

第二章 数列极限

§ 1 数列极限概念

- 一、数列的定义
- 二、一个经典的例子
- 三、收敛数列的定义
- 四、按定义验证极限
- 五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

第二章 数列极限

§ 1 数列极限概念



第二章 数 列极限

§ 1 数列极限 概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

① § 1 数列极限概念

- 一、数列的定义
- 二、一个经典的例子
- 三、收敛数列的定义
- 四、按定义验证极限
- 五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子
- 六、一些例子

数列极限概念

第二章 数 列极限

§1 数列极限 概念

- 一、数列的定义
- 二、一个经典的例子
- 三、收敛数列的定义
- 四、按定义验证极限
- 五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子
- 六、一些例子
- 作业

数列极限是整个数学分析最重要的基础之一,它不仅与函数极限密切相关,而且为今后学习级数理论提供了极为丰富的准备知识。

- 一、 数列的定义
- 二、 一个经典的例子
- 三、 收敛数列的定义
- 四、 按定义验证极限
- 五、 再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

一、数列的定义

第二章 数列极限

§ 1 数列极限概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

若函数 f 的定义域为全体正整数的集合 \mathbb{N}_+ , 则称

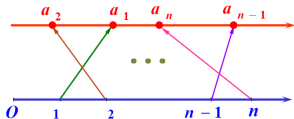
$$f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ 或 } f(n), n \in \mathbb{N}_+$$

为数列.

因为 \mathbb{N}_+ 的所有元素可以从小到大排列出来, 所以我们也
将数列写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简记为 $\{a_n\}$. 这里 a_n 称为数列 $\{a_n\}$ 的通项.



二、一个经典的例子

古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用了一句话：

“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。

它的意思是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限制地进行下去。

我们把每天截下部分(或剩下部分)的长度列出：

第一天截下 $\frac{1}{2}$ ，第二天截下 $\frac{1}{2^2}$ ， \cdots ，第 n 天截下 $\frac{1}{2^n}$ ， \cdots 。

这样就得到一个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \text{或} \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}.$$

容易看出：数列 $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$ 的通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限趋于 0。

三、收敛数列的定义

一般地说, 对于数列 $\{a_n\}$, 若当 n 充分变大时, a_n 能无限地接近某个常数 a , 则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a . 下面给出严格的数学定义.

定义 (1)

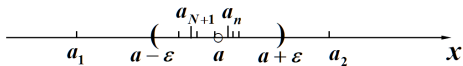
设 $\{a_n\}$ 为一个数列, a 为一个常数, 若对于任意的正数 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 又称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (\text{或} \quad a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty)$$

若 $\{a_n\}$ 不收敛, 则称 $\{a_n\}$ 为发散数列.



注 定义 1 这种陈述方式, 俗称为 “ $\varepsilon - N$ ” 定义.

四、按定义验证极限

为了加深对数列收敛定义的了解,下面结合例题加以说明,希望大家对“ $\varepsilon - N$ ”定义能有正确的认识.

例

用定义验证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

分析 对于任意正数 ε , 要使 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

证明

对于任意的正数 ε , 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 有

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

四、按定义验证极限

为了加深对数列收敛定义的了解,下面结合例题加以说明,希望大家对“ $\varepsilon - N$ ”定义能有正确的认识.

例

用定义验证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

分析 对于任意正数 ε , 要使 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

证明

对于任意的正数 ε , 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 有

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例题

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

例

用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (0 < |q| < 1)$.

分析 对于任意的正数 ε , 要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

证明

$\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $0 < \varepsilon < 1$), 取 $N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

例题

例

用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ($0 < |q| < 1$).

分析 对于任意的正数 ε , 要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

证明

$\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $0 < \varepsilon < 1$), 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right\rceil + 1$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

例题

例

用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}$.

分析 任给 $\varepsilon > 0$, 由

$$\left| \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n + 7}{3(3n^2 - n - 7)} \right|,$$

当 $n \geq 7$ 时,

$$n + 7 \leq 2n, \quad 3n^2 - n - 7 \geq 3n^2 - 2n \geq 2n^2,$$

故要使 $\left| \frac{n + 7}{3(3n^2 - n - 7)} \right| \leq \frac{2n}{6n^2} = \frac{1}{3n} < \varepsilon$ 成立, 只要 $n > \frac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

注意 解这个不等式是在 $n \geq 7$ 的条件下进行的.

例题证明

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

证明

对于任意的正数 ε , 取

$$N = \max \left\{ 7, \left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \right\rceil + 1 \right\},$$

当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon,$$

即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}.$$

例题证明

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

例

用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $a > 0$.

