组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

1. 加法原理与乘法原理
2. 集合的排列
3. 集合的组合
4. 多重集合的排列
5. 多重集合的组合

Outline

加法原理

以下假设 A 和 B 是两类不同的、互不关联的事件。

定理 1.1

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，则选 A 或 B 共有 $m+n$ 种方式。

加法原理

以下假设 A 和 B 是两类不同的、互不关联的事件。

定理 1.1

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，则选 A 或 B 共有 $m+n$ 种方式。

用集合的语言可将加法原理叙述成以下定理：

定理 1.2

设 A, B 为有限集，$A \cap B = \varnothing$, 则

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

例 1.1

从北京到上海可以乘飞机 *(3 种方案)*，或者火车 *(5 种方案)*。
问从北京到上海共几种方案？

乘法原理

定理 1.3

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，那么选取 A 以后再选取 B 共有 $m \cdot n$ 种方式。

乘法原理

定理 1.3

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，那么选取 A 以后再选取 B 共有 $m \cdot n$ 种方式。

用集合论的语言可将上述乘法原理叙述成如下的定理：

定理 1.4

设 A，B 是两个有限集合，$|A| = m$，$|B| = n$，则

$$|A \times B| = |A| \times |B| = m \cdot n.$$

例 1.2

从北京到上海有 *2* 条路线，从上海到深圳有 *5* 条路线。
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线？

例 1.3

求 *1400* 的不同的正因子个数。

$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7^1$

正因子为：$2^i \times 5^j \times 7^k$，其中 $0 \le i \le 3, 0 \le j \le 2, 0 \le k \le 1$

共计 $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$

例 1.4

在 *0* 和 *10000* 之间有多少个整数恰好有一位数字是 *5*?

例 1.4

在 *0* 和 *10000* 之间有多少个整数恰好有一位数字是 *5*?

通过添加 0，把所有的数都看成是四位数，例如 6=0006。

假如第 i 位数是 5，则有 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 种可能。

共计 $4 \times 729 = 2916$

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间有多少具有不同数字的奇数?

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间有多少具有不同数字的奇数?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间有多少具有不同数字的奇数?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序:

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间有多少具有不同数字的奇数?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 $\to$ 千位 $\to$ 百位 $\to$ 十位

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间有多少具有不同数字的奇数?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 $\rightarrow$ 千位 $\rightarrow$ 百位 $\rightarrow$ 十位

答案： $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$

例 1.6

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合，或简称 n 元集。
再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合，称为幂集。求 2^S 的基数?

例 1.6

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合，或简称 n 元集。
再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合，称为幂集。求 2^S 的基数?

解: 令

$$\{0,1\}^n=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_i=0\text{或}1\}.$$

因为每个 ε_i 有两种可能的取值，所以有

$$\#\{0,1\}^n=2^n.$$

定义映射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$ 为

$$\theta(T)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n),$$

其中

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & \text{若}x_i\in T\\ 0, & \text{若}x_i\notin T.\end{cases}$$

容易看出 θ 是一个双射. 于是，$\#2^S=2^n$.

Outline

集合的排列

定义 2.1

给定某个含有不同的元素集合 S，我们把它的元素排成一个线性序，使得每个元素恰好出现一次，叫做该集合的一个排列 *(permutation)*。

以 $[n]$ 表示 n 个正整数构成的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$, 那么 $[n]$ 上的一个排列可以看成是 $[n]$ 到自身的一个双射。

对于一个排列，我们可以用一行

$$\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$$

来表示，其中 π_i 表示 i 的像。

我们来看一下 n 元集合的排列的个数。

定理 2.2

n 元集合上全部排列的个数为

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

注意，为方便起见，我们令 $0! = 1$.

例 2.1

集合 $[3]$ 上的排列个数为 $3! = 6$，它们分别为

$$1\,2\,3,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 3\,2\,1.$$

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个**r-排列**。

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3]=\{1,2,3\}$ 上的 1-排列为

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

2-排列为

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

2-排列为

$$12, \quad 13, \quad 21, \quad 23, \quad 31, \quad 32.$$

用 $P(n,r)$ 表示 n 元集合的 r-排列的数目。

如果 $r > n$, 则 $P(n,r) = 0$。

定理 2.4

对于正整数 n 和 r, $r \leq n$, 有

$$P(n,r) = n\,(n-1)\cdots(n-r+1).$$

记 $(n)_r = n\,(n-1)\cdots(n-r+1)$，称为 n 的 (r 阶) 下阶乘。

例 2.3

从集合 $\{1, 2, \ldots, 9\}$ 中取出 *7* 个互异的数字组成 *7* 位数，使得 *5* 和 *6* 不会以任何顺序相继出现的方式有多少种?

