第十四章：Pólya 计数

Outline

给定一个正方形，其四个顶点分别记为$1, 2, 3, 4$。用红色（R）、蓝色（B）两种颜色对其顶点进行染色，共有2^4种不同方法。

由于一个正方形绕中心旋转$90°, 180°, 270°$ 或者$360°$之后所得的图形依然是同一个正方形，且关于四条对称轴反射之后也是原正方形。因此，若在某一个染色方案下，将正方形经过以上对称变换后得到的染色正方形与另一种染色方案，除了顶点的标号不一样外，完全相同。我们则称这两种染色是**等价的**。

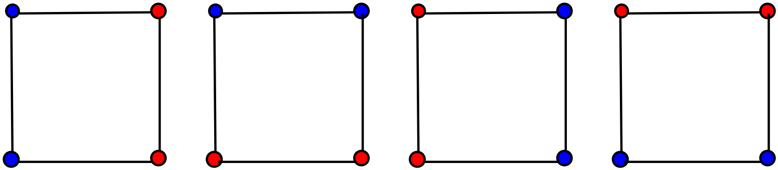
给定一个正方形，其四个顶点分别记为$1,2,3,4$。用红色（R）、蓝色（B）两种颜色对其顶点进行染色，共有2^4种不同方法。

由于一个正方形绕中心旋转$90°,180°,270°$ 或者$360°$之后所得的图形依然是同一个正方形，且关于四条对称轴反射之后也是原正方形。因此，若在某一个染色方案下，将正方形经过以上对称变换后得到的染色正方形与另一种染色方案，除了顶点的标号不一样外，完全相同。我们则称这两种染色是**等价的**。

给定一个正方形，其四个顶点分别记为$1, 2, 3, 4$。用红色（R）、蓝色（B）两种颜色对其顶点进行染色，共有2^4种不同方法。

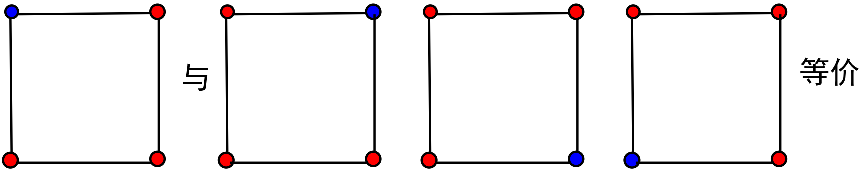
由于一个正方形绕中心旋转$90°, 180°, 270°$ 或者$360°$之后所得的图形依然是同一个正方形，且关于四条对称轴反射之后也是原正方形。因此，若在某一个染色方案下，将正方形经过以上对称变换后得到的染色正方形与另一种染色方案，除了顶点的标号不一样外，完全相同。我们则称这两种染色是**等价的**。

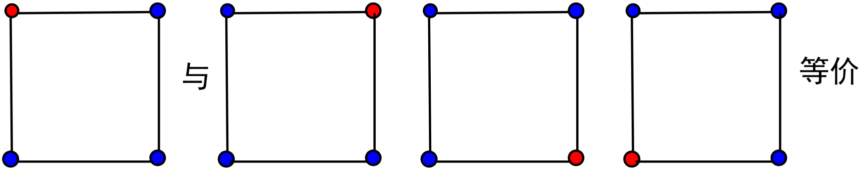
根据定义，以下四种染色方案：

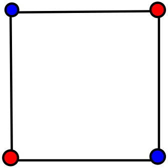


是等价的。

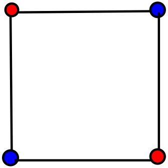
类似地，



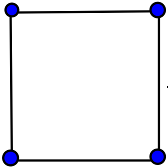




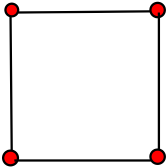
与



等价

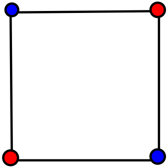


与自己等价，

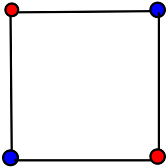


与自己等价

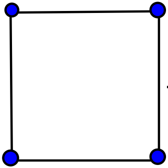
从而，对正方形的顶点用两种颜色染色，一共有6种不等价的染色方法。



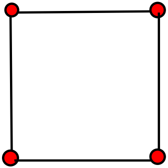
与



等价



与自己等价，



与自己等价

从而，对正方形的顶点用两种颜色染色，一共有6种不等价的染色方法。

同理，我们可以考虑正五边形、正六边形甚至一般正n边形不等价的顶点染色方案的计数问题。例如，对正五边形而言，它的对称变换包括5个旋转、5个反射。如果一个染色方案通过对称变换作用可变成另一个染色方案，我们就认为这两个染色方案**等价**。

设正n边形的顶点集为$X=\{1,2,\ldots,n\}$. 则该正n边形一共有$2n$个对称变换，它们可用X上的置换表示，其中n 个旋转为

$$\rho^0=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n\end{pmatrix}$$

$$\rho^1=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\rho^{n-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1\end{pmatrix}$$

