第六章　线性空间

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Outline

- 线性空间 (linear space) 也叫向量空间是线性代数的重要内容. 线性空间的概念具体展示了代数的高度抽象性和应用的广泛性.
- 本章涉及概念多，要利用解析几何中已经学过的内容理解这些抽象的概念，在理解的基础上搞清概念之间的联系. 在学习中也会暴露在逻辑上的不少混乱，因此这一章对逻辑思维能力的训练也是十分重要的.
- 初学者感到困难，不习惯从概念出发进行推理，这一点要通过听课和练习逐步培养.

一、集合

定义

- 集合是指作为整体一起看的一堆东西. 通常用大写英文字母 $A, B, C, \ldots$ 表示.
- 组成集合的东西叫元素, 用小写英文字母 $a, b, c, \ldots$ 表示.

定义

- $a \in A$ 表示 a 是 A 的元素
- $a \notin A$(或$a \bar{\in} A$) 表示 a 不是 A 的元素

集合的表示法:

- 列举法　把集合中的所有元素一一列举出来.
  例如, $M = \{1, 2, 3\}$.
- 描述法　$M = \{a | a \text{ 具有的性质}\}$
  例如, 适合方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的全部点的集合 M 可写成

$$M = \left\{ (x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

又例如, 两个多项式 $f(x), g(x)$ 的公因式的集合可写成

$$M = \{d(x) | d(x) | f(x), d(x) | g(x)\}$$

定义

- 集合的运算

$$\mathrm{M} \cap \mathrm{N} = \{\mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathrm{M} \text{ 且} \mathrm{x} \in \mathrm{N}\}$$

$$\mathrm{M} \cup \mathrm{N} = \{\mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathrm{M} \text{ 或} \mathrm{x} \in \mathrm{N}\}$$

- 集合的包含

  称 M 是 N 的子集（记为 $M \subset N$), 如果 $x \in \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{N}$

- 集合的相等

  称 $M = N$，如果 M 和 N 具有相同元素或者说 $x \in \mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{N}$

性质

$$\mathrm{M} = \mathrm{N} \Leftrightarrow \mathrm{M} \subset \mathrm{N}, \mathrm{N} \subset \mathrm{M}$$

二、映射

定义

设 A 与 B 是两个集合, 所谓集合 A 到集合 B 的一个映射就是指一个法则, 它使 A 中每一个元素 a 都有 B 中一个确定的元素 b 与之对应. 如果映射 $\mathscr{A}$ 使元素 $b \in B$ 与元素 $a \in A$ 对应那么就记为

$$\mathscr{A}(a) = b$$

b 称为 a 在映射 $\mathscr{A}$ 下的像, 而 a 称为 b 在映射 $\mathscr{A}$ 下的一个原像.

A 到 A 自身的映射, 有时也称为 A 到自身的变换.

定义

集合 A 到集合 B 的两个映射 $\mathscr{A}$ 及 τ, 若对 M 的每个元素 a 都有 $\mathscr{A}(a) = \tau(a)$, 则称它们相等, 记作 $\mathscr{A} = \tau$.

例 1

设 Z 是整数全体， M 是偶数的全体. 定义 $\mathscr{A}: Z \to M$, $\quad \mathscr{A}(n) = 2n$ 则 $\mathscr{A}$ 是 Z 到 M 的映射.

例 2

设 P 是一个数域. 定义 $\mathscr{A}_1 : P^{n\times n} \to P$, $\quad \mathscr{A}(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|$, 则 $\mathscr{A}_1$ 是 $P^{n\times n}$ 到 P 的映射.

例 3

定义 $\mathscr{A}_2(a) = aE$, $\quad a \in P, E$ 是 n 级单位矩阵, 这是 P 到 $P^{n\times n}$ 的一个映射.

例 4

对于 $f(x) \in P[x]$, 定义

$$\mathscr{A}(f(x)) = f'(x)$$

这是 $P[x]$ 到自身的一个映射.

例 5

设 M_1, M_2 是两个非空的集合，a_0 是 M_2 中一个固定的元素，定义

$$\mathscr{A}(a) = a_0, \quad a \in M_1$$

即 $\mathscr{A}$ 把 M_1 的每个元素都映到 a_0, 这是 M_1 到 M_2 的一个映射.

例 6

设 M 是一集合, 定义

$$\mathscr{A}(a) = a, a \in M$$

即 $\mathscr{A}$ 把每个元素映到它自身, 称为集合 M 的恒等映射或单位映射, 记为 1_M. 在不致引起混淆时, 也可以简单地记为 1.

例 7

任意一个定义在全体实数上的函数

$$y = f(x)$$

都是实数集合到自身的映射. 因此, 函数可以认为是映射的一个特殊情形.

映射的乘积

定义

设 $\mathscr{A}, \tau$ 分别是集合 M_1 到 M_2, M_2 到 M_3 的映射, 乘积 $\tau\mathscr{A}$ 定义为

$$(\tau\mathscr{A})(a) = \tau(\mathscr{A}(a)), a \in M$$

即相继施行 $\mathscr{A}$ 和 τ 的结果, $\tau\mathscr{A}$ 是 M_1 到 M_3 的一个映射.

例 8

例如, 上面例 2 与例 3 中映射的乘积 $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$ 就把每个 n 级矩阵 A 映到数量矩阵 $|A|E$, 它是全体 n 级矩阵的集合到自身的一个映射.

性质

- 与恒等映射的乘法 $f\colon A \to B$
$$1_B f = f 1_A = f.$$
- 映射的合成满足结合律 设 $\mathscr{A}, \tau, \psi$ 分别是集合 A 到 B, B 到 C, C 到 D 的映射, 映射乘法的结合律就是
$$(\psi\tau)\mathscr{A} = \psi(\tau\mathscr{A}).$$

定义

- 单射： $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

  $\Leftrightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$
- 满射: $f(A) = B$

  $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A,\ s.t.\ \ b = f(a)$
- 双射： 既是单射又满射

定义

- 逆映射： 若 f 是双射, $f: A \to B, \quad f(a) = b$ 则可以定义逆映射

$$f^{-1}: B \to A, \quad f^{-1}(b) = a$$

性质

f^{-1} 还是双射, 并且

$$f^{-1}f = 1_A, ff^{-1} = 1_B$$

性质

设映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$,

- 若 f 是单射, g 是单射, 则 gf 也是单射;
- 若 f 是满射, g 是满射, 则 gf 也是满射;
- 若 f, g 都是双射, 则 gf 也是双射.