例 2.3

从集合 $\{1,2,...,9\}$ 中取出 *7* 个互异的数字组成 *7* 位数，使得 *5* 和 *6* 不会以任何顺序相继出现的方式有多少种?

所有的 7 位数 $P(9,7)=\frac{9!}{2!}=181440$

5 和 6 相继出现的 7 位数 $P(7,5)\times P(6,1)\times P(2,1)=\frac{7!}{2!}\times 6\times 2=30240$

共计 181440−30240=151200

环排列

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个环排列。

定理 2.5

n 元集合的 r-环排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，n 元集合的循环排列是 $(n-1)!$.

例 2.4

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式?

环排列

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个环排列。

定理 2.5

n 元集合的 r-环排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，n 元集合的循环排列是 $(n-1)!$.

例 2.4

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式?

答案：$(10-1)! - 2 \times (9-1)! = 282240.$

例 2.5

7 个男生和 *3* 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻。
问有多少种旋转排列方式?

例 2.5

7 个男生和 *3* 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻。
问有多少种旋转排列方式?

答案：$(7-1)! \times P(7,3) = 151200.$

例 2.6

用 7 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链?

例 2.6

用 *7* 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链?

答案: $\frac{1}{2}(7-1)! = 360$

例 2.7

有 *4* 位学生各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种?

例 2.7

有 4 位学生各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种?

答案：$3!+3=9.$

提示：(错排问题) 把 4 位同学分别记为 1,2,3,4, 假设第 i 位同学拿到了第 π_i 位同学写的贺卡，则 $\pi_i \neq i$ 对于所有的 $1 \leq i \leq 4$. 于是，所求问题可以转化为求排列满足 $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$, 其中 $\pi_i \neq i$ 对于 $1 \leq i \leq 4$ 的个数.

然后，再考虑排列的圈表示，即求圈表示中不含 1-圈的排列的个数.

例 2.8 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式?

例 2.8 (ménage 问题)

有 *4* 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式?

答案：$(4-1)! \times 2 = 12.$

提示：先让女士就座，就座方式有 $(4-1)! = 6$ 种，然后再让男士就座，只有 2 种可能.

Outline

集合的组合

定义 3.1

n 元集合的r-组合是指从 S 中取出 r 个元素的一种无序选择，
也可以看作是 S 的一个 r 元子集。

例 3.1

若 $S=\{a,b,c,d\}$，则

$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\}$$

是 S 的所有 2-组合。

用 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合的个数，读作“n 取 k”。

用 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合的个数，读作“n 取 k”。

显然, 当 $k > n$ 时, $\binom{n}{k} = 0$.

定理 3.2

若 $0 \le k \le n$, 则
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$n\,(n-1)\cdots(n-k+1) \overset{why?}{=} \binom{n}{k} \cdot k!$$

例 3.2

在平面上给出 *25* 个点，没有 *3* 点共线，这些点可以确定多少条直线？确定多少个三角形?

例 3.2

在平面上给出 *25* 个点，没有 *3* 点共线，这些点可以确定多少条直线? 确定多少个三角形?

两点确定一条直线 $\binom{25}{2} = 300$, 三点确定一个三角形 $\binom{25}{3} = 2300$.

例 3.3

如果每个单词包含 3，4 或 5 个元音字母，那么用 26 个字母可以构造多少个长度为 8 的单词？（字母使用次数无限制）

例 3.3

如果每个单词包含 *3*，*4* 或 *5* 个元音字母，那么用 *26* 个字母可以构造多少个长度为 *8* 的单词？（字母使用次数无限制）

3 元音单词：$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$,

4 元音单词：$\binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4$,

5 元音单词：$\binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3$,

共计：$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5 + \binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4 + \binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3$.

Outline

多重集合的排列

例 4.1

用 3 个 A，2 个 B，4 个 C, 1 个 D 可以构成多少个长度为 10 的字符串?

