Chapter 5

生成函数

5.1 引论

生成函数是一种既简单又有用的数学方法, 它最早出现于 19 世纪初. 对于组合计数问题, 生成函数是一种最重要的一般性处理方法. 它的中心思想是: 对于一个有限或无限数列用幂级数

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

使之成为一个整体, 然后通过研究幂级数 $A(x)$, 导出数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的构造和性质. 我们称 $A(x)$ 为序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的生成函数, 并记为 $G\{a_n\}$. 实际上, 在第 3 章中我们已经使用过生成函数方法. 组合数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$$

的生成函数为

$$f_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

由二项式定理知

$$f_n(x) = (1 + x)^n$$

通过对 $(1 + x)^n$ 的运算, 可以导出一系列组合数的关系式, 例如

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

等等. 由恒等式

$$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$$

可以推导出 Vandermonde 恒等式

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

下面再看一个例子.

例 **1** 投掷一次骰子, 出现点数 $1,2,\cdots,6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$. 问连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少? 解一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i,j)(1\leqslant i,j\leqslant 6)$, 共有 $6^2=36$ 种可能. 由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能: $(4,6),(5,5),(6,4)$, 所以概率为 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. 如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了. 这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径. 我们用多项式

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

表示投掷一次可能出现点数 $1,2,\cdots,6$, 观察

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$$

从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n, 使

$$x^m\cdot x^n=x^{10}$$

即是两次投掷分别出现点数 m,n, 且 $m+n=10$. 由此得出, 展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数. 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}$$

中 x^{30} 的系数. 而

$$\begin{aligned}&\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}\\&=x^{10}\left(1-x^6\right)^{10}(1-x)^{-10}\\&=x^{10}\cdot\textstyle\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6i}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10-1+i}{i}x^i\end{aligned}$$

所以, x^{30} 的系数为

$$\binom{29}{20}-\binom{23}{14}\binom{10}{1}+\binom{17}{8}\binom{10}{2}-\binom{11}{2}\binom{10}{3}=2930455$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}}\approx 0.0485$$

5.2 形式幂级数

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题. 为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念. 我们称幂级数 (5.2.2) 是形式幂级数, 其中的 x 是末定元, 看作是抽象符号. 对于实数域 $\mathbf{R}$ 上的数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

x 是 $\mathbf{R}$ 上的末定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

称为 $\mathbf{R}$ 上的形式幂级数. 一般情况下, 形式幂级数中的 x 只是一个抽象符号, 并不需要对 x 赋予具体数值, 因而就不需要考虑它的收敛性. $\mathbf{R}$ 上的形式幂级数的全体记为 $\mathbf{R}[[x]]$. 在集合 $\mathbf{R}[[x]]$ 中适当定义加法和乘法运算, 便可使它成为一个整环, 任何一个形式幂级数都是这个环中的元素. **定义 5.2.1** 设 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 $\mathbf{R}$ 上的两个形式幂级数, 若对任意 $k \geqslant 0$, 有 $a_k = b_k$, 则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等, 记作 $A(x) = B(x)$.

定义 5.2.2 设 α 为任意实数, $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbf{R}[[x]]$, 则将

$$\alpha A(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k)\, x^k$$

叫作 α 与 $A(x)$ 的数乘积.

定义 5.2.3 设 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 $\mathbf{R}$ 上的两个形式幂级数, 将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相加定义为

$$A(x) + B(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)\, x^k$$

并称 $A(x) + B(x)$ 为 $A(x)$ 与 $B(x)$ 的和, 把运算 “+” 叫作加法. 将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相乘定义为

$$A(x) \cdot B(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k)\, x^k$$

并称 $A(x) \cdot B(x)$ 为 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的积, 把运算 $\cdot$ 叫作乘法.

定理 5.2.1 集合 $\mathbf{R}[[x]]$ 在上述加法和乘法运算下构成一个整环.

定理 5.2.2 对 R[[x]] 中的任意一个元素 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, A(x)$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0\neq 0$. 若 $\widetilde{A}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_kx^k$ 是 $A(x)$ 的乘法逆元, 则有

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= {a_0}^{-1},\\
\tilde{a}_k &= (-1)^k a_0^{-(k+1)}\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k\\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1}\\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1
\end{vmatrix}\quad (k\geqslant 1).
\end{aligned}
$$

在整环 $\mathbf{R}[[x]]$ 上还可以定义形式导数.

