

组合数学

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



二项式定理中的系数都是组合数，组合数和二项式定理有密切的关系.

本章我们就详细讨论这种关系.

回忆：表达式 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k -组合数.

对于非负整数 n 和 k , 我们已经证明了

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

由此不难得到

- 对称性: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 恒等式: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

它还具有许多很奇妙的性质，关于它也有着许多恒等式.

① Pascal 公式

② 二项式定理

③ 多项式定理

④ 组合恒等式

⑤ 高斯系数

Outline

- ① Pascal 公式
- ② 二项式定理
- ③ 多项式定理
- ④ 组合恒等式
- ⑤ 高斯系数

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的所有整数 k 和 n ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的所有整数 k 和 n ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

代数证明: 直接将 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ 代入上式验证等式成立.

Pascal 三角 (杨辉三角或贾宪三角)

17 世纪, 法国数学家 Pascal 做出了下面的三角形.

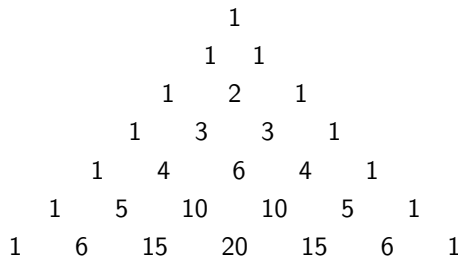


表: Pascal 三角

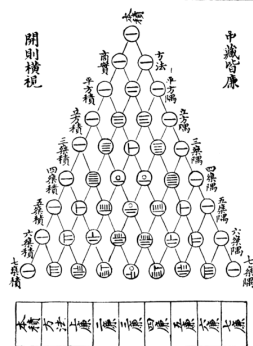


图: 朱世杰《四元玉鉴》中的“古法七乘方图”

13 世纪中国南宋数学家杨辉在《详解九章算术》里解释右边这种形式的数表，并说明此表引自 11 世纪贾宪的《释锁算术》：

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的组合证明

- 令 S 是 n 元集合,
 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, 考虑它的 k -组合

- 将 S 的 k -组合按 n 分成两大类:

$$A = \{\text{不含元 } n \text{ 的 } k\text{-组合}\}$$

$$B = \{\text{包含元 } n \text{ 的 } k\text{-组合}\}$$

- 按加法原理, $\binom{n}{k} = |A| + |B|$.

- A 的 k -组合恰好是集合
 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的 k -组合, 故

$$|A| = \binom{n-1}{k}$$

- B 的 k -组合已包含 n , 只需从集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 中再选出
 $k-1$ 个元素即可, 故

$$|B| = \binom{n-1}{k-1}.$$

例如:

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $n = 5, k = 3, \binom{5}{3} = 10$

- A 的 3-组合:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},$$

$$\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\},$$

对应集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的 3-组合

- B 的 3-组合:

$$\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\},$$

$$\{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\},$$

去掉 $n = 5$ 后, 得

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$$

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$

恰好是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的 2-组合.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的另一种组合解释

- 令 n 是非负整数, 且 $1 \leq k \leq n-1$.
- $p(n, k)$: 表示从点 $(0, 0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的路径的条数, 其中每条路径包含 n 步, 每一步只有两种选择:

水平向右 $(1, 0) \rightarrow$ 水平向上 $(0, 1) \uparrow$

- 从点 $(0, 0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的路径, 有两种选择
 - i) 从点 $(0, 0)$ 到点 $(k, n-k-1)$, 再水平向上移至 $(k, n-k)$;
 - ii) 从点 $(0, 0)$ 到点 $(k-1, n-k)$, 再水平向右移至 $(k, n-k)$;
- 由加法原理: $p(n, k) = p(n-1, k) + p(n-1, k-1)$.

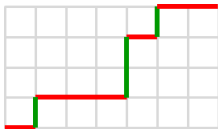


图: 格路

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 s_0, s_1, \dots, s_n ，如果存在一个整数 t ($0 \leq t \leq n$)，使得 $s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_t$, $s_t \geq s_{t+1} \geq \dots \geq s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如: 1, 3, 3, 1.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减。

定义 1.2

对于序列 s_0, s_1, \dots, s_n ，如果存在一个整数 t ($0 \leq t \leq n$)，使得 $s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_t$, $s_t \geq s_{t+1} \geq \dots \geq s_n$ 那么称该序列是单峰的。

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一。例如：1, 3, 3, 1.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ 。

提示：只需对 $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ 证明 $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ 。

