第六章　线性空间

§1 集合与映射

1. 集合

1). 定义 具有某种特性的事物的全体.自然数集,实数集,复数集.多项式集合,矩阵集合.

2). 组成集合的事物称为这个集合的元素.a 是集合 M 中的一个元素,记为 $a\in M$, $a\notin M$ 表示 a 不是集合 M 的一个元素.

3). 空集合: 不含任何元素的集合,记为 $\varnothing$.

4). 表示方法:列举法和描述法.

列举法: 列举出集合的元素,适合于含有有限个元素的有限集,和从几个元素可以看出其余元素的无限集.

如: $\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,\cdots,100\}$, $\{1,2,3,\cdots\}$.

描述法: $S=\{元素a\,|\,a所满足的性质\}$,如:

$$n\text{阶矩阵的全体:}S=\{A\,|\,A是n阶方阵\}$$

$$S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\},S=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}.$$

5) 集合必须满足:元素的互异性和元素的确定性.

6) 集合之间的运算:

a) 相等: $M=N$,两个集合所含元素相同.

$$M=N\Leftrightarrow\forall a\in M\Rightarrow a\in N;\forall a\in N\Rightarrow a\in M$$

b) 子集合: $M\subseteq N$, M 中的元素都是 N 中的元素.

注: $M\subseteq M$ 　任一集合都是其自身的子集合.$\varnothing\subseteq M$ 　空集是任一集合的子集合.

$$M=N\Leftrightarrow M\subseteq N,N\subseteq M$$

c) 交: $M\bigcap N$,既属于 M 又属于 N 的元素的全体.$M\bigcap N\subseteq M,M\bigcap N\subseteq N$.

$$x\in M\bigcap N\Leftrightarrow x\in M\text{ 且 }x\in N.$$

d) 并: $M\bigcup N$,或者属于 M ,或者属于 N 的元素的全体, $M\bigcap N\supseteq M,M\bigcap N\supseteq N$.

$$x\in M\bigcup N\Leftrightarrow x\in M\text{ 或 }x\in N.$$

e) 补: 若 $M\subseteq N$, M 在 N 中的补集定义为属于 N 但是不属于 M 的元素的全体,记为: $N-M$ 或者 M^c .即 $M^c=\{a\,|\,a\in N,a\notin M\}$.

f) 积: $M\times N=\{(a,b)\,|\,a\in M,b\in N\}$,有顺序的元素对.

运算律:

交换律: $M\bigcup N=N\bigcup M$, $M\bigcap N=N\bigcap M$.

结合律: $(M\bigcup N)\bigcup S=M\bigcup(N\bigcup S)$, $(M\bigcap N)\bigcap S=M\bigcap(N\bigcap S)$.

分配律: $M\bigcap(N\bigcup S)=(M\bigcap N)\bigcup(M\bigcap S)$, $M\bigcup(N\bigcap S)=(M\bigcup N)\bigcap(M\bigcup S)$.

对偶律: $(M\bigcup N)^c=M^c\bigcap N^c,(M\bigcap N)^c=M^c\bigcup N^c$.

2. 映射

取两个集合M,M',

1) 定义: 若存在一个对应法则f,对M中任一元素a,都有唯一的一个元素$a'\in M'$,使得a'与a对应,这个对应法则就称为一个映射: $f:M\to M';a\mapsto a'$.

若f是M到M'的一个映射,$a'=f(a)$,则称a为a'在映射f下的原象, a'为a在映射f下的象,

集合的自身到自身的映射称为这个集合的一个变换.

一个对应法则$f:M\to M';a\mapsto a'$做成映射,必须满足如下三条

1) M中任一元素都必须有像; 2) 每个元素的像只有一个; 3) 这个像必须在M'中.

例子: $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}:x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$; $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}:\dfrac{b}{a}\mapsto a+b$; $f:\{1,2,3,4\}\to\{2,4,6,10\}:x\mapsto 2x$.

2) 例子:

a) $f:\mathbf{Z}\to 2\mathbf{Z};n\mapsto 2n$.

b) $f_1:M_n(P)\to P:A\mapsto|A|$, $f_2:F\to M_n(P):a\mapsto aE$.

c) $f_1:P[x]\to P[x]:f(x)\mapsto f'(x)$, $f_2:P[x]\to\mathbf{Z}_{>0}:f(x)\mapsto\partial(f(x))$.

d) 特殊的几个:取$M,M',a\in M,a'\in M'$, $a_0\in M'$是个固定的元素.

$f:M\to M';x\mapsto a_0$:常值映射. $f:M\to M;a\mapsto a$:恒等映射,单位映射.

e) 函数: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R};x\mapsto f(x)$.

3) 关于映射的一些概念

a) 相等: 设f,g都是集合M到集合M'的映射,若任给$a\in M$,都有$f(a)=g(a)$,则称映射是相等的.

b) 乘积: 若有映射$M\xrightarrow{g}M'\xrightarrow{f}M''$,任给$x\in M$,则定义$g$与$f$的乘积为$fg(x)=f(g(x))$.满足结合律.

c) 设映射$f:M\to M'$, $f(M)=\{f(x)\mid x\in M\}\subseteq M'$,

(1) 满射:若$f(M)=M'$,即M'中任一元素都有原象.任给$x'\in M'$,存在$x\in M$,使得$f(x)=x'$

(2) 单射:不同的元素的象也不同,任给$x_1,x_2\in M$, $x_1\neq x_2$,则$f(x_1)\neq f(x_2)$.或者任给$x_1,x_2\in M$,

若$f(x_1)=f(x_2)$,则$x_1=x_2$.

(3) 双射:即单又满的映射.

对有限集合而言,存在双射当且仅当两个集合所含元素个数相等.无限集合的例子$f:\mathbf{Z}\to 2\mathbf{Z};n\mapsto 2n$

d) 逆映射,设 $f: M \to M'$ 是一双射,定义其逆映射为 $f^{-1}: M' \to M$ 为双射时对应的元素.

若 $f: M \to M'; a \mapsto a'$,则 $f^{-1}: M' \to M; a' \mapsto a$,且 $f^{-1}f = 1_M$, $ff^{-1} = 1_{M'}$.

§2 线性空间的定义及简单性质

这是一个抽象的概念,先看几个例子.

