第六章：容斥原理及应用

Outline

例 1.1

计数$\{1,2,3,\ldots,600\}$中不能被6整除的整数个数。

解： 记$S=\{1,2,\ldots,600\}$，$A=\{n\in S:\ 6|n\}$。则

$$|A|=\lfloor\frac{600}{6}\rfloor=100.$$

因此，由减法原理可知$\{1,2,3,\ldots,600\}$中不能被6整除的整数个数为

$$|\bar{A}|=|S|-|A|=600-100=500.$$

例 1.1

计数$\{1,2,3,\ldots,600\}$中不能被6整除的整数个数。

解： 记$S=\{1,2,\ldots,600\}$, $A=\{n\in S:\ 6|n\}$。则

$$|A|=\lfloor\frac{600}{6}\rfloor=100.$$

因此，由减法原理可知$\{1,2,3,\ldots,600\}$中不能被6整除的整数个数为

$$|\bar{A}|=|S|-|A|=600-100=500.$$

例 1.1

计数$\{1,2,3,\ldots,600\}$中不能被6整除的整数个数。

解： 记$S=\{1,2,\ldots,600\}$, $A=\{n\in S:\ 6|n\}$。则

$$|A|=\lfloor\frac{600}{6}\rfloor=100.$$

因此，由减法原理可知$\{1,2,3,\ldots,600\}$中不能被6整除的整数个数为

$$|\bar{A}|=|S|-|A|=600-100=500.$$

∎

例 1.2

计数$\{1,2,\ldots,600\}$中既不能被5也不能被7整除的整数个数。

解： 设$S=\{1,2,\ldots,600\}$，$A_1=\{n\in S:\ 5|n\}, A_2=\{n\in S:\ 7|n\}$. 则

$$|A_1|=\lfloor\frac{600}{5}\rfloor=120, |A_2|=\lfloor\frac{600}{7}\rfloor=85.$$

因此S中既不能被5也不能被7整除的整数个数为：

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=&|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|\\=&600-120-85+\lfloor\frac{600}{35}\rfloor\\=&600-120-85+17\\=&412.\end{aligned}$$

例 1.2

计数$\{1,2,\ldots,600\}$中既不能被5也不能被7整除的整数个数。

解： 设$S=\{1,2,\ldots,600\}$，$A_1=\{n\in S:\ 5|n\},A_2=\{n\in S:\ 7|n\}$. 则

$$|A_1|=\lfloor\frac{600}{5}\rfloor=120,|A_2|=\lfloor\frac{600}{7}\rfloor=85.$$

因此S中既不能被5也不能被7整除的整数个数为：

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=&|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|\\=&600-120-85+\lfloor\frac{600}{35}\rfloor\\=&600-120-85+17\\=&412.\end{aligned}$$

例 1.2

计数$\{1,2,\ldots,600\}$中既不能被5也不能被7整除的整数个数。

解： 设$S=\{1,2,\ldots,600\}$，$A_1=\{n\in S:\ 5|n\}, A_2=\{n\in S:\ 7|n\}$. 则

$$|A_1|=\lfloor\frac{600}{5}\rfloor=120, |A_2|=\lfloor\frac{600}{7}\rfloor=85.$$

因此S中既不能被5也不能被7整除的整数个数为：

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2| =&|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|\\ =&600-120-85+\lfloor\frac{600}{35}\rfloor\\ =&600-120-85+17\\ =&412.\end{aligned}$$

给定有限集S，设$P_1, P_2, \ldots, P_m$是S中元素所涉及的m 个性质。对任意$i : 1 \leq i \leq m$，记

$$A_i = \{x : x \in S \ x\text{具有性质}P_i\}.$$

定理 1.3

集合S中不具有$P_1, P_2, \ldots, P_m$中的任一个性质的元素的个数为

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| =& |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{1 \leq i < j < l \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots \\ & + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|. \qquad (1) \end{aligned}$$

给定有限集S，设$P_1, P_2, \ldots, P_m$是S中元素所涉及的m 个性质。对任意$i : 1 \leq i \leq m$，记

$$A_i = \{x : x \in S \ x\text{具有性质}P_i\}.$$

定理 1.3

集合S中不具有$P_1, P_2, \ldots, P_m$中的任一个性质的元素的个数为

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| =& |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{1 \leq i < j < l \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots \\ & + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|. \end{aligned} \tag{1}$$

证明：对任意$x \in S$,

- 若x不具有$P_1, P_2, \ldots, P_m$中的任何一个性质，则

$$x \in \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cdots \cap \bar{A}_m.$$

因此x在(1)式左端被计数1次。由于对每一个i, $x \notin A_i$，因此x在(1)式右端也只在$|S|$这一项中被计数了一次。

- 若x具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$中的某些，设恰好具有其中的某$k(1 \leq k \leq m)$个性质，则显然

$$x \notin \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cdots \cap \bar{A}_m,$$

因此x在(1)式左端被计数0次。下面我们证明x在(1) 式右端也被计数0次。

证明：对任意$x \in S$，

- 若x不具有$P_1, P_2, \ldots, P_m$中的任何一个性质，则

$$x \in \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cdots \cap \bar{A}_m.$$

