第 4 章　矩　　阵

矩阵理论是高等代数的主要内容之一,也是数学及许多科学领域中的重要工具,它有着广泛的应用.

一、内 容 提 要

1. 矩阵的线性运算

(1) 矩阵相等　矩阵 A 与 B 有相同的行数和列数,并且对应位置上的元素都相等,则 $A = B$.

(2) 矩阵加法　设 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$ 是数域 P 上的两个矩阵,定义其和为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{s\times n}$$

(3) 数乘矩阵　设 $k\in P$, $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 是 P 上的矩阵,k 与 A 的乘积定义为

$$kA = Ak = (ka_{ij})_{s\times n}$$

矩阵的加法与数乘称为矩阵的线性运算.运算律和性质如下:

1) 交换律　$A + B = B + A$;

2) 结合律　$(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) 分配律　$k(A + B) = kA + kB$, $(k + l)A = kA + lA$;

4) 数乘结合律　$k(lA) = (kl)A$;

5) 当 A 是 n 级方阵时,有 $|kA| = k^n |A|$.

2. 矩阵的乘法

(1) 设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$, A 与 B 的乘积 $AB = (c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \quad (i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n)$$

注　两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时才能相乘.

(2) 矩阵乘法满足的运算律和性质:

1) 结合律 $(AB)C = A(BC)$;

2) 分配律 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$;

3) 数与乘法的结合律 $(kA)B = A(kB) = k(AB)$;

4) 当 A, B 均为 n 级方阵时,有 $|AB| = |A||B|$;

5) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rank}A, \operatorname{rank}B)$.

3. 方阵的幂

(1) 设 A 是一个 n 级方阵,m 是正整数,则

$$A^m = \underbrace{A A \cdots A}_{m\text{个}}$$

称为 A 的 m 次幂.

(2) 方阵的幂的运算律

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl}, \quad (\lambda A)^k = \lambda^k A^k, \quad |A^k| = |A|^k$$

4. 转置矩阵

(1) 将矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 的行列互换,所得到的矩阵称为 A 的转置,记为 A',即 $A' = (a_{ji})_{n\times s}$.

(2) 矩阵的转置有以下的性质:

1) $(A')' = A$;

2) $(A + B)' = A' + B'$;

3) $(kA)' = kA'$;

4) $(AB)' = B'A'$;

5) 当 A 是 n 级方阵时,$|A'| = |A|$.

5. 几类特殊矩阵

(1) 零矩阵 元素都是零的矩阵,记为 $O_{s\times n}$,不致混淆时简记为 O.显然有

$$0A = O, \quad O_{s\times n}A_{n\times m} = O_{s\times m}, \quad A_{s\times n}O_{n\times m} = O_{s\times m}$$

$$A + O = A, \quad A + (-A) = O$$

(2) 单位矩阵 主对角线上元素全是 1,其余元素全是 0 的 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 级单位矩阵,记为 E_n .不致混淆时简记为 E .显然有

$$A_{s\times n}E_n = A_{s\times n}, \quad E_sA_{s\times n} = A_{s\times n}$$

(3) 数量矩阵　矩阵

$$kE = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

称为数量矩阵 .

(4) 对角矩阵　如下形式的 $n\times n$ 矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵 .简记为 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

(5) 对称矩阵　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $A' = A$,即

$$a_{ji} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称 A 为对称矩阵 .

(6) 反对称矩阵　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $A' = -A$,即

$$a_{ji} = -a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称 A 为反对称矩阵 .

注　反对称矩阵 A 的主对角元素全为零 .

(7) 上三角矩阵　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = 0\ (i > j)$,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为上三角矩阵 .

(8) 下三角矩阵　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = 0\ (i < j)$,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为下三角矩阵.

(9) 非奇异矩阵　设 A 是 n 级方阵,如果 $|A|\neq 0$,则称 A 为非奇异矩阵;如果 $|A|=0$,则称 A 为奇异矩阵.

(10) 满秩矩阵　设 A 是 $s\times n$ 矩阵,如果 A 的秩为 s,则称 A 为行满秩矩阵;如果 A 的秩为 n,则称 A 为列满秩矩阵.如果 n 级方阵 A 的秩为 n,则称 A 为满秩矩阵;如果 A 的秩小于 n,则称 A 为降秩矩阵.

(11) 伴随矩阵　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,由元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵,记为 A^*.伴随矩阵具有如下重要性质:

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

注　1. 伴随矩阵中的元素 A_{ij} 是按转置的顺序排列的.

2. 对于 2 级方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,可求得 $A^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$,即 2 级方阵的伴随矩阵具有"主对角元互换,副对角元变号"的规律.

(12) 初等矩阵　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵,共 3 类:

1) $P(i,j)$——交换 E 的第 i 行与第 j 行(或第 i 列与第 j 列)得到的初等矩阵,即

$$P(i,j)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & \quad & \quad & i & \quad & \quad & \quad & j & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array}$$

2) $P(i(k))$——用数域 P 中的非零数 k 乘 E 的第 i 行(或第 i 列)得到的初

等矩阵,即

$$P(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \quad & i & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

3) $P(i, j(k))$—— 把 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或第 i 列的 k 倍加到第 j 列) 得到的初等矩阵,即

$$P(i, j(k)) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad \end{array} & \end{array}$$

初等矩阵具有如下的重要性质:

性质 1　初等矩阵都是可逆的,且它们的逆矩阵仍是同类的初等矩阵,即

$$|P(i, j)| = -1, \quad |P(i(k))| = k \neq 0, \quad |P(i, j(k))| = 1$$

$$P(i, j)^{-1} = P(i, j), \quad P(i(k))^{-1} = P(i(k^{-1}))$$

$$P(i, j(k))^{-1} = P(i, j(-k))$$

性质 2　对一个 $s \times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $s \times s$ 初等矩阵;对 A 作一初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵,即

$$A \xrightarrow{\mathrm{r}_i \longleftrightarrow \mathrm{r}_j} P(i, j)A, \qquad A \xrightarrow{\mathrm{c}_i \longleftrightarrow \mathrm{c}_j} AP(i, j)$$

$$A \xrightarrow{\mathrm{r}_i \times k} P(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{\mathrm{c}_i \times k} AP(i(k))$$

$$A \xrightarrow{\mathrm{r}_i + k\mathrm{r}_j} P(i, j(k))A, \qquad A \xrightarrow{\mathrm{c}_j + k\mathrm{c}_i} AP(i, j(k))$$

注　用 $P(i, j(k))$ 左乘 A 或右乘 A 相应于对 A 所作的初等行变换和初等列变换是有差别的 .

6. 逆矩阵

(1) 设 A 是数域 P 上的一个 n 级方阵,如果存在 P 上的 n 级方阵 B,使得

$$AB = BA = E$$

则称 A 是可逆的,又称 B 为 A 的逆矩阵 . 当矩阵 A 可逆时,逆矩阵由 A 惟一确定,记为 A^{-1} .

(2) 逆矩阵具有如下一些性质(设 A,B 是 n 级可逆矩阵):

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) 若 $k\neq 0$,则 kA 可逆,且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

3) AB 可逆,且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

4) A' 可逆,且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

5) A^k 可逆,且 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

7) 如果 A 是 $s\times n$ 矩阵,P 是 s 级可逆矩阵,Q 是 n 级可逆矩阵,则

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(PAQ)$$

(3) 矩阵可逆的条件

1) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$ (也即 $\mathrm{rank}(A) = n$);

2) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以通过初等变换(特别是只通过初等行(列) 变换) 化为 n 级单位矩阵;

3) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以写成一些初等矩阵的乘积;

4) 对于 n 级方阵 A,若存在 n 级方阵 B 使得 $AB = E$ (或 $BA = E$) ,则 A 可逆,且 $A^{-1} = B$;

5) n 级方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的 n 个特征值不为零(见第七章) .

(4) 求逆矩阵的方法

1) 利用伴随矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

2) 利用初等变换

$$(A,\ E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E,\ A^{-1}) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

7. 等价矩阵

(1) 如果矩阵 A 可以经过一系列初等变换变成 B,则称 A 与 B 等价,记为 $A \cong B$.

(2) 等价具有反身性,对称性与传递性,即 A 与 A 等价;若 A 与 B 等价,则 B 与 A 等价;若 A 与 B 等价,B 与 C 等价,则 A 与 C 等价.

(3) 秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵 A 等价于形如

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

的 $s\times n$ 矩阵,称之为 A 的等价标准形,它是由 A 惟一确定的.

(4) 等价的充分必要条件

1) 两个 $s\times n$ 矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的秩.

2) $s\times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q,使得 $PAQ = B$.

8. 分块矩阵

(1) 将矩阵用横线和纵线分成若干小块后所得的矩阵称为分块矩阵.

(2) 只要进行运算的矩阵的分块适当,分块矩阵有类似于普通矩阵的运算法则:

1) 加法　将 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$ 用同样的分法分块为 $A = (A_{ij})_{t\times l}$, $B = (B_{ij})_{t\times l}$,其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的级数相同,则

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{t\times l}$$

2) 数乘　$kA = (kA_{ij})_{t\times l}$

3) 乘法　将 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$ 分块为 $A = (A_{ij})_{t\times l}$, $B = (B_{ij})_{l\times r}$,其中 A_{ij} 是 $s_i\times n_j$ 矩阵,B_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 矩阵,则

$$AB = (C_{ij})_{t\times r}$$

其中

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{il}B_{lj} \quad (i = 1,\cdots,t;\ j = 1,\cdots,r)$$

4) 转置　设 $A = (A_{ij})_{t\times l}$,则 $A' = (A'_{ji})_{l\times t}$.

(3) 准对角矩阵

1) 如下形式的分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l\end{pmatrix},\quad A_i \text{ 为 } n_i\times n_i \text{ 矩阵}(i=1,2,\cdots,l)$$

称为准对角矩阵 .

2) 对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_l\end{pmatrix}\quad (A_i \text{ 与 } B_i \text{ 同级})$$

有

$$A+B=\begin{pmatrix}A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l+B_l\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_lB_l\end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix}A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l^k\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l^{-1}\end{pmatrix}\quad (A_i \text{ 均可逆})$$

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_l|$$

注　对于形如

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1\\ & & A_2 & \\ & ⋰ & & \\ A_l & & & \end{pmatrix}\quad (A_i \text{ 均为 } n_i\times n_i \text{ 可逆矩阵})$$

的分块矩阵,其逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_l^{-1}\\ & & A_2^{-1} & \\ & ⋰ & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

(4) 四分块三角矩阵

1) 如下形式的分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}, 其中 A, D 均为方阵$$

称为四分块上(或下) 三角矩阵 .

