第二章：排列与组合（一）

Outline

基本计数原理

集合的排列

集合的圆排列

定义 1.1

设$S_1, S_2, \ldots, S_m$为集合S的子集，且满足：

- $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$;
- $S_i \cap S_j = \emptyset$，对任意$1 \leq i \neq j \leq m$,

则称$\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$为集合$S$的划分（*partition*）.每个$S_i$称为该划分的部分*(part)*.

加法原理

设$\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$为有限集$S$的一个划分，则

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|,$$

其中$|S|$表示集合S的元素的个数.

例 1.2

从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船.一天中火车有4班，汽车有3班，轮船有2班. 问：一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同走法？

加法原理

设$\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$为有限集$S$的一个划分，则

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|,$$

其中$|S|$表示集合S的元素的个数.

例 1.2

从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船.一天中火车有4班，汽车有3班，轮船有2班. 问：一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同走法？

减法原理

设U是一个集合，$A\subseteq U$，令

$$\bar{A}=\{x\in U:x\notin A\},$$

则$|A|=|U|-|\bar{A}|$.

例 1.3

有多少个位数非零且个位数与十位数互异的两位数？

解： 令U表示所有两位数作成的集合，则$|U| = 90$. 记A为满足题设条件的两位数构成的集合，则$\bar{A}$中的元素为个位是0或者个位十位相等的两位数，即

$$\bar{A} = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}.$$

由减法原理知，满足条件的两位数共有$|U| - |\bar{A}| = 90 - 18 = 72$个.

例 1.3

有多少个位数非零且个位数与十位数互异的两位数？

解： 令U表示所有两位数作成的集合，则$|U|=90$. 记A为满足题设条件的两位数构成的集合，则$\bar{A}$中的元素为个位是0或者个位十位相等的两位数，即

$$\bar{A}=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90,11,22,33,44,55,66,77,88,99\}.$$

由减法原理知，满足条件的两位数共有$|U|-|\bar{A}|=90-18=72$个. ∎

乘法原理

设S是形如(a,b)的有序对构成的集合，其中第一个元素a来自一个大小为p的集合，而对于每一个a，元素b存在q种选择. 则$|S| = p \times q$.

例 1.4

有多少个位数非零且个位数与十位数互异的两位数？

解法二： 一个两位数可以看成是一对有序数(a, b)，其中a是十位数，b是个位数.由题意，$a \neq b$且a, b都不为0. 因此，a有9个选择，而对于任意选定的a，b都有8种选择. 由乘法原理知，满足条件的两位数共有$9 \times 8 = 72$个.

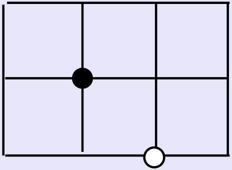
例 1.4

有多少个位数非零且个位数与十位数互异的两位数？

解法二： 一个两位数可以看成是一对有序数(a,b)，其中a是十位数，b是个位数.由题意，$a\neq b$且a,b都不为0. 因此，a有9个选择，而对于任意选定的a，b都有8种选择. 由乘法原理知，满足条件的两位数共有$9\times 8=72$个.

例 1.5

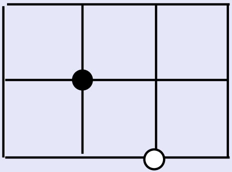
设有如下的棋盘.将一个白子和一个黑子放在棋盘线的交叉点上，但是不能放在同一条棋盘线上，共有多少种放法？



解： 第一个先放的棋子有12种放法，而对于第一个棋子的每一种放法，第二个棋子都只有6 种放法，因此由乘法原理，共有$12 \times 6 = 72$种放法.

例 1.5

设有如下的棋盘.将一个白子和一个黑子放在棋盘线的交叉点上，但是不能放在同一条棋盘线上，共有多少种放法？



解： 第一个先放的棋子有12种放法，而对于第一个棋子的每一种放法，第二个棋子都只有6 种放法，因此由乘法原理，共有$12 \times 6 = 72$种放法. ∎

一般形式的乘法原理： 设S是形如$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$的有序组构成的集合，其中第一个元素a_1来自一个大小为p_1的集合，而对于每一个$i : 1 \leq i < n$及给定的

$$a_1, a_2, \ldots, a_i,$$

a_{i+1}都有p_{i+1}种选择，则$|S| = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m$.