同理，我们可以考虑正五边形、正六边形甚至一般正n边形不等价的顶点染色方案的计数问题。例如，对正五边形而言，它的对称变换包括5个旋转、5个反射。如果一个染色方案通过对称变换作用可变成另一个染色方案，我们就认为这两个染色方案**等价**。

设正n边形的顶点集为$X = \{1, 2, \ldots, n\}$. 则该正n边形一共有$2n$个对称变换，它们可用X上的置换表示，其中n 个旋转为

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\rho^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

同理，我们可以考虑正五边形、正六边形甚至一般正n边形不等价的顶点染色方案的计数问题。例如，对正五边形而言，它的对称变换包括5个旋转、5个反射。如果一个染色方案通过对称变换作用可变成另一个染色方案，我们就认为这两个染色方案**等价**。

设正n边形的顶点集为$X=\{1,2,\ldots,n\}$. 则该正n边形一共有$2n$个对称变换，它们可用X上的置换表示，其中n 个旋转为

$$\rho^0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\rho^1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\rho^{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

同理，我们可以考虑正五边形、正六边形甚至一般正n边形不等价的顶点染色方案的计数问题。例如，对正五边形而言，它的对称变换包括5个旋转、5个反射。如果一个染色方案通过对称变换作用可变成另一个染色方案，我们就认为这两个染色方案**等价**。

设正n边形的顶点集为$X=\{1,2,\ldots,n\}$. 则该正n边形一共有$2n$个对称变换，它们可用X上的置换表示，其中n 个旋转为

$$\rho^0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\rho^1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\rho^{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

同理，我们可以考虑正五边形、正六边形甚至一般正n边形不等价的顶点染色方案的计数问题。例如，对正五边形而言，它的对称变换包括5个旋转、5个反射。如果一个染色方案通过对称变换作用可变成另一个染色方案，我们就认为这两个染色方案**等价**。

设正n边形的顶点集为$X=\{1,2,\ldots,n\}$. 则该正n边形一共有$2n$个对称变换，它们可用X上的置换表示，其中n 个旋转为

$$\rho^0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\rho^1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\rho^{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

同理，我们可以考虑正五边形、正六边形甚至一般正n边形不等价的顶点染色方案的计数问题。例如，对正五边形而言，它的对称变换包括5个旋转、5个反射。如果一个染色方案通过对称变换作用可变成另一个染色方案，我们就认为这两个染色方案**等价**。

设正n边形的顶点集为$X=\{1,2,\ldots,n\}$. 则该正n边形一共有$2n$个对称变换，它们可用X上的置换表示，其中n 个旋转为

$$\rho^0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\rho^1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

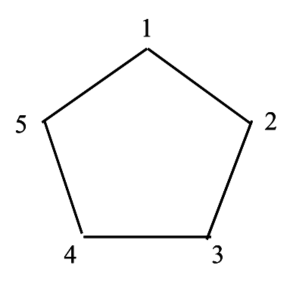
$$\rho^{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

n个反射变换对应于关于n条对称轴的反射，记为$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$。

易知，$\{\rho^0, \rho^1, \ldots, \rho^{n-1}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ 是对称群S_n的子群，称之为$2n$阶二面体群，记为D_n。

例 1.1

当$n = 5$时，



$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

例 1.2

当$n=6$时：

Outline

定义 2.1

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Y为一个由某些颜色构成的集合。X的一种染色c指的是给X的每个元素指定一种颜色的分配方案。更严格地，c是从X到Y的一个映射，可记为$c = (c(1), c(2), \ldots, c(n))$. 令$\mathcal{C}_X$为$X$上的所有染色构成的集合。

定义 2.2

设$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, c \in \mathcal{C}_X$ 定义$f * c \in \mathcal{C}_X$如下：

$$f * c\,(i_k) = c(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

即染色方案$f * c$将染色方案c下点k的颜色$c(k)$用来染点$f(k) = i_k$.

定义 2.1

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Y为一个由某些颜色构成的集合。X的一种染色c指的是给X的每个元素指定一种颜色的分配方案。更严格地，c是从X到Y的一个映射，可记为$c = (c(1), c(2), \ldots, c(n))$. 令$\mathcal{C}_X$为$X$上的所有染色构成的集合。

定义 2.2

设$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, c \in \mathcal{C}_X$ 定义$f * c \in \mathcal{C}_X$如下：

$$f * c\ (i_k) = c(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

即染色方案$f * c$将染色方案c下点k的颜色$c(k)$用来染点$f(k) = i_k$.

定义 2.1

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Y为一个由某些颜色构成的集合。X的一种染色c指的是给X的每个元素指定一种颜色的分配方案。更严格地，c是从X到Y的一个映射，可记为$c = (c(1), c(2), \ldots, c(n))$.
令$\mathcal{C}_X$为X上的所有染色构成的集合。

定义 2.2

设$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, c \in \mathcal{C}_X$ 定义$f * c \in \mathcal{C}_X$如下：

$$f * c\,(i_k) = c(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

即染色方案$f * c$将染色方案c下点k的颜色$c(k)$用来染点$f(k) = i_k$.