因此x在(1)式左端被计数1次。由于对每一个i，$x \notin A_i$，因此x在(1)式右端也只在$|S|$这一项中被计数了一次。

- 若x具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$中的某些，设恰好具有其中的某$k(1 \le k \le m)$个性质，则显然

$$x \notin \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cdots \cap \bar{A}_m,$$

因此x在(1)式左端被计数0次。下面我们证明x在(1) 式右端也被计数0次。

考虑x在(1)式右端各项中出现的次数，我们得到:

(1)式右端中的项	x被计数的次数
$\lvert S\rvert$	1
$\sum_{i=1}^{m}\lvert A_i\rvert$	$\binom{k}{1}$
$\sum_{1\le i<j\le m}\lvert A_i\cap A_j\rvert$	$\binom{k}{2}$
$\sum_{1\le i<j<l\le m}\lvert A_i\cap A_j\cap A_l\rvert$	$\binom{k}{3}$
$\vdots$	
$\lvert A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m\rvert$	$\binom{k}{m}$

从而x在(1)式右端被计数的次数为

$$
\begin{aligned}
&1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{k}{m}\\
=&\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}\\
=&0.
\end{aligned}
$$

∎

定理 1.4

集合S中具有$P_1, P_2 \ldots, P_m$中至少一个性质的元素个数为

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| \\
+ \sum_{1 \le i < j < l \le m} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots \\
+ (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.
\end{aligned}
$$

例 1.5

求从1到1000之间不能被5, 6, 8整除的整数个数。

解： 令$S=\{1,2,\ldots,1000\}$，P_1表示能被5整除的性质，P_2表示能被6整除的性质，P_3表示能被8整除的性质。记

$$A_i=\{n\in S:n\text{具有性质}P_i\}\quad(i=1,2,3).$$

则问题转化为计算$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$。不难看出:

$$|A_1|=\lfloor\frac{1000}{5}\rfloor=200$$
$$|A_2|=\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor=166$$
$$|A_3|=\lfloor\frac{1000}{8}\rfloor=125.$$

例 1.5

求从1到1000之间不能被5, 6, 8整除的整数个数。

解： 令$S=\{1,2,\ldots,1000\}$，P_1表示能被5整除的性质，P_2表示能被6整除的性质，P_3表示能被8整除的性质。记

$$A_i=\{n\in S: n\text{具有性质}P_i\} \quad (i=1,2,3).$$

则问题转化为计算$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$。不难看出:

$$|A_1|=\lfloor\frac{1000}{5}\rfloor=200$$

$$|A_2|=\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor=166$$

$$|A_3|=\lfloor\frac{1000}{8}\rfloor=125.$$

例 1.5

求从1到1000之间不能被5, 6, 8整除的整数个数。

解： 令$S=\{1,2,\ldots,1000\}$, P_1表示能被5整除的性质，P_2表示能被6整除的性质，P_3表示能被8整除的性质。记

$$A_i=\{n\in S: n\text{具有性质}P_i\}\quad (i=1,2,3).$$

则问题转化为计算$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$。不难看出:

$$|A_1|=\lfloor\frac{1000}{5}\rfloor=200$$
$$|A_2|=\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor=166$$
$$|A_3|=\lfloor\frac{1000}{8}\rfloor=125.$$

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33$$

$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{24} \rfloor = 41$$

$$|A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{40} \rfloor = 25$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{120} \rfloor = 8.$$

由容斥原理可知，

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3| &= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 41 + 25) - 8 \\ &= 600.\end{aligned}$$

∎

例 1.6

字母$M\ A\ T\ H\ I\ S\ F\ U\ N$ 有多少使得单词$MATH$，IS，FUN 都不作为连续字母出现的排列？

解：令S表示所给9个字母的所有排列所构成的集合，则

$$|S| = 9! = 362880.$$

令P_1表示单词MATH作为连续字母出现的性质，P_2表示单词IS作为连续字母出现的性质，P_3表示单词FUN作为连续字母出现的性质。对$i = 1, 2, 3$，记

$$A_i = \{\pi \in S : \pi\text{具有性质}P_i\}.$$

则本题转化为计算$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$。

例 1.6

字母*M A T H I S F U N* 有多少使得单词*MATH*，*IS*，*FUN* 都不作为连续字母出现的排列？

解：令S表示所给9个字母的所有排列所构成的集合，则

$$|S| = 9! = 362880.$$

令P_1表示单词MATH作为连续字母出现的性质，P_2表示单词IS作为连续字母出现的性质，P_3表示单词FUN作为连续字母出现的性质。对$i = 1, 2, 3$，记

$$A_i = \{\pi \in S : \pi\text{具有性质}P_i\}.$$

则本题转化为计算$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$。

例 1.6

字母*M A T H I S F U N* 有多少使得单词*MATH*，*IS*，*FUN* 都不作为连续字母出现的排列？

解：令S表示所给9个字母的所有排列所构成的集合，则

$$|S| = 9! = 362880.$$

令P_1表示单词MATH作为连续字母出现的性质，P_2表示单词IS作为连续字母出现的性质，P_3表示单词FUN作为连续字母出现的性质。对$i = 1, 2, 3$，记