例 1.6

确定数

$$3^4 \times 5^2 \times 11^7 \times 13^8$$

的正整数因子的个数.

解：显然，所求的正因子必然形如

$$3^i \times 5^j \times 11^k \times 13^l,$$

其中$0 \le i \le 4, 0 \le j \le 2, 0 \le k \le 7, 0 \le l \le 8$.由乘法原理，因子总数为$5 \times 3 \times 8 \times 9 = 1080$.

例 1.6

确定数

$$3^4 \times 5^2 \times 11^7 \times 13^8$$

的正整数因子的个数.

解： 显然，所求的正因子必然形如

$$3^i \times 5^j \times 11^k \times 13^l,$$

其中$0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 7, 0 \leq l \leq 8$.由乘法原理，因子总数为$5 \times 3 \times 8 \times 9 = 1080$. ∎

例 1.7

在1000与9999之间有多少个各位数都不同的奇数？

解： 记S表示所有符合条件的四位数作成的集合.则S中的元素可以视为四元数组

$$(a, b, c, d),$$

其中a, b, c, d分别表示千位、百位、十位、个位数字.

- 根据题意，个位数字取自于集合$\{1, 3, 5, 7, 9\}$,即d有5种取法;
- 当任意取定个位数字$d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$之后，由于千位数字与个位数字不同且不能为0，因此千位数字只能在集合

$$\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{d\}$$

中选,无论d如何选定，a总有8种取法;

例 1.7

在1000与9999之间有多少个各位数都不同的奇数？

解： 记S表示所有符合条件的四位数作成的集合.则S中的元素可以视为四元数组

$$(a, b, c, d),$$

其中a, b, c, d分别表示千位、百位、十位、个位数字.

- 根据题意，个位数字取自于集合$\{1, 3, 5, 7, 9\}$,即d有5种取法;
- 当任意取定个位数字$d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$之后，由于千位数字与个位数字不同且不能为0，因此千位数字只能在集合

$$\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{d\}$$

中选,无论d如何选定，a总有8种取法;

例 1.7

在1000与9999之间有多少个各位数都不同的奇数？

解： 记S表示所有符合条件的四位数作成的集合.则S中的元素可以视为四元数组

$$(a, b, c, d),$$

其中a, b, c, d分别表示千位、百位、十位、个位数字.

- 根据题意，个位数字取自于集合$\{1, 3, 5, 7, 9\}$,即d有5种取法；
- 当任意取定个位数字$d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$之后，由于千位数字与个位数字不同且不能为0，因此千位数字只能在集合

$$\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{d\}$$

中选,无论d如何选定，a总有8种取法;

例 1.7

在1000与9999之间有多少个各位数都不同的奇数？

解： 记S表示所有符合条件的四位数作成的集合.则S中的元素可以视为四元数组

$$(a, b, c, d),$$

其中a, b, c, d分别表示千位、百位、十位、个位数字.

- 根据题意，个位数字取自于集合$\{1, 3, 5, 7, 9\}$,即d有5种取法;
- 当任意取定个位数字$d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$之后，由于千位数字与个位数字不同且不能为0，因此千位数字只能在集合

$$\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{d\}$$

中选,无论d如何选定，a总有8种取法;

- 类似地分析，当选定a, d之后，百位数字b只能在

$$\{0, 1, 2, \dots 9\} \setminus \{a, d\}$$

中选取，故有8种选取方法；

- 选定a, b, d之后，十位数字只能取自

$$\{0, 1, 2, \dots 9\} \setminus \{a, b, d\}.$$

共有7种取法.

由乘法原理知，所求整数的个数为$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$. ∎

注：若以不同顺序分析各位数的选取方法，可能会导致乘法原理不可用.

- 类似地分析，当选定a,d之后，百位数字b只能在
$$\{0,1,2,\ldots 9\}\setminus\{a,d\}$$
中选取，故有8种选取方法；
- 选定a,b,d之后，十位数字只能取自
$$\{0,1,2,\ldots 9\}\setminus\{a,b,d\}.$$
共有7种取法.