性质

设映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$,

- 若 gf 是单射, 则 f 是单射;
- 若 gf 是满射, 则 g 是满射;
- 若 gf 是双射, 则 f 是单射 g 是满射.

§2 线性空间的定义与简单性质

- 线性空间是线性代数最基本的概念之一.
- 这一节我们来介绍它的定义, 并讨论它的一些最简单的性质.
- 线性空间也是我们碰到的第一个抽象的概念.

为了说明线性空间的来源，在引入定义之前，先看几个熟知的例子.

例 1

- 在解析几何中, 我们讨论过三维空间中的向量.
- 向量的基本属性是可以按平行四边形规律相加，也可以与实数作数量乘法.
- 不少几何和力学对象的性质是通过向量的这两种运算来描述的.

例 2

为解线性方程组, 我们讨论过以 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为元素

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

P_n: 数域 P 上的所有 n 维向量组成的集合, 连同在其上定义的加法和数乘运算, 构成数域 P 上的 n 维向量空间.

对于函数, 也可以定义加法和函数与实数的数量乘法.

例 3

考虑全体定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

连续函数的和是连续函数，连续函数与实数的数量乘积还是连续函数.

定义

- 设 V 是一非空集合, P 是一数域.
- 在集合 V 的元素之间定义一种"加法"运算, 即对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 在 V 中都有唯一确定的元素 γ 与之对应, 称 γ 为 α 与 β 的和, 记作

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

- 在数域 P 与集合 V 的元素之间定义一种 "数量乘法" 运算, 即对于任意 $k \in P$ 和 $\alpha \in V$, 在 V 中也都有惟一确定的元素 δ 与之对应, δ 称为 k 与 α 数量乘积, 记作 $\delta = k\alpha$.

定义

如果上述运算满足如下 *8* 条运算性质, 则称 V 是数域 P 上的线性空间.

1. 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. 存在向量 $\mathbf{0}$, 使得对任一个向量 α, 都有 $\alpha + 0 = \alpha$
4. 对任一个向量 α, 存在向量 α ， 使得 $\alpha + \alpha' = 0$
5. *1* 的数乘: $1\alpha = \alpha$
6. 数乘结合律 : $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
7. 数乘分配律: $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
8. 数乘分配律: $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

其中 α, β, γ 是 V 中的向量, $k, l \in P$.

下面再来举几个例子.

例 4

- 数域 P 上一元多项式环 $P[x]$, 按通常的多项式加法和数与多项式的乘法, 构成一个数域 P 上的线性空间.
- 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式, 再添上零多项式也构成数域 P 上的一个线性空间, 用 $P[x]_n$ 表示.

例 5

元素属于数域 P 的 $m \times n$ 矩阵, 按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法, 构成数域 P 上的一个线性空间, 用 $P^{m\times n}$ 表示.

例 6

全体实函数, 按函数的加法和数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 7

数域 P 按照本身的加法与乘法，即构成一个数域 P 自身上的线性空间.

例 8

数域 P 上的齐次线性方程组 $AX = 0$ 的全体解向量, 在向量加法及数乘向量运算下构成 P 上线性空间.

例 9

设 V 是全体正实数的集合 $\mathbb{R}^+$, 数域是实数域 $\mathbb{R}$. 定义 V 中的加法与数乘为

$$a \oplus b = ab,$$
$$k \cdot a = a^k,$$

则 $\mathbb{R}^+$ 对于所定义的运算构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.
这里的零元素是实数 1, a 的负元素是 a^{-1}.

注

- 线性空间的元素也称为向量. 这里所谓向量比几何中所谓向量的涵义要广泛得多. 线性空间有时也称为向量空间.
- 常用黑体的小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 代表线性空间 V 中的元素, 用小写的拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 代表数域 P 中的数.
-

下面我们直接从定义来证明线性空间的一些简单性质.

性质 1

零元素是唯一的.

证明 假设 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素. 我们来证 $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. 考虑和

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2$$

由于 $\mathbf{0}_1$ 是零元素, 所以 $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$. 又由于 $\mathbf{0}_2$ 也是零元素, 所以

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1$$

于是

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$$

这就证明了零元素的唯一性. ∎

仅有一个零向量组成的线性空间称为零空间, 零空间一般记作 $\mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$.

性质 2

负元素是唯一的. 这就是说，适合条件 $\alpha+\beta=0$ 的元素 β 是被元素 α 唯一决定的.

证明 假设 α 有两个负元素 β 与 γ

$$\alpha+\beta=\mathbf{0}, \alpha+\gamma=\mathbf{0}$$

那么

$$\beta=\beta+\mathbf{0}=\beta+(\alpha+\gamma)=(\beta+\alpha)+\gamma=\mathbf{0}+\gamma=\gamma.$$

定义

向量 α 的负元素记为 $-\alpha$ 利用负元素, 我们定义减法如下:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

性质 3

$$0\alpha = \mathbf{0}; \quad k\mathbf{0} = \mathbf{0}; \quad (-1)\alpha = -\alpha.$$

证明

- 我们先来证 $0\alpha = \mathbf{0}$. 因为

$$\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha,$$

  两边加上 $-\alpha$ 即得 $\qquad 0\alpha = \mathbf{0}.$

- 再证 $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 因为

$$k\mathbf{0} + k\alpha = k(\mathbf{0} + \alpha) = k\alpha,$$

  两边加上 $-k\alpha$ 即得 $\qquad k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$

- 证第三个等式. 我们有

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = \mathbf{0},$$

  两边加上 $-\alpha$ 即得 $\qquad (-1)\alpha = -\alpha.$

性质 4

如果 $k\alpha = \mathbf{0}$, 那么 $k = 0$ 或者 $\alpha = \mathbf{0}$.