$$A_i = \{\pi \in S : \pi\text{具有性质}P_i\}.$$

则本题转化为计算$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$。

将MATH视为一个整体，可知A_1中的任何一个排列都可以视为6个字符

MATH, I, S, F, U, N

的一个排列。反之，这6个字符的一个排列一定是A_1中的排列。因此，我们有

$$|A_1| = 6! = 720.$$

类似可知，

$$|A_2| = 8! = 40320, \quad |A_3| = 7! = 5040.$$

同理，$A_1 \cap A_2$中的排列可以视为以下5个字符

MATH, IS, F, U, N

的排列，故

$$|A_1 \cap A_2| = 5! = 120.$$

将MATH视为一个整体，可知A_1中的任何一个排列都可以视为6个字符

MATH, I, S, F, U, N

的一个排列。反之，这6个字符的一个排列一定是A_1中的排列。因此，我们有

$$|A_1| = 6! = 720.$$

类似可知，

$$|A_2| = 8! = 40320, \quad |A_3| = 7! = 5040.$$

同理，$A_1 \cap A_2$中的排列可以视为以下5个字符

MATH, IS, F, U, N

的排列，故

$$|A_1 \cap A_2| = 5! = 120.$$

将MATH视为一个整体，可知A_1中的任何一个排列都可以视为6个字符

MATH, I, S, F, U, N

的一个排列。反之，这6个字符的一个排列一定是A_1中的排列。因此，我们有

$$|A_1| = 6! = 720.$$

类似可知，

$$|A_2| = 8! = 40320, \quad |A_3| = 7! = 5040.$$

同理，$A_1 \cap A_2$中的排列可以视为以下5个字符

MATH, IS, F, U, N

的排列，故

$$|A_1 \cap A_2| = 5! = 120.$$

类似地，我们容易得到:

$$|A_2 \cap A_3| = 6! = 720, \quad |A_1 \cap A_3| = 4! = 24,$$
$$|A_1 \cap A_1 \cap A_3| = 3! = 6.$$

由容斥原理，符合题意的排列个数为

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| =& 362880 - (720 + 40320 + 5040) \\ &+ (120 + 720 + 24) - 6 \\ =& 317658.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

例 1.7

在0到99999之间有多少同时含有数字$2,5,8$的整数？

解： 设$S=\{0,1,2,\ldots,99999\}$，P_1,P_2,P_3分别表示一个整数不含有数字$2,5,8$的性质。对$i=1,2,3$，记

$$A_i=\{n\in S: n\text{具有性质}P_i\}.$$

将S中的整数看成是多重集$\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\ldots,\infty\cdot 9\}$ 的一个5排列，容易证明

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=9^5,$$
$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=8^5,$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=7^5.$$

例 1.7

在0到99999之间有多少同时含有数字2, 5, 8的整数？

解： 设$S = \{0, 1, 2, \ldots, 99999\}$，$P_1, P_2, P_3$分别表示一个整数不含有数字2, 5, 8的性质。对$i = 1, 2, 3$，记

$$A_i = \{n \in S : n\text{具有性质}P_i\}.$$

将S中的整数看成是多重集$\{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \ldots, \infty \cdot 9\}$ 的一个5排列，容易证明

$$\begin{aligned} |A_1| = |A_2| = |A_3| &= 9^5, \\ |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| &= 8^5, \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 7^5. \end{aligned}$$

因此，根据容斥原理，S中同时含有数字$2,5,8$的整数个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 10^5 - 3 \times 9^5 + 3 \times 8^5 - 7^5 = 4350.$$

■

命题 1.8

设$A_1, A_2, \ldots, A_m$是有限集S的子集。若对任意$k: 1 \leq k \leq m$及任意$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$，

$$\alpha_k = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

都只与k有关，而与具体的$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$无关，则

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \binom{m}{1}\alpha_1 + \binom{m}{2}\alpha_2 - \binom{m}{3}\alpha_3 + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}\alpha_m.$$

Outline

关于集合的组合问题，我们实际上只讨论了以下两种情形:

- k-元集$T = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$的$r$-组合数为$\binom{k}{r}$；
- 多重集$T = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_k\}$的$r$-组合数为$\binom{r+k-1}{r}$.

第二种情形中，T中每个元素的重数可以换成r或者更大的数，结论仍然成立。

因此，对于一般多重集$T = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的$r-$组合问题，目前为止，我们只解决了以下两种特殊情形:

- $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$
- $n_i \geq r, \forall i:\ 1 \leq i \leq k.$

关于集合的组合问题，我们实际上只讨论了以下两种情形:

- k-元集$T=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$的r-组合数为$\binom{k}{r}$；
- 多重集$T=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$的$r$-组合数为$\binom{r+k-1}{r}$.

第二种情形中，T中每个元素的重数可以换成r或者更大的数，结论仍然成立。

因此，对于一般多重集$T=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$的$r-$组合问题，目前为止，我们只解决了以下两种特殊情形:

- $n_1=n_2=\cdots=n_k=1$
- $n_i\geq r,\forall i:\ 1\leq i\leq k.$

关于集合的组合问题，我们实际上只讨论了以下两种情形:

- k-元集$T = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$的$r$-组合数为$\binom{k}{r}$；
- 多重集$T = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_k\}$的$r$-组合数为$\binom{r+k-1}{r}$.

