

Chapter 1

生成函数

1.1 引论

生成函数是一种既简单又有用的数学方法, 它最早出现于 19 世纪初。对于组合计数问题, 生成函数是一种最重要的一般性处理方法. 它的中心思想是: 对于一个有限或无限数列用幂级数

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

使之成为一个整体, 然后通过研究幂级数 $A(x)$, 导出数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的构造和性质. 我们称 $A(x)$ 为序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的生成函数, 并记为 $G\{a_n\}$. 实际上, 在第 3 章中我们已经使用过生成函数方法. 组合数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

的生成函数为

$$f_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

由二项式定理知

$$f_n(x) = (1+x)^n$$

通过对 $(1+x)^n$ 的运算, 可以导出一系列组合数的关系式, 例如

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$
$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

等等. 由恒等式

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$$

可以推导出 Vandermonde 恒等式

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

下面再看一个例子. 例 1 投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$. 问连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少? 解一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j) (1 \leq i, j \leq 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能. 由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能: $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$, 所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. 如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了. 这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径. 我们用多项式

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

表示投掷一次可能出现点数 $1, 2, \dots, 6$, 观察

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n , 使

$$x^m \cdot x^n = x^{10}$$

即是两次投掷分别出现点数 m, n , 且 $m + n = 10$. 由此得出, 展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数. 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}$$

中 x^{30} 的系数. 而

$$\begin{aligned} & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10} \\ &= x^{10} (1 - x^6)^{10} (1 - x)^{-10} \\ &= x^{10} \cdot \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} x^{6i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{10-1+i}{i} x^i \end{aligned}$$

所以, x^{30} 的系数为

$$\binom{29}{20} - \binom{23}{14} \binom{10}{1} + \binom{17}{8} \binom{10}{2} - \binom{11}{2} \binom{10}{3} = 2930455$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}} \approx 0.0485$$

1.2 形式幂级数

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题. 为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念. 我们称幂级数 (5.2.2) 是形式幂级数, 其中的 x 是未定元, 看作是抽象符号. 对于实数域 \mathbf{R} 上的数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

x 是 \mathbf{R} 上的未定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

称为 \mathbf{R} 上的形式幂级数. 一般情况下, 形式幂级数中的 x 只是一个抽象符号, 并不需要对 x 赋予具体数值, 因而就不需要考虑它的收敛性. \mathbf{R} 上的形式幂级数的全体记为 $\mathbf{R}[[x]]$. 在集合 $\mathbf{R}[[x]]$ 中适当定义加法和乘法运算, 便可使它成为一个整环, 任何一个形式幂级数都是这个环中的元素.

定义 5.2.1 设 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 \mathbf{R} 上的两个形式幂级数, 若对任意 $k \geq 0$, 有 $a_k = b_k$, 则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等, 记作 $A(x) = B(x)$.

定义 5.2.2 设 α 为任意实数, $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbf{R}[[x]]$, 则将

$$\alpha A(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) x^k$$

叫作 α 与 $A(x)$ 的数乘积。

定义 5.2.3 设 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 \mathbf{R} 上的两个形式幂级数, 将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相加定义为

$$A(x) + B(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

并称 $A(x) + B(x)$ 为 $A(x)$ 与 $B(x)$ 的和, 把运算 “+” 叫作加法. 将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相乘定义为

$$A(x) \cdot B(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k) x^k$$

并称 $A(x) \cdot B(x)$ 为 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的积, 把运算 “ \cdot ” 叫作乘法。

定理 5.2.1 集合 $\mathbf{R}[[x]]$ 在上述加法和乘法运算下构成一个整环。

定理 5.2.2 对 $\mathbf{R}[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $A(x)$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0 \neq 0$. 若 $\tilde{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k x^k$ 是 $A(x)$ 的乘法逆元, 则有

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= a_0^{-1}, \\ \tilde{a}_k &= (-1)^k a_0^{-(k+1)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

在整环 $\mathbf{R}[[x]]$ 上还可以定义形式导数。

定理 5.2.2 对于任意 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbf{R}[[x]]$, 规定

$$DA(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

称 $DA(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数。

$A(x)$ 的 n 次形式导数可以递归地定义为

$$\begin{cases} D^0 A(x) \equiv A(x) \\ D^n A(x) \equiv D[D^{n-1} A(x)] \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

