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1$,

则 $A=P_1\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1=P_1\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}\left(E_r,0\right)Q_1$.则 $P_1\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=P,\left(E_r,0\right)Q_1=Q$ 满足题意.

(4) 用等价标准形: 对 A,存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q,使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$,

(a) $AQ^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}=0$.令 $Q^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}=B$ 即可.

(b) $AQ^{-1}\begin{pmatrix}0\\E_{n-r}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}0\\E_{n-r}\end{pmatrix}=0$.令 $Q^{-1}\begin{pmatrix}0\\E_{n-r}\end{pmatrix}=B$ 即可.

此外,用齐次线性方程组的解: 对 $AX=0$,由于 $r(A)=r$,则 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个向量,设为

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$,则令 $B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r},0,\cdots,0)$ (n 阶)和 $B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$ 即可.

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵,且满足 $A^2=0,B^2=0$.

(1) 若 $A+B$ 可逆,证明 $r(A)=r(B)$.

(2) 写出满足 $A+B$ 可逆的两个四阶矩阵 A 和 B,使得 $A^2=0, B^2=0$.

(3) 举例说明 $A+B$ 可逆不是 A 和 B 秩相等的必要条件.

证明 $A(A+B)=A^2+AB=AB$, $(A+B)B=AB+B^2=AB$, 则 $A(A+B)=(A+B)B$,

$A+B$ 可逆,则 $r(A(A+B))=r(A)=r((A+B)B)=r(B)$.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

下列命题是否正确.

1. 若 A,B 都是 n 阶方阵,则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

2. 若矩阵 A,B,C 满足 $AB=AC$,则 $B=C$.

3. 若矩阵 A 满足 $A^2=E$,则 $A=\pm E$.

4. 若矩阵 A 满足 $A^2=A, |A-E|\neq 0$,则 $A=0$.

5. 若可逆矩阵 A 经初等变换可以化为方阵 B,则 $A^{-1}=B^{-1}$.

6. 若 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=E$,则 $BCA=E, A^{-1}C^{-1}B^{-1}=E, C^TB^TA^T=E.$

7. 若 A 可逆,且 $|A+AB|=0$,则 $|B+E|=0$.

8. 若 n 阶方阵 A 的行列式等于零,则 $A^*=0$.

9. 对方阵进行初等变换,不改变方阵的行列式.

10. 若分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ 满足 $|M|\neq 0$, A,B,C,D 都是方阵,则 $M^{-1}=\dfrac{1}{|AD-BC|}\begin{pmatrix}D&-B\\-C&A\end{pmatrix}$.

11. 设 A 为 n 阶方阵,则 $|-A|=-|A|$.

12. 若 n 阶方阵 $A,B,A+B$ 都是可逆矩阵,则 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

13. 若 A 为 n 阶方阵, k 为任意实数,则 $|kA|=k|A|$.

14. 已知$Q=\begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$,$P$ 为3阶非零矩阵,且满足$PQ=0$,若$a\neq 8$,则必有$r(P)=1$.

15. 已知A是$m\times n$矩阵,则存在矩阵B,使得$AB=0$,且有$r(A)+r(B)=n$.

16. 若n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$及$n$维列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价,则矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$等价.

17. 若矩阵A,B,C满足$A=BC$,则A的列向量组可由B的列向量组线性表出.