证明

这里只验证 $a > 1$ 的情形 ($0 < a < 1$ 时自证). 设 $\alpha_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$. 因为 $a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, 所以

$$0 < \alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a - 1}{n}.$$

故对于任意正数 ε , 取 $N = \left\lceil \frac{a - 1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

因此证得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

例题证明

例

用定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $a > 0$.

证明

这里只验证 $a > 1$ 的情形 ($0 < a < 1$ 时自证). 设 $\alpha_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$. 因为 $a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, 所以

$$0 < \alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a - 1}{n}.$$

故对于任意正数 ε , 取 $N = \left\lceil \frac{a - 1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

因此证得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

五、再论 “ $\varepsilon - N$ ” 说法

1. ε 的任意性: 定义中的 ε 用来刻画数列 $\{a_n\}$ 的通项与定数 a 的接近程度. 显然正数 ε 愈小, 表示 a_n 与 a 接近的程度愈高; ε 是任意的, 这就表示 a_n 与 a 可以任意接近. 要注意, ε 一旦给出, 在接下来计算 N 的过程中, 它暂时看作是确定不变的. 此外, 又因 ε 是任意正数, 所以 $2\varepsilon, 3\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \dots$ 等均可看作任意正数, 故数列极限定义中的不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

可以用 $|a_n - a| < K\varepsilon$ (K 为某一正常数) 来代替.

再有, 我们还可以限定 ε 小于某一个正数 (比如 $\varepsilon < 1$). 事实上, 对 $0 < \varepsilon < 1$ 若能验证 $\{a_n\}$ 满足数列极限定义, 那么对 $\varepsilon \geq 1$ 自然也可以验证成立.

五、再论 “ $\varepsilon - N$ ” 说法

第二章 数 列极限

§ 1 数列极限 概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论 “ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

2. N 的相对性: 从定义 1 中又可看出, 随着 ε 的取值不

同, N 当然也会不同. 但这并不意味着 N 是由 ε 惟一确定. 例如, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则当 $n > N_1 = 2N$ 时, 对于同样的 ε , 更应有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

也就是说, 在这里只是强调 N 的存在性, 而不追求 N 的“最佳性”.

五、再论 “ $\varepsilon - N$ ” 说法

第二章 数列极限

§1 数列极限

概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论 “ $\varepsilon - N$ ” 定义、一些例子

六、一些例子

作业

3. 极限的几何意义

从几何上看, “ $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ ”, 实际上就是所有下标大于 N 的 a_n 全都落在邻域 $U(a; \varepsilon)$ 之内, 而在 $U(a; \varepsilon)$ 之外, $\{a_n\}$ 至多只有有限项 (N 项).

反过来, 如果对于任意正数 ε , 落在 $U(a; \varepsilon)$ 之外至多只有有限项, 设这些项的最大下标为 N , 这就表示当 $n > N$ 时, $a_n \in U(a; \varepsilon)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

数列的极限的等价定义

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

- 一、数列的定义
- 二、一个经典的例子
- 三、收敛数列的定义
- 四、按定义验证极限
- 五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子
- 六、一些例子
- 作业

以上是定义1的等价说法，写成定义就是：

定义(1')

任给 $\varepsilon > 0$ ，若在 $U(a; \varepsilon)$ 之外至多只有 $\{a_n\}$ 的有限多项，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 。

数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义也可陈述为：存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得在 $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ 之外含有 $\{a_n\}$ 中的无限多项。

注 $\{a_n\}$ 无极限(即发散)的等价定义为： $\{a_n\}$ 不以任何实数 a 为极限。

数列的极限的等价定义

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

以上是定义1的等价说法，写成定义就是：

定义(1')

任给 $\varepsilon > 0$ ，若在 $U(a; \varepsilon)$ 之外至多只有 $\{a_n\}$ 的有限多项，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 。

数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义也可陈述为：存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得在 $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ 之外含有 $\{a_n\}$ 中的无限多项。

注 $\{a_n\}$ 无极限 (即发散) 的等价定义为: $\{a_n\}$ 不以任何实数 a 为极限。

无穷小数列

第二章 数列极限

§1 数列极限 概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

定义

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

例如 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ 是无穷小数列.
当 $|q| < 1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列.

以下定理显然成立, 请读者自证.

定理

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是: $\{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

无穷小数列

第二章 数列极限

§1 数列极限 概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

定义

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

例如 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ 是无穷小数列.
当 $|q| < 1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列.

以下定理显然成立, 请读者自证.