第二种情形中，T中每个元素的重数可以换成r或者更大的数，结论仍然成立。

因此，对于一般多重集$T = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的$r-$组合问题，目前为止，我们只解决了以下两种特殊情形:

- $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$
- $n_i \geq r, \forall i:\ 1 \leq i \leq k.$

关于集合的组合问题，我们实际上只讨论了以下两种情形:

- k-元集$T=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$的r-组合数为$\binom{k}{r}$；
- 多重集$T=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$的$r$-组合数为$\binom{r+k-1}{r}$.

第二种情形中，T中每个元素的重数可以换成r或者更大的数，结论仍然成立。

因此，对于一般多重集$T=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$的$r-$组合问题，目前为止，我们只解决了以下两种特殊情形:

- $n_1=n_2=\cdots=n_k=1$
- $n_i\geq r,\forall i:\ 1\leq i\leq k.$

例 2.1

求多重集$T=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$的10组合的数目。

解： 设S表示多重集$T^*=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$ 的所有10组合所构成集合，则

$$|S|=\binom{3+10-1}{10}=\binom{12}{10}=66.$$

记P_1,P_2,P_3分别表示T^*的10-组合的如下性质：

- P_1: a出现的次数大于3;
- P_2: b出现的次数大于4;
- P_3：c出现的次数大于5。

对$i=1,2,3$，令$A_i=\{C\in S: C$具有性质$P_i\}$. 则本题转化为计算$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$。

例 2.1

求多重集$T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$的10组合的数目。

解：设S表示多重集$T^* = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$ 的所有10组合所构成集合，则

$$|S| = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66.$$

记P_1, P_2, P_3分别表示T^*的10-组合的如下性质：

- P_1: a出现的次数大于3;
- P_2: b出现的次数大于4;
- P_3：c出现的次数大于5。

对$i = 1, 2, 3$，令$A_i = \{C \in S : C$具有性质$P_i\}$. 则本题转化为计算$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$。

例 2.1

求多重集$T=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$的10组合的数目。

解：设S表示多重集$T^*=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$ 的所有10组合所构成集合，则

$$|S|=\binom{3+10-1}{10}=\binom{12}{10}=66.$$

记P_1,P_2,P_3分别表示T^*的10-组合的如下性质：

- P_1: a出现的次数大于3；
- P_2: b出现的次数大于4；
- P_3：c出现的次数大于5。

对$i=1,2,3$，令$A_i=\{C\in S:C$具有性质$P_i\}$. 则本题转化为计算$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$。

首先考虑$|A_1|$。注意到A_1表示a至少出现4次的T^*的10-组合，对于任何一个$C \in A_1$，去掉4个a则得到T^*的一个6-组合，反之，对于T^*的任何一个6-组合，在其中加入4个a，则得到A_1中的一个组合。因此

$$|A_1| = |\{\text{多重集}T^*\text{的6组合}\}| = \binom{3+6-1}{6} = 28.$$

类似地讨论可知：

$$|A_2| = |\{\text{多重集}T^*\text{的5组合}\}| = \binom{3+5-1}{5} = 21$$

$$|A_3| = |\{\text{多重集}T^*\text{的4组合}\}| = \binom{3+4-1}{4} = 15.$$

首先考虑$|A_1|$。注意到A_1表示a至少出现4次的T^*的10-组合，对于任何一个$C \in A_1$，去掉4个a则得到T^*的一个6-组合，反之，对于T^*的任何一个6-组合，在其中加入4个a，则得到A_1中的一个组合。因此

$$|A_1| = |\{\text{多重集}T^*\text{的6组合}\}| = \binom{3+6-1}{6} = 28.$$

类似地讨论可知：

$$|A_2| = |\{\text{多重集}T^*\text{的5组合}\}| = \binom{3+5-1}{5} = 21$$

$$|A_3| = |\{\text{多重集}T^*\text{的4组合}\}| = \binom{3+4-1}{4} = 15.$$

由于$A_1 \cap A_2$表示T^*的至少包含4个a,5个b的所有10-组合，显然这样的10-组合个数等于T^*的1-组合的个数，即

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3+1-1}{1} = 3.$$

同理可得，

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3+0-1}{0} = 1, \quad |A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

由容斥原理，所求的10-组合个数为

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| =& 66 - (28+21+15) + (3+1+0) - 0 \\ =& 6.\end{aligned}$$

由于$A_1\cap A_2$表示T^*的至少包含4个a,5个b的所有10-组合，显然这样的10-组合个数等于T^*的1-组合的个数，即

$$|A_1\cap A_2|=\binom{3+1-1}{1}=3.$$

同理可得，

$$|A_1\cap A_3|=\binom{3+0-1}{0}=1,\quad |A_2\cap A_3|=0$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0.$$

由容斥原理，所求的10-组合个数为

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=&66-(28+21+15)+(3+1+0)-0\\=&6.\end{aligned}$$

由于$A_1 \cap A_2$表示T^*的至少包含4个a,5个b的所有10-组合，显然这样的10-组合个数等于T^*的1-组合的个数，即

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3+1-1}{1} = 3.$$

同理可得，

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3+0-1}{0} = 1, \quad |A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

由容斥原理，所求的10-组合个数为

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| =& 66 - (28+21+15) + (3+1+0) - 0 \\ =& 6. \end{aligned}$$

∎

注意到多重集$\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的$r$-组合的个数与方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