2) 当 A 与 D 均可逆时,四分块三角矩阵的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

(5) 分块初等矩阵

1) 将 $m+n$ 级单位矩阵分块为

$$\begin{bmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

对它进行两行(列) 互换得

$$\begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix}$$

或某一行(列) 乘可逆矩阵 P 得

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & P \end{bmatrix}$$

或一行(列) 加上另一行(列) 的 P(矩阵) 倍数得

$$\begin{bmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{bmatrix}$$

称这些矩阵为分块初等矩阵 .

2) 分块初等矩阵均是可逆矩阵,即

$$\begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & E_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ O & E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & P \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & P^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E_m & -P \\ O & E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E_m & O \\ -P & E_n \end{bmatrix}$$

3) 用分块初等矩阵左(右) 乘$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$(要可乘,可加) 相当于对其作相应的分块初等行(列) 变换(只列出左乘的结果):

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + PC & B + PD \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C + PA & D + PB \end{pmatrix}$$

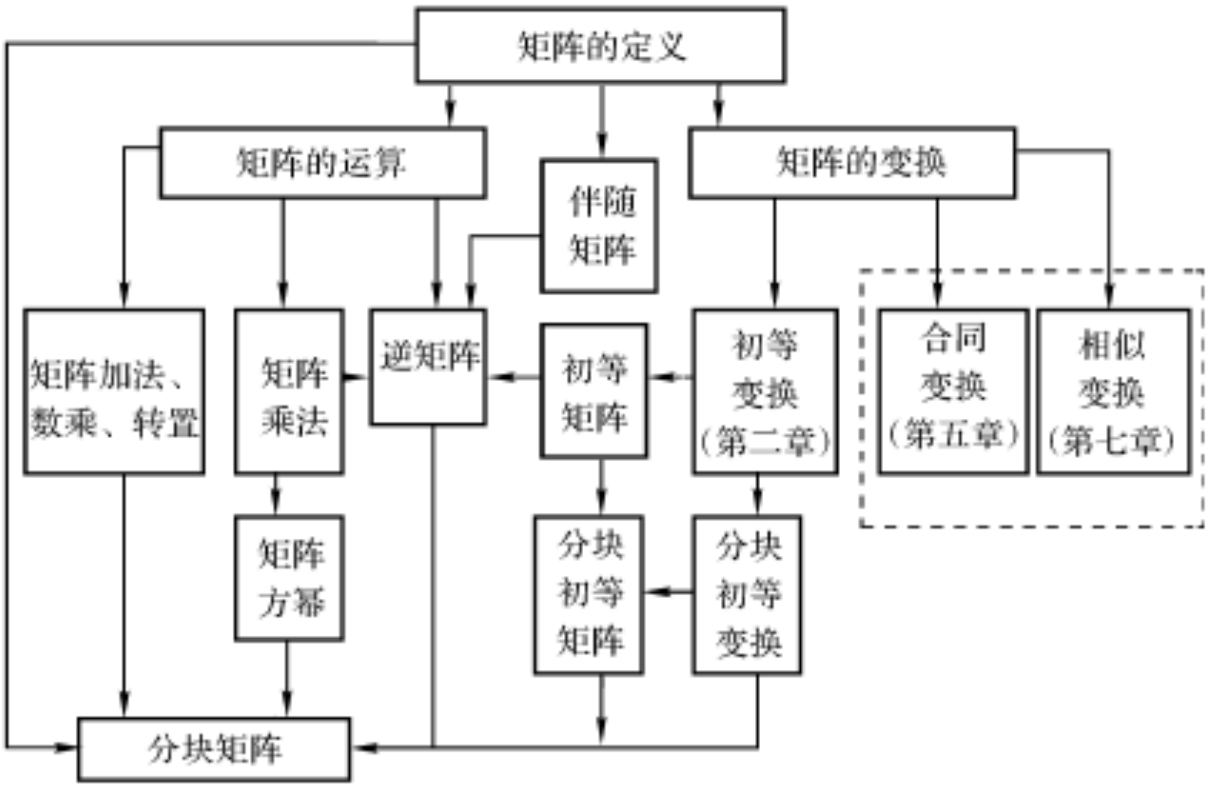
9. 矩阵运算中可能不成立的结论

可能不成立的结论	原因或例	成立条件
$AB \neq BA$	① AB 有意义, BA 无意义; ② AB 与 BA 有意义,级数不等; ③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA$	
$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$(AB)^k \neq A^k B^k$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$(A + B)^k \neq A^k + C_k^1 A^{k-1} B + \cdots + C_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k$	$AB \neq BA$	$AB = BA$
$AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ 但 $AB = O$	A 可逆时, $B = O$ B 可逆时, $A = O$
$AB = AC$ 且 $A \neq O \Rightarrow B = C$ $BA = CA$ 且 $A \neq O \Rightarrow B = C$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \neq C$ 但 $AB = O = AC$	A 可逆

续　表

可能不成立的结论	原因或例	成立条件
$A^2 = A \backslash A = O$ 或 $A = E$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $A^2 = A$，但 $A \neq O$，$A \neq E$	A 可逆时，$A = E$ $A - E$ 可逆时，$A = O$
$A^2 = E \backslash A = \pm E$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $A^2 = E$，但 $A \neq \pm E$	
$A^2 = O \backslash A = O$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$，但 $A^2 = O$	A 为实对称阵
$\|A + B\| \neq \|A\| + \|B\|$	矩阵加法与行列式性质的区别	
$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$	A，B 可逆时，$A + B$ 不一定可逆；即使 A，B，$A + B$ 都可逆，也不一定相等	

二、知识网络图



三、重点、难点解读

本章的重点是掌握矩阵的运算以及它们的运算规律 .由于矩阵运算和熟知的数的运算规律有些是相同的,但也有许多不同之处,这些不同之处正是易犯错误的地方 .

伴随矩阵 A^* 是为计算逆矩阵而引入的,但在具体求逆矩阵时,只对低级矩阵(特别是 2 级矩阵) 采用伴随矩阵法进行计算,对 2 级以上的矩阵利用初等变换法求逆矩阵更方便 .在涉及伴随矩阵的有关计算及证明时,往往利用伴随矩阵的基本公式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 或 $A^* = |A|A^{-1}$ (当 $|A| \neq 0$ 时) 来推证及化简 .

利用初等矩阵及分块初等矩阵可以将对矩阵的初等变换和分块矩阵的分块初等变换转化成矩阵的乘法运算,对于解决一些涉及矩阵的理论和计算题很有用,但推证过程有一定的技巧 .

有关矩阵的秩的等式或不等式的证明,常常和向量组的秩、线性方程组的解等相联系,推证有一定的难度 .熟记关于矩阵的秩的一些结论,对有关问题的论证会有很大的帮助 .

四、典型例题解析

例 4 .1 设 A 是 3 级方阵,$|A| = -2$,把 A 按行分块 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$,其中 $\alpha_j (j = 1,2,3)$ 是 A 的第 j 行,则 $\left|\begin{pmatrix} \alpha_3 - 2\alpha_1 \\ 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\right| =$ ________ .

分析 应填 6. 计算抽象矩阵的行列式时,主要是利用行列式的性质及行列式的计算公式 .

$$\left|\begin{pmatrix} \alpha_3 - 2\alpha_1 \\ 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -2\alpha_1 \\ 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\right| = 3\left|\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\right| + 0 =$$

$$-3\left|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\right| = -3|A| = 6$$

例 4 2 设 4 级方阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$, $B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$,其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量,且 $|A|=4$, $|B|=1$,则 $|A+B|=$ ________ .

分析 应填 40.

$$|A+B| = |(\alpha+\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4)| =$$
$$2^3|(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)| + 2^3|(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)| =$$
$$8(|A|+|B|) = 8\times 5 = 40$$

例 4 3 设 A,B 均为 n 级方阵, $|A|=2$, $|B|=-3$,则 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| =$ ________ .

分析 应填 $(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{6}$. 当矩阵 A 可逆时,常利用 $A^* = |A|A^{-1}$ 来表示 A 的伴随矩阵 .

$$|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| = |A^{-1}|B|B^{-1} - |A|A^{-1}B^{-1}| =$$
$$|-3A^{-1}B^{-1} - 2A^{-1}B^{-1}| = |-5A^{-1}B^{-1}| =$$
$$(-5)^n|A^{-1}||B^{-1}| = (-5)^n\frac{1}{|A||B|} =$$
$$\frac{(-5)^n}{-6} = (-1)^{n-1}\frac{5^n}{6}$$

例 4 4 设 A 为 n 级方阵,且 $AA' = E$, $|A|<0$,则 $|A+E| =$ ________ .

分析 应填 0.

$$|A+E| = |A+AA'| = |A(E+A')| = |A||E+A'| =$$
$$|A||(A+E)'| = |A||A+E|$$

即 $|A+E|(1-|A|)=0$.由 $|A|<0$ 知 $1-|A|>0$,于是 $|A+E|=0$.

注 此处 A 是正交矩阵,且 $|A|=-1$.

例 4 5 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式,且 $a_{11}\neq 0$,计算行列式 $|A|$.

分析 A 的伴随矩阵 A^* 与元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 有关,而对于伴随矩阵又可以利用重要公式 $AA^* = |A|E$.

解 由于 $a_{ij} = A_{ij}$,所以

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix} = A'$$

于是 $AA' = AA^* = |A|E$. 取行列式得 $|A||A'| = |A|^3$,即 $|A|^2 = |A|^3$ 或 $|A|^2(|A|-1) = 0$. 由于

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$$

故 $|A| = 1$.

例4.6 已知方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$,则 $A^{-1} =$ ________,$(A+2E)^{-1}$ = ________ .

分析 应填$\dfrac{1}{2}(A-E)$ 和$\dfrac{1}{4}(3E-A)$.

找矩阵 B,使得 $AB = E$(或 $BA = E$). 由 $A^2 - A - 2E = O$ 得 $A(A-E) = 2E$,即 $A\left[\dfrac{1}{2}(A-E)\right] = E$,故 A 可逆,且 $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-E)$.

