高等代数 — 引言

张彪

天津师范大学

数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

提纲

提纲

代数学起源于人类对于数的理解

代数学习的几个阶段

- 算　术：自然数、正分数的四则运算（小学）
- 初等代数：有理数、无理数、实数、复数、解方程（中学）
- 高等代数：多项式、线性代数（大一）
- 抽象代数：群、环、域（大二）
- . . . .

教材

教材

- 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组, 高等代数 (第 5 版), 高等教育出版社, 2019.

参考书目

- 王萼芳, 石生明, 高等代数辅导与习题解答（北大·第 5 版), 高等教育出版社, 2019.
- 徐仲等, 高等代数 (北大第四版) 导教导学导考, 西安: 西北工业大学出版社, 2014.

Outline

第一学期

1 多项式

2 行列式

3 线性方程组

第二学期

4 矩阵

5 二次型

6 线性空间

7 线性变换

9 欧几里得空间

图: 课程网页

提纲

充分条件和必要条件

设 A 与 B 为两命题，

- A 的充分条件是 B

  如果 B 成立，那么 A 成立，即 $A \Leftarrow B$（箭头表示能够推导出）
- A 的必要条件是 B

  如果 A 成立，那么 B 成立，即 $A \Rightarrow B$.
- A 的充分必要条件是 B
  - 充分性 $A \Leftarrow B$
  - 必要性 $A \Rightarrow B$

当且仅当

当且仅当 (英文：If and only if, 或者：iff)，在数学、哲学、逻辑学以及其他一些技术性领域中广泛使用，在英语中的对应标记为 iff.

设 A 与 B 为两命题，在证明

$$A \text{ 当且仅当 } B$$

时，这相当于去同时证明陈述

- 如果 A 成立，那么 B 成立
- 如果 B 成立，把么 A 成立

公认的其他同样说法还有

$$B \text{ 是 } A \text{ 的充分必要条件 (或称为充要条件)}.$$

注: 在定义中，“如果... 那么...” 的意思就是当且仅当.

比如书上两个多项式相等的定义.

提纲

如果你有一排很长的直立着的多米诺骨牌那么如果你可以确定:

第一张骨牌将要倒下.

只要某一个骨牌倒了, 与他相临的下一个骨牌也要倒.

那么你就可以推断所有的的骨牌都将要倒.

第一数学归纳法

第一数学归纳法可以概括为以下三步：

1. 归纳基础：证明 $n = 1$ 时命题成立.
2. 归纳假设：假设 $n = k$ 时命题成立.
3. 归纳递推：由归纳假设推出 $n = k + 1$ 时命题也成立.

例 1

证明对于任意正整数 n，下面的公式都成立

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

例 1

证明对于任意正整数 n，下面的公式都成立

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

证明

- 这个公式在 $n=1$ 时成立. 左边 $=1$，右边 $=\frac{1\times 2}{2}=1$.
  所以这个公式在 $n=1$ 时成立.
- 我们假设 $n=k$ 时公式成立，即
  $$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$
- 在上式等号两边分别加上 $k+1$ 得到
  $$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$
  这就是 $n=k+1$ 时的等式.
  因此，对于任意正整数等式都成立. ∎

例 2

证明对于任意正整数 n，下面的公式都成立

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

例 2

证明对于任意正整数 n，下面的公式都成立

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明

- 这个公式在 $n=1$ 时成立. 左边 $=1$，右边 $=\frac{1\times2\times3}{6}=1$.
  所以这个公式在 $n=1$ 时成立.
- 我们假设 $n=k$ 时公式成立，即
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$
- 在上式等号两边分别加上 $k+1$ 得到
$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$

  这就是 $n=k+1$ 时的等式.

例 3

对于任意自然数 n 证明 3^n-1 是 2 的倍数.

例 3

对于任意自然数 n 证明 3^n-1 是 2 的倍数.

证明

- $3^0-1=1-1=0$ 是 2 的倍数. 所以, 当 $n=0$ 时命题成立.
- 我们假设 $n=k$ 时命题成立, 即 3^k-1 是 2 的倍数.
- 接下来证明 $n=k+1$ 时命题也成立.

$$3^{k+1}-1=2\cdot 3^k+(3^k-1)$$

$2\cdot 3^k$ 是 2 的倍数. 由归纳假设，3^k-1 是 2 的倍数. 又因为 $2\cdot 3^k$ 也是 2 的倍数, 所以 $3^{k+1}-1$ 是 2 的倍数.

