第五章 二次型

§1 二次型及其矩阵表示

1. 二次型.

1) 定义:设数域P，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组未定元,数域P上一个关于未定元$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一个n元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为数域P上的一个n元二次型(二次型).

例如: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+4x_3^2$.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2$.

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+4x_3^2$, $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2$.

注: (1) x_ix_j的系数即为$2a_{ij}$.

(2) 在二次型的表示中,系数$a_{ij}(i\le j)$,而没有$a_{ij}(i\ge j)$这些系数.

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum\limits_{1\le i<j\le n}^n 2a_{ij}x_ix_j$.

2) 二次型的矩阵:

设$a_{ij}=a_{ji}(i>j)$,由于$x_ix_j=x_jx_i$,则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,从而

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

令矩阵$A=(a_{ij})_n$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=X^TAX$.

其中A满足$A^T=A$,是一个对称阵.称A为二次型$f(X)=X^TAX$的矩阵.

首先二次型矩阵的元素：由A的得来,可知A的主对角线位置上的元素是二次型中平方项的系数.而A的主对角线之外的元素是二次型中交叉项的系数的一半,其中矩阵(i,j)位置的元素是交叉项x_ix_j的系数的一半.

反之,任给一个对称阵,式子 $f(X)=X^TAX$ 即可定义二次型,且此二次型的矩阵即为对称阵 A,

但是有点需要注意的,任给一个方阵 A, $f(X)=X^TAX$ 都是一个二次型,展开式中只有未定元的平方项与交叉项,与上面不同的是此二次型的矩阵不一定是 A.

二次型的矩阵是唯一的.

例子　(1) 设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3-x_1x_4+2x_2^2+3x_2x_4-2x_3x_4+4x_3^2$.

此二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-\frac{1}{2}\\1&2&0&\frac{3}{2}\\2&0&4&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-1&0\end{pmatrix}$.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3-x_2x_3+2x_2^2+4x_3^2$ 此二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-\frac{1}{2}\\1&2&0&\frac{3}{2}\\2&0&4&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-1&0\end{pmatrix}$.

(2) 设对称阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&-3\\2&0&3&1\\0&-3&1&1\end{pmatrix}$,则二次型为

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+4x_1x_3+2x_2^2-6x_2x_4+3x_3^2+2x_3x_4+x_4^2$.

取矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\2&2&2\end{pmatrix}$,可得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_1x_2+5x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$,而二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&3&2\\\frac{5}{2}&2&2\end{pmatrix}$.

2. 非退化线性替换.

(1)定义　设两组未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,如下关系式:

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\\quad\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$ 称为由未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到未定元 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个线性替换.

形式的乘法: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,记为 $X = CY$.

若 C 非退化,即可逆,则称 $X = CY$ 是一个从 X 到 Y 的非退化的线性替换.

任给二次型 $f(X) = X^T AX$,任给线性替换 $X = CY$,看 $f(X) = X^T AX$ 经线性替换 $X = CY$ 变成什么? 由于二次型中只有平方项和交叉项的形式,

$x_i^2 : (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n)^2$,展开后出现的形式 y_j^2 , $y_i y_j$,也是只有平方项和交叉项.

$x_i x_j : (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n)(c_{j1}y_1 + c_{j2}y_2 + \cdots + c_{jn}y_n)$.展开后出现的形式也是只有平方项和交叉项.

所以 $f(X) = X^T AX$ 经线性替换 $X = CY$ 变成另一个二次型.则这个二次型的矩阵是:

对二次型 $f(X) = X^T AX$,取线性替换 $X = CY$,代入得到 $f(X) = X^T AX$,即 $f(CY) = (CY)^T ACY$,

记为 $g(Y) = f(CY) = (CY)^T ACY = Y^T C^T ACY = (y_1, y_2, \cdots, y_n) C^T AC \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

由于 $(C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC$,即 $C^T AC$ 是一个对称阵,从而二次型 $g(Y)$ 的矩阵就为 $C^T AC$.

3. 合同矩阵.

(1) 定义: 取同阶方阵 A, B ,若存在一个可逆矩阵 C ,使得 $B = C^T AC$,则称矩阵 B 与 A 合同.

(2) 矩阵的合同是一种等价关系

非退化的线性替换把二次型变成二次型,且二次型的矩阵合同.

