

第4章 矩阵

学号_____ 姓名_____

一、填空题（每空3分，共30分）

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____, $A^n =$ _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & a & 4 \end{pmatrix}$, B 是3阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $a =$ _____.

3. 设3阶阵 $A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $|A| = -2$, 则 $|\beta_1 + 2\beta_3, \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3, 3\beta_3| =$ _____.

4. 设 A, B 是3阶方阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| =$ _____.

5. A, B 均为3阶方阵, 满足 $AB - 3A + B = 0$, 若 $|A + E| = -1$, 则 $|B - 3E| =$ _____.

6. 方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.

7. 设 A, B 是 n 阶可逆阵, 则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 _____.

8. 设 A 是一个 n 阶方阵, 若 $r(A) = n - 1$, 则 $r(A^*) =$ _____.

9. 设 A 是3阶可逆方阵, 将 A 的第一行的3倍加到第三行, 再互换第二行和第三行后得到矩阵 B , 则 $BA^{-1} =$ _____.

二、计算题（每小题15分，共60分）

1. 求 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2. 求矩阵 X 使之满足矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求与 A 可交换的矩阵的全体.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 若 $2XA - 2AB = X - B$, 求矩阵 X .

三、证明题（10分）

设 $A^2 = A, A \neq E$ (单位矩阵), 证明 $|A| = 0$.