因此，对于任意自然数 n，都有 3^n-1 是 2 的倍数. ∎

第二数学归纳法

有些命题用第一归纳法证明不大方便，可以用第二归纳法证明.

第二数学归纳法的证明步骤是：

1. 证明当 $n = 1$ 时命题成立.
2. 假设 $n \leq k$ 时命题都成立.
3. 由归纳假设推出 $n = k + 1$ 时命题也成立.

提纲

在数学中经常碰到若干个数连加的情况

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

为了简便起见，我们通常记成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2}$$

称 $\sum$ 为连加号，而连加号上下的写法表示 i 的取值由 1 到 n.
例如

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2,$$

这里的 i 称为求和指标, 它只起一个辅助的作用.
把 (2) 还原成 (1) 时，它是不出现的. 譬如说, (1)也可以记成

$$\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

因之, 只要不与连加号中出现的其它指标相混, 用什么字母作为求和指标是任意的.

提纲

整数的可除性理论

用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数组成的数集.

整数有加法, 减法和乘法等运算, 减法是加法的逆运算.

- 带余除法
- 整除
- 最大公因数
- 辗转相除法
- 互素
- 素数
- 因数分解定理
- 最小公倍数

带余除法

在 $\mathbb{Z}$ 中不能作除法, 但是有以下的带余除法.

定理 1

对于任意两个整数 a, b, 其中 $b \neq 0$, 存在一对整数 q, r 满足

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leqslant r < |b|$$

而且满足这个条件的整数 q, r 是唯一的.

定义

- q 称为 b 除 a 的商,
- r 称为 b 除 a 的余数.

定义

对于整数 a, b, 如果存在一个整数 c 使得 $a = bc$, 则称

- b 是 a 的因数,
- a 是 b 的倍数.

注

在定义中我们并不要求 $b \neq 0$.

性质

当 $b \neq 0$ 时, b 是 a 的因数的充分必要条件是 b 除 a 所得的余数为 0.

因此 b 是 a 的因数, 也称 b 整除 a, 记作 $b|a$.

关于整除，有以下一些性质：

性质

1. 如果 $a|b, b|a$, 则 $a = \pm b$
2. 如果 $a|b, b|c$, 则 $a|c$
3. 如果 $a|b, a|c$, 则对任意整数 k, l 都有 $a|kb + lc$

注

- 如果 $a|b$, 则有 $-a|b$ 及 $a|(-b)$, 因此以后我们只讨论非负整数的非负因数和非负倍数，不再加以说明.
- 根据定义，每个整数都是 *0* 的因数，但是 *0* 不是任何非零整数的因数.

定义

如果 a 既是 b 的因数，又是 c 的因数，则称 a 是 b 和 c 的一个公因数.

公因数中最重要的是最大公因数.

定义

对于整数 a 和 b, 如果整数 d 满足

1. d 是 a 和 b 的一个公因数, 且
2. a, b 的任一个公因数都是 d 的因数,

则称 d 是 a, b 的一个最大公因数.

注

- 根据定义，如果 d_1, d_2 都是 a, b 的最大公因数, 那么 $d_1 \mid d_2, d_2 \mid d_1$. 从而 $d_1 = \pm d_2$. 按规定 d_1, d_2 皆非负, 故 $d_1 = d_2$.
- 当 $b \mid a$ 时, b 是 a 与 b 的最大公因数.
- 特别地当 $b = 0$ 时, a 是 a 与 b 的一个最大公因数.
- 当 a, b 不全为零时, a, b 的最大公因数不为 0, 这时我们规定: 以 (a, b) 表示 a, b 的正的最大公因数. 在这个规定下，(a, b) 是唯一的.

辗转相除法

设 $b \neq 0$, 即 $b > 0$. 反复应用带余除法.

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ &\cdots & \cdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + 0 \end{aligned}$$

直到出现余数为零而终止. 则有

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{k-1}, r_k) = r_k$$

从上面的算法中还可以找到整数 u, v 使得

$$(a, b) = ua + vb$$

这是最大公因数的重要性质.

定义

如果整数 a, b 的最大公因数等于 *1*, 则称 a, b **互素** *(也称互质)*.

例如，3 与 5 互素, 21 与 40 互素.