设 $f(X) = X^T AX \xrightarrow{X=CY} g(Y) = Y^T C^T ACY \xrightarrow{Y=C^{-1}X} X^T AX = f(X)$

$$A \xrightarrow{C} C^T AC \xrightarrow{C^{-1}} A$$

反之, 取对称阵 A ,取可逆阵 C ,有对称阵 $B = C^T AC$,

$$f(X) = X^T AX \xrightarrow{X=CY} g(Y) = Y^T BY$$

§2 二次型的标准形

1. 配方法.

取 $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=a(x_1+\frac{b}{a}x_2)^2+(c-\frac{b^2}{a})x_2^2$.令 $\begin{cases} y_1=x_1+\frac{b}{a}x_2 \\ y_2=x_2 \end{cases}$,则

$$ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=ay_1^2+(c-\frac{b^2}{a})y_2^2.$$

此时,$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,或者$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$

2. 二次型的标准形.

定理:数域 P 上的任一 n 元二次型都可经非退化线性替换化成平方和的形式: $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.称为二次型的标准形.

证明 对未定元的个数归纳. $n=1$, $f(x_1)=a_{11}x_1^2$,已经是标准形.假设对 $n-1$ 成立.

对 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$.二次型的矩阵记为 A.

1) 假设 $a_{11}\neq 0$,仅把 x_1 看成未定元,其余的暂时不看做未定元,配方

$$f(X)=a_{11}x_1^2+(2a_{12}x_2+2a_{13}x_3+\cdots+2a_{1n}x_n)x_1+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j=a_{11}x_1^2+(\sum_{i=2}^{n}2a_{1i}x_i)x_1+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}(x_1+a_{11}^{-1}\sum_{i=2}^{n}a_{1i}x_i)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j-a_{11}^{-1}(\sum_{i=2}^{n}a_{1i}x_i)^2=a_{11}(x_1+a_{11}^{-1}\sum_{i=2}^{n}a_{1i}x_i)^2+f_1(x_2,x_3,\cdots,x_n)$$

其中 $f_1(x_2,x_3,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$ 是一个 $n-1$ 元二次型,应用归纳假设,存在非退化的线性替换 $Y_1=C_1X_1$ 化为标准形 $d_2y_2^2+d_3y_3^2+\cdots+d_ny_n^2$.

对 $Y_1=C_1X_1$,假设 $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.令 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & a_{11}^{-1}a_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

记为 $Y=CX$,这是一个非退化的线性替换,在它之下,原二次型变成 $a_{11}y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2+\cdots+d_ny_n^2$.

注: (1) $f(X)=X^TAX\xrightarrow{X=C^{-1}Y}g(Y)=a_{11}y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2+\cdots+d_ny_n^2$

二次型的矩阵 $A \xrightarrow{C^{-1}} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = (C^{-1})^T AC^{-1}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix}, A^T = A$.

$\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix}$.故 $A_1^T = A_1$.

$$f_1(x_2, x_3, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j - a_{11}^{-1} (\sum_{i=2}^{n} a_{1i} x_i)^2 = (x_2, \cdots, x_n) B \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_2, \cdots, x_n) A_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - a_{11}^{-1} (a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n)^2$$

$$= (x_2, \cdots, x_n) A_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - a_{11}^{-1} (x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} (a_{12}, \cdots, a_{1n}) \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_2, \cdots, x_n) \left(A_1 - a_{11}^{-1} \alpha^T \alpha \right) \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$(A_1 - a_{11}^{-1} \alpha^T \alpha)^T = A_1^T - a_{11}^{-1} \alpha^T \alpha$,对称,故 $A_1 - a_{11}^{-1} \alpha^T \alpha = B$,就是 $f_1(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 的矩阵.

应用归纳假设,由 $Y_1 = C_1 X_1$,即 $X_1 = C_1^{-1} Y_1$,有 $(C_1^{-1})^T (A_1 - a_{11}^{-1} \alpha^T \alpha) C_1^{-1} = \begin{pmatrix} d_2 & & & \\ & d_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

