组合数学

递推关系和生成函数

- 1 线性齐次递推关系
- 2 非齐次递推关系
- 3 普通型生成函数
- 4 指数型生成函数
- 5 一个几何例子

1 线性齐次递推关系

数列

- 定义：设 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 表示一个数列。

h_n叫做数列的一般项或通项。

- 算术数列　$h_0, h_0+q, h_0+2q, \cdots, h_0+nq, \cdots$

  递推关系　$h_n = h_{n-1} + q$

  通项　$h_n = h_0 + nq$

- 几何数列　$h_0, qh_0, q^2h_0, \cdots, q^nh_0, \cdots$

  递推关系　$h_n = qh_{n-1}$

  通项　$h_n = q^nh_0$

常见递推关系

- 例如：D_n表示n元错位排列，它的递推关系有

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \qquad (n \geq 3)$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \qquad (n \geq 2)$$

FIBONACCI数列

- Fibonacci在1202年出版的著作Liber Abaci中提出了以下问题：
- 兔子在出生两个月后，就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子来。如果所有兔都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子?
- 分析：
  - 第一个月和第二个月，小兔子没有繁殖能力，所以还是一对；
  - 两个月后，生下一对小兔总数共有两对；
  - 三个月以后，老兔子又生下一对，因为小兔子还没有繁殖能力，所以一共是三对；

- 依此类推，可得下表：

经过月数	0	1	2	[illegible]	[illegible]
总体对数	0	1	1	[illegible]	144

所有的兔子分两类：
①第n-1个月已经存在的：f_{n-1}
②第n个月新出生的，由于兔子要两个月成熟，所以只有那些第n-2个月已有的兔子能生小兔子：f_{n-2}

- 我们发现，如果用f_i表示第i个月兔子的对数，那么它满足以下递推关系：

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$
$$f_0=0, \quad f_1=1$$

- 称$f_0, f_1, f_2, \cdots$为Fibonacci数列；
- 称上述递推公式为Fibonacci公式。

FIBONACCI公式

- **定理** Fibonacci数满足公式

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- 证明：Fibonacci数列满足递推关系

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1$$

求解这个递推关系的一种方法是寻找形如

$$f_n = q^n$$

的解，这里q是一个非零常数。

由于$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$，故$q^n = q^{n-1}+q^{n-2}$，

又因为$q \neq 0$，所以$q^2 - q - 1=0$，

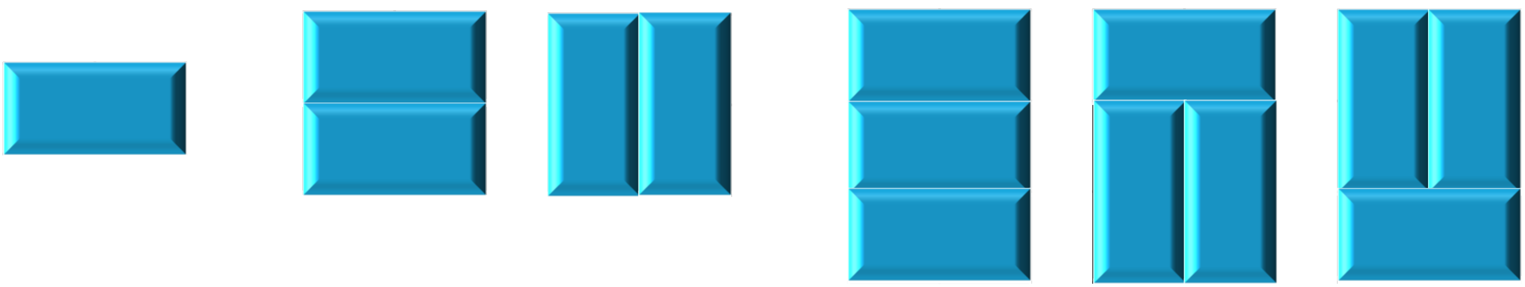
解得 $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

令$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，由于$f_0=0$, $f_1=1$,

有$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$，解得$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$。

完美覆盖问题

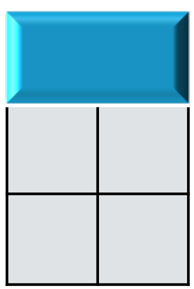
- 例：确定用多米诺骨牌完美覆盖$n\times 2$棋盘的方法数h_n.



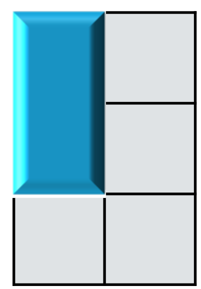
$h_1=1$ $h_2=2$ $h_3=3$

完美覆盖问题

- 将所有的覆盖方式分两类：



h_{n-1}



h_{n-2}

所以$h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$ $(n \geq 2)$，

初值为$h_1=1$，$h_2=2$，可以规定$h_0=1$.

线性递推关系

- 定义：设$h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$是无穷数列，如果存在数$a_1, a_2, \cdots, a_k\ (a_k \neq 0), b_n$，使得

$$h_n = a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\cdots+a_kh_{n-k}+b_n$$

那么称该数列满足**k**阶线性递推关系。

- 若$b_n=0$，称上述线性递推关系是齐次的；
- 若$a_1, a_2, \cdots, a_k$是常数，称它是常系数的。

常见线性递推关系

(1) 错排D_n的两个线性递推关系

$$D_n = (n-1)\,D_{n-1} + (n-1)\,D_{n-2} \qquad \text{2阶}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^{n-2} \qquad \text{1阶}$$

(2) Fibonacci数列满足2阶线性递推关系

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

(3) 阶乘$h_n=n!$满足1阶线性递推关系

$$h_n = nh_{n-1}$$

常系数线性齐次递推关系的解

- 定理 （1）设q是一个非零的数。则$h_n = q^n$是下列常系数线性齐次递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0 \quad 的解$$