证明 假设 $k \neq 0$, 于是一方面

$$k^{-1}(ka) = k^{-1}0 = \mathbf{0}.$$

而另一方面

$$k^{-1}(k\alpha) = \left(k^{-1}k\right)\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

由此即得 $\alpha = \mathbf{0}$.

向量空间中的概念和结论, 都可平移过来

定义

设 V 是数域 P 上的一个线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (r \geqslant 1)$ 是 V 中一组向量, $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 是数域 P 中的数, 那么向量

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{,\alpha}$$

称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha$ 的一个线性组合. 有时我们也说向量 α 可以用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha$ 线性表出.

定义

设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \tag{1}$$

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \tag{2}$$

是 V 中两个向量组.

- 如果(1)中每个向量都可以用向量组(2)线性表出, 那么称向量组(1)可以用向量组(2)**线性表出**.
- 如果(1)与(2)可以互相线性表出, 那么向量组(1)与(2)称为**等价的**.

定义

- 线性空间 V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \quad (r \geqslant 1)$ 称为线性相关, 如果在数域 P 中有 r 个不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0 \tag{3}$$

- 如果向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 不线性相关, 就称为线性无关.
换句话说, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha$, 称为线性无关, 如果等式(3)只有在 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$ 时才成立.

常用的结论

1.
   - 单个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$;
   - 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \quad (m \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

2.
   - 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表示, 并且 $s > t$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关.
   - 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关并且可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表示，则 $s \leq t$.
   - 两个等价的线性无关的向量组, 必含有相同个数的向量.

3.
   - 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示，且表示法唯一.

维数

在一个线性空间中，究竟最多能有几个线性无关的向量，是线性空间的一个重要属性.

定义

如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，但虽没有更多数目的线性无关的向量，那么 V 就称为 n 维的；如 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，那么 V 就称为无限维的.

例 1

n 元数组所成的空间是 n 维的.

例 2

由所有实系数多项式所成的实线性空间是无限维的. 因为对于任意的 n，都有 n 个线性无关的向量.

在解析几何中我们看到, 为了研究向量的性质, 引入坐标是一个重要的步骤.

对于有限维线性空间, 坐标同样是一个有力的工具.

定义

在 n 维线性空间 V 中,

- n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 称为 V 的一组**基**.
- 设 α 是 V 中任一向量, 于是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \alpha$ 线性相关, 因此 α 可以被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出,

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

  其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是被向量 α 和基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 唯一确定的, 这组数就称为 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的**坐标**, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

注

- 零空间 $\mathbf{0}$ 没有基，规定其维数为 0，即 $\dim \mathbf{0} = 0$.
- 无限维空间是一个专门研究的对象，它与有限维空间有比较大的差别. 但是上面提到的线性表出，线性相关，线性无关等性质，只要不涉及维数和基，就对无限维空间成立. 在本课程中，我们主要讨论有限维空间.

定理 1

如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 且 V 中任一向量都可以用它们线性表出. 那么 V 是 n 维的, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基.

证明 既然 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的, 那么 V 的维数至少是 n. 为了证明 V 是 n 维的, 只须证 V 中任意 $n+1$ 个向量必定线性相关. 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}$ 是 V 中任意 $n+1$ 个向量, 它们可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性走出假如它们线性无关, 就有 $n+1 \leqslant n$, 于是得出矛盾. ∎

例 1

在线性空间 $P[x]_n$ 中 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 是 n 个线性无关的向量，而且每一个次数小于 n 的数域 P 上的多项式都可以被它们线性表出，所以 $P[x]_n$ 是 n 维的，而

$$1, x, \cdots, x^{n-1}$$

就是它的一组基. 在这组基下，多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ 的坐标就是它的系数

$$\left(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\right).$$

例 1

如果在 V 中取另外一组基中

$$\varepsilon_1' = 1, \varepsilon_2' = (x-a), \cdots, \varepsilon_n' = (x-a)^{n-1}$$

那么按泰勒展开公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

因此，$f(x)$ 在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$ 下的坐标是

$$\left(f(a), f'(a), \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \right).$$

例 2

在 n 维空间 P^n 中,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

是一组基. 对每一个向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 都有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

所以 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 就是向量 α 在这组基下的坐标.

例 2

另一方面，

$$\begin{cases} \varepsilon_1' = (1, 1, \cdots, 1) \\ \varepsilon_2' = (0, 1, \cdots, 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = (0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

是 P^n 中 n 个线性无关的向量. 在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$ 下, 对于向量 $= (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1' + (a_2 - a_1)\varepsilon_2' + \cdots + (a_n - a_{n-1})\varepsilon_n'$$

因此，在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$ 下的坐标为

$$(a_1, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1})$$

例 3

- 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看作是自身上的线性空间, 那么它是一维的, 数 *1* 就是一组基;
- 如果看作是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 那么就是二维的, 数 *1* 与 *i* 就是一组基.

这个例子告诉我们, 维数是和所考虑的数域有关的.

例 4

在线性空间 $P^{m\times n}$ 中, 记 E_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素为 *1*, 其它元素均为 *0* 的 $m\times n$ 矩阵. 关于任一 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 有

$$A=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}E_{ij}$$

所以 $\{E_{ij}\}_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ 线性无关. 从而, $\{E_{ij}\}_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ 是 $P^{m\times n}$ 的一组基, 且 $\dim P^{m\times n}=mn$.

例 5

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $AX = O$ 的解向量全体构成一个线性空间, 称为线性方程组 $AX = O$ 的解空间.

若矩阵 A 的秩为 r, 则解空间的维数为 $n - r$.

例 6

在 F^4 中, 求 $\xi = (1, 2, 1, 1)$ 在基

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \\ \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1), \\ \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1), \\ \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1), \end{cases}$$

下的坐标.