(3) $A \xrightarrow{C^{-1}} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = (C^{-1})^T AC^{-1}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1} a_{12} & \cdots & a_{11}^{-1} a_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1} \alpha \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

$$(C^{-1})^T AC^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1} \alpha \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1} \alpha \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{11}^{-1} \alpha^T & C_1^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha^T & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1} \alpha \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{11}^{-1}\alpha^T & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C_1^T\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha^T & A_1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a_{11}^{-1}\alpha\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C_1^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{11}^{-1}\alpha^T & E_{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha^T & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a_{11}^{-1}\alpha\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C_1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (C_1^{-1})^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a_{11}^{-1}\alpha^T & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha^T & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\alpha\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C_1^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & (C_1^{-1})^T(A_1-a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha)C_1^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha^T & A_1\end{pmatrix}\xrightarrow[2+1(-a_{11}^{-1}\alpha)]{}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ \alpha^T & A_1-a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{2+1(-a_{11}^{-1}\alpha^T)}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & A_1-a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{2(C_1^{-1})^T}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & (C_1^{-1})^T(A_1-a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha)\end{pmatrix}\xrightarrow[2(C_1^{-1})]{}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & (C_1^{-1})^T(A_1-a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha)C_1^{-1}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (C_1^{-1})^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a_{11}^{-1}\alpha^T & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha^T & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\alpha\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C_1^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & (C_1^{-1})^T(A_1-a_{11}^{-1}\alpha^T\alpha)C_1^{-1}\end{pmatrix}.$$

2) $a_{11}=0$,但是$a_{22},a_{33},\cdots,a_{nn}$中有一个非零.设$a_{kk}\neq 0$.

同 1),将x_k看做是未定元,而其余的不看做是未定元,应用配方法.

简单的例子. 取$ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=(a-\dfrac{b^2}{c})x_1^2+c(x_2+\dfrac{b}{c}x_1)^2$.

令 $\begin{cases}y_1=x_1\\ y_2=x_2+\dfrac{b}{c}x_1\end{cases}$,则$ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=(a-\dfrac{b^2}{c})y_1^2+cy_2^2$.

$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{b}{c} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$,或者$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{b}{c} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-\dfrac{b^2}{c} & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}$

3) 假设$a_{11},a_{22},a_{33},\cdots,a_{nn}$全为零,即没有平方项,不能配方.

假设$a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}$中有非零数.设$a_{12}\neq 0$.有 $f(X)=2a_{12}x_1x_2+\cdots$

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad\cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$.则 $f(X) = 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = g(Y) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \cdots$,归结为 1).

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,是关于未定元 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的一个二次型,直接应用归纳假设即可.

定理: 数域 P 上任意一个对称阵都合同于一个对角阵,简称为对称阵可以合同对角化.即对任一对称阵 A,都可找到一个可逆阵 C,使得 C^TAC 是一个对角阵.

3. 例子:

例 1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2$,化为标准形.

解 (1) 配方法:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2 + (4x_2 + 6x_3)x_1 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 2(x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 = 2(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 - 14x_3^2 . \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 - 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$,即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{9}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$,则原二次型化为 $g(Y) = 2y_1^2 + y_2^2 - 14y_3^2$.

(2) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$,即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

例: 2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

解 令$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,记为 $X = CY$,则原二次型化为

$$g(Y) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,记为 $Z = DY$, $g(Y)$ 化为 $h(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$.

则 $X = CY = CD^{-1}Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z$.

用矩阵来做,二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

则令 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,做 $X = CY$,则原来二次型化为

$$g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 6y_3^2 .$$

简单方法:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$,则 $C^T AC = D$.

初等变换法理论解释:

关于初等变换法: 二次型化为标准形,二次型的矩阵是合同的. $A \to C^T AC$,看看 $C^T AC = B$ 的含义.

C 可逆,则可以写成初等矩阵的乘积.设 $C = P_1P_2 \cdots P_s$,则 $C^T AC = P_s^T \cdots P_2^T P_1^T AP_1P_2 \cdots P_s$,只要看

P^TAP 的作用即可,其中 P 是一个初等阵.

若 $P=P(i(c))$, $P^TAP=PAP$ 相当于第 i 行，第 i 列都乘常数 c. $P^TAP=\begin{pmatrix} & & ca_{1i} & & \\ & & \vdots & & \\ ca_{i1} & \cdots & c^2a_{ii} & \cdots & ca_{in} \\ & & \vdots & & \\ & & ca_{ni} & & \end{pmatrix}$.

若 $P=P(i,j(c))$,则 P^TAP 相当于第 i 列的 c 倍加到第 j 列后,所得矩阵再第 i 行的 c 倍加到第 j 行.

若 $P=P(i,j)$,则 $P^TAP=PAP$ 相当于互换 i , j 列后，所得矩阵再互换 i , j 行.

故 C^TAC 的含义就是对 A 实施列变换所得矩阵,再实施相同的行变换.我们就简单说成是“对 A 实施列变换，同时再实施对应的行变换”，则得到的矩阵就是 C^TAC.