互素有以下一些重要性质:

1. a, b 互素的充分必要条件是存在整数 u, v 使

$$u\,a + v\,b = 1$$

2. 如果 $a|bc$, 且 $(a, b) = 1$, 则 $a|c$.
3. 如果 $a|c, b|c$ 而且 $(a, b) = 1$, 则 $ab|c$
4. 如果 $(a, c) = 1, (b, c) = 1$, 则 $(ab, c) = 1$

这些性质说明了互素的重要性.

注

对于整数 $c \neq 1$, 如果存在整数 u, v 使 $u\,a + v\,b = c$, 这不意味着 c 是 a 和 b 的最大公因数. 试试自己举出反例.

定义

设 a 是一个大于 *1* 的整数. 如果除去 *1* 和本身外， a 没有其它因数, 那么称 a 是一个素数(也称质数).

例如 2, 3, 5, 23 等都是素数.

从定义可知, 如果 p 表示成 $p = a \cdot b$, 则必有 $a = 1, b = p$ 或 $a = p, b = 1$

性质

1. 一个素数 p 和任一个整数 a 都有 或者 $p|a$, 或者 $(p, a) = 1$.
2. 如果素数 $p|ab$, 那么 $p|a$ 或 $p|b$.
3. 如果一个大于 *1* 的整数 p 和任何整数 a 都有 $p|a$ 或$(p, a) = 1$, 则 p 是一个素数.
4. 如果大于 *1* 的整数 p 具有下述性质: 对任何整数 a, b 从 $p|ab$ 可推出 $p|a$ 或 $p|b$, 则 p 是一个素数.

如果一个素数 p 是整数 a 的一个因数，则 p 称为 a 的一个素因数.

根据互素及素数的性质, 应用数学归纳法可以证明整数的一个基本定理.

定理 2 (因数分解及唯一性定理)

任一个大于 1 的整数 a 可以分解成有限多个素因数的乘积:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s$$

而且分解法是唯一的，即如果有两种分解法:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t$$

其中 $p_1, \cdots, p_s; q_1, \cdots, q_t$ 都是素数, 那么有 $s = t$, 并且重新将 $q_1, \cdots, q_t$ 适当排序后，可得 $p_i = q_i, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$

在 a 的分解式中, 将同一个素因数合并写成方幂, 并且将素因数按大小排列, 得到

$$a = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \cdots p_r^{\ell_r}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_r, l_i > 0, i = 1, \cdots, r.$$

这种表示法称为 a 的标准分解式.

可以应用整数的分解式来判断整除性及计算最大公因数.

现在将整数 a , b 的因数合在一起, 设为 $p_1, p_2, \cdots, p_t$, 并设

$$\begin{cases} a = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \cdots p_t^{\ell_t}, & \ell_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, t \\ b = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_t^{d_t}, & d_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, t \end{cases} \tag{3}$$

则

1. a 能整除 b 的充分必要条件为 $\ell_i \leqslant d_i, i = 1, 2, \cdots, t$
2. $(a, b) = p_1^{\min(\ell_1, d_1)} p_2^{\min(\ell_2, d_2)} \cdots p_t^{\min(\ell_t, d_t)}$

定义

设 a, b 是两个非负整数. m 是 a, b 的一个公倍数 (按前面约定, 也是非负的). 如果 a, b 的任一个公倍数都是 m 的倍数, 则 m 称为 a, b 的一个**最小公倍数**.

注

- 由定义可看出 a, b 的最小公倍数是唯一的, 记作 $[a, b]$.
- 当 a, b 是正整数时, 从它们的标准分解式可以求出最小公倍数. 设 a , b 的分解如 (3)，则

$$[a, b] = p_1^{\max(l_1, d_1)} p_2^{\max(l_2, d_2)} \cdots p_t^{\max(p_t, d_t)}$$

- 由此还可看出

$$ab = (a, b) \cdot [a, b]$$

例 4 (思考题)

一个整数能被 3 整除当且仅当这个数的数字和能被 3 整除.

例 5 (思考题)

一个数字能被 7 整除当且仅当其末 3 位与末 3 位之前的数字之差能被 7 整除.

