第一章　多项式

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Outline

1. 数域

§1 数域

定义

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 *0* 与 *1*. 如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在 P 中，则称 P 为一个数域.

常用到的数域：有理数域 $\mathbb{Q}$ 、实数域 $\mathbb{R}$、复数域 $\mathbb{C}$.

数域定义的另一形式

定义

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 *0* 与 *1*. 如果对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）运算封闭，则称 P 为一个数域.

例 1

所有形如 $a+b\sqrt{2}(a, b$ 是有理数$)$ 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

例 1

所有形如 $a+b\sqrt{2}(a,b$ 是有理数$)$ 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证明 (i) $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(ii) 对四则运算封闭. 事实上 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 设

$\alpha=a+b\sqrt{2},\beta=c+d\sqrt{2}$, 有

$$\alpha\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$\alpha\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

设 $\alpha=a+b\sqrt{2}\neq 0,\quad$ 则 $a-b\sqrt{2}\neq 0$ 且

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

注

有理数域是最小的数域。**证明**　设 P 为一个数域.

- 由定义知 $1 \in P$,
- 又 P 对加法封闭知：$1+1=2$，$1+2=3$, $\cdots$, P 包含所有自然数；
- 由 $0 \in P$ 及 P 对减法的封闭性知：P 包含所有负整数，因而 P 包含所有整数；
- 任何一个有理数都可以表为两个整数的商，由 P 对除法的封闭性知：P 包含所有有理数.

即任何数域都包含有理数域作为它的一部分.

∎