1. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$,则 $2A-B^T=$ ______________; $AB=$ ___________ .

$2A=\begin{pmatrix}4&0\\-6&2\end{pmatrix}$ $B^T=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}$

$2A-B^T=\begin{pmatrix}4&0\\-6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-9&0\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}2&6\\-4&-7\end{pmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $A^{-1}=$ ______________, $A^*=$ ______________ , $A^n=$ __________ .

由 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$ 得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

由 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ 可得 $A^*=|A|\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ 下用数学归纳法证明

当n=1时 $A^1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 当 n=2时 $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 符合.

假设当小于等于n时原式成立.

$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+1&\frac{(n+1)(n+2)}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 符合. 故 $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

2, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 设 $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^n=(E+B)^n=E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2=E+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. 设 A 是一4阶可逆阵,若 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&-1&4&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$,则 $A=$ _____________.

由 $AA^*=|A|E$，可知 $A=|A|E(A^*)^{-1}=|A|(A^*)^{-1}$，故计算 $|A|$ 即可. $|(A^*)^{-1}|=27=\frac{1}{|A^*|}$，故

$\left|A^*\right|=\dfrac{1}{27}=|A|^3$，故$|A|=\dfrac{1}{3}$，代入求解.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. 设$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 6 & 2 & 0\\ 3 & a & 4\end{pmatrix}$, B是3阶非零矩阵, 且$AB=0$, 则$a=$________.

由课后题 14 可知|A|=0 ，解得 a =1/3.

5. 设$A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$是3阶方阵,$|A|=-2$,则$|\beta_1+2\beta_3,\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,3\beta_3|=$________ .

利用行列式得性质，得-12

6. 设A,B是n阶方阵，$|A|=2,|B|=-3$,则$\left|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}\right|=$__________

分析　应填$(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{6}$. 当矩阵A可逆时,常利用$A^*=|A|A^{-1}$来表示A的伴随矩阵.

$$\begin{aligned}|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}| &= |A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}| =\\ &|-3A^{-1}B^{-1}-2A^{-1}B^{-1}| = |-5A^{-1}B^{-1}| =\\ &(-5)^n|A^{-1}||B^{-1}| = (-5)^n\frac{1}{|A||B|} =\\ &\frac{(-5)^n}{-6} = (-1)^{n-1}\frac{5^n}{6}\end{aligned}$$

7. 设A,B均为3阶方阵,$|A|=2,|B|=3$,则$|2AB|=$_____,$\left||2A|B\right|=$_____,$\left|(-2A)^{-1}-3A^*\right|=$______.

$|2AB|=|2A|\cdot|B|=2^3|A||B|=8\times2\times3=48$

$\left||2A|B\right|=\left|2^3|A|B\right|=|16B|=16^3\cdot|B|=12288$

$\left|(-2A)^{-1}-3A^*\right|=\left|(-2A)^{-1}-3|A|A^{-1}\right|=\left|(-2A)^{-1}-6A^{-1}\right|=\left|-\frac{1}{2}A^{-1}-6A^{-1}\right|=\left|-\frac{13}{2}A^{-1}\right|=\left(-\frac{13}{2}\right)^3|A^{-1}|=\frac{-2197}{16}$

8. 设A,B均为3阶方阵,满足$AB-3A+B=0$,若$|A+E|=-1$,则$|B-3E|=$________.

解：

$(A+E)(B-3E)=AB-3A+B-3E=-3E$，　27

对上式两端取行列式，得解。

9. 若n阶方阵A与B只是第j列不同,给出$|A+B|$与$|A|+|B|$的关系等式________________________.

解:$|A+B|=|2\alpha_1,\cdots,\alpha+\beta,\cdots,2\alpha_n|=2^{n-1}\left(|\alpha_1,\cdots,\alpha,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta,\cdots,\alpha_n|\right)=2^{n-1}\left(|A|+|B|\right)$.

10. 方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$,则 $A^{-1}=$________,$(A+2E)^{-1}=$________,$(A-3E)^{-1}=$______.

由 $A^2-A-2E=0$，可得 $A(A-E)=2E$，从而 $A\frac{1}{2}(A-E)=E$，则 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=-4E$,从而 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

11. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^3=0$,则 $(E-A)^{-1}=$________________.

$(E-A)(E+A+A^2)=E$

12. 设 A,B 是 n 阶可逆阵, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是__________, $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为__________.

12. 设 A,B 是 n 阶可逆矩阵, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 $\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

解: ① $\left(\begin{array}{cc:cc} A & 0 & E & 0 \\ 0 & B & 0 & E \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & E & 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*=d\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & A & E & 0 \\ B & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & E \\ 0 & A & E & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & B^{-1} \\ 0 & E & A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $\therefore \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

13. 已知 A 是5阶方阵,α_1,α_2 是 $Ax=b$ 的不同的解,则 $r((A^*)^*)=$ ___0___.

$\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$ $Ax=0$ 有非零解 $\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow r(A)<5$

14. 设 A 是一个 n 阶矩阵,若 $r(A)=1$,则 $r(A^*)=$ $\begin{cases} 0, & n>2 \\ 1, & n=2 \end{cases}$;若 $r(A)=n-1$,则 $r(A^*)=$ ___1___.

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$,且 $r(A)=3$, 则 $k=$ ___-3___.

$|A|=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3$

16. 设 A 是 $n(\geq 3)$ 阶方阵, A 的各行元素之和为0,而 $A^*\neq 0$,则 $r(A)=$ ___$n-1$___.

$r(A)<n$ $r(A)\geq n-1$

17. 设 A,B 是 n 阶方阵,且 $r(A)=r$, $r(B)=s$ 则 $r(A,AB)=$ ___r___, $r\begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix}=$ ___s___.

$(A\ \ AB) \xrightarrow{-B} (A\ \ 0)$ $\begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix} \xrightarrow{-A} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$

$AB=(E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)$
$=E+(\frac{1}{a}-1)\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\underline{\alpha^T\alpha}\alpha^T$
$=E+(\frac{1}{a}-1-2a)\alpha\alpha^T=E$

18．设 A 为 n 阶方阵,且 $|A|=1$,则 $r(A)=$ $\underline{\quad n \quad}$.

19. 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$,$\underline{a<0}$, E 为 n 阶单位矩阵, $A=E-\alpha\alpha^T$, $B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$,若 A 的逆矩阵为 B ,则 $a=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

$\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$ $\quad 2a^2+a-1=0$

20. (1) 设 A 是3阶可逆方阵,将 A 的第一行的3倍加到第三行,再互换第二行和第三行后得到矩阵 B ,则 $BA^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$. $\quad (A\ E)\to(B\ BA^{-1})$

(2) 设 A 是3阶可逆方阵,将 A 的第一列的 -3 倍加到第三列,再将第一列的 -2 倍加到第二列,交换第一二列的位置后得到矩阵 B ,则 $A^{-1}B=$ $\underline{\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. $\quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} B \\ A^{-1}B \end{pmatrix}$

21. 设2阶矩阵 $A=P(2(2))P(1,2)P(1,2(3))$,则矩阵 $A=$ $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$, $\quad A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22．分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 经过一系列的初等列变换化为 $\begin{pmatrix} 2E \\ C \end{pmatrix}$,则 $C=$ $\underline{\quad 2BA^{-1} \quad}$

23．已知 $m>n$, $A\in P^{m\times n}$, $B\in P^{n\times m}$,则 $|AB|=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

$A(2A^{-1})=2E$
$B(2A^{-1})=$ ____

二．计算题

1. 求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.