当且仅当q是下列多项式方程

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \quad 的根。$$

注：也就是方程$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_k x^{n-k} = 0$的非零根。

（2）如果多项式方程有k个不同的根，则

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n \quad 是递推关系的通解。$$

注：上述通解的意义是：无论给定什么样的初值，都存在常数$c_1, c_2, \cdots, c_k$，使得上式是满足递推关系和初值的唯一数列。

➢**证明：**（1）$h_n = q^n$是

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0 \text{ 的解}$$

当且仅当对所有的$n \geq k$，

$$q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \cdots - a_k q^{n-k} = 0 \text{ 都成立。}$$

因为假设$q \neq 0$，所以可在上式中将q^{n-k}消去，得

$$q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$

➢ 证明：（2）因为假设 $a_k \neq 0$，

所以方程 $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$无零根。

假设方程有k个不同的非零根$q_1, q_2, \cdots, q_k$，那么

$$h_n = q_1^n, h_n = q_2^n, \cdots, h_n = q_k^n$$

是递推关系的k个不同的解。

根据递推关系的线性性和齐次性，对于任意$c_1, c_2, \cdots, c_k$，

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$$

也是递推关系的解。

下面证明，存在适当的$c_1, c_2, \cdots, c_k$，使得上式是满足初始条件的唯一解（通解）。

假设k个初始值为

$$h_0 = b_0, h_1 = b_1, \cdots, h_{k-1} = b_{k-1}$$

代入表达式 $h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$ 中，得线性方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_k q_k = b_1 \\ \cdots \\ c_1 q_1^{k-1} + c_2 q_2^{k-1} + \cdots + c_k q_k^{k-1} = b_{k-1} \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵为Vandermonde矩阵，当$q_1, q_2, \cdots, q_k$互不相同时，矩阵非奇异，故$c_1, c_2, \cdots, c_k$有唯一解。

特征方程

- 定义： 对递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0$$

称 $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ 为特征方程；

它的k个根，称为特征根；

如果k个特征根互不相同，

$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$ 称为通解。

- 例：对初值$h_0=1, h_1=2, h_2=0$，求解递推关系

$$h_n = 2h_{n-1}+h_{n-2}-2h_{n-3}\ (n\geq 3)$$

解：特征方程为 $x^3-2x^2-x+2=0$,

解得 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2$,

于是 $h_n=c_1+c_2(-1)^n+c_3 2^n$.

由初值可得方程组　　　　解得

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1 \\ c_1-c_2+2c_3=2 \\ c_1+c_2+4c_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=2 \\ c_2=-2/3 \\ c_3=-1/3 \end{cases}$$

因此 $h_n=2-\frac{2}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}2^n$.

- 例：由字母a, b, c组成的长度为n的单词，不允许两个a连续出现，这样的单词有多少种?

解：假设满足条件的长度为n的单词有h_n个。

这样的单词分两类:

1. 以a开头，那么接下来只能是b, c，有$2h_{n-2}$个;

2. 以b,c开头，有$2h_{n-1}$个.

递推关系　　$h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}\ (n\geq 2)$

初值　$h_0 = 1$，$h_1=3$.

递推关系 $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$ $(n \geq 2)$

初值 $h_0 = 1$，$h_1 = 3.$

特征方程为 $x^2 - 2x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 1+\sqrt{3}, x_2 = 1-\sqrt{3}$,

于是 $h_n = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n.$

由初值可得方程组 解得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = (2+\sqrt{3}) / 2\sqrt{3} \\ c_2 = (-2+\sqrt{3}) / 2\sqrt{3} \end{cases}$$

因此 $h_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$

- 例：对初值$h_0=a, h_1=b(\neq 2a)$，求解递推关系

$$h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} \qquad (n\geq 2)$$

解：特征方程为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$，

那么 $h_n=c_1 2^n+c_2 2^n$ 成

由初值可得方程组

$$\begin{cases} c_1+c_2=a \\ (c_1+c_2)2=b \end{cases}$$

$(c_1+c_2)2=b$，与$b\neq 2a$矛盾。

所以 $h_n=c_1 2^n+c_2 2^n$ 不是通解。

问题：
那么当解是重根时，
通解是什么样的呢？

带重根的解

- 定理 设$\boldsymbol{q_1, q_2, \cdots, q_t}$是常系数线性齐次递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0 \quad (a_k \neq 0)$$

的特征方程的互不相同的根。

如果$\boldsymbol{q_i}$是特征方程的$\boldsymbol{s_i}$重根，那么它对应通解中的部分是

$$H_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \cdots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n$$

这个递推关系的通解是

$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \cdots + H_n^{(t)}$$

- 例：对初值$h_0 = a, h_1 = b(\neq 2a)$，求解递推关系

$$h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

解：特征方程为 $x^2 - 4x + 4 = 0$，

解得 $x_1 = x_2 = 2$，

令 $h_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$，

由初值可得方程组　　解得

$$\begin{cases} c_1 = a \\ (c_1 + c_2)2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = a \\ c_2 = (b - 2a)/2 \end{cases}$$

所以 $h_n = a2^n + (b - 2a)2^{n-1}$。

- 例：对初值$h_0=1, h_1=0, h_2=1, h_3=2$，求解递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-1} + 2h_{n-2} \qquad (n\geq 4)$$

解：特征方程为 $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = x_2 = x_3 = -1,\ x_4 = 2.$

令 $h_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n$,

由初值可得方程组　　　　　　　解得

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1 \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 7/9 \\ c_2 = -3/9 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 2/9 \end{cases}$$

因此 $h_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{3}{9}n(-1)^n + \frac{2}{9}2^n.$

2 非齐次递推关系

汉诺塔问题

- 游戏道具：3根柱子和64个大小不等的金盘。
- 初始条件：开始时，盘子按照大小次序放在第一根柱子上，大盘在下，小盘在上。
- 游戏规则：每次只能把一个盘子从一根柱子移动到另一根柱子上，不允许放在比它小的盘子上。
- 游戏目标：把所有盘子按照大小次序原样搬到第二根柱子上，最大的盘子放在最下面，一共要移动多少次?

