行列式的几何解释

张彪

天津师范大学

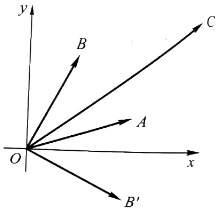
数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

平行四边形的面积与二阶行列式

对任意 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

将 OB 绕 O 沿顺时针方向旋转直角得到有向线段 OB'. 则 $\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$.



考虑 $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$，它就是 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$.

由于 $|OB'| = |OB|, \angle BOB' = -\frac{\pi}{2}$，于是

$$\begin{aligned}\Delta = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} &= |OA|\,|OB'|\cos\angle AOB' \\ &= |OA||OB|\cos\left(\angle AOB - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= |OA||OB|\sin\angle AOB\end{aligned}$$

平行四边形的面积与二阶行列式

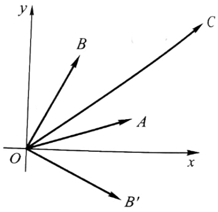
对任意 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

将 OB 绕 O 沿顺时针方向旋转直角得到有向线段 OB'. 则 $\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$.

考虑 $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$, 它就是 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$.

由于 $|OB'| = |OB|, \angle BOB' = -\frac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\Delta = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} &= |OA|\,|OB'|\cos\angle AOB' \\ &= |OA||OB|\cos\left(\angle AOB - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= |OA||OB|\sin\angle AOB\end{aligned}$$



- $\triangle$ 的绝对值就是以 OA, OB 为一组邻边的平行四边形 $OAPB$ 的面积 S_{OAPB}
- $\triangle$ 的符号就是 $\sin\angle AOB$ 的符号

对任意 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, 定义

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = |OA||OB| \sin \angle AOB$$

也记作

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式.

将它理解为平行四边形 OAPB 的有向面积,

取值既可以为正实数, 也可以取负实数或零.

它具有如下基本性质:

性质 1

$$\det\left(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2, y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2\right) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \det\left(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j\right).$$

也就是说：可以将 $\det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 看作向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的某种乘积, 按乘法对于加法的分配律和与数乘的结合律展开.

性质 2

$$\det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -\det(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}).$$

也就是说: 两条棱重合, 面积为 0 ; 两条棱互相交换位置, 有向面积变号 (因为夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 的正弦变号: $\sin\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = -\sin\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$).

性质 3

$\det\left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right) = 1$, 其中 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 分别是 x 轴、y 轴正方向的单位向量.

前面已经通过 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$ 计算出

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

为了推广到任意 n 阶行列式, 我们反过来利用上面的三条基本性质来求二阶行列式:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= \det\left(a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2, b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2\right) \\ &= a_1 b_1 \det\left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1\right) + a_1 b_2 \det\left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right) \\ &\quad + a_2 b_1 \det\left(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1\right) + a_2 b_2 \det\left(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\right) \\ &= a_1 b_1 \times 0 + a_1 b_2 \times 1 + a_2 b_1 \times (-1) + a_2 b_2 \times 0 \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

显然, 有向面积 $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0 \Leftrightarrow OA, OB$ 共线.
反过来, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 组成平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一组基 $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \neq 0$.

平行六面体的体积与三阶行列式

与二阶行列式类似, 对于 3 维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中的任意 3 个向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

它们的混合积

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

就是以 OA, OB, OC 为三条棱的平行六面体的有向体积, 我们将它记为

$$\det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}),$$

称为三阶行列式.

它也具有 3 条基本性质:

性质 1

可以看作 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 的某种乘积, 按照乘法对于加法的分配律及与数乘的分配律展开:

$$\det\left(\sum_i x_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_j y_j\boldsymbol{\beta}_j, \sum_k z_k\boldsymbol{\gamma}_k\right) = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \det\left(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\gamma}_k\right)$$

性质 2

- 如果三个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 中有两个相等, 则平行六面体退化为平面图形, 有向体积 $\det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$.
- 如果将其中任何两个互相交换位置, 则有向体积 $\det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 变号.

性质 3

以 $\mathbb{R}^3$ 的自然基向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为棱的正方体体积 $\det\left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\right) = 1$.

对于 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 也可以类似定义n 阶行列式

$$\Delta = \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

看作以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为棱的 n 维体积, 满足下面的基本性质:

性质 1

$\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 可以看作向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的某种乘积, 可以按加法对乘法的分配律和与数乘的结合律进行展开. 即对 $1 \leqslant i \leqslant n$

$\det(\cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, x\boldsymbol{\alpha}_i + y\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots) =$

$x \det(\cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots) + y \det(\cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots)$.

性质 2

- 如果存在 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_j$, 则 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = 0$.
- 如果将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中的某两个向量互换位置, 则 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 变为原来值的相反数. 即
  $\det(\cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots) = -\det(\cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots)$.

性质 3

$\mathbb{R}^n$ 上的自然基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 决定的“n 维体积”

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1.$$

将每个 $\alpha_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 唯一地写成 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合

$$\boldsymbol{\alpha}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

则按以上基本性质 1 展开得

$$\begin{aligned}\Delta &= \det\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right) \\ &= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n n} \det\left(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}\right)\end{aligned}$$

每一组 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 决定一项. 如有 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中有某两个数相同,
由行列式基本性质 2 有

$$\det\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}\right) = 0,$$

这一项就可以从求和的式子中去掉.

- 因此只须考虑 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 两两不同的项, 此时 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个排列, 记作 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 这样的排列共有 $n\,!$ 个. 于是

$$\Delta = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n})$$

  其中的 $\sum$ 是对所有的排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 求和.
- 只需再对每个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 求行列式 $\det(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n})$.

- 因此只须考虑 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 两两不同的项, 此时 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个排列, 记作 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 这样的排列共有 $n!$ 个. 于是

$$\Delta = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n})$$

  其中的 $\sum$ 是对所有的排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 求和.
- 只需再对每个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 求行列式 $\det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n})$.
- 对每个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$, 如果将其中某两个数 i_j, i_k 互换位置、其余的 $n-2$ 个数不变, 就称为进行了一次对换, 此时 $\det(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n})$ 中的 e_{i_j}, e_{i_k} 相应地互换了位置, 行列式的值变成原来值的 -1 倍.
- 进行若干次对换可以将排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 变成 $(12 \cdots n)$, 而原来的 $\det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots, \mathbf{e}_{i_n})$ 也被乘上了若干个 -1 变成 $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$.

如果由 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 变成 $(12 \cdots n)$ 需要经过 s 次对换, 则
$(-1)^s \det(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = 1, \quad \det(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2} \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = (-1)^s$.

- 如果 s 是偶数, 就称 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是偶排列, 记 $\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n) = 1$, 此时 $\det(e_{i_1}, \ \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i}) = 1$;
- 如果 s 是奇数, 就称 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇排列, 记 $\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n) = -1$, 此时 $\det(e_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = -1$.

于是

$$\Delta = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} \operatorname{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n^n}$$

可以作为 n 阶行列式的定义.