观察得结论

- 三角形数: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

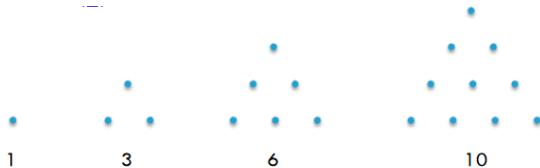


图: 三角形阵列点数

观察得结论

- 四面体数: $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

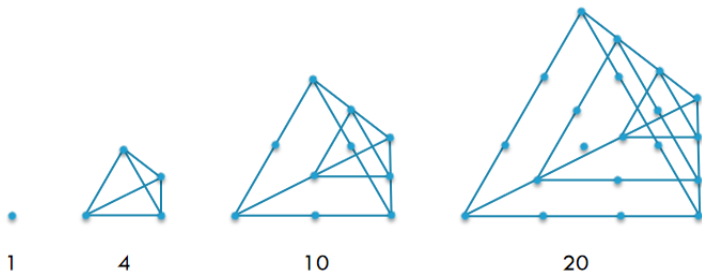


图: 四面体阵列点数

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1



一般地，可以得到

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

Outline

- ① Pascal 公式
- ② 二项式定理
- ③ 多项式定理
- ④ 组合恒等式
- ⑤ 高斯系数

二项式定理

定理 2.1

令 n 是一个正整数, 对所有的 x 和 y , 有

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- 证明一: 乘法分配律展开, 再合并同类项.

将 $(x + y)^n$ 写作

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) \cdots (x + y)}_n,$$

我们发现对于 $x^{n-k}y^k$ 一项, 一定有 n 项乘积中的 $n - k$ 项贡献了 x , 其余 k 项贡献了 y . 因此 $x^{n-k}y^k$ 项系数为 $\binom{n}{k}$.

- 证明二: 归纳法.

二项式定理

证明三：泰勒级数展开.

e^x 泰勒级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots.$$

因为 $e^{x+y} = e^x e^y$ ，相同函数的幂级数逐项相等，于是在 $x + y$ 处的级数等于在 x 处的级数和在 y 处的级数的卷积，即

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!},$$

化简得

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

等价形式

- $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$
- $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$
- $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

特殊地, 令 $y = 1$, 得

推论 2.2

令 n 是一个正整数, 对所有的 x , 有

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k$$

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x - y)^7$.

例 2.2

$(3x - 2y)^{18}$ 的展开式中, x^5y^{13} 的系数是什么? x^8y^{10} 的系数是什么?

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x - y)^7$.

例 2.2

$(3x - 2y)^{18}$ 的展开式中, x^5y^{13} 的系数是什么? x^8y^{10} 的系数是什么?

$$\begin{aligned}(2x - y)^7 &= \sum_{r=0}^7 \binom{7}{r} (2x)^r (-y)^{7-r} \\ &= - \sum_{r=0}^7 (-2)^r \binom{7}{r} x^r y^{7-r}.\end{aligned}$$

$$(3x - 2y)^{18} = \sum_{r=0}^{18} \binom{18}{r} (3x)^r (-2y)^{18-r}$$

$$x^5y^{13} \text{ 系数: } \binom{18}{5} 3^5 (-2)^{13}$$

$$x^8y^{10} \text{ 系数: } \binom{18}{8} 3^8 (-2)^{10}$$

牛顿二项式定理

定义 2.3

设 α 是实数, k 是非负整数, 定义二项式系数为

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

定理 2.4

设 α 是实数, 对 $|z| < 1$ 的 z , 有

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

常用展开式

- $\alpha = -n$, 其中 n 为正整数

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1+z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$
- $(1+z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) z^k$

令 $-z$ 代替上面的 z

- $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$
- $(1-z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$

推论 2.5

$(1-z)^{-n}$ 中 z^k 的系数等于 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ 的非负整数解, 即 $\binom{n+k-1}{k}$.

$$\begin{aligned} (1-z)^{-n} &= (1-z)^{-1} (1-z)^{-1} \cdots (1-z)^{-1} \\ &= (1+z+z^2+\cdots) \cdots (1+z+z^2+\cdots) \end{aligned}$$

从第一个因子选取 z^{k_1} , 从第二个因子选取 $z^{k_2} \dots$

常用展开式

- $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} \\&= \frac{(-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k \cdot k!} \\&= \frac{(-1)^{k-1} \cdot (2k-3)!! \cdot (2k-2)!!}{2^k \cdot k! \cdot (2k-2)!!} \\&= \frac{(-1)^{k-1} \cdot (2k-2)!}{2^{2k-1} \cdot k! \cdot (k-1)!} \\&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \cdot k} \binom{2k-2}{k-1}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \cdot k} \binom{2k-2}{k-1} z^k$$

Outline

- ① Pascal 公式
- ② 二项式定理
- ③ 多项式定理**
- ④ 组合恒等式
- ⑤ 高斯系数

回顾——重集的排列数

定理 3.1

令 S 是一个有 t 个不同类型的元的多重集，各个元的重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_t ，满足 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ ，则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

定义 3.2

多项式系数定义为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

这里 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$.

