组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

第 4 章　容斥原理

引论

例 1

求 *1* 到 *600* 之间不能被 *6* 整除的整数个数.

引论

例 1

求 *1* 到 *600* 之间不能被 *6* 整除的整数个数.

先计算 1 到 600 之间能被 6 整除的整数个数，然后从总数中去掉它.

引论

例 1

求 *1* 到 *600* 之间不能被 *6* 整除的整数个数.

先计算 1 到 600 之间能被 6 整除的整数个数，然后从总数中去掉它.

- 1 到 600 之间有 100 个整数可被 6 整除,
- 因此有 $600 - 100 = 500$ 个整数不能被 6 整除.

例 2

求 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 *1* 不在第一个位置上的全排列的个数.

例 2

求 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 *1* 不在第一个位置上的全排列的个数.

(1) 直接计数

- 将 $i_1 \neq 1$ 的所有全排列按照 i_1 的取值分为 $n-1$ 类;
- 若 $i_1 = k \in \{2, 3, \cdots, n\}$, 则 $i_2 i_3 \cdots i_n$ 是 $\{1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n\}$ 的全排列;
- i_1 有 $n-1$ 种取法，$i_2 i_3 \cdots i_n$ 的全排列个数为 $(n-1)!$, 从而 $i_1 \neq 1$ 的全排列数为 $(n-1)(n-1)!$.

例 2

求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 *1* 不在第一个位置上的全排列的个数.

(2) 间接计数

- $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全排列的个数为 $n!$;
- 若 $i_1=1$，则 $i_2i_3\cdots i_n$ 是 $\{2,3,\cdots,n\}$ 的全排列，其个数为 $(n-1)!$, 即 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 1 在第一个位置上的全排列的个数为 $(n-1)!$;
- 所以 1 不在第一个位置的全排列个数为

$$n!-(n-1)!=(n-1)(n-1)!$$

例 3

求不超过 *20* 的正整数中既不是 *2* 的倍数，也不是 *3* 的倍数的数的个数.

例 3

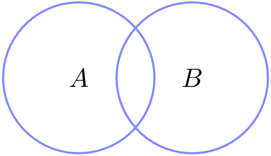
求不超过 *20* 的正整数中既不是 *2* 的倍数，也不是 *3* 的倍数的数的个数.

- 2 的倍数的有 10 个 $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$
- 3 的倍数的有 6 个 $3, 6, 9, 12, 15, 18$
- 既是 2 的倍数又是 3 的倍数的有 3 个 $6, 12, 18$
- 因此，不超过 20 的正整数中是 2 的倍数或是 3 的倍数的数的个数

$$10 + 6 - 3 = 13$$

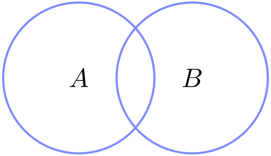
- 由减法原则, 不超过 20 的正整数中既不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数的数的个数

$$20 - 13 = 7$$



小结

- $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



例 4

某班有 *100* 人, 其中

- 会打篮球的有 *45* 人, 会打乒乓球的有 *53* 人, 会打排球的有 *55* 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人, 既会打篮球也会打排球的有 *32* 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人;
- 三种球都会打的有 *20* 人.

问三种球都不会打的有多少人?

例 4

某班有 *100* 人, 其中

- 会打篮球的有 *45* 人, 会打乒乓球的有 *53* 人, 会打排球的有 *55* 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人, 既会打篮球也会打排球的有 *32* 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人;
- 三种球都会打的有 *20* 人.

问三种球都不会打的有多少人?

解　设 $A=\{$此班会打篮球的人$\}$,

$B=\{$此班会打乒乓球的人$\}$,

$C=\{$此班会打排球的人$\}$.

则由条件知

$$|A|=45,\ |B|=53,\ |C|=55,$$

$$|A\cap B|=28,\ |A\cap C|=32,\ |B\cap C|=35,$$

$$|A\cap B\cap C|=20.$$

例 4

某班有 *100* 人, 其中

- 会打篮球的有 *45* 人, 会打乒乓球的有 *53* 人, 会打排球的有 *55* 人*;*
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人, 既会打篮球也会打排球的有 *32* 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人*;*
- 三种球都会打的有 *20* 人*.*

问三种球都不会打的有多少人*?*

可如下算出三种球都不会打的人数.