解 令 $\xi = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4$, 比较分量得

$$\begin{cases} a+b+c+d=1, \\ a+b-c-d=2, \\ a-b+c-d=1, \\ a-b-c+d=1. \end{cases}$$

解得 $a=\frac{5}{4}, b=\frac{1}{4}, c=-\frac{1}{4}, d=-\frac{1}{4}$.

故 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

§4 基变换与坐标变换

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 n 维线性空间 V 中两组基, 它们的关系是

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{mm}\varepsilon_n. \end{cases} \tag{1}$$

设向量 ξ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 即

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \cdots + y_n\eta_n$$

现在的问题就是找出 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的关系.

定义

称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 的过渡矩阵.

- 过渡矩阵一定可逆;
- 可采用矩阵乘积运算规则将上式形式地记为

$$(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\,A$$

关于形式记法

性质

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基, 且

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) A.$$

于是,

- $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是 V 的基 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 可逆.
- 当 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为 V 的基时, 有关系式

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) A^{-1}.$$

关于形式记法

性质

设 $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 是线性空间 V 的两个向量组, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 是两个 n 阶方阵, 则有

- $([\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] A) B = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] (AB)$
- $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) A + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) (A + B)$
- $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) A + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) A$
  $= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) A$

坐标变换

性质

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是线性空间 V 的两组基, 且由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 过渡矩阵是 A, 即

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\, A.$$

ξ 是 V 中的一个向量, 设 ξ 对于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $Y = (y_1 y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$X = AY, \quad Y = A^{-1}X.$$

例 1

在 §3 例 2 中，我们有

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

就是过渡矩阵.

例 1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

也就是

$$y_1 = x_1, \quad y_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 2, \cdots, n)$$

例 2

设 $P_3[x]$ 的一组基 $1, x, x^2, x^3$.

(1) 证明 $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3$ 也是一组基

(2) 求基 $1, x, x^2, x^3$ 到 $1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3$ 的过渡矩阵.

解

$$\left(1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\right) = \left(1, x, x^2, x^3\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A}$$

因为 $|A| = 1 \neq 0$, 所以矩阵 A 可逆.

故 $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3$ 也是一组基, 且 A 为过渡矩阵. ∎

上例给出了证明向量组为基的办法.

例 3

已知 $f_1=1-x, f_2=1+x^2, f_3=x+2x^2$ 与 $g_1=x, g_2=1-x^2, g_3=1-x+x^2$ 是 $P[x]_3$ 中的两个向量组,

1. 证明 f_1,f_2,f_3 和 g_1,g_2,g_3 都是 $P[x]_3$ 的基,
2. 求由基 f_1,f_2,f_3 到基 g_1,g_2,g_3 的过渡矩阵,
3. 求 $f=1+2x+3x^2$ 分别在基 f_1,f_2,f_3 与基 g_1,g_2,g_3 下的坐标.

解

$$(f_1,f_2,f_3)=(1,x,x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A}$$

$$(g_1,g_2,g_3)=(1,x,x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=B}$$

(1) $|A| = 1, |B| = -2$, 故 A, B 都可逆. 又因为线性空间 $P[x]_3$ 的维数为 3,
所以 f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 都是 $P[x]_3$ 的基.
(2)
$$(g_1, g_2, g_3) = \left(1, x, x^2\right) B = (f_1, f_2, f_3) A^{-1} B$$
计算可得, 由基 f_1, f_2, f_3 到基 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵为
$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(3) \quad f = 1 + 2x + 3x^2 &= \left(1, x, x^2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= (f_1, f_2, f_3)\, A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (g_1, g_2, g_3)\, B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (g_1, g_2, g_3) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此, $f = 1 + 2x + 3x^2$ 在基 f_1, f_2, f_3 下的坐标为 $(-2, 3, 0)$,
f 在基 g_1, g_2, g_3 下的坐标为 $(4, -1, 2)$.

定义

设 W 是数域 P 上线性空间 V 的非空子集, 若 W 对于 V 的两种运算也构成线性空间，则称 W 为 V 的线性子空间，简称子空间.

例 1

对于任意线性空间 V，由单个零向量组成的子集 $\{\mathbf{0}\}$ 和 V 都是 V 的子空间，称为 V 的 平凡子空间, 其中 $\{\mathbf{0}\}$ 称为零子空间.

例 2

$V = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$ 表示通常几何空间中由 xOy 平面上所有向量全体作成的集合，它是一个线性空间，从而是几何空间 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

子空间的判别

定理 2

设 W 是线性空间 V 的非空子集合, 则

$$W \text{ 是 } V \text{ 的子空间} \Leftrightarrow W \text{ 对于 } V \text{ 的运算是封闭的.}$$

证明　必要性　由子空间的定义可知.

充分性　因为 W 对于加法及数与向量的乘法运算封闭. 所以性质 1), 2), 5) ,6), 7), 8) 成立. 剩下来只须证明 3) 和 4) 成立即可.

取数 0, 则对任意 $\alpha \in W$, 都有 $0\alpha = \mathbf{0} \in W$ 后者就是 W 的零向量;

又对任意 $\alpha \in W$, 取数 -1, 则 $(-1)\alpha = -\alpha \in W$, 即为 α 的负向量.

于是 3) 与 4) 满足, 从而 W 是 V 的子空间. ∎

例 3

$V=\{(x,y,1)|x,y\in\mathbb{R}\}$ 表示通常几何空间中与 xOy 平面平行、纵坐标为 *1* 的平面上所有向量全体作成的集合，它不构成线性空间.

例 4

$$V=\{(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},0)\mid a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\in P\}$$

是数域 P 上的线性空间, 因而是 P^n 的子空间.

例 5

$V=\{(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},1)\,|a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\in P\}$ 不是线性空间, 因为 V 对于加法运算不封闭.

例 6

在线性空间 $P_n[x]$ 中

$$P_{n-1}[x], P_{n-2}[x], \ldots, P_1[x]$$

都是 $P_n[x]$ 的子空间; 而且由于

$$P_n[x] \supset P_{n-1}[x] \supset \ldots \supset P_1[x]$$

后者也都是前者的子空间.