形式导数满足如下规则: (1) $D[\alpha A(x) + \beta B(x)] = \alpha DA(x) + \beta DB(x)$ (2) $D[A(x) \cdot B(x)] = A(x)DB(x) + B(x)DA(x)$ (3) $D[A^n(x)] = nA^{n-1}(x)DA(x)$ 证明规则 (1) 由定义可以直接得出, 而规则 (3) 则是规则 (2) 的推论. 现证明规则 (2). 显然有

$$\begin{aligned} D[A(x) \cdot B(x)] &= D \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (i a_i x^{i-1}) b_j x^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (a_i x^i) (j b_j x^{j-1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} j b_j x^{j-1} \right) \\ &= A(x)DB(x) + B(x)DA(x). \end{aligned}$$

由此可知, 形式导数满足微积分中求导运算的规则, 当某个形式幂级数在某个范围内收敛时, 形式导数就是微积分中的求导运算. 为了书写方便, 以后用 $A'(x), A''(x), \dots$ 分别代表 $DA(x), D^{(2)}A(x), \dots$.

1.3 生成函数的性质

生成函数与数列之间是一一对应的. 因此, 若两个生成函数之间存在某种关系, 那么相应的两个数列之间也必然存在一定的关系; 反之亦然. 设数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的生成函数为 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, 数列 $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ 的生成函数为 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, 我们可以得到生成函数的如下一些性质:

性质 1 若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < l) \\ a_{k-l} & (k \geq l) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^l \cdot A(x)$$

证明：由假设条件, 有

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\
 &= a_0 \cdot x^l + a_1 \cdot x^{l+1} + \cdots + a_n \cdot x^{l+n} + \cdots \\
 &= x^l \cdot (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots) \\
 &= x^l \cdot A(x)
 \end{aligned}$$

性质 2 若 $b_k = a_{k+l}$, 则

$$B(x) = \frac{1}{x^l} \left[A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k \right]$$

证明：类似于性质 1 的证明。

性质 3 若 $b_k = \sum_{i=0}^k a_i$, 则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

证明：由假设条件, 有

$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0, \\
 b_1 x &= a_0 x + a_1 x \\
 b_2 x^2 &= a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2 \\
 \cdots, \\
 b_k x^k &= a_0 x^k + a_1 x^k + a_2 x^k + \cdots + a_k x^k, \\
 \cdots.
 \end{aligned}$$

把以上各式的两边分别相加, 得

$$\begin{aligned}
 B(x) &= a_0 (1 + x + x^2 + \cdots) + a_1 x (1 + x + x^2 + \cdots) \\
 &\quad + a_2 x^2 (1 + x + x^2 + \cdots) + \cdots \\
 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) (1 + x + x^2 + \cdots) \\
 &= \frac{A(x)}{1-x}
 \end{aligned}$$

性质 4 若 $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$, 则

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

这里, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ 是收敛的。

证明：因为 $A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛, 所以 $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ 是存在的. 于是有

$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = A(1) \\
 b_1 x &= a_1 x + a_2 x + \cdots = [A(1) - a_0] x \\
 b_2 x^2 &= a_2 x^2 + a_3 x^2 + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1] x^2 \\
 \cdots, \\
 b_k x^k &= a_k x^k + a_{k+1} x^k + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}] x^k \\
 \cdots
 \end{aligned}$$

把以上各式的两边分别相加, 得

$$\begin{aligned}
 B(x) &= A(1) + [A(1) - a_0]x + [A(1) - a_0 - a_1]x^2 + \cdots \\
 &\quad + [A(1) - a_0 - \cdots - a_{k-1}]x^k + \cdots \\
 &= A(1)(1 + x + x^2 + \cdots) - a_0x(1 + x + x^2 + \cdots) \\
 &\quad - a_1x^2(1 + x + x^2 + \cdots) - \cdots - a_{n-1}x^n(1 + x + x^2 + \cdots) - \cdots \\
 &= [A(1) - x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)] \cdot (1 + x + x^2 + \cdots) \\
 &= \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}
 \end{aligned}$$

性质 5 若 $b_k = ka_k$, 则

$$B(x) = xA'(x)$$

证明: 由 $A'(x)$ 的定义知

$$xA'(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x)$$

性质 6 若 $b_k = \frac{a_k}{k+1}$, 则

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt$$

证明: 由假设条件, 有

$$\begin{aligned}
 \int_0^x A(t) dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x b_k (k+1) t^k dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = x \cdot B(x)
 \end{aligned}$$

