例 1

设矩阵 A, B 满足 $ABA^* = 2AB - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B.

例 2

设矩阵 A, B 满足 $A^*BA = 2BA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B.

例 1

求非退化线性替换，化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形.

例 2

求非退化线性替换，化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

为标准形.

例 3

若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3$ 正定，求 t 的取值范围.

例 1

已知

$$f_1 = 1 - x, f_2 = 1 + x^2, f_3 = x + 2x^2$$

与

$$g_1 = x, g_2 = 1 - x^2, g_3 = 1 - x + x^2$$

是 $P[x]_3$ 中的两个向量组.

1. 证明 f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 都是 $P[x]_3$ 的基.
2. 求由基 f_1, f_2, f_3 到基 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵.
3. 求 $f = 1 + 2x + 3x^2$ 在基 f_1, f_2, f_3 下的坐标.

例 2

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 记 $W=\left\{B \mid AB=BA, B\in P^{3\times 3}\right\}$, 求 W 的维数和一组基.
2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 记 $W=\left\{B \mid AB=BA, B\in P^{3\times 3}\right\}$, 求 W 的维数和一组基.

例 3

已知两个齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+x_4=0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} -2x_1+x_2+6x_3-x_4=0 \\ -x_1+2x_2+5x_3-x_4=0 \end{cases}$$

1. 分别求 *(I)* 和 *(II)* 的解空间 V_1 和 V_2 的维数和一组基.
2. 求 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基.

例 1

取 P^3 的线性变换 $\sigma(a, b, c) = (a - b, b - c, a + b)$

1. 求 σ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵
2. 求 σ 在基 $\eta_1 = (1, 0, 0), \eta_2 = (1, 1, 0), \eta_3 = (1, 1, 1)$ 下的矩阵
3. 求向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ 的像 $\sigma\alpha$ 分别在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 和 η_1, η_2, η_3 下的坐标.

例 2

在线性空间 P^3 中，定义线性变换

$$\sigma(a, b, c) = (a + 2b - c, b + c, a + b - 2c),$$

分别求 σ 的值域与核的维数与一组基.

例 1

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和对应的特征向量.

(2) 求正交阵 Q, 使得 $Q^T AQ$ 是对角阵.

例 2

用正交线性替换化实二次型为标准形

$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

例 3

设 *1,1,-3* 是 *3* 阶实对称矩阵 A 的特征值，$(1,-1,0)'$ 是 A 属于*-3* 的特征向量，求 A.