第九章　欧几里得空间

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Outline

- 前面主要介绍了向量的线性运算，向量组的线性相关与线性无关性，并讨论了向量空间中的基、维数以及向量的坐标等概念.
- 但在向量空间中还没有涉及度量性质，即还没有考虑向量空间中的向量的大小、向量间的夹角等问题.
- 本章将在向量空间中引入内积的概念，并赋予相应的度量性质.

- 在几何空间中两个向量 a, b 的内积 (数量积) 定义为:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\theta,$$

其中 $|a|$, $|b|$ 是向量 a, b 的长度, θ 是向量 a, b 的夹角.

- 在建立空间直角坐标系后，有了向量的坐标表示，即

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$$

相应地，内积的计算公式为 $a \cdot b = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$

- 下面仿照该计算公式，在空间 $\mathbb{R}^n$ 引入中的内积概念.

定义

设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，对 V 中任意两个向量 α, β 定义一个二元实函数，记作 (α, β)，它具有满足以下性质

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ （对称性）
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ （左数乘性）
3. $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ （左可加性）
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0$，当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$. （正定性）

这里 α, β, γ 是 V 中任意的向量，k 是任意实数，则称 (α, β) 为 α 和 β 的内积，并称这种定义了内积的实数域 R 上的线性空间 V 为欧几里得空间，简称 欧氏空间.

例 1

在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

定义

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

验证 (α, β) 满足定义中的 4 个性质.

1. $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n b_i a_i = (\beta, \alpha)$
2. $(k\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (ka_i) b_i = \sum_{i=1}^n k (a_i b_i) = k(\alpha, \beta)$
3. 如果 $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\alpha + \beta = (a_1 + b_1 \ \ a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, 则 $(\alpha + \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) c_i = \sum_{i=1}^n a_i c_i + \sum_{i=1}^n b_i c_i = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
4. $(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^n a_i a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0$ 当且仅当 $a_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ 时，$(\alpha, \alpha) = 0$

因此，$\mathbb{R}^n$ 对于内积 (α, β) 就成为一个欧氏空间.

例 2

$C(a,b)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数所成线性空间，对于函数 $f(x), g(x)$, 定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

则 $C(a,b)$ 作成一个欧氏空间.

性质

设 V 为欧氏空间，$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$, $\forall k \in \mathbb{R}$

1. $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$,
2. $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$
3. $(0, \beta) = 0$
4. $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{m} l_j\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_i l_j (\alpha_i, \beta_j)$

注

- 在欧几里得空间的定义中，对它作为线性空间的维数并无要求，可以是有限维的，也可以是无限维的.
- 内积满足齐次性、可加性，这两条性质合在一起称为内积的双线性性. 即内积是实线性空间中的一个正定对称双线性函数.

二、欧氏空间中向量的长度

1. 引入长度概念的可能性

1）在 $\mathbb{R}^3$ 向量 α 的长度模

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$$

2) 欧氏空间 V 中, 对任意的 $\alpha \in V$, $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 使得 $\sqrt{\alpha \cdot \alpha}$ 有意义.

2. 向量长度的定义

定义

在欧氏空间 V 中，对任意向量 $\alpha \in V$, 称

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

为向量 α 的长度. 特别地，当 $|\alpha| = 1$ 时，称 α 为单位向量.

向量长度的简单性质

性质

1. $|\alpha| \geq 0;\qquad |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
2. $|k\alpha| = |k||\alpha|$
3. 如果 $\alpha \neq 0$, 则 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是一个单位向量.

通常称此过程为把 α 单位化.

三、欧氏空间中向量的角度

1. 引入夹角概念的可能性与困难

1）在 $\mathbb{R}^3$ 中向量 α 与 β 的夹角

$$<\alpha, \beta> = \arccos \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}$$

2）在一般欧氏空间中推广上面形式，首先应证明不等式:

$$\left| \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \right| \leq 1$$

柯西-布涅柯夫斯基不等式 (又称 “柯西-施瓦兹不等式”)

性质

对欧氏空间 V 中任意两个向量 α, β, 有

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$$

当且仅当 α, β 线性相关时等号成立.