定义 2.1

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Y为一个由某些颜色构成的集合。X的一种染色c指的是给X的每个元素指定一种颜色的分配方案。更严格地，c是从X到Y的一个映射，可记为$c = (c(1), c(2), \ldots, c(n))$. 令$\mathcal{C}_X$为$X$上的所有染色构成的集合。

定义 2.2

设$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, c \in \mathcal{C}_X$ 定义$f * c \in \mathcal{C}_X$如下：

$$f * c\ (i_k) = c(k) \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

即染色方案$f * c$将染色方案c下点k的颜色$c(k)$用来染点$f(k) = i_k$.

定义 2.1

设$X=\{1,2,\ldots,n\}$. Y为一个由某些颜色构成的集合。X的一种染色c指的是给X的每个元素指定一种颜色的分配方案。更严格地，c是从X到Y的一个映射，可记为$c=(c(1),c(2),\ldots,c(n))$. 令$\mathcal{C}_X$为$X$上的所有染色构成的集合。

定义 2.2

设$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\in S_n, c\in\mathcal{C}_X$ 定义$f*c\in\mathcal{C}_X$如下：

$$f*c\,(i_k)=c(k)\qquad\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

即染色方案$f*c$将染色方案c下点k的颜色$c(k)$用来染点$f(k)=i_k$.

定义 2.1

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Y为一个由某些颜色构成的集合。X的一种染色c指的是给X的每个元素指定一种颜色的分配方案。更严格地，c是从X到Y的一个映射，可记为$c = (c(1), c(2), \ldots, c(n))$. 令$\mathcal{C}_X$为$X$上的所有染色构成的集合。

定义 2.2

设$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, c \in \mathcal{C}_X$ 定义$f * c \in \mathcal{C}_X$如下：

$$f * c\ (i_k) = c(k) \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

即染色方案$f * c$将染色方案c下点k的颜色$c(k)$用来染点$f(k) = i_k$.

我们有：

$$f * c\ (l) = c(f^{-1}(l)), \qquad l = 1, 2, \ldots, n.$$

命题 2.3

设$f, g \in S_n$, $c \in \mathcal{C}_X$. 则

$$(g \circ f) * c = g * (f * c),$$

其中$\circ$表示置换群的乘积运算。

我们有：

$$f * c\ (l) = c(f^{-1}(l)), \qquad l = 1, 2, \ldots, n.$$

命题 2.3

设$f, g \in S_n$, $c \in \mathcal{C}_X$. 则

$$(g \circ f) * c = g * (f * c),$$

其中$\circ$表示置换群的乘积运算。

证明:

$$(g \circ f) * c(l) = c(f^{-1} \circ g^{-1}(l)) = c(f^{-1}(g^{-1}(l)))$$

$$g * (f * c)(l) = f * c(g^{-1}(l)) = c(f^{-1}(g^{-1}(l)))$$

例 2.4

设$X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{R,B\}$，$c=(R,B,B,R)$. 令

$$f=\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},g=\rho^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}.$$

则

$$f\circ g=\rho^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}.$$

$$g*c=(B,R,R,B)\triangleq c_1$$

$$(f\circ g)*c=(B,B,R,R),\qquad f*(g*c)=f*c_1=(B,B,R,R).$$

例 2.4

设$X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{R,B\}$，$c=(R,B,B,R)$. 令

$$f=\rho=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g=\rho^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

则

$$f\circ g=\rho^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$g*c=(B,R,R,B)\triangleq c_1$$

$$(f\circ g)*c=(B,B,R,R),\qquad f*(g*c)=f*c_1=(B,B,R,R).$$

例 2.4

设$X = \{1,2,3,4\}$，$Y = \{R,B\}$，$c = (R,B,B,R)$. 令

$$f = \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g = \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

则

$$f \circ g = \rho^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$g * c = (B,R,R,B) \triangleq c_1$$

$$(f \circ g) * c = (B,B,R,R), \qquad f * (g * c) = f * c_1 = (B,B,R,R).$$

例 2.4

设$X = \{1,2,3,4\}$，$Y = \{R,B\}$，$c = (R,B,B,R)$. 令

$$f = \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g = \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

则

$$f \circ g = \rho^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$g * c = (B,R,R,B) \triangleq c_1$$

$$(f \circ g) * c = (B,B,R,R), \quad f * (g * c) = f * c_1 = (B,B,R,R).$$

定义 2.5

(1) 设$G \leq S_n$ 且$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$. 若$\forall f \in G$，$\forall c \in \mathcal{C}$，有

$$f * c \in \mathcal{C}$$

则称$\mathcal{C}$在子群G的作用下封闭。

(2) 设$c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, 若$\exists g \in G$, 使得

$$c_2 = g * c_1,$$

则称c_1在群G的作用下等价于c_2，记为$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$.

定义 2.5

(1) 设$G \leq S_n$ 且$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$. 若$\forall f \in G$，$\forall c \in \mathcal{C}$，有

$$f * c \in \mathcal{C}$$

则称$\mathcal{C}$在子群G的作用下封闭。

(2) 设$c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, 若$\exists g \in G$, 使得

$$c_2 = g * c_1,$$

则称c_1在群G的作用下等价于c_2，记为$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$.