递推公式

- 设h_n：转移n个盘子所需的移动次数。
- 为了移动n个盘子，我们需要先把n-1个盘子放到另一根柱子上，然后把最大的的盘子移到空柱子上，最后再把那n-1个盘子移到最大圆盘所在的柱子上。因此
- $h_n=2h_{n-1}+1$ （递推公式）
- 可以验证，$h_0=0$ （初值）

汉诺塔问题的解

- 根据递推公式$h_n=2h_{n-1}+1$以及初值$h_0=0$，容易计算出h_n是下面的几何序列的部分和：
- $h_n = 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1 = 2^n - 1$
- 用归纳法证明。假定$n=k$时成立，那么$n=k+1$时，

$$h_{k+1} = 2h_k+1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

例：非齐次递推公式求解

- 例（汉诺塔问题）求h_n的公式，满足初值为$h_0=0$，且递推公式为 $h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad (n\geq 1)$

解：令 $g(x) = \Sigma_{n\geq 0} h_n x^n$，

有 $g(x) = 1 + \Sigma_{n\geq 1} h_n x^n = 1 + \Sigma_{n\geq 1} (2h_{n-1}+1)x^n$

$= 1 + 2\Sigma_{n\geq 1} h_{n-1}x^n + \Sigma_{n\geq 1} x^n = 1 + 2x\, g(x) + 1/(1-x) - 1$

所以 $(1-2x)\, g(x) = 1/(1-x)$

$g(x) = 1/(1-x)\,(1-2x) = 1/(1-2x) - 1/(1-x)$

$= \Sigma_{n\geq 0} 2^n x^n - \Sigma_{n\geq 0} x^n = \Sigma_{n\geq 0} (2^n-1)\, x^n$

于是有 $h_n = 2^n-1$

- 例：求解 $h_n = 3h_{n-1} - 4n \quad (n \geq 1)$

  $h_0 = 2$

解：首先考虑齐次递推关系的通解

$$h_n = 3h_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

它的通解是 $h_n = c3^n \quad (n \geq 1)$

接下来，考虑原问题的一个特殊解

$h_n = rn + s$ （r, s为待定系数）

将其带入非齐次递推公式

$$rn + s = 3r(n-1) + 3s - 4n$$

$$rn + s = 3r(n-1) + 3s - 4n$$

以n作为变量，合并同类项

$$(-2r+4)n + (-2s+3r) = 0$$

比较两边的系数 解得

$$\begin{cases} -2r+4=0 \\ -2s+3r=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r=2 \\ s=3 \end{cases}$$

最后合成原问题的通解

$$h_n = c3^n + 2n + 3$$

根据初值$h_0=2$， $2 = c3^0 + 2\cdot 0 + 3$， 得$c=-1$，

所以解为 $h_n = -3^n + 2n + 3$ $(n\geq 0)$

总结

特殊解如何求?

- 求解非齐次递推关系的步骤:
  1. 求齐次递推关系的通解;
  2. 求非齐次递推关系的一个特殊解;
  3. 将通解与特殊解合成，利用初值求解出通解中的常数。

特殊解的求法

- 对于非齐次部分b_n，需要尝试求特定类型的特殊解h_n，
  - 若b_n是n的k次多项式，那么h_n也是n的k次多项式，例如：

    1. 若$b_n = d$，那么$h_n = r$;
    2. 若$b_n = dn + e$，那么$h_n = rn + s$;
    3. 若$b_n = dn^2 + en + f$，那么$h_n = rn^2 + sn + t$;
  - 若b_n是n的指数形式，那么h_n也是n指数形式，例如：

    1. 若$b_n = d^n$，那么$h_n = pd^n$.

- 例：求解 $h_n = 2h_{n-1} + 3^n \quad (n \geq 1)$

  $h_0 = 2$

解法一：首先考虑齐次递推关系的通解

$$h_n = 2h_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

它的通解是 $h_n = c2^n \quad (n \geq 1)$

接下来，考虑原问题的一个特殊解

$h_n = p3^n$ （p为待定系数）

将其带入非齐次递推公式

$$p3^n = 2 \cdot p3^{n-1} + 3^n$$

$$p3^n = 2 \cdot p3^{n-1} + 3^n$$

两边同时除以3^{n-1}，

$$3p = 2p + 3$$

解得 $p = 3$

最后合成原问题的通解

$$h_n = c2^n + 3^{n+1}$$

根据初值$h_0 = 2$，

$2 = c2^0 + 3$， 得$c = -1$，

所以解为 $h_n = -2^n + 3^{n+1} \quad (n \geq 0)$

- 例：求解　$h_n = 3h_{n-1} + 3^n \quad (n\geq 1)$

  $h_0 = 2$

解法一：首先考虑齐次递推关系的通解

$$h_n = 3h_{n-1} \quad (n\geq 1)$$

它的通解是　$h_n = c3^n \quad (n\geq 1)$

接下来，考虑原问题的一个特殊解

$$h_n = p\cdot 3^n \quad (p\text{为待定系数})$$

将其带入非齐次递推公式

$$p\cdot 3^n = 3\cdot p\cdot 3^{n-1} + 3^n$$

两边同时除以3^n，得　$p = p + 1$

显然有问题，所以再尝试，令　$h_n = p\cdot n\cdot 3^n$

$$p\cdot n\cdot 3^n = 3\cdot p\cdot(n-1)\cdot 3^{n-1} + 3^n$$

两边同时除以3^n,

$$p\cdot n = p\cdot(n-1) + 1$$

解得 $p = 1$

最后合成原问题的通解

$$h_n = c3^n + n3^n$$

根据初值$h_0 = 2$,

$2 = c\cdot 3^0 + 0\cdot 3^0$, 得$c = 2$,

所以解为 $h_n = 2\cdot 3^n + n3^n \qquad (n\geq 0)$

$$= (2 + n)\, 3^n$$

3 普通型生成函数

生成函数

- 定义：设$h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$是无穷数列，它的生成函数定义为无穷级数

$$g(x) = h_0 + h_1x^1 + \cdots + h_nx^n + \cdots$$

注：x^n充当h_n的“占位符”

