

组合数学

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



第 4 章 容斥原理

- ① 引论
- ② 容斥原理
- ③ 错排问题
- ④ 有限重数的多重集合的组合数

容斥原理

- ① 引论
- ② 容斥原理
- ③ 错排问题
- ④ 有限重数的多重集合的组合数

引论

例 1

求 1 到 600 之间不能被 6 整除的整数个数.

例 1

求 1 到 600 之间不能被 6 整除的整数个数.

先计算 1 到 600 之间能被 6 整除的整数个数, 然后从总数中去掉它.

例 1

求 1 到 600 之间不能被 6 整除的整数个数.

先计算 1 到 600 之间能被 6 整除的整数个数, 然后从总数中去掉它.

- 1 到 600 之间有 100 个整数可被 6 整除,
- 因此有 $600 - 100 = 500$ 个整数不能被 6 整除.

例 2

求 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 1 不在第一个位置上的全排列的个数.

例 2

求 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 1 不在第一个位置上的全排列的个数.

(1) 直接计数

- 将 $i_1 \neq 1$ 的所有全排列按照 i_1 的取值分为 $n - 1$ 类;
- 若 $i_1 = k \in \{2, 3, \dots, n\}$, 则 $i_2 i_3 \cdots i_n$ 是 $\{1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n\}$ 的全排列;
- i_1 有 $n - 1$ 种取法, $i_2 i_3 \cdots i_n$ 的全排列个数为 $(n - 1)!$, 从而 $i_1 \neq 1$ 的全排列数为 $(n - 1)(n - 1)!$.

例 2

求 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 1 不在第一个位置上的全排列的个数.

(2) 间接计数

- $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列的个数为 $n!$;
- 若 $i_1 = 1$, 则 $i_2 i_3 \cdots i_n$ 是 $\{2, 3, \dots, n\}$ 的全排列, 其个数为 $(n-1)!$, 即 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 1 在第一个位置上的全排列的个数为 $(n-1)!$;
- 所以 1 不在第一个位置的全排列个数为

$$n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$$

例 3

求不超过 20 的正整数中既不是 2 的倍数, 也不是 3 的倍数的数的个数.

例 3

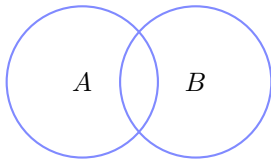
求不超过 20 的正整数中既不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数的数的个数。

- 2 的倍数的有 10 个 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
- 3 的倍数的有 6 个 3, 6, 9, 12, 15, 18
- 既是 2 的倍数又是 3 的倍数的有 3 个 6, 12, 18
- 因此，不超过 20 的正整数中是 2 的倍数或是 3 的倍数的数的个数

$$10 + 6 - 3 = 13$$

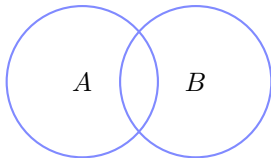
- 由减法原则，不超过 20 的正整数中既不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数的数的个数

$$20 - 13 = 7$$



小结

- $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



例 4

某班有 100 人, 其中

- 会打篮球的有 45 人, 会打乒乓球的有 53 人, 会打排球的有 55 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 28 人, 既会打篮球也会打排球的有 32 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 35 人;
- 三种球都会打的有 20 人.

问三种球都不会打的有多少人?

例 4

某班有 100 人, 其中

- 会打篮球的有 45 人, 会打乒乓球的有 53 人, 会打排球的有 55 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 28 人, 既会打篮球也会打排球的有 32 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 35 人;
- 三种球都会打的有 20 人.

问三种球都不会打的有多少人?

解 设 $A = \{\text{此班会打篮球的人}\},$
 $B = \{\text{此班会打乒乓球的人}\},$
 $C = \{\text{此班会打排球的人}\},$

则由条件知

$$\begin{aligned}|A| &= 45, |B| = 53, |C| = 55, \\|A \cap B| &= 28, |A \cap C| = 32, |B \cap C| = 35, \\|A \cap B \cap C| &= 20.\end{aligned}$$

例 4

某班有 100 人, 其中

- 会打篮球的有 45 人, 会打乒乓球的有 53 人, 会打排球的有 55 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 28 人, 既会打篮球也会打排球的有 32 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 35 人;
- 三种球都会打的有 20 人.