性质 7 若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x)$$

性质 8 若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x)$$

性质 7 和性质 8 可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出。

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和. 下面列出常见的几个数列的生成函数:

- (1) $G\{1\} = \frac{1}{1-x}$;
- (2) $G\{a^k\} = \frac{1}{1-ax}$;
- (3) $G\{k\} = \frac{x}{(1-x)^2}$

$$(4) G\{k(k+1)\} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$(5) G\{k^2\} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$(6) G\{k(k+1)(k+2)\} = \frac{6x}{(1-x)^4}$$

$$(7) G\left\{\frac{1}{k!}\right\} = e^x;$$

$$(8) G\left\{\binom{\alpha}{k}\right\} = (1+x)^\alpha$$

$$(9) G\left\{\binom{n+k}{k}\right\} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

下面证明其中的几个生成函数, 而生成函数 (8) 和 (9) 可参见定理 3.1.2 及其分析。

证明: (3) 易知

$$\begin{aligned} G\{k\} &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ &= x \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(5) 易知

$$\begin{aligned} G\{k^2\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

(6) 设

$$G\{k(k+1)(k+2)\} = A(x)$$

则

$$\begin{aligned} \int_0^x tA(t)dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x k(k+1)(k+2)t^{k+1} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^{k+2} \\ &= x^2 \cdot \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

所以

$$xA(x) = \left[\frac{2x^3}{(1-x)^3} \right]' = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

故

$$A(x) = \frac{6x}{(1-x)^4}$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和, 下面的两个例子说明了一些求解方法。

例 1 已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x}$$

求 a_n 。

解：用部分分式的方法得

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x} = \frac{2}{1 - 2x} + 3x$$

而

$$\frac{2}{1 - 2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}$$

例 2 计算级数

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

的和。

解：由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列 $\{n^2\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

此处, $a_k = k^2$. 令

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

则

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

由性质 3 即得数列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \\ &= (x+x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k \end{aligned}$$

比较等式两边 x^n 的系数, 便得

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= b_n = \binom{n+2}{3} + \binom{n-1}{3} \\ &= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

1.4 组合型分配问题的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题。

1.4.1 组合数的生成函数

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

- (1) 求 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 k 组合数;
- (2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数;
- (3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

其中, 问题 (1) 是普通集合的组合问题; 问题 (2) 转化为不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ 的非负整数解的个数问题; 问题 (3) 是利用容斥原理在 $M = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$ 中求不满足下述三个性质:

P_1 : 10 组合中 a 的个数大于或等于 4 ;

P_2 : 10 组合中 b 的个数大于或等于 5 ;

P_3 : 10 组合中 c 的个数大于或等于 6

的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同. 下面我们将看到, 引入生成函数的概念后, 上述三类组合问题可以统一地处理.

我们先从问题 (2) 开始. 令

$$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$$

的 k 组合数为 b_k . 考虑 n 个形式算级数的乘积

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \cdots (1 + x + x^2 + \dots)}_{n \text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个 x^k 均为

$$x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n} = x^k \quad (m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k)$$

其中, $x^{m_1}, x^{m_2}, \dots, x^{m_n}$ 分别取自代表 a_1 的第一个括号, 代表 a_2 的第二个括号, \dots , 代表 a_n 的第 n 个括号; m_1, m_2, \dots, m_n 分别表示取 a_1, a_2, \dots, a_n 的个数. 于是, 每个 x^k 都对应着多重集合 M 的一个 k 组合. 因此

$$(1 + x + x^2 + \dots)^n$$

中 x^k 的系数就是 M 的 k 组合数 b_k . 由此得出序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1 + x + x^2 + \dots)^n = \frac{1}{(1 - x)^n}$$

从而

$$b_k = \binom{n - 1 + k}{k}$$

这时, 我们再次得到了第 2 章中多重集合 M 的 k 组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的。

用生成函数方法解问题 (3) 尤为简单. 将 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 k 组合数记为 b_k , $\{b_k\}$ 的生成函数就是