由乘法原理知，所求整数的个数为$5\times 8\times 8\times 7=2240$. ∎

注：若以不同顺序分析各位数的选取方法，可能会导致乘法原理不可用.

- 类似地分析，当选定a, d之后，百位数字b只能在

$$\{0, 1, 2, \dots 9\} \setminus \{a, d\}$$

中选取，故有8种选取方法；

- 选定a, b, d之后，十位数字只能取自

$$\{0, 1, 2, \dots 9\} \setminus \{a, b, d\}.$$

共有7种取法.

由乘法原理知，所求整数的个数为$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240.$ ∎

注：若以不同顺序分析各位数的选取方法，可能会导致乘法原理不可用.

- 类似地分析，当选定a, d之后，百位数字b只能在

$$\{0, 1, 2, \ldots 9\} \setminus \{a, d\}$$

  中选取，故有8种选取方法；
- 选定a, b, d之后，十位数字只能取自

$$\{0, 1, 2, \ldots 9\} \setminus \{a, b, d\}.$$

  共有7种取法.

由乘法原理知，所求整数的个数为$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240.$ ∎

注：若以不同顺序分析各位数的选取方法，可能会导致乘法原理不可用.

例 1.8

0与10000之间有多少个恰好有一位数字是5的整数？

解： 令S表示0与10000之间恰好有一位数字是5的整数．将S划分成4个部分：S_1, S_2, S_3, S_4，其中S_i表示S中的i位数构成的集合．

- 显然$S_1 = \{5\}$，故$|S_1| = 1$；
- S_2又可分为两个部分S_{21}, S_{22}，分别表示S_2中个位数字是5和十位数字是5的整数作成的集合．则$|S_{21}| = 8, |S_{22}| = 9$，因此由加法原理$|S_2| = 8 + 9 = 17$；

例 1.8

0与10000之间有多少个恰好有一位数字是5的整数？

解： 令S表示0与10000之间恰好有一位数字是5的整数．将S划分成4个部分：S_1, S_2, S_3, S_4，其中S_i表示S中的i位数构成的集合．

- 显然$S_1 = \{5\}$，故$|S_1| = 1$；
- S_2又可分为两个部分S_{21}, S_{22}，分别表示S_2中个位数字是5和十位数字是5的整数作成的集合．则$|S_{21}| = 8, |S_{22}| = 9$，因此由加法原理$|S_2| = 8 + 9 = 17$；

例 1.8

0与10000之间有多少个恰好有一位数字是5的整数？

解： 令S表示0与10000之间恰好有一位数字是5的整数. 将S划分成4个部分: S_1, S_2, S_3, S_4，其中S_i表示S中的i位数构成的集合.

- 显然$S_1 = \{5\}$，故$|S_1| = 1$；
- S_2又可分为两个部分S_{21}, S_{22}，分别表示S_2中个位数字是5和十位数字是5的整数作成的集合. 则$|S_{21}| = 8, |S_{22}| = 9$，因此由加法原理$|S_2| = 8 + 9 = 17$；

例 1.8

0与10000之间有多少个恰好有一位数字是5的整数？

解： 令S表示0与10000之间恰好有一位数字是5的整数. 将S划分成4个部分: S_1, S_2, S_3, S_4，其中S_i表示S中的i位数构成的集合.

- 显然$S_1 = \{5\}$，故$|S_1| = 1$；
- S_2又可分为两个部分S_{21}, S_{22}，分别表示S_2中个位数字是5和十位数字是5的整数作成的集合. 则$|S_{21}| = 8, |S_{22}| = 9$，因此由加法原理$|S_2| = 8 + 9 = 17$；

- 类似地，将S_3划分成三个部分S_{31}, S_{32}, S_{33}，分别表示S_3中个位数字是5、十位数字是5及百位数字是5的整数作成的集合。对于S_{31} 中的数，可先从$\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{5\}$中选定其百位数字，有8 种方法, 其次从$\{0, 1, 2 \ldots, 9\} \setminus \{5\}$中选定其十位数字，有9种方法，因此由乘法原理知$|S_{31}| = 8 \times 9 = 72.$ 类似可得

$$|S_{32}| = 8 \times 9 = 72, |S_{33}| = 9 \times 9 = 81.$$

由加法原理得

$$|S_3| = |S_{31}| + |S_{32}| + |S_{33}| = 225.$$

- 类似地，将S_4划分成四个部分，可得

$$|S_4| = 8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 + 9 \times 9 \times 9 = 2673.$$