1. 几个例子

例 1: 多项式的集合: $P[x] = \{f(x) \mid f(x)\text{是数域}P\text{上的多项式}\}$.考察元素之间的运算:

$f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $kf(x)$.满足性质如下:

$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, $(f+g)+h=f+(g+h)$, $f+0=f$, $f+(-f)=0$.

$1f(x)=f(x)$, $k(lf(x))=(kl)f(x)$, $(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$, $k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$.

当然对于乘法还有 $fg=gf$, $(fg)h=f(gh)$.

例 2: 矩阵的集合: $P^{n\times n}=\{A \mid A=(a_{ij})_n\}$. $A+B$, kA, AB,

$A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$, $A+0=A$, $A+(-A)=0$.

$1A=A, k(lA)=(kl)A, k(A+B)=kA+kB, (k+l)A=kA+lA.$

例 3: 向量空间 P^n, n 维向量的全体. $\alpha+\beta$, $k\alpha$,

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, $\alpha+0=\alpha, \alpha+(-\alpha)=0$.

$1\alpha=\alpha, k(l\alpha)=(kl)\alpha, k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha.$

2. 线性空间

1) 定义: 设 V 是一个非空集合, P 是一个数域.在集合 V 的元素之间定义一种运算(加法):对于 V 中任两个元素 α,β,在 V 中有唯一的一个元素 γ 与之对应,称为 α 与 β 的和,记为 $\gamma=\alpha+\beta$;在集合 V 与数域 P 的元素之间定义一个运算(数量乘法):任给 $k\in P, \alpha\in V$,在 V 中有唯一的一个元素 δ 与之对应,称为 k 与 α 的数量乘积,记为 $\delta=k\alpha$,若上述两个运算满足:任给 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, $k,l\in P$,有

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,加法的交换律.

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$,加法的结合律.

(3) V 中存在一个元素记为 0,满足任给 $\alpha\in V$,都有 $\alpha+0=\alpha$,称为 V 的零元.

(4) 任给 $\alpha\in V$,存在一个元素记为 $-\alpha$,满足 $\alpha+(-\alpha)=0$,称为 α 的负元.

(5) $1\alpha=\alpha$. (6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$. (7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$. (8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

称V是数域P上的一个线性空间.记为${}_PV$.

解释一下这个含义:

(1). ${}_PV$:两个运算可以看做是两个映射

$$+:V\times V\to V;(\alpha,\beta)\mapsto\alpha+\beta,\bullet:P\times V\to V;(k,\alpha)\mapsto k\alpha.$$

(2). 定义包含如下几个方面:

1) V中定义了两个运算且V关于这两个运算封闭,

2) 满足8条规则.

2) .例子:

1) $P[x],P^n,P^{n\times n}$.

2) $P[x]_n$:次数小于n的多项式的全体. $P[x]_n=\{a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in P\}$.

3) 实函数全体. 4) ${}_PP$.

3). 性质.

1) 零元唯一.任意元素的负元唯一. 2) $0\alpha=0,k0=0,(-1)\alpha=-\alpha$.

3) 若$k\alpha=0$,则$k=0$,或者$\alpha=0$. 4) $(-\lambda)\alpha=-(\lambda\alpha)=\lambda(-\alpha)$.

§3 维数基与坐标

1. 线性表出,线性相关,线性无关.

1) 线性表出:设线性空间${}_PV$中向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,取数$k_1,k_2,\cdots,k_s\in P$,则$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$称为向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的一个线性组合.

2) 线性相关,线性无关.

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,若存在$P$中一组**不全为零**的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,则$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

3) 等价

4) 几个结论:

(1) 一个向量α线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha=0$. (2) 一个向量α线性无关$\Leftrightarrow$ $\alpha\neq 0$.

(3) 含有零元的向量组线性相关.

(4) 线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出,则$r\le s$.

(5) 可定义向量组的极大无关组,从而有秩的定义.

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$.

(6) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关,则向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,且表出系数唯一. (7) 整体和部分的关系.

2. 维数,基与坐标

例子:$P^n:n=1$,两个向量线性相关.

$n=2$,3个向量线性相关,不共线的两个向量线性无关.
$n=3$,4个向量线性相关,不共面的3个向量线性无关.

一般的,在P^n中,$n+1$个向量线性相关.

对一个线性空间V,把以上关于P^n的这个特性抽象出来,考察线性空间V中线性无关的向量组所含向量的最多个数,这个向量组本身的性质等等.

1) 任给一个线性空间V,若V中有n个线性无关的向量,但是没有更多数目的线性无关的向量,称V是一个n维线性空间,n称为线性空间V的维数.记为$\dim V$.
 若V中可找到任意多个线性无关的向量,则称V是无限维的.
 解释: (1) 有n个线性无关,但是没有更多的意思:
 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关,没有更多,即任给向量$\beta$,向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关,则根据已知的结论可知. β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出.且表示法唯一.故维数就是线性无关的向量组所含向量的最多个数.
 (2)只要存在n个线性无关的向量即可,可以不唯一.

2) 基:设$\dim V=n$,则n个线性无关的向量就称为线性空间V的一组基.
 (1) 基不唯一.
 (2) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基,任给$\beta\in V$,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出.且表示法唯一.故$V=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\mid k_1,k_2,\cdots k_n\in P\}$

3) 设n维线性空间V,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基,任给$\beta\in V$,$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$唯一线性表出.即存在唯一的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_n\in P$,使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,就称$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$为向量$\beta$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

定理:若在线性空间V中有n个线性无关的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,且$V$中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出,则$V$是$n$维的,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基.

多说一点: 设线性空间${}_PV$,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$中含有$n$个向量的向量组,

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关;(2) $\dim V=n$;(3) V中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出.则结论是:

(1)(2)(3) 中任意两条都可得到第三条,从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基.

(1) (3) $\Rightarrow$(2) : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,可线性表出V 中任一向量,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组基, $\dim V=n$.

(1) (2) $\Rightarrow$(3) :(1)(2)可知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V 的一组基,从而可线性表出V 中任一向量.

(2) (3) $\Rightarrow$(1) 设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是V 的一组基,则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,从而两个向量组等价,故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也线性无关.

3. 例子:

1) 取n 维向量空间P^n :向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

标准单位向量: $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$ 就是一组基.

且任给$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,有$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$,坐标可知.

$\eta_1=(1,1,\cdots,1),\eta_2=(0,1,1,\cdots,1),\cdots,\eta_n=(0,\cdots,0,1)$ 也是一组基.

