2017-2018 学年第一学期期末试卷 A

一、填空题：

1. n 级排列中，偶排列的个数为____________.

2. 若 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 的逆序数为 k，则 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数为____________.

3. 设 A,B 均为 3 阶方阵，$|A|=-2,|B|=3$，则 $\left|2|A|B\right|=$ _______.

4. 设 A 是一个 n 阶方阵，若 $r(A)=n-1$，则 $r(A^*)=$____________.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2&5&3\\1&2&a\\-2&0&4\end{pmatrix}$，$B$ 是 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $a=$_______.

6. 设方阵 A 满足 $A^2+2A+3E=0$，则 $A^{-1}=$ ____________.

7. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，秩为 r，则以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的一组基础解系所含向量的个数为_________.

8. 若 $\beta=(1,2,t)$ 不能由 $\alpha_1=(2,1,1),\alpha_2=(-1,2,7),\alpha_3=(1,-1,-4)$ 线性表出，则 t 满足________.

9. 设 A,B 都是可逆矩阵，则矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为___________.

10. 向量组 $\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$ 的一个极大线性无关组为_____________.

二、计算题：

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1&1&1\\0&2&1&\cdots&1&1&1\\1&0&2&\cdots&1&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2&1&1\\1&1&1&\cdots&0&2&1\\1&1&1&\cdots&1&0&2\end{vmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求与 A 可交换的矩阵的全体.

3. 求 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5=1\\x_1+2x_3+2x_4+2x_5=3\\2x_1+2x_2+4x_3+3x_4+3x_5=a\\3x_1+8x_2+6x_3+2x_4+2x_5=b\end{cases}$ 有解;有解时，求通解.

4. 设 3 阶方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$, 且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$,

求矩阵 B .

三、证明题：

1. 证明 n 级行列式 $\begin{vmatrix}6&1&0&\cdots&0&0\\8&6&1&\cdots&0&0\\0&8&6&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&6&1\\0&0&0&\cdots&8&6\end{vmatrix}=2^{2n+1}-2^n$.

2. 设 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵，证明:若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$.

3. 两个向量组有相同的秩，且其中一个可由另一个线性表出，证明这两个向量组等价.

2017-2018 学年 第一学期 期末试卷 B

一、填空题：

1. 排列 $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为__________.

2. 若 9 级排列 $9i4813j65$ 是奇排列，则 $i=$______, $j=$______ .

3. $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 3 & 2 \\ x & x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & x & -1 \\ -1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数是__________， x^3 的系数是__________.

4. 设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$__________.

5. 设 $\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(a,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$，且 $3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0$，则 $a=$________.

6. 向量组 $\alpha_1=(1,0,1,2),\alpha_2=(1,1,3,1),\alpha_3=(2,-1,a+1,5)$ 线性相关，则 $a=$____.

7. 向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4),\alpha_2=(2,0,-1,1),\alpha_3=(6,0,0,5)$ 的秩为________.

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______________.

9. 设 A,B 均为 3 阶方阵，满足 $AB-A+2B=0$，若 $|A+2E|=2$，则 $|B-E|=$____.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n=$____________ .

二、计算题：

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a \end{vmatrix}$.

2. 求 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷多个解?在有解时求解.

3. 求方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_3+2x_4+2x_5=3 \end{cases}$ 的通解.

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足

$AXA-BXB=AXB-BXA+E$，求 X.

三、证明题：

1. 证明: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x^n$.

2. 设 A,B 都是 n 阶可逆阵，且 $A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，证明

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 有相同的秩，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 等价.