由加法原理知，$|S| = 1 + 17 + 225 + 2673 = 2916.$ ∎

解法二： 直接用乘法原理。

- 类似地，将S_3划分成三个部分S_{31}, S_{32}, S_{33}，分别表示S_3中个位数字是5、十位数字是5及百位数字是5的整数作成的集合。对于S_{31} 中的数，可先从$\{1,2,\ldots,9\}\setminus\{5\}$中选定其百位数字，有8 种方法, 其次从$\{0,1,2\ldots,9\}\setminus\{5\}$中选定其十位数字，有9种方法，因此由乘法原理知$|S_{31}| = 8\times 9 = 72.$ 类似可得

$$|S_{32}| = 8\times 9 = 72, |S_{33}| = 9\times 9 = 81.$$

由加法原理得

$$|S_3| = |S_{31}| + |S_{32}| + |S_{33}| = 225.$$

- 类似地，将S_4划分成四个部分，可得

$$|S_4| = 8\times 9\times 9 + 8\times 9\times 9 + 8\times 9\times 9 + 9\times 9\times 9 = 2673.$$

由加法原理知，$|S| = 1 + 17 + 225 + 2673 = 2916.$

解法二： 直接用乘法原理。

- 类似地，将S_3划分成三个部分S_{31}, S_{32}, S_{33}，分别表示S_3中个位数字是5、十位数字是5及百位数字是5的整数作成的集合。对于S_{31} 中的数，可先从$\{1,2,\ldots,9\}\setminus\{5\}$中选定其百位数字，有8 种方法, 其次从$\{0,1,2\ldots,9\}\setminus\{5\}$中选定其十位数字，有9种方法，因此由乘法原理知$|S_{31}| = 8\times 9 = 72.$ 类似可得

$$|S_{32}| = 8\times 9 = 72, |S_{33}| = 9\times 9 = 81.$$

由加法原理得

$$|S_3| = |S_{31}| + |S_{32}| + |S_{33}| = 225.$$

- 类似地，将S_4划分成四个部分，可得

$$|S_4| = 8\times 9\times 9 + 8\times 9\times 9 + 8\times 9\times 9 + 9\times 9\times 9 = 2673.$$

由加法原理知，$|S| = 1 + 17 + 225 + 2673 = 2916.$ ∎

解法二： 直接用乘法原理。

- 类似地，将S_3划分成三个部分S_{31}, S_{32}, S_{33}，分别表示S_3中个位数字是5、十位数字是5及百位数字是5的整数作成的集合。对于S_{31} 中的数，可先从$\{1,2,\ldots,9\}\setminus\{5\}$中选定其百位数字，有8 种方法, 其次从$\{0,1,2\ldots,9\}\setminus\{5\}$中选定其十位数字，有9种方法，因此由乘法原理知$|S_{31}| = 8\times 9 = 72.$ 类似可得

$$|S_{32}| = 8\times 9 = 72, |S_{33}| = 9\times 9 = 81.$$

由加法原理得

$$|S_3| = |S_{31}| + |S_{32}| + |S_{33}| = 225.$$

- 类似地，将S_4划分成四个部分，可得

$$|S_4| = 8\times 9\times 9 + 8\times 9\times 9 + 8\times 9\times 9 + 9\times 9\times 9 = 2673.$$

由加法原理知，$|S| = 1 + 17 + 225 + 2673 = 2916.$ ∎

解法二： 直接用乘法原理。

除法原理：

设S被划分成k个部分：$S_1, S_2, \ldots S_k$，且

$$|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_k| = m,$$

则$k = \frac{|S|}{m}$.

例 1.9

在一组鸽巢中有740只鸽子.如果每个鸽巢中有5只鸽子，则鸽巢的个数为

$$\frac{740}{5} = 148.$$

除法原理：

设S被划分成k个部分：$S_1, S_2, \ldots S_k$，且

$$|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_k| = m,$$

则$k = \frac{|S|}{m}$.