任给$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,假设$\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n$,即$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.解为

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\-1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2-a_1\\\vdots\\a_{n-1}-a_{n-2}\\a_n-a_{n-1}\end{pmatrix},\text{即}$$

$\alpha=a_1\eta_1+(a_2-a_1)\eta_2+\cdots+(a_n-a_{n-1})\eta_n$.

取$\delta_1=(1,0,\cdots,0),\delta_2=(1,1,0,\cdots,0),\cdots,\delta_n=(1,1,\cdots,1)$,此时$\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n$.

若$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_2\\a_2-a_3\\\vdots\\a_{n-1}-a_n\\a_n\end{pmatrix}.$$

故基不唯一,同一个向量在不同基下的坐标就可以不一样.

向量的顺序不一样,也是不同的基,

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n:\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$,坐标是$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

$\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1},\cdots,\varepsilon_1:\alpha=a_n\varepsilon_n+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_1\varepsilon_1$,坐标是$(a_n,a_{n-1},\cdots,a_1)$.

2). $F[x]_n, F[x]$.

对$F[x]$,这是一个无限维的例子.向量$1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$线性无关.

对$F[x]_n=\{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in F\}$.

取基$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$, $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$在基下的坐标$(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0)$.

取基$1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$, $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$在基下的坐标为

$$(f(a),f'(a),\frac{f''(a)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!})$$

线性空间的基和维数与系数域有关.

例子 3: ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$:复数域作为实数域上的线性空间.$1,i$线性无关,基为$1,i$.

${}_{\mathbf{C}}\mathbf{C}$:复数域作为复数域上的线性空间.1线性无关.基为1.

例子 4: 取$F^{2\times2}=\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in F\}$,数域$F$上的2阶方阵的全体.

这里面的向量是2阶方阵.

线性无关: $A_1=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}$, $x_1A_1+x_2A_2=0$只有零解.

$$x_1A_1+x_2A_2=\begin{pmatrix}x_1a&x_1b\\x_1c&x_1d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2a_1&x_2b_1\\x_2c_1&x_2d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1a+x_2a_1&x_1b+x_2b_1\\x_1c+x_2c_1&x_1d+x_2d_1\end{pmatrix}=0.$$

$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&4\\6&6\end{pmatrix}$, $x_1A_1+x_2A_2=\begin{pmatrix}x_1+2x_2&2x_1+4x_2\\3x_1+6x_2&4x_1+6x_2\end{pmatrix}=0$,则$x_1=x_2=0$.线性无关.

看基怎样取?

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$x_1E_{11}+x_2E_{12}+x_3E_{21}+x_4E_{22}=\begin{pmatrix}x_1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&x_2\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\x_3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=0,\text{则}$$

$x_1=x_2=x_3=x_4=0$. $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$线性无关.

任给 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$, $A=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$.

$$F_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1F_{11}+x_2F_{12}+x_3F_{21}+x_4F_{22}=x_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_2 & x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3+x_4 \end{pmatrix}=0,$$

则 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. $F_{11},F_{12},F_{21},F_{22}$ 线性无关.

任给 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$,

$$A=x_1F_{11}+x_2F_{12}+x_3F_{21}+x_4F_{22}=\begin{pmatrix} x_1 & x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3+x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

解得: $x_1=a, x_2=b-a, x_3=c-b, x_4=d-c$.从而 $A=aF_{11}+(b-a)F_{12}+(c-b)F_{21}+(d-c)F_{22}$.

§4 基变换与坐标变换

1. 任给线性空间 ${}_PV$,基不唯一,但是基所含向量的个数相等,等于线性空间的维数.

注意顺序不同,就是不同的基.

设 n 维线性空间 ${}_PV$ 的两组基: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.由基的性质,两组基可以互相线性表出,看

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出的系数.

设 $\begin{cases} \beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n \\ \quad\cdots \\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n \end{cases}$.形式的写法:

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{设 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.\text{则}$$

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$.

称矩阵 A 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

注：基到基的过渡矩阵是可逆的. $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A^{-1}$.

2. 假设线性空间 ${}_PV$ 有两组基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.且由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 A,即 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$.任给 $\alpha\in V$, α 在两组基下有对应的坐标,设

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X.$$

$$\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)Y.$$

$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)Y=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AY$,则 $X=AY$.

3. 运算规律:

设线性空间 ${}_PV$ 有两组基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. $A=(a_{ij}),B=(b_{jk})$ 是两个 n 阶方阵,则

(1) $((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB)$.

$$((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B=(\sum_{i=1}^n a_{i1}\alpha_i,\sum_{i=1}^n a_{i2}\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^n a_{in}\alpha_i)B=(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{j1}\alpha_i,\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{j2}\alpha_i,\cdots,\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{jn}\alpha_i)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j1}\right)\alpha_i,\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j2}\right)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jn}\right)\alpha_i\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB)$$

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B)$.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B=\left(\sum_{i=1}^n(a_{i1}\alpha_i+b_{i1}\alpha_i),\sum_{i=1}^n(a_{i2}\alpha_i+b_{i2}\alpha_i),\cdots,\sum_{i=1}^n(a_{in}\alpha_i+b_{in}\alpha_i)\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n(a_{i1}+b_{i1})\alpha_i,\sum_{i=1}^n(a_{i2}+b_{i2})\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^n(a_{in}+b_{in})\alpha_i\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B).$$

(3) $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A$.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A=\left(\sum_{i=1}^n(a_{i1}\alpha_i+a_{i1}\beta_i),\sum_{i=1}^n(a_{i2}\alpha_i+a_{i2}\beta_i),\cdots,\sum_{i=1}^n(a_{in}\alpha_i+a_{in}\beta_i)\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}(\alpha_i+\beta_i),\sum_{i=1}^n a_{i2}(\alpha_i+\beta_i),\cdots,\sum_{i=1}^n a_{in}(\alpha_i+\beta_i)\right)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A.$$

4.例子:

(1) 取 n 维向量空间 F^n:两组基:

$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$,与

$\eta_1=(1,1,\cdots,1),\eta_2=(0,1,\cdots,1),\cdots,\eta_n=(0,\cdots,0,1)$,

由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$.

而 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\0&-1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$.

任给 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$,则

$$\alpha=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A^{-1}X=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2-x_1\\\vdots\\x_n-x_{n-1}\end{pmatrix}.$$

(2) $F^{2\times2}=\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in F\}$.两组基.