例 7 (解空间)

在线性空间 P^n 中, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的全部解向量组成 P^n 的子空间，称之为齐次线性方程组的解空间.

解空间的基就是方程组的基础解系，它的维数等于 $n-r$, 其中 r 为系数矩阵的秩.

例 8

设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix},$$

记 $W=\left\{B\,|\,AB=BA,B\in P^{3\times 3}\right\}$, 求 W 的维数和一组基.

解 设

$$A=E+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}=E+T,\quad B=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\x&y&z\end{pmatrix}$$

满足 $AB=BA$, 而 $AB=BA$ 等价于 $TB=BT$. 即

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 2d+x & 2e+y & 2f+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c & a+b+c \\ 0 & 2f & d+e+f \\ 0 & 2z & x+y+z \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} d=x=0 \\ y=2c=2f \\ a+b+c=z \\ e+f=z \end{cases}$, 取 a,b,c 自由, 则 $\begin{cases} d=x=0 \\ y=2f=2c \\ z=a+b+c \\ e=a+b \end{cases}$ 故

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+b & c \\ 0 & 2c & a+b+c \end{pmatrix}$$

因此,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+b & c \\ 0 & 2c & a+b+c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in P \right\}$$

于是, $\dim W = 3$, 且一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、生成子空间

定义 (生成子空间)

设 V 是 P 上线性空间, α_1, α_2 是的向量.

考虑它们所有可能的线性组合的集合

$$W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_\mathrm{m}\alpha_\mathrm{m} | k_1, \ldots, k_\mathrm{m} \in P\}$$

对于 V 的运算封闭, 所以 W 为 V 的子空间, 称为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 生成的子空间, 记作 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

例 9

设 A 是数域 P 上的 $m \times n$ 矩阵, 且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是矩阵 A 的列向量, 则称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 为矩阵 A 的列空间, 它是 P^n 的子空间.

注

- $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 是 V 中包含向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的最小子空间.

  证明　因为任何包含 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的 V 的子空间一定包含 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的所有线性组合，从而包含 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

- 有限维线性空间 V 的任何子空间 W 都具形式 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$.

  证明　取 W 的任何一组基作为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 即可.

定理 3

1. 两个向量组生成相同子空间 $\Leftrightarrow$ 这两个向量组等价.
2. $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$

证明 (1) $\Rightarrow$ 设 L $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ 则 β_i 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示. 同样, α_j 也可由 $\beta_1\beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表示.
$\Leftarrow$ $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 中向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示, 从而可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表示. 于是, $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 含于 $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ 中. 同理 $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ 含于 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 之中.
(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的秩为 r, 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 为极大线性无关组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 等价, 从而

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s).$$

由定理 1 可知, $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, 它的维数是 r.

定理 4

设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 W 的一组基, 那么这组向量必定可扩充并整个空间的基. 也就是说, 在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n$, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基.

证明　对维数差 $n-m$ 作归纳法.

- 当 $n-m=0$, 定理成立，因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 已经是 V 的基.
- 现在假定 $n-m=k$ 时定理成立.
- 我们考虑 $n-m=k+1$ 的情形. 既然 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 还不是 V 的一组基, 它又是线性无关的. 那么在 V 中必定有一个向量 α_{m+1} 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出, 把 α_{m+1} 添加进去

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$$

  必定是线性无关的. 由定理 3, 子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的.

因为

$$n-(m+1)=(n-m)-1=k+1-1=k,$$

由归纳假设, $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1})$ 的基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$$

可以扩充为整个空间的基.

根据归纳法原理，定理得证. ∎

例 10

求下列子空间的维数和一组基:

1. $L((2,-3,1),(1,4,2),(5,-2,4)) \subseteq P^3$
2. $L\left(x-1, 1-x^2, x^2-x\right) \subseteq P[x]$
3. $L\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right) \subseteq P^{2\times 2}$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以，维数为 2，一组基为 $(2,-3,1),(1,4,2)$.

2) $(x-1, 1-x^2, x^2-x) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，维数为 2，一组基为 $x-1, 1-x^2$

3)

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，维数为 2，一组基为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

定义

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交与和分别定义为

$$V_1 \cap V_2 := \{\alpha \,|\, \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\},$$

$$V_1 + V_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 \,|\, \alpha_1 \in V_1 \text{ 且 } \alpha_2 \in V_2\}.$$

注

- 交与和均满足交换律与结合律，即
  - $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$.
  - $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$.
  - $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$.
  - $(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$.
- 由结合律, 可定义任意有限多个子空间的交与和.

性质

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则

- 交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.
- 和 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间

证明 (1) 由 $\mathbf{0} \in V_1$, $\mathbf{0} \in V_2$, 知 $\mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$. 因而 $V_1 \cap V_2$ 非空.
又设 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$, 即 $\alpha, \beta \in V_1$, 且 $\alpha, \beta \in V_2$,
那么 $\alpha + \beta \in V_1, \alpha + \beta \in V_2$, 因此 $\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$.
对数量乘积可类似证明. 所以 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间.
(2) 由 $\mathbf{0} \in V_1$, $\mathbf{0} \in V_2$, 知 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in V_1 + V_2$, 故 $V_1 + V_2$ 非空.
又设 $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$, 即

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1 \in V_1, \beta_2 \in V_2$$

则 $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in V_1 + V_2$.
同样可证 $k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2$. 所以, $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间. ∎

注

- $V_1 \cup V_2$ 不是子空间.

  实际上, 任给 $\alpha, \beta \in V_1 \cup V_2$, 则 $\alpha, \beta \in V_1$ 或者 $\alpha, \beta \in V_2$.

  若 $\alpha, \beta \in V_1$ 则 $k\alpha + l\beta \in V_1 \cup V_2$;

  若 $\alpha, \beta \in V_2$, 则 $k\alpha + l\beta \in V_1 \cup V_2$.

  但是 $\alpha \in V_1$, 同时 $\beta \in V_2$, 则没有如上的结论.