定理

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是: $\{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

无穷大数列

第二章 数列极限

§1 数列极限

概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

定义

设 $\{a_n\}$ 是一数列, 若对任意 $G > 0$, 总存在正整数 N , 使得任意 $n > N, |a_n| > G$, 则称 $\{a_n\}$ 是**无穷大数列**, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

若 $|a_n| > G$, 改为 $a_n > G$ 或 $a_n < -G$, 则称 $\{a_n\}$ 是**正无穷大数列**或**负无穷大数列**, 分别记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

六、一些例子

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

- 一、数列的定义
- 二、一个经典的例子
- 三、收敛数列的定义
- 四、按定义验证极限
- 五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子
- 六、一些例子
- 作业

为了更好地理解“ $\varepsilon - N$ ”定义，再举一些例题.

例

证明： $\{(-1)^n\}$ 发散.

证明

对于任意实数 a ，取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ， $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ 满足：当 $a \leq 0 (a \geq 0)$ 时，在 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 之外有无限多个偶数项 (奇数项).

所以由定义 1', $\{a_n\}$ 不以 a 为极限. 又因 a 是任意的，所以 $\{a_n\}$ 发散.

六、一些例子

为了更好地理解 “ $\varepsilon - N$ ” 定义, 再举一些例题.

例

证明: $\{(-1)^n\}$ 发散.

证明

对于任意实数 a , 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ 满足: 当 $a \leq 0 (a \geq 0)$ 时, 在 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 之外有无限多个偶数项 (奇数项).

所以由定义 1', $\{a_n\}$ 不以 a 为极限. 又因 a 是任意的, 所以 $\{a_n\}$ 发散.

六、一些例子

例

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

证明

$|a| > 1$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \frac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon[|a|]!}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{\overbrace{|a| \cdots |a|}^{[|a|]} \overbrace{|a| \cdots |a|}^{n-[|a|]}}{1 \cdot 2 \cdots [|a|] [|a| + 1] \cdots n} \leq \frac{|a|^{[|a|]}}{[|a|]!} \cdot \frac{|a|}{n} < \varepsilon.$$

当 $0 < |a| \leq 1$ 时, 取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, $n > N$ 时, $\left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

六、一些例子

例

$$\text{证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

证明

$$|a| > 1 \text{ 时, } \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \frac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon[|a|]!}, \text{ 当 } n > N \text{ 时,}$$

$$\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{\overbrace{|a| \cdots |a|}^{[|a|]} \overbrace{|a| \cdots |a|}^{n-[|a|]}}{1 \cdot 2 \cdots [|a|] [|a| + 1] \cdots n} \leq \frac{|a|^{[|a|]}}{[|a|]!} \cdot \frac{|a|}{n} < \varepsilon.$$

$$\text{当 } 0 < |a| \leq 1 \text{ 时, 取 } N = \frac{1}{\varepsilon}, n > N \text{ 时, } \left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ 从而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

第二章 数
列极限§ 1 数列极限
概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

注 这里我们将 N 取为正数，而非正整数.

实际上 N 只是表示某个时刻（位置），保证从这一时刻以后的所有项都能使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立即可.

六、一些例子

第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”定义、一些例子

六、一些例子

作业

例

$$\text{证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0.$$

证明

我们用两种方法来证明.

(1) 任给正数 ε , 取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \sin \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

(2) 任给正数 ε , 限制 $\varepsilon < 1$. 由

$$\left| \sin \frac{1}{n} - 0 \right| = \sin \frac{1}{n} < \sin(\arcsin \varepsilon) = \varepsilon,$$

可知只需取 $N = \frac{1}{\arcsin \varepsilon}$ 即可.

六、一些例子

例

$$\text{证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0.$$

证明

我们用两种方法来证明.

(1) 任给正数 ε , 取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \sin \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

(2) 任给正数 ε , 限制 $\varepsilon < 1$. 由

$$\left| \sin \frac{1}{n} - 0 \right| = \sin \frac{1}{n} < \sin(\arcsin \varepsilon) = \varepsilon,$$

可知只需取 $N = \frac{1}{\arcsin \varepsilon}$ 即可.

第二章 数
列极限§ 1 数列极限
概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

注 这里假定 $0 < \varepsilon < 1$ 是必要的, 否则 $\arcsin \varepsilon$ 便没有定义.

作业:

第二章 数列极限

§ 1 数列极限 概念

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“ $\varepsilon - N$ ”
定义、一些例子

六、一些例子

作业

● P25 习题2.1

2 (1) (2), 4, 8, 9 (1), 10.