多项式定理

定理 3.3

对于 t 个不同的变量 x_1, x_2, \dots, x_t 有

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_t = n, \\ n_1, n_2, \dots, n_t \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$$

- 证明：利用乘法的分配律将乘积完全展开，再考虑合并同类项， $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ 有 $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t}$ 种排列.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中, $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中, $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3, 1, 2} 2^3 (-3)^1 5^2 = -36000$$

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中, $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3, 1, 2} 2^3 (-3)^1 5^2 = -36000$$

$$\binom{10}{3, 1, 4, 2} = \frac{10!}{3!1!4!2!} = 12600$$

多项式定理

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中，共有多少不同的项？

多项式定理

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中，共有多少不同的项？

展开式中，一般项为 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ ，满足

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$$

因此不同的项的数目等同于上述方程的非负整数解的个数，即 $\binom{n+t-1}{n}$ 。

Outline

- ① Pascal 公式
- ② 二项式定理
- ③ 多项式定理
- ④ 组合恒等式
- ⑤ 高斯系数

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- 对应着二项式定理中： $x = 1$, $y = 1$;
- 如果 S 是 n 个元素的集合，则 S 的所有组合有多少个？

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

- 对应着二项式定理中: $x = 1, y = -1$
- S 的具有偶数个元素的组合有多少个? 具有奇数个元素的组合有多少个?
- 可否建立奇组合与偶组合之间的一一对应?

推论

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k \text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ 为偶数}} \binom{n}{k}$$

证明 设 $X = \{1, 2, \dots, n\}$, 则

$$A = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为偶数且 } 1 \in S\},$$

$$B = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为奇数且 } 1 \in S\},$$

$$C = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为偶数且 } 1 \notin S\},$$

$$D = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为奇数且 } 1 \notin S\}.$$

构造映射 $f: A \rightarrow D$ 为 $f(S) = S \setminus \{1\}$, 显然 f 为双射. 所以 $|A| = |D|$.

类似地 $|B| = |C|$.

因此

$$\sum_{k \text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = |B| + |D| = |A| + |C| = \sum_{k \text{ 为偶数}} \binom{n}{k}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k ,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k ,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k ,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

- 考虑从 n 人中选出带队长的 k 人小队:
- 可先从 n 人中选出 k 人做队员, 再从 k 人中选出一人做队长;
- 也可以从 n 人中选出一人做队长, 然后再从 $n-1$ 人中选出 $k-1$ 人做队员.

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

方法 1: 对 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ 两边同时求导得

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

再令 $x = 1$.

方法 2: 应用等式 3

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}.$$

方法 3: 从 n 个人中挑选 k ($k = 1, 2, \dots, n$) 个人组成一个队, 并选择一人为队长, 有多少种方法?

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

证明 对 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ 求导, 得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

将上式左右两边同乘 x , 得

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k$$

对上式左右两边**求导**, 得

$$n((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}) = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

令 $x = 1$, 得

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}) = n(n+1)2^{n-2}$$

等式 5

对于整数 $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

- 从 n 个人中挑选 k ($k = 1, 2, \dots, n$) 个人组成一个班级，并选择班长、团支书各一人 (可兼任)，有多少种方法？

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

证明 对

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

两边对 x 求从 0 到 1 的定积分,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+x)^n dx &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 x^k dx \\ \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \Big|_0^1 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k+1} x^{k+1} \Big|_0^1 \\ \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

此即所证等式.

注: 使用这种方法证明不等式时一定要取定积分, 否则易出现常数确定上的错误

例 4.1

利用

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

计算

- ① $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$
- ② $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$
- ③ $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

例 4.1

利用

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

计算

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n \sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \end{aligned}$$

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

组合证明:

- 从 $n+1$ 个人中挑选 $k+1$ 个人组成一个队.
- 先从 $n+1$ 个人当中挑出一个人, 令他的号码是 $i+1$ ($i = k, \dots, n$), 作为小队当中号码最大的人.
- 接下来只要从前 i 个人当中挑出剩下的 k 个人即可.