提纲

高中的时候，定义了

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

然后形如：

$$a + b\,\mathrm{i} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

这样的数就是复数. 全体复数的集合记为

$$\mathbb{C} = \{a + b\,\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

有了复数之后，开方运算就不再局限于大于零的数了，这样一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

就总是有解了：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 定义 $\mathbb{C}$ 内的加法

$$(a+bi)+(c+d\,\mathrm{i}) := (a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$$

- 定义 $a+b\,\mathrm{i}$ 的负数 $-(a+b\,\mathrm{i})$ 是 $(-a)+(-b)\,\mathrm{i}$
- 定义 $\mathbb{C}$ 内的减法

$$(a+b\,\mathrm{i})-(c+d\,\mathrm{i}) = (a-c)+(b-d)\,\mathrm{i}$$

- 定义 $\mathbb{C}$ 内的乘法

$$(a+b\,\mathrm{i})(c+d\,\mathrm{i}) = (ac-bd)+(ad+bc)\,\mathrm{i}$$

- 定义 $a+b\,\mathrm{i}$ 的倒数或逆

$$\frac{1}{a+b\,\mathrm{i}} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-b\,\mathrm{i}) = \frac{a-b\,\mathrm{i}}{a^2+b^2}$$

- $\mathbb{C}$ 内的除法是 (设 $c+d\,\mathrm{i}\neq 0$)

$$\frac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}} = (a+b\,\mathrm{i})\frac{1}{c+d\,\mathrm{i}} = (a+b\,\mathrm{i})\frac{c-d\,\mathrm{i}}{c^2+d^2}$$

复数的表示：实部、虚部、共轭、模

定义

对于复数 $z = a + b\mathrm{i}$, 其中 a, b 是实数.

- a 称为 z 的实部, 记为 $Re\,z$
- b 称为 z 的虚部, 记为 $\mathit{Im}\,z$
- 复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 的共轭 $\bar{z} := a - b\mathrm{i}$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 称为 $a + b\mathrm{i}$ 的模或绝对值.

性质

- $z\bar{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2.$
- $z + \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a.$
- $z - \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i}.$

定义

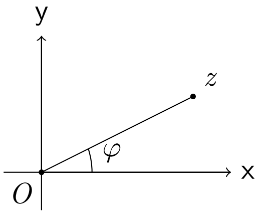
一个复数 $z = a + b\,\mathrm{i}$ 的辐角是指将 Ox 轴正方向沿逆时针方向旋转到 Oz 的旋转角 φ .

辐角的值不是唯一确定的，可以加上 2π 的任意整数倍.

因为 $a = |z|\cos\varphi, b = |z|\sin\varphi$, 故有

$$z = a + b\,\mathrm{i} = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

上式称为复数的三角表示.



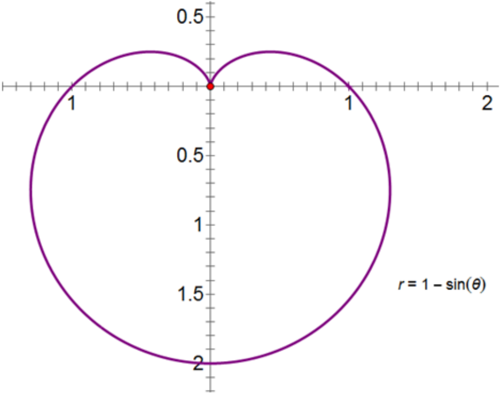


图: 笛卡尔心形线

如果复数

$$\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \quad \beta = |\beta|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi),$$

那么它们的乘积

$$\begin{aligned}
\alpha\,\beta &= |\alpha||\beta|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= |\alpha||\beta|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\,\mathrm{i}) \\
&= |\alpha||\beta|(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi))
\end{aligned}$$

上式表示, 两个复数相乘时,

- 其模为这两个复数的模相乘,
- 其辐角相加 (因为三角函数以 2 π 为周期, 故把相差 2 π 的整数倍的角认为是相同的).

欧拉公式

令模为 1 的复数

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,$$

上式称为欧拉公式.

因而位于以坐标原点 O 为中心的单位圆上，其辐角为 φ. 于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}.$$

当 φ 为 π 时,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1.$$

将数学内 4 个极重要的数 e, i, π, -1 连起来.

方程 $x^n - 1 = 0$ 的解

给定一个正整数 n, 考虑下面 n 个复数

$$\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.
这 n 个复数就是以原点 O 为中心的单位圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.
由欧拉公式可知,

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^n = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\sin 2k\pi = 1.$$

因此，这 n 个复数恰为 n 次代数方程

$$x^n - 1 = 0$$

在复数系 $\mathbb{C}$ 内的 n 个根, 称为 n 次单位根.