例 1.9

在一组鸽巢中有740只鸽子.如果每个鸽巢中有5只鸽子，则鸽巢的个数为

$$\frac{740}{5} = 148.$$

Outline

基本计数原理

集合的排列

集合的圆排列

定义 2.1

设S是一个n元集合，r是一个非负整数. 集合S 的一个r-排列是S中的r 个元素的一个有序放置. n元集的所有r-排列数记为$P(n,r)$. 集合S 的一个n-排列又称为集合S的一个排列. 定义$P(n,0)=1$.

例 2.2

设$S=\{a,b,c\}$，则S的所有2排列为:

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb,$$

而S的所有排列为

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

定义 2.1

设S是一个n元集合，r是一个非负整数. 集合S 的一个r-排列是S中的r 个元素的一个有序放置. n元集的所有r-排列数记为$P(n,r)$. 集合S 的一个n-排列又称为集合S的一个排列. 定义$P(n,0)=1$.

例 2.2

设$S=\{a,b,c\}$，则S的所有2排列为:

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb,$$

而S的所有排列为

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

定理 2.3

设n为正整数且$r \leq n$，则

$$P(n,r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!},$$

其中$i! = 1 \times 2 \times \cdots \times i$ （规定$0! = 1$）.

注: 一个n元集S的排列个数为$n!$.

定理 2.3

设n为正整数且$r \le n$，则

$$P(n,r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!},$$

其中$i! = 1 \times 2 \times \cdots \times i$ （规定$0! = 1$）.

注: 一个n元集S的排列个数为$n!$.

例 2.4

将26个字母排序使得任意两个元音字母a,e,i,o,u不连续出现，有多少种排法？

解：任何一个符合条件的排列，都可通过以下两个步骤得到：

- 给出21个辅音字母的任意一个排列$a_1, a_2, \ldots, a_{21}$;
- 记a_1前面的位置为第1个位置. 对任意$1 \le i \le 20$, 称a_i与a_{i+1}之间的位置为第$i+1$个位置，a_{21}后面的位置称为第22个位置. 由于任意两个元音字母不能相邻，因此只能在这22个位置中任选一个放a, 剩下的21个位置中任选一个放e，等.

由乘法原理知，所求排列的个数为

$$21! \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 = 21! \times \frac{22!}{17!}.$$

例 2.4

将26个字母排序使得任意两个元音字母*a*,*e*,*i*,*o*,*u*不连续出现，有多少种排法？

解：任何一个符合条件的排列，都可通过以下两个步骤得到：

- 给出21个辅音字母的任意一个排列$a_1, a_2, \ldots, a_{21}$;
- 记a_1前面的位置为第1个位置. 对任意$1 \leq i \leq 20$, 称a_i与a_{i+1}之间的位置为第$i+1$个位置，a_{21}后面的位置称为第22个位置. 由于任意两个元音字母不能相邻，因此只能在这22个位置中任选一个放a, 剩下的21个位置中任选一个放e，等.

由乘法原理知，所求排列的个数为

$$21! \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 = 21! \times \frac{22!}{17!}.$$

例 2.4

将26个字母排序使得任意两个元音字母*a*,*e*,*i*,*o*,*u*不连续出现，有多少种排法？

解： 任何一个符合条件的排列，都可通过以下两个步骤得到：

- 给出21个辅音字母的任意一个排列$a_1, a_2, \ldots, a_{21}$;
- 记a_1前面的位置为第1个位置. 对任意$1 \leq i \leq 20$, 称a_i与a_{i+1}之间的位置为第$i+1$个位置，a_{21}后面的位置称为第22个位置. 由于任意两个元音字母不能相邻，因此只能在这22个位置中任选一个放a, 剩下的21个位置中任选一个放e，等.