例 2.6

(1) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_X$，则对任意$G\leq S_n$，$\mathcal{C}$ 在G 下是封闭的。

(2) 设$Y=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$. $p_1,p_2,\ldots,p_k$是一列非负整数，满足：$p_1+p_2+\cdots+p_k=n$. 令

$$\mathcal{C}_{p_1,\cdots,p_k}=\{c\in\mathcal{C}\mid\ |c^{-1}(u_i)|=p_i,\ \forall 1\leq i\leq k\}.$$

由于任意置换$f\in G$作用在染色c上时，不改变每种颜色使用的次数，因此对$\forall G\leq S_n$, $\mathcal{C}_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$在$G$的作用下封闭.

例 2.6

(1) 若$\mathcal{C} = \mathcal{C}_X$，则对任意$G \leq S_n$，$\mathcal{C}$ 在G 下是封闭的。

(2) 设$Y = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. $p_1, p_2, \ldots, p_k$是一列非负整数，满足：$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$. 令

$$\mathcal{C}_{p_1,\cdots,p_k} = \{c \in \mathcal{C} \mid |c^{-1}(u_i)| = p_i, \ \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

由于任意置换$f \in G$作用在染色c上时，不改变每种颜色使用的次数，因此对$\forall G \leq S_n$, $\mathcal{C}_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$在$G$的作用下封闭.

例 2.6

(1) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_X$，则对任意$G \leq S_n$，$\mathcal{C}$ 在G 下是封闭的。

(2) 设$Y = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. $p_1, p_2, \ldots, p_k$是一列非负整数，满足：$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$. 令

$$\mathcal{C}_{p_1,\cdots,p_k} = \{c \in \mathcal{C} \mid \ |c^{-1}(u_i)| = p_i, \ \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

由于任意置换$f \in G$作用在染色c上时，不改变每种颜色使用的次数，因此对$\forall G \leq S_n$, $\mathcal{C}_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$在$G$的作用下封闭.

例 2.6

(1) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_X$，则对任意$G\le S_n$，$\mathcal{C}$ 在G 下是封闭的。

(2) 设$Y=\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$. $p_1,p_2,\dots,p_k$是一列非负整数，满足：$p_1+p_2+\cdots+p_k=n$. 令

$$\mathcal{C}_{p_1,\cdots,p_k}=\{c\in\mathcal{C}\mid\ |c^{-1}(u_i)|=p_i,\ \forall 1\le i\le k\}.$$

由于任意置换$f\in G$作用在染色c上时，不改变每种颜色使用的次数，因此对$\forall G\le S_n$, $\mathcal{C}_{p_1,p_2,\dots,p_k}$在$G$的作用下封闭.

命题 2.7

设$G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$。且$\mathcal{C}$在$G$的作用下封闭。则$\overset{G}{\sim}$是$\mathcal{C}$上的等价关系。即：

- $\forall c \in \mathcal{C}$， $c \overset{G}{\sim} c$;
- $\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, 则$c_2 \overset{G}{\sim} c_1$;
- 若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, $c_2 \overset{G}{\sim} c_3$, 则$c_1 \overset{G}{\sim} c_3$.

命题 2.7

设$G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$。且$\mathcal{C}$在$G$的作用下封闭。则$\overset{G}{\sim}$是$\mathcal{C}$上的等价关系。即：

- $\forall c \in \mathcal{C}$， $c \overset{G}{\sim} c$;
- $\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, 则$c_2 \overset{G}{\sim} c_1$;
- 若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, $c_2 \overset{G}{\sim} c_3$, 则$c_1 \overset{G}{\sim} c_3$.

命题 2.7

设$G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$。且$\mathcal{C}$在$G$的作用下封闭。则$\overset{G}{\sim}$是$\mathcal{C}$上的等价关系。即：

- $\forall c \in \mathcal{C}$， $c \overset{G}{\sim} c$;
- $\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, 则$c_2 \overset{G}{\sim} c_1$;
- 若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, $c_2 \overset{G}{\sim} c_3$, 则$c_1 \overset{G}{\sim} c_3$.

命题 2.7

设$G \le S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$。且$\mathcal{C}$在$G$的作用下封闭。则$\overset{G}{\sim}$是$\mathcal{C}$上的等价关系。即：

- $\forall c \in \mathcal{C}$， $c \overset{G}{\sim} c$;
- $\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, 则$c_2 \overset{G}{\sim} c_1$;
- 若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, $c_2 \overset{G}{\sim} c_3$, 则$c_1 \overset{G}{\sim} c_3$.

命题 2.7

设$G \le S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$。且$\mathcal{C}$在$G$的作用下封闭。则$\overset{G}{\sim}$是$\mathcal{C}$上的等价关系。即：

- $\forall c \in \mathcal{C}$， $c \overset{G}{\sim} c$;
- $\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, 则$c_2 \overset{G}{\sim} c_1$;
- 若$c_1 \overset{G}{\sim} c_2$, $c_2 \overset{G}{\sim} c_3$, 则$c_1 \overset{G}{\sim} c_3$.