满足条件

$$0 \le x_1 \le n_1, 0 \le x_2 \le n_2, \ldots, 0 \le x_k \le n_k$$

的整数解个数相同。因此我们可以用容斥原理的方法计算方程的解的个数。

例 2.2

求方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ 的满足条件：

$$1 \le x_1 \le 5,\ -2 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 5,\ 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解的个数。

解：引入变量

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 + 2,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4 - 3.$$

可将原问题转化为求方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16 \tag{2}$$

的满足条件

$$0 \le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0 \le y_3 \le 5,\ 0 \le y_4 \le 6 \tag{3}$$

的整数解的个数。

例 2.2

求方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ 的满足条件：

$$1 \le x_1 \le 5,\ -2 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 5,\ 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解的个数。

解： 引入变量

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 + 2,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4 - 3.$$

可将原问题转化为求方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16 \tag{2}$$

的满足条件

$$0 \le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0 \le y_3 \le 5,\ 0 \le y_4 \le 6 \tag{3}$$

的整数解的个数。

设S表示方程(2)的所有非负整数解的集合。则

$$|S| = \binom{4+16-1}{16} = \binom{19}{16} = 969.$$

令

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_1 \geq 5\} \\ A_2 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_2 \geq 7\} \\ A_3 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_3 \geq 6\} \\ A_4 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_4 \geq 7\}. \end{aligned}$$

则方程(2)的满足条件(3)的整数解的个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|.$$

设S表示方程(2)的所有非负整数解的集合。则

$$|S| = \binom{4+16-1}{16} = \binom{19}{16} = 969.$$

令

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_1 \geq 5\} \\ A_2 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_2 \geq 7\} \\ A_3 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_3 \geq 6\} \\ A_4 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_4 \geq 7\}. \end{aligned}$$

则方程(2)的满足条件(3)的整数解的个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|.$$

设S表示方程(2)的所有非负整数解的集合。则

$$|S| = \binom{4+16-1}{16} = \binom{19}{16} = 969.$$

令

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_1 \geq 5\} \\
A_2 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_2 \geq 7\} \\
A_3 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_3 \geq 6\} \\
A_4 &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S : y_4 \geq 7\}.
\end{aligned}$$

则方程(2)的满足条件(3)的整数解的个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|.$$

引入变量：

$$z_1 = y_1 - 5,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,\ z_4 = y_4,$$

可知$|A_1|$与方程$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 11$的非负整数解的个数相同，因此

$$|A_1| = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = 364.$$

类似地，我们有

$$|A_2| = \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = 220$$

$$|A_3| = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$$

$$|A_4| = \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = 220.$$

引入变量：

$$z_1 = y_1 - 5,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,\ z_4 = y_4,$$

可知$|A_1|$与方程$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 11$的非负整数解的个数相同，因此

$$|A_1| = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = 364.$$

类似地，我们有

$$|A_2| = \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = 220$$

$$|A_3| = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$$

$$|A_4| = \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = 220.$$

由于$A_1 \cap A_2$由S中所有满足条件$y_1 \geq 5, y_2 \geq 7$的解组成，引入变量

$$u_1 = y_1 - 5,\ u_2 = y_2 - 7,\ u_3 = y_3,\ u_4 = y_4,$$

可知$|A_1 \cap A_2|$与方程$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4$的非负整数解个数相同，即

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35.$$

同理可得

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{8}{5} = 56,\ |A_1 \cap A_4| = \binom{7}{4} = 35$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{6}{3} = 20,\ |A_2 \cap A_4| = \binom{5}{2} = 10$$

$$|A_3 \cap A_4| = \binom{6}{3} = 20.$$

由于$A_1 \cap A_2$由S中所有满足条件$y_1 \geq 5, y_2 \geq 7$的解组成，引入变量

$$u_1 = y_1 - 5,\ u_2 = y_2 - 7,\ u_3 = y_3,\ u_4 = y_4,$$

可知$|A_1 \cap A_2|$与方程$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4$的非负整数解个数相同，即

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35.$$

同理可得

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{8}{5} = 56,\ |A_1 \cap A_4| = \binom{7}{4} = 35$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{6}{3} = 20,\ |A_2 \cap A_4| = \binom{5}{2} = 10$$

$$|A_3 \cap A_4| = \binom{6}{3} = 20.$$

由于A_1, A_2, A_3, A_4中任意三个交集都为空集，因此由容斥原理，

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| =& 969 - (364 + 220 + 286 + 220) \\ & + (35 + 56 + 35 + 20 + 10 + 20) \\ =& 55.\end{aligned}$$

■

Outline

容斥原理

多重集的r组合

错位排列

带有禁止位置的排列

另一个禁止位置问题

定义 3.1

设$i_1 i_2 \cdots i_n$是集合$\{1,2,\ldots,n\}$的一个排列。若

$$i_1 \neq 1,\ i_2 \neq 2,\ \ldots,\ i_n \neq n,$$

则称$i_1 i_2 \cdots i_n$是$\{1,2,\ldots,n\}$的一个错位排列。用D_n表示集合$\{1,2,\ldots,n\}$的所有错位排列的个数。

例 3.2

- $n=1$时，没有错位排列，因此$D_1=0$;
- $n=2$时，唯一的错位排列为2 1，因此$D_2=1$;
- $n=3$时，有两个错位排列：2 3 1和3 1 2，故$D_3=2$.