- 先从总人数中减掉会打三种球中某一种的人数;
- 此时会打两种球的人被减掉了两次, 为得到所求, 应加上他们;
- 第二步中会打三种球的人被加了三次, 从而应再减一次.

例 4

某班有 *100* 人, 其中

- 会打篮球的有 *45* 人, 会打乒乓球的有 *53* 人, 会打排球的有 *55* 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人, 既会打篮球也会打排球的有 *32* 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人;
- 三种球都会打的有 *20* 人.

问三种球都不会打的有多少人?

可如下算出三种球都不会打的人数.

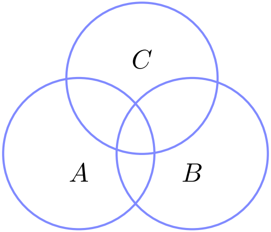
- 先从总人数中减掉会打三种球中某一种的人数;
- 此时会打两种球的人被减掉了两次, 为得到所求, 应加上他们;
- 第二步中会打三种球的人被加了三次, 从而应再减一次.

$$
\begin{aligned}
&100-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|\\
=&100-45-53-55+28+32+35-20=22.
\end{aligned}
$$

所以, 三种球都不会打的有 22 人.

设 S 是有限集, $A, B, C \subseteq S$, 则

$$
\begin{aligned}
|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = {} & |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\
& - |A \cap B \cap C| \\
|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
& + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$



容斥原理

容斥原理

- 设 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 S 的元素所涉及的 m 个性质
- 设 $A_i = \{x \in S \mid x \text{具有性质} P_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$
- 则 $\overline{A_i} = \{x \in S \mid x \text{不具有性质} P_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$

定理 1

集合 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素的个数为

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right|$$

$$= |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

容斥原理

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right|$$
$$= |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

下面我们来证明：对于 S 中每个元素 x，

- 若 x 不属于 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，则对等式的右端贡献为 1，即交替和中 1_x 的系数为 1；
- 否则，x 恰好属于 k 个子集 $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$，则有
$$x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}.$$

容斥原理

$$
\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right| \\
&= |S| - \sum_{1\le i\le m} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le m} |A_i\cap A_j| - \cdots + (-1)^m\,|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
$$

下面我们来证明：对于 S 中每个元素 x,

- 若 x 不属于 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 则对等式的右端贡献为 1, 即交替和中 1_x 的系数为 1;
- 否则， x 恰好属于 k 个子集 $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, 则有

$$x \in A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}.$$

  因此, x 对等式的右端贡献为

$$
\begin{cases}
\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^k\binom{k}{k} & k\le m\\
\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m} & k> m
\end{cases}
$$

  则对等式的右端贡献为 0, 从而定理得证.

容斥原理

定理 2

集合 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素的个数为

$$\begin{aligned}&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| \\ &= |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned}$$

推论 3

集合 S 中至少具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 之一的元素的个数为

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\ &= \sum_{1 \le i \le m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned}$$

例 5

在 *1* 与 *1000* 之间不能被 *5,6,8* 整除的整数有多少个?

例 5

在 *1* 与 *1000* 之间不能被 *5,6,8* 整除的整数有多少个?

解 令 $A = \{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$.

记 A_1, A_2, A_3 分别为 1 与 1000 之间能被 $5, 6, 8$ 整除的整数集合, 则有

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125.$$

于是，$A_1 \cap A_2$ 表示 A 中能被 5 和 6 整除的数, 即能被 30 整除的数, 其个数为

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33.$$

$|A_1 \cap A_3|$ 表示 A 中能被 5 和 8 整除的数, 即能被 40 整除的数, 其个数为

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25.$$

$|A_2 \cap A_3|$ 表示 A 中能被 6 和 8 整除的数, 即能被 24 (6 和 8 的最小公倍数 $\operatorname{lcm}(6, 8) = 24$) 整除的数, 其个数为

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41.$$

例

在 1 与 1000 之间不能被 5,6,8 整除的整数有多少个?

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ 表示 A 中能同时被 $5,6,8$ 整除的数, 即 A 中能被 $5,6,8$ 的最小公倍数 $\mathrm{lcm}(5,6,8) = 120$ 整除的数, 其个数为

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

由容斥原理, 1 与 1000 之间不能被 $5,6,8$ 整除的数的个数为

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\
&= 600.
\end{aligned}$$

例 6

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个?