例 2.8

设$X=\{1,2,3,4\}, Y=\{B,R\}, G=D_4$。

(1) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_X$。则等价关系$\overset{G}{\sim}$将$\mathcal{C}$划分为几个等价类？

(2) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_{2,2}$，则$\overset{G}{\sim}$将$\mathcal{C}$划分为几个等价类？

例 2.8

设$X=\{1,2,3,4\},Y=\{B,R\},G=D_4$。

(1) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_X$。则等价关系$\overset{G}{\sim}$将$\mathcal{C}$划分为几个等价类？

(2) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_{2,2}$，则$\overset{G}{\sim}$将$\mathcal{C}$划分为几个等价类？

例 2.8

设$X=\{1,2,3,4\},Y=\{B,R\},G=D_4$。

(1) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_X$。则等价关系$\overset{G}{\sim}$将$\mathcal{C}$划分为几个等价类？

(2) 若$\mathcal{C}=\mathcal{C}_{2,2}$，则$\overset{G}{\sim}$将$\mathcal{C}$划分为几个等价类？

Outline

设$\mathcal{C}$在G的作用下封闭。$c \in \mathcal{C}$。令

$$G(c) = \{f \in G, \mid f * c = c\}.$$

定理 3.1

设$c \in \mathcal{C}$，则$G(c) \leq G$，且$\forall f, g \in G$，

$$f * c = g * c \quad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in G(c).$$

设$\mathcal{C}$在G的作用下封闭。$c \in \mathcal{C}$。令

$$G(c) = \{f \in G, \mid f * c = c\}.$$

定理 3.1

设$c \in \mathcal{C}$，则$G(c) \leq G$，且$\forall f, g \in G$,

$$f * c = g * c \quad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in G(c).$$

设$\mathcal{C}$在G的作用下封闭。$c \in \mathcal{C}$。令

$$G(c) = \{f \in G, \mid f * c = c\}.$$

定理 3.1

设$c \in \mathcal{C}$，则$G(c) \leq G$，且$\forall f, g \in G$，

$$f * c = g * c \quad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in G(c).$$

设$\mathcal{C}$在G的作用下封闭。$c \in \mathcal{C}$。令

$$G(c) = \{f \in G, \mid f * c = c\}.$$

定理 3.1

设$c \in \mathcal{C}$，则$G(c) \leq G$，且$\forall f, g \in G$，

$$f * c = g * c \quad \Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in G(c).$$

定理 3.2

设$c \in \mathcal{C}$. 则在$\mathcal{C}$中与c等价的染色的个数为

$$\frac{|G|}{|G(c)|}.$$

证明：用除法原理。设$\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$为$\mathcal{C}$中所有与$c$等价的染色作成的集合。我们需证$k = \frac{|G|}{|G(c)|}$. 令

$$\varphi : G \longrightarrow \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$$
$$g \mapsto g * c$$

显然φ为满射。任取c_i，由于$c_i \sim c$，故存在$g \in G$，使得$g * c = c_i$。取定一个这样的g。下面我们考察$\varphi^{-1}(c_i)$。

定理 3.2

设$c \in \mathcal{C}$. 则在$\mathcal{C}$中与c等价的染色的个数为

$$\frac{|G|}{|G(c)|}.$$

证明: 用除法原理。设$\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$为$\mathcal{C}$中所有与$c$等价的染色作成的集合。我们需证$k = \frac{|G|}{|G(c)|}$. 令

$$\varphi : G \longrightarrow \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$$
$$g \mapsto g * c$$

显然φ为满射。任取c_i，由于$c_i \sim c$，故存在$g \in G$，使得$g * c = c_i$。取定一个这样的g。下面我们考察$\varphi^{-1}(c_i)$。

定理 3.2

设$c \in \mathcal{C}$. 则在$\mathcal{C}$中与c等价的染色的个数为

$$\frac{|G|}{|G(c)|}.$$

证明：用除法原理。设$\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$为$\mathcal{C}$中所有与$c$等价的染色作成的集合。我们需证$k = \frac{|G|}{|G(c)|}$. 令

$$\varphi : G \longrightarrow \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$$
$$g \mapsto g * c$$

显然φ为满射。任取c_i，由于$c_i \sim c$，故存在$g \in G$，使得$g * c = c_i$。取定一个这样的g。下面我们考察$\varphi^{-1}(c_i)$。

定理 3.2

设$c \in \mathcal{C}$. 则在$\mathcal{C}$中与c等价的染色的个数为

$$\frac{|G|}{|G(c)|}.$$

证明：用除法原理。设$\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$为$\mathcal{C}$中所有与$c$等价的染色作成的集合。我们需证$k = \frac{|G|}{|G(c)|}$. 令

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \\ g &\mapsto g * c \end{aligned}$$