定理 5.2.2 对于任意 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\in\mathbf{R}[[x]]$, 规定

$$\mathrm{D}A(x)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$$

称 $\mathrm{D}A(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数.

$A(x)$ 的 n 次形式导数可以递归地定义为

$$
\begin{cases}
\mathrm{D}^0A(x)\equiv A(x)\\
\mathrm{D}^nA(x)\equiv \mathrm{D}\left[\mathrm{D}^{n-1}A(x)\right]\quad (n\geqslant 1)
\end{cases}
$$

形式导数满足如下规则:

(1) $\mathrm{D}[\alpha A(x)+\beta B(x)]=\alpha\mathrm{D}A(x)+\beta\mathrm{D}B(x)$

(2) $\mathrm{D}[A(x)\cdot B(x)]=A(x)\mathrm{D}B(x)+B(x)\mathrm{D}A(x)$

(3) $\mathrm{D}\left[A^n(x)\right]=nA^{n-1}(x)\mathrm{D}A(x)$

证明规则 (1) 由定义可以直接得出, 而规则 (3) 则是规则 (2) 的推论. 现证明规则 (2). 显然有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}[A(x)\cdot B(x)] &= \mathrm{D}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^{k-1}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i+j=k}(i+j)a_ib_jx^{i+j-1}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i+j=k}\left(ia_ix^{i-1}\right)b_jx^j+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i+j=k}\left(a_ix^i\right)\left(jb_jx^{j-1}\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}ia_ix^{i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\right)+\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}jb_jx^{j-1}\right)\\
&=A(x)\mathrm{D}B(x)+B(x)\,\mathrm{D}\,A(x).
\end{aligned}
$$

由此可知, 形式导数满足微积分中求导运算的规则, 当某个形式幂级数在某个范围内收敛时, 形式导数就是微积分中的求导运算. 为了书写方便, 以后用 $A'(x), A''(x),\cdots$ 分别代表 $\mathrm{D}A(x),\mathrm{D}^{(2)}A(x),\cdots$.

5.3 生成函数的性质

生成函数与数列之间是一一对应的. 因此, 若两个生成函数之间存在某种关系, 那么相应的两个数列之间也必然存在一定的关系; 反之亦然. 设数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的生成函数为 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, 数列 $\{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$ 的生成函数为 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, 我们可以得到生成函数的如下一些性质:

性质 1 若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < l) \\ a_{k-1} & (k \geqslant l) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^l \cdot A(x)$$

证明: 由假设条件, 有

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\ &= a_0 \cdot x^l + a_1 \cdot x^{l+1} + \cdots + a_n \cdot x^{l+n} + \cdots \\ &= x^l \cdot (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^m + \cdots) \\ &= x^l \cdot A(x) \end{aligned}$$

性质 2 若 $b_k = a_{k+l}$, 则

$$B(x) = \frac{1}{x^i} \left[A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k \right]$$

证明: 类似于性质 1 的证明.

性质 3 若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

证明: 由假设条件, 有

$$\begin{aligned} & b_0 = a_0, \\ & b_1 x = a_0 x + a_1 x \\ & b_2 x^2 = a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2 \\ & \cdots, \\ & b_k x^k = a_0 x^k + a_1 x^k + a_2 x^k + \cdots + a_k x^k, \\ & \cdots. \end{aligned}$$

把以上各式的两边分别相加, 得

$$\begin{aligned} B(x) =& a_0 \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) + a_1 x \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\ & + a_2 x^2 \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) + \cdots \\ =& \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\ =& \frac{A(x)}{1-x} \end{aligned}$$

性质 4 若 $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$, 则

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}$$

这里, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ 是收敛的.