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$F_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},F_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},F_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},F_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

由 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 到 $F_{11},F_{12},F_{21},F_{22}$ 的过渡矩阵

$$(F_{11},F_{12},F_{21},F_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

§5 线性子空间

1. 线性子空间.

(1) 定义: 任取数域 P 上的一个线性空间 V ,若 V 的非空子集合 W 对于 V 的两种运算(加法,数量乘法)封闭,则称 W 为 V 的一个线性子空间(子空间).

(a) 非空子集合$W \subseteq V$.

(b) 对V的两种运算封闭,即任给$\alpha, \beta \in W$,则$\alpha+\beta \in W$；任给$k \in F, \alpha \in W$,则$k\alpha \in W$.

(c) W关于加法和数量乘法满足8条性质.

(2) 如何判断子集合做成子空间.

1) 2) 3) W中有没有零元满足$0+\alpha=\alpha$.4) W中任一元素有没有负元. 5) 6) 7) 8)

定理:若线性空间V的非空子集合W对于V的两种运算封闭,即任给$\alpha, \beta \in W$,则$\alpha+\beta \in W$；任给$k \in F, \alpha \in W$,则$k\alpha \in W$,则W是V的一个子空间.

(3) 关于维数基的简单描述.若W是子空间,则$\dim W \le \dim V$.

2. 例子: (1) 平凡子空间: $W_1=\{0\}, V$是任一线性空间都有的两个子空间,称为V的平凡子空间.

(2) $P[x]_n$是$P[x]$的子空间.

(3) 取数域P上的n阶方阵A,看齐次线性方程组$Ax=0$的解集W,这是线性空间P^n的一个子集合,且由解的性质可知$Ax=0$的解的线性组合还是解,从而W是P^n的一个子空间,称为$Ax=0$的解空间.且维数为$n-r(A)$, $Ax=0$的一个基础解系就是W的一组基.

3. 生成子空间.

1) 定义: 取${}_PV$,设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是$V$中的一个向量组,则

$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1, k_2, \cdots, k_s \in P\right\}$是$V$的非空子集合,在$V$的运算下做成一个子空间,称为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$生成的子空间.

2) 取V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则$V=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \mid k_1, k_2, \cdots, k_n \in P\right\}$就是由基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$生成的线性空间.

3) a) 设$\dim V=n$有限,则V的任一子空间W都是由有限个向量生成的,即存在向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$满足$W=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.实际上取$W$的一组基即可.

b) 取$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$.则$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$是包含$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的最小的子空间.

实际上,取$\alpha \in V$,包含α的子空间就是$L(\alpha)$,

取$\alpha, \beta \in V$,若α, β线性相关,则包含α, β的子空间就是$L(\alpha, \beta)=L(\alpha)=L(\beta)$.

若α, β线性无关,则包含α, β的子空间就是$L(\alpha, \beta)$.

4) 取V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则有子空间链:

$\{0\}\subseteq L(\alpha_1)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\subseteq\cdots\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=V$.

$\{0\}\subseteq L(\alpha_{i_1})\subseteq L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2})\subseteq L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\alpha_{i_3})\subseteq\cdots\subseteq L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n})=V$.

4. 结论.

1) 定理: (1) 两个向量组生成的子空间相等当且仅当这两个向量组等价.

(2) $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

证明: (1) 设 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 与 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

$\Rightarrow$:若 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,

由 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1,k_2,\cdots,k_s\in P\right\}$.

看 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,则任一 α_i 都是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个线性组合.即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出.同理 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.等价.

$\Leftarrow$: 若等价,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出.从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.从而 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\subseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.同理 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\supseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

(2) 假设 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$,并设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个极大无关组,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价,从而 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的一组基,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的一组基,即 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

2). 基扩充定理: 设 W 是 ${}_PV$ 的一个 m 维子空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一组基,则存在 ${}_PV$ 中 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$,使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 是 ${}_PV$ 的一组基.即子空间的一组基可以扩充成整个线性空间的一组基.

证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一组基,是 ${}_PV$ 中一个线性无关的向量组.

假若 $m=n$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 ${}_PV$ 的一组基,此时 $W=V$.

假若 $m<n$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 不能充当 ${}_PV$ 的一组基,存在一个元素不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出,记为 α_{m+1},则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性无关,若 $m+1<n$,存在一个元素 α_{m+2},不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性表出.这样下去,可得 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$,使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 是 ${}_PV$ 的一组基.即可以从 W 的一组基出发,添加 $\dim V-\dim W$ 个向量后得到 V 的一组基.

5. 补充

1) 替换定理: 设线性空间 ${}_PV$,维数为 n ,取一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,设 W 是 ${}_PV$ 的一个 m 维子空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 W 的一组基,则在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中可找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{n-m}}$,使得 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{n-m}},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 ${}_PV$ 的一组基.

6. 几个例子:

1) 取线性空间 P^n : (1) 第一个分量和第 n 个分量相等的所有 n 维向量的全体.

(2) 偶数号码分量等于 0 的所有 n 维向量. (3) 偶数号码分量相等的所有 n 维向量.

解: (1) $W=\{\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_1)\mid a_i\in F\}$

(2) 若 $n=2k$,则 $W=\{\alpha=(a_1,0,a_3,0,\cdots,a_{n-1},0)\mid a_i\in F\}$.

若 $n=2k-1$,则 $W=\{\alpha=(a_1,0,a_3,0,\cdots,0,a_n)\mid a_i\in F\}$.

(3) 若 $n=2k$,则 $W=\{\alpha=(a_1,b,a_3,b,\cdots,a_{n-1},b)\mid a_i\in F\}$.

若 $n=2k-1$,则 $W=\{\alpha=(a_1,b,a_3,b,\cdots,b,a_n)\mid a_i\in F\}$.

2) 对称阵全体,反对称阵全体,上三角阵全体,对角阵全体.等等

3) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & d \\ d+c & x & y \end{pmatrix}\middle| a,b,c,d,x,y\in P\right\}$ 是 $P^{3\times3}$ 的一个 6 维子空间,基:

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},E_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},E_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

且 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & d \\ d+c & x & y \end{pmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4+xE_5+yE_6$.

§ 6 子空间的交与和

1. 基本定义

交: 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间,集合 $V_1\bigcap V_2$ 定义为 V_1,V_2 的交.