- 例：每一项都是1的数列$1, 1, \cdots, 1, \cdots$，它的生成函数定义为

$$g(x) = 1 + x^1 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

回顾——牛顿二项式定理

- 定理 设α是实数，对所有满足|z|<1的z，有

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^{k}$$

其中$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$。

- 如果令α= -n，z=-rx， 那么

$$(1-rx)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-rx)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^{k}x^{k}$$

■例：确定下列数列的生成函数：

$0, 1, 4, \cdots, n^2, \cdots$

$\Sigma_{n\geq 0} x^n = (1-x)^{-1}$ 两边同时求导

$\Sigma_{n\geq 0} nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$ 两边同时乘以x

$\Sigma_{n\geq 0} nx^n = x(1-x)^{-2}$ 两边同时求导

$\Sigma_{n\geq 0} n^2x^{n-1} = (1-x)^{-2}+2x(1-x)^{-3}$ 两边同时乘以x

$\Sigma_{n\geq 0} n^2x^n = x(1-x)^{-2}+2x^2(1-x)^{-3}$

$= (x+x^2)(1-x)^{-3}$

■例：求解 $h_n = 2h_{n-1} + 3^n \quad (n\geq 1)$； $h_0 = 2$

解法二：令 $g(x) = \Sigma_{n\geq 0} h_n x^n$，

有 $g(x) = 2 + \Sigma_{n\geq 1} h_n x^n = 2 + \Sigma_{n\geq 1} (2h_{n-1}+3^n)x^n$

$= 2 + 2\Sigma_{n\geq 1} h_{n-1}x^n + \Sigma_{n\geq 1} 3^n x^n$

$= 2 + 2x\,g(x) + 1/(1-3x) - 1$

所以 $(1-2x)\,g(x) = 1/(1-3x) + 1$

$g(x) = 1/(1-3x)(1-2x) + 1/(1-2x)$

$= 3/(1-3x) - 2/(1-2x) + 1/(1-2x)$

$= 3\Sigma_{n\geq 0} 3^n x^n - \Sigma_{n\geq 0} 2^n x^n = \Sigma_{n\geq 0} (3^{n+1} - 2^n)\, x^n$

于是有 $h_n = 3^{n+1} - 2^n$

例：求解 $h_0 = 2$； $h_n = 3h_{n-1} + 3^n \quad (n \geq 1)$

解法二：令 $g(x) = \sum_{n\geq 0} h_n x^n$，

有 $g(x) = 2 + \sum_{n\geq 1} h_n x^n = 2 + \sum_{n\geq 1}(3h_{n-1} + 3^n)x^n$

$$= 2 + 3\sum_{n\geq 1} h_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 3^n x^n$$

$$= 2 + 3xg(x) + \frac{1}{1-3x} - 1$$

所以 $(1-3x)g(x) = 1 + \frac{1}{1-3x}$

$$g(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{(1-3x)^2}$$

$$= \sum_{n\geq 0} 3^n x^n + \sum_{n\geq 0}(n+1)3^n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+2)3^n x^n$$

于是有 $h_n = (n+2)3^n$

- 例：对初值$h_0=1, h_1=-2$，求解递推关系

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} \qquad (n\geq 2)$$

解：令 $g(x) = \Sigma_{n\geq 0} h_n x^n$

$$= 1 - 2x + \Sigma_{n\geq 2} h_n x^n$$

$$= 1 - 2x + \Sigma_{n\geq 2} (5h_{n-1} - 6h_{n-2}) x^n$$

$$= 1 - 2x + 5\Sigma_{n\geq 2} h_{n-1} x^n - 6\,\Sigma_{n\geq 2} h_{n-2} x^n$$

$$= 1 - 2x + 5x\,\Sigma_{n\geq 1} h_n x^n - 6x^2\,\Sigma_{n\geq 0} h_n x^n$$

$$= 1 - 2x + 5x(g(x) - 1) - 6x^2 g(x)$$

所以 $(1-5x+6x^2)\, g(x) = 1 - 7x$

由于 $(1-5x+6x^2)\, g(x) = 1 - 7x$

因此 $g(x) = \dfrac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \dfrac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}$

$$= \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$g(x) = 5\Sigma_{n\geq 0}(2x)^n - 4\Sigma_{n\geq 0}(3x)^n$$

$$= \Sigma_{n\geq 0}(5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n)\, x^n$$

$$h_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n \qquad (n\geq 0)$$

- 例：设k为一给定的整数，数列为$h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$。令$h_n$是方程$z_1+z_2+\cdots+z_k=n$的非负整数解的数目，求$h_n$的生成函数。

解：一方面，根据h_n的定义，知$h_n = \binom{n+k-1}{n}$

因此$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n$

另一方面，根据二项式系数的性质，知

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$$

- 例：什么样数列的生成函数是如下的式子?