为求$(A+2E)^{-1}$,找矩阵 B,使得$(A+2E)B = E$,则 $A^{-1} = B$. 由于 $(A+2E)(A-3E) = -4E$,即$(A+2E)\left[-\dfrac{1}{4}(A-3E)\right] = E$,故$(A+2E)^{-1} = \dfrac{1}{4}(3E-A)$.

注 为找到矩阵 B,使得$(A+2E)B = E$,根据 $A^2 - A - 2E = O$,可设 $(A+2E)(A+aE) = bE$,即 $A^2 + (a+2)A + (2a-b)E = O$,从而$\begin{cases} a+2=-1 \\ 2a-b=-2 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} a=-3 \\ b=-4 \end{cases}$,即$(A+2E)(A-3E) = -4E$.

例4.7 设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 级可逆矩阵,则$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ ________ .

(A) $A^{-1}+B^{-1}$; (B) $A+B$; (C) $A(A+B)^{-1}B$; (D) $(A+B)^{-1}$.

分析 应填(C).

法1 验证所给出的四个矩阵中,哪个与$(A^{-1}+B^{-1})$相乘为单位矩阵 E. 一般说来,矩阵和的逆并不是逆的和 . 答案(C) 最有可能正确 . 检验知

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B] &= (A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B = \\ &B^{-1}[B(A+B)^{-1}B + A(A+B)^{-1}B] = \\ &B^{-1}[B+A](A+B)^{-1}B = B^{-1}B = E\end{aligned}$$

故选(C)

法2 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = [B^{-1}(BA^{-1}+E)]^{-1} =$

$$[B^{-1}(B+A)A^{-1}]^{-1} = A(A+B)^{-1}B$$

例4 8　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$,则 $(A^*)^{-1}=$ ________ .

分析　在遇到 A^* 的有关计算时,一般不直接由定义去求 A^*,而是利用 A^* 的重要公式. 如此题,由 $A^*A=|A|E$ 得 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$,而 $|A|=\frac{5}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$,于是

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & -4 & -10\end{pmatrix}$$

例4 9　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,且 $A^*X\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}X+E$,求矩阵 X.

分析　这是求解矩阵方程的问题. 求解矩阵方程时,要先作恒等变形将方程化简,再代入已知条件求解. 不要一起步就代入已知数据,那样往往使运算复杂化,费时易错. 化简时要正确把握矩阵的重要公式、性质,先将给出的关系式变为 $AX=C$,或 $XB=C$,或 $AXB=C$的形式,再通过左乘或右乘可逆矩阵求出 $X=A^{-1}C$,或 $X=CB^{-1}$,或 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

解　可求得 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=4$. 于是

$$A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$$

而

$$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=(2A^{-1})^*=|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=2^3|A|^{-1}\frac{1}{2}A=A$$

代入矩阵方程得　$$4A^{-1}XA=8A^{-1}X+E$$

左乘矩阵 A 得　$$4XA=8X+A$$

即 $4X(A-2E)=A$,故 $X=\frac{1}{4}A(A-2E)^{-1}$.由于

$$(A-2E \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&-1&1&0&0\\-1&-1&1&0&1&0\\1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_1\times(-1)}]{r_2-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&-1&0&0\\0&-2&2&-1&1&0\\0&0&-2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\ r_3\times\left(\frac{1}{2}\right)}]{r_1+\frac{1}{2}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&-2&0&0&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{r_1-\frac{1}{2}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

从而
$$(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

故

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1/4&0\\0&0&-1/4\\-1/4&0&0\end{pmatrix}$$

例4 .10 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$,求 X.

解 法1 由 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$ 得 $(A-E)XA^{-1}=3E$,于是 $X=3(A-E)^{-1}A$.

由于 $|A^*|=8$,由 $AA^*=|A|E$ 得 $|A||A^*|=|A|^4$,即 $|A|^3=|A^*|=8$,从而 $|A|=2$,故

$$A=|A|(A^*)^{-1}=2(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

又可求得

$$(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

故
$$X=3(A-E)^{-1}A=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

法 2　由 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$ 得 $XA^{-1}=A^{-1}XA^{-1}+3A^{-1}$,即 $XA^*=\frac{1}{|A|}A^*XA^*+3A^*$. 同上可求得 $|A|=2$,于是有

$$XA^*=\frac{1}{2}A^*XA^*+3A^*,\quad 即\ 2XA^*=A^*XA^*+6A^*$$

故
$$(2E-A^*)XA^*=6A^*,\quad 即\ X=6(2E-A^*)^{-1}$$

(或由法 1,$X=3(A-E)^{-1}A=3(A-E)^{-1}(A^{-1})^{-1}=3[A^{-1}(A-E)]^{-1}=3(E-A^{-1})^{-1}=3\left(E-\frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}=3\left(E-\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$.)

可求得

$$(2E-A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

故
$$X = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

注　法 2 比法 1 少求一次逆矩阵,少一次矩阵乘法,计算量小些.

例 4.11　已知 $AB - B = A$,其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,求$(A - E)^{-1}$.

解　法 1　因为 $A(B - E) = B$,所以

$$A = B(B - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

从而
$$(A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

法 2　由于 $AB - A - B = O$,即 $A(B - E) - (B - E) = E$,也即

$$(A - E)(B - E) = E$$

故
$$(A - E)^{-1} = B - E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(也可根据 $AB - A - B = O$,设$(A - E)(B + aE) = bE$,即 $AB + aA - B - (a + b)E = O$.比较得$\begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \end{cases}$,于是 $a = -1, b = 1$,故$(A - E)(B - E) = E$.)

例 4.12　已知 $\alpha = (1,2,3)$,$\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$,设 $A = \alpha'\beta$,则 $A^n =$ ________.

分析　不要先求出 $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\2 & 1 & \frac{2}{3}\\3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$,而是利用矩阵乘法结合律,得

$$\begin{aligned}A^n &= (\alpha'\beta)^n = (\alpha'\beta)(\alpha'\beta)\cdots(\alpha'\beta) = \alpha'(\beta\alpha')\cdots(\beta\alpha')\beta = \\ &\alpha'(\beta\alpha')^{n-1}\beta = 3^{n-1}\alpha'\beta = 3^{n-1}A\end{aligned}$$

例 4.13　已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,求 A^n.

解　法 1　可求得 $A^2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 4 & 0\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}=2A$, $A^3=2A^2=2^2A$. 设 $A^k=2^{k-1}A$,则

$$A^{k+1}=A^kA=2^{k-1}A^2=2^kA$$

故

$$A^n=2^{n-1}A=\begin{bmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\0 & 2^n & 0\\2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{bmatrix}$$

法 2　$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B+C$, 其中 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}(1 \quad 0 \quad 1)$, $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,且有 $BC=CB=O$ 从而

$$A^n=(B+C)^n=B^n+C^n=2^{n-1}B+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\0 & 2^n & 0\\2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{bmatrix}$$

法 3　利用相似对角化(见第七章). 可求得矩阵

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad 使\ P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

故

$$A^n=\left(P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&2^n&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

例 4 .14　设 A 是 $m\times n$ 矩阵,C 与 n 级单位矩阵等价,$B=AC$,若 $\operatorname{rank}A=r$,$\operatorname{rank}B=r_1$,则________ .

(A) $r>r_1$;　　　　(B) $r<r_1$;

(C) $r=r_1$;　　　　(D) r 与 r_1 的关系依 C 而定 .

分析　应填(C).

因为 $C\cong E$,所以 $\operatorname{rank}C=n$,即 C 可逆,从而

$$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(AC)=\operatorname{rank}A$$

或直接推导

$$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(AC)\leqslant\operatorname{rank}A$$

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(ACC^{-1})=\operatorname{rank}(BC^{-1})\leqslant\operatorname{rank}B$$

故 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A$,即 $r=r_1$.

例 4 .15　设 A 是 $n\times m$ 矩阵,B 是 $m\times n$ 矩阵,且 $m>n$. 若 $AB=E$,证明 B 的列向量组线性无关 .

证　法 1　只要证 $\operatorname{rank}B=n$. 因为 $\operatorname{rank}B\leqslant n$,又

$$n=\operatorname{rank}E=\operatorname{rank}(AB)\leqslant\operatorname{rank}B$$

故 $\operatorname{rank}B=n$,从而 B 的列向量组线性无关 .

法 2　由线性无关的定义 . 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,又设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0,\text{即}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0\text{ 或 }B\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$$

两边左乘 A 得 $AB\begin{pmatrix}k_1\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$,即 $E\begin{pmatrix}k_1\\\cdots\\k_n\end{pmatrix}=0$,故 $k_1=\cdots=k_n=0$,即 $\beta_1,\beta_2,\cdots$,

β_n 线性无关.

例 4.16 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,证明 $\mathrm{rank}(A'A)=\mathrm{rank}A$.

证 构造两个 n 元齐次方程组

$$(\text{Ⅰ})\quad Ax=0,\qquad (\text{Ⅱ})\quad A'Ax=0$$

若 η 是(Ⅰ)的解,即 $A\eta=0$,则有 $A'A\eta=A'0=0$,即 η 是(Ⅱ)的解. 反之,若 η 是(Ⅱ)的解,即 $A'A\eta=0$,则

$$(A\eta)'(A\eta)=\eta'A'A\eta=\eta'0=0$$

记 $A\eta=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$. 由于 A 是实矩阵,η 是实数解,所以 b_i 全是实数,从而 $(A\eta)'(A\eta)=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=0$,这表明 $b_i=0(i=1,2,\cdots,m)$,即 $A\eta=0$,也即(Ⅱ)的解都是(Ⅰ)的解. 故(Ⅰ)与(Ⅱ)同解,从而它们的基础解系含有相同个数的线性无关解向量,即 $n-\mathrm{rank}A=n-\mathrm{rank}(A'A)$,故 $\mathrm{rank}(A'A)=\mathrm{rank}A$.

注 由上面诸例可见,矩阵秩的问题是综合性很强的题目,可以从矩阵、向量、线性方程组等多方面入手.

例 4.17 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,则必有________.

(A) $AP_1P_2=B$; (B) $AP_2P_1=B$;

(C) $P_1P_2A=B$; (D) $P_2P_1A=B$.

分析 应填(C).

