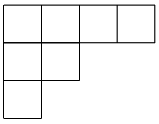
1 排列与杨表的对应

1.1 杨表

杨表 (Young tableau) 是由杨（R.A. Young）在 1901 年研究不变量理论时引入的，它在组合数学、群表示论、数学物理等领域中都有重要应用。通常情况下，杨表是指定义在杨图上的半标准杨表。

给定一个整数分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$，与 λ 对应的杨图 (Young Diagram) 定义为平面上一些左对齐的 k 行方块的集合，使得第 i 行恰有 λ_i 个方块。例如，分拆 $(4, 2, 1)$ 对应的杨图为



在 λ 对应的杨图中，用正整数填充图中的每个方块得到一个阵列 T，若其每行递增每列严格递增，则称 T 为具有形状 λ 的半标准杨表 SSYT（semistandard Young tableau），并记 $\mathrm{sh}(T) = \lambda$。如果 T 中含有 α_i 个 i，那么称 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ 为 T 的类型（type）。例如，下面半标准杨表的类型为 $(1, 2, 2, 1, 1)$。

1	2	3	3
2	5		
4			

设 λ 是 n 的一个分拆。若用 $1, 2, \ldots, n$ 填充 λ 对应的杨图使得每个数字恰好出现一次，并且每行每列递增，则称这样的阵列为具有形状 λ 的标准杨表 SYT（standard Young tableau）。例如下图是一个形状为 $(4, 2, 1)$ 的标准杨表。

1	3	6	7
2	5		
4			

1.2 RSK 算法

RSK 算法是根据罗宾森（G.B. Robinson），森斯特德（C.E. Schensted），克努斯（D.E. Knuth）的名字命名的，它是对称函数领域里一个优美的组合对应。RSK 算法最初是在试图证明李特尔伍德-里查德森法则时作为一个工具由罗宾森于 1938 年提出的，后又被森斯特德于 1961 年在研究排列的最长递增和递降子序列时重新发现，而克努斯于 1970 年将 RSK 算法从排列推广到了广义置换（generalized permutaition）上。关于更多的 RSK 算法的介绍可见 Stanley 书 [3].

RSK 算法的基本运算是行插入算法，即把整数 i 插入行递增和列严格递增的一个表格 T 中，即 T 是一个半标准杨表。把 i 插入 T 后，我们就得到了一个新的

表格，记为 $T \leftarrow i$, 仍旧满足行递增和列严格递增。如果 S 是 T 中的值组成的集合，则 $S \cup \{i\}$ 就是 $T \leftarrow i$ 中的值组成的集合。现在我们就来介绍如何递归地定义 $T \leftarrow i$.

- 如果 T 的第一行是空行或者第一行上的最大值小于 i, 则把 i 插入到第一行的末尾。
- 否则，找到第一行中第一个满足大于 i 的数字 j, 用 i 取代 j, 然后用同样的原则把 j 插入第二行。继续这种算法，直到某个数插入某一行的末尾即停止 (或者在原来的表格中新增了一行)。

同时，我们可以定义与之对应的 *insertion path*，即 T 中所有的那些在这些行插入的过程中改变过的位置的集合，记为 $I(T \leftarrow i)$。

例 1.1 下面是相应的一个简单的例子:

i=5

$$\text{T=}\quad\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 7 & \\ 6 & 6 & 8 & & \\ 9 & & & & \end{array} \qquad\qquad T \leftarrow i = \quad\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 3 & \mathbf{5} & 7 \\ 4 & 5 & 5 & \mathbf{6} & \\ 6 & 6 & \mathbf{7} & & \\ \mathbf{8} & & & & \\ \mathbf{9} & & & & \end{array}$$

$I(T \leftarrow i) = \{(1,4),(2,4),(3,3),(4,1),(5,1)\}$

关于更多的 RSK 算法的介绍可见 Sagan 书 [1]第三章和 Stanley 书 [3]第七章。

令 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in S_n$, 令 $\emptyset$ 为空表格。定义

$$P_i = P_i(w) = (\cdots((\emptyset \leftarrow a_1) \leftarrow a_2) \leftarrow \cdots \leftarrow a_i).$$