- 对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

- 对于欧氏空间 $C(a, b)$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$$

证明 当 $\beta = 0$ 时， $(\alpha, 0) = 0, \quad |\beta| = 0$

因此， $(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| = 0.$ 结论成立.

当 $\beta \neq 0$ 时，作向量 $\gamma = \alpha + t\beta, \quad t \in \mathbb{R}$

由内积的正定性，对 $\forall t \in \mathbb{R},$ 皆有

$$(\gamma, \gamma) = (\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta)t^2 \geq 0$$

取 $t = -\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 代入上式, 得

$$(\alpha, \alpha) - 2(\alpha, \beta)\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} + (\beta, \beta)\frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2} \geq 0$$

即 $(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$ 两边开方，

即得 $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|.$

$$|(\alpha,\beta)| = |\alpha||\beta| \text{ 当且仅当 } \alpha,\beta \text{ 线性相关.}$$

- 当 α,β 线性相关时，不妨设 $\alpha = k\beta$. 于是,

$$|(\alpha,\beta)| = |(k\beta,\beta)| = |k(\beta,\beta)| = |k||\beta|^2$$

$$|\alpha||\beta| = |k\beta||\beta| = |k||\beta|^2$$

  因此 $|(\alpha,\beta)| = |\alpha||\beta|$. 等号成立.

- 反之，若等号成立，由以上证明过程知
  或者 $\beta = 0$, 或者 $\alpha - \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = 0$
  也即 α,β 线性相关. ∎

推论

对欧氏空间中的任意两个向量 α, β, 有

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

证明

$$\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) \\
&= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\
&\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2
\end{aligned}$$

两边开方，证毕. ∎

定义

设 V 为欧氏空间, α, β 为 V 中任意两非零向量，α, β 的夹角定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}, \quad (0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi)$$

定义

设 α, β 为欧氏空间中两个向量，若内积 $(\alpha, \beta) = 0$ 则称 α 与 β 正交或互相垂直，记作 $\alpha \perp \beta$.

注

- 零向量与任意向量正交.
- $\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$, 即 $\cos\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

性质 (勾股定理)

设 V 为欧氏空间，对任意的 $\alpha, \beta \in V$

$$\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

证明 因为

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) \\ &= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta) \end{aligned}$$

所以 $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) = 0 \Longleftrightarrow \alpha \perp \beta.$ ∎

推论

若欧氏空间 V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 两两正交,

即 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m,$ 有

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 .$$

例 3

已知 $\alpha = (2,1,3,2), \quad \beta = (1,2,-2,1)$ 在通常的内积定义下，求 $|\alpha|, (\alpha,\beta), \langle\alpha,\beta\rangle, |\alpha-\beta|$.

例 3

已知 $\alpha=(2,1,3,2),\quad \beta=(1,2,-2,1)$ 在通常的内积定义下，求 $|\alpha|,(\alpha,\beta),\langle\alpha,\beta\rangle,|\alpha-\beta|$.

解

- $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.
- $(\alpha,\beta)=2\times 1+1\times 2+3\times(-2)+2\times 1=0$.
- $\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}$.
- 因为 $\alpha-\beta=(1,-1,5,1)$,
  所以 $|\alpha-\beta|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

在解析几何中, 两个点 α 和 β 间的距离等于向量 $\alpha-\beta$ 的长度.

在欧氏空间中我们同样可引入

定义

长度 $|\alpha-\beta|$ 称为向量 α 和 β 的距离, 记为 $d(\alpha,\beta)$.

性质

距离的三条基本性质:

1. $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$
2. $d(\alpha,\beta)\geqslant 0$, 并且仅当 $\alpha=\beta$ 时等号才成立
3. $d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$ (三角形不等式) .