  例如: 取二维平面 $\mathbb{R}^2$, 设 X, Y 轴分别为 V_1 与 V_2 则

  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$,

  但是 $V_1 \cup V_2$ 就是 X 轴和 Y 轴.

注

- 同时包含 V_1, V_2 的 V 的最小子空间是__________,
- 同时包含于 V_1, V_2 的 V 的最大子空间是__________.

- 同时包含于 V_1, V_2 的 V 的子空间 W 都包含于 $V_1 \cap V_2$.
  即 $V_1 \cap V_2$ 是同时包含于 V_1, V_2 的 V 的最大子空间
  即若子空间 W 满足 $W \subseteq V_1$ 且 $W \subseteq V_2$, 则必有 $W \subseteq V_1 \cap V_2$
- 同时包含 V_1, V_2 的 V 的子空间 W 都包含 $V_1 + V_2$.
  即 $V_1 + V_2$ 是同时包含于 V_1, V_2 的 V 的最小子空间
  即若子空间 W 满足 $V_1 \subseteq W$ 且 $V_2 \subseteq W$, 则必有 $V_1 + V_2 \subseteq W$.

例 1

在 3 维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中, V_1 表示一条通过原点的直线, V_2 表示一张通过原点且与 V_1 垂直的平面. 则

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}; \quad V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$$

例 2

在线性空间 V 中, 有

$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$.

证明 若 $\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$,
则 $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2$, 其中 $\gamma_1 \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ $\gamma_2 \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$. 于是,

$$\alpha_1 + \alpha_2 \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

反之, $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$ 中任一向量都可写成 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 中与 $L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$ 中向量的和, 则
$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$. ∎

例 3

线性空间 P^n 中, V_1, V_2 分别表示齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间.

定理 7 (维数公式)

若 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

证明 设 $\dim(V_1\cap V_2)=m, \dim V_1=n_1, \dim V_2=n_2$ 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一组基, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可以扩充成 V_1 与 V_2 的一组基, 设为

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m}$$

与

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}.$$

考虑向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}.$$

其个数为 n_1+n_2-m.

接下来证明

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m}$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 需要证明

1. 这个向量组线性无关,
2. $V_1 + V_2$ 中任一向量可由这个向量组线性表出.

(1) 假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + \ell_1\beta_1 + \cdots + \ell_{n_1-m}\beta_{n_1-m} + t_1\gamma_1 + \cdots + t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = \mathbf{0}$$

改写为

$$\begin{aligned}\alpha &= k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + \ell_1\beta_1 + \cdots + \ell_{n_1-m}\beta_{n_1-m} \\ &= -t_1\gamma_1 - \cdots - t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m},\end{aligned}$$

则 $\alpha \in V_1 \cap V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

设 $\alpha = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_m\alpha_m$, 则

$$p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_m\alpha_m + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 + \cdots + t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m}$ 是 V_2 的一组基, 则

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_m = t_1 = t_2 = \cdots = t_{n_2-m} = 0.$$

从而

$$\mathbf{0} = \alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 + \cdots + \ell_{n_1-m}\beta_{n_1-m}.$$

于是 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = \ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_{n_1-m} = 0.$
因此, 向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m}$$

线性无关

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}) \\
+ L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m}) \\
= L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m})
\end{aligned}
$$

所以

$$
\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n_2-m}
$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 于是,

$$
\begin{aligned}
\dim(V_1 + V_2) &= n_1 + n_2 - m \\
&= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).
\end{aligned}
$$

从而有维数公式. ∎

怎样求子空间的交与和

设 $V=F^n$, 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$, 理论上如何求 V_1+V_2, $V_1\cap V_2$.

$$\begin{aligned} V_1+V_2 &= L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) \\ &= L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) \end{aligned}$$

同时应用维数公式可得

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$$

其中

$$\begin{aligned} \dim V_1 &= r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s), \\ \dim V_2 &= r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t), \\ \dim(V_1+V_2) &= r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) \end{aligned}$$

不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_2}$ 分别是 V_1 与 V_2 的一组基.
任给 $\xi \in V_1 \cap V_2$, 则 $\xi \in V_1$ 且 $\xi \in V_2$, 则 ξ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1}$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_2}$ 线性表出.

$$\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n_1}\alpha_{n_1} = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_{n_2}\beta_{n_2},$$

即求解方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n_1}\alpha_{n_1} - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 - \cdots - y_{n_2}\beta_{n_2} = \mathbf{0}.$$

若只有零解, 即 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$,
若有非零解, 则 $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, 基础解系所含向量的个数为

$$n_1 + n_2 - r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_2}) = \dim(V_1 \cap V_2) = m$$

设

$$\eta_1 = (k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1n_1}, \ell_{11}, \ell_{12}, \cdots, \ell_{1n_2}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\eta_m = \left(k_{m1}, k_{m2}, \cdots, k_{mm_1}, \ell_{m1}, \ell_{m2}, \cdots, \ell_{m_{n_2}}\right).$$

则得到

$$\xi_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{12}\alpha_2 + \cdots + k_{1n_1}\alpha_{n_1} = \ell_{11}\beta_1 + \ell_{12}\beta_2 + \cdots + \ell_{1n_2}\beta_{n_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\xi_m = k_{m1}\alpha_1 + k_{m2}\alpha_2 + \cdots + k_{mn_1}\alpha_{n_1} = \ell_{m1}\beta_1 + \ell_{m2}\beta_2 + \cdots + \ell_{mn_2}\beta_{n_2}$$

则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 就是 $V_1 \cap V_2$ 的一组基.

例 4

设 $\alpha_1=(1,0,-1,0)', \alpha_2=(0,1,2,1)', \alpha_3=(2,1,0,1)'$,
$\beta_1=(-1,1,1,1)', \beta_2=(1,-1,-3,-1)', \beta_3=(-1,1,-1,1)'$.
令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$.
求 V_1+V_2 与 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基.

解 先求 $\dim V_1, \dim V_2$ 以及一组基.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\dim V_1 = 2$, 取 α_1, α_2 为基.