例 6

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个?

解 令 S 表示 MATHISFUN 的全排列组成的集合

- P_1 : MATH 出现； P_2 : IS 出现； P_3 : FUN 出现；
- A_i : 具有性质 P_i 的元的集合 $(i = 1, 2, 3)$

将 MATH 视为整体，与其他字母进行全排列，可得 $|A_1| = 6!$,

例 6

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个?

解 令 S 表示 MATHISFUN 的全排列组成的集合

- P_1 : MATH 出现； P_2 : IS 出现； P_3 : FUN 出现；
- A_i : 具有性质 P_i 的元的集合 $(i = 1, 2, 3)$

将 MATH 视为整体，与其他字母进行全排列，可得 $|A_1| = 6!$,

同理

$$|A_2| = 8!, \qquad |A_3| = 7!,$$

$$|A_1 \cap A_2| = 5!, \quad |A_1 \cap A_3| = 4!, \quad |A_2 \cap A_3| = 6!,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!, \quad |S| = 9!$$

于是 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 9! - (6! + 8! + 7!) + (5! + 4! + 6!) - 3! = 317658$

例 7

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中，a, b, c, d 至少出现一次的符号串的个数.

例 7

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中，a, b, c, d 至少出现一次的符号串的个数.

解 记 A_1, A_2, A_3, A_4 分别为不出现 a, b, c, d 的 n 位字符串的集合.

$$|A_i| = 3^n \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_i \cap A_j| = 2^n \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1 \quad (i, j, k \text{ 互不相等}; i, j, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

而 a, b, c, d 至少出现一次的字符串集合即为 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$,

于是

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right| = {} & 4^n - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\
& + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| \\
& + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
& - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\
& + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
= {} & 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4
\end{aligned}
$$

例 8

从 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \ldots, y_k\}$ 的满射有多少个?

例 8

从 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \ldots, y_k\}$ 的满射有多少个?

解 设 S 为所有 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \ldots, y_k\}$ 的映射的集合, 则 $|S| = k^n$.

对于 $1 \le i \le k$, 定义性质 P_i 为 y_i 不是映射的像,

定义 A_i 为满足性质 P_i 的所有从 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \ldots, y_k\}$ 的映射的集合,

则对任意的 $1 \le i \le k$ 有 $|A_i| = (k-1)^n$,

对任意的 $1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k$ 有 $\left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right| = (k-j)^n$.

例 8

从 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ 到 $\{y_1,\ldots,y_k\}$ 的满射有多少个?

解 设 S 为所有 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ 到 $\{y_1,\ldots,y_k\}$ 的映射的集合, 则 $|S|=k^n$.

对于 $1\le i\le k$, 定义性质 P_i 为 y_i 不是映射的像,

定义 A_i 为满足性质 P_i 的所有从 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ 到 $\{y_1,\ldots,y_k\}$ 的映射的集合,

则对任意的 $1\le i\le k$ 有 $|A_i|=(k-1)^n$,

对任意的 $1\le i_1<\cdots<i_j\le k$ 有 $\left|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\right|=(k-j)^n$. 这样, 所求满射的个数为

$$
\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_k}\right|\\
=&|S|-\sum_{i}|A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i<j<\ell}|A_i\cap A_j\cap A_\ell|+\\
&\quad\cdots+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|\\
=&\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n
\end{aligned}
$$

例 9

$\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的正整数的个数，求 $\varphi(n)$.

- 例如 $\varphi(5) = 4$, 即 1,2,3,4; $\varphi(12) = 4$，即 1,5,7,11.

例 9

$\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的正整数的个数，求 $\varphi(n)$.

- 例如 $\varphi(5)=4$, 即 1,2,3,4; $\varphi(12)=4$，即 1,5,7,11.