四、n 维欧氏空间中内积的矩阵表示

设 V 为欧氏空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基，对 V 中任意两个向量

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n,$$

有

$$(\alpha, \beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_i, \varepsilon_j)\, x_i y_j.$$

令 $a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j)\,, \quad i, j = 1, 2, \cdots n,$

令 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$,

于是, $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X'AY$

定义

称

$$A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

注

- 度量矩阵 A 是实对称矩阵.
- 由内积的正定性，度量矩阵 A 还是正定矩阵. 事实上，对 $\forall \alpha \in V, \alpha \neq 0$, 即 $X \neq 0$ 有 $(\alpha, \alpha) = X'AX > 0$. 因此，$A$ 为正定矩阵.
- 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下，向量的内积由度量矩阵 A 完全确定.

注

- 对同一内积而言，不同基的度量矩阵是合同的.

证明　设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 为欧氏空间 V 的两组基，它们的度量矩阵分别为 A、B，且

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\, C,$$

其中 $C = (c_{ij})_{n\times n} = (C_1, C_2, \cdots, C_n)$
于是，$\eta_i = \sum_{k=1}^n c_{ki}\varepsilon_k, i = 1, 2, \cdots, n$
因此，$(\eta_i, \eta_j) = \left(\sum_{k=1}^n c_{ki}\varepsilon_k, \sum_{l=1}^n c_{lj}\varepsilon_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\varepsilon_k, \varepsilon_l)\, c_{ki}c_{lj}$
$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}c_{ki}c_{lj} = C_i' A C_j$

所以 $B = ((\eta_i, \eta_j)) = (C_i' A C_j) = \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} A\, (C_1, C_2, \cdots, C_n) = C'AC$

§2 标准正交基的定义与求法

定义 (正交向量组)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是一组非零向量, 如果它们两两正交, 则称为**正交向量组**.

性质

正交向量组是线性无关的.

证明　设正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 有一线性关系

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

用 α_i 与等式两边作内积, 即得 $k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$

由 $\alpha_i \neq 0$, 有 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$, 从而 $k_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$.

这就证明了 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的. ∎

推论

n 维欧氏空间 V 中, 两两正交的非零向量的个数不会超过 n.

这个事实的几何意义是清楚的. 例如, 在平面上找不到三个两两垂直的非零向量; 在空间中, 找不到四个两两垂直的非零向量.

定义 (正交基)

在 n 维欧氏空间中, 由 n 个两两正交的非零向量构成的向量组称为 正交基. 由单位向量组成的正交基称为 标准正交基.

性质

- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是一个标准正交向量组 $\Longleftrightarrow$
$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
- 一组基是标准正交基 $\Longleftrightarrow$ 它的度量矩阵是单位矩阵.

性质

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基, 对 $\alpha, \beta \in V$, 设向量 α, β 的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$, 则

- $x_i = (\alpha, \varepsilon_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$
- $(\alpha, \beta) = X'Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

证明　由题设可知

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

用 ε_i 与等式两边作内积, 即得

$$x_i = (\alpha, \varepsilon_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因为

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$
$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n,$$

所以

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = X'Y.$$

三. 求标准正交基的办法–Schmidt 正交化方法

定理 1

n 维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是一正交向量组, 我们对 $n-m$ 作数学归纳法.

- 当 $n-m=0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 就是一组正交基了.
- 假设 $n-m=k$ 时定理成立，也就是说，可以找到向量 $\beta_1\ \beta_2, \cdots, \beta_k$, 使得

  $$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$$

  成为一组正交基.
- 现在来看 $n-m=k+1$ 的情形. 因为 $m<n$, 所以一定有向量不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出, 作向量

  $$\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_m\alpha_m$$

  这里 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是待定的系数.

用 α_i 与 α_{m+1} 作内积, 得

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = (\beta, \alpha_i) - k_i\,(\alpha_i, \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

取

$$k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

有

$$(a_i, \alpha_{m+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由 β 的选择可知 $, \alpha_{m+1} \neq 0$. 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 是一正交向量组, 根据归纳法假定, $\alpha_1, w_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 可以扩充成一正交基. 于是定理得证. ∎

在求欧氏空间的正交基时，常常是已经有了空间的一组基. 对于这种情形，有下面的结果:

定理 2

对于 n 维欧氏空间中任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 都可以找到一组标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, 使

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

证明 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一组基, 我们来逐个地求出向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$.