代数证明: 提取

$$\sum_{i=0}^n (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$$

两边 x^k 的系数.

邻差算子 (Creative telescoping)

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

对于 $f(i, k)$, 如果存在 $g(i, k)$ 满足

$$f(i, k) = g(i+1, k) - g(i, k)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n f(i, k) &= \sum_{i=m}^n g(i+1, k) - \sum_{i=m}^n g(i, k) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n+1} g(i, k) - \sum_{i=m}^n g(i, k) \\ &= g(n+1, k) - g(m, k) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

利用临差算子

$$\binom{i}{k} = \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1}$$

可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^n \left(\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right) \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^n \binom{i}{k+1} \\ &= \sum_{\substack{i=k+1 \\ \text{blue}}}^{n+1} \binom{i}{k+1} - \sum_{i=k}^n \binom{i}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} - \underbrace{\binom{k}{k+1}}_0 = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$



恒等式 8

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

例 4.2

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

例 4.2

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \sum_{m=1}^n m^2 = \sum_{m=1}^n \left(2\binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right) \\ &= 2 \sum_{m=1}^n \binom{m}{2} + \sum_{m=1}^n \binom{m}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

例 4.3

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a \binom{m}{3} + b \binom{m}{2} + c \binom{m}{1} \quad (*)$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

例 4.3

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a \binom{m}{3} + b \binom{m}{2} + c \binom{m}{1} \quad (*)$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

将 $m = 1, 2, 3$ 分别代入 (*) 式得

$$1 = c$$

$$8 = b + 2c$$

$$27 = a + 3b + 3c$$

解方程组得 $a = 6, b = 6, c = 1$.

例

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a \binom{m}{3} + b \binom{m}{2} + c \binom{m}{1} \quad (*)$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

$$m^3 = 6 \binom{m}{3} + 6 \binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

因此,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \sum_{m=1}^n m^3 = \sum_{m=1}^n \left(6 \binom{m}{3} \right) + 6 \left(\binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right) \\ &= 6 \sum_{m=1}^n \binom{m}{3} + 6 \sum_{m=1}^n \binom{m}{2} + \sum_{m=1}^n \binom{m}{1} \\ &= 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \end{aligned}$$

恒等式 9 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

恒等式 9 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

方法 1: 比较等式 $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n$ 两边 x^k 的系数.

方法 2:

- $\binom{m+n}{k}$ 是 $(m+n)$ 元集合 $A \cup B$ 中 k -子集的个数, 其中 $A = \{1, \dots, m\}, B = \{m+1, \dots, m+n\}$,
- 而其中包含 A 中 i 个元素的这样的 k -子集的个数为 $\binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$,
- 所以和式 $\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ 便是对所有的 i 来计这些子集的个数.

特别地, 当 $m = n$ 时,

推论

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

方法 3: 机器证明.

Doron Zeilberger 提出了一种证明超几何恒等式的机械化算法. 他认识到问题的实质是: 为证明恒等式

$$\text{summand}(n, k) = \text{answer}(n),$$

只需:

- 找出一个左边和式满足的递推关系;
- 用代入的方法验证右边也满足同样的递推关系;
- 用足够多的初始值验证等式两边相等.

因此寻找和式的递推关系就成了证明和发现恒等式的首要任务.

给定数列 $f(n)$, 寻找另一数列 $g(n)$ 使得

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = g(n) \Leftrightarrow f(n) = g(n+1) - g(n).$$

多项式总是可求和的

$$\binom{k}{m} = \Delta_k \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}.$$

- Gosper 算法:

输入: 超几何项 $f(k)$, 也就是 $f(k+1)/f(k)$ 是有理函数.

输出:

- $g(k)$ 使得 $f(k) = g(k+1) - g(k)$;
- 失败, 如果满足条件的超几何项 $g(k)$ 不存在.

例如:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}} = \sum_{k=0}^n \Delta_k \frac{4k\binom{2k}{k}^2}{4^{2k}} = \frac{(n+1)\binom{2n+2}{n+1}^2}{4^{2n+1}}.$$

而对于

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

这类问题, Gosper 算法并不适用.

- Zeilberger 算法:

输入: 超几何项 $f(n, k)$, 即 $f(n+1, k)/f(n, k)$ 以及 $f(n, k+1)/f(n, k)$ 均为关于 n, k 的有理函数.