问三种球都不会打的有多少人?

可如下算出三种球都不会打的人数.

- 先从总人数中减掉会打三种球中某一种的人数;
- 此时会打两种球的人被减掉了两次, 为得到所求, 应加上他们;
- 第二步中会打三种球的人被加了三次, 从而应再减一次.

例 4

某班有 100 人, 其中

- 会打篮球的有 45 人, 会打乒乓球的有 53 人, 会打排球的有 55 人;
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 28 人, 既会打篮球也会打排球的有 32 人, 既会打乒乓球也会打排球的有 35 人;
- 三种球都会打的有 20 人.

问三种球都不会打的有多少人?

可如下算出三种球都不会打的人数.

- 先从总人数中减掉会打三种球中某一种的人数;
- 此时会打两种球的人被减掉了两次, 为得到所求, 应加上他们;
- 第二步中会打三种球的人被加了三次, 从而应再减一次.

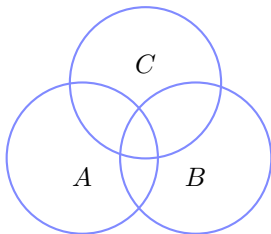
$$\begin{aligned} & 100 - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= 100 - 45 - 53 - 55 + 28 + 32 + 35 - 20 = 22. \end{aligned}$$

所以, 三种球都不会打的有 22 人.

设 S 是有限集, $A, B, C \subseteq S$, 则

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



容斥原理

① 引论

② 容斥原理

③ 错排问题

④ 有限重数的多重集合的组合数

容斥原理

- 设 P_1, P_2, \dots, P_m 是 S 的元素所涉及的 m 个性质
- 设 $A_i = \{x \in S \mid x \text{ 具有性质 } P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$
- 则 $\overline{A_i} = \{x \in S \mid x \text{ 不具有性质 } P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$

定理 1

集合 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素的个数为

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

容斥原理

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \end{aligned}$$

下面我们来证明：对于 S 中每个元素 x ,

- 若 x 不属于 A_1, A_2, \dots, A_m , 则对等式的右端贡献为 1, 即交替和中 1_x 的系数为 1;
- 否则, x 恰好属于 k 个子集 A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , 则有

$$x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

容斥原理

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \end{aligned}$$

下面我们来证明：对于 S 中每个元素 x ,

- 若 x 不属于 A_1, A_2, \dots, A_m , 则对等式的右端贡献为 1, 即交替和中 1_x 的系数为 1;
- 否则, x 恰好属于 k 个子集 A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , 则有

$$x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

因此, x 对等式的右端贡献为

$$\begin{cases} \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} & k \leq m \\ \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} & k > m \end{cases}$$

则对等式的右端贡献为 0, 从而定理得证.

容斥原理

定理 2

集合 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素个数为

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

推论 3

集合 S 中至少具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 之一的元素的个数为

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

例 5

在 1 与 1000 之间不能被 5,6,8 整除的整数有多少个？

例 5

在 1 与 1000 之间不能被 5, 6, 8 整除的整数有多少个?

解 令 $A = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$.

记 A_1, A_2, A_3 分别为 1 与 1000 之间能被 5, 6, 8 整除的整数集合, 则有

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125.$$

于是, $A_1 \cap A_2$ 表示 A 中能被 5 和 6 整除的数, 即能被 30 整除的数, 其个数为

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33.$$

$|A_1 \cap A_3|$ 表示 A 中能被 5 和 8 整除的数, 即能被 40 整除的数, 其个数为

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25.$$

$|A_2 \cap A_3|$ 表示 A 中能被 6 和 8 整除的数, 即能被 24 (6 和 8 的最小公倍数 $\text{lcm}(6, 8) = 24$) 整除的数, 其个数为

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41.$$

例

在 1 与 1000 之间不能被 5,6,8 整除的整数有多少个？

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ 表示 A 中能同时被 5,6,8 整除的数, 即 A 中能被 5,6,8 的最小公倍数 $\text{lcm}(5,6,8) = 120$ 整除的数, 其个数为

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

由容斥原理, 1 与 1000 之间不能被 5,6,8 整除的数的个数为

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\ &= 600. \end{aligned}$$

例 6

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个？

例 6

把 *MATHISFUN* 重新排列, 使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个?