- 首先, 可取 $\eta_1 = \frac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1$.
- 一般地, 假定已经求出 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$, 它们是单位正交的, 具有性质
$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i), i = 1, 2, \cdots, m$$
- 下一步求 η_{m+1}. 因为 $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$, 所以 ε_{m+1} 不能被 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 线性表出.

按定理 1 证明中的方法，作向量

$$\xi_{m+1}=\varepsilon_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon_{m+1},\eta_i\right)\eta_i$$

显然

$$\xi_{m+1}\neq 0,\ \text{且}\left(\xi_{m+1},\eta_i\right)=0, i=1,2,\cdots,m$$

令

$$\eta_{m+1}=\frac{\xi_{m+1}}{\left|\xi_{m+1}\right|}$$

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,\eta_{m+1}$ 就是一单位正交向量组. 同时

$$L\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{m+1}\right)=L\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{m+1}\right)$$

由归纳法原理, 定理得证. ∎

注

- 定理中的要求

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

就相当于由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_i, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵是上三角矩阵.

施密特 (Schmidt) 正交化过程

n 维欧氏空间 V 必存在正交基与标准正交基.

- 对 n 维欧氏空间 V 的任一组基 $\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n$，都可以用施密特 (Schmidt) 正交化过程化为正交基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$.

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ \quad \cdots\cdots \\ \beta_n = \alpha_n - \dfrac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots\cdots - \dfrac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1} \end{cases}$$

- 如果再把每个 β_i 单位化，即得到 V 的一组标准正交基.

例 1

在 $\mathbb{R}^4$ 中把 $\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(-1,0,0,1)$, $\alpha_3=(1,0,1,0)$, $\alpha_4=(1,-1,-1,1)$ 变成单位正交的向量组.

解　把它们正交化, 得

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1=(1,1,0,0)\\
\beta_2 &= \alpha_2-\tfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2+\tfrac{1}{2}\beta_1=\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,1\right)\\
\beta_3 &= \alpha_3-\tfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\tfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\tfrac{1}{2}\beta_1+\tfrac{1}{3}\beta_2=\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},1,\tfrac{1}{3}\right)\\
\beta_4 &= \alpha_4-\tfrac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\tfrac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\tfrac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=(1,-1,-1,1)
\end{aligned}$$

再单位化，得

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)\\
\eta_2 &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},0,\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)\\
\eta_3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\\
\eta_4 &= \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

例 2

设 $\alpha_1=(1,2,-1)\,,\alpha_2=(-1,3,1)\,,\alpha_3=(4,-1,0)$, 用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解 第一步正交化，取

$$
\begin{aligned}
&\beta_1=\alpha_1\\
&\beta_2=\alpha_2-\tfrac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,3,1)-\tfrac{4}{6}(1,2,-1)=\tfrac{5}{3}(-1,1,1)\\
&\beta_3=\alpha_3-\tfrac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\tfrac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(4,-1,0)-\tfrac{1}{3}(1,2,-1)+\tfrac{5}{3}(-1,1,1)\\
&\quad=2\,(1,0,1)
\end{aligned}
$$

第二步单位化，令

$$
\begin{aligned}
\gamma_1&=\tfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\\
\gamma_2&=\tfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\\
\gamma_3&=\tfrac{1}{\|\ b_3\|}\beta_3=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)
\end{aligned}
$$

例 3

已知 $\alpha_1 = (1,1,1)$, 试求非零向量 α_2, α_3, 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

解 若 $a_1 \perp a_2$, $a_1 \perp a_3$, 则

$$(a_1, a_2) = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$(a_1, a_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

即 α_2, α_3, 应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 基础解系为

$$\xi_1 = (1, 0, -1), \xi_2 = (0, 1, -1).$$

把基础解系正交化（以保证 $\alpha_2 \perp \alpha_3$ 成立）

$$\alpha_2 = (1, 0, -1), \alpha_3 = \frac{1}{2}(-1, 2, -1)$$

即为所求.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是欧氏空间 V 中的两组标准正交基, 它们之间的过渡矩阵 $A = (a_{ij})$, 即

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是标准正交基, 所以

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j \\ 0, & \text{当} i \neq j \end{cases}$$

矩阵 A 的各列就是 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标. 上式可以表示为

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ji}a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j \\ 0, & \text{当} i \neq j \end{cases}$$

相当于一个矩阵的等式

$$A'A = E$$

或者

$$A^{-1} = A'$$

我们引入:

定义

n 级实数矩阵 A 称为正交矩阵, 如果 $A'A = E$

因此, 以上分析表明,

- 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵;
- 如果第一组基是标准正交基, 同时过渡矩阵是正交矩阵, 那么第二组基一定也是标准正交基.

