§2 收敛数列的性质

本节首先考察收敛数列这个新概念有哪些优良性质？然后学习怎样运用这些性质.

一、惟一性

二、有界性

三、保号性

四、保不等式性

五、迫敛性(夹逼原理)

六、极限的四则运算

七、一些例子

一、惟一性

定理 2.2 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a，b 都是 $\{a_n\}$ 的极限，则对于任何正数 $\varepsilon > 0$,

$\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon; \tag{1}$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon. \tag{2}$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 (1), (2)同时成立,

从而有

$$|a - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $a = b$. **P4第三题**

二、有界性

定理 2.3 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列,

即存在 $M>0$, 使得 $|a_n|\le M$, $n=1,\ 2,\cdots$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于正数 $\varepsilon=1$, $\exists N$, $n>N$ 时, 有

$$|a_n - a| < 1, \text{ 即 } a-1 < a_n < a+1.$$

若令 $M=\max\{\,|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-1|,|a+1|\,\}$,

则对一切正整数 n, 都有 $|a_n|\le M$.

前页 后页 返回

注 (1) 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 发散. 这说明有界性只是数列收敛的必要条件，而非充分条件.

(2) 无界数列必发散.

三、保号性

定理 2.4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，对于任意实数 a'，$0 < a' < a$，则存在 N，当 $n > N$ 时，$a' < a_n$.

证 取 $\varepsilon = a - a' > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$

$$a' = a - \varepsilon < a_n .$$

注 若 $a > 0$（或 $a < 0$），我们可取 $a' = \dfrac{a}{2}$（或 $c = \dfrac{a}{2}$），则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$（或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$）.

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$， 所以由

定理 2.4，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ \text{即}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

前页 后页 返回

四、保不等式性

定理 2.5 设$\{a_n\},\{b_n\}$均为收敛数列，如果存在正数N_0，当$n>N_0$时，有$a_n\le b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若$b<a$，取$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，由保号性定理，存在$N>N_0$，当$n>N$时，

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\quad b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故$a_n>b_n$，导致矛盾. 所以$a\le b$.

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \le b_n$ 改为 $a_n < b_n$,

也只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

这就是说, 即使条件是严格不等式, 结论却不一定是严格不等式.

例如, 虽然 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

五、迫敛性（夹逼原理）

定理 2.6 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$都以 a 为极限，数列$\{c_n\}$满足：存在 N_0 ,当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \le c_n \le b_n$ ，则$\{c_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证 对任意正数ε,因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 所以分别存在 N_1, N_2, 使得当 $n > N_1$ 时, $a-\varepsilon < a_n$;

当$n > N_2$时，$b_n < a+\varepsilon$. 取 $N = \max\{ N_0, N_1, N_2 \}$,

当 $n > N$ 时，$a-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a+\varepsilon$. 这就证得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

例2 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 设$h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, 则有

$$n = (1+h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \quad (n \geq 2),$$

故 $1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \leq 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1,$$

所以由迫敛性，求得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

前页 后页 返回

六、四则运算法则

定理2.7 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列,则$\{a_n+b_n\}$,$\{a_n-b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$也都是收敛数列, 且有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 当$b_n$为常数$c$时,

$\lim\limits_{n\to\infty}cb_n=c\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(3) 若$b_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, 则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也收敛，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\Big/\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

注. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$,

P26 第8题

证明 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$, 所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n .$$

证明 (2) 因 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 设 $|b_n| \le M$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

于是 $|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|$

$$\le|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|<2\varepsilon,$$

由ε的任意性，证得

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证明 (3) 因为 $\dfrac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\dfrac{1}{b_n}$，由(2)，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

由于 $b\ne0$，据保号性，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，

前页 后页 返回

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon,$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \le \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \le \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

七、一些例子

例3 用四则运算法则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中 $m \le k$, $a_m b_k \ne 0$.

解 依据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0 \ (\alpha > 0)$, 分别得出:

(1) 当 $m=k$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_m + a_{m-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{m-1}} + a_0\frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{m-1}} + b_0\frac{1}{n^m}}$$

$$= \frac{a_m}{b_m}.$$

(2) 当 $m < k$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-m}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_m + a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}}{b_k+b_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{k-1}}+b_0\frac{1}{n^k}}$$

$$=0\cdot\frac{a_m}{b_k}=0.$$

所以

$$原式=\begin{cases}\frac{a_m}{b_m}, & m=k,\\ 0, & m<k.\end{cases}$$

前页 后页 返回

例4 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证 由于$a_n \geq 0$, 根据极限的保不等式性, 有$a \geq 0$.

对于任意 $\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可得:

(1) $a = 0$ 时, 有 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$;

(2) $a > 0$ 时, 有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} .$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.

例5 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 根据极限的保号性, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$, 即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$, 所以由极限的迫敛性, 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}\ (a\neq -1)$.

解 (1) $|a|<1$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, 所以由极限四则运算法则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a^n}=0$.

(2) $a=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $|a|>1$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)=0$, 故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/a^n}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)}=1.$$

例7 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 由

$$a \le \sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n} \le \sqrt[n]{m}\, a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\, a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n} = a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

定义1 设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为N_+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为$\{a_n\}$的子列, 简记为$\{a_{n_k}\}$.

注 (1)$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项均选自$\{a_n\}$,且保持这些项在$\{a_n\}$中的先后次序. $\{a_n\}$也是$\{a_n\}$的子列, 此时$n_k = k$.

(2)$\{a_{n_k}\}$中的第k项是$\{a_n\}$中的第n_k项, 故总有$n_k \geq k$.

定理 2.8 若数列$\{a_n\}$收敛到a,则$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$也收敛到a.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则$\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. 设$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任意一个子列. 由于$n_k \ge k$,因此$k > N$时, $n_k \ge k > N$, 亦有$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注

（1）若数列收敛于a，则它的任何子列$\left\{a_{n_k}\right\}$也收敛于a.

前页 后页 返回

（2）若存在$\{a_n\}$的两个子列$\{a^{(1)}{}_{n_k}\}$、$\{a^{(2)}{}_{n_k}\}$收敛于不同的值，则此数列必发散.

（3）若$\{a_n\}$存在一个子列$\{a_{n_k}\}$发散，则$\{a_n\}$发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a.$

例8 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a.$$

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为$2n > N, 2n-1 \geq N$,所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

(充分性) 设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,

当 $k > N$ 时,

$$|a_{2k-1}-a|<\varepsilon,\quad |a_{2k}-a|<\varepsilon\,.$$

令 $N=2K$, 当 $n>N$ 时, 则有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\,.$

例9 若 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

解 显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -(1-\frac{1}{2k-1}) = -1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (1-\frac{1}{2k}) = 1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.

复习思考题

1. 极限的保号性与保不等式性有什么不同?

2. 仿效例题5的证法, 证明: 若$\{a_n\}$为正有界数列, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=\sup\{a_n\}.$$