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\dim V_2 = 2$，取 β_1, β_2 为基.

而 $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

则 $\dim(V_1+V_2)=3, \alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 是一组基.

由维数公式, 有 $\dim(V_1\cap V_2)=2+2-3=1$.

任取 $\xi \in V_1 \cap V_2$, 则

$$\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2,$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0.$$

系数矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得基础解系 $\eta = (1, -1, 0, 1)'$.

于是, $\xi = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2$ 就是 $V_1 \cap V_2$ 的基.

例 5

求 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 和 $L(\beta_1, \beta_2)$ 的交与和, 并分别求它们的维数与一组基, 其中

$$\alpha_1 = (2, 5, -1, -5), \quad \alpha_2 = (-1, 2, -2, -3)$$
$$\beta_1 = (2, 0, -1, 2), \qquad \beta_2 = (1, 3, 2, -4)$$

例 5

求 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 和 $L(\beta_1, \beta_2)$ 的交与和, 并分别求它们的维数与一组基, 其中

$$\alpha_1 = (2, 5, -1, -5), \quad \alpha_2 = (-1, 2, -2, -3)$$
$$\beta_1 = (2, 0, -1, 2), \quad \beta_2 = (1, 3, 2, -4)$$

解

(1) $L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ 因为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 3$, 故维数 3 ; 基 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$

(2) 设 $\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$, 则 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2$ 解齐次方程组, 基础解系 $(1, -1, 1, 1)$, 得向量

$$\alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = (3, 3, 1, -2)$$

所以交为 $L(\alpha_0)$; 维数为 1： 基为 $\alpha_0 = (3, 3, 1, -2)$

例 6

已知两个齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (I) \quad 与 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

1. 分别求 *(I)* 和 *(II)* 的解空间 V_1 和 V_2 的维数和一组基,
2. 求 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的维数和各自的一组基.

§7 子空间的直和

子空间的直和是子空间的和的一个重要的特殊情形.

定义

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 如果和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

是唯一的, 这个和就称为直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

例 1

在 3 维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中, V_1 表示一条通过原点的直线, V_2 表示一张通过原点且与垂直的平面, 则和 $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ 就是直和, 即 $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$.

定理 8

和 $V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是等式

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \mathbf{0}$$
$$\alpha_i \in V_i \quad (i = 1, 2)$$

只有在 α_i 全为零向量时才成立.

证明　定理的条件实际上就是: 零向量的分解式是唯一的. 因而这个条件显然是必要的. 下面来证这个条件的充分性. 设 $\alpha \in V_1 + V_2$, 它有两个分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_i, \beta_i \in V_i \quad (i = 1, 2)$$

于是

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \mathbf{0}$$

其中 $\alpha_i - \beta_i \in V_i \quad (i = 1, 2)$. 由定理的条件, 应有

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \quad \alpha_i = \beta_i (i = 1, 2)$$

这就是说，向量 α 的分解式是唯一的. ∎

推论

和 $V_1 + V_2$ 为直和的充分必要条件是

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$$

证明　先证条件的充分性. 假设有等式.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_i \in V_i \quad (i = 1, 2)$$

那么

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \in V_1 \cap V_2$$

由假设

$$a_1 = \alpha_2, = 0$$

这就证明了 $V_1 + V_2$ 是直和.

再证必要性. 任取向量 $\alpha \in V_1 \cap V_2$. 于是零向量可以表成

$$\mathbf{0} = \alpha + (-\alpha), \quad \alpha \in V_1, -\alpha \in V_2$$

因为是直和, 所以 $\alpha = -\alpha = \mathbf{0}$. 这就证明了

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$$

∎

定理 9

设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 令 $W = V_1 + V_2$, 则

$$W = V_1 \oplus V_2$$

的充分必要条件为

$$\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

证明 因为

$$\dim(W) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

而由前面定理 8 的推论知 $V_1 + V_2$ 为直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$, 这是与 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 等价的, 也就与

$$\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

等价. 这就证明了定理. ∎

定理

V_1, V_2 是 V 的一些子空间, 下面这些条件是等价的:

1. $W = V_1 + V_2$ 是直和
2. 零向量的表法唯一;
3. $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$
4. $\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

定理 10

设 U 是线性空间 V 的一个子空间, 那么一定存在一个子空间 W 使 $V = U \oplus W$

证明 取 U 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$. 把它扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$. 令

$$W = L(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$$

W 即满足要求.

子空间的直和的概念可以推广到多个子空间的情形。

定义

设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 都是线性空间 V 的子空间. 如果和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i (i = 1, 2, \cdots, s).$$

是唯一的, 这个和就称为直和. 记为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$

和两个子空间的直和一样, 我们有

定理 11

$V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是 V 的一些子空间, 下面这些条件是等价的:

1. $W = \sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和
2. 零向量的表法唯一;
3. $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$
4. $\dim(W) = \sum \dim_{i=1}^{s}(V_i)$

例 2

取线性空间 $V=P^{n\times n}$, 取子空间
$V_1=\{A|A^T=A\}$, $V_2=\{A|A^T=-A\}$. 证明 $V=V_1\oplus V_2$.

证明

- 首先证明直和. 任给 $A\in V_1\cap V_2$, 则 $A\in V_1$ 且 $A\in V_2$.
  因为 $A\in V_1$, 所以 $A^T=A$. 因为 $A\in V_2$, 所以 $A^T=-A$.
  从而 $A^T=A=-A$, 即 $A=\mathbf{0}$, 故 $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.
  因此, V_1+V_2 是直和.
- 再证明 $V=V_1+V_2$.
  任取 $A\in V$, 令 $A_1=\frac{1}{2}(A+A^T)$, $A_2=\frac{1}{2}(A-A^T)$,
  则 $A_1{}^T=A_1, A_2{}^T=-A_2$. 即 $A_1\in V_1, A_2\in V_2$. 故 $V=V_1+V_2$.
- 因此, $V=V_1\oplus V_2$. ∎

例 3

设 $V = F^n, A$ 是一个 n 阶方阵, $A^2 = A$, 设
$V_1 = \{X \mid AX = 0, X \in F^n\}, V_2 = \{X \mid AX = X, X \in F^n\}$.
证明 $F^n = V_1 \oplus V_2$.