和: 设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间, V_1,V_2的和记为V_1+V_2,定义为

$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$,即所有形如$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$的向量组成的子集合.

注: V_1+V_2中元素形式: 1) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$

2) 任给$\alpha\in V_1+V_2$,则存在$\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$,使得$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

2.性质与结论.

定理 1: 若V_1,V_2是线性空间V的两个子空间,则$V_1\bigcap V_2$也是V的子空间.

证明: 证明$V_1\bigcap V_2$对加法和数量乘积封闭.

任给$\alpha,\beta\in V_1\bigcap V_2$,任给$k,l\in F$,则$\alpha,\beta\in V_1$且$\alpha,\beta\in V_2$.

由于V_1,V_2均为子空间,则$k\alpha+l\beta\in V_1$,且$k\alpha+l\beta\in V_2$,从而$k\alpha+l\beta\in V_1\bigcap V_2$,即$V_1\bigcap V_2$是$V$的子空间.

定理 2: 若V_1,V_2是线性空间V的两个子空间,则V_1+V_2也是V的子空间.

证明: 证明V_1+V_2对加法和数量乘积封闭.

任给$\alpha,\beta\in V_1+V_2$,则存在$\alpha_1,\beta_1\in V_1,\alpha_2,\beta_2\in V_2$,使得$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$,则

$\alpha+\beta=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2$,由于$V_1,V_2$均为子空间,则$\alpha_1+\beta_1\in V_1,\alpha_2+\beta_2\in V_2$,

从而$\alpha+\beta\in V_1+V_2$.

任给$k\in F$, $k\alpha=k\alpha_1+k\alpha_2\in V_1+V_2$.则$V_1+V_2$也是$V$的子空间.

注: (1) $V_1\bigcup V_2$不是子空间.实际上,任给$\alpha,\beta\in V_1\bigcup V_2$,则$\alpha,\beta\in V_1$或者$\alpha,\beta\in V_2$.

若$\alpha,\beta\in V_1$,则$k\alpha+l\beta\in V_1\bigcup V_2$;若$\alpha,\beta\in V_2$,则$k\alpha+l\beta\in V_1\bigcup V_2$.

但是$\alpha\in V_1$,同时$\beta\in V_2$,则没有如上的结论.给个例子:取二维平面$\mathbf{R}^2$,设X, Y轴分别为V_1与V_2,

则$V_1\bigcap V_2=\{0\}$, $V_1+V_2=\mathbf{R}^2$,但是$V_1\bigcup V_2$就是X轴和Y轴. X轴上的一个非零向量和Y轴上的一个向量非零向量做和在X轴和Y轴之外.

(2) 任取V的两个子空间V_1,V_2,则有下面几个空间的互相包含关系.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & V_1 \arrow[dr, dash] & & \\
\{0\} \arrow[r, dash] & V_1\bigcap V_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & V_1+V_2 \arrow[r, dash] & V \\
 & & V_2 \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

同时包含于V_1,V_2的V的子空间W都包含于$V_1\bigcap V_2$.即$V_1\bigcap V_2$是同时包含于V_1,V_2的V的最大子空间.

即若子空间W满足$W\subseteq V_1$且$W\subseteq V_2$,则必有$W\subseteq V_1\bigcap V_2$.

同时包含V_1,V_2的V的子空间W都包含V_1+V_2.即V_1+V_2是同时包含于V_1,V_2的V的最小子空间.

即若子空间W满足$V_1\subseteq W$且$V_2\subseteq W$,则必有$V_1+V_2\subseteq W$.

(3) 运算律: $V_1\bigcap V_2=V_2\bigcap V_1$, $(V_1\bigcap V_2)\bigcap V_3=V_1\bigcap(V_2\bigcap V_3)$.从而可定义$V_1\bigcap V_2\bigcap\cdots\bigcap V_s=\bigcap\limits_{i=1}^{s}V_i$.

$V_1+V_2=V_2+V_1$, $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$.从而可定义$V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$.

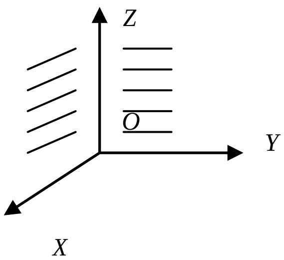
$V_1+V_2+\cdots+V_s=\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\mid\alpha_i\in V_i, i=1,2,\cdots,s\}$.

(4) 取子空间V_1与V_2,则$V_1\subset V_2\Leftrightarrow V_1\bigcap V_2=V_1\Leftrightarrow V_1+V_2=V_2$.

3. 例子:

1). 取$V=\mathbf{R}^3$, $V_1=Y$轴, $V_2=XOZ$平面, $V_3=Z$轴,则$V_1\bigcap V_2=\{0\}$, $V_1+V_2=\mathbf{R}^3$.

$V_3\bigcap V_2=V_3$, $V_3+V_2=V_2$; $V_1\bigcap V_3=\{0\}$, $V_1+V_3=YOZ$面;



2) 取$V=F^n$,取mn矩阵A,与sn矩阵B,设V_1与V_2分别为齐次线性方程组$AX=0$与$BX=0$的解空间,设基础解系为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$与$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l$.则$V_1=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)$, $V_2=L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$.

求$V_1\bigcap V_2$.任取$\xi\in V_1\bigcap V_2$,则ξ既是$AX=0$的解,又是$BX=0$的解,故ξ是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$的解.

反之设ξ是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$的解,则$\xi$既是$AX=0$的解,又是$BX=0$的解,从而$\xi\in V_1\bigcap V_2$,则$V_1\bigcap V_2$就是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$的解空间.

3) $L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)+L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$.

事实上,若$\alpha\in L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)+L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$,则$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,其中$\alpha_1\in L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)$,

$\alpha_2\in L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$.则$\alpha_1+\alpha_2\in L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$.

反之$L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$中任一向量都可写成$L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)$中与$L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$中向量的和,

则$L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)+L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)$.

问题: $L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t)\bigcap L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)=?$.

4. 维数公式:

定理:若V_1,V_2是线性空间V的两个子空间,则$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\bigcap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

证明:
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & V_1 \arrow[dr, dash] & & \\ \{0\} \arrow[r, dash] & V_1\bigcap V_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & V_1+V_2 \arrow[r, dash] & V \\ & & V_2 \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

或者$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\bigcap V_2)$,设$\dim(V_1\bigcap V_2)=m$, $\dim V_1=n_1$, $\dim V_2=n_2$.