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\,(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

解：设x^{z_1}，x^{z_2}，x^{z_3}分别是三个因子，其中

$0 \le z_1 \le 5$，$0 \le z_2 \le 2$，$0 \le z_3 \le 4$，

h_n是方程$z_1 + z_2 + z_3 = n$的整数解。

显然，当$n \ge 12$时，$h_n = 0$。

- 例：确定苹果、香蕉、橘子和梨的n组合数的个数。

  n组合中，苹果偶数个，香蕉奇数个，橘子不超过4个，梨至少有一个。

解：上述问题相当于是方程

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = n \qquad \text{满足条件}$$

z_1是偶数，z_2是奇数，$0 \le z_3 \le 4$，$1 \le z_4$的整数解。

该方程对应生成函数

$$g(x) = \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \cdots)}_{\text{苹果因子}}\underbrace{(x + x^3 + x^5 + \cdots)}_{\text{香蕉因子}}\underbrace{(1 + x + \cdots + x^4)}_{\text{橘子因子}}\underbrace{(x + x^2 + x^3 + \cdots)}_{\text{梨因子}}$$

$$g(x) = \frac{1}{1 - x^2}\frac{x}{1 - x^2}\frac{1 - x^5}{1 - x}\frac{x}{1 - x} = \frac{x(1 - x^5)}{(1 - x^2)^2(1 - x)^2}$$

■例：设h_n表示下列方程

$$3z_1+4z_2+2z_3+5z_4=n$$

的非负整数解的个数，求h_n的生成函数。

解：作变量替换：

$$y_1=3z_1,\ y_2=4z_2,\ y_3=2z_3,\ y_4=5z_4,$$

于是h_n是下列方程的非负整数解的个数

$$y_1+y_2+y_3+y_4=n$$

其中，y_1是3的倍数，y_2是4的倍数，y_3是2的倍数，y_4是5的倍数。

生成函数 $g(x)=$

$$\underbrace{(1+x^3+x^6+\cdots)}_{3\text{的倍数}}\underbrace{(1+x^4+x^8+\cdots)}_{4\text{的倍数}}\underbrace{(1+x^2+x^4+\cdots)}_{2\text{的倍数}}\underbrace{(1+x^5+x^{10}+\cdots)}_{5\text{的倍数}}$$

$$g(x)=\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^4}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}$$

- 例：有无限多的一毛、五毛、一元硬币。确定用这些硬币凑成n毛钱的方法数$\mathrm{h_n}$的生成函数g(x).

解：h_n是下列方程的非负整数解的个数

$$z_1 + 5z_2 + 10z_3 = n$$

作变量替换：

$$y_1 = z_1，y_2 = 5z_2，y_3 = 10z_3，$$

于是h_n是下列方程的非负整数解的个数

$$y_1 + y_2 + y_3 = n$$

其中，y_1是1的倍数，y_2是5的倍数，y_3是10的倍数。

$$\text{生成函数 } g(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots)}_{1\text{的倍数}}\underbrace{(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)}_{5\text{的倍数}}\underbrace{(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots)}_{10\text{的倍数}}$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}$$

问题：

- 本节所讨论的方法，建立在求解特征方程所有根的基础上，那么如果是高次方程，很难求出所有的根，怎么办?
- 可以考虑用生成函数来求解k阶常系数线性齐次线性递推关系，相应的生成函数形如p(x)/q(x)，其中p(x)是次数小于k的多项式，q(x)是常数项为1的k次多项式。
- 如何用生成函数p(x)/q(x)求h_n的表达式?
  - 首先将p(x)/q(x)表示成$c/(1-rx)^t$的和的形式；
  - 接下来，求出$c/(1-rx)^t$的幂级数，然后合并同类项，比较系数，得到h_n的表达式。

■ 例：对初值$h_0=0, h_1=1, h_2=-1$，求解递推关系

$$h_n = -h_{n-1} + 16h_{n-2} - 20h_{n-3} \qquad (n\geq 3)$$

解：令 $g(x) = \Sigma_{n\geq 0} h_n x^n$，

有 $g(x) = x - x^2 + \Sigma_{n\geq 3} h_n x^n$

$$= x - x^2 + \Sigma_{n\geq 3}(-h_{n-1} + 16h_{n-2} - 20h_{n-3})x^n$$

$$= x - x^2 - \Sigma_{n\geq 3} h_{n-1}x^n + 16\Sigma_{n\geq 3} h_{n-2}x^n - 20\Sigma_{n\geq 3} h_{n-2}x^n$$

$$= x - x^2 - x\,\Sigma_{n\geq 2} h_n x^n + 16x^2\,\Sigma_{n\geq 1} h_n x^n - 20x^3\,\Sigma_{n\geq 0} h_n x^n$$

$$= x - x^2 - x(g(x) - x) + 16x^2 g(x) - 20x^3 g(x)$$

所以 $(1 + x - 16x^2 + 20x^3)\, g(x) = x$

由于 $$\left(1+x-16x^2+20x^3\right)g(x)=x$$

因此 $$g(x)=\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}=\frac{x}{(1-2x)^2(1+5x)}$$

$$=-\frac{2/49}{1-2x}+\frac{7/49}{(1-2x)^2}-\frac{5/49}{1+5x}$$

$$=-\frac{2}{49}\sum_{n\geq 0}2^n x^n+\frac{7}{49}\sum_{n\geq 0}(n+1)2^n x^n-\frac{5}{49}\sum_{n\geq 0}(-5)^n x^n$$

所以有 $$h_n=-\frac{2}{49}2^n+\frac{7}{49}(n+1)2^n-\frac{5}{49}(-5)^n$$

总结：

- 设$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$满足k阶递推关系式

$$h_n + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_k h_{n-k} = 0 \ (n \ge k\text{且}a_k \ne 0)$$

其中，初始值为$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_{k-1}$.

- 设$g(x)$是该数列的生成函数，那么

$$g(x) = p(x)/q(x)$$

  - $p(x) = h_0 + (h_1+a_1h_0)x + (h_2 +a_1h_1+a_2h_0)x^2 + \cdots + (h_{k-1} + a_1h_{k-2} + \cdots + a_{k-1}h_0)x^{k-1}$
  - $q(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$

- 设$r(x) = 0$是该数列的特征方程，即

$$r(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

- 那么 $q(x) = x^k r(1/x)$

- 设$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$满足k阶递推关系式

$$h_n + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_k h_{n-k} = 0 \quad (n \geq k \text{且} a_k \neq 0)$$

其中，初始值为$h_0, h_1, h_2, \cdots, h_{k-1}$.