定义 3.1

设$i_1i_2\cdots i_n$是集合$\{1,2,\ldots,n\}$的一个排列。若

$$i_1\neq 1,\ i_2\neq 2,\ \ldots,\ i_n\neq n,$$

则称$i_1i_2\cdots i_n$是$\{1,2,\ldots,n\}$的一个错位排列。用D_n表示集合$\{1,2,\ldots,n\}$的所有错位排列的个数。

例 3.2

- $n=1$时，没有错位排列，因此$D_1=0$;
- $n=2$时，唯一的错位排列为2 1，因此$D_2=1$;
- $n=3$时，有两个错位排列：2 3 1和3 1 2，故$D_3=2$.

当$n=4$时，有如下9个错位排列：

$$\begin{array}{ccc} 2\,1\,4\,3 & 3\,1\,4\,2 & 4\,1\,2\,3 \\ 2\,3\,4\,1 & 3\,4\,1\,2 & 4\,3\,1\,2 \\ 2\,4\,1\,3 & 3\,4\,2\,1 & 4\,3\,2\,1 \end{array}$$

故$D_4=9$.

定理 3.3

对$n \geq 1$，

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

证明：对$n \geq 1$，设S_n表示集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的所有排列。对任意$k = 1, 2, \ldots, n$，令

$$A_k = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n : i_k = k\}.$$

则$D_n = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$。由于

$$A_1 = \{1 i_2 i_3 \cdots i_n | i_2 i_3 \cdots i_n \text{是} 2, 3, \ldots, n \text{的一个排列}\},$$

因此$|A_1| = (n-1)!$。

定理 3.3

对$n \geq 1$，

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

证明： 对$n \geq 1$，设S_n表示集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的所有排列。对任意$k = 1, 2, \ldots, n$，令

$$A_k = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n : i_k = k\}.$$

则$D_n = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$。由于

$$A_1 = \{1 i_2 i_3 \cdots i_n | i_2 i_3 \cdots i_n \text{是} 2, 3, \ldots, n \text{的一个排列}\},$$

因此$|A_1| = (n-1)!$。

类似地，可知

$$|A_i| = (n-1)!, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

由于

$$A_1 \cap A_2 = \{12 i_3 i_4 \cdots i_n | i_3 i_4 \cdots i_n \text{是} 3, 4, \ldots, n \text{的一个排列}\},$$

因此

$$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!.$$

类似地，

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

同理，一般地，我们有

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}| = (n-k)!, \ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n.$$

因此由容斥原理,

$$
\begin{aligned}
|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| =& n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! \\
& - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(0)! \\
=& n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})
\end{aligned}
$$

■

命题 3.4

D_n满足以下递归关系：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), \quad n \geq 3.$$

证明：记$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$及$[n]$的所有错位排列构成的集合为$\mathcal{D}_n$。对任意$i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n$，由于$i_1 \neq 1$，因此可以根据$i_1$的取值将$[n]$的错位排列划分成如下的$n-1$类：

$$X_2 = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n, i_1 = 2\}$$
$$X_3 = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n, i_1 = 3\}$$
$$\cdots$$
$$X_n = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n, i_1 = n\}$$

命题 3.4

D_n满足以下递归关系：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}),\quad n \geq 3.$$

证明: 记$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$及$[n]$的所有错位排列构成的集合为$\mathcal{D}_n$。对任意$i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n$，由于$i_1 \neq 1$，因此可以根据$i_1$的取值将$[n]$的错位排列划分成如下的$n-1$类：

$$X_2 = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n, i_1 = 2\}$$
$$X_3 = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n, i_1 = 3\}$$
$$\cdots$$
$$X_n = \{i_1 i_2 \cdots i_n \in \mathcal{D}_n, i_1 = n\}$$

对于X_2，又可进一步分成两个部分

$$X_{21} = \{2i_2 \cdots i_n \in X_2 | i_2 = 1\}$$
$$X_{22} = \{2i_2 \cdots i_n \in X_2 | i_2 \neq 1\}.$$

根据构造，$21i_3 \cdots i_n \in X_{21}$当且仅当$i_3i_4 \cdots i_n$是集合$\{3, 4, \ldots, n\}$的排列且

$$i_3 \neq 3,\ i_4 \neq 4,\ \cdots, i_n \neq n.$$

显然这样的排列个数等于D_{n-2}，因此$|X_{21}| = D_{n-2}$。

而$2i_2i_3 \cdots i_n \in X_{22}$当且仅当$i_2i_3 \cdots i_n$是集合$\{1, 3, 4, \ldots, n\}$的一个排列且

$$i_2 \neq 1,\ i_3 \neq 3,\ i_4 \neq 4,\ i_n \neq n.$$

易知这样的排列个数等于D_{n-1}。因此

$$|X_2| = |X_{21}| + |X_{22}| = D_{n-2} + D_{n-1}.$$

对于X_2，又可进一步分成两个部分

$$X_{21} = \{2i_2\cdots i_n \in X_2 | i_2 = 1\}$$
$$X_{22} = \{2i_2\cdots i_n \in X_2 | i_2 \neq 1\}.$$