解 令 S 表示 *MATHISFUN* 的全排列组成的集合

- P_1 : *MATH* 出现; P_2 : *IS* 出现; P_3 : *FUN* 出现;
- A_i : 具有性质 P_i 的元的集合 ($i = 1, 2, 3$)

将 *MATH* 视为整体, 与其他字母进行全排列, 可得 $|A_1| = 6!$,

例 6

把 *MATHISFUN* 重新排列, 使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个?

解 令 S 表示 *MATHISFUN* 的全排列组成的集合

- P_1 : *MATH* 出现; P_2 : *IS* 出现; P_3 : *FUN* 出现;
- A_i : 具有性质 P_i 的元的集合 ($i = 1, 2, 3$)

将 *MATH* 视为整体, 与其他字母进行全排列, 可得 $|A_1| = 6!$,

同理

$$|A_2| = 8!, \quad |A_3| = 7!,$$

$$|A_1 \cap A_2| = 5!, \quad |A_1 \cap A_3| = 4!, \quad |A_2 \cap A_3| = 6!,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!, \quad |S| = 9!$$

于是 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 9! - (6! + 8! + 7!) + (5! + 4! + 6!) - 3! = 317658$

例 7

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中, a, b, c, d 至少出现一次的符号串的个数.

例 7

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中, a, b, c, d 至少出现一次的符号串的个数.

解 记 A_1, A_2, A_3, A_4 分别为不出现 a, b, c, d 的 n 位字符串的集合.

$$|A_i| = 3^n \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_i \cap A_j| = 2^n \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1 \quad (i, j, k \text{ 互不相等}; i, j, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

而 a, b, c, d 至少出现一次的字符串集合即为 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$,

于是

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| &= 4^n - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \end{aligned}$$

例 8

从 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的满射有多少个？

例 8

从 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的满射有多少个？

解 设 S 为所有 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的映射的集合, 则 $|S| = k^n$.

对于 $1 \leq i \leq k$, 定义性质 P_i 为 y_i 不是映射的像,

定义 A_i 为满足性质 P_i 的所有从 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的映射的集合,

则对任意的 $1 \leq i \leq k$ 有 $|A_i| = (k-1)^n$,

对任意的 $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k$ 有 $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| = (k-j)^n$.

例 8

从 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的满射有多少个？

解 设 S 为所有 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的映射的集合, 则 $|S| = k^n$.

对于 $1 \leq i \leq k$, 定义性质 P_i 为 y_i 不是映射的像,

定义 A_i 为满足性质 P_i 的所有从 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 的映射的集合,

则对任意的 $1 \leq i \leq k$ 有 $|A_i| = (k-1)^n$,

对任意的 $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k$ 有 $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| = (k-j)^n$. 这样, 所求满射的个数为

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}| \\ &= |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < \ell} |A_i \cap A_j \cap A_\ell| + \\ & \quad \dots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \end{aligned}$$

例 9

$\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的正整数的个数, 求 $\varphi(n)$.

- 例如 $\varphi(5) = 4$, 即 1,2,3,4; $\varphi(12) = 4$, 即 1,5,7,11.

例 9

$\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的正整数的个数, 求 $\varphi(n)$.

- 例如 $\varphi(5) = 4$, 即 $1, 2, 3, 4$; $\varphi(12) = 4$, 即 $1, 5, 7, 11$.