注

根据逆矩阵的性质，由

$$A'A = E$$

即得

$$AA' = E$$

写出来就是 A 的各行满足

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \delta_{ij},$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j \\ 0, & \text{当} i \neq j \end{cases}$$

正交矩阵之等价定义

实矩阵 $A = (a_{ij})_{nn}$ 为正交矩阵

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow A^{-1} = A'$

$\Leftrightarrow AA' = E$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基

正交矩阵之性质

- 如果 A 是正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$.
- 如果 A 是正交矩阵, 则 A', A^{-1}, A^*, A^k 均是正交矩阵.
- 如果 A, B 是 n 级正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.
- n 级实矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是，A 的 n 个列 (或行) 向量是两两正交的单位向量.

标准正交基的有关结果总结如下:

设 V 是 n 维欧氏空间 $,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基, 则

1) 标准正交基的度量矩阵是单位矩阵

2) 设 $\alpha,\beta\in V$, 且 α,β 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标分别为

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',\quad Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$$

则

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=X'Y$$

3) V 中任一元素 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为

$$((\alpha,\varepsilon_1),(\alpha,\varepsilon_2),\cdots,(\alpha,\varepsilon_n))'$$

4) 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵 (即满足 $A'A=E$ 的 n 级实矩阵）. 又若两组基之间的过渡矩阵是正交矩阵, 且其中一组基是标准正交基，则另一组基也是标准正交基.

我们来建立欧氏空间同构的概念.

定义

实数域 $\mathbb{R}$ 上欧氏空间 V_1 与 V_2 称为同构的, 如果由 V_1 到 V_2 有一个双射 σ, 满足

1. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$
2. $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$
3. $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$

这里 $\alpha,\beta\in V_1, k\in\mathbb{R}$, 这样的映射 σ 称为 V_1 到 V_2 的同构映射.

由定义可知，如果 σ 是欧氏空间 V_1 到 V_2 的一个同构映射, 那么 σ 也是 V_1 到 V_2 作为线性空间的同构映射. 因此，同构的欧氏空间必有相同的维数.

设 V_1 是一个 n 维欧氏空间, 在 V_1 中取一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$.
在这组基下， V_1 的每个向量 α 都可表成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

令

$$\sigma(a) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

这是 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个双射, 并且适合定义中条件 1), 2).
上一节可知, σ 也适合定义中条件 3).
因而 σ 是 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个同构映射.
由此可知，每个 n 维的欧氏空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构.

下面来证明, 同构作为欧氏空间之间的关系具有反身性、对称性与传递性.

- 首先，每个欧氏空间到自身的恒等映射显然是一同构映射. 这就是说，同构关系是反身的.
- 其次, 设 σ 是 V_1 到 V_2 的一同构映射，我们知道，逆映射 σ^{-1} 也适合定义中 1）与 2），而且对于 $\alpha, \beta \in V_2$, 有

$$
\begin{aligned}
(\alpha, \beta) &= \left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right), \sigma\left(\sigma^{-1}(\beta)\right)\right) \\
&= \left(\sigma^{-1}(\alpha), \sigma^{-1}(\beta)\right)
\end{aligned}
$$

  这就是说, σ^{-1} 是 V' 到 V 的一同构映射, 因而同构关系是对称的.
- 第三, 设 σ, τ 分别是 V_1 到 V_2, V_2 到 V_3 的同构映射. 不难证明 $\tau\sigma$ 是 V_1 到 V_3 的同构映射，因而同构关系是传递的.