显然φ为满射。任取c_i，由于$c_i \sim c$，故存在$g \in G$，使得$g * c = c_i$。取定一个这样的g。下面我们考察$\varphi^{-1}(c_i)$。

$$f \in \varphi^{-1}(c_i) \Longleftrightarrow f * c = c_i$$

$$\begin{aligned} f \in \varphi^{-1}(c_i) &\Longleftrightarrow f * c = c_i \\ &\Longleftrightarrow f * c = g * c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f \in \varphi^{-1}(c_i) &\Longleftrightarrow f * c = c_i \\
&\Longleftrightarrow f * c = g * c \\
&\Longleftrightarrow g^{-1} \circ f \in G(c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \in \varphi^{-1}(c_i) &\Longleftrightarrow f * c = c_i \\
&\Longleftrightarrow f * c = g * c \\
&\Longleftrightarrow g^{-1} \circ f \in G(c) \\
&\Longleftrightarrow \exists h \in G(c), s.t. g^{-1} \circ f = h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \in \varphi^{-1}(c_i) &\Longleftrightarrow f * c = c_i \\
&\Longleftrightarrow f * c = g * c \\
&\Longleftrightarrow g^{-1} \circ f \in G(c) \\
&\Longleftrightarrow \exists h \in G(c), s.t. g^{-1} \circ f = h \\
&\Longleftrightarrow \exists h \in G(c), s.t. \quad f = g \circ h
\end{aligned}
$$

所以$\varphi^{-1}(c_i) = \{g \circ h \mid h \in G(c)\}$. 故$|\varphi^{-1}(c_i)| = |G(c)|$ 对任意$1 \leq i \leq k$成立。由除法原理可知，

$$
k = \frac{|G|}{|G(c)|}.
$$

$$
\begin{aligned}
f \in \varphi^{-1}(c_i) &\Longleftrightarrow f * c = c_i \\
&\Longleftrightarrow f * c = g * c \\
&\Longleftrightarrow g^{-1} \circ f \in G(c) \\
&\Longleftrightarrow \exists h \in G(c), s.t. g^{-1} \circ f = h \\
&\Longleftrightarrow \exists h \in G(c), s.t. \quad f = g \circ h
\end{aligned}
$$

所以$\varphi^{-1}(c_i) = \{g \circ h \mid h \in G(c)\}$. 故$|\varphi^{-1}(c_i)| = |G(c)|$ 对任意$1 \leq i \leq k$成立。由除法原理可知，

$$
k = \frac{|G|}{|G(c)|}.
$$

定理 3.3 (Burnside定理)

设$X = \{1,2,\ldots,n\}, G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$，且$\mathcal{C}$在群$G$的作用下封闭。则$\mathcal{C}$中不等价的染色数$N(G,\mathcal{C})$为

$$N(G,\mathcal{C}) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|\mathcal{C}(f)|,$$

其中$\mathcal{C}(f) = \{c \in \mathcal{C} \mid f * c = c\}$.

证明：设$A = \{(f,c) \mid f \in G, c \in \mathcal{C}, f * c = c\}$。对$\forall f \in G$,令

$$A_f = \{(f,c) \mid c \in \mathcal{C}, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{f\in G} A_f$，故

$$|A| = \sum_{f\in G}|A_f| = \sum_{f\in G}|\mathcal{C}(f)|.$$

定理 3.3 (Burnside定理)

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}, G \le S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$，且$\mathcal{C}$在群$G$的作用下封闭。则$\mathcal{C}$中不等价的染色数$N(G, \mathcal{C})$为

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|,$$

其中$\mathcal{C}(f) = \{c \in \mathcal{C} \mid f * c = c\}$.

证明：设$A = \{(f, c) \mid f \in G, c \in \mathcal{C}, f * c = c\}$。对$\forall f \in G$,令

$$A_f = \{(f, c) \mid c \in \mathcal{C}, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{f \in G} A_f$，故

$$|A| = \sum_{f \in G} |A_f| = \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

定理 3.3 (Burnside定理)

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}, G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$，且$\mathcal{C}$在群$G$的作用下封闭。则$\mathcal{C}$中不等价的染色数$N(G, \mathcal{C})$为

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|,$$

其中$\mathcal{C}(f) = \{c \in \mathcal{C} \mid f * c = c\}$.

证明：设$A = \{(f, c) \mid f \in G, c \in \mathcal{C}, f * c = c\}$。对$\forall f \in G$,令

$$A_f = \{(f, c) \mid c \in \mathcal{C}, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{f \in G} A_f$，故

$$|A| = \sum_{f \in G} |A_f| = \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

定理 3.3 (Burnside定理)

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}, G \le S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$，且$\mathcal{C}$在群$G$的作用下封闭。则$\mathcal{C}$中不等价的染色数$N(G, \mathcal{C})$为

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|,$$

其中$\mathcal{C}(f) = \{c \in \mathcal{C} \mid f * c = c\}$.

