1 二项式系数

二项式系数 $\binom{n}{k}$ 计数了 n 元集合的 k 元子集的个数，在组合中具有十分重要的作用。它的很多好的性质表现在各个组合恒等式中，例如二项式定理，也正是源于此，它得名二项式系数。在本章中，我们将讨论一下关于它的一些基本性质和恒等式的证明。

1.1 帕斯卡（Pascal）公式

对于非负整数 n, k, 二项式系数 $\binom{n}{k}$ 计数了 n 元集合的 k 元子集的个数，于是若 $k > n$, 则 $\binom{n}{k} = 0$，且对任意的 n，均有 $\binom{n}{0} = 1$，若 $n > 0$，$1 \leq k \leq n$，则

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}. \tag{1}$$

定理 1.1 *(帕斯卡公式). 对于所有满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的整数 n 及 k，均有*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{2}$$

证明: 首先可直接利用公式 (1) 展开等式的两边即可得到，读者可以自己验算一下。下面我们介绍一种组合方法，设 S 是一个 n 元集合，x 为其中的一个元素，下面我们将集合 S 的 $k(k \leq n-1)$ 元子集 X 分两种情况进行讨论。

情形 1: $x \in X$，则还需在除 x 外的 $n-1$ 元集合中取 $k-1$ 元子集作为 X 中的元素，共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方法；

情形 2：$x \overline{\in} X$，则需在除 x 外的 $n-1$ 元集合中取 k 元子集作为 X 中的元素，共有 $\binom{n-1}{k}$ 种方法。

从而，由加法原理，S 的 $k(k \leq n-1)$ 元子集 X 共有 $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ 个，即

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

∎

例 1.2 令 $n = 4$，$k = 3$，$S = \{x, a, b, c\}$，于是属于情形 1 的 3 元子集为

$$\{x, a, b\},\ \{x, a, c\},\ \{x, b, c\}.$$

此可视为集合 $\{a, b, c\}$ 的 2 元子集。属于情形 2 的 3 元子集为

$$\{a, b, c\}.$$

此可视为集合集合 $\{a, b, c\}$ 的 3 元子集。从而

$$\binom{4}{3} = 4 = 3 + 1 = \binom{3}{2} + \binom{3}{3}.$$

由递推公式 (2)，及初始条件

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \qquad (n \geq 0)$$

我们不需要利用公式 (1) 即可计算出二项式系数。由此种方法，我们在计算二项式系数的过程中经常以帕斯卡三角的形式显示出来，如下图所示：

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

图 1: 帕斯卡三角.

图中除了最左侧一列的 1 以外，其余的值都可以通过上行中同列及其左邻的值之和。例如，对 $n = 6$，我们有

$$\binom{6}{3} = 20 = 10 + 10 = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}.$$

二项式系数的许多性质和恒等式均可以通过帕斯卡三角得到，将帕斯卡三角某行的元素加起来可发现，

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

下面给出帕斯卡三角的另一种组合解释，令 n，k 为满足 $0 \leq k \leq n$ 的非负整数，定义 $p(n,k)$ 计数了帕斯卡三角中左上角 (数值 $\binom{0}{0} = 1$) 到数值 $\binom{n}{k}$ 的路的条数，其中路的每一步均为向南走一个单位或向东南方向走一个单位，即按向量方向 $(0,-1)$ 和 $(1,-1)$ 走一步。

我们约定 $p(0,0) = 1$，且对任意的非负整数 n，均有 $p(n,0) = 1$，(每一步都必须朝下走一直到 $\binom{n}{0}$) 及 $p(n,n) = 1$。(每一步都不需沿对角线走直到 $\binom{n}{n}$) 注意到每一条从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{n}{k}$ 的路均可看为是

(i) 从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{n-1}{k}$ 的路再加上一个竖直步子，

图 2: 步子

或

(ii) 从 $\binom{0}{0}$ 到 $\binom{n-1}{k-1}$ 的路再加上一个对角步子。

从而，由加法原理，我们有递推关系

$$p(n,k) = p(n-1,k) + p(n-1,k-1).$$

观察到 $p(n,k)$ 与二项式系数有相同的初始条件及递推关系，故而易知对任意满足 $0 \leq k \leq n$ 的非负整数 n，k，有

$$p(n,k) = \binom{n}{k}.$$

于是帕斯卡三角的各数值也表示从左上角到该数值的路的条数。这也给了二项式系数以新的组合解释。

1.2 二项式定理

二项式系数是从二项式定理中得名的，本节中将介绍有关二项式定理的恒等式，它作为代数恒等式我们在高中就已经接触过。

定理 1.3 设 n 是正整数，则对任意的实数 x，y，均有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{3}$$