输出:

- 邻差算子 $L = \sum_{i=0}^d a_i(n) S_n^i$ 和超几何项 $g(n, k)$ 使得

$$L(f) = \Delta_k g(n, k)$$

这里

$$L(f) = a_0(n)f(n, k) + a_1(n)f(n+1, k) + \cdots + a_d(n)f(n+d, k).$$

- 失败, 如果邻差算子 L 不存在.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Zeilberger 算法自动证明组合恒等式:

令 $f(n, i) = \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ 及 $F(n) = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$, Zeilberger 算法找到

$$L = (m + n - k + 1)S_n - (m + n + 1)$$

和

$$g(n, i) = i \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

即

$$(m + n - k + 1)f(n + 1, i) - (m + n + 1)f(n, i) = \Delta_i(g)$$

对 i 从 0 到 k 求和可得

$$(m + n - k + 1)F(n + 1) - (m + n + 1)F(n) = g(n, k + 1) - g(n, 0) = 0$$

最后验证 $\binom{m+n}{k}$ 满足与 $F(n)$ 有相同的递推式和相同的初值即可完成证明.

例 4.4

证明

- ① $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$
- ② $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k} = 0.$
- ③ $\sum_{k=0}^m \binom{n-k}{n-m} \binom{n}{k} = 2^m \binom{n}{m}.$

例 4.4

证明

- ① $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$
- ② $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k} = 0.$
- ③ $\sum_{k=0}^m \binom{n-k}{n-m} \binom{n}{k} = 2^m \binom{n}{m}.$

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{m} \binom{m}{k} \\ &= \binom{n}{m} \sum_k (-1)^k \binom{m}{k} = \binom{n}{m} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{n-m} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m \binom{n}{m} \end{aligned}$$

例 4.5

设 n 和 k 均为正整数, 给出下面式子的一个组合证明

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

例 4.6

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ (-1)^m \binom{2m}{m}, & n \text{ 为偶数 } 2m. \end{cases}$$

提示: 考虑 $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数.

例 4.7

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

例 4.8 (李善兰恒等式)

证明下列恒等式

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

李善兰恒等式为组合数学中的一个恒等式, 由中国清代数学家李善兰于 1859 年在《垛积比类》一书中首次提出, 因此得名.

Outline

- ① Pascal 公式
- ② 二项式定理
- ③ 多项式定理
- ④ 组合恒等式
- ⑤ 高斯系数

定义 5.1

设 n 和 k 为非负整数, 且 $0 \leq k \leq n$. 称

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}$$

为高斯系数.

- 例如, $n = 4, k = 2$ 时,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(q^4 - 1)(q^3 - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

- 记 $[n]! = [1][2] \cdots [n]$, 其中 $[n] = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, 则高斯系数可以写为

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

- 高斯系数是二项式系数的 q -模拟. 由定义可知

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

因此, 高斯系数 也称为 q -二项式系数.

高斯系数的性质

定理 5.2

高斯系数具有以下性质：

- ① $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1;$
- ② $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix};$
- ③ $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix};$
- ④ $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$

定理 5.3 (Cauchy 二项式定理)

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k x) = \sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

- $q \rightarrow 1$ 时, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

高斯系数的组合解释

首先给出排列中逆序数的概念.

给定一个多重集合的排列 $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$, 一对元素 (i, j) 称为是 π 的一个**逆序**(inversion), 如果满足 $i < j$ 且 $\pi_i > \pi_j$.

π 的逆序的个数为 π 的**逆序数**, 记作 $\text{inv}(\pi)$.

定理 5.4

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\text{inv} \pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\text{inv} \pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 性质显然成立. 现在假设对 $n - 1$ 成立.

考虑 n 的情形. 对于 $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n \in S(1^k 2^{n-k})$, 分两种情况考虑:

- 若 $a_n = 2$, 则将 a_n 去掉后, π 的逆序数不发生变化, 且此时

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \in S(1^k 2^{n-k-1});$$

- 若 $a_n = 1$, 则因为 π 中的每个 2 皆对 a_n 产生一个逆序数, 故去掉 a_n 后, 逆序数减少 $n - k$ 个, 且

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \in S(1^{k-1} 2^{n-k}).$$

所以

$$\sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\text{inv} \pi} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

高斯系数的组合解释

先给出有限域上的线性空间的一些概念.

设 \mathbb{F}_q 为有限域, 其中 $q = p^r$, p 为素数.

对正整数 n , 我们定义 $V_n(q)$ 为 \mathbb{F}_q 上的有序 n 元组

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{F}_q, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

组成的集合, 并满足线性运算

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q$$

则 $V_n(q)$ 构成 \mathbb{F}_q 上的 n 维线性空间, 其中的元素称为向量.

