高等代数第五章练习题答案(部分)

三. 证明题:

1. 证明: $\Rightarrow$若 AA^T 正定,则二次型 $f(X)=X^TAA^TX$ 正定,故 $X^TAA^TX=0 \Leftrightarrow X=0$,

假设 $A^TX=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$,则 $X^TAA^TX=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0 \Leftrightarrow y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,即 $A^TX=0$

故 $X^TAA^TX=0 \Leftrightarrow X=0$ 转化为 $A^TX=0 \Leftrightarrow X=0$,此时系数矩阵 A^T 列满秩,即 $r(A)=m$.

$\Leftarrow$若 $r(A)=m$,考察二次型 $f(X)=X^TAA^TX$,令 $A^TX=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,则 $f(X)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\geq 0$,

而 $f(X)=0 \Leftrightarrow A^TX=0$,由于 $r(A)=m$,则 $A^TX=0 \Leftrightarrow X=0$,故二次型正定,矩阵 AA^T 正定.

2. 提示: $\begin{vmatrix} 0 & X^T \\ -X & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X^TAX & 0 \\ -X & A \end{vmatrix}=|A|X^TAX=X^TA^*X$,由于 A 对称,则 A^* 对称,为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵.

3. 证明: 取初等矩阵 $P(i,1)$,则 $P(i,1)^TAP(i,1)=B$ 的 $(1,1)$ 位置元素是 a_{ii}, A 与 B 合同,故 A 正定当且仅当 B 正定.现在假设 A 是正定阵,则 B 也是正定阵,故其顺序主子式应全为正,而 B 的一阶顺序主子式为 $a_{ii}<0$,矛盾,故 A 不是正定阵.

4. 提示: $X^T(kE+A)X=kX^TX+X^TAX>0$.

5. 证明: A 的秩是 r,则存在可逆矩阵 C,使得 $C^TAC=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中 B_1 是 r 阶满秩对角阵.则

$A=(C^T)^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}$,故 $AC\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}C^T=(C^T)^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}C^T=0$.

取 $B=C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}C^T$ 即可.