解 将 n 分解成素因子的乘积形式

$$n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_q^{i_q}.$$

设 A_i 为不大于 n 且为 p_i 的倍数的自然数的集合 ($1 \leq i \leq q$), 则

$$|A_i| = \frac{n}{p_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, q)$$

因 p_i 与 p_j 互素 ($i \neq j$), 所以 p_i 与 p_j 的最小公倍数为 $p_i p_j$, 所以

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, q)$$

等等. 小于 n 并与 n 互素的自然数是集合 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 中那些不属于任何一个集合 A_i ($i = 1, 2, \cdots, q$) 的数,

由容斥原理知

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_q}| \\&= n - \sum_{i=1}^q |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq q} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq q} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\&\quad + \cdots + (-1)^q |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_q| \\&= n - \sum_{i=1}^q \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq q} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq q} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^q \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_q}\end{aligned}$$

上面的和式正好是下列乘积的展开式

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$$

注：欧拉函数常用于数论中。例如，若 $n = 12 = 2^2 \cdot 3$ ，则

$$\varphi(12) = 12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$$

容斥原理

- ① 引论
- ② 容斥原理
- ③ 错排问题
- ④ 有限重数的多重集合的组合数

例 10

有 n 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种？

定义 4

集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个**错排**是该集合的一个满足条件 $\pi_i \neq i$ ($1 \leq i \leq n$) 的全排列 $\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$ ，即集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列。

- $n = 1$ 时, $\{1\}$ 没有错排.
- $n = 2$ 时, $\{1, 2\}$ 有唯一一个错排, 为 21.

例 10

有 n 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种？

定义 4

集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个**错排**是该集合的一个满足条件 $\pi_i \neq i$ ($1 \leq i \leq n$) 的全排列 $\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$ ，即集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列。

- $n = 1$ 时, $\{1\}$ 没有错排.
- $n = 2$ 时, $\{1, 2\}$ 有唯一一个错排, 为 21.
- $n = 3$ 时, $\{1, 2, 3\}$ 有两个错排, 分别为 231 和 312.
- $n = 4$ 时, $\{1, 2, 3, 4\}$ 共有下面所列的 9 个错排

2143, 3142, 4123, 2341, 3412, 4321, 2413, 3421, 4312.

用 d_n 记 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全部错排个数, 则 $d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 2, d_4 = 9$.

错排问题

定理 5

对任意正整数 n , 有

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

证明 对于 n 元置换及 $1 \leq i \leq n$, 定义性质 P_i 为 i 在置换下保持不变 (或 i 为不动点). 定义 A_i 为 n 元对称群 S_n 中所有满足性质 P_i 的置换组成的子集. 则

$$d_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$$

对任意 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ 为 S_n 中具有不动点 i_1, \dots, i_k 的置换个数, 即 $(n - k)!$.

根据容斥原理, 得

$$\begin{aligned} D_n &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_n}| \\ &= |S_n| - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ &\quad \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \binom{n}{3} (n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \quad \square \end{aligned}$$

这表明, 在 S_n 中任取一个置换, 它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$, 其极限是 $e^{-1} (n \rightarrow \infty)$.

这真是个奇妙但并不显然的事实. 令人惊讶的是, e 是一个典型的超越数, 出现在一个最开始只涉及整数的组合问题的解决方案.

例 11

穿着球衣号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列, 则有多少种方法让他们重新站队, 使得每个人前面的人都已换过?

例 12

在 S_n 中, 有多少个置换不含有任何一个下列二元子序列

$$12, 23, 34, \dots, (n-1)n?$$

例 12

在 S_n 中, 有多少个置换不含有任何一个下列二元子序列

$$12, 23, 34, \dots, (n-1)n?$$

解 用 Q_n 表示这个计数. 对 $1 \leq i \leq n-1$, 令 P_i 表示二元子序列 $i(i+1)$ 出现这一性质, X_i 表示满足性质 P_i 的 n 元置换构成的集合. 注意到

$|X_i| = (n-1)!$, $|X_i \cap X_j| = (n-2)!$. 注意前面第二式无论对 $|j-i|=1$ 还是 $|j-i|>1$ 都成立. 归纳地可得到

$$|\cap_{r=1}^k X_{i_r}| = (n-k)!.$$

所以,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$$

例 13 (menage 问题)

n 对夫妇参加宴会围桌就座，要求男女相间并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

容斥原理

- ① 引论
- ② 容斥原理
- ③ 错排问题
- ④ 有限重数的多重集合的组合数

回顾

- 令 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 那么 S 的 r -组合有多少?

回顾

- 令 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 那么 S 的 r -组合有多少?

$$\binom{n}{r}$$

- 令 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r -组合有多少?