若向量 X_1, X_2, \dots, X_m 满足

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}_q \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

则称向量 X_1, X_2, \dots, X_m 是线性无关的.

线性空间 $V_n(q)$ 中线性无关的向量组 X_1, X_2, \dots, X_n 构成 $V_n(q)$ 的一组基.

$V_n(q)$ 中的任意向量都可以由 $V_n(q)$ 的一组基线性表示, 即对任意向量 $X \in V_n(q)$, 存在 \mathbb{F}_q 上的一组数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i.$$

用坐标表示为

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

高斯系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的组合含义由下面定理给出.

定理 5.5

有限域 \mathbb{F}_q 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

例如, $n = 3, k = 1$ 时, 有限域 \mathbb{F}_q 上的 3 维线性空间的所有 1 维子空间的个数是

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1.$$

定理

有限域 \mathbb{F}_q 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

证明思路:

- 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的线性无关的 (有序) 向量组的个数, 它们生成一个 k 维子空间.
- 再计算一个 k 维子空间的 (有序) 基的个数.

证明 首先, 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的元组构成一个 k 维子空间的 (有序) 基.

为此, 我们需要从空间 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量.

- 第一个向量 v_1 , 可以选取任意非零向量, 因此由 $q^n - 1$ 中选择.
- 第二个向量 v_2 , 不能选取 v_1 的倍数, 因此有 $q^n - q$ 种选择.
- 第三个向量 v_3 , 有 q^2 个不能选取的向量, 它们是 v_1 和 v_2 的线性组合.

以此类推, 从 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量的方法数为

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}), \quad (1)$$

定理

有限域 \mathbb{F}_q 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

其次, 一个子空间可以有很多组 (有序) 基.

类似上面的讨论, 选定一个 k 维子空间, 在其中选一组基的方法数为

$$(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

这就是(1)中每个子空间重复计数的数目.

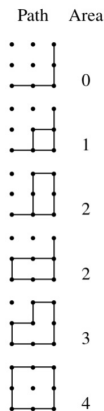
因此, $V_n(q)$ 的 k 维子空间的个数是

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

高斯系数的组合解释——格路

- 我们考虑从原点到点 (m, n) 的格路，其中 m, n 为非负整数且只允许向东与向北。因为我们共要走 $m + n$ 步，且一定有 m 步向东走 n 步向北走，故这样的路径有 $\binom{m+n}{m}$ 条。
- 对于每一条这样的路径 p ，在路径、 x 轴和直线 $x = m$ 之间都有一个确定的封闭区域 $A(p)$ 。右图展示了 $m = n = 2$ 时的六条路径及每种情况下所包围的区域面积。
- 如果我们对这个区域取变量为 q 的生成函数，也就是说，一条面积为 A 的路径对求和的贡献为 q^A ，那么我们可以得

$$1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



图：格路

设 $\mathcal{P}(m, n)$ 为从 $(0, 0)$ 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位, 最终走到 (m, n) 点的格路组成的集合.

对 $p \in \mathcal{P}(m, n)$, 设 $A(p)$ 为由格路 p 、 x 轴和直线 $x = m$ 包围图形的面积.

定理 5.6

$$\sum_{p \in \mathcal{P}(k, n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

设 $\mathcal{P}(m, n)$ 为从 $(0, 0)$ 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位, 最终走到 (m, n) 点的格路组成的集合.

对 $p \in \mathcal{P}(m, n)$, 设 $A(p)$ 为由格路 p 、 x 轴和直线 $x = m$ 包围图形的面积.

定理 5.6

$$\sum_{p \in \mathcal{P}(k, n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

证明 我们记等式左边为 $F(n, k)$, 显然 $F(0, n) = F(m, 0) = 0$.

现考虑 $F(m, n)$ 的两种情况:

- 如果路径的最后一步是向北的, 那么它是一条从 $(0, 0)$ 到 $(k, n - k - 1)$ 再接着往北一步的路径, 且最后一步不会改变面积.
- 如果路径的最后一步是向东的, 那么它是一条从 $(0, 0)$ 到 $(k - 1, n - k)$ 再接着往东一步的路径, 这里最后一步会使面积增加 $n - k$.

故我们有 $F(n, k) = F(n - 1, k) + q^{n-k} F(n, k - 1)$.

再由定理5.2知, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 也具有相同的初值条件和递推关系, 因此定理得证.