而二次型化为标准形,就是矩阵化为对角阵,从而初等变换法化二次型为标准形的过程就是:对分块阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$,实数列变换,同时对 A 的位置实施相应的行变换,把 A 的位置化为对角阵 D ,则 E 的位置化为的矩阵 C 就满足 $C^TAC=D$.实际上,若假若实施 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 列变换,则有 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}P_1,P_2,\cdots,P_s$,若同时 A 的位置实施相应的行变换则有 $\begin{pmatrix} P_s^T\cdots P_2^TP_1^TA \\ E \end{pmatrix}P_1,P_2,\cdots,P_s$,即

$$\begin{pmatrix} P_s^T\cdots P_2^TP_1^TA \\ E \end{pmatrix}P_1,P_2,\cdots,P_s=\begin{pmatrix} C^TA \\ E \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} C^TAC \\ EC \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C^TAC \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}.$$

故 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow[P_1]{}\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}P_1=\begin{pmatrix} AP_1 \\ P_1 \end{pmatrix}\xrightarrow{P_1^T}\begin{pmatrix} P_1^TAP_1 \\ P_1 \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C^TAC \\ C \end{pmatrix}$.

§3 唯一性(规范形)

1. 二次型的秩.

1) 设二次型 $f(X)=X^TAX$,二次型的矩阵为 A,经过非退化的线性替换 $X=CY$,化为二次型 $g(Y)=Y^TBY$,二次型的矩阵为 $B=C^TAC$,矩阵 A,B 是合同的.从而有相同的秩.$r(A)=r(B)$.

2) 任一二次型都可经过非退化线性替换化为标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.而此二次型的矩阵是一个对角阵,秩为主对角线非零数的个数.

故二次型的标准形中,系数非零的平方项的个数是唯一确定的,与所做的非退化线性替换无关.这个个数称为二次型的秩.即二次型矩阵的秩称为二次型的秩.

同时非退化线性替换保持二次型的秩不变.

对二次型 $f(X)=X^TAX$,设 $r(A)=r$,则存在非退化线性替换 $X=CY$, $f(X)=X^TAX$ 可化为 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$.即标准形的矩阵为
$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 复二次型

假设 $f(X)=X^TAX$ 是一个系数是复数的二次型,可经非退化线性替换化为标准形

$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$,其中 $d_i\neq 0$,任给 i,其中 r 是二次型的秩.

再做线性替换 $\begin{cases} z_1=\sqrt{d_1}\,y_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ z_r=\sqrt{d_r}\,y_r \\ z_{r+1}=y_{r+1} \\ \quad\cdots\cdots \\ z_n=y_n \end{cases}$,非退化.二次型化为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$.称为复二次型 $f(X)$ 的规范形.

定理:任意一个复二次型都可经过一个适当的非退化线性替换化为规范形,且规范形唯一.

换成矩阵的说法就是,任意一个复对称矩阵都合同于形如 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的对角阵,且两个复对称阵合同当且仅当秩相等.

例子: (1) 若二次型化为标准形是

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4)=-4y_2^2+y_3^2-y_4^2\to -4z_1^2+z_2^2-z_3^2\to w_1^2+w_2^2+w_3^2$$

线性替换为$\begin{cases} z_1 = y_2 \\ z_2 = y_3 \\ z_3 = y_4 \\ z_4 = y_1 \end{cases}$ $\begin{cases} w_1 = \sqrt{-4}z_1 \\ w_2 = z_2 \\ w_3 = \sqrt{-1}z_3 \\ w_4 = z_4 \end{cases}$,则 $g(y_1, y_2, y_3, y_4) = -4y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 \to w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$

线性替换为 $\begin{cases} w_1 = \sqrt{-4}y_2 \\ w_2 = y_3 \\ w_3 = \sqrt{-1}y_4 \\ w_4 = y_1 \end{cases}$.

2)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ix_1^2 + 2ix_1x_2 + x_2^2$.二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = ix_1^2 + 2ix_1x_2 + x_2^2 = i(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (1-i)x_2^2 = iy_1^2 + (1-i)y_2^2.$$

则二次型的复规范形为 $z_1^2 + z_2^2$.而线性替换为$\begin{cases} z_1 = \sqrt{i}y_1 \\ z_2 = \sqrt{1-i}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$.

