高等代数第七章练习题

一 填空题

1.取σ是线性空间$P[x]_3$的微分变换,即$\sigma f(x)=f'(x)$,则$(\sigma^2+\sigma)(x^2+x)=$____________.

2. 若线性空间V的线性变换σ,τ在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵分别为$A,B$,则$\sigma^2+\sigma\tau+\tau^2$在此组基下的矩阵为__________________.

3. 在线性空间V中,基(I)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基(II)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$C$,线性变换$\sigma$在基(I)下的矩阵为$A$,向量$\alpha$在基(I)下的坐标为$X$(列向量),则$\alpha$在基(II)下的坐标为____________,$\sigma\alpha$在基(II)下的坐标为______,$\sigma$在基(II)下的矩阵为___________.

4. 设n阶阵$A=(a_{ij})$可逆,$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=a\neq 0(\forall i=1,2,\cdots,n)$,则$A^{-1}$的一个特征值为__________.

5. 设$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&3&-1\\-4&b&a\end{pmatrix}$有特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$,则$a=$______,$b=$_____.

6. 已知0是方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$的特征值,则$a=$________,$A$的所有特征值是_________.

7. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&-3&a\\0&0&-1\end{pmatrix}$有两个线性无关的特征向量, 则$a=$___________.

8. 已知$\alpha=(1,1,-1)^T$是矩阵$A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&x\end{pmatrix}$的一个特征向量,则$x=$_______.

9. 设$g(\lambda)$是λ的多项式,若3阶矩阵A与$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$相似,则矩阵$A$的多项式$g(A)$的行列式

$|g(A)|=$___________________________,$g(A)$的三个特征值为_____, _____, _____.

10. 设A是3阶矩阵,知X是A的属于λ的一个特征向量,取可逆阵P,$P^{-1}AP$的属于特征值λ的一个特征向量为_______.

11. 若λ是可逆矩阵A的特征值,则A^*+2E有特征值为_____________.

12. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{pmatrix}$,则$A$的$4$个特征值为___________.$A$能否相似对角化__________.

13. 设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值为 $0,1,2,\cdots,n-1$,矩阵 B 与 A 相似,则行列式 $|B+E|=$_______.

14. 设 A 是秩为 2 的 3 阶实对称矩阵, 且 $A^2+5A=0$, 则 A 的全部特征值为_________.

15. 若 3 阶方阵 A 满足 $|E-A|=|E+A|=|A|=0$,则 A 的迹 $\mathrm{tr}A=$______,$|A|=$______.

16. 设 A 为 3 阶方阵,已知 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,则 $|A+4E|=$__.

17. λ_0 是 n 阶阵 A 的一个 s 重特征值,若 A 能相似对角化,则属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数为____.

18. 线性空间 $P[x]_n$ 中,微分变换 σ (即 $\sigma f(x)=f'(x)$)的秩为________,零度为________.

19. n 阶阵 A,秩为 r,对 $\xi\in F^n$,令 $\sigma(\xi)=A\xi$, σ 是线性变换,则 $\dim\mathrm{Im}(\sigma)=$____, $\dim\ker(\sigma)=$______.

20. 设 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\in P^{2\times2}, c\neq0$,则 A 在 P 上可相似对角化的充要条件是______________.

21. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,已知 A 与矩阵 B 相似,则秩 $r(AB-A)=$_____.

22. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$________, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$_________.

23. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ t & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 相似,则 $t=$______, $x=$_______.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为________; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为_______,最小多项式为________.

25. $f(\lambda)$ 是线性变换 σ 的特征多项式, λ_0 是 $f(\lambda)$ 的 s 重根. $V_{\lambda_0}=\{\xi\mid\sigma\xi=\lambda_0\xi\}$ 是 σ 的属于 λ_0 的特征子空间,如果 V_{λ_0} 是 t 维空间,那么 t ___ s (大小关系);如果 σ 在某组基下的矩阵 A 可以对角化,那么 t ___ s.

26. σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$,则子空间 σV 的维数与矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的关系是________.

二 计算题

1. 取 P^3 的线性变换 $\sigma(a,b,c)=(2a-b,b+c,a)$,

(1) 求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵;

(2) 求 σ 在基 $\eta_1=(1,0,0),\eta_2=(1,1,0),\eta_3=(1,1,1)$ 下的矩阵;

(3) 求向量 $\alpha=(1,2,3)$ 的像 $\sigma\alpha$ 分别在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和 η_1,η_2,η_3 下的坐标.

2. 设 A 是 3 阶阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量,且 $A\alpha_1=4\alpha_1-4\alpha_2+3\alpha_3$, $A\alpha_2=-6\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$,

$A\alpha_3=0$,求矩阵 A 的特征值和对应的特征向量.

3. 设 σ 是线性空间 $P[x]_3$ 的一个线性变换,在基 $1,x,x^2$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 6\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

(1) 证明 σ 是一个可逆线性变换,求 σ^{-1} 在基 $1,x,x^2$ 的矩阵.

(2) σ 是否可以相似对角化,若可以,求一组基,使得 σ 关于此组基的矩阵是对角阵.

4. 给出 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ 可相似对角化的条件.

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 D, (1) 求 a; (2) 求可逆阵 P,使得 $P^{-1}AP=D$.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ 相似,求 a,b 的值;求可逆矩阵,使 $P^{-1}AP=B$.

7. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 7 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 是否相似,若相似,求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$.

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, 求 A^k (利用特征值和特征向量).

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, (1) 求 A 的最小多项式;

(2) A 能否相似对角化?若可以,求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵,若不能说明理由.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}a & 2 & c\\ 3 & b & 2\\ 2c & 0 & a\end{pmatrix}$, $|A|=1$, A^* 有特征值 λ_0,对应的特征向量为 $\alpha=(-2,1,2)^T$,求有理数 a,b,c,λ_0.

11. 在线性空间 P^3 中,定义线性变换 $\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$,求 σ 的值域与核.

12. $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(0,x_2,0)$ 是 P^3 上的一个线性变换, 求 $\sigma^{-1}(0)$ 和 σP^3 的一组基.

三 证明题:

1. 设σ是线性空间V的一个线性变换,且满足$\sigma^2=id$ (单位变换),

(1) 证明σ的特征值为1或者-1;

(2) 证明$V=V_1\oplus V_{-1}$,其中$V_1=\{\alpha\in V\mid\sigma\alpha=\alpha\},V_{-1}=\{\alpha\in V\mid\sigma\alpha=-\alpha\}$;

(3) 证明存在V的一组基,使得σ在此组基下的矩阵为对角阵.

2. 设数域P上的矩阵$A=\begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, 证明$A,B,C$彼此相似.

3. 设σ是数域P上的n维线性空间V的一个线性变换.$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$V$中的$m$个向量.

证明:如果$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_m$线性无关,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$也线性无关.

4. 设A,B为n阶实方阵,A有n个互异特征值,证明$AB=BA\Leftrightarrow A$的特征向量是B的特征向量.

5. 设A,B为n阶方阵,且$A+B+AB=0$,

(1) 证明A与B的特征向量是公共的;

(2) 证明A相似于对角阵当且仅当B相似于对角阵;

(3) 证明$r(A)=r(B)$.