证明

- 任给 $X \in V_1 \cap V_2$. 因为 $X \in V_1$, 所以 $AX = \mathbf{0}$. 因为 $X \in V_2$, 所以 $AX = X$. 于是 $AX = X = \mathbf{0}$. 因此, $V_1 + V_2$ 是直和.
- 再证明 $V = V_1 + V_2$. 任给 $X \in V$, 令 $X_1 = X - AX$, $X_2 = AX$, 则 $X = X_1 + X_2$, 且 $AX_1 = \mathbf{0}, AX_2 = X_2$, 即 $X_1 \in V_1, X_2 \in V_2$.
  所以, $V = V_1 + V_2$
- 因此, $V = V_1 \oplus V_2$. ∎

例 4

设 $V = F^n, A$ 是一 n 阶方阵, $A^2 = E$, 设

$V_1 = \{X \mid AX = X, X \in F^n\}, V_2 = \{X \mid AX = -X, X \in F^n\}$.

证明 $F^n = V_1 \oplus V_2$.

证明

- 任给 $X \in V_1 \cap V_2$. 因为 $X \in V_1$, 所以 $AX = X$. 因为 $X \in V_2$, 所以 $AX = -X$. 从而 $AX = X = -X, X = \mathbf{0}$. 因此, $V_1 + V_2$ 是直和.
- 再证明 $V = V_1 + V_2$.
  任给 $X \in V$, 令 $X_1 = \frac{1}{2}(X + AX) \in V_1, X_2 = \frac{1}{2}(X - AX) \in V_2$,
  则 $X = X_1 + X_2$,
  且 $AX_1 = X_1, AX_2 = -X_2$. 即 $X_1 \in V_1, X_2 \in V_2$.
  于是, $V = V_1 + V_2$.
- 因此, $V = V_1 \oplus V_2$. ∎

例 5

设 $A \in F^{n\times n}, f(x), g(x) \in F[x]$, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 令 V, V_1, V_2 分别为齐次线性方程组 $f(A)g(A)X = \mathbf{0}, f(A)X = \mathbf{0}$ 与 $f(B)X = \mathbf{0}$ 的解空间, 证明 $V = V_1 \oplus V_2$.

证明

- 对于任意的 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 有 $f(A)\alpha = g(A)\alpha = \mathbf{0}$, 从而有

  $$\alpha = u(A)f(A)\alpha + v(A)g(A)\alpha = \mathbf{0}.$$

  因此, $V_1 + V_2$ 是直和.

- 因为 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以存在 $u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$. 从而有 $u(A)f(A) + v(A)g(A) = E$, 则对于任意的 $\alpha \in W$, 有

  $$\alpha = u(A)f(A)\alpha + v(A)g(A)\alpha,$$

  则 $u(A)f(A)\alpha \in V_2, v(A)g(A)\alpha \in V_1$. 所以 $V = V_1 + V_2$.

- 因此, $V = V_1 \oplus V_2$. ∎

定义

设数域 F 上的线性空间 V 与 W, 若存在一个映射 $\sigma: V \to W$ 满足

1. σ 是个双射.
2. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$
3. $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

对任意的 $\alpha,\beta\in V, k\in F$, 则称 σ 是从 V 到 W 的一个同构映射, 称 V 与 W 同构.

性质

任一个数域 F 上的 n 维线性空间 V 与 F^n.

任取 V 的一组基, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 任给 $\alpha \in V$,

则 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 唯一线性表出, 设为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n,$$

即 $X = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

做

$$\mathscr{A} : V \to F^n; \alpha \mapsto X,$$

即将 α 映到它在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

这就是一个同构映射, 从而任意一个 n 维线性空间都与 F^n 同构.

例子

例 1

$$\sigma : F[x]_n \to F^n$$

$$f(x) = k_1 + k_2 x + \cdots + k_n x^{n-1} \mapsto X = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$$

例 2

$$\sigma : F^{2\times 2} \to F^4$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

性质

设 V 与 W 是数域 F 上的线性空间, 映射 σ 是 V 到 W 的一个同构映射, 则

$$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

$$\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$$

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i\sigma\left(\alpha_i\right).$$

性质

V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ W 中向量组 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_m)$ 线性相关.

证明 因为由

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

可得

$$k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_r\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{0}.$$

反过来，由

$$k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_r\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{0}.$$

有

$$\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{0}.$$

因为 σ 是单射, 只有 $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 所以

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

- 若 V_1 是 V 的子空间, 则 $\sigma(V_1)$ 是 W 的子空间, 且 $\dim(V_1) = \dim\sigma(V_1)$.
- 同构映射的逆及同构映射的乘积仍然是同构的.
- 同构是一个等价关系, 即满足 (1) 自反性; (2) 对称性; (3) 传递性.

定理 12

数域 F 上的两个线性空间同构 $\Leftrightarrow$ 维数相等.

例 1

已知

$$f_1 = 1 - x, f_2 = 1 + x^2, f_3 = x + 2x^2$$

与

$$g_1 = x, g_2 = 1 - x^2, g_3 = 1 - x + x^2$$

是 $P[x]_3$ 中的两个向量组.

1. 证明 f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 都是 $P[x]_3$ 的基;
2. 求由基 f_1, f_2, f_3 到基 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵;
3. 求 $f = 1 + 2x + 3x^2$ 在基 f_1, f_2, f_3 下的坐标.

例 2

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, 记 $W=\{B\,|\,AB=BA, B\in P^{3\times 3}\}$, 求 W 的维数和一组基.
2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 记 $W=\{B\,|\,AB=BA, B\in P^{3\times 3}\}$, 求 W 的维数和一组基.

例 3

已知两个齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. 分别求 *(I)* 和 *(II)* 的解空间 V_1 和 V_2 的维数和一组基.
2. 求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基.