证明：设$A = \{(f, c) \mid f \in G, c \in \mathcal{C}, f * c = c\}$。对$\forall f \in G$,令

$$A_f = \{(f, c) \mid c \in \mathcal{C}, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{f \in G} A_f$，故

$$|A| = \sum_{f \in G} |A_f| = \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

另一方面，对$\forall c \in \mathcal{C}$，令

$$A^c = \{(f, c) \mid f \in G, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{c\in\mathcal{C}} A^c$，故

$$\begin{aligned} |A| = \sum_{c\in\mathcal{C}} |A^c| &= \sum_{c\in\mathcal{C}} |G(c)| \\ &= \sum_{c\in\mathcal{C}} \frac{|G|}{\mathcal{C}\text{中与}c\text{等价的染色个数}} \\ &= |G| \cdot N(G, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

从而

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f\in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

另一方面，对$\forall c\in\mathcal{C}$，令

$$A^c=\{(f,c)\mid f\in G, f*c=c\}.$$

则$A=\uplus_{c\in\mathcal{C}}A^c$，故

$$|A|=\sum_{c\in\mathcal{C}}|A^c|=\sum_{c\in\mathcal{C}}|G(c)|$$

$$=\sum_{c\in\mathcal{C}}\frac{|G|}{\mathcal{C}\text{中与}c\text{等价的染色个数}}$$

$$=|G|\cdot N(G,\mathcal{C}).$$

从而

$$N(G,\mathcal{C})=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|\mathcal{C}(f)|.$$

另一方面，对$\forall c \in \mathcal{C}$，令

$$A^c = \{(f, c) \mid f \in G, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{c \in \mathcal{C}} A^c$，故

$$\begin{aligned}|A| = \sum_{c \in \mathcal{C}} |A^c| &= \sum_{c \in \mathcal{C}} |G(c)| \\ &= \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{|G|}{\mathcal{C}\text{中与}c\text{等价的染色个数}} \\ &= |G| \cdot N(G, \mathcal{C}).\end{aligned}$$

从而

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

另一方面，对$\forall c \in \mathcal{C}$，令

$$A^c = \{(f, c) \mid f \in G, f * c = c\}.$$

则$A = \uplus_{c \in \mathcal{C}} A^c$，故

$$\begin{aligned} |A| = \sum_{c \in \mathcal{C}} |A^c| &= \sum_{c \in \mathcal{C}} |G(c)| \\ &= \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{|G|}{\mathcal{C}\text{中与}c\text{等价的染色个数}} \\ &= |G| \cdot N(G, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

从而

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

另一方面，对$\forall c \in \mathcal{C}$，令

$$A^c = \{(f, c) \mid f \in G, f * c = c\}.$$

则$A = \biguplus_{c \in \mathcal{C}} A^c$，故

$$\begin{aligned} |A| = \sum_{c \in \mathcal{C}} |A^c| &= \sum_{c \in \mathcal{C}} |G(c)| \\ &= \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{|G|}{\mathcal{C}\text{中与}c\text{等价的染色个数}} \\ &= |G| \cdot N(G, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

从而

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |\mathcal{C}(f)|.$$

命题 3.4

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}, G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$，且$\mathcal{C}$在群$G$的作用下封闭。$c \in \mathcal{C}$且$f \in G$. 则$c \in \mathcal{C}(f)$ 当且仅当f 的循环因子分解式中，每一个循环因子中的元素在c下的染色相同。

特别地，若$|Y| = k, \mathcal{C} = \mathcal{C}_X$. 则在群$G$ 作用下不等价的染色数为

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} k^{\# f},$$

其中$\# f$表示f的循环因子分解中循环的个数。

命题 3.4

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}, G \leq S_n, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_X$，且$\mathcal{C}$在群$G$的作用下封闭。$c \in \mathcal{C}$且$f \in G$. 则$c \in \mathcal{C}(f)$ 当且仅当f 的循环因子分解式中，每一个循环因子中的元素在c下的染色相同。

特别地，若$|Y| = k, \mathcal{C} = \mathcal{C}_X$. 则在群$G$ 作用下不等价的染色数为

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} k^{\# f},$$

其中$\# f$表示f的循环因子分解中循环的个数。

例 3.5 (循环排列计数)

例 3.6 (项链计数问题)

例 3.7 (正方形顶点染色)

设$X=\{1,2,3,4\}, Y=\{R,B\}, \mathcal{C}=\mathcal{C}_X, G=D_4$. 求$N(G,\mathcal{C})$.

例 3.8 (正五边形顶点染色)

设$X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{R,B,G\}, \mathcal{C}=\mathcal{C}_X, G=D_5$. 求$N(G,\mathcal{C})$.

例 3.5 (循环排列计数)

例 3.6 (项链计数问题)

例 3.7 (正方形顶点染色)

设$X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{R, B\}, \mathcal{C} = \mathcal{C}_X, G = D_4$. 求$N(G, \mathcal{C})$.

例 3.8 (正五边形顶点染色)

设$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{R, B, G\}, \mathcal{C} = \mathcal{C}_X, G = D_5$. 求$N(G, \mathcal{C})$.

例 3.5 (循环排列计数)

例 3.6 (项链计数问题)

例 3.7 (正方形顶点染色)

设$X=\{1,2,3,4\},Y=\{R,B\},\mathcal{C}=\mathcal{C}_X,G=D_4$. 求$N(G,\mathcal{C})$.

例 3.8 (正五边形顶点染色)

设$X=\{1,2,3,4,5\},Y=\{R,B,G\},\mathcal{C}=\mathcal{C}_X,G=D_5$. 求$N(G,\mathcal{C})$.