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

其原因是展开式中的 x^k 必定为

$$x^{m_1} x^{m_2} x^{m_3} = x^k \quad (m_1 + m_2 + m_3 = k)$$

由于 $x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}$ 分别取自第一、第二、第三个括号, 故 $0 \leq m_1 \leq 3, 0 \leq m_2 \leq 4, 0 \leq m_3 \leq 5$, 于是每个 x^k 对应集合 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的一个 k 组合. 特别令 $k = 10$, 则

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3) \cdot (1+x+x^2+x^3+x^4) \cdot (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\ &= (1-x^4) \cdot (1-x^5) \cdot (1-x^6) \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \\ &= (1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n \end{aligned}$$

所以, x^{10} 的系数 b_{10} 为

$$\begin{aligned} b_{10} &= \binom{10+2}{10} - \binom{6+2}{6} - \binom{5+2}{5} \\ &\quad - \binom{4+2}{4} + \binom{1+2}{1} + \binom{0+2}{0} \\ &= 6 \end{aligned}$$

与第 4 章中用容斥原理得到的结果相同。

在普通集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 k 组合中, $a_i (1 \leq i \leq n)$ 或者出现或者不出现, 故该集合的 k 组合数序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

从而

$$b_k = \binom{n}{k}$$

综合以上分析, 我们得到:

定理 5.4.1 设从 n 元集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k , 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right)$$

例 1 求多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的每个 a_i 至少出现一次的 k 组合数 b_k 。

解: 由定理 5.4.1 知

$$M_i = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

于是

$$\begin{aligned}
 G\{b_k\} &= (x + x^2 + x^3 + \cdots)^n \\
 &= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\
 &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-k} x^k \\
 &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k
 \end{aligned}$$

所以

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \binom{k-1}{n-1} & (k \geq n) \end{cases}$$

1.4.2 组合型分配问题的生成函数

定理 5.4.2 把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 a_1, a_2, \cdots, a_n 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right)$$

证明: 不妨设盒子 a_1, a_2, \cdots, a_n 中放入的球数分别为 x_1, x_2, \cdots, x_n , 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n)$$

一种符合要求的放法相当于 $\mathbf{M} = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的一个 k 组合, 前面关于盒子 a_i 容量的限制转变成 k 组合中 a_i 出现次数的限制. 由定理 5.4.1 知, 组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right)$$

例 2 求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6, x_5 \geq 0$ 的整数解的个数。

解: 本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \{3, 4, \cdots\} \\
 M_2 &= \{2, 3, \cdots\} \\
 M_3 &= \{4, 5, \cdots\} \\
 M_4 &= \{6, 7, \cdots\} \\
 M_5 &= \{0, 1, 2, \cdots\}
 \end{aligned}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned}
 & (x^3 + x^4 + \cdots) (x^2 + x^3 + \cdots) (x^4 + x^5 + \cdots) \\
 & \cdot (x^6 + x^7 + \cdots) (1 + x + x^2 + \cdots) \\
 & = x^{15} \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)^5 \\
 & = x^{15} \cdot \frac{1}{(1-x)^5} \\
 & = x^{15} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^n
 \end{aligned}$$

其中, x^{20} 的系数 $\binom{5+4}{5} = 126$ 就是满足条件的整数解的个数。

补充题 1. 设有 2 红球, 1 黑球, 3 白球, 若每次从中任取 3 个, 有多少种不同的取法?

解: 方法 1:

$$\begin{aligned}
 (1+x+x^2)(1+x)(1+x+x^2+x^3) &= \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \\
 &= (1-x^2-x^3+x^5)(1-x^4) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k
 \end{aligned}$$

$$x^3 \text{ 的系数为 } \binom{5}{2} - \binom{3}{2} - \binom{2}{2} = 10 - 3 - 1 = 6$$

方法 2: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 3)(0, 1, 2)(1, 0, 2)(1, 1, 1)(2, 0, 1)(2, 1, 0)$

补充题 2. 设有 1g, 2g, 3g, 4g, 的砝码各一枚。若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量?