3. 实二次型

设实二次型 $f(X) = X^T AX$,可经非退化线性替换化为标准形

$d_1y_1^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_ry_r^2$,其中 $d_i > 0$,任给 i ,其中 r 是二次型的秩.

再做线性替换$\begin{cases} z_1 = \sqrt{d_1}y_1 \\ \cdots\cdots \\ z_r = \sqrt{d_r}y_r \\ z_{r+1} = y_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ z_n = y_n \end{cases}$,非退化.二次型化为 $z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$.称为 $f(X)$ 的规范形.

定理:任意一个实二次型都可经过一个适当的非退化线性替换化为规范形,且规范形唯一.

换成矩阵的说法就是,任意一个实对称矩阵都合同于形如$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$的对角阵.

证明 唯一性.假设 $f(X) = X^T AX \xrightarrow{X=BY} y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$

$f(X) = X^T AX \xrightarrow{X=CZ} z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2$.证明 $p = q$.

反证法:假设 $p > q$.证明矛盾,从而 $p \le q$.

首先 $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 = z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2$. (*)

相应的线性替换为$Z=C^{-1}BY$.设$C^{-1}B=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$.即$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n \\ z_2=g_{21}y_1+g_{22}y_2+\cdots+g_{2n}y_n \\ \quad\cdots\cdots \\ z_n=g_{n1}y_1+g_{n2}y_2+\cdots+g_{nn}y_n \end{cases}$.

考察齐次线性方程组:$\begin{cases} g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{q1}y_1+g_{q2}y_2+\cdots+g_{qn}y_n=0 \\ y_{p+1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=0 \end{cases}$看方程的个数和未定元的个数,分别为$n-p+q$与$n$,由于$p>q$,则$n-p+q<n$,即方程的个数小于未定元的个数,则该方程组有非零解.

设$Y_0=(k_1,\cdots,k_p,k_{p+1},\cdots,k_n)$是一个非零解.则代入有$k_{p+1}=\cdots=k_n=0$,

令$Z_0=C^{-1}BY_0$,则$z_{0i}=g_{i1}k_1+g_{i2}k_2+\cdots+g_{in}k_n=0, i=1,\cdots,q$.

把Y_0,Z_0代入(*)的左边和右边,

左$=k_1^2+\cdots+k_p^2>0$,右$=-z_{0q+1}^2-\cdots-z_{0r}^2\le 0$,矛盾.故$p\le q$.同理可证$p\ge q$,则$p=q$.唯一.

称此定理为惯性定理.

定义　实二次型的规范形中,正平方项的个数p称为二次型的正惯性指数,负平方项的个数$r-p$称为二次型的负惯性指数,它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为符号差.

所以实二次型的标准形不唯一,但是其中平方项的系数中正的个数和负的个数是唯一确定的.

定理:　(1) 任一复对称阵A都合同于一个形如$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的对角阵,其中$r=r(A)$

(2) 任一实对称阵A都合同于一个形如$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$的对角阵,其中$r=r(A)$, p为正惯性指数.两个实对称阵合同当且仅当秩相等,且正惯性指数相等.

§4 正定二次型

1. 定义:设实二次型 $f(X)=X^TAX$,若任给一个非零向量 $X_0=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$,都有

$f(X_0)=X_0^TAX_0>0$,则称 $f(X)=X^TAX$ 是一个正定二次型.或者说任给向量

$X_0=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$,都有 $f(X_0)=X_0^TAX_0\ge 0$,但 $f(X_0)=X_0^TAX_0=0$ 当且仅当 $X_0=0$.

如(1) 二次型 $f(X)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,正定.

(2) 二次型 $f(X)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow$ $d_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

事实上,若某个 $d_i\le 0$,则代入非零向量 $\varepsilon_i=(0,\cdots 0,1,0,\cdots,0)^T$, $f(\varepsilon_i)=d_i\le 0$,与正定矛盾.

正定二次型在非退化线性替换下的性质.

设二次型 $f(X)=X^TAX$ 正定, $X=CY$ 是一个非退化线性替换,在此替换下 $f(X)=X^TAX$ 化为另一个二次型 $g(Y)=Y^TC^TACY$.则 $g(Y)=Y^TC^TACY$ 也正定.反之若二次型 $f(X)=X^TAX$ 在非退化线性替换 $X=CY$ 下化为二次型 $g(Y)=Y^TC^TACY$ 正定,则 $f(X)=X^TAX$ 也正定.