证明:（方法 1）将 $(x+y)^n$ 写成 n 个因子的乘积

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y).$$

由乘法的分配律，展开乘积并合并同类项，由于每一个因子 $(x+y)$，我们都有 x，y 两种选择，所以展开式中共有 2^n 项，且每项都是 $x^{n-k}y^k(k=0,1,2,\ldots,n)$ 的形式。项 $x^{n-k}y^k$ 是在 n 个因子中 k 个选取 y，其余 $n-k$ 个因子中取 x，于是 $x^{n-k}y^k$ 在展开式中出现的次数为 $x^{n-k}y^k$，即展开式中项 $x^{n-k}y^k$ 的系数为 $\binom{n}{k}$，从而

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$\blacksquare$

证明:（方法 2）对 n 进行数学归纳法。对 $n=1$，式 (3) 为

$$(x+y)^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k=x+y,$$

显然成立。假设式 (3) 对整数 n 成立，即 $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$，下考虑 $n+1$ 的情形，

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1}&=(x+y)(x+y)^n=(x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\
&=x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)+y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\\
&=\binom{n}{0}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}+\binom{n}{n}y^{n+1}
\end{aligned}$$

在后一个连加项中，用 $k-1$ 代替 k，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k.$$

从而

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k+y^{n+1},$$

利用帕斯卡公式，上式等价于

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k+y^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k,$$

恰满足式 (3)，由归纳法原理定理得证。 ∎

一般情况下，我们常常利用到一种特殊情形，即当 $y=1$ 时，我们有如下推论。

推论 1.4 令 n 是正整数，则对任意的实数 x 均有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k.$$

1.3 恒等式

本节中，我们将考虑一些关于二项式系数的恒等式并给出它们的组合解释。首先由二项式系数的代数展开式，很快地，我们有

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}. \tag{4}$$

作为代数式，我们很容易根据二项式的表达式证明，但是作为组合恒等式，式 (4) 又有怎么样的组合意义呢？

我们考虑这样一个实际问题，从 n 个人中选出 k 个人组成一个足球队，并选出队长，完成这项事件共有多少种选择方案？一种计数方法是我们先选出足球队，则有 $\binom{n}{k}$ 种，再在这选出的 k 个人中选出队长，有 k 种，于是由乘法原理完成这项事件共有 $k\binom{n}{k}$ 种选择方案。另一种计数方法是先从 n 个人中选出队长，有 n 种选择，再在剩下的 $n-1$ 个人中选出 $k-1$ 个人与队长一起组成足球队，有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种选择，于是由乘法原理完成这项事件共有 $n\binom{n-1}{k-1}$ 种选择方案。于是式 (4) 两边计数的是同一事件的选择方案，故而等式成立。

在二项式定理中若同时取 $x=1$，$y=1$，则可得到恒等式

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n. \tag{5}$$

若取 $x=1$，$y=-1$，则可得到恒等式

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0, \quad (n\geq 1).$$

也即

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots, \quad (n\geq 1). \tag{6}$$

由式 (5)，要证明式 (6)，只需证明

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=2^{n-1}.$$

下面我们将给出该式的组合解释。令 $S=x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为 n 元集合，我们需要计数的是 S 的偶子集 X 的个数，我们对 S 中元素逐个考虑，首先考虑 x_1，我们有放不放入 X 中两种选择，考虑 x_2, 我们也有放不放入 X 中两种选择，接着考虑 x_3，一直到 x_{n-1}，均有放不放入 X 中两种选择，最后对于 x_n，若前面放入 X 的元素个数为奇，则将 x_n 放入 X 中，否则将 x_n 不放入 X 中。所以在整个事件中，前 $n-1$ 步均有两种选择，最后一步只有一种选择，于是由乘法原理，S 的偶子集的个数为 2^{n-1}，又 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots$ 也计数了 n 元集合的偶子集的个数，故而

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=2^{n-1}.$$

∎

同样的道理，我们可以证明

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1}.$$

利用恒等式 (4) 和 (5)，我们可得到

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^n, \quad (n\geq 1). \tag{7}$$

式 (7) 也可以根据二项式定理而得到，在二项式公式

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

两边同时对 x 求导，我们有

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1},$$

最后，令 $x=1$，即可得到式 (7)。