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$V_1\bigcap V_2$的一组基,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可以扩充成$V_1$与$V_2$的一组基,设为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m}$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}$,

看向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}$.个数为$n_1+n_2-m$.

证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}$是$V_1+V_2$的一组基.

证明 (1) 线性无关, (2) 可线性表出V_1+V_2的任一向量.

(1) 假设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+t_1\gamma_1+t_2\gamma_2+\cdots+t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0$.

改写为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=-t_1\gamma_1-t_2\gamma_2-\cdots-t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=\alpha$.

则$\alpha\in V_1\bigcap V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.设$\alpha=p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\cdots+p_m\alpha_m$,则

$p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\cdots+p_m\alpha_m+t_1\gamma_1+t_2\gamma_2+\cdots+t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0$,由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}$是

V_2的一组基,则$p_1=p_2=\cdots=p_m=t_1=t_2=\cdots=t_{n_2-m}=0$.

从而$0=\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$.则

$k_1=k_2=\cdots=k_m=l_1=l_2=\cdots=l_{n_1-m}=0$.线性无关.

(2) $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m})+L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m})$

$=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m})$.

从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}$是$V_1+V_2$的一组基.从而有维数公式.

例如前面例中维数的关系

1). 取$V=\mathbf{R}^3$,$V_1=Y$轴,$V_2=XOZ$平面, $V_3=Z$轴,则$V_1\cap V_2=\{0\}$,$V_1+V_2=\mathbf{R}^3$.

$V_3\cap V_2=V_3$,$V_3+V_2=V_2$;$V_1\cap V_3=\{0\}$,$V_1+V_3=YOZ$面;

$V_1=Y$轴,$V_2=XOZ$平面: $3=1+2$. $V_2=XOZ$平面,$V_3=Z$轴: $1+2=1+2$.

$V_1=Y$轴,$V_3=Z$轴: $0+2=1+1$.

5. 怎样求子空间的交与和

设$V=F^n$,设$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,理论上应如何求$V_1+V_2$, $V_1\cap V_2$.

解: $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

同时应用维数公式可得$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$.

$\dim V_1=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,$\dim V_2=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$, $\dim(V_1+V_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1}$,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2}$是$V_1$与$V_2$的一组基,求$V_1\cap V_2$.

任给$\xi\in V_1\cap V_2$,则$\xi\in V_1$且$\xi\in V_2$,则ξ可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1}$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2}$线性表出.

$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n_1}\alpha_{n_1}=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_{n_2}\beta_{n_2}$,即求解方程组.

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n_1}\alpha_{n_1}-y_1\beta_1-y_2\beta_2-\cdots-y_{n_2}\beta_{n_2}=0$,

只有零解.即$V_1\cap V_2=\{0\}$,若有非零解,则$V_1\cap V_2\neq\{0\}$,基础解系所含向量的个数为

$n_1+n_2-r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2})=\dim(V_1\cap V_2)=m$.

设$\eta_1=(k_{11},k_{12},\cdots,k_{1n_1},l_{11},l_{12},\cdots,l_{1n_2}),\cdots,\eta_m=(k_{m1},k_{m2},\cdots,k_{mn_1},l_{m1},l_{m2},\cdots,l_{mn_2})$

则得到$\xi_1=k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2+\cdots+k_{1n_1}\alpha_{n_1}=l_{11}\beta_1+l_{12}\beta_2+\cdots+l_{1n_2}\beta_{n_2}$,…,

$\xi_m=k_{m1}\alpha_1+k_{m2}\alpha_2+\cdots+k_{mn_1}\alpha_{n_1}=l_{m1}\beta_1+l_{m2}\beta_2+\cdots+l_{mn_2}\beta_{n_2}$. 则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$就是$V_1\cap V_2$的一组基.

例 1: 设$\alpha_1=(1,0,-1,0)^T$,$\alpha_2=(0,1,2,1)^T$,$\alpha_3=(2,1,0,1)^T$,与$\beta_1=(-1,1,1,1)^T$,$\beta_2=(1,-1,-3,-1)^T$,

$\beta_3=(-1,1,-1,1)^T$,令$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,求$V_1+V_2$与$V_1\cap V_2$的维数和一组基

解: 先求$\dim V_1,\dim V_2$以及一组基.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$,则 $\dim V_1=2$,取 α_1,α_2 为基.

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&1\\1&-3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$,则 $\dim V_2=2$,取 β_1,β_2 为基.

$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\-1&2&0&1&-3&-1\\0&1&1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-1&1&-1\\0&1&1&1&-1&1\\0&0&0&-1&0&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

则 $\dim(V_1+V_2)=3$,$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 是一组基.则 $\dim(V_1\cap V_2)=2+2-3=1$.

任取 $\xi\in V_1\cap V_2$,则 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$,即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$.

系数矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\-1&2&-1&3\\0&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\0&2&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$,求解基础解系得

$\eta=(1,-1,0,1)$,则 $\xi=\alpha_1-\alpha_2=\beta_2$ 就是 $V_1\cap V_2$ 的基.

另一种方法求交.

任取 $\xi\in V_1\cap V_2$,则 $\xi=y_1\beta_1+y_2\beta_2\in V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$,则 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,y_1\beta_1+y_2\beta_2$ 的一个极大无关组,即向量组的秩为 2,

$$(\alpha_1,\alpha_2,y_1\beta_1+y_2\beta_2)=\begin{pmatrix}1&0&-y_1+y_2\\0&1&y_1-y_2\\-1&2&y_1-3y_2\\0&1&y_1-y_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-y_1+y_2\\0&1&y_1-y_2\\0&0&y_1\\0&0&0\end{pmatrix}$$,要求秩为 2,则 $y_1=0$,

令 $y_2=1$,则 $\xi=\beta_2\in V_1\cap V_2$.

例 2:设 $\alpha_1=(1,2,1,-2)^T$,$\alpha_2=(2,3,1,0)^T$,$\alpha_3=(1,2,2,-3)^T$,与 $\beta_1=(1,1,1,1)^T$,$\beta_2=(1,0,1,-1)^T$,

$\beta_3=(1,3,0,-4)^T$,令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,求 $V_1+V_2,V_1\cap V_2$.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&1&1\\2&3&2&1&0&3\\1&1&2&1&1&0\\-2&0&-3&1&-1&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&0&0&3\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&-1&0&2\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$

则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3, r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=4$.