由乘法原理知，所求排列的个数为

$$21! \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 = 21! \times \frac{22!}{17!}.$$

例 2.4

将26个字母排序使得任意两个元音字母*a*,*e*,*i*,*o*,*u*不连续出现，有多少种排法？

解： 任何一个符合条件的排列，都可通过以下两个步骤得到：

- 给出21个辅音字母的任意一个排列$a_1, a_2, \ldots, a_{21}$;
- 记a_1前面的位置为第1个位置. 对任意$1 \le i \le 20$, 称a_i与a_{i+1}之间的位置为第$i+1$个位置，a_{21}后面的位置称为第22个位置. 由于任意两个元音字母不能相邻，因此只能在这22个位置中任选一个放a, 剩下的21个位置中任选一个放e，等.

由乘法原理知，所求排列的个数为

$$21! \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 = 21! \times \frac{22!}{17!}.$$

∎

例 2.5

有多少满足下列条件的七位数：

(I) 各位数字取自$\{1,2,\ldots,9\}$;

(II) 各位数字互不相同;

(III) 数字$5,6$不相邻.

解：将所有满足条件的七位数集合S划分成以下四个部分：

- S_1：数字$5,6$均不出现；
- S_2：数字5出现而6不出现；
- S_3：数字6出现而5不出现；
- S_4：数字$5,6$都出现.

例 2.5

有多少满足下列条件的七位数：

(I) 各位数字取自$\{1, 2, \ldots, 9\}$;

(II) 各位数字互不相同;

(III) 数字$5, 6$不相邻.

解： 将所有满足条件的七位数集合S划分成以下四个部分：

- S_1：数字$5, 6$均不出现；
- S_2：数字5出现而6不出现；
- S_3：数字6出现而5不出现；
- S_4：数字$5, 6$都出现.

(1) 显然，S_1中的任意七位数可以看成是$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_1| = 7! = 5040$;

(2) 可以按照如下方式得到S_2中的整数：先选定5所在的位数，有7种选择, 再选定$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个6-排列表示其余各位数字的顺序. 由乘法原理知$|S_2| = 7 \times P(7,6) = 7 \times 7! = 35280$.

(3) 与(2)的推导类似，可得$|S_3| = 7 \times 7! = 35280$.

(1) 显然，S_1中的任意七位数可以看成是$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_1| = 7! = 5040$;

(2) 可以按照如下方式得到S_2中的整数：先选定5所在的位数，有7种选择, 再选定$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个6-排列表示其余各位数字的顺序. 由乘法原理知$|S_2| = 7 \times P(7,6) = 7 \times 7! = 35280$.

(3) 与(2)的推导类似，可得$|S_3| = 7 \times 7! = 35280$.

(1) 显然，S_1中的任意七位数可以看成是$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_1| = 7! = 5040$;

(2) 可以按照如下方式得到S_2中的整数：先选定5所在的位数，有7种选择, 再选定$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个6-排列表示其余各位数字的顺序. 由乘法原理知$|S_2| = 7 \times P(7,6) = 7 \times 7! = 35280$.

(3) 与(2)的推导类似，可得$|S_3| = 7 \times 7! = 35280$.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分：

① S_{41}:数字5出现在个位. 则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列. 因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600$.

② S_{42}:数字5出现在最高位. 类似分析可得$|S_{42}| = 12600$.

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择. 一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400$.

故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600$.
由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200$. ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。
另解：用减法原理.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分：

① S_{41}:数字5出现在个位. 则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列. 因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600$.

② S_{42}:数字5出现在最高位. 类似分析可得$|S_{42}| = 12600$.

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择. 一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400$.

故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600$.
由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200$. ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。
另解：用减法原理.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分：

① S_{41}:数字5出现在个位. 则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列. 因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600.$

② S_{42}:数字5出现在最高位. 类似分析可得$|S_{42}| = 12600.$

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择. 一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400.$

故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600.$
由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200.$ ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。
另解：用减法原理.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分：

① S_{41}:数字5出现在个位．则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列．因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600$.

② S_{42}:数字5出现在最高位．类似分析可得$|S_{42}| = 12600$.

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择．一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400$.

故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600$.

由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200$. ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。

另解：用减法原理.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分：

① S_{41}:数字5出现在个位. 则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列. 因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600$.

② S_{42}:数字5出现在最高位. 类似分析可得$|S_{42}| = 12600$.

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择. 一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400$.

故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600$.
由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200$. ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。
另解：用减法原理.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分:

① S_{41}:数字5出现在个位. 则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列. 因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600$.