B 由 A 作初等行变换得到,故只可能选(C)或(D). 又 $A\xrightarrow[\mathrm{r}_1\leftrightarrow\mathrm{r}_2]{\mathrm{r}_3+\mathrm{r}_1}B$,故应选(C). 而 $A\xrightarrow[\mathrm{r}_3+\mathrm{r}_1]{\mathrm{r}_1\leftrightarrow\mathrm{r}_2}\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{21}&a_{32}+a_{22}&a_{33}+a_{23}\end{pmatrix}\neq B$,故(D)不对.

例 4.18 已知 A,B 均是 3 级方阵,将 A 中第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得到矩阵 A_1,将 B 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 B_1,又知 $A_1B_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$,

求 AB.

解　由 $A \xrightarrow{r_2 - 2r_3} A_1$，$B \xrightarrow{c_1 + c_2} B_1$，得

$$A_1 = P(2,3(-2))A, \qquad B_1 = BP(2,1(1))$$

其中

$$P(2,3(-2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(2,1(1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $A_1B_1 = P(2,3(-2))ABP(2,1(1))$，故

$$AB = P(2,3(-2))^{-1}A_1B_1P(2,1(1))^{-1} =$$

$$P(2,3(2))A_1B_1P(2,1(-1)) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

例4.19　设 A 是 n 级可逆矩阵，互换 A 中第 i 行和第 j 行得到矩阵 B，求 AB^{-1}.

解　因为 $B = P(i,j)A$，所以

$$AB^{-1} = A(P(i,j)A)^{-1} = AA^{-1}P(i,j)^{-1} = P(i,j)$$

例4.20　设分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 B, C 都是 n 级可逆矩阵，试求 M^{-1}.

解　法1　因为

$$\begin{bmatrix} E & O \\ -DB^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} \quad \left[\text{或} \begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -C^{-1}D \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}\right]$$

两边求逆得

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E & O \\ -DB^{-1} & E \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}$$

故

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & O \\ -DB^{-1} & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

法2　设 $M^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$，其中 X_i 均为 n 级方阵，由

$$MM^{-1} = \begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

得　$BX_3 = E,\quad BX_4 = O,\quad CX_1 + DX_3 = O,\quad CX_2 + DX_4 = E$

解得　$X_3 = B^{-1},\quad X_4 = O,\quad X_1 = -C^{-1}DB^{-1},\quad X_2 = C^{-1}$

故
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例 4 21　设 A,B 均为 n 级方阵,证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

证　因为 $\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}$,所以
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

例 4 22　设 A 为 n 级非奇异矩阵,α 为 n 维列向量,b 为常数. 记分块矩阵
$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha' A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & b \end{pmatrix}$$

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$.

解　(1) $PQ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha' A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & b \end{pmatrix} =$
$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ |A|\alpha' - \alpha' A^* A & |A|b - \alpha' A^*\alpha \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ |A|\alpha' - \alpha'|A|E & |A|b - \alpha'|A|A^{-1}\alpha \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0' & |A|(b - \alpha' A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}$$

(2) 由(1) 得 $|PQ| = |A|^2(b - \alpha' A^{-1}\alpha)$, 而 $|PQ| = |P||Q|$, 且 $|P| = |A| \neq 0$,故有
$$|Q| = |A|(b - \alpha' A^{-1}\alpha)$$
可见 $|Q| \neq 0$ 的充分必要条件是 $b - \alpha' A^{-1}\alpha \neq 0$,即 $\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$.

例 4 23　设 A,B 为 n 级矩阵,A^*,B^* 分别为 A,B 对应的伴随矩阵. 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ ________.

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$;　　(B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$.

分析　应填(D).

不妨假设 A,B 均可逆,则 C 可逆,且

$$C^* = |C|C^{1} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} |B||A|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

故选(D). 也可利用 $CC^* = |C|E = |A||B|E$,逐一验证(A),(B),(C),(D)的四个矩阵是否满足该式.

例 4.24　设 A,B均为 n 级对称矩阵,且 $|A|\neq 0$. 当 $E+AB$ 可逆时,试证 $(E+AB)^{-1}A$为对称矩阵.

证　法 1

$$[(E+AB)^{-1}A]' = A'[(E+AB)']^{-1} = A(E+B'A')^{-1} =$$
$$(A^{-1})^{-1}(E+BA)^{-1} = [(E+BA)A^{-1}]^{-1} =$$
$$(A^{-1}+B)^{-1} = [A^{-1}(E+AB)]^{-1} = (E+AB)^{-1}A$$

法 2　因为$(E+AB)^{-1}A = [A^{-1}(E+AB)]^{-1} = (A^{-1}+B)^{-1}$,所以

$$[(E+AB)^{-1}A]' = [(A^{-1}+B)^{-1}]' = [(A^{-1}+B)']^{-1} =$$
$$(A^{-1}+B)^{-1} = (E+AB)^{-1}A$$

故$(E+AB)^{-1}$ 为对称矩阵.

五、课后习题全解

(一) 第四章习题

1. 设

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

计算 AB, $AB-BA$.

解

1) $AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB-BA=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

2) $AB=\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix} ac+a+c & ab+b+c & a^2+2c \\ bc+a+b & b^2+2b & ab+b+c \\ c^2+2a & bc+a+b & ac+a+c \end{pmatrix}$$

$AB-BA=$

$$\begin{pmatrix} b-ac & a^2+b^2+c^2-ab-b-c & b^2+2ac-a^2-ac \\ c-bc & 2ac-2b & a^2+b^2+c^2-ab-b-c \\ 3-c^2-2a & c-bc & b-ab \end{pmatrix}$$

2. 计算.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$;　　2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;　　3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;

4) $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^n$;　　5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(2,3,-1)$;

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$;

8) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

解 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

3) 用数学归纳法证明$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

当 $n=1$ 时成立,假定 $n=k$ 时成立,即$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $n=k+1$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) 用数学归纳法证明$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

当 $n=2$ 时,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

假设

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} >$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

其中 $x_1 = \cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi = \cos n\varphi$

类似地 $x_2 = -\sin n\varphi$, $x_3 = \sin n\varphi$, $x_4 = \cos n\varphi$,故

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(2,3,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$(a_{11}x + a_{12}y + b_1,\ a_{12}x + a_{22}y + b_2,\ b_1x + b_2y + c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$$

7) 1°. 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} = 4E$.

2°. 当 $n = 2k$ 时,

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = (4E)^k = 2^{2k}E = 2^nE$$

当 $n = 2k+1$ 时,

$$A^n = A^{2k+1} = (A^2)^kA = 2^{2k}EA = 2^{n-1}A$$

8) 用数学归纳法证明

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & & \lambda^n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

当 $n=2$ 时,$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{bmatrix}$,(*)式成立.假设 $n-1$ 时成立,即

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}=\begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\ & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ & & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}$$

当为 n 时,

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\ & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ & & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\lambda^{n} & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^{n} & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{n}\end{bmatrix}$$

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$,$A$ 是一个 $n\times n$ 矩阵,定义 $f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_mE$.

1) $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$, $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$;

2) $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$, $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$.

试求 $f(A)$.

解 1) $f(A)=A^2-A-E=$

$$\begin{bmatrix}8 & 2 & 4\\ 11 & 2 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 8 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

2) $f(A)=A^2-5A+3E=$

$$\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&-5\\-15&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&\\&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

4. 如果 $AB=BA$,矩阵 B 就称为与 A 可交换 . 设

1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$;　　2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$;　　3) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

求所有与 A 可交换的矩阵 .

解　1) 法 1　设与 A 可交换的方阵 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,则由

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$$

比较对应元素得 $c=0$, $a=d$. 故与 A 可交换的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

其中 a,b 为任意数 .

法 2　$A=E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 与 A 可交换,即

$$\left[E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\left[E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]$$

得

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

解得 $c=0$, $a=d$. 故 $B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$.

2) $A=E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$,设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$ 与 A 可交换,即

$$\left[E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\left[E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\right]$$

得
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 3a + a_1 + a_2 & 3b + b_1 + b_2 & 3c + c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c & c & 2b + c \\ 3c_1 & c_1 & 2b_1 + c_1 \\ 3c_2 & c_2 & 2b_2 + c_2 \end{pmatrix}$$

比较对应元素,解得

$$a = b_1 - \frac{a_1}{3}, \quad b = 0, \quad c = 0$$

$$a_2 = \frac{3}{2}c_1, \quad b_2 = \frac{c_1}{2}, \quad c_2 = b_1 + \frac{c_1}{2}$$

故
$$B = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{a_1}{3} & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \frac{3}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_1 & b_1 + \frac{c_1}{2} \end{pmatrix} \quad (a_1, b_1, c_1 \text{ 任意})$$

3) 设 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ 与 A 可交换,即

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

比较对应元素,得

$$a_1 = a_2 = b_2 = 0, \quad b_1 = a, \quad c_2 = a, \quad c_1 = b$$

故
$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c \text{任意})$$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$,其中 $a_i \neq a_j$ 当 $i \neq j$ $(i, j = 1,2,\cdots, n)$.证

明:与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵 .

证　设 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$与 A 可交换,即

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

由于 $a_1,\cdots,a_n$ 互异,比较非对角线元素得 $a_i b_{ij}=a_j b_{ij}$, 即$(a_i-a_j)b_{ij}=0$, 于是 $b_{ij}=0\ (i\neq j)$.故与 A可交换的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$为对角矩阵 .

6. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 E_1 & & & \\ & a_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_r E_r \end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq a_j$ 当 $i\neq j\ (i, j=1,2,\cdots,r)$, E_i 是 n_i 级单位矩阵 , $\sum_{i=1}^{r} n_i=n$.证明:与 A可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 n_i 级矩阵 $(i=1,\cdots,r)$.

证　设 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}$与 A可交换,其中 B与 A分块方式相同,则

$$\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} a_1B_{11} & a_1B_{12} & \cdots & a_1B_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_rB_{r1} & a_rB_{r2} & \cdots & a_rB_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1B_{11} & a_2B_{12} & \cdots & a_rB_{1r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1B_{r1} & a_2B_{r2} & \cdots & a_rB_{rr} \end{pmatrix}$$

由于 $a_1, \cdots, a_r$ 互异,比较非对角块元素得 $a_iB_{ij} = a_jB_{ij}$,即$(a_i - a_j)B_{ij} = O$,于是$B_{ij} = O\ (i \neq j)$.因此与 A可交换的矩阵 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{rr} \end{pmatrix}$是准对角阵.

