16级线性方程组月考答案

一、填空题：

1. $\alpha=(\frac{2}{3},1,-2)$．2. $a\neq 3$．3. $a=-1$．4. $r+1$．

5. $(1,1,1,1)^T+k(1,-1,-1,-1)^T$，其中$k$任意．6. $k(1,1,\cdots,1)^T$，其中k任意．

7. $\lambda=1$，$\lambda=0$．8. $n-r$．9. $r(A)=r(\overline{A})<n$．

二、求向量组$\alpha_1=(1,0,-1,0),\alpha_2=(-1,2,0,1),\alpha_3=(-1,4,-1,2),\ \alpha_4=(0,0,7,7)$，$\alpha_5=(0,1,1,2)$的秩和一个极大线性无关组．

解 列向量摆成矩阵初等行变换化为阶梯

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&2&4&0&1\\-1&0&-1&7&1\\0&1&2&7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则向量的秩为4，一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$．

三、问λ取何值时，线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3=1,\\-x_1+\lambda x_2-x_3=-\lambda,\\-x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$有唯一解？没有解？有无穷多解？有解时求解．

解 $\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\-1&-1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&-1&-1&1\\-1-\lambda&\lambda+1&0&-\lambda-1\\0&-1-\lambda&\lambda+1&\lambda^2+\lambda\end{array}\right)$

(1) 若$\lambda=-1$，则$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$，有无穷多解，$x_1=-1-x_2-x_3$．

(2) 若$\lambda\neq-1$，则$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\-1&-1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&-1\\0&-1&1&\lambda\\0&\lambda-1&-1&1-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&-1\\0&-1&1&\lambda\\0&0&\lambda-2&(\lambda-1)^2\end{array}\right)$

若$\lambda\neq 2$，则有唯一解$x_1=\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2},x_2=\dfrac{1}{\lambda-2},x_3=\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$.

若$\lambda=2$，则无解.

四、求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ 2x_1+6x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=0, \\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=0 \end{cases}$的一组基础解系.

解 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可得一组基础解系为$\eta_1=(3,-1,0,0,0),\eta_2=(7,0,1,5,0),\eta_3=(1,0,-2,0,5)$.

五、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \in F^m$是$n$个列向量，其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$，证明：

(1) 此方程组必有无穷多个解；

(2) 记$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为此方程组的任一解，则必有$x_n=1$.

证明 (1) 由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，得到$r(A)=n-1$，而$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，从而$AX=\beta$有特解$X_0=(1,1,\cdots,1)^T$，则$AX=\beta$有无穷多个解.

(2) 假设存在$AX=\beta$的一个解$X_0=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$的第$n$个分量非$1$.则

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，从而

$(k_1-1)\alpha_1+(k_2-1)\alpha_2+\cdots+(k_n-1)\alpha_n=0$，而$k_n\neq 1$，则$k_n-1\neq 0$，从而$\alpha_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表出.而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，可知$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表出，从而$\alpha_n$可由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表出，与$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关矛盾，从而$AX=\beta$的任一解的第$n$个分量为$1$.