解: $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种。

补充题 3. 用 1 分, 2 分, 3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案。

解: $1+1+1+1 \quad 1+2+1 \quad 1+3 \quad 2+2$, 故四种。

补充题 4. 求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个, 香蕉有 5 的倍数个, 橘子不超过 4 个, 梨最多一个。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } (1+x^2+\cdots+x^{2n}+\cdots)(1+x^5+\cdots+x^{5n}+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x) &= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \\
 \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k
 \end{aligned}$$

故所求为 $n+1$ 种。

1.5 排列型分配问题的指数型生成函数

本节首先指出生成函数在求解排列型分配问题时的不足, 然后引入指数型生成函数以及在排列数中的应用。

1.5.1 排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数 x^k 改换成 $\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) \cdot \frac{x^k}{k!} = (1+x)^n$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念。

数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的指数型生成函数定义为形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

定理 5.5.1 多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中, 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right)$$

特别地, 数列 $\{1, 1, \dots\}$ 的指数型生成函数 $e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质:

$$e(x)e(y) = e(x+y)$$

这是因为

$$\begin{aligned} e(x)e(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e(x+y) \end{aligned}$$

特别有

$$e(x)e(-x) = e(0) = 1$$

从而

$$e(-x) = \frac{1}{e(x)}$$

例 1 多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = e^n(x) = e(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k = n^k$$

例 2 由数字 0, 1, 2, 3 组成的长为 k 的序列中, 要求含有偶数个 0, 问这样的序列有多少个?

解: 根据题意, 有

$$M_1 = M_2 = M_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$M_0 = \{0, 2, 4, \dots\}$$

由定理 5.5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^3 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= e^3(x) \cdot \frac{e(x)+e(-x)}{2} \\ &= \frac{1}{2}[e(4x) + e(2x)] \end{aligned}$$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$b_k = \frac{1}{2}(4^k + 2^k)$$

当 $k = 2$ 时, 满足题意的序列有 10 个, 它们是

$$00, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$$

例 3 由 1, 2, 3, 4 能组成多少个五位数? 要求这些五位数中 1 出现 2 次或 3 次, 2 最多出现 1 次, 4 出现偶数次。

解: 根据题意, 有

$$M_1 = \{2, 3\}$$

$$M_2 = \{0, 1\}$$

$$M_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$M_4 = \{0, 2, 4, \dots\}$$

由定理 5. 5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= \frac{x^2}{6} (3 + 4x + x^2) \cdot e(x) \cdot \frac{e(x)+e(-x)}{2} \\ &= \frac{x^2}{12} (3 + 4x + x^2) [e(2x) + 1] \end{aligned}$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5! \times \frac{1}{12} \left(3 \times \frac{2^3}{3!} + 4 \times \frac{2^2}{2!} + 1 \times \frac{1}{1!}\right) = 140$$

即满足题意的五位数有 140 个。

命题 1 若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1} \frac{x^l}{l!}$ 即 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x)$ 。

命题 2 若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为 $f^{(i)}(x)$

命题 3 若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{(k-1)!} = x \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= xf'(x) = x \frac{d}{dx}(f(x)) \end{aligned}$$

命题 4 若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, $P(k)$ 为一个关于 k 的多项式, 则 $\{P(k)a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的 e.g.f 为 $P\left(x \frac{d}{dx}\right)(f(x))$ 。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k \frac{x^k}{k!} &= x \left(\sum_k k a_k \frac{x^k}{k!} \right)' = x (x f'(x))' \\ &= x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} (f(x)) \right) = \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 (f(x)) \end{aligned}$$

命题 5 若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$, 则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \right) \frac{x^n}{n!} \\ \text{即 } \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \right\}_{n=0}^{\infty} &\text{ 的 e.g.f 为 } f(x)g(x) \end{aligned}$$

命题 6 若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$, $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}$ 则

$$\begin{aligned} f(x)g(x)h(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \right) \frac{x^n}{n!} \right) h(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} d_n \cdot C_{m-n} \right) \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \right) C_{m-n} \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \sum_{i=0}^n \binom{m}{i, n-i, m-n} a_i b_{n-i} C_{m-n} \right) \frac{x^m}{m!} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j+k=m} \binom{m}{i, j, k} a_i b_j c_k \right\}_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

补充题 1 确定每位数字都是奇数, 且 1,3 出现偶数次的 n 位数的个数。

解:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots - 1 \right)^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^3 \\ &\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \cdot e^{3x} \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot e^{3x} \\ &= \frac{1}{4} (e^{5x} + 2e^{3x} + e^x) = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 5^k \frac{x^k}{k!} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (5^k + 2 \cdot 3^k + 1) \frac{x^k}{k!} \\ \therefore [x^n] &= \frac{1}{4} (5^n + 2 \cdot 3^n + 1) \end{aligned}$$