7. 用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1,而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵,而 $A = (a_{ij})_{n\times n}$.证明:

1) 如果 $AE_{12} = E_{12}A$,那么当 $k\neq 1$ 时 $a_{k1} = 0$,当 $k\neq 2$ 时 $a_{2k} = 0$;

2) 如果 $AE_{ij} = E_{ij}A$,那么当 $k\neq i$时 $a_{ki} = 0$,当 $k\neq j$时 $a_{jk} = 0$,且 $a_{ii} = a_{jj}$;

3) 如果 A与所有的 n 级矩阵可交换,那么 A一定是数量矩阵,即 $A = aE$.

证 1) 由 $AE_{12} = E_{12}A$,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a_{k1} = 0\ (k\neq 1)$, $a_{2k} = 0\ (k\neq 2)$,且 $a_{11} = a_{22}$.

2) 由 $AE_{ij} = E_{ij}A$,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & & \end{pmatrix} \end{array} i = i \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \\ \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a_{kj} = 0\ (k \neq i)$, $a_{ik} = 0\ (k \neq j)$,且 $a_{ii} = a_{jj}$.

3) 法 1　数量矩阵 kE_n 显然与任意 n 级方阵可交换;

反之,若 A 与任意 n 级方阵可交换,则也与每个 E_{ij} 可交换 . 由 2) 知, A 是一个数量矩阵 .

法 2　充分性显然 . 下证必要性 .

设 A 与任意 n 级方阵可交换,则与对角阵 $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ $(b_i \neq b_j)$ 也可交换 . 由本章习题 5 知 A 为对角阵 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$. 再由 A 与

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

可交换,得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & & & \\ & 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1,n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & & & \\ & 0 & a_{33} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{nn} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

故 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{11}, \cdots, a_{11})$ 为数量矩阵 .

8. 如果 $AB = BA$, $AC = CA$, 证明: $A(B + C) = (B + C)A$; $A(BC) = (BC)A$.

证
$$A(B + C) = AB + AC = BA + CA = (B + C)A$$
$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A$$

9. 如果 $A=\frac{1}{2}(B+E)$,证明:$A^2=A$当且仅当$B^2=E$.

证 设 $A^2=A$, $A=\frac{1}{2}(B+E)$,则 $B=2A-E$,于是

$$B^2=(2A-E)^2=4A^2-4A+E=4A-4A+E=E$$

即 $B^2=E$.

设 $B^2=E$, $A=\frac{1}{2}(B+E)$,则

$$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=$$

$$\frac{1}{4}(E+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)=A$$

即 $A^2=A$.

10. 矩阵 A 称为对称的,如果 $A'=A$. 证明:如果 A 是实对称矩阵且 $A^2=O$,那么 $A=O$.

证 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由题设,$A=A'$,那么

$$O=A^2=AA'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

从而 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 于是 $a_{ij}=0\ (i,\ j=1,2,\cdots,n)$,故 $A=O$.

11. 设 A,B 都是 $n\times n$ 的对称矩阵,证明:AB 也对称当且仅当 A,B 可交换.

证 由题设,$A=A'$, $B=B'$.

设 AB 对称,即 $AB=(AB)'$,而 $(AB)'=B'A'=BA$,故 $AB=BA$,即 AB 可交换.

设 AB 可交换,即有 $AB = BA$. 又 $(AB)' = B'A' = BA$,故 $AB = (AB)'$,即 AB 对称.

12. 矩阵 A 称为反对称的,如果 $A' = -A$. 证明:任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

证　设 B 为任意 $n\times n$ 矩阵,则

$$B = \frac{B+B'}{2} + \frac{B-B'}{2}$$

其中 $\frac{B+B'}{2}$ 为对称阵,$\frac{B-B'}{2}$ 为反对称矩阵.

13. 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k = 0,1,2,\cdots$; $a_{ij} = s_{i+j-2}$, $i, j = 1,2,\cdots, n$. 证明: $|a_{ij}| = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$.

证　$$|a_{ij}| = |s_{i+j-2}| = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} n & x_1 + \cdots + x_n & \cdots & x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n & x_1^2 + \cdots + x_n^2 & \cdots & x_1^n + \cdots + x_n^n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} & x_1^n + \cdots + x_n^n & \cdots & x_1^{2n-2} + \cdots + x_n^{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i<j}(x_j - x_i)\prod_{i<j}(x_j - x_i) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$$

14. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵,证明:存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 B,使 $AB = O$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$.

证　必要性. 设 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$,其中 b_j 是 B 的第 j 列. 由 $B\neq O$,有 i_0,使 $b_{i_0}\neq 0$. 又 $AB = O$,即 $A(b_1, \cdots, b_n) = (0,0,\cdots,0)$,也即 $Ab_i = 0$,于是 $Ax = 0$ 有非零解 b_{i_0},故 $|A| = 0$.

充分性. 设 $|A| = 0$,则线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 b_1,作 $B = (b_1, b_2,$

$\cdots, b_n) \neq O$,其中 $b_2, \cdots, b_n$ 均为零向量,则 $Ab_i = 0$, $j = 1,\cdots,n$,于是 $AB = O$.

15. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵,如果对任一 n 维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 都有 $Ax = 0$,那么 $A = O$.

证　法 1　分别取 x 为

$$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)' \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

由 $Ae_i = 0$,得 $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $(i = 1,\cdots,n)$,故 $A = O$.

法 2　由于线性方程组 $Ax = 0$ 有 n 个线性无关的解 $e_1, \cdots, e_n$,其基础解系含 n 个向量,故 $\text{rank} A = 0$,即 $A = O$.

16. 设 B 为一 $r\times r$ 矩阵,C 为一 $r\times n$ 矩阵,且 $\text{rank} C = r$. 证明:

1) 如果 $BC = O$,那么 $B = O$;

2) 如果 $BC = C$,那么 $B = E$.

证　1) 由于 $\text{rank} C = r$,C 中必有一 r 级子式不为零(不妨设由 C 的前 r 列构成 C_1, $|C_1| \neq 0$). 利用本章习题 14,使 $BC_1 = O$,只有 $B = O$.

2) 由 $BC = C$ 得$(B - E)C = O$, 利用 1) 得 $B - E = O$,即 $B = E$.

17. 证明 $\text{rank}(A + B) \leqslant \text{rank} A + \text{rank} B$.

证　设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$,则

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$$

不妨设$\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}$ 与$\beta_1, \cdots, \beta_{r_2}$ 分别是 A 与 B 之列向量组的极大线性无关组,则有

$$\alpha_i = k_{i1}\alpha_1 + \cdots + k_{ir_1}\alpha_{r_1}, \quad \beta_i = l_{i1}\beta_1 + \cdots + l_{ir_2}\beta_{r_2} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

从而

$$\alpha_i + \beta_i = k_{i1}\alpha_1 + \cdots + k_{ir_1}\alpha_{r_1} + l_{i1}\beta_1 + \cdots + l_{ir_2}\beta_{r_2} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

即 $A + B$ 的列向量组可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}, \beta_1, \cdots, \beta_{r_1}$ 线性表示. 故

$$\text{rank}(A + B) \leqslant r_1 + r_2 = \text{rank} A + \text{rank} B$$

18. 设 A, B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明:如果 $AB = O$,那么

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B \leqslant n$$

证　记 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$,由 $AB = O$,得

$$A(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (0, \cdots, 0), \text{ 即 } A\beta_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

也即β_i 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量,故

$$\operatorname{rank}B \leqslant n - \operatorname{rank}A, \quad \text{即} \quad \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B \leqslant n$$

19. 证明:如果 $A^k = O$,那么

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

证

$$(E + A + \cdots + A^{k-1})(E - A) = E + A + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^k) = E - A^k = E$$

故$(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$.

20. 求 A^{-1},设

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$;　2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;　4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;　6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解　1) $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} = \dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2) $(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_2 \\ r_2 \times (-1)}]{r_1 + r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 - \frac{2}{3}r_3 \\ r_3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)}]{r_1 + \frac{1}{3}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3) $(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 - 2r_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_1 \longleftrightarrow r_2 \\ r_2 \longleftrightarrow r_3}]{\substack{r_2 + r_3 \\ r_1 - 4r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 + r_3 \\ r_3 \times (-1)}]{r_1 + r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4) $$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4 - r_1 \\ r_1 \longleftrightarrow r_2 \\ r_1 \longleftrightarrow r_3}]{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ r_4 - r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 + r_2]{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_4 \\ r_4 \times (-1) \\ r_3 \longleftrightarrow r_4}]{\substack{r_1 - r_4 \\ r_2 + 2r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 \times (-1)]{\substack{r_1 - 6r_4 \\ r_2 + 5r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

5) $(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 \longleftrightarrow r_3 \\ r_i \times \left(-\frac{1}{2}\right)\ (i = 2,3,4)}]{\substack{r_4 - r_3 \\ r_1 + \frac{1}{2} r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_1 - r_3 \\ r_4 - r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 + \frac{1}{2} r_4 \\ r_4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}]{\substack{r_1 - \frac{1}{2} r_4 \\ r_2 + \frac{1}{2} r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

6) $$(A\mid E)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}3&3&-4&-3&1&0&0&0\\0&6&1&1&0&1&0&0\\5&4&2&1&0&0&1&0\\2&3&3&2&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行变换}}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-7&5&12&-19\\0&1&0&0&3&-2&-5&8\\0&0&1&0&41&-30&-69&111\\0&0&0&1&-59&43&99&-159\end{array}\right]=(E\mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{bmatrix}$$

7) 法 1　$|A|=1$，$A^{-1}=A^{*}=\begin{bmatrix}1&-3&11&-38\\ &1&-2&7\\ & &1&-2\\ & & &1\end{bmatrix}$

法 2　$$(A\mid E)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&-5&7&1&0&0&0\\0&1&2&-3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-3r_2}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-11&16&1&-3&0&0\\0&1&2&-3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+11r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&38&1&-3&11&0\\0&1&0&-7&0&1&-2&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_4]{\substack{r_1-38r_4\\r_2+7r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-3&11&-38\\0&1&0&0&0&1&-2&7\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)=(E\,\vdots\,A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\&1&-2&7\\&&1&-2\\&&&1\end{pmatrix}$$

8) 法1 $(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1})$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

法2 记 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$,利用教材 P194 例 1 结果,即

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

而

$$A_{11}^{-1}=\frac{A_{11}^{*}}{|A_{11}|}=A_{11}^{*}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix},\quad A_{22}^{-1}=\frac{A_{22}^{*}}{|A_{22}|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6&-8\\1&1\end{pmatrix}$$

$$-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6&-8\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&7\\2&-2\end{pmatrix}$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

9) $(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

10)

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}&\frac{1}{32}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

21. 设 $X=\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$,已知 A^{-1}, C^{-1} 存在,求 X^{-1} .