多重集合的排列

例 4.1

用 *3* 个 *A*，*2* 个 *B*，*4* 个 *C*, *1* 个 *D* 可以构成多少个长度为 *10* 的字符串?

多重集是元素可以重复出现的集合。

把某个元素 a_i 出现的次数 k_i，叫做该元素的重数。

通常把含有 k 个不同元素的多重集 S 记做

$$\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}$$

或者

$$\{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_k^{k_n}\}.$$

多重集合的排列

用 $\binom{k_1+k_2+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ 表示多重集合 $\{k_1\cdot a_1, k_2\cdot a_2, \ldots, k_n\cdot a_n\}$ 的全排列个数。

先把 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 个元素看成是互不相同的，

但这里 k_i 个 a_i 是相同的，只要两个排列中这些 a_i 的位置相同，就可以视为相同的多重集的排列。

定理 4.1

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$$

例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法?

例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法?

$$\binom{11}{1,2,4,4}$$

例 4.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 S，问有多少种排法?

例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法?

$$\binom{11}{1,2,4,4}$$

例 4.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 S，问有多少种排法?

$$\binom{11}{1,2,4,4}-\binom{8}{1,1,2,4}=33810$$

例 4.4

考虑 例*1.6* 中定义的双射 $\theta\colon 2^S \to \{0,1\}^n$。集合 S 上的k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0, k\cdot 1\}$ 的排列一一对应。

例 4.4

考虑 例*1.6* 中定义的双射 $\theta\colon 2^S \to \{0,1\}^n$。集合 S 上的k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0, k\cdot 1\}$ 的排列一一对应。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k, k}$$

例 4.5 (格路计数问题)

在平面上有多少从 $(0,0)$ 到 $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 点的格路径，其每一步都具有形式 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ （即每一步向东或向北走一个单位距离）。

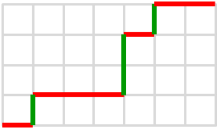

图: 格路

例 4.5 (格路计数问题)

在平面上有多少从 $(0,0)$ 到 $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 点的格路径，其每一步都具有形式 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ （即每一步向东或向北走一个单位距离）。

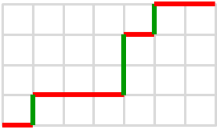

图: 格路

其与多重集 $\{m \cdot E, n \cdot N\}$ 的排列一一对应。

例 4.6

从 *6* 男 *2* 女共 *8* 名学生中选出队长 *1* 人，副队长 *1* 人，普通队员 *2* 人组成 *4* 人服务队，要求服务队中至少有 *1* 名女生，共有多少种不同的选法?

例 4.6

从 *6* 男 *2* 女共 *8* 名学生中选出队长 *1* 人，副队长 *1* 人，普通队员 *2* 人组成 *4* 人服务队，要求服务队中至少有 *1* 名女生，共有多少种不同的选法?

先选出 4 人： 3 男 1 女 或 2 男 2 女

再考虑多重集合 $\{1 \cdot \text{队长}, 1 \cdot \text{副队长}, 2 \cdot \text{普通队员}\}$ 的排列，比如

$$\begin{pmatrix} \text{张三} & \text{李四} & \text{王五} & \text{赵六} \\ \text{队长} & \text{队员} & \text{副队长} & \text{队员} \end{pmatrix}$$

共计 $\left(\binom{6}{3}\binom{2}{1} + \binom{6}{2}\binom{2}{2}\right) \times \binom{4}{1,1,2} = (40+15) \times 12 = 660.$

该题来自 2017 年浙江高考。

插空法

例 4.7

在由四个 0 和八个 1 组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ 中，没有两个连续 0 的序列有多少个?

插空法

例 4.7

在由四个 0 和八个 1 组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ 中，没有两个连续 0 的序列有多少个?

$$\binom{8+1}{4} = 126$$

Outline

多重集合的组合

假定 n 个不同物体中的每一个都可以被重复选取任意多次。

用 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right)$ 表示从

$$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$$

选取基数为 r 的多重集的方法数。

设元素 a_i 出现 x_i 次。该问题等价于求

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的个数。

这相当于，将 r 个相同的小球排成一排，然后在小球中间插入 $n-1$ 个隔板，隔板将小球分成了 n 份。

因此，原问题转化为多重集合 $\{r \cdot \circ, (n-1) \cdot |\}$ 的排列数。

所以，$\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r}$.