既然每个 n 维欧氏空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构, 按对称性与传递性即得, 任意两个 n 维欧氏空间都同构. 综上所述, 就有

定理 3

两个有限维欧氏空间同构 $\iff$ 它们的维数相同.

这个定理说明, 抽象的观点看, 欧氏空间的结构完全被它的维数决定.

在解析几何中, 我们有正交变换的概念. 正交变换就是保持点之间的距离不变的变换. 在一般的欧氏空间中, 我们有

定义

欧氏空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为正交变换, 如果它保持向量的内积不变, 即对于任意的 $\alpha, \beta \in V$ 都有

$$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$$

正交变换可以从几个不同的方面来加以刻画.

定理 4

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧邸空间 V 的一个线性变换, 于是下面四个命题是相互等价的:

1. $\mathscr{A}$ 是正交变换.
2. $\mathscr{A}$ 保持向量的长度不变, 即对于 $\alpha \in V, |\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|$.
3. 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是标准正交基, 那么 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基.
4. $\mathscr{A}$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

因为正交矩阵是可逆的, 所以正交变换是可逆的.

由定义不难看出, 正交变换实际上就是一个欧氏空间到它自身的同构映射, 因而

性质

正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换.

在标准正交基下, 正交变换与正交矩阵对应，因此,

性质

正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵.

如果 A 是正交矩阵, 那么由 $AA' = E$ 可知 $|A|^2 = 1$ 或者$|A| = \pm 1$
因此,

性质

正交变换的行列式等于 $+1$ 或者 -1.

- 行列式等于 $+1$ 的正交变换通常称为旋转, 或者称为第一类的;
- 行列式等于 -1 的正交变换称为第二类的.

例如，在欧氏空间中任取一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 定义线性变换 $\mathscr{A}$ 为:

$$\mathscr{A}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_i = \varepsilon_i, i = 2, \cdots, n$$

那么, $\mathscr{A}$ 就是一个第二类的正交变换. 从几何上看，这是一个镜面反射 (参看本章习题 15).

我们来讨论欧氏空间中子空间的正交关系.

定义

设 V_1， V_2 是欧氏空间 V 中两个子空间. 如果对于任意的 $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$, 恒有

$$(\alpha, \beta) = 0$$

则称 V_1, V_2 为正交的, 记为 $V_1 \perp V_2$. 一个向量 α, 如果对于任意的 $\beta \in V_1$, 恒有

$$(\alpha, \beta) = 0$$

则称 α 与子空间 V_1 正交, 记为 $\alpha \perp V_1$

因为只有零向量与它自身正交, 所以由 $V_1 \perp V_2$ 可知 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$; 由 $\alpha \perp V_1, \alpha \in V_1$ 可知 $\alpha = 0$ 关于正交的子空间, 我们有:

定理 5

如果子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交, 那么和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 是直和.

证明 设 $\alpha_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, s$, 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = 0$$

我们来证明 $\alpha_i = 0$. 事实上, 用 α_i 与等式两边作内积, 利用正交性，得

$$(\alpha_i, \alpha_i) = 0$$

从而 $\alpha_i = 0\, (i = 1, 2, \cdots, s)$. 这就是说，和

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$$

是直和. ∎

定义

子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个正交补, 如果 $V_1 \perp V_2$, 并且 $V_1 + V_2 = V$

显然，如果 V_2 是 V_1 的正交补, 那么 V_1 也是 V_2 的正交补.

定理 6

n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补.

证明　如果 $V_1 = \{0\}$, 那么它的正交补就是 V, 唯一性是显然的.

设 $V_1 \neq \{0\}$. 欧氏空间的子空间在所定义的内积之下也显下个欧氏空间. 在 V_1 中取一组正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$, 由定理 1，它可以扑充成 V 的一组正交基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$$

子空间 $\mathrm{L}\left(\varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n\right)$ 就是 V_1 的正交补.