② S_{42}:数字5出现在最高位. 类似分析可得$|S_{42}| = 12600$.

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择. 一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400$.

故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600$.
由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200$. ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。
另解：用减法原理.

(4) 根据5所在的位数可将S_4分成三个部分：

① S_{41}:数字5出现在个位. 则6可以出现在除去个位、十位以外的其余5个位置，剩余5位数字可以视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个5-排列. 因此$|S_{41}| = 5 \times P(7,5) = \frac{5\times 7!}{2!} = 12600$.

② S_{42}:数字5出现在最高位. 类似分析可得$|S_{42}| = 12600$.

③ S_{43}:数字5出现在其他位数上，有5个位数可以选择. 一旦选定数字5的位数，数字6所在的位数只能有4个选择，其余5位数字则视为$\{1,2,3,4,7,8,9\}$的一个排列，因此$|S_{43}| = 5 \times 4 \times P(7,5) = 50400$.

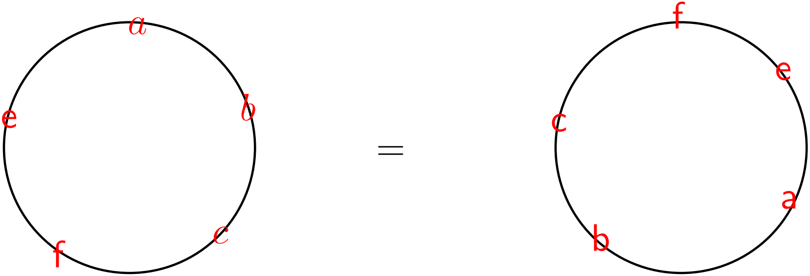
故$|S_4| = 12600 + 12600 + 50400 = 75600$.
由加法原理知，$|S| = 5040 + 35280 + 35280 + 75600 = 151200$. ∎

注：(4)也可以用插空方法求解。
另解：用减法原理.

Outline

定义 3.1

设S是一个n元集，$r \le n$. 从S中不重复地取出r个元素排放在一个圆周上，叫做S 的一个r-圆排列. 如果一个r-圆排列旋转可以得到另一个r-圆排列，则认为这两个圆排列相同. 圆排列也称为循环排列（*circular permutation*）.



定理 3.2

设$1 \leq r \leq n$, 任意n元集合S的r圆排列个数为

$$\frac{P(n,r)}{r}.$$

证明: 构造一个从S的r-线排列集合$\Pi(S)$到r-圆排列集合$C\Pi(S)$的映射φ如下：设$\pi = a_1a_2\cdots a_r \in \Pi(S)$，将$a_1$置于一个圆周上，然后依顺时针方向依次放置$a_2, a_3, \ldots, a_r$得到一个圆排列$\pi' = \varphi(\pi)$. 显然这是一个满射, 且对任意圆排列$\pi' \in C\Pi(S)$，$\pi'$恰有$r$个原像. 设$a_1a_2\cdots a_r$是它的一个原像，则$\pi'$的所有原像为：

定理 3.2

设$1 \le r \le n$, 任意n元集合S的r圆排列个数为

$$\frac{P(n,r)}{r}.$$

证明：构造一个从S的r-线排列集合$\Pi(S)$到r-圆排列集合$C\Pi(S)$的映射φ如下：设$\pi = a_1a_2\cdots a_r \in \Pi(S)$，将$a_1$置于一个圆周上，然后依顺时针方向依次放置$a_2, a_3, \ldots, a_r$得到一个圆排列$\pi' = \varphi(\pi)$. 显然这是一个满射，且对任意圆排列$\pi' \in C\Pi(S)$，$\pi'$恰有$r$个原像. 设$a_1a_2\cdots a_r$是它的一个原像，则$\pi'$的所有原像为：

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_r & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ & & & \cdots & & \\ a_r & a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-2} & a_{r-1} \end{array}$$

因此

$$\{\varphi^{-1}(\pi')|\pi' \in C\Pi(S)\}$$

构成了r-线排列集合$\Pi(S)$的一个划分，且每个部分$\varphi^{-1}(\pi')$ 都恰有r个元素，由除法原理知：

$$|C\Pi(S)| = \frac{|\Pi(S)|}{r} = \frac{P(n,r)}{r}.$$

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_r & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ & & & \cdots & & \\ a_r & a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-2} & a_{r-1} \end{array}$$