也就是说，P_i 是从空表格出发，依次插入 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 而得的。此时 P_i 可以看成是一个标准杨表，除了它的值可以为任意的不同整数，而不是仅仅限制为 $1, 2, \ldots, n$. 记 $P = P(w) = P_n(w)$. 定义 $Q_0 = \emptyset$, 当 Q_{i-1} 确定好之后，定义 $Q_i = Q_i(w)$ 为是在 Q_{i-1} 中插入 i, 使得 Q_i 和 P_i 具有相同的形状，且不改变 Q_{i-1} 中任何元素的位置和值。记 $Q = Q(w) = Q_n(w)$, 最后定义 RSK 算法作用在 w 上后的输出值为一对杨表 (P,Q), 记作 $w \xrightarrow{\text{RSK}} (P,Q)$.

例如，我们对排列 $\pi = 256384197$ 运用 RSK 算法，对应的 (P,Q) 可有如下过程生成。

P_i	Q_i
$\begin{array}{l}2\end{array}$	$\begin{array}{l}1\end{array}$
$\begin{array}{ll}2&5\end{array}$	$\begin{array}{ll}1&2\end{array}$
$\begin{array}{lll}2&5&6\end{array}$	$\begin{array}{lll}1&2&3\end{array}$
$\begin{array}{lll}2&3&6\\5\end{array}$	$\begin{array}{lll}1&2&3\\4\end{array}$
$\begin{array}{llll}2&3&6&8\\5\end{array}$	$\begin{array}{llll}1&2&3&5\\4\end{array}$
$\begin{array}{llll}2&3&4&8\\5&6\end{array}$	$\begin{array}{llll}1&2&3&5\\4&6\end{array}$
$\begin{array}{llll}1&3&4&8\\2&6\\5\end{array}$	$\begin{array}{llll}1&2&3&5\\4&6\\7\end{array}$
$\begin{array}{lllll}1&3&4&8&9\\2&6\\5\end{array}$	$\begin{array}{lllll}1&2&3&5&8\\4&6\\7\end{array}$
$\begin{array}{lllll}1&3&4&7&9\\2&6&8\\5\end{array}$	$\begin{array}{lllll}1&2&3&5&8\\4&6&9\\7\end{array}$

定理 1.2 令 $\mathcal{T}_n = \{(T_1, T_2)|T_1$ 和 T_2 是两个形状均为 $\lambda \mapsto n$ 的标准杨表 $\}$，则 *RSK* 算法给出了 $[n]$ 上的排列集合 S_n 和集合 $\mathcal{T}_n$ 之间的一一对应。

证明 记映射
$$\varphi : S \mapsto \mathcal{T}_n, w = a_1 a_2 \cdots a_n \mapsto (T_1, T_2)$$
为 RSK 算法后所对应的那个映射。

下面来考虑 φ^{-1}。对任一 $(P, Q) = (P(n), Q(n)) \in \mathcal{T}_n$，假定 $Q_{rs} = n$，即 n 在 Q 的第 r 行第 s 列的位置。则令 $Q(n-1) = Q(n) \setminus n$。不难知道，$P_{rs}$ 是将 π_n 插

入 $P(n-1)$ 后对应的 *insertion path* 中最后一个位置的元素。事实上，不难得到 $P(n-1) \leftarrow \pi_n$ 的逆过程：P_{rs} 一定是被 P 的第 $r-1$ 行中最靠右的比 P_{rs} 小的元素不妨设为 $P_{r-1,t}$ 挤入第 r 行的。因此，从 P 中移去 P_{rs} 所在的方格，将 $P_{r-1,t}$ 用 P_{rs} 代换，然后继续将第 $r-2$ 行中最靠右的比 $P_{r-1,t}$ 小的元素用 $P_{r-1,t}$ 代换，$\ldots$，最后，必然从 P 中挤出了某元素即为 π_n。至此，我们由 $(P(n), Q(n))$ 唯一得到了 (n, π_n) 和 $(P(n-1), Q(n-1))$，如此继续，最终可得置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$。∎