事实上, 任给列向量 $Y_0\ne 0$,令 $X_0=CY_0$,由于 C 可逆,则 X_0 非零,则 $g(Y_0)=Y_0^TC^TACY_0=X_0^TAX_0>0$,从而 $g(Y)=Y^TC^TACY$ 正定.反之,若 $g(Y)=Y^TC^TACY$ 正定,则任给非零向量 X_0 ,令 $Y_0=C^{-1}X_0$,非零. $f(X_0)=X_0^TAX_0=Y_0^TC^TACY_0=g(Y_0)>0$,则 $f(X)=X^TAX$ 正定.即非退化线性替换保持二次型的正定性质不变.

定理: n 元实二次型正定的充要条件是正惯性指数为 n .

证明: 实二次型正定的充要条件是二次型的标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 正定,而此二次型正定当且仅当 $d_i>0, i=1,2,\cdots,n$,即正惯性指数为 n .

定义,任给实对称阵 A ,若 A 所定义的二次型 $f(X)=X^TAX$ 正定,则称实对称阵 A 正定.

怎样判断一个实对称阵正定.

实对称阵 A 正定 $\Leftrightarrow$ $f(X)=X^TAX$ 正定

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C ,使得 $C^TAC=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$,其中 $d_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

$\Leftrightarrow$ 与单位阵合同,即存在可逆阵 C ,使得 $C^TAC=E$. $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C ,使得 $A=C^TC$.

$\Rightarrow$ 矩阵 A 的行列式大于零.

定义:子式 $P_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $k=1,2,\cdots,n$.称为矩阵 A 的顺序主子式.

定理:实二次型 $f(X)=X^TAX$ 正定当且仅当 A 的顺序主子式全大于零.

例子: 设对称阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

$P_1=5>0$, $P_2=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0$, $P_3=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1>0$,则矩阵 A 正定.

证明:设二次型正定,则任给 k,记 $P_k=|A_k|$,其中 A_k 是前 k 行前 k 列所得的方阵.用 A_k 构造一个 k 元二次型 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=X_k^TA_kX_k$,证明此二次型正定即可.任给一个非零向量

$(x_1,x_2,\cdots,x_k)^T=(c_1,c_2,\cdots,c_k)^T$,代入 $f_k(c_1,c_2,\cdots,c_k)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}c_ic_j=f(c_1,c_2,\cdots,c_k,0,\cdots,0)>0$.正定,

则二次型的矩阵正定,从而行列式大于零.

反之,对 n 归纳.若 $n=1$,则 $f(x_1)=a_{11}x_1^2$,由于 $a_{11}>0$,则二次型正定.

假设结论对 $n-1$ 成立,设对 n 元二次型 $f(X)=X^TAX$,对 A 分块 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$. A_{n-1} 的顺序主子式就是 A 的顺序主子式,从而全大于零,对对称阵 A_{n-1} 应用归纳假设，A_{n-1} 正定,从而存在可逆 $n-1$ 阶矩阵

G_1,使得 $G_1^TA_{n-1}G_1=E_{n-1}$,令 $C_1=\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则

$$C_1^TAC_1=\begin{pmatrix} G_1^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G_1^TA_{n-1}G_1 & G_1^T\alpha \\ \alpha^TG_1 & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & G_1^T\alpha \\ \alpha^TG_1 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha^TG_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G_1^T\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^TG_1G_1^T\alpha \end{pmatrix}$$

令 $C=\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G_1^T\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则有 $C^TAC=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^TG_1G_1^T\alpha \end{pmatrix}$.

取行列式 $|C|^2|A|=a_{nn}-\alpha^TG_1G_1^T\alpha=a$ 则 $a>0$,

$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} C^T AC \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} = E$,即 A 与 E 合同,从而 A 正定,从而二次型正定.

定义:设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,任给一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,

若有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) < 0$,则称二次型负定.　若有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geq 0$,则称二次型半正定.

若有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \leq 0$,则称二次型半负定.　若即不是半正定又不是半负定,则称为不定的.

半正定的等价条件:

定理: 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$,则下等价:

二次型半正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数等于二次型的秩

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C,使得 $C^T AC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$,其中 $d_i \geq 0$,任给 i

$\Leftrightarrow$ 存在方阵 C,使得 $A = C^T C \Leftrightarrow A$ 的所有主子式大于或者等于零.

$\Leftrightarrow$ 实二次型的规范形的矩阵为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,即规范形为 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$,负惯性指数为零.

没有顺序主子式大于或者等于零这个条件.