证明：令 $g(x) = \Sigma_{n \geq 0} h_n x^n$，

有 $g(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_{k-1} x^{k-1} + \Sigma_{n \geq k} h_n x^n$

$$= h_0 + h_1 x + \cdots + h_{k-1} x^{k-1} + \Sigma_{n \geq k} (-a_1 h_{n-1} - \cdots - a_k h_{n-k}) x^n$$

$$= h_0 + h_1 x + \cdots + h_{k-1} x^{k-1} - a_1 \Sigma_{n \geq k} h_{n-1} x^n - \cdots - a_k \Sigma_{n \geq k} h_{n-k} x^n$$

$$= h_0 + h_1 x + \cdots + h_{k-1} x^{k-1} - a_1 x (g(x) - h_0 - h_1 x - \cdots - h_{k-2} x^{k-2})$$

$$- a_2 x^2 (g(x) - h_0 - h_1 x - \cdots - h_{k-3} x^{k-3}) - \cdots - a_k x^k g(x)$$

所以 $(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k) g(x)$

$$= h_0 + (h_1 + a_1 h_0) x + (h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0) x^2 + \cdots + (h_{k-1} + a_1 h_{k-2} + \cdots + a_{k-1} h_0) x^{k-1}$$

- 反过来，如果给定两个多项式
  - $p(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_{k-1}x^{k-1}$
  - $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$ （其中$b_0 \neq 0$）
- 那么有理式$p(x)/q(x)$一定可以展开成幂级数

$$h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_nx^n + \cdots$$

- 由于 $p(x)/q(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_nx^n + \cdots$，所以

$$d_0 + d_1x + \cdots + d_{k-1}x^{k-1} = (b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k)(h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_nx^n + \cdots)$$

$$d_0 + d_1x + \cdots + d_{k-1}x^{k-1} = (b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k)(h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_nx^n + \cdots)$$

将上述方程右边展开，比较两边的系数，我们得到

$$d_0 = b_0h_0$$

$$d_1 = b_0h_1 + b_1h_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$d_{k-1} = b_0h_{k-1} + b_1h_{k-2} + \cdots + b_{k-1}h_0$$

$$0 = b_0h_n + b_1h_{n-1} + \cdots + b_kh_{n-k} \qquad (n \geq k)$$

注：因为$b_0 \neq 0$，所以上式也可以写成

$$0 = h_n + (b_1/b_0)h_{n-1} + \cdots + (b_k/b_0)h_{n-k} \qquad (n \geq k)$$

■**定理**（1）设$h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$是满足k阶常系数线性齐次递推关系

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \cdots - a_k h_{n-k} = 0 \quad (a_k \neq 0)$$

的数列，则它的生成函数$g(x)$是如下形式的函数

$$g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中，$q(x)$是k次多项式，且$q(0) \neq 0$，

$p(x)$是次数小于k次的多项式。

（2）反之，给定满足上述条件的$p(x)$和$q(x)$，则存在满足上面递推关系的数列$h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$，且它的生成函数是p(x)/q(x)。

3 指数生成函数

指数生成函数

- 定义：设$h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$是无穷数列，它的指数生成函数定义为无穷级数

$$g^{(e)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{x^n}{n!}$$

- 例：每一项都是1的数列1, 1, ⋯, 1, ⋯，它的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = 1 + x^1/1! + \cdots + x^n/n! + \cdots = e^x$$

例

- 确定下列数列的指数生成函数：

$$P(n,0),\ P(n,1),\ \cdots,\ P(n,n)$$

这里P(n,k)是n元集合的k排列的数目。

$$g^{(e)}(x) = \Sigma_{k\geq 0} P(n,k)\, x^k / k!$$

$$= \Sigma_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k$$

$$= (1+x)^n$$

例

- 确定下列数列的指数生成函数：

$$1,\ a,\ \cdots,\ a^n,\ \cdots$$

$$g^{(e)}(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a^n x^n / n!$$

$$= \Sigma_{n\geq 0}\, (ax)^n / n!$$

$$= e^{ax}$$

重集排列的指数生成函数

- 定理：设重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，

其中重数n_i是非负整数。

设h_n是S的n排列数，那么h_n的指数生成函数为

$$\boxed{g^{(e)}(x)=f_{n_1}(x)\cdot f_{n_2}(x)\cdot\cdots\cdot f_{n_k}(x)}$$

其中，对每个$1\le i\le k$，

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!}$$

- 证明：设生成函数为 $g^{(e)}(x)=\sum_{n\geq 0} h_n \frac{x^n}{n!}$。

对每个$1\leq i\leq k$,

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!}$$

$$f_{n_1}(x)\cdot f_{n_2}(x)\cdot\cdots\cdot f_{n_k}(x)=\sum_{m_1=0}^{n_1}\sum_{m_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{m_k=0}^{n_k}\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n}\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} h_n\frac{x^n}{n!}$$

- 例：设h_n表示由数字1,2和3构造的n位数的个数。
  其中1的个数是偶数，2至少有3个，3至多有4个。
  确定h_n的指数生成函数。

解：指数生成函数为$g^{(e)}(x) =$

$$\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}_{\text{1有偶数个}}\underbrace{\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}_{\text{2至少3个}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)}_{\text{3至多4个}}$$

■例：用红、白、蓝三种颜色给1×n的棋盘着色。

如果要求红色格子是偶数，那么有多少种着色方式?