$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2)$,从而 $\dim(V_1\bigcap V_2)=2$.

任给 $\xi\in V_1\bigcap V_2$,则 $\xi=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3\in V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&y_1+y_2+y_3\\2&3&2&y_1+3y_3\\1&1&2&y_1+y_2\\-2&0&-3&y_1-y_2-4y_3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&y_1+y_2+y_3\\0&-1&0&-y_1-2y_2+y_3\\0&0&1&y_1+2y_2-2y_3\\0&0&0&-5y_2\end{array}\right)$

则 $y_2=0$,即 $\xi=y_1\beta_1+y_3\beta_3\in V_1\bigcap V_2$,从而 $V_1\bigcap V_2=L(\beta_1,\beta_3)$.

§7 子空间的直和

子空间的和,$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$.

1. 直和:

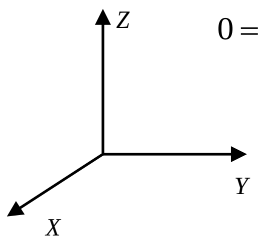
定义:设线性空间 V 的子空间 V_1,V_2,若和 V_1+V_2 中任意向量的分解式唯一,则称此和是直和,记为 $V_1\oplus V_2$.

即任给 $\alpha\in V_1+V_2$,若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$,则 $\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2$.其中 $\alpha_1,\beta_1\in V_1,\alpha_2,\beta_2\in V_2$

例子: (1) 取 $V=\mathbf{R}^3, V_1=Y$ 轴,$V_2=XOZ$ 平面, V_1+V_2 是直和.

(2) 取 $V=\mathbf{R}^3, V_1=XOY$ 面, $V_2=XOZ$ 面,则 V_1+V_2 不是直和,原因:

$$0=\varepsilon_1+(-\varepsilon_1)=0+0.$$



2. 几个定理:

(1) 和 V_1+V_2 是直和 $\Leftrightarrow$ 零元分解唯一,即 $0=0+0$.

证明:$\Rightarrow$ 定义显然.

$\Leftarrow$ 若零元分解唯一.则任给 $\alpha\in V_1+V_2$,设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$,其中 $\alpha_1,\beta_1\in V_1,\alpha_2,\beta_2\in V_2$.则

$\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2=0$.其中 $\alpha_1-\beta_1\in V_1,\alpha_2-\beta_2\in V_2$,则由于零元分解唯一得到

$\alpha_1-\beta_1=0,\alpha_2-\beta_2=0$,即 $\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2$,是直和.

注: 1): 和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow$至少存在一个元素分解唯一.

$\Leftarrow$假设$\delta=\delta_1+\delta_2$分解唯一.证明零元分解唯一.设$0=0+0=\beta_1+\beta_2$,

则$\delta=\delta+0=\delta_1+\delta_2+\beta_1+\beta_2=(\delta_1+\beta_1)+(\delta_2+\beta_2)$.由于$\delta=\delta_1+\delta_2$分解唯一,故

$\delta_1+\beta_1=\delta_1,\delta_2+\beta_2=\delta_2$,即$\beta_1=0,\beta_2=0$.零元分解唯一.

2): 非直和$\Leftrightarrow$存在一个分解不唯一.

实际上,存在一个分解唯一$\Leftrightarrow$任意一个分解唯一$\Leftrightarrow$直和.

存在一个分解不唯一$\Leftrightarrow$任意一个分解不唯一$\Leftrightarrow$非直和.

(2) 推论:和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow V_1\bigcap V_2=\{0\}$.

证明: $\Rightarrow$任给$\alpha\in V_1\bigcap V_2$,则$\alpha\in V_1$,且$\alpha\in V_2$,从而$-\alpha\in V_2$,则$0=0+0=\alpha+(-\alpha)$,由于是直和,则零元分解唯一,故$\alpha=0,-\alpha=0$,从而$V_1\bigcap V_2=\{0\}$.

$\Leftarrow$ 证明零元分解唯一.设$0=\alpha+\beta$,其中$\alpha\in V_1,\beta\in V_2$,则$\alpha=-\beta\in V_1\bigcap V_2=\{0\}$,则$\alpha=0,\beta=0$.

定理: 设子空间V_1,V_2,则和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

证明: $\Rightarrow$和V_1+V_2是直和,则$V_1\bigcap V_2=\{0\}$,即$\dim(V_1\bigcap V_2)=0$,从而根据维数公式可得.

$\Leftarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$,则$\dim(V_1\bigcap V_2)=0$,则$V_1\bigcap V_2=\{0\}$,从而和是直和.

定理: 设U是V的一个子空间,则存在一个子空间W,使得$U\oplus W=V$.称W是U的补子空间.

证明:取U的基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$,扩充成$V$的基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$,令$W=L(\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n)$,则$U\oplus W=V$.

3. 多个子空间的直和.

定义:设子空间$V_1,V_2,\cdots,V_m$,定义和$V_1+V_2+\cdots+V_m=\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\mid\alpha_i\in V_i\}$.

若$V_1+V_2+\cdots+V_m$中任意向量分解唯一,则称和是直和.记为$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$.

总结:和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow$任意一个元素唯一.$\Leftrightarrow$零元分解唯一. $\Leftrightarrow$存在一个元素分解唯一.

$\Leftrightarrow V_1\bigcap V_2=\{0\}\Leftrightarrow \dim(V_1\bigcap V_2)=0\Leftrightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

补充:怎样证明直和. 两种情况: (1) 证明$V_1\oplus V_2$,(2) 证明$V=V_1\oplus V_2$.

4. 例子:

(1) 取线性空间$V=P^{n\times n}$,取子空间$V_1=\{A\mid A^T=A\},V_2=\{A\mid A^T=-A\}$,证明$V=V_1\oplus V_2$.

证明: 首先证明直和: 任给$A\in V_1\bigcap V_2$, 则$A\in V_1$且$A\in V_2$, $A\in V_1$, 则$A^T=A$, $A\in V_2$,则$A^T=-A$,从而$A^T=A=-A$,即$A=0$,故$V_1\bigcap V_2=\{0\}$, V_1+V_2是直和.

再证明$V=V_1+V_2$, 即证明互相包含, 其中子空间的和还是子空间, 从而$V\supseteq V_1+V_2$是自然的, 不用证.

