2016-2017 学年第一学期期末试卷 A

一、填空题：

1. 若 9 级排列 $63s479k18$ 为奇排列，则 $s=$________, $k=$________.

2. 排列 $(2n-1)(2n-3)\cdots 31246\cdots(2n)$ 的逆序数为______________.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$____________________________.

4. 设 A 是 3 阶方阵，$|A|=2$，则 $\left|A^{-1}+A^{*}\right|=$________ .

5. $n(n\geq 5)$ 级行列式中有一个 $n-2$ 级子式的元素全为零，则此 n 级行列式的值为 ________.

6. 一个齐次线性方程组中有 n_1 个方程，n_2 个未知量，系数矩阵的秩为 n_3，若方程组有非零解，则基础解系所含向量的个数为_________.

7. a 满足_________，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=a \end{cases}$ 无解.

8. 在向量空间中，若向量 α 可由任一向量组线性表出，则 $\alpha=$______.

9. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^4=0$，则 $(E-A)^{-1}=$________________ .

10. n 阶矩阵 A 可写成一个对称阵与一个反对称阵的和，此表达式为 ____.

二、计算题：

1. 求向量组 $\alpha_1=(1,1,4,2),\alpha_2=(1,-1,-2,4),\alpha_3=(0,2,6,-2)$，$\alpha_4=(3,-1,3,4)$，$\alpha_5=(1,0,4,7)$ 的秩和一个极大线性无关组.

2. 设 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1+a_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_3 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1+a_{n-1} & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1+a_n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. a,b 取什么值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$ 无解？有解？有解时，求通解.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，若 $2XA-2AB=X-B$，求矩阵 X .

三、证明题：

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，证明 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一.

2. 设 A 是一 $s\times n$ 阵，证明: 存在一个非零的 $n\times m$ 阵 B 满足 $AB=0$ 当且仅当 A 的秩 $r(A)<n$.

3. 设 A,B 都是 $s\times n$ 阵，证明 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$.

2016-2017 学年 第一学期 期末试卷 B

一、填空题：

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，则 $AB-BA=$__________ .

2. 三阶行列式的第三行的元素为$1,2,3$，其对应的余子式分别为$3,2,1$，则此行列式的值为__________.

3. 若$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=2016$，则$\begin{vmatrix}a_{12}+a_{11} & a_{11} & a_{13}\\ a_{22}+a_{21} & a_{21} & a_{23}\\ a_{32}+a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=$__________.

4. 向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩等于__________.

5.方程组$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\ x_2-x_3=a_2,\\ x_3-x_1=a_3\end{cases}$有解的充要条件是__________.

6. 设A,B都是3阶方阵，$|A|=3,|B|=4$，则$\begin{vmatrix}0 & A\\ B & 0\end{vmatrix}=$__________.

7. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=$__________.

8. 使得9级排列$1i74j56k9$是奇排列的i,j,k的取值共有__________组.

9. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是$3$阶方阵，$|A|=1$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_2,\alpha_3)$，则$|B|=$__________.

10. 设$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=s$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$的一个极大无关组为

____________________.

二、计算题：

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\3&2&3&\cdots&3\\3&3&3&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}$.

2. 设 $\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,a),\alpha_3=(1,a+2,-2)$，$\beta_1=(1,3,4)$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，$\beta_2=(0,1,2)$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，求 a 的值.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

4. 设 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B .

三、证明题：

1. 假设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，证明：表示法唯一的充要条件是

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

2. 设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^2=A$，若 $A\neq E$，证明 A 不可逆.

3. 设 A,B 都是 $s\times n$ 矩阵，证明 $r(A,B)\leq r(A)+r(B)$.