解：设h_n表示这样的着色数，那么指数生成函数为

$$g^{(e)}(x)=\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}_{\text{红色因子}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)}_{\text{白色因子}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)}_{\text{蓝色因子}}$$

$$g^{(e)}(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^xe^x=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

因此，$h_n=(3^n+1)/2$

■例：设h_n表示每个数字都是奇数，且1和3出现偶数次的n位数的个数，确定h_n的公式。

解：指数生成函数为$g^{(e)}(x)=\Big(\underbrace{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots}_{\text{1和3出现偶数次}}\Big)^2\Big(\underbrace{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots}_{5,7,9}\Big)^3$

$$g^{(e)}(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^3=\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}\right)\frac{x^n}{n!},\qquad \text{因此 } h_n=\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}.$$

■例：用红、白、蓝三种颜色给1×n的棋盘着色。如果要求红格是偶数，至少有一个蓝格，那么有多少种着色方式?

解：设h_n表示这样的着色数，那么指数生成函数为

$$g^{(e)}(x)=\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}_{\text{红色因子}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)}_{\text{白色因子}}\underbrace{\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)}_{\text{蓝色因子}}$$

$$g^{(e)}(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^x(e^x-1)\quad=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x-e^{2x}-1)$$

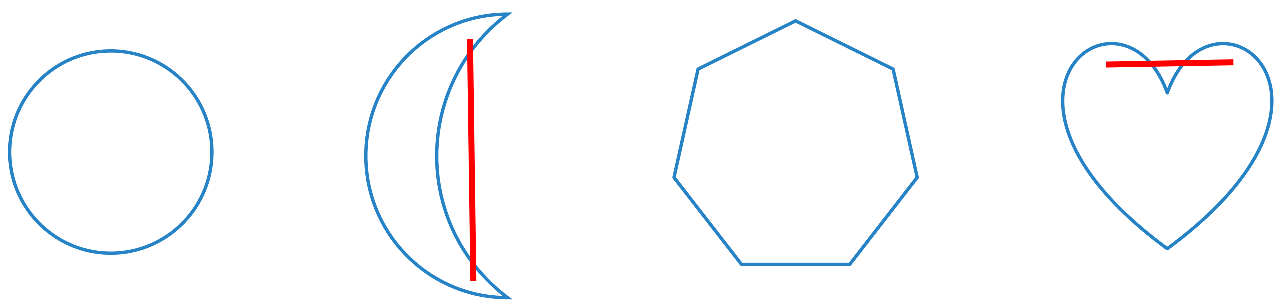
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

因此，$h_0=0$，$h_n=(3^n-2^n+1)/2$ (n=1,2,⋯)

5 一个几何例子

基本概念

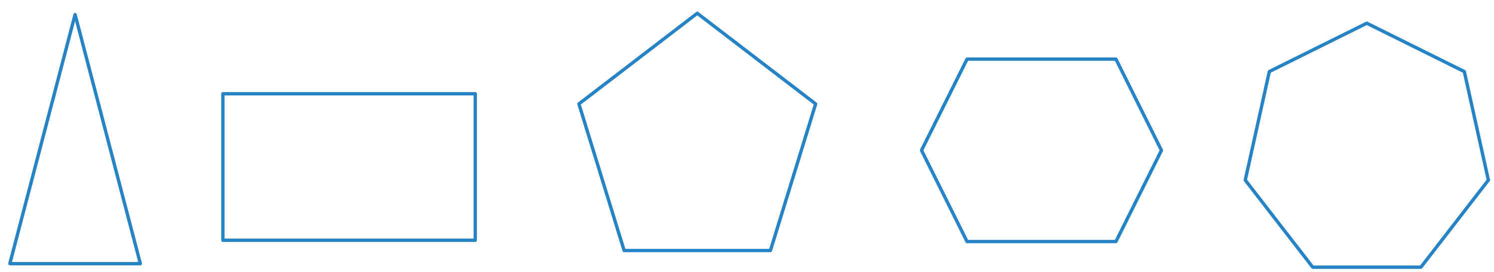
- 凸集：对集合K中任意两点p和q，如果线段pq都包含在K内，那么称K是凸的。



凸　　非凸　　凸　　非凸

基本概念

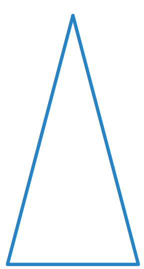
- 多边形：边界由有线条线段构成的区域。



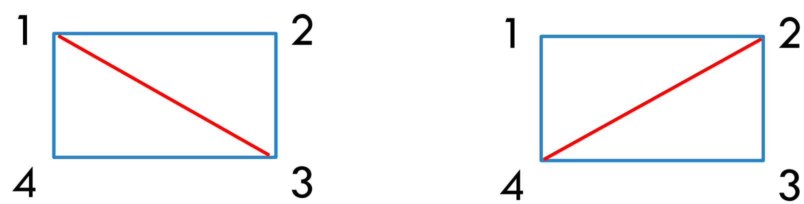
三角形　四边形　五边形　六边形　七边形

基本概念

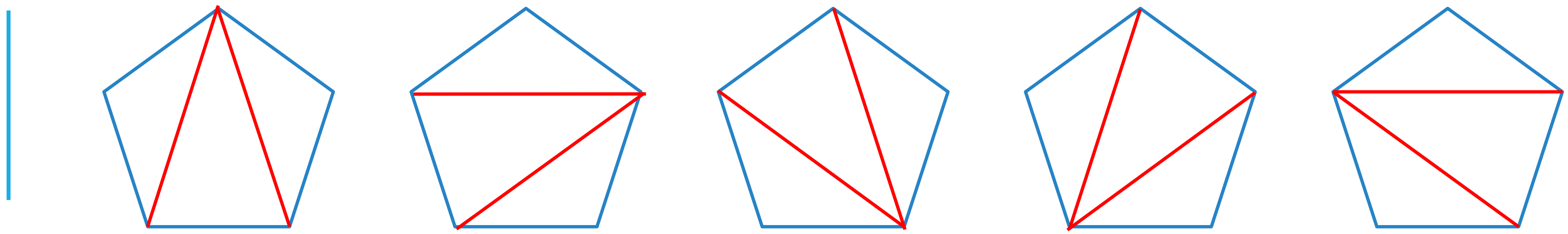
- 三角剖分：通过在凸多边形的内部添加互不相交的对角线，使得多边形被分成若干个不相交的三角形区域。
- h_n：n+1边形三角剖分的方法数。