证明: 因为 $A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛, 所以 $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ 是存在的. 于是有

$$\begin{aligned}
& b_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = A(1) \\
& b_1 x = a_1 x + a_2 x + \cdots = [A(1) - a_0]\, x \\
& b_2 x^2 = a_2 x^2 + a_3 x^2 + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1]\, x^2 \\
& \cdots, \\
& b_k x^k = a_k x^k + a_{k+1} x^k + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}]\, x^k \\
& \cdots
\end{aligned}$$

把以上各式的两边分别相加, 得

$$\begin{aligned}
B(x) =& A(1) + [A(1) - a_0]\, x + [A(1) - a_0 - a_1]\, x^2 + \cdots \\
& + [A(1) - a_0 - \cdots - a_{k-1}]\, x^k + \cdots \\
=& A(1)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) - a_0 x\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\
& - a_1 x^2\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) - \cdots - a_{n-1} x^n\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) - \cdots \\
=& \left[A(1) - x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)\right] \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\
=& \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}
\end{aligned}$$

性质 5 若 $b_k = k a_k$, 则

$$B(x) = xA'(x)$$

证明: 由 $A'(x)$ 的定义知

$$xA'(x) = x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x)$$

性质 6 若 $b_k = \frac{a_k}{k+1}$, 则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$$

证明: 由假设条件, 有

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k \ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x b_k (k+1) t^k \ \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = x \cdot B(x)$$

性质 7 若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x)$$

性质 8 若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x)$$

性质 7 和性质 8 可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出.

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和. 下面列出常见的几个数列的生成函数:

(1) $G\{1\} = \frac{1}{1-x}$;

(2) $G\left\{a^k\right\} = \frac{1}{1-ax}$;

(3) $G\{k\} = \frac{x}{(1-x)^2}$

(4) $G\{k(k+1)\} = \frac{2x}{(1-x)^3}$

(5) $G\left\{k^2\right\} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

(6) $G\{k(k+1)(k+2)\} = \frac{6x}{(1-x)^4}$

(7) $G\left\{\frac{1}{k!}\right\} = \mathrm{e}^x$;

(8) $G\left\{\binom{\alpha}{k}\right\} = (1+x)^\alpha$

(9) $G\left\{\binom{n+k}{k}\right\} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$

下面证明其中的几个生成函数, 而生成函数 (8) 和 (9) 可参见定理 3.1.2 及其分析.

证明: (3) 易知

$$\begin{aligned} G\{k\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \\ &= x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(5) 易知

$$
\begin{aligned}
G\left\{k^2\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k x^k \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

(6) 设

$$
G\{k(k+1)(k+2)\} = A(x)
$$

则

$$
\begin{aligned}
\int_0^x tA(t)\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x k(k+1)(k+2) t^{k+1}\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) x^{k+2} \\
&= x^2 \cdot \frac{2x}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

所以

$$
xA(x) = \left[\frac{2x^3}{(1-x)^3}\right]' = \frac{6x^2}{(1-x)^4}
$$

故

$$
A(x) = \frac{6x}{(1-x)^4}
$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和，下面的两个例子说明了一些求解方法.

例 1 已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$
A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x}
$$

求 a_n.

解 用部分分式的方法得

$$
A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} + 3x
$$

而

$$
\frac{2}{1-2x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n
$$

所以有

$$
a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}
$$

例 2 计算级数

$$1^2+2^2+\cdots+n^2$$

的和.

解 由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列 $\{n^2\}$ 的生成函数为

$$A(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

此处, $a_k=k^2$. 令

$$b_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

则

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

由性质 3 即得数列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned}B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\frac{A(x)}{1-x}&=\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}\\&=\left(x+x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{k}x^k\end{aligned}$$

比较等式两边 x^n 的系数, 便得

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2=b_n\quad&\binom{n+2}{3}+\binom{n-1}{3}\\&=\binom{n+2}{n-1}+\binom{n+1}{n-2}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

5.4 组合型分配问题的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题.

1.4.1 组合数的生成函数

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

(1) 求 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的 k 组合数;

(2) 求 $\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 组合数;

(3) 求 $\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$ 的 10 组合数.

其中, 问题 (1) 是普通集合的组合问题; 问题 (2) 转化为不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非负整数解的个数问题; 问题 (3) 是利用容斥原理在 $M=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,,\ \infty\cdot c\}$ 中求不满足下述三个性质:

P_1 : 10 组合中 a 的个数大于或等于 4 ;

P_2 : 10 组合中 b 的个数大于或等于 5 ;

P_3 : 10 组合中 c 的个数大于或等于 6

的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同. 下面我们将看到, 引入生成函数的概念后，上述三类组合问题可以统一地处理.