再来证唯一性. 设 V_2, V_3 都是 V_1 的正交补, 于是

$$V = V_1 \oplus V_2$$
$$V = V_1 \oplus V_3$$

令 $\alpha \in V_2$, 由第二式即有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$$

其中 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_3 \in V_3$. 因为 $\alpha \perp \alpha_1$ 所以

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, a_1) + (\alpha_3, \alpha_1) \\ = (\alpha_1, \alpha_1) = 0\end{aligned}$$

即 $\alpha_1 = 0$. 由此得知 $\alpha \in V_3$, 即 $V_2 \subset V_3$ 同理可证 $V_3 \subset V_2$. 因此 $V_2 = V_3$, 唯一性得证. ∎

注

- V_1 的正交补记为 $V_1^{\perp}$.
- 由定义可知
$$dim\left(V_1\right)+dim\left(V_1^{\perp}\right)=n$$
- $V_1^{\perp}$ 恰由所有与 V_1 正交的向量组成.
- 由分解式
$$V=V_1\oplus V_1^{\perp}$$
可知，V 中任一向量 α 都可以唯一地分解成
$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$$
其中 $\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_1^{\perp}$.
我们称 α_1 为向量 α 在子空间 V_1 上的内射影.

§6 实对称矩阵的标准形

- 在第五章我们得到, 任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵, 换句话说，都有一个可逆矩阵 C 使 $C'AC$ 成对角形. 现在利用欧氏空间的理论, 第五章中关于实对称矩阵的结果可以加强.
- 这一节的主要结果：对于任意一个 n 级实对称矩阵 A, 都存在一个 n 级正交矩陈 T, 使

$$T'AT = T^{-1}AT$$

成对角形.
- 先讨论对称矩阵的一些性质，它们本身在今后也是非常有用的. 我们把它们归纳成下面几个引理.

引理 1

设 A 是实对称矩阵, 则 A 的特征值皆为实数.

证明 设 λ_0 是 A 的特征值, 于是有非零向量 $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ 满足 $A\xi = \lambda_0 \xi$, 令 $\bar{\xi} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)'$ 其中 $\bar{x}_i$ 是 x_i 的共轭复数, 则 $\overline{A\xi} = \bar{\lambda}_0 \bar{\xi}$ 考察等式

$$\bar{\xi}'(A\xi) = \bar{\xi}'A'\xi = (A\bar{\xi})'\xi = (\overline{A\xi})'\xi$$

其左边为 $\lambda_0 \bar{\xi}'\xi$, 右边为 $\bar{\lambda}_0 \bar{\xi}'\xi$. 故

$$\lambda_0 \bar{\xi}'\xi = \bar{\lambda}_0 \bar{\xi}'\xi$$

又因 ξ 是非零向量,

$$\bar{\xi}'\xi = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \neq 0$$

故 $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$, 即 λ_0 是一个实数. ∎

对应于实对称矩阵 A，在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义一个线性变换 $\mathscr{A}$ 如下：

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

于是，$\mathscr{A}$ 在标准正交基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵就是 A.

引理 2

设 A 是实对称矩阵, 公的定义如上, 则对任意 $\alpha, \beta \in R^n$, 有

$$(\mathscr{A} a, \beta) = (\alpha, \mathscr{A} \beta) \tag{2}$$

或

$$\beta'(A\alpha) = \alpha' A\beta$$

证明 只要证明后一等式就行了. 实际上

$$\beta'(A\alpha) = \beta' A' \alpha = (A\beta)'\alpha = \alpha'(A\beta). \quad \blacksquare$$

等式(2)把实对称矩阵的特性反映到线性变换上. 我们引入

定义

欧氏空间中满足等式 $(\mathscr{A} a, \beta) = (\alpha, \mathscr{A} \beta)$ 的线性变换称为对称变换.

对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵. 用对称变换来反映实对称矩阵，一些性质可以看得更清楚.

引理 3

设 $\mathscr{A}$ 是对称变换，V_1 是 $\mathscr{A}$-子空间, 则 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$-子空间.