因此

$$\{\varphi^{-1}(\pi')|\pi' \in C\Pi(S)\}$$

构成了r-线排列集合$\Pi(S)$的一个划分，且每个部分$\varphi^{-1}(\pi')$ 都恰有r个元素，由除法原理知：

$$|C\Pi(S)| = \frac{|\Pi(S)|}{r} = \frac{P(n,r)}{r}.$$

∎

推论 3.3

n元集S的圆排列个数为$(n-1)!$.

例 3.4

10个人围坐一圆桌，其中两个人不愿挨着彼此坐. 共有多少种坐法？

解： 设甲乙两人不愿挨着彼此坐. 10 个人要围坐在一个圆桌边，共有

$$\frac{P(10,10)}{10}=9!$$

种坐法，其中甲和乙挨着坐的坐法有

$$2\times\frac{P(9,9)}{9}=2\times 8!$$

种，故满足要求的坐法有$9!-2\times 8!=7\times 8!$种.

推论 3.3

n元集S的圆排列个数为$(n-1)!$.

例 3.4

10个人围坐一圆桌，其中两个人不愿挨着彼此坐. 共有多少种坐法？

解：设甲乙两人不愿挨着彼此坐. 10 个人要围坐在一个圆桌边，共有

$$\frac{P(10,10)}{10}=9!$$

种坐法，其中甲和乙挨着坐的坐法有

$$2\times\frac{P(9,9)}{9}=2\times 8!$$

种，故满足要求的坐法有$9!-2\times 8!=7\times 8!$种.

推论 3.3

n元集S的圆排列个数为$(n-1)!$.

例 3.4

10个人围坐一圆桌，其中两个人不愿挨着彼此坐. 共有多少种坐法？

解： 设甲乙两人不愿挨着彼此坐. 10 个人要围坐在一个圆桌边，共有

$$\frac{P(10,10)}{10}=9!$$

种坐法，其中甲和乙挨着坐的坐法有

$$2\times\frac{P(9,9)}{9}=2\times 8!$$

种，故满足要求的坐法有$9!-2\times 8!=7\times 8!$种.

解法二：
由于甲和乙不能挨着坐，所以甲的左边和右边只能让其余的8 个人坐，有8×7 种坐法，而剩下的7 个座位的坐法有$7!$ 个. 故满足要求的坐法有$8 \times 7 \times 7! = 7 \times 8!$ 种. ∎

例 3.5

用20种不同颜色的念珠串成一条项链，能够做成多少不同的项链？

解： 用20 个不同色的念珠串成的一条项链，可以看成一个20 个元素的循环排列。注意到同一条项链，将其翻转后，项链本身并没有变，但作为循环排列，则是不相同的循环排列。故项链的总数为$19!/2$. ∎

解法二：
由于甲和乙不能挨着坐，所以甲的左边和右边只能让其余的8 个人坐，有8×7 种坐法，而剩下的7 个座位的坐法有7! 个. 故满足要求的坐法有$8 \times 7 \times 7! = 7 \times 8!$ 种. ∎

例 3.5

用20种不同颜色的念珠串成一条项链，能够做成多少不同的项链？

解：用20 个不同色的念珠串成的一条项链，可以看成一个20 个元素的循环排列。注意到同一条项链，将其翻转后，项链本身并没有变，但作为循环排列，则是不相同的循环排列。故项链的总数为$19!/2$. ∎

解法二：
由于甲和乙不能挨着坐，所以甲的左边和右边只能让其余的8 个人坐，有8×7 种坐法，而剩下的7 个座位的坐法有$7!$ 个. 故满足要求的坐法有$8\times 7\times 7! = 7\times 8!$ 种. ∎

例 3.5

用20种不同颜色的念珠串成一条项链，能够做成多少不同的项链？

解： 用20 个不同色的念珠串成的一条项链，可以看成一个20 个元素的循环排列。注意到同一条项链，将其翻转后，项链本身并没有变，但作为循环排列，则是不相同的循环排列。故项链的总数为$19!/2$. ∎