解 将 n 分解成素因子的乘积形式

$$n={p_1}^{i_1}{p_2}^{i_1}\cdots{p_q}^{i_q}.$$

设 A_i 为不大于 n 且为 p_i 的倍数的自然数的集合 $(1\leqslant i\leqslant q)$, 则

$$|A_i|=\frac{n}{p_i}\quad(i=1,2,\cdots,q)$$

因 p_i 与 p_j 互素 $(i\neq j)$, 所以 p_i 与 p_j 的最小公倍数为 p_ip_j, 所以

$$|A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j}\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,q)$$

等等. 小于 n 并与 n 互素的自然数是集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 中那些不属于任何一个集合 $A_i\quad(i=1,2,\cdots,q)$ 的数,

由容斥原理知

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) = & \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_q}\right| \\
& = n - \sum_{i=1}^{q} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant q} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant q} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
& \quad + \cdots + (-1)^q |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_q| \\
& = n - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant q} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant q} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^q \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_q}
\end{aligned}
$$

上面的和式正好是下列乘积的展开式

$$
\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_q}\right)
$$

注：欧拉函数常用于数论中. 例如, 若 $n = 12 = 2^2 \cdot 3$, 则

$$
\varphi(12) = 12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4
$$

例 10

有 n 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种?

定义 4

集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个**错排**是该集合的一个满足条件 $\pi_i \neq i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的全排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, 即集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列.

- $n = 1$ 时, $\{1\}$ 没有错排.
- $n = 2$ 时, $\{1, 2\}$ 有唯一一个错排, 为 21.

例 10

有 n 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种?

定义 4

集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个**错排**是该集合的一个满足条件 $\pi_i \neq i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的全排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, 即集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列.

- $n=1$ 时, $\{1\}$ 没有错排.
- $n=2$ 时, $\{1,2\}$ 有唯一一个错排, 为 21.
- $n=3$ 时, $\{1,2,3\}$ 有两个错排, 分别为 231 和 312.
- $n=4$ 时, $\{1,2,3,4\}$ 共有下面所列的 9 个错排

$$2143, 3142, 4123, 2341, 3412, 4321, 2413, 3421, 4312.$$

用 d_n 记 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部错排个数, 则 $d_1=0, d_2=1, d_3=2, d_4=9$.

错排问题

定理 5

对任意正整数 n, 有

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

证明 对于 n 元置换及 $1 \le i \le n$, 定义性质 P_i 为 i 在置换下保持不变 (或 i 为不动点). 定义 A_i 为 n 元对称群 S_n 中所有满足性质 P_i 的置换组成的子集. 则

$$d_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \overline{A_n}|$$

对任意 $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n, |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ 为 S_n 中具有不动点 $i_1, \ldots, i_k$ 的置换个数, 即 $(n-k)!$.

根据容斥原理, 得

$$\begin{aligned}
D_n &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_n}\right| \\
&= |S_n| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\
&\qquad \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \qquad \square
\end{aligned}$$

这表明, 在 S_n 中任取一个置换, 它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$,

其极限是 $e^{-1}(n \to \infty)$.

这真是个奇妙但并不显然的事实. 令人惊讶的是, e 是一个典型的超越数, 出现在一个最开始只涉及整数的组合问题的解决方案

例 11

穿着球衣号为 $1, 2, 3, \ldots, n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列, 则有多少种方法让他们重新站队, 使得每个人前面的人都已换过?

例 11

穿着球衣号为 $1, 2, 3, \ldots, n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列，则有多少种方法让他们重新站队，使得每个人前面的人都已换过？

例 12

在 S_n 中，有多少个置换不含有任何一个下列二元子序列

$$12, 23, 34, \ldots, (n-1)n?$$

例 11

穿着球衣号为 $1,2,3,\ldots,n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列，则有多少种方法让他们重新站队，使得每个人前面的人都已换过？

例 12

在 S_n 中，有多少个置换不含有任何一个下列二元子序列

$$12,23,34,\ldots,(n-1)n?$$

解 用 Q_n 表示这个计数. 对 $1\leqslant i\leqslant n-1$，令 P_i 表示二元子序列 $i(i+1)$ 出现这一性质，X_i 表示满足性质 P_i 的 n 元置换构成的集合. 注意到

$|X_i|=(n-1)!,|X_i\cap X_j|=(n-2)\,!$. 注意前面第二式无论对 $|j-i|=1$ 还是 $|j-i|>1$ 都成立. 归纳地可得到

$$\left|\cap_{r=1}^{k}X_{i_r}\right|=(n-k)!.$$

所以，

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

回顾

- 令 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，那么 S 的 r-组合有多少?

