

第5章 二次型

学号_____ 姓名_____

一、填空题 (每空 3 分, 共 30 分)

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3 - 8x_1x_3$ 的矩阵为_____.
2. 只与自身合同的矩阵是_____.
3. n 阶实对称矩阵按合同分类有_____类, n 阶复对称矩阵按合同分类有_____类.
4. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 - 2x_2x_3$ 的正、负惯性指数都是 1, 则 $a =$ _____.
5. n 元实二次型 $f(X) = X^TAX$ 正定的充要条件是_____.
6. “若 A, B 都是 n 阶正定阵, 则 $A+B$ 也是 n 阶正定阵.” 此结论是否正确_____.
7. 设 3 元实二次型 $f(X)$ 的秩为 2, 则其规范形所有可能的形式为
_____, _____, _____.
8. n 元正定二次型的符号差是_____.
9. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_3x_4$ 的正惯性指数是_____, 负惯性指数是_____.
10. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 是否正定:_____.

二、计算题 (每小题 20 分, 共 60 分)

1. 设对称阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求可逆阵 C , 使得 $C^TAC = D$ 是对角阵.

2. 用非退化线性替换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

为标准形; 并回答:

- (1) 在实数域上, 此二次型的正负惯性指数及符号差分别是多少?
 - (2) 在实数域和复数域上的规范形分别是什么?
3. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
(1) 用非退化线性替换化此二次型为标准形; (2) a 满足何值时, 此二次型正定.

三、证明题 (10 分)

设 A 是实 n 阶方阵, 证明 $r(A^T A) = r(A)$.