根据构造，$21i_3\cdots i_n \in X_{21}$当且仅当$i_3i_4\cdots i_n$ 是集合$\{3,4,\ldots,n\}$的排列且

$$i_3 \neq 3,\ i_4 \neq 4,\ \cdots,i_n \neq n.$$

显然这样的排列个数等于D_{n-2}，因此$|X_{21}| = D_{n-2}$。

而$2i_2i_3\cdots i_n \in X_{22}$当且仅当$i_2i_3\cdots i_n$是集合$\{1,3,4,\ldots,n\}$的一个排列且

$$i_2 \neq 1,\ i_3 \neq 3,\ i_4 \neq 4,\ i_n \neq n.$$

易知这样的排列个数等于D_{n-1}。因此

$$|X_2| = |X_{21}| + |X_{22}| = D_{n-2} + D_{n-1}.$$

对于X_2，又可进一步分成两个部分

$$X_{21} = \{2i_2\cdots i_n \in X_2 | i_2 = 1\}$$
$$X_{22} = \{2i_2\cdots i_n \in X_2 | i_2 \neq 1\}.$$

根据构造，$21i_3\cdots i_n \in X_{21}$当且仅当$i_3i_4\cdots i_n$ 是集合$\{3,4,\ldots,n\}$的排列且

$$i_3 \neq 3,\ i_4 \neq 4,\ \cdots, i_n \neq n.$$

显然这样的排列个数等于D_{n-2}，因此$|X_{21}| = D_{n-2}$。

而$2i_2i_3\cdots i_n \in X_{22}$当且仅当$i_2i_3\cdots i_n$是集合$\{1,3,4,\ldots,n\}$的一个排列且

$$i_2 \neq 1,\ i_3 \neq 3,\ i_4 \neq 4,\ i_n \neq n.$$

易知这样的排列个数等于D_{n-1}。因此

$$|X_2| = |X_{21}| + |X_{22}| = D_{n-2} + D_{n-1}.$$

类似地可证

$$|X_3| = |X_4| = \cdots = |X_n| = D_{n-2} + D_{n-1}$$

因此$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. ∎

命题 3.5

对任意$n \geq 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

证明：由$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$可知

$$\begin{aligned}
D_n - nD_{n-1} &= (n-1)D_{n-2} - D_{n-1} \\
&= -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \\
&= (-1)^2(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}) \\
&= (-1)^3(D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^n.
\end{aligned}$$

类似地可证

$$|X_3| = |X_4| = \cdots = |X_n| = D_{n-2} + D_{n-1}$$

因此$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. $\blacksquare$

命题 3.5

对任意$n \geq 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

证明: 由$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$可知

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= (n-1)D_{n-2} - D_{n-1} \\ &= -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \\ &= (-1)^2(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}) \\ &= (-1)^3(D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^n. \end{aligned}$$

类似地可证

$$|X_3| = |X_4| = \cdots = |X_n| = D_{n-2} + D_{n-1}$$

因此$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. ∎

命题 3.5

对任意$n \geq 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

证明: 由$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$可知

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= (n-1)D_{n-2} - D_{n-1} \\ &= -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \\ &= (-1)^2(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}) \\ &= (-1)^3(D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^n. \end{aligned}$$

例 3.6

在一次聚会上，有n位男士和n位女士。这n位女士能够有多少种方法选择舞伴跳第一支舞？如果每个人必须换舞伴，那么第二支舞又有多少种选择方法？

例 3.7

设上述聚会中的n位男士和n位女士在跳舞前存放了他们的帽子。在聚会结束时随机地返还给他们这些帽子。如果每位男士得到一顶男帽而每位女士得到一顶女帽，但又都不是他们自己寄放的那顶帽子，那么他们返还帽子的方法有多少种？

例 3.6

在一次聚会上，有n位男士和n位女士。这n位女士能够有多少种方法选择舞伴跳第一支舞？如果每个人必须换舞伴，那么第二支舞又有多少种选择方法？

例 3.7

设上述聚会中的n位男士和n位女士在跳舞前存放了他们的帽子。在聚会结束时随机地返还给他们这些帽子。如果每位男士得到一顶男帽而每位女士得到一顶女帽，但又都不是他们自己寄放的那顶帽子，那么他们返还帽子的方法有多少种？

Outline

设S_n表示集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的所有排列，$X_1,X_2,\ldots,X_n\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$.
设

$$P(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\{i_1i_2\cdots i_n\in S_n|i_1\notin X_1,\ldots,i_n\notin X_n\}$$

记 $p(X_1,X_2,\ldots,X_n)=|P(X_1,X_2,\ldots,X_n)|$.

例 4.1

设$n=4$，$X_1=\{1,2\},X_2=\{2,3\},X_3=\{3,4\},X_4=\{1,4\}$. 则$P(X_1,X_2,X_3,X_4)$由满足条件

$$i_1\neq 1,2;\ i_2\neq 2,3;\ i_3\neq 3,4;\ i_4\neq 1,4;$$

的所有排列$i_1i_2i_3i_4$组成。易知只有两个符合条件的排列: 3 4 1 2和4 1 2 3。因此$p(X_1,X_2,X_3,X_4)=2$.