例 5.1

一家面包房生产 *8* 种炸面包圈。

i) 如果将一打（*12* 个）炸面包圈装进盒内，则一共有多少种不同的盒装组合?

ii) 若每盒必定包含所有的 *8* 种炸面包圈呢?

例 5.1

一家面包房生产 *8* 种炸面包圈。

i) 如果将一打（*12* 个）炸面包圈装进盒内，则一共有多少种不同的盒装组合?

ii) 若每盒必定包含所有的 *8* 种炸面包圈呢?

i) $\left(\!\binom{8}{12}\!\right) = \binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12}$, ii) $\binom{12-1}{4} = \binom{11}{4}$

例 5.2

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个?

ii) 正整数解有多少个?

例 5.2

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个?

ii) 正整数解有多少个?

i) $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$,

ii) 法一：把 r 个相同的小球放入 n 个不同的箱子，要求每个箱子非空。这相当于，将 r 个相同的小球排成一列，然后在小球之间插入 $n-1$ 个隔板将小球分成了 n 份，每一份的数量都要大于 1 ，对应上述方程的一组正整数解。

$$\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\circ$$

也就是说，从 $r-1$ 个位置挑出 $n-1$ 个位置，用于放置隔板，即 $\binom{r-1}{n-1}$。

法二：令 $y_i = x_i - 1$, 则问题转化为方程 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r - n$ 的非负整数解的个数，即 $\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$.

Balls in boxes

I will tell you shamelessly what my bottom line is: It is placing balls into boxes.
— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

例 5.3

i) 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，有多少种方法?
ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法?

Balls in boxes

I will tell you shamelessly what my bottom line is: It is placing balls into boxes.
— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

例 5.3

i) 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，有多少种方法?
ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法?

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解
ii) 正整数解

例 5.4

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的满足

$$x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq -1,\ x_4 \geq 0$$

的整数解有多少个?

例 5.4

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的满足

$$x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq -1,\ x_4 \geq 0$$

的整数解有多少个?

我们引入新变量 $y_1 = x_1 - 4,\ y_2 = x_2 - 2,\ y_3 = x_3 + 1,\ y_4 = x_4$.

原问题变为方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$$

的非负整数解的个数 $\binom{4+15-1}{4-1} = \binom{18}{3}$.

对 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r}$ 的一个直接的组合证明如下。

令

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_r \le n + k - 1$$

为 $[n+r-1]$ 的一个 r 元子集。令 $b_i = a_i - i + 1$，则 $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ 是 $[n]$ 的一个 k 元重集。

反之，给定 $[n]$ 上的一个 r 元重集

$$1 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_r \le n,$$

定义 $a_i = b_i + i - 1$，则 $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ 是 $[n+r-1]$ 的 r 元子集。

这样就定义了 $[n]$ 的 r 元重集与 $[n+r-1]$ 的 r 元子集之间的双射。

多重集合的组合数（有重数限制）

令

$$S = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}$$

是一个多重集，多重集合的 $r-$ 组合数的计数问题更为困难。等价于方程

$$x_1 + x_2 + \ + x_n = r$$

的整数解的个数，其中 $0 \le x_1 \le k_1,\ 0 \le x_2 \le k_2,\ \ldots,\ 0 \le x_n \le k_n$。

将在后面的课程中容斥原理或生成函数解决该问题。

补充题

1. 集合 $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ 有多少个至少包含一个奇数的子集?
2. 将十个人分成五组，每组两人，这样的分法有多少种?
3. 计算满足 $\pi_1 \neq 2$ 的 6 阶排列 π 的个数。
4. 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈?（不动点可以认为是长为 1 的圈）

补充题

1. 集合 $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ 有多少个至少包含一个奇数的子集?
2. 将十个人分成五组，每组两人，这样的分法有多少种?
3. 计算满足 $\pi_1 \neq 2$ 的 6 阶排列 π 的个数。
4. 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈?（不动点可以认为是长为 1 的圈）

1. $2^{10} - 2^5 = 992$
2. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$
3. $5 \cdot 5! = 600$（或者 $6! - 5! = 600$）
4. $\binom{6}{1} 4! + \binom{6}{2} 3! + \frac{1}{2} \binom{6}{3} 2!^2 = 274$