现在任给$A\in V$, A能否写成一个对称阵和一个反对称阵的和, 已知$A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$故$V=V_1+V_2$,

从而$V=V_1\oplus V_2$.

2. 对线性空间$V=F^{n\times n}$,$V_1=\{A\mid \mathrm{tr}(A)=0\}$,$V_2=\{kE\mid k\in F\}$,证明$V=V_1\oplus V_2$.

证明:任给$A\in V_1\bigcap V_2$, $A\in V_1$, 则$\mathrm{tr}A=0$, $A\in V_2$,则$A=kE$,从而$\mathrm{tr}kE=kn=0$,则$k=0$,从而$A=0$.

再证明$V=V_1+V_2$, 任给$A\in V$, 已知$A=A-\dfrac{tr(A)}{n}E+\dfrac{tr(A)}{n}E$,故$V=V_1+V_2$, 从而$V=V_1\oplus V_2$.

3. 设$V=F^n$, A是一个n阶方阵, $A^2=A$,设$V_1=\{X\mid AX=0, X\in F^n\}$, $V_2=\{X\mid AX=X, X\in F^n\}$,

证明$F^n=V_1\oplus V_2$

证明: 任给$X\in V_1\bigcap V_2$, $X\in V_1$, 则$AX=0$, $X\in V_2$,则$AX=X$,从而$AX=X=0$,直和.

再证明$V=V_1+V_2$, 任给$X\in V$, 设$X=X_1+X_2$,其中要求$X_1\in V_1, X_2\in V_2$, 即$AX_1=0, AX_2=X_2$,则

$AX=AX_1+AX_2$,得$AX=X_2$,从而$X_1=X-AX$,即$X=X-AX+AX$,得$V=V_1+V_2$.

4. 设$V=F^n$, A是一n阶方阵, $A^2=E$,设$V_1=\{X\mid AX=X, X\in F^n\}$, $V_2=\{X\mid AX=-X, X\in F^n\}$,

证明$F^n=V_1\oplus V_2$

证明: 任给$X\in V_1\bigcap V_2$, $X\in V_1$, 则$AX=X$, $X\in V_2$,则$AX=-X$,从而$AX=X=-X$, $X=0$直和.

再证明$V=V_1+V_2$, 任给$X\in V$, 设$X=X_1+X_2$,其中要求$X_1\in V_1, X_2\in V_2$, 即$AX_1=X_1, AX_2=-X_2$,

则$AX=AX_1+AX_2$,得$AX=X_1-X_2$,则$X_1=\dfrac{1}{2}(X+AX)\in V_1$, $X_1=\dfrac{1}{2}(X-AX)\in V_2$,从而

$X=\dfrac{1}{2}(X+AX)+\dfrac{1}{2}(X-AX)$,得$V=V_1+V_2$.

5. 设$V=F^n$, A是一n阶方阵, $A^2+A-6E=0$,设$V_1=\{X\mid AX=2X, X\in F^n\}$,

$V_2=\{X\mid AX=-3X, X\in F^n\}$, 证明$F^n=V_1\oplus V_2$

证明: 任给$X\in V_1\bigcap V_2$, $X\in V_1$, 则$AX=2X$, $X\in V_2$,则$AX=-3X$,从而$AX=2X=-3X$, $X=0$.

任给$X\in V$, 设$X=X_1+X_2$,其中要求$X_1\in V_1, X_2\in V_2$, 即$AX_1=2X_1, AX_2=-3X_2$,

则$AX=2X_1-3X_2$,则$X_1=\dfrac{1}{5}(3X+AX)\in V_1$, $X_1=\dfrac{1}{5}(2X-AX)\in V_2$,从而

$X=\frac{1}{5}(3X+AX)+\frac{1}{5}(2X-AX)$,得$V=V_1+V_2$.

6. 设$A\in F^{n\times n}$, $f(x),g(x)\in F[x]$,且$(f(x),g(x))=1$,令W,W_1,W_2分别为齐次线性方程组

$f(A)g(A)X=0$, $f(A)X=0$与$f(B)X=0$的解空间,证明$W=W_1\oplus W_2$.

证明:因为$(f(x),g(x))=1$,所以存在$u(x),v(x)$,使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.从而有

$u(A)f(A)+v(A)g(A)=E$,则对于任意的$\alpha\in W$,有$\alpha=u(A)f(A)\alpha+v(A)g(A)\alpha$,则

$u(A)f(A)\alpha\in W_2, v(A)g(A)\alpha\in W_1$,则$W=W_1+W_2$.又对于任意的$\alpha\in W_1\bigcap W_2$,有

$f(A)\alpha=g(A)\alpha=0$,从而有$\alpha=u(A)f(A)\alpha+v(A)g(A)\alpha=0$,故有$W=W_1\oplus W_2$.

§8 线性空间的同构

1.同构

1) 定义: 设数域F上的线性空间V与W,若存在一个映射$\sigma:V\to W$满足

(1) σ是个双射.

(2) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

(3) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

对任意的$\alpha,\beta\in V, k\in F$,则称$\sigma$是从$V$到$W$的一个同构映射,称$V$与$W$同构.

2) 例子: (1) 设任一个n维线性空间${}_FV$与F^n,任取${}_FV$的一组基,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,任给$\alpha\in V$,则$\alpha$可由

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$唯一线性表出,设为$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,即$X=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$为$\alpha$在基

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

做$\sigma:V\to F^n;\alpha\mapsto X$,即将$\alpha$映到它在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标.这就是一个同构映射,从而任意一个$n$

维线性空间都与F^n同构.

(2) F^n与$F[x]_n$: $\sigma:F^n\to F[x]_n; X=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\mapsto k_1+k_2x+\cdots+k_nx^{n-1}=f(x)$

(3) $F^{2\times 2}$与F^4 : $\sigma:F^{2\times 2}\to F^4; A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mapsto(a,b,c,d)$

2.性质

1) 若σ是同构,则$\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

2) $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n)$

3) V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性相关.

4) V_1 是 V 的子空间,则 $\sigma(V_1)$ 是 W 的子空间.

5) 同构是一个等价关系.

6) 同构映射的逆及同构映射的乘积仍然是同构的.

7) 若两个线性空间同构,则维数相同.

定理:数域 F 上的两个线性空间同构当且仅当维数相等.