设S_n表示集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的所有排列, $X_1,X_2,\ldots,X_n\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$.
设

$$P(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\{i_1i_2\cdots i_n\in S_n|i_1\notin X_1,\ldots,i_n\notin X_n\}$$

记 $p(X_1,X_2,\ldots,X_n)=|P(X_1,X_2,\ldots,X_n)|$.

例 4.1

设$n=4$, $X_1=\{1,2\},X_2=\{2,3\},X_3=\{3,4\},X_4=\{1,4\}$. 则$P(X_1,X_2,X_3,X_4)$由满足条件

$$i_1\neq 1,2;\ i_2\neq 2,3;\ i_3\neq 3,4;\ i_4\neq 1,4;$$

的所有排列$i_1i_2i_3i_4$组成。易知只有两个符合条件的排列: 3 4 1 2和4 1 2 3。因此$p(X_1,X_2,X_3,X_4)=2$.

例 4.2

给定正整数n。令$X_1 = \{1\}, X_2 = \{2\}, \ldots, X_n = \{n\}$. 则$P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$由集合$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$的所有错位排列组成。因此

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = D_n.$$

给定一个$n \times n$的棋盘，用$1, 2, \ldots, n$分别对它的行（从上到下）和列（从左到右）进行标号。将棋盘上的位于第i行第j列的方格与有序数对(i, j)对应。则该棋盘上放置n个相同的非攻击型車的放法与$[n]$上的排列一一对应。具体而言，设n个車的位置为:

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n),$$

则该放法对应的排列为$i_1 i_2 \cdots i_n$.

在上述对应下，计算$p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 等价于计算带禁止位置的$n \times n$ 棋盘上放置n个相同非攻击型車的方法数，其中棋盘上禁止的位置为

$$(i, j), \quad 1 \leq i \leq n, \; j \in X_i.$$

给定一个$n \times n$的棋盘，用$1, 2, \ldots, n$分别对它的行（从上到下）和列（从左到右）进行标号。将棋盘上的位于第i行第j列的方格与有序数对(i, j)对应。则该棋盘上放置n个相同的非攻击型車的放法与$[n]$上的排列一一对应。具体而言，设n个車的位置为:

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n),$$

则该放法对应的排列为$i_1 i_2 \cdots i_n$.

在上述对应下，计算$p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 等价于计算带禁止位置的$n \times n$ 棋盘上放置n个相同非攻击型車的方法数，其中棋盘上禁止的位置为

$$(i, j), \quad 1 \leq i \leq n, \; j \in X_i.$$

例 4.3

对于以下带禁止位置的5×5棋盘,

	1	2	3	4	5
1	×			×	
2			×		
3					
4	×				×
5		×			×

令

$$X_1=\{1,4\},\ X_2=\{3\},X_3=\emptyset,X_4=\{1,5\},X_5=\{2,5\},$$

则在该棋盘上放置非攻击型車的方法数为$p(X_1,X_2,X_3,X_4)$.

Outline

命题 5.1

设Q_n表示集合$[n]$的不出现模式

$$12, 23, 34, \ldots, (n-1)n$$

的排列个数。则

$$\begin{aligned} Q_n = & n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! \\ & - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!. \end{aligned}$$

证明思路： 设S_n表示集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的所有排列，对$1\le i\le n-1$，令

$$A_i=\{\pi\in S_n: \text{模式}i(i+1)\ \text{在}\pi\text{中出现}\}$$

则

$$Q_n=|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{n-1}|.$$

根据A_i的定义，不难验证

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$$

对任意k及$\{i_1,i_2,\cdots i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n-1\}$成立。

因此由容斥原理，本命题得证。

例 5.2

设一个班级8个学生每天练习走步。这些学生站成一列纵队前行。为了让学生不总看到排在他前面的人，第二天，这些学生决定交换位置，使得每一个学生的前面都不是前一天走在他前面的人，他们有多少种方法交换位置？

解: 将这8个学生按照他们第一天排的位置依次标号为$1, 2, 3, \ldots, 8$，则换位置的方法数为集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的不包含模式

$$12, 23, 34, 45, 56, 67, 78$$

的排列数，即Q_8. 由定理5.1知，

$$Q_8 = 8! - \binom{7}{1}7! + \binom{7}{2}6! - \binom{7}{3}5! + \binom{7}{4}4! - \binom{7}{5}3! + \binom{7}{6}2! - \binom{7}{7}1! = 16687.$$

例 5.2

设一个班级8个学生每天练习走步。这些学生站成一列纵队前行。为了让学生不总看到排在他前面的人，第二天，这些学生决定交换位置，使得每一个学生的前面都不是前一天走在他前面的人，他们有多少种方法交换位置？

解:将这8个学生按照他们第一天排的位置依次标号为$1, 2, 3, \ldots, 8$，则换位置的方法数为集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的不包含模式

$$12, 23, 34, 45, 56, 67, 78$$

的排列数，即Q_8. 由定理5.1知，

$$\begin{aligned} Q_8 =& 8! - \binom{7}{1}7! + \binom{7}{2}6! - \binom{7}{3}5! + \binom{7}{4}4! - \binom{7}{5}3! \\ &+ \binom{7}{6}2! - \binom{7}{7}1! = 16687. \end{aligned}$$

作业：

- P_{124}：习题2
- P_{124}：习题3
- P_{124}：习题9
- P_{124}：习题11
- P_{124}：习题16
- P_{125}：习题23