解　设 $X^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$,由$\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$得
$$\begin{pmatrix}X_{12}C&X_{11}A\\X_{22}C&X_{21}A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&E\end{pmatrix}$$

即
$$X_{12}C=E,\quad X_{11}A=O,\quad X_{22}C=O,\quad X_{21}A=E$$

解得 $X_{11}=O$, $X_{12}=C^{1}$, $X_{21}=A^{-1}$, $X_{22}=O$. 故
$$\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$$

22. 设 $X=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$,求 X^{-1} .

解　法 1

$$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}0&a_1&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}&0&0&0&\cdots&1&0\\a_n&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[i=n-1,n-2,\cdots,1]{\mathrm{r}_i\longleftrightarrow\mathrm{r}_{i+1}}$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & a_1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{r_i \times \frac{1}{a_{i-1}} \\ (i=2,\cdots,n)}]{r_1 \times \frac{1}{a_n}}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0
\end{array}\right]
$$

故
$$
X^{-1} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\
\frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0
\end{bmatrix}
$$

法 2　设 $X^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$，由 $XX^{-1} = E$，即

$$
\begin{bmatrix}
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\
a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

得
$$
\begin{bmatrix}
a_1 x_{21} & a_1 x_{22} & \cdots & a_1 x_{2n} \\
a_2 x_{31} & a_2 x_{32} & \cdots & a_2 x_{3n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{n-1} x_{n1} & a_{n-1} x_{n2} & \cdots & a_{n-1} x_{nn} \\
a_n x_{11} & a_n x_{12} & \cdots & a_n x_{1n}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

解得 $x_{21}=\dfrac{1}{a_1}$，$x_{32}=\dfrac{1}{a_2}$，…，$x_{n,n-1}=\dfrac{1}{a_{n-1}}$，$x_{1n}=\dfrac{1}{a_n}$，其他 $x_{ij}=0$．故

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

法 3　记 $X=\begin{pmatrix} & A \\ a_n & \end{pmatrix}$，则由本章习题 21 得

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} & \dfrac{1}{a_n} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \dfrac{1}{a_n} \\ \hline \dfrac{1}{a_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \dfrac{1}{a_{n-1}} & \end{array}\right)$$

23．求矩阵 X．设

1）$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$；

2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_n X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}_n$；

4）$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$．

解　1) 记 $AX=B$,则 $X=A^{-1}B$. 可求得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix}}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

故
$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$$

2) 记 $AX=B$, $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$,故

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}&\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{2}{3}&1&0\end{pmatrix}$$

3) $$X=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&\cdots&0&0&0\\1&1&-1&-1&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&1&1&-1\\0&0&0&0&\cdots&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$4)\ X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \xRightarrow{2)\text{题}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

24. 证明:

1) 如果 A 可逆对称(反对称),那么 A^{-1} 也对称(反对称);

2) 不存在奇数级的可逆反对称矩阵 .

证 1) 设 A 对称(反对称),即 $A = A'$ ($A = -A'$),则

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} = A^{-1} \quad ((A^{-1})' = (A')^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1})$$

故 A^{-1} 也对称(A^{-1} 为反对称阵) .

2) 设 A 反对称,有 $A = -A'$, 则

$$|A| = |-A'| = (-1)^n |A'| = (-1)^n |A|$$

当 n 为奇数时, $|A| = -|A|$,故 $|A| = 0$,即 A 不可逆 .

25. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为上(下) 三角形矩阵,如果 $i > j$ ($i < j$) 时有 $a_{ij} = 0$. 证明:

1) 两个上(下) 三角形矩阵的乘积仍是上(下) 三角形矩阵;

2) 可逆的上(下) 三角形矩阵的逆仍是上(下) 三角形矩阵 .

证 1) 设 $A = (a_{ij})$ 及 $B = (b_{ij})$ 均为上三角形矩阵,设 $C > AB = (c_{ij})$,则

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{i,i-1}b_{i-1,j} + a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}b_{i+1,j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

当 $i > j$ 时,$a_{ij} = b_{ij} = 0$,显然 c_{ij} 中各项有因子为零,故 $c_{ij} = 0$ ($i > j$),故 AB 也为上三角形矩阵 .

2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = (b_{ij})$ 是 A 的逆矩阵,即有 $AB = E$,比较 E 和 AB 的第一列元素 .

$$\begin{cases} 1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ 0 = \qquad\qquad a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \qquad \cdots\cdots \\ 0 = \qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}b_{n-1,1} + a_{n-1,n}b_{n1} \\ 0 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}b_{n1} \end{cases}$$

由 $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$ 知,$a_{ii} \neq 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$,故由上式解得

$$b_{n1} = b_{n-1,1} = \cdots = b_{21} = 0$$

类似地,比较第2至 n列可得,$i > j$时,$b_{ij} = 0$,故 $B = A^{-1}$ 为上三角形矩阵 .

同理可证 A为下三角形矩阵的情形 .

26. 证明:

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

其中 A是 $n\times n$矩阵($n \geqslant 2$) .

证　由 $AA^* = |A|E$得

$$|A||A^*| = |AA^*| = ||A|E| = |A|^n \cdot |E| = |A|^n$$

当 $|A| \neq 0$ 时,$|A^*| = \dfrac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$;

当 $|A| = 0$ 时,

1°. $A = O$时,$A^* = O$,于是 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

2°. $\operatorname{rank} A > 0$ 时,$AA^* = |A|E = O$.由本章习题18 知 $\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}A^* \leqslant n$,故 $\operatorname{rank}A^* < n$,即 $|A^*| = 0$,也有 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

27. 证明:如果 A是 $n\times n$矩阵($n\geqslant 2$),那么

$$\operatorname{rank}A^* = \begin{cases} n, & \text{当 } \operatorname{rank}A = n \\ 1, & \text{当 } \operatorname{rank}A = n-1 \\ 0, & \text{当 } \operatorname{rank}A < n-1 \end{cases}$$

证　1) 当 $\operatorname{rank}A = n$时,$A^* = |A|A^{-1}$ 可逆,故 $\operatorname{rank}A^* = n$.

2) 当 $\operatorname{rank}A = n-1$ 时,$AA^* = |A|E = O$.由本章习题 18 知

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}A^* \leqslant n, \quad 即 \quad \operatorname{rank}A^* \leqslant n - \operatorname{rank}A = 1$$

若 $\operatorname{rank}A^* = 0$,则 $A^* = (A_{ji}) = O$,于是 $A_{ij} = 0$,即 A的所有 $n-1$ 阶子式均为零,与 $\operatorname{rank}A = n-1$ 矛盾,故 $\operatorname{rank}A^* = 1$.

3°. 当 $\operatorname{rank}A < n-1$ 时,A 的所有 $n-1$ 阶子式均为零,由伴随矩阵 $A^* = (A_{ji})$ 的定义知 $A^* = O$,即 $\operatorname{rank}A^* = 0$.

28. 用两种方法求 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ \hline 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$ 的逆矩阵.

(1) 用初等变换;

(2) 按 A 中的划分,利用分块乘法的初等变换.(注意各小块矩阵的特点.)

解

(1) $$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[(i=2,3,4)]{r_i-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{\substack{r_1+\frac{1}{2}r_2\\ r_4-r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_4-r_3\\ r_3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}]{r_1+\frac{1}{2}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{1}{4}r_4\\ r_4\times\frac{1}{4}}]{\substack{r_1+\frac{1}{4}r_4\\ r_2-\frac{1}{4}r_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)=(E\,\vdots\,A^{-1})$$

故
$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A$$

(2) 记 $A=\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}$,其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,则 $B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}B$.利用教材 P195 例 2 结果,有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}^{-1}=$$
$$\begin{pmatrix}(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}&-(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}B(-B)^{-1}\\-(-B)^{-1}B(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}&(-B)^{-1}B(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}B(-B)^{-1}+(-B)^{-1}\end{pmatrix}$$

其中$(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}=(B+B)^{-1}=(2B)^{-1}=\frac{1}{2}B^{-1}$.于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}B^{-1}&\frac{1}{2}B^{-1}\\\frac{1}{2}B^{-1}&-\frac{1}{2}B^{-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}B^{-1}&B^{-1}\\B^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}=$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}B&\frac{1}{2}B\\\frac{1}{2}B&-\frac{1}{2}B\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A$$

29. A,B分别是 $n\times m$和 $m\times n$矩阵,证明
$$\begin{vmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|$$

解　由于$\begin{pmatrix}E_m&O\\-A&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m&B\\O&E_n-AB\end{pmatrix}$,所以

$$\begin{vmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m&O\\-A&E_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}E_m&B\\O&E_n-AB\end{vmatrix}=|E_m||E_n-AB|=|E_n-AB|$$

又由$\begin{pmatrix}E_m&B\\A&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&O\\-A&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m-BA&B\\O&E_n\end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} E_m - BA & B \\ O & E_n \end{vmatrix} = |E_m - BA||E_n| = |E_m - BA|$$

30\. A,B 如上题,$\lambda \neq 0$,证明

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$$

证　由 $\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ O & \lambda E_n - AB \end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ O & \lambda E_n - AB \end{vmatrix} = |\lambda E_m||\lambda E_n - AB| = \lambda^m|\lambda E_n - AB|$$

又由 $\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ O & \lambda E_n \end{pmatrix}$,得

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ O & \lambda E_n \end{vmatrix} = |\lambda E_m - BA||\lambda E_n| = \lambda^n|\lambda E_m - BA|$$

于是
$$\lambda^m|\lambda E_n - AB| = \lambda^n|\lambda E_m - BA|$$

故
$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$$

(二) 第四章补充题

1\. 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵,$\operatorname{rank} A = 1$,证明:

1) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$;

2) $A^2 = kA$.

证　1) 由 $\operatorname{rank} A = 1$ 知,有 $A = (a_{ij})$ 的某元素 $a_{i_0 j_0} \neq 0$,且 A 的每两列都

成比例. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,则有 $\alpha_i=b_i\beta_1$, $\beta_1=\begin{pmatrix}a_1\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 为非零列向量,于是

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(b_1\beta_1,b_2\beta_1,\cdots,b_n\beta_1)=$$

$$\begin{pmatrix}b_1a_1 & b_2a_1 & \cdots & b_na_1\\ b_1a_2 & b_2a_2 & \cdots & b_na_2\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_1a_n & b_2a_n & \cdots & b_na_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

2) 由 1)

$$A^2=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=$$

$$k\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=kA$$

其中数 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}b_ia_i$.