如果 $w \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$, 且 P, Q 具有相同的形状 λ, 则我们称 w 具有形状 λ, 记为 $\lambda = \mathrm{sh}(w)$. λ 的共轭分拆 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots)$, 其对应的表格是把 λ 的表格翻转而得。等价地说，j 在 λ' 中出现的次数为 $\lambda_j - \lambda_{j+1}$. 记 $l(\lambda)$ 为分拆 λ 中非零部分的个数，所以 $l(\lambda) = \lambda'_1$.

w 的一个递增子序列是指一个子序列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ 满足 $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$, 类似地可以定义递减子序列。例如，若 $w = 5642713$, 则 567 是一个递增子序列，543 是一个递减子序列。令 $\mathrm{is}(w)(\mathrm{ds}(w))$ 为 w 中的最长递增（递减）子序列的长度。对于如上的 w, 我们有 $\mathrm{is}(w) = 3$ (对应于 567), $\mathrm{ds}(w) = 4$ (对应于序列 5421 或 6421). 由 RSK 算法，我们可以发现 T_1 中第一行的方格总数即为 $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最长递增子列的长度；T_1 中第一列的方格总数即为 $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最长递减子列的长度。所以我们可以得到以下关于排列中的最长的递增或递减子序列的长度与对于杨表之间的关系。

定理 1.3 *令 $w \in S_n$, 且 $\mathrm{sh}(w) = \lambda$, 则*

$$\begin{aligned} \mathrm{is}(w) &= \lambda_1, & (1) \\ \mathrm{ds}(w) &= \lambda'_1. & (2) \end{aligned}$$

下面我们考虑置换 π 与其逆置换 π^{-1} 在 RSK 算法下所对应的杨表之间的相互关系。

定理 1.4 *若 $\pi \in S_n$ 并且 $\pi \xrightarrow{RSK} (P, Q)$，则对 π 的逆 π^{-1}，有 $\pi^{-1} \xrightarrow{RSK} (Q, P)$。*

证明 设 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_{sorted}$ (即适当排列使得 $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_{sorted}$ 中第一行元素递增)。按如下方式定义 inversion poset $I = I\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 的每列定义为 I 中的每个点，若 $a < c, b < d$, 则在 I 中 $ab < cd$ (为方便起见，将 $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ 记为 ab)。

由 $I(A)$ 的定义容易得到下面的引理。

引理 1.5 *映射 $\varphi : I\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to I\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ $\varphi(ab) = ba$ 是 $I\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 到 $I\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ 的同构。*

定义 I_1 是 I 中最小元的集合，I_2 是 $I-I_1$ 中最小元的集合，I_3 是 $I-I_1-I_2$ 中最小元的集合，$\cdots$。注意，易知 I_i 是 I 中的反链即它的元素可以记为: $(u_{i1},v_{i1}),(u_{i2},v_{i2}),\ldots,(u_{in_i},v_{in_i})$ 使得 $u_{i1}<u_{i2}<\cdots<u_{in_i}$ 且 $v_{i1}>v_{i2}>\cdots>v_{in_i}(n_i=|I_i|)$。我们假定以下反链中的元素都作如此标记。

引理 1.6 *若 $I_1,I_2,\ldots,I_d$ 是如上标记的 I 的非空反链,则 P 的第一行元素是 $v_{1n_1}v_{2n_2}\cdots v_{dn_d}$，$Q$ 的第一行元素是 $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$。并且，若 $(u_k,v_k)\in I_i$，则 v_k 在 RSK 算法执行过程中被插入 $P(k-1)$ 第一行的第 i 个位置。*