我们先从问题 (2) 开始. 令

$$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$$

的 k 组合数为 b_k. 考虑 n 个形式算级数的乘积

$$\underbrace{\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\cdots\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)}_{n\text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个 x^k 均为

$$x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n} = x^k \quad (m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k)$$

其中, $x^{m_1}, x^{m_2}, \cdots, x^{m}$. 分别取自代表 a_1 的第一个括号, 代表 a_2 的第二个括号, $\cdots\cdots$, 代表 a_n 的第 n 个括号 ; $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 分别表示取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的个数. 于是, 每个 x^k 都对应着多重集合 M 的一个 k 组合. 因此

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^n$$

中 x^k 的系数就是 M 的 k 组合数 b_k. 由此得出序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^n = \frac{1}{(1 - x)^n}$$

从而

$$b_k = \binom{n - 1 + k}{k}$$

这时, 我们再次得到了第 2 章中多重集合 M 的 k 组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的.

用生成函数方法解问题 (3) 尤为简单. 将 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 k 组合数记为 $b_k, \{b_k\}$ 的生成函数就是

$$\left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$$

其原因是展开式中的 x^k 必定为

$$x^{m_i} x^{m_2} x^{m_3} = x^k \quad (m_1 + m_2 + m_3 = k)$$

由于 $x^{m_i}, x^{m_2}, x^{m_3}$ 分别取自第一、第二. 第三个括号, 故 $0 \leqslant m_1 \leqslant 3, 0 \leqslant m_2 \leqslant 4$, $0 \leqslant m_3 \leqslant 5$, 于是每个 x^k 对应集合 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的一个 k 组合. 特别令 $k = 10$, 则

$$\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2+x^3\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\\
&\quad=\left(1-x^4\right)\cdot\left(1-x^5\right)\cdot\left(1-x^6\right)\cdot\tfrac{1}{(1-x)^3}\\
&\quad=\left(1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15}\right)\cdot\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n+2 \\ n \end{pmatrix}x^n
\end{aligned}$$

所以, x^{10} 的系数 b_{10} 为

$$\begin{aligned}
b_{10} =& \begin{pmatrix} 10+2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6+2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5+2 \\ 5 \end{pmatrix}\\
&- \begin{pmatrix} 4+2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+2 \\ 0 \end{pmatrix}\\
=&6
\end{aligned}$$

与第 4 章中用容斥原理得到的结果相同.

在普通集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 组合中, $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 或者出现或者不出现, 故该集合的 k 组合数序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$$

从而

$$b_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

综合以上分析, 我们得到:

定理 5.4.1 设从 n 元集合 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k, 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right)$$

例 1 求多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的每个 a_i 至少出现一次的 k 组合数 b_k.

解 由定理 5.4.1 知

$$M_i = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

于是

$$
\begin{aligned}
G\{b_k\} &= \left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n \\
&= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-k} x^k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k
\end{aligned}
$$

所以

$$
b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \dbinom{k-1}{n-1} & (k \geqslant n) \end{cases}
$$

1.4.2 组合型分配问题的生成函数

定理 5.4.2 把 k 个相同的球放人 n 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$
\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right)
$$

证明：不妨设盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中放人的球数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则

$$
x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, 1 \leqslant i \leqslant n)
$$

一种符合要求的放法相当于 $\boldsymbol{M} = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的一个 k 组合, 前面关于盒子 a_i 容量的限制转变成 k 组合中 a_i 出现次数的限制. 由定理 5.4.1 知, 组合型分配问题方案数的生成函数为

$$
\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m \in M,} x^m \right)
$$

例 2 求不定方程

$$
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20
$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

解 本问题相当于把 20 个相同的球放人 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$\boldsymbol{M}_1 = \{3, 4, \cdots\}$$
$$\boldsymbol{M}_2 = \{2, 3, \cdots\}$$
$$\boldsymbol{M}_3 = \{4, 5, \cdots\}$$
$$\boldsymbol{M}_4 = \{6, 7, \cdots\}$$
$$\boldsymbol{M}_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + x^4 + \cdots\right)\left(x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(x^4 + x^5 + \cdots\right) \\
&\cdot\left(x^6 + x^7 + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\
&\quad = x^{15} \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^5 \\
&\quad = x^{15} \cdot \tfrac{1}{(1-x)^5} \\
&\quad = x^{15} \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+4 \\ n \end{pmatrix} x^n
\end{aligned}$$

其中, x^{20} 的系数 $\begin{pmatrix} 5+4 \\ 5 \end{pmatrix} = 126$ 就是满足条件的整数解的个数.