2. 设 A 为 2×2 矩阵,证明:如果 $A^l=O, l\geqslant 2$,那么 $A^2=O$.

证　由 $A^l=O$,得 $0=|A^l|=|A|^l$, 即 $|A|=0$,那么 $\operatorname{rank}A=1$ 或 0. 若 $\operatorname{rank}A=0$,则 $A=O$, 此时 $A^2=O$. 若 $\operatorname{rank}A=1$,由上题, $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}(b_1,b_2)$,从而

$$A^2=kA,\quad A^l=k^{l-1}A\quad(l\geqslant 2)$$

因为 $A\neq O$,由 $A^l=k^{l-1}A=O$,得 $k=0$,故 $A^2=kA=O$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵,证明:如果 $A^2=E$,那么

$$\operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-E)=n$$

证　由 $A^2 = E$,得

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E = O$$

利用本章习题 18 得 $\mathrm{rank}(A+E) + \mathrm{rank}(A-E) \leqslant n$. 又 $2E = (E+A) + (E-A)$, 利用本章习题 17,有

$$\begin{aligned} n = \mathrm{rank}(2E) &= \mathrm{rank}[(E+A) + (E-A)] \leqslant \\ &\mathrm{rank}(E+A) + \mathrm{rank}(E-A) = \\ &\mathrm{rank}(A+E) + \mathrm{rank}(A-E) \end{aligned}$$

故 $\mathrm{rank}(A+E) + \mathrm{rank}(A-E) = n$.

4. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵,且 $A^2 = A$. 证明:

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A-E) = n$$

证　由 $A^2 = A$,得

$$(A-E)A = O$$

利用本章习题 18 得 $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A-E) \leqslant n$. 利用本章习题 17,有

$$\begin{aligned} n = \mathrm{rank}E = \mathrm{rank}[(E-A) + A] \leqslant \mathrm{rank}(E-A) + \mathrm{rank}A = \\ \mathrm{rank}(A-E) + \mathrm{rank}A \end{aligned}$$

故 $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}(A-E) = n$.

5. 证明:

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵($n > 2$) .

证　利用　　$AA^* = A^*A = |A|E$

1) 当 $|A| \neq 0$ 时, $A^* = |A|A^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned} (A^*)^* = (|A|A^{-1})^* &= ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1} = \\ &|A|^n|A^{-1}|\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1} = \\ &|A|^n|A|^{-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A \end{aligned}$$

2) 当 $|A| = 0$ 时,由本章习题 27 知, $\mathrm{rank}A^* \leqslant 1$.

当 $n > 2$ 时, $\mathrm{rank}(A^*)^* = 0$, $(A^*)^* = O$, 从而 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

6. 设 A,B,C,D 都是 $n\times n$ 矩阵,且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$. 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

证　因为 $\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$,所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} =$$

$$|A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| =$$

$$|AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|$$

7. 设 A 是一 $n\times n$ 矩阵,且 $\operatorname{rank}A = r$. 证明:存在一 $n\times n$ 可逆矩阵 P 使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为零 .

证　由 $\operatorname{rank}A = r$ 知,存在可逆阵 P, Q,使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},\ \text{即}\quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}P^{-1}$$

记 $Q^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$,有

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix}$$

即 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为零 .

8. 1) 把矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ 表成形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

的矩阵的乘积;

2) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为一复数矩阵, $|A| = 1$,证明: A 可以表成形式为(1) 的矩阵的乘积 .

解　1) 对 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ 作行(或列) 的倍加变换(相当于左(或右) 乘形如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵),化为形如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵 .

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 + \frac{1}{a}c_1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + (1 - a^{-1})r_1}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + (1-a)c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}1&0\\1-a^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1-a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

注意到$\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-x&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-x\\0&1\end{pmatrix}$,故

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1-a^{-1}&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1-a&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\a^{-1}-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}$$

(注:此表示法不惟一)

2)
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{c}{a}r_1}\begin{pmatrix}a&b\\0&\dfrac{ad-cb}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-\frac{b}{a}c_1}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}1&\\-\dfrac{c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\dfrac{b}{a}\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$$

故
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-\dfrac{c}{a}&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\dfrac{b}{a}\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\\dfrac{c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\dfrac{b}{a}\\0&1\end{pmatrix}$$

再利用1),有

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\dfrac{c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a^{-1}-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\dfrac{b}{a}\\0&1\end{pmatrix}$$

9. 设 A 是一 $n\times n$ 矩阵, $|A|=1$,证明:A 可以表成 $P(i,j(k))$ 这一类初等矩阵的乘积.

证　用数学归纳法.当 $n=2$ 时,由上题2)知成立.

假设 $n-1$ 成立,下证对 n 成立.

1) 当 $a_{11}\neq 0$ 时,对 A 施以一系列行(列)倍加变换

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+\frac{1-a_{21}}{a_{11}}r_1}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\1&\cdots&a'_{2n}\\\cdots&&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(1-a_{11})r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}' \\ 1 & \cdots & a_{2n}' \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行(列) 倍加变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{def}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} > B$$

因而 $|A| = |B| = |B_1| = 1$,由归纳假设

$$B_1 = P_1(i_1, j_1(k_1))\cdots P_s(i_s, j_s(k_s))$$

于是

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_s \end{pmatrix} > Q_1 \cdots Q_s$$

其中 $Q_1, \cdots, Q_s$ 为 n 级倍加变换阵 .

由于 A 可经一系列行(列) 倍加变换化为 B,于是

$$A = R_1 \cdots R_t B T_1 \cdots T_r$$

其中 $R_i\ (i = 1, \cdots, t)$, $T_j\ (j = 1, \cdots, r)$ 均为 n 级倍加变换阵 . 故 $A = R_1 \cdots R_t Q_1 \cdots Q_s T_1 \cdots T_r$,得证 .

2) 当 $a_{11} = 0$ 时, A 的第一列至少有一个 $a_{i1} \neq 0$,不妨设 $a_{21} \neq 0$,则

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + \frac{(1 - a_{11})}{a_{21}} r_2} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_{1n}' \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

已化为情形 1) ,故情形 2) 也成立 .

10. 设 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{ij})_{nm}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(AB) \geqslant \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B - n$$

证　设 $\operatorname{rank}A = r_1$, $\operatorname{rank}B = r_2$, $\operatorname{rank}(AB) = r$,则存在可逆矩阵 P, Q,使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

记 $Q^{-1}B = \begin{pmatrix} B_{r_1 \times m} \\ B_{(n-r_1)\times m} \end{pmatrix}$,有 $r = \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(PAQQ^{-1}B)$,而

$$PAQQ^{-1}B = \begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{r_1 \times m} \\ B_{(n-r_1)\times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{r_1 \times m} \\ O \end{pmatrix}$$

于是,$\mathrm{rank}(B_{r_1\times m}) = \mathrm{rank}(AB) = r$,但 $\mathrm{rank}(Q^{-1}B) = r_2$,说明在 $B_{(n-r_1)\times m}$ 中线性无关的行数为 $r_2 - r$,而总行数为 $n - r_1$,故 $r_2 - r \leqslant n - r_1$,即 $r \geqslant r_1 + r_2 - n$.

11. 矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的,就称该矩阵为列(行)满秩的.设 A 是 $m\times r$ 矩阵,则 A 是列满秩的充分必要条件为存在 m 级可逆阵 P 使

$$A = P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$$

同样地,A 为行满秩的充分必要条件为存在 r 级可逆矩阵 Q 使

$$A = (E_m \quad O)Q$$

证　1) 设 $A = P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$,其中 P 可逆.则 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\left[P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}\right] = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} = r$,即 A 列满秩.

反之,设 A 列满秩,即 $\mathrm{rank}A = r$,那么 A 有某 r 级子式 $\Delta_r \neq 0$,不妨设由前 r 行构成(否则可通过初等行变换将其调至前 r 行),即

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

1°. $a_{11} \neq 0$ 时,(若 $a_{11} = 0$,可将 a_{21} 至 a_{r1} 中某非零元通过行变换调至 1 行 1 列位置)通过行变换,用 a_{11} 将 $a_{i1}\ (i = 2,\cdots,m)$ 化为 0

$$A \xrightarrow[i = 2,\cdots,m]{r_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}r_1} \begin{pmatrix} 1 & a_{12}' & \cdots & a_{1r}' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2r}' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{m2}' & \cdots & a_{mr}' \end{pmatrix}$$

2°. $a_{22}' \neq 0$ 时,(若 $a_{22}' = 0$,可将 a_{32}' 至 a_{r2}' 中某非零元通过行变换调至 2 行 2 列位置)

$$A \xrightarrow[i = 1,3,\cdots,m]{r_i - \frac{a_{i2}'}{a_{22}'}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}'' & \cdots & a_{1r}'' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & \cdots & a_{2r}'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \cdots & a_{3r}'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & a_{m3}'' & \cdots & a_{mr}'' \end{pmatrix}$$

将此过程共做 r 次,则 $A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$,即存在可逆阵 P,使

$$PA = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$$

2) 对 A' 利用 1) 即可 .

12. $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times m$ 的行满秩矩阵 Q,使 $A = PQ$.

证　由 $\mathrm{rank}A = r$,存在 $m\times m$ 可逆阵 P, $n\times n$ 可逆阵 Q,使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},\ \text{即}\quad A = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

记 $P^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$,其中 P_{11}, Q_{11} 均为 r 级方阵,则

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}(Q_{11}, Q_{12}) > FG$$

其中 $F = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}$ 为非奇异阵 P 的前 r 列构成的列满秩阵, $G = (Q_{11}, Q_{12})$ 为非奇异阵 Q 的前 r 行构成的行满秩阵 .

六、学习效果检测题及答案

(一) 检测题

1. 设 3 级方阵 A 按列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$,且 $|A| = 5$,又设 $B = (A_1 + 2A_2, 3A_1 + 4A_3, 5A_2)$,则 $|B| =$ ________ .

2. 设 A 是 n 级方阵, $|A| = 5$,则 $\left|A^* - \left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right| =$ ________ .