证明 设 $a \in V_1^{\perp}$, 要证 $\mathscr{A}\alpha \in V_1^{\perp}$, 即 $\mathscr{A}\alpha \perp V_1$. 任取 $\beta \in V_1$, 都有 $\mathscr{A}\beta \in V_1$. 因 $\alpha \perp V_1$, 故 $(\alpha, \mathscr{A}\beta) = 0$ 因此

$$(\mathscr{A}a, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}\beta) = 0$$

即 $\mathscr{A}\alpha \perp V_1, \mathscr{A}\alpha \in V_1^{\perp}, V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A} -$ 子空间. ∎

引理 4

设 $\mathscr{A}$ 是实对称矩阵, 则 $\mathbb{R}^n$ 中属于 $\mathscr{A}$ 的不同特征值的特征向量必正交.

证明 设 λ, μ 是矩阵 A 的两个不同的特征值, α, β 分别是属于 λ, μ 的特征向量 $A\alpha = \lambda\alpha, A\beta = \mu\beta$. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下:

$$\mathscr{A}X = AX,$$

其中 $X \in \mathbb{R}^n$. 于是, $\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha, \mathscr{A}\beta = \mu\beta$. 由 $(\mathscr{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}\beta)$, 有

$$\lambda(\alpha, \beta) = \mu(\alpha, \beta).$$

因为 $\lambda \neq \mu$, 所以 $(\alpha, \beta) = 0$, 即 α, β 正交. ∎

现在来证明主要定理.

定理 7

对于任意一个 n 级实对称矩阵 A , 都存在一个 n 级正交矩阵 T, 使 $T'AT = T^{-1}AT$ 成对角形.

证明 由于实对称矩阵和对称变换的关系, 只要证明对称变换 $\mathscr{A}$ 有 n 个特征向量做成标准正交基就行了. 我们对空间的维数 n 作归纳法.

- $n = 1$, 显然定理的结论成立.
- 设 $n - 1$ 时定理的结论成立.
- 对 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 线性变换 $\mathscr{A}$ 有一特征向量 α_1, 其特征值为实数 λ_1. 把 α_1 单位化, 还用 α_1 代表它. 作 $L(\alpha_1\ )$ 的正交补, 设为 V_1.

由引理 3, V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 其维数为 $n-1$.
因为

$$(\mathscr{A}|_{V_1}\alpha,\beta)=(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\mathscr{A}|_{V_1}\beta),$$

其中 $\alpha,\beta\in V_1$, 所以 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 仍是对称变换.
据归纳法假设, $\mathscr{A}|_{V_1}$, 有 $n-1$ 个特征向量 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 作成 V_1 的标准正交基. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, 又是 $\mathscr{A}$ 有 n 个特征向量. 定理得证. ∎

- 下面来看看在给定了一个实对称矩阵 $\mathscr{A}$ 之后, 按什么办法求正交矩阵 T 使 $T'AT$ 成对角形.
- 在定理的证明中我们看到, 矩阵 A 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义了一个线性变换.
- 求正交矩阵 T 的问题就相当于在 $\mathbb{R}^n$ 中求一组由 A 的特征向量构成的标准正交基.

事实上，设

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \eta_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，它们都是 A 的特征向量. 显然，由 ε_1 $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵就是

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

T 是一个正交矩阵，而

$$T^{-1}AT = T'AT$$

就是对角形.

正交矩阵 T 的求法可以按以下步骤进行:

1. 求出 A 的特征值. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda,$ 是 A 的全部不同的特征值.
2. 对于每个 λ_i, 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 求出一个基础解系，这就是 A 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基. 由这组基出发, 按定理 2 的方法求出 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\eta_{i1}, \cdots, \eta_{ik}$
3. 因为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 两两不同, 所以根据这一节引理 4, 向量组 $\eta_{11}, \cdots, \eta_{1k_1}, \cdots, \eta_{r1}, \cdots, \eta_{r_r}$ 还是两两正交的. 又根据定理 7 以及第七章 §5 的讨论，它们的个数就等于空间的维数. 因此，它们就构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 并且也都是 A 的特征向量. 这样, 正交矩阵 T 也就求出了.

如果线性替换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

的矩阵 $C = (c_{ij})$ 是正交的, 那么它就称为正交的线性替换. 正交的线性替换当然是非退化的.

用二次型的语言, 定理 7 可以叙述为:

定理 8

任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

都可以经过正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中平方项的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵 A 的特征多项式全部的根.