例 3.5 (循环排列计数)

例 3.6 (项链计数问题)

例 3.7 (正方形顶点染色)

设$X=\{1,2,3,4\}, Y=\{R,B\}, \mathcal{C}=\mathcal{C}_X, G=D_4$. 求$N(G,\mathcal{C})$.

例 3.8 (正五边形顶点染色)

设$X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{R,B,G\}, \mathcal{C}=\mathcal{C}_X, G=D_5$. 求$N(G,\mathcal{C})$.

例 3.9

设$S=\{\infty\cdot R,\infty\cdot B,\infty\cdot G,\infty\cdot Y\}$. S的所有n 排列构成的集合记为$\mathcal{C}$. 设$x=x_1x_2\cdots x_n\in\mathcal{C}$, 定义$x$与

$$x^*=x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$$

等价。求$\mathcal{C}$中不等价的排列个数。

定义 3.10

(1) 设$f \in S_n$. 设f的循环因子分解中恰有e_i个i- 循环($1 \leq i \leq n$)。称$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$为置换f的类型，记为

$$type(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

显然$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = \#f$.

(2) 设$z_1, z_2, \ldots, z_n$为n个不定元，定义f的单项式为

$$mon(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_n^{e_n}.$$

(3) 设$G \leq S_n$. 定义G的循环指数为

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} mon(f).$$

定义 3.10

(1) 设$f \in S_n$. 设f的循环因子分解中恰有e_i个i- 循环$(1 \le i \le n)$。称$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$为置换f的类型，记为

$$type(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

显然$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = \#f$.

(2) 设$z_1, z_2, \ldots, z_n$为n个不定元，定义f的单项式为

$$mon(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_n^{e_n}.$$

(3) 设$G \le S_n$. 定义G的循环指数为

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} mon(f).$$

定义 3.10

(1) 设$f \in S_n$. 设f的循环因子分解中恰有e_i个i- 循环($1 \leq i \leq n$)。称$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$为置换f的类型，记为

$$type(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

显然$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = \#f$.

(2) 设$z_1, z_2, \ldots, z_n$为n个不定元，定义f的单项式为

$$mon(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_n^{e_n}.$$

(3) 设$G \leq S_n$. 定义G的循环指数为

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} mon(f).$$

显然，我们有

$$N(G, \mathcal{C}_X) = P_G(k, k, \ldots, k).$$

$$N(G, \mathcal{C}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}) = ?$$

显然，我们有

$$N(G, \mathcal{C}_X) = P_G(k, k, \ldots, k).$$

$$N(G, \mathcal{C}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}) = ?$$

定理 3.11 (Pólya计数定理)

设$X = \{1, 2, \ldots, n\}, Y = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}, G \leq S_n$. 则$\mathcal{C}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$中不等价的染色数等于单项式$u_1^{p_1} u_2^{p_2} \cdots u_k^{p_k}$在

$$P_G(u_1 + \cdots + u_k, u_1^2 + \cdots + u_k^2, \ldots, u_1^n + \cdots + u_k^n)$$

中的系数。

例 3.12 (正方形顶点染色)

(1) 求$P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)$;

(2) 用R, B两种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R, B, G三种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(4) 用R, B, G三种颜色对正方形顶点进行染色，使得有1个顶点染R，2个顶点染B，1个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.12 (正方形顶点染色)

(1) 求$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)$;

(2) 用R,B两种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R,B,G三种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(4) 用R,B,G三种颜色对正方形顶点进行染色，使得有1个顶点染R，2个顶点染B，1个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.12 (正方形顶点染色)

(1) 求$P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)$;

(2) 用R, B两种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R, B, G三种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(4) 用R, B, G三种颜色对正方形顶点进行染色，使得有1个顶点染R，2个顶点染B，1个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.12 (正方形顶点染色)

(1) 求$P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)$;

(2) 用R, B两种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R, B, G三种颜色对正方形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(4) 用R, B, G三种颜色对正方形顶点进行染色，使得有1个顶点染R，2个顶点染B，1个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.13 (正五边形顶点染色)

(1) 求$P_{D_5}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$;

(2) 用R, B, G三种颜色对正五边形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R, B, G三种颜色对正五边形顶点进行染色，使得有2个顶点染R，1个顶点染B，2个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.13 (正五边形顶点染色)

(1) 求$P_{D_5}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$;

(2) 用R, B, G三种颜色对正五边形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R, B, G三种颜色对正五边形顶点进行染色，使得有2个顶点染R，1个顶点染B，2个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.13 (正五边形顶点染色)

(1) 求$P_{D_5}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$;

(2) 用R, B, G三种颜色对正五边形顶点进行染色，有几种不等价的染色方案？

(3) 用R, B, G三种颜色对正五边形顶点进行染色，使得有2个顶点染R，1个顶点染B，2个顶点染G，有几种不等价的染色方案？

例 3.14 (双面三拼图)

作业：

- P_{351}：习题11
- P_{351}：习题14
- P_{352}：习题18
- P_{352}：习题19
- P_{352}：习题25
- P_{352}：习题38