引理1.6的证明 通过对 n 归纳来证此引理。$n=1$ 时显然结果是平凡的。假设对 $n-1$ 时此引理成立,并且令 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$。设 $(P(n-1),Q(n-1))$ 是插入 $v_1,\ldots,v_{n-1}$ 后所得到的 tableau，$I_i^{'}:=I_i\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}=\{(\tilde{u}_{i_1},\tilde{v}_{i_1}),(\tilde{u}_{i_2},\tilde{v}_{i_2}),\ldots,(\tilde{u}_{im_i},\tilde{v}_{im_i})\}$,
$1\le i\le e(e=d-1$ 或 $e=d)$。由归纳假设易知,$P(n-1)$ 的第一行是 $\tilde{v}_{1m_1}\tilde{v}_{2m_2}\cdots\tilde{v}_{em_e}$，$Q(n-1)$ 的第一行是 $\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{21}\cdots\tilde{u}_{e1}$。现在将 v_n 插入 $P(n-1)$。若 $\tilde{v}_{im_i}>v_n$，则 $I_i^{'}\cup(u_n,v_n)$ 是 $I\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 的一个反链。因此易知若 i 是最小的满足 $\tilde{v}_{im_i}>v_n$ 的下标，则 $(u_n,v_n)\in I_i\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$；若不存在这样的 i，则 $I_d=\{(u_n,v_n)\}$。从而此引理得证。

若记 $I_i\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\{(u_{i1},v_{i1}),(u_{i2},v_{i2}),\ldots,(u_{im_i},v_{im_i})\}$ 且其中有 $u_{i1}<u_{i2}<\cdots<u_{im_i},v_{i1}>v_{i2}>\cdots>v_{im_i}$ 成立，则 $I_i\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}=\{(v_{im_i},u_{im_i}),\ldots,(v_{i2},u_{i2}),(v_{i1},u_{i1})\}$ 且 $v_{im_i}<\cdots<v_{i2}<v_{i1},u_{im_i}>\cdots>u_{i2}>u_{i1}$。因此若 $\pi^{-1}\xrightarrow{\text{RSK}}(P^{'},Q^{'})$，则由引理 1.3 知 $P^{'}$ 的第一行元素是 $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$，$Q^{'}$ 的第一行元素是 $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$。即 $P^{'},Q^{'}$ 的第一行元素与 Q,P 的第一行元素分别相等。

易知，在 RSK 算法执行过程中，$v_{ij}(1\le j<m_i)$ 比 $v_{rs}(1\le s<m_r)$ 先被挤入第二行当且仅当 $u_{i,j+1}<u_{r,s+1}$。设 $\overline{P},\overline{Q}$ 分别表示移去 P,Q 第一行后所得的 tableau，从而有

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} u_{12} & \cdots & u_{1m_1} & u_{22} & \cdots & u_{2m_2} & \cdots & u_{d2} & \cdots & u_{dm_d} \\ v_{11} & \cdots & v_{1,m_1-1} & v_{21} & \cdots & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{d1} & \cdots & v_{d,m_d-1} \end{pmatrix}_{sorted}$$
$$\xrightarrow{\text{RSK}}(\overline{P},\overline{Q}).$$

设 $\overline{P}^{'},\overline{Q}^{'}$ 分别表示移去 $P^{'},Q^{'}$ 第一行后所得的 tableau，对 $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ 进行类似讨论有:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_{1,m_1-1} & \cdots & v_{11} & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{21} & \cdots & v_{d,m_d-1} & \cdots & v_{d1} \\ u_{1m_1} & \cdots & u_{12} & u_{2m_2} & \cdots & u_{22} & \cdots & u_{dm_d} & \cdots & u_{d2} \end{pmatrix}_{sorted}$$
$$\xrightarrow{\text{RSK}} (\overline{P}', \overline{Q}').$$

由于 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ a' \end{pmatrix}_{sorted}$，从而由对行数的归纳易知 $(\overline{P}', \overline{Q}') = (\overline{Q}, \overline{P})$。 ∎

参考文献

[1] B. Sagan, The Symmetric Group, second ed. Graduate Texts in Mathematics 203, Springer-Verlag, New York, 2001. 2

[2] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 1. Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986; second printing, Cambridge University Press, New York/Cambridge, 1996.

[3] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 2. Cambridge University Press, New York/Cambridge, 1999. 1, 2

[4] D. Stanton and D. White, Constructive Combinatorics, Springer, New York (1986).