- 令 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 那么 S 的 r -组合有多少?

$$\binom{n}{r}$$

- 令 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r -组合有多少?

$$\binom{\binom{n}{r}}{r} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

例 14

令 $M = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r -组合有多少?

例 14

令 $M = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r -组合有多少?

- 如果所有的 $k_i \geq r$, 那么 k_i 对 r -组合的选取不产生影响, 可令 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = r$, 则 $\binom{r+n-1}{r}$ 即为 M 的 r -组合的个数.
- 如果存在某个 $k_i < r$, 那么 k_i 对 r -组合的选取会产生影响, 令性质 P_i : r -组合中 a_i 的个数 **大于或等于** $k_i + 1$, 集合 A_i : 满足性质 P_i 的 r -组合的集合, $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}|$ 即为 M 的 r -组合的个数.

例 15

求多重集合 $T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10-组合的数目.

例 15

求多重集合 $T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10-组合的数目.

- 令 $T_\infty = \infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c$
- P_1 : 至少 4 个 a P_2 : 至少 5 个 b P_3 : 至少 6 个 c
- A_i : 具有性质 P_i 的 10-组合的集合 ($i = 1, 2, 3$).

$$|S| = \left(\binom{3}{10} \right) = \binom{10+3-1}{3-1} = 66$$

$$|A_1| = \left(\binom{3}{6} \right) = \binom{6+3-1}{3-1} = 28$$

$$|A_2| = \left(\binom{3}{5} \right) = \binom{5+3-1}{3-1} = 21$$

$$|A_3| = \left(\binom{3}{4} \right) = \binom{4+3-1}{3-1} = 15$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{\binom{3}{1}}{1} = \binom{1+3-1}{3-1} = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{\binom{3}{0}}{0} = \binom{0+3-1}{3-1} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

由容斥原理，得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 = 6$$

例 16

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

的整数解个数.

解 令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3$, 则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即 $0 \leq y_1 \leq 4, 0 \leq y_2 \leq 6, 0 \leq y_3 \leq 5, 0 \leq y_4 \leq 6$.

这就转化为多重集的 16-组合数问题.

令 S 为方程 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ 的所有非负整数解构成的集合, 定义性质 P_i 为 $y_i \geq n_i + 1, 1 \leq i \leq 4$, 这里 $n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 5, n_4 = 6$.

令 X_i 表示 S 中满足性质 P_i 的整数解构成的集合.

则

$$|S| = \left(\binom{4}{16} \right) = \binom{16+3}{3} = 969$$

$$|X_1| = \left(\binom{4}{16-4-1} \right) = \binom{11+3}{3} = 364,$$

$$|X_2| = \left(\binom{4}{16-6-1} \right) = \binom{9+3}{3} = 220$$

$$|X_3| = \left(\binom{4}{16-5-1} \right) = \binom{10+3}{3} = 286,$$

$$|X_4| = \left(\binom{4}{16-6-1} \right) = \binom{9+3}{3} = 220$$

$$|X_1 \cap X_2| = \left(\binom{4}{16-4-1-6-1} \right) = \binom{4+3}{3} = 35$$

$$|X_1 \cap X_3| = \left(\binom{4}{16-4-1-5-1} \right) = \binom{5+3}{3} = 56$$

$$|X_1 \cap X_4| = \left(\binom{4}{16-4-1-6-1} \right) = \binom{4+3}{3} = 35$$

$$|X_2 \cap X_3| = \left(\binom{4}{16-6-1-5-1} \right) = \binom{3+3}{3} = 20$$

$$|X_2 \cap X_4| = \left(\binom{4}{16-6-1-6-1} \right) = \binom{2+3}{3} = 10$$

$$|X_3 \cap X_4| = \left(\binom{4}{16-5-1-6-1} \right) = \binom{3+3}{3} = 20$$

由于 $5 + 6 + 7 = 18 > 16$, 任意三个及三个以上的 X_i 相交都是空集.

从而原方程解的个数为

$$\begin{aligned} |\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \overline{X_4}| &= 969 - (364 + 220 + 286 + 220) \\ &\quad + (35 + 56 + 35 + 20 + 10 + 20) \\ &= 55. \end{aligned}$$