补充题 求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3$, 则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即 $0 \le y_1 \le 4$, $0 \le y_2 \le 6$, $0 \le y_3 \le 5$, $0 \le y_4 \le 6$.

对应的生成函数为

$$\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 \\
&= \frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)^2}{(1-x)^4} \\
&= (1 - x^5 - x^6 - 2x^7 + x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13} + x^{14} - 2x^{18} - x^{19} - x^{20} + x^{25}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k
\end{aligned}$$

所以它的 x^{16} 的系数为

$$\begin{aligned}&\binom{16+3}{3}-\binom{11+3}{3}-\binom{10+3}{3}-2\binom{9+3}{3}+\binom{5+3}{3}+2\binom{4+3}{3}+2\binom{3+3}{3}+\binom{2+3}{3}\\&=969-364-286-2\times 220+56+2\times 35+2\times 20+10\\&=55\end{aligned}$$

补充题 1. 设有 2 红球，1 黑球，3 白球，若每次从中任取 3 个，有多少种不同的取法？

解 方法 1：

$$\begin{aligned}\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1+x+x^2+x^3\right)&=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\\&=\left(1-x^2-x^3+x^5\right)\left(1-x^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k\end{aligned}$$

x^3 的系数为 $\binom{5}{2}-\binom{3}{2}-\binom{2}{2}=10-3-1=6$

方法 2：$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,3)(0,1,2)(1,0,2)(1,1,1)(2,0,1)(2,1,0)$

补充题 2. 设有 1g，2g，3g，4g 的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边，问能称出多少种重量？(0g 不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$，故十种.

补充题 3. 用 1 分，2 分，3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

解 $1+1+1+1\quad 1+2+1\quad 1+3\quad 2+2$，故四种.

补充题 4. 求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数，其中要求苹果有偶数个 (包括 0 个)，香蕉有 5 的倍数个 (包括 0 个)，橘子不超过 4 个，梨最多一个.

解 $\left(1+x^2+\cdots+x^{2n}+\cdots\right)\left(1+x^5+\cdots+x^{5n}+\cdots\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)(1+x)=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot(1+x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$

故所求为 $n+1$ 种.

5.5 排列型分配问题的指数型生成函数

本节首先指出生成函数在求解排列型分配问题时的不足, 然后引入指数型生成函数以及在排列数中的应用.

1.5.1 排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数 x^k 改换成 $\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{x^k}{k!}=(1+x)^n$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念.

数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的指数型生成函数定义为形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

定理 5.5.1 多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中, 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right)$$

特别地, 数列 $\{1, 1, \cdots\}$ 的指数型生成函数 $e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质:

$$e(x)e(y) = e(x+y)$$

这是因为

$$\begin{aligned}
e(x)e(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= e(x+y)
\end{aligned}$$

特别有

$$e(x)e(-x) = e(0) = 1$$

从而

$$e(-x) = \frac{1}{e(x)}$$

例 1 多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) = e^n(x) = e(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k = n^k$$

例 2 由数字 $0, 1, 2, 3$ 组成的长为 k 的序列中, 要求含有偶数个 0 , 问这样的序列有多少个?

解 根据题意, 有

$$M_1 = M_2 = M_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$M_0 = \{0, 2, 4, \cdots\}$$

由定理 5.5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$= e^3(x)\cdot\tfrac{e(x)+e(-x)}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}[e(4x)+e(2x)]$$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$b_k = \frac{1}{2}\left(4^k + 2^k\right)$$

当 $k = 2$ 时, 满足题意的序列有 10 个, 它们是

$$00, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$$

例 3 由 $1, 2, 3, 4$ 能组成多少个 1 出现两次或三次，2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

解 根据题意, 有

$$M_1 = \{2, 3\}$$
$$M_2 = \{0, 1\}$$
$$M_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$M_4 = \{0, 2, 4, \cdots\}$$

由定理 5. 5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\left(\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}\right)\left(1+\tfrac{x}{1!}\right)\left(1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$
$$= \tfrac{x^2}{6}\left(3+4x+x^2\right)\cdot e(x)\cdot\tfrac{e(x)+e(-x)}{2}$$
$$= \tfrac{x^2}{12}\left(3+4x+x^2\right)[e(2x)+1]$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5!\times\frac{1}{12}\left(3\times\frac{2^3}{3!}+4\times\frac{2^2}{2!}+1\times\frac{1}{1!}\right) = 140$$

即满足题意的五位数有 140 个.