3. 设4级方阵 $A=(2\gamma_1,3\gamma_2,4\gamma_3,\alpha)$, $B=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\beta)$,其中$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\alpha$, β 均为四维列向量,且$|A|=8$, $|B|=1$,则 $|A-B|=$ ________ .

4. 设 A 是 n 级方阵,则 $||A^*|A|=$ ________ .

5. 设 A 是 m 级方阵, B 是 n 级方阵,则 $\left|-3\begin{pmatrix} A' & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\right|=$ ________ .

6. 已知 A,B,C 都是行列式值为 2 的 3 级方阵,则 $\begin{vmatrix} O & -A \\ \left(\frac{2}{3}B\right)^{-1} & C \end{vmatrix}=$ ________ .

7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,则$(E+B)^{-1}=$ ________ .

8. 设方阵 A满足 $A^3-A^2+3A-2E=O$,则 $A^{-1}=$ ________ ,$(E-A)^{-1}=$ ________ .

9. 如 $A^3=O$,则$(E+A+A^2)^{-1}=$ ________ .

10. 设 A 为 4 级方阵,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且$(2E-C^{-1}B)A'=C^{-1}$,求 A.

11. 设 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,则$(A^*)^{-1}=$ ________ .

12. 证明:如果 $E-AB$ 可逆,则 $E-BA$ 也可逆,并且

$$(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A$$

13. 设有 n 级方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $B=E+\lambda A$,其中λ 为一个数 .

(1) 问λ 为何值时,有 $B^2=B$成立;

(2) 证明对(1) 中所得的非零数λ, B 不可逆 .

14. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,求 A^n.

15. 设 $\alpha=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$, $\beta=(1,2,3,4)$, $A=\alpha'\beta$, 则 $A^n=$ ________ .

16. 设 A 为方阵,且 $A^2=A$,证明: $(A+E)^k=E+(2^k-1)A$.

17. 设 A 为 n 级非奇异矩阵,则 $(A^*)^*=$ ________ .

(A) $|A|^{n-1}A$;　(B) $|A|^{n+1}A$;　(C) $|A|^{n-2}A$;　(D) $|A|^{n+2}A$.

18. 若 A, A^* 均为 n级非零矩阵,且 $AA^*=O$,则必有 $\operatorname{rank}A^*=$ ________ .

(A) 1;　(B) 2;　(C) $n-1$;　(D) n.

19. 设 3 级方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$, 且 $A=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/7\end{pmatrix}$,求 B.

20. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,且矩阵 X满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$,求 X.

21. 已知 A, B为3 级矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 E是3 级单位矩阵 .

(1) 证明: 矩阵 $A-2E$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 A.

22. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\2a_{21}&2a_{23}&2a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $B=$ ________ .

(A) P_1P_2A;　(B) AP_2P_1;　(C) P_1AP_2;　(D) P_2AP_1.

23. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}+a_{32}\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,则 $B=$ ________.

(A) P_2AP_3;　(B) AP_1P_3;　(C) AP_3P_1;　(D) AP_2P_3.

24. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41}\end{pmatrix}$, $P_1=$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,其中 A 可逆,则 $B^{-1}=$ ________.

(A) $A^{-1}P_1P_2$;　(B) $P_1A^{-1}P_2$;　(C) $P_1P_2A^{-1}$;　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

(二) 检测题答案

1. 应填: -100.

$$|B| = |(A_1,3A_1+4A_3,5A_2)| + |(2A_2,3A_1+4A_3,5A_2)| =$$

$$|(A_1,3A_1,5A_2)| + |(A_1,4A_3,5A_2)| + 0 =$$

$$0 + 20|(A_1,A_3,A_2)| = -20|A| = -100$$

2. 应填: $(-1)^n5^{n-1}$.

$$\left|A^* - \left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right| = \left||A|A^{-1} - 10A^{-1}\right| = |-5A^{-1}| =$$

$$(-5)^n|A^{-1}| = \frac{(-5)^n}{5} = (-1)^n5^{n-1}$$

3. 应填: -4.

$$|A-B| = |(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\alpha-\beta)| =$$

$$|(\gamma_1, 2\gamma_2, 3\gamma_3, \alpha)| + |(\gamma_1, 2\gamma_2, 3\gamma_3, -\beta)| =$$

$$\frac{6}{24}|(2\gamma_1, 3\gamma_2, 4\gamma_3, \alpha)| - 6|(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta)| =$$

$$\frac{1}{4}|A| - 6|B| = -4$$

4. 应填: $|A|^{n^2-n+1}$.

因为 $AA^* = |A|E$,所以 $|A||A^*| = |A|^n$,即 $|A^*| = |A|^{n-1}$,从而
$||A^*|A| = |A^*|^n|A| = (|A|^{n-1})^n|A| = |A|^{n^2-n+1}$

5. 应填: $(-3)^{m+n}|A||B|^{-1}$.

6. 应填: $\frac{27}{8}$.

原式 $= (-1)^{3\times 3}|-A|\left|\left(\frac{2}{3}B\right)^{-1}\right| = -(-1)^3|A|\left|\frac{3}{2}B^{-1}\right| =$

$$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3|B|^{-1} = \frac{27}{8}$$

7. 应填: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

由
$$B + E = (E + A)^{-1}(E - A) + E =$$
$$(E + A)^{-1}[(E - A) + (E + A)] = 2(E + A)^{-1}$$

得
$$(B + E)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A)$$

8. 应填: $\frac{1}{2}(A^2 - A + 3E)$ 和 $A^2 + 3E$.

9. 应填: $E - A$.

10. 由 $(2E - C^{-1}B)A' = C^{-1}$,整理得 $C(2E - C^{-1}B)A' = E$,即 $(2C - B)A' = E$,于是

$$A = [(2C - B)^{-1}]' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right]' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

11. 应填: $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

由 $AA^* = |A|E$ 得 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$,而

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

故
$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. 因为

$$\begin{aligned}(E - BA)[E + B(E - AB)^{-1}A] =& \\ & E + B(E - AB)^{-1}A - BA - BAB(E - AB)^{-1}A = \\ & E + B(E - AB)(E - AB)^{-1}A - BA = \\ & E + BA - BA = E\end{aligned}$$

故 $E - BA$ 可逆,且 $(E - BA)^{-1} = E + B(E - AB)^{-1}A$.

13. (1) $B^2 = (E + \lambda A)(E + \lambda A) = E + 2\lambda A + \lambda^2 A^2$,可见若 $B^2 = B$,便有 $E + 2\lambda A + \lambda^2 A^2 = E + \lambda A$,即 $\lambda^2 A^2 + \lambda A = O$. 但

$$\lambda^2 A^2 + \lambda A = \lambda^2 \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \cdots & & \cdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\lambda^2 + \lambda & \cdots & n\lambda^2 + \lambda \\ \cdots & & \cdots \\ n\lambda^2 + \lambda & \cdots & n\lambda^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

从而 $n\lambda^2 + \lambda = 0$,即得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -\frac{1}{n}$.

(2) 当 $\lambda = -\frac{1}{n}$ 时,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1 - \frac{1}{n} \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots \\ c_1 + c_n}]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{vmatrix} = 0$$

故 B 不可逆.

14. A 是分块对角矩阵, $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 于是 $A^n = \begin{pmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{pmatrix}$. 下面求 B^n 和 C^n.

由于 $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2)$, 所以 $B^n = 4^{n-1} B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{n-1} & 4^n \\ 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}$.

由于 $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E + H$, 其中 $H = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $H^2 = O$, $(2E)H = H(2E)$, 从而

$$C^n = (2E + H)^n = 2^n E + n 2^{n-1} H = \begin{pmatrix} 2^n & 4n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

故
$$B^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{n-1} & 4^n & 0 & 0 \\ 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 4n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

15. $A^n = 4^{n-1} A = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

16. 采用数学归纳法证明.

17. 应填: (C).

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1} =$$

$$|A|^n |A^{-1}| \frac{1}{|A|} A = |A|^{n-2} A$$

18. 应填:(A).

因为 A, A^* 非零,从而 $\mathrm{rank}A \geqslant 1, \mathrm{rank}A^* \geqslant 1$. 由 $AA^* = O$ 知 $|A| = 0$(否则可推出 $A^* = O$ 矛盾),从而 $\mathrm{rank}A < n$. 若 $\mathrm{rank}A < n-1$,则 $\mathrm{rank}A^* = 0$,即 $A^* = O$ 矛盾;若 $\mathrm{rank}A = n-1$,则 $\mathrm{rank}A^* = 1$,故应填(A).

19. 由 $A^{-1}BA = 6A + BA$,得 $(A^{-1} - E)BA = 6A$,于是

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$$

又 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,从而 $A^{-1} - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $(A^{-1} - E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$,

故 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. 由题设关系式得 $AX(A-B) + BX(B-A) = E$,即 $(A-B)X(A-B) = E$.

由于 $|A-B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,所以 $A-B$ 可逆,且 $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,故

$$X = [(A-B)^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. (1) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 得 $AB - 2B - 4A = O$,从而

$$(A-2E)(B-4E) = 8E, \quad 即 \quad (A-2E)\cdot \frac{1}{8}(B-4E) = E$$

故 $A - 2E$ 可逆,且 $(A-2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B-4E)$.

(2) 由 $AB - 2B - 4A = O$ 得 $A(B-4E) = 2B$,于是

$$A = 2B(B - 4E)^{-1} = 2B\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

22. 应填:(D). 因为 $A \xrightarrow[c_2 \backslash c_3]{r_2 \times 2} B$,所以 $B = P_2 A P_1$.

23. 应填:(B). 因为 $A \xrightarrow[c_3 + c_2]{c_1 \backslash c_3} B$ 或 $A \xrightarrow[c_1 \backslash c_3]{c_1 + c_2} B$,故应填(B).

24. 应填:(C). 因为 $P_1 = P(1,4)$, $P_2 = P(2,3)$, $A \xrightarrow[c_2 \backslash c_3]{c_1 \backslash c_4} B$或 $A \xrightarrow[c_1 \backslash c_4]{c_2 \backslash c_3} B$,从而 $B = AP_1 P_2$ 或$B = AP_2 P_1$. 注意到 $P_1^{-1} = P_1$, $P_2^{-1} = P_2$,故有 $B^{-1} = P_2 P_1 A^{-1}$ 或 $B = P_1 P_2 A^{-1}$. 故选(C).