回顾

- 令 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，那么 S 的 r-组合有多少?

$$\binom{n}{r}$$

- 令 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少?

回顾

- 令 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，那么 S 的 r-组合有多少?

$$\binom{n}{r}$$

- 令 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少?

$$\left(\!\!\binom{n}{r}\!\!\right) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

例 13

令 $M = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \cdots, k_n \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少?

例 13

令 $M = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \cdots, k_n \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少?

- 如果所有的 $k_i \geq r$, 那么 k_i 对 r-组合的选取不产生影响，可令 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = r$，则 $\binom{r+n-1}{r}$ 即为 M 的 r-组合的个数.
- 如果存在某个 $k_i < r$, 那么 k_i 对 r-组合的选取会产生影响，令
  性质 P_i : r-组合中 a_i 的个数大于或等于 $k_i + 1$,
  集合 A_i : 满足性质 P_i 的 r-组合的集合,
  $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$ 即为 M 的 r-组合的个数.

例 14

求多重集合 $T=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$ 的 *10*-组合的数目.

例 14

求多重集合 $T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 *10-组合的数目*.

- 令 $T_\infty = \infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c$
- P_1 : 至少 4 个 a P_2 : 至少 5 个 b P_3 : 至少 6 个 c
- A_i : 具有性质 P_i 的 10-组合的集合 $(i = 1, 2, 3)$.

$$|S| = \left(\!\!\binom{3}{10}\!\!\right) = \binom{10+3-1}{3-1} = 66$$

$$|A_1| = \left(\!\!\binom{3}{6}\!\!\right) = \binom{6+3-1}{3-1} = 28$$

$$|A_2| = \left(\!\!\binom{3}{5}\!\!\right) = \binom{5+3-1}{3-1} = 21$$

$$|A_3| = \left(\!\!\binom{3}{4}\!\!\right) = \binom{4+3-1}{3-1} = 15$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left(\!\!\binom{3}{1}\!\!\right) = \binom{1+3-1}{3-1} = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left(\!\!\binom{3}{0}\!\!\right) = \binom{0+3-1}{3-1} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

由容斥原理，得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 = 6$$

例 15

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

解 令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3$, 则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即 $0 \le y_1 \le 4, 0 \le y_2 \le 6, 0 \le y_3 \le 5, 0 \le y_4 \le 6$.

这就转化为多重集的 16-组合数问题.

令 S 为方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=16$ 的所有非负整数解构的集合, 定义性质 P_i 为 $y_i \geq n_i+1, 1 \leq i \leq 4$, 这里 $n_1=4, n_2=6, n_3=5, n_4=6$.

令 X_i 表示 S 中满足性质 P_i 的整数解构成的集合.

则

$$|S| = \left(\!\!\binom{4}{16}\!\!\right) = \binom{16+3}{3} = 969$$

$$|X_1| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1}\!\!\right) = \binom{11+3}{3} = 364,$$

$$|X_2| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1}\!\!\right) = \binom{9+3}{3} = 220$$

$$|X_3| = \left(\!\!\binom{4}{16-5-1}\!\!\right) = \binom{10+3}{3} = 286,$$

$$|X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1}\!\!\right) = \binom{9+3}{3} = 220$$

$$|X_1 \cap X_2| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1-6-1}\!\!\right) = \binom{4+3}{3} = 35$$

$$|X_1 \cap X_3| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1-5-1}\!\!\right) = \binom{5+3}{3} = 56$$

$$|X_1 \cap X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1-6-1}\!\!\right) = \binom{4+3}{3} = 35$$

$$|X_2 \cap X_3| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1-5-1}\!\!\right) = \binom{3+3}{3} = 20$$

$$|X_2 \cap X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1-6-1}\!\!\right) = \binom{2+3}{3} = 10$$

$$|X_3 \cap X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-5-1-6-1}\!\!\right) = \binom{3+3}{3} = 20$$

由于 $5+6+7=18>16$, 任意三个及三个以上的 X_i 相交都是空集.

从而原方程解的个数为

$$\begin{aligned}\left|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \overline{X_4}\right| &= 969 - (364+220+286+220) \\ &\quad + (35+56+35+20+10+20) \\ &= 55.\end{aligned}$$