例 4 求 $M = \{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数。

解 根据题意，有

$$M_i = \{1, 2, 3, \cdots\} \qquad (1 \le i \le n).$$

由定理 5.5.1 知，排列数序列 $\{P_k\}$ 的指数型生成函数为

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n &= [e(x)-1]^n \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}e((n-i)x) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-i)^k x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\right]\frac{x^k}{k!}
\end{aligned}
$$

所以

$$
P_k = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k \quad (k \geq n).
$$

例 5 用红、白、蓝 3 种颜色给 $1\times n$ 棋盘着色，要求白色方格数是偶数，问有多少种着色方案？

解 将 $1\times n$ 棋盘的 n 个方格分别用 $1,2,\cdots,n$ 标记，第 i 个方格着 c 色看作把第 i 个物体放入 c 盒中. 这时，问题转化为：把 n 个不同的球放入 3 个不同的盒子中，各盒的容量集合分别为

$$
M_r = M_b = \{0,1,2,\cdots\},
$$

$$
M_w = \{0,2,4,\cdots\}.
$$

于是，分配方案数的指数型生成函数为

$$
\begin{aligned}
&(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right) \\
=&e(2x)\cdot\frac{e(x)+e(-x)}{2} \\
=&\frac{1}{2}[e(3x)+e(x)],
\end{aligned}
$$

其中，$\dfrac{x^n}{n!}$ 的系数 $\dfrac{1}{2}(3^n+1)$ 就是满足要求的着色方案数。

命题 1 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$，则 $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot k\cdot\frac{x^{k-1}}{k!}=\sum_{l=0}^{\infty}a_{l+1}\frac{x^l}{l!}$ 即 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x)$.

命题 2 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$，则 $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为 $f^{(i)}(x)$

命题 3 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$，则 $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{x^k}{(k-1)!} &= x\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= xf'(x) = x\frac{d}{dx}(f(x))
\end{aligned}
$$

命题 4 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$，$P(k)$ 为一个关于 k 的多项式，则 $\{P(k)a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为 $P\left(x\frac{d}{dx}\right)(f(x))$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{R=0}^{\infty} k^2 a_k \frac{x^k}{k!} &= x\left(\sum_k k a_k \frac{x^k}{k!}\right)' = x\left(x f'(x)\right)' \\
&= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}(f(x)) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^2(f(x))\right.
\end{aligned}
$$

命题 5 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$，$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$，则

$f(x)g(x)=\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^i}{j!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i!}\cdot\frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a_i b_{n-i}\right)\frac{x^n}{n!}$

即 $\left\{\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a_i b_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为 $f(x)g(x)$

命题 6 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$，$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$，$h(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}$ 则

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x)h(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a_i b_{n-i}\right)\frac{x^n}{n!}\right)h(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} d_n\cdot C_{m-n}\right)\frac{x^m}{m!}. \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a_i b_{n-i}\right) C_{m-n}\frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} m \\ i, n-i, m-n \end{pmatrix} a_i b_{n-i} C_{m-n}\right)\frac{x^m}{m!}.
\end{aligned}
$$

即 $\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i+j+k=m}\begin{pmatrix} m \\ i,j,k \end{pmatrix} a_i b_j c_k\right)\frac{x^m}{m!}\right\}$

补充题 1 确定每位数字都是奇数，且 1,3 出现偶数次的 n 位数的个数.

解

$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3$

$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot e^{3x}$

$=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)\cdot e^{3x}$

$=\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 5^k \frac{x^k}{k!}+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)$

$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(5^k+2\cdot 3^k+1\right)\frac{x^k}{k!}$

$\therefore [x^n]=\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right)$