第 4 章 矩阵

学号_________ 姓名 ___________

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$_________， $A^{n}=$___________ .

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\6&2&0\\3&a&4\end{pmatrix}$， B 是 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $a=$_______ .

3. 设 3 阶阵 $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$， $|A|=-2$，则 $|\beta_1+2\beta_3,\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,3\beta_3|=$___.

4. 设 A,B 是 3 阶方阵， $|A|=2,|B|=-3$，则 $|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}|=$_________.

5. A,B 均为 3 阶方阵，满足 $AB-3A+B=0$，若 $|A+E|=-1$，则 $|B-3E|=$______.

6. 方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，则 $(A+2E)^{-1}=$______________.

7. 设 A,B 是 n 阶可逆阵，则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为_______.

8. 设 A 是一个 n 阶方阵，若 $r(A)=n-1$，则 $r(A^{*})=$________.

9. 设 A 是 3 阶可逆方阵，将 A 的第一行的 3 倍加到第三行，再互换第二行和第三行后得到矩阵 B，则 $BA^{-1}=$____________.

二、 计算题（每小题 15 分，共 60 分）

1. 求 $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\3&2&3&-2\\0&0&1&8\\0&0&1&6\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2. 求矩阵 X 使之满足矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\0&4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0\\1&0&3\\-2&4&-1\end{pmatrix}$.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵的全体.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0\\-\frac12&\frac12&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，若 $2\boldsymbol{XA}-2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

三、 证明题（10 分）

设 $A^2=A, A\neq E$（单位矩阵），证明 $|A|=0$.

一、填空

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A^{n}=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{3}$

3. -12

4. $\frac{125}{6}$

5. 27

6. $-\frac{A-3E}{4}$

7. $\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$

8. 1

9. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$-\frac{1}{4}(A-3E)$$

设 A,B 均为 n 级方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}|=$

分析 应填 $(-1)^{n-1}\frac{5^{n}}{6}$. 当矩阵 A 可逆时，常利用 $A^{*}=|A|A^{-1}$ 来表示 A 的伴随矩阵．

$$\begin{aligned}|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}| &= |A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}| = \\ & |-3A^{-1}B^{-1}-2A^{-1}B^{-1}| = |-5A^{-1}B^{-1}| = \\ & (-5)^{n}|A^{-1}||B^{-1}| = (-5)^{n}\frac{1}{|A||B|} = \\ & \frac{(-5)^{n}}{-6} = (-1)^{n-1}\frac{5^{n}}{6}\end{aligned}$$

6. 设 A,B 均为 3 阶方阵,满足 $AB-3A+B=0$,若 $|A+E|=-1$,求 $|B-3E|=$ ________.

解: $(A+E)(B-3E)=AB-3A+B-3E=-3E$， 27

9. 矩阵 A 左乘 BA^{−1}变成 B，单位矩阵 E 左乘 BA^{−1}变成 BA^{−1} 所以单位矩阵的第一行的倍加到第三行，再互换第二行和第三行后得到答案

二、计算

1. 求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

二、

1. $\begin{pmatrix} 2&1&1&2&1&0&0&0 \\ 3&2&3&-2&0&1&0&0 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3&2&3&-2&0&1&0&0 \\ 2&1&1&2&1&0&0&0 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1&1&2&-4&-1&1&0&0 \\ 2&1&1&2&1&0&0&0 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&2&-4&-1&1&0&0 \\ 0&-1&-3&10&3&-2&0&0 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1&0&-1&6&2&-1&0&0 \\ 0&1&3&-10&-3&2&0&0 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&12&2&-1&0&1 \\ 0&1&0&-28&-3&2&0&-3 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \\ 0&0&0&2&0&0&1&-1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&2&-1&-6&7 \\ 0&1&0&0&-3&2&14&-17 \\ 0&0&1&0&0&0&-3&4 \\ 0&0&0&1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2&-1&-6&7 \\ -3&2&14&-17 \\ 0&0&-3&4 \\ 0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

二、1. 解: $(A,E)=\begin{pmatrix} 2&1&1&2&1&0&0&0 \\ 3&2&3&-2&0&1&0&0 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \\ 0&0&1&6&0&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&0&0&0 \\ 0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-5&-\frac{3}{2}&1&0&0 \\ 0&0&1&8&0&0&1&0 \\ 0&0&0&-2&0&0&-1&1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1&0&-1&6&2&-1&0&0 \\ 0&1&3&-10&-3&2&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&-3&4 \\ 0&0&0&1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&2&-1&-6&7 \\ 0&1&0&0&-3&2&14&-17 \\ 0&0&1&0&0&0&-3&4 \\ 0&0&0&1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 2&-1&-6&7 \\ -3&2&14&-17 \\ 0&0&-3&4 \\ 0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 & 7 \\ -3 & 2 & 14 & -17 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.

2. 求矩阵 X 使之满足矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\therefore X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. 由原式得 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

可得 $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3.

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$ 满足 $AB = BA$,则有

$\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b & 0 \\ d+e & d+e & 0 \\ x+y & x+y & 0 \end{pmatrix}$,故 $\begin{cases} b=d \\ a=e \\ c+f=0 \\ x+y=0 \end{cases}$,从而

$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ x & -x & z \end{pmatrix}$,其中 a,b,c,x,z 任取.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求与 A 可交换的矩阵的全体.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，若 $2XA-2AB=X-B$，求矩阵 X .

4. 解 由 $2XA-2AB=X-B$ 得 $2XA-X=2AB-B$，则 $X(2A-E)=(2A-E)B$.而

$2A-E=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，故 $X=(2A-E)B(2A-E)^{-1}$.计算可得

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

三、 证明题（10 分）

设 $A^2=A, A\neq E$（单位矩阵），证明 $|A|=0$.

证法一: 如 $|A|\neq 0$, 则 A 可逆, 那么 $A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$. 与已知条件 $A\neq E$ 矛盾.

证法二: 由 $A^2=A$, 有 $A(A-E)=0$, 从而 $A-E$ 的每一列都是齐次方程组 $Ax=0$ 的解. 又因 $A\neq E$, 故 $Ax=0$ 有非零解, 从而 $|A|=0$.

证法三: 由于 $A-E$ 的每一列 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $Ax=0$ 的解, 所以 $r(A-E)\leq n-r(A)$. 又 $A\neq E, r(A-E)>0$, 故 $r(A)\leq n-r(A-E)<n$, 则 $|A|=0$.

证明：假设 $|A| \neq 0$，则 A 是可逆的。

由 $A^2 = A$ 得 $A^2 - A = 0$

即 $A(A-E)=0$.

故 $A^{-1}A(A-E)=0$ 即 $A-E=0$

所以 $A=E$.

与题目 $A \neq E$ 矛盾。故假设不成立。

因此 $|A|=0$ 得证。

三. 证：因 $A^2=A$，则 $A^2-A=0$，$A(A-E)=0$

假设 $|A| \neq 0$，则 A 可逆，即左乘 A^{-1} 得：$A-E=0$

则 $A=E$，与题矛盾，则 $|A|=0$.

明：设 $A^2=A$，$A \neq E$（单位矩阵），证明 $|A|=0$ $A(A-E)=0$

即 $A-E$ 的列向量是 $AX=0$ 的解，因为 $A-E \neq 0$，故 $A-E$ 为非零矩阵

即 $AX=0$ 有非零解，即 $r(A)<n$，即 $|A|=0$