第一章　多项式

张彪

天津师范大学

数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

Outline

§1 数域

定义

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在 P 中，则称 P 为一个数域.

常用到的数域：有理数域 $\mathbb{Q}$ 、实数域 $\mathbb{R}$、复数域 $\mathbb{C}$.

数域定义的另一形式

定义

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）运算封闭，则称 P 为一个数域.

例 1

所有形如 $a + b\sqrt{2}$(a, b 是有理数) 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

例 1

所有形如 $a+b\sqrt{2}$(a,b 是有理数) 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证明 (i) $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(ii) 对四则运算封闭. 事实上 $\forall a,\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 设 $\alpha=a+b\sqrt{2},\beta=c+d\sqrt{2}$, 有

$$a\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$a\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

设 $\alpha=a+b\sqrt{2}\neq 0$, 则 $a-b\sqrt{2}\neq 0$ 且

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

注

有理数域是最小的数域。

证明 设 P 为一个数域.

- 由定义知 $1 \in P$,
- 又 P 对加法封闭知：$1+1=2$, $1+2=3$, $\cdots$, P 包含所有自然数；
- 由 $0 \in P$ 及 P 对减法的封闭性知：P 包含所有负整数，因而 P 包含所有整数；
- 任何一个有理数都可以表为两个整数的商，由 P 对除法的封闭性知：P 包含所有有理数.

即任何数域都包含有理数域作为它的一部分.

定义

设 x 是一个符号 (文字)，n 为非负整数. 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in P$, 称为系数在数域 P 中的一元多项式，简称为数域 P 上的一元多项式.

注

- 符号 x 可以是为未知数，也可以是其它待定事物.
- 这里 $a_i x^i$ 称为 i 次项, a_i 称为 i 次项系数.
  若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n x^n$ 为首项.
- 习惯上记为 $f(x), g(x), \ldots$ 或 $f, g, \ldots$ 上述形式表达式可写为
  $$\sum_{i=0} a_i x^i.$$

- 零多项式——系数全为 0 的多项式
- 多项式相等——$f(x) = g(x)$ 当且仅当同次项的系数全相等（系数为零的项除外）
- 多项式 $f(x)$ 的次数——$f(x)$ 的最高次项对应的幂次，记作 $\deg(f(x))$.
  如：$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ 的次数为 3，即 $\deg(f(x)) = 3$

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
x^2 - 3x + 1 & 3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 & 3x + 13 \\
 & 3x^3 & -9x^2 & +3x & & \\
\cline{2-5}
 & & 13x^2 & -8x & +6 & \\
 & & 13x^2 & -39x & +13 & \\
\cline{2-5}
 & & & 31x & -7 &
\end{array}
$$

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

例 2

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$$
$$g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

求 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

辗转相除法可按下面的格式来作:

$$
\begin{array}{r|r|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^4+3x^3-x^2-4x-3 & \frac{1}{3}x-\frac{1}{9} \\
 & x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x & =q_1(x) \\
\cline{2-2}
 & -\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3 & \\
 & -\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3} & \\
\cline{2-2}
 & r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3} &
\end{array}
$$

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

$-\frac{27}{5}x + 9$	$3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$	$x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$
$= q_2(x)$	$3x^3 + 15x^2 + 18x$	$x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x$	$= q_1(x)$
	$-5x^2 - 16x - 3$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3$	
	$-5x^2 - 25x - 30$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$	
	$r_2(x) = 9x + 27$	$r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}$	

$-\frac{27}{5}x+9$	$3x^3+10x^2+2x-3$	$x^4+3x^3-x^2-4x-3$	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$
$=q_2(x)$	$3x^3+15x^2+18x$	$x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$	$=q_1(x)$
	$-5x^2-16x-3$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$	
	$-5x^2-25x-30$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	
	$r_2(x)=9x+27$	$r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$	

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
-\frac{27}{5}x+9 & 3x^3+10x^2+2x-3 & x^4+3x^3-x^2-4x-3 & \frac{1}{3}x-\frac{1}{9} \\
=q_2(x) & 3x^3+15x^2+18x & x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x & =q_1(x) \\
\cline{2-3}
 & -5x^2-16x-3 & -\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3 & \\
 & -5x^2-25x-30 & -\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3} & \\
\cline{2-3}
 & {\color{blue}r_2(x)=9x+27} & {\color{red}r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}} & -\frac{5}{81}x-\frac{10}{81} \\
 & & -\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x & =q_3(x) \\
\cline{3-3}
 & & -\frac{10}{9}x-\frac{10}{3} & \\
 & & -\frac{10}{9}x-\frac{10}{3} & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$

$$\color{red}r_1(x)\color{black}=q_3(x)\color{blue}r_2(x)$$

因此

$$(f(x), g(x)) = \frac{1}{9} r_2(x) = x + 3$$

由

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) \\ &= g(x) - q_2(x)\left(f(x) - q_1(x)g(x)\right) \\ &= -q_2(x)f(x) + \left(1 + q_1(x)q_2(x)\right)g(x) \end{aligned}$$

于是，令

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{9} q_2(x) = \frac{3}{5}x - 1, \\ v(x) &= \frac{1}{9}\left(1 + q_1(x)q_2(x)\right) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x, \end{aligned}$$

就有

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$