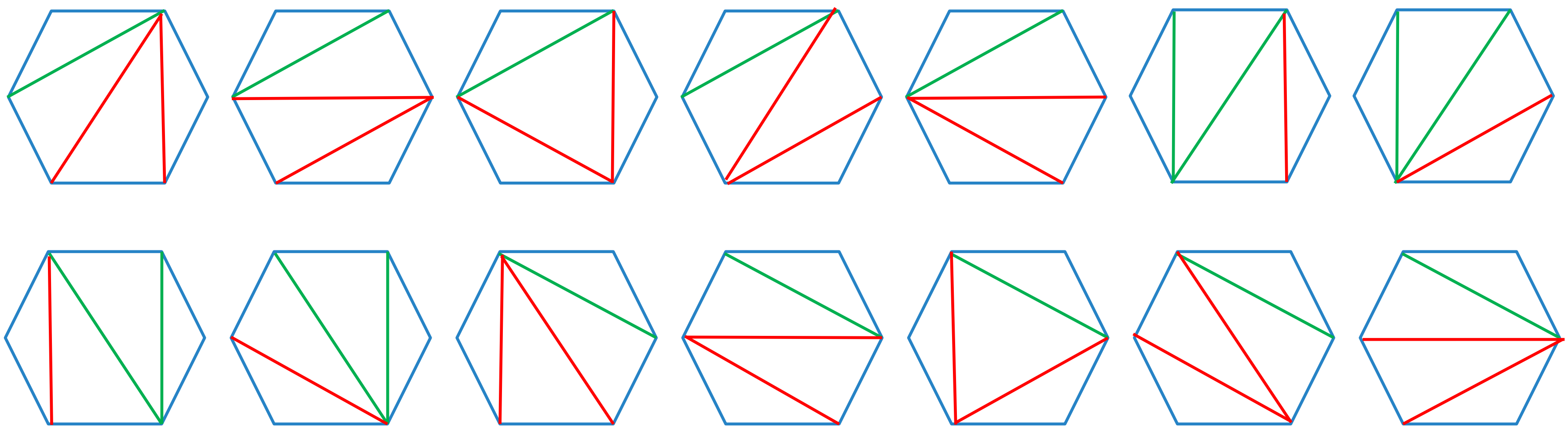
$h_2=1$



$h_3=2$



$h_4=5$



$h_5=14$

计数公式

- 定理 设h_n表示在n+1条边的凸多边形内部插入互不相交的对角线将其分成三角形区域的方法数。

定义$h_1=1$。则h_n满足递推关系

$$h_n = h_1h_{n-1} + h_2h_{n-2} + \cdots + h_{n-1}h_1 \quad (n\geq 2)$$

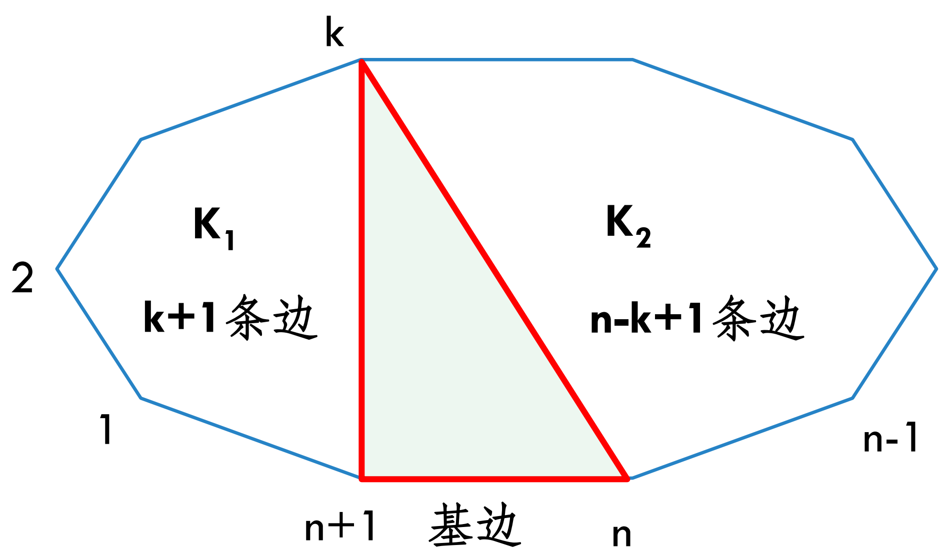
且该递推关系的解是

$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \quad (n\geq 1)$$

■证明： 定义$h_1=1$。

下面考虑证明递推公式。

任意选取n+1边形的一条边，作为基边。我们从基边的两个端点出发，同时向另一个顶点作两条对角线，形成一个以基边作为底边的三角形。



$$h_n = \Sigma_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n\geq 2)$$

- 接下来求解递归公式 $h_n = \Sigma_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n \geq 2)$
  初值 $h_1=1$。

令 $g(x) = \Sigma_{n\geq 1} h_n x^n$，

则 $g(x)^2 = \Sigma_{n\geq 2} \Sigma_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} x^n = \Sigma_{n\geq 2} h_n x^n = g(x) - h_1 x$

于是 $g(x)^2 - g(x) + x = 0$，解得 $g_{1,2}(x) = (1 \pm (1-4x)^{1/2})/2$

由于 $g(0)=0$，所以 $g(x) = (1-(1-4x)^{1/2})/2$

由于 $(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} \cdot n} \binom{2n-2}{n-1} z^n$

所以 $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} \cdot n} \binom{2n-2}{n-1} (-4)^n x^n\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$