第四章 矩阵

§1 矩阵的简单内容

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$是一个 $s\times n$ 矩阵,之前关于矩阵的内容有

(1) 行指标和列指标. (2) 阶梯形矩阵, (3) 矩阵的初等行变换和初等列变换.
(4) 方阵. (5) 线性方程组的系数矩阵,增广矩阵, (6) 矩阵的行列向量组. (7) 矩阵的秩

§2 矩阵的运算

取定数域 P,

1. 矩阵的**相等**:设 $A=(a_{ij})_{s\times n},B=(b_{ij})_{t\times m}$,则 $A=B\Leftrightarrow s=t,n=m,a_{ij}=b_{ij},\forall i,j$.

2. **加法**(和) 设 $A=(a_{ij})_{s\times n},B=(b_{ij})_{s\times n}$ 是两个同型矩阵,则定义矩阵的和为 $A+B=C=(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}$.
矩阵的加法就是元素的加法.

运算律: (1) 交换律: $A+B=B+A$. (2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 零矩阵: $(0)_{s\times n}=0$. 则 $A+0=0+A=A$.

(4) 负矩阵:设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$,定义 $-A=(-a_{ij})_{s\times n}$,称为矩阵的负矩阵. $A+(-A)=0$.

(5) 减法: $A-B=A+(-B)$, $A-B=C=(a_{ij}-b_{ij})_{s\times n}$.

性质:矩阵和的秩 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

设 A,B 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, $A+B$ 的列向量组为 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$, 分别取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的一个极大无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$, $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t}$, 由于 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$, $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t}$ 线性表出,故

$$r(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\le r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t})\le r+t.$$

3. **乘法**:取 $A=(a_{ij})_{s\times n},B=(b_{ij})_{n\times m}$,则定义 $AB=C=(c_{ij})_{s\times m}$,其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sm} \end{pmatrix}$$

例子:

1) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}$,则 $AB=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&2\\1&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&2&7\\7&1&4\end{pmatrix}$,

同时对这个例子来说,不能反过来乘.

2) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\3&1\end{pmatrix}$,则 $AB=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\10&2\end{pmatrix}$,

$$BA=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3&9\\-1&2&5\\2&1&0\end{pmatrix}$$

3) 取 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,则 $\alpha\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_ib_i$

$$\beta\alpha=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}.$$

4) 取线性方程组 $Ax=\beta$, $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\beta$.乘积的来源.变量替换中的.

设有 $\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2\\x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2\end{cases}$, $\begin{cases}y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2+b_{13}z_3\\y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2+b_{23}z_3\end{cases}$,代入

$$x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2=a_{11}(b_{11}z_1+b_{12}z_2+b_{13}z_3)+a_{12}(b_{21}z_1+b_{22}z_2+b_{23}z_3)$$

$$=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2+(a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23})z_3$$

$$x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2=a_{21}(b_{11}z_1+b_{12}z_2+b_{13}z_3)+a_{22}(b_{21}z_1+b_{22}z_2+b_{23}z_3)$$

$$=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1+(a_{21}b_{12}++a_{22}b_{22})z_2+(a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23})z_3$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

5).设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\leftarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\leftarrow\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_l$,由传递性可得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\leftarrow\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_l$,看其系

数.由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \leftarrow \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.假设$\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}a_{ij}\beta_j, i=1,2,\cdots,s$,则

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1t}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2t}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_t\end{pmatrix}$$,或者$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{s1}\\ a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{s2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{1t}&a_{2t}&\cdots&a_{st}\end{pmatrix}$

由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t \leftarrow \gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_l$,假设$\beta_j=\sum_{k=1}^{l}b_{jk}\gamma_k, j=1,2,\cdots,t$,则

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1l}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2l}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{t1}&b_{t2}&\cdots&b_{tl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_l\end{pmatrix}$$.或者$\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=\left(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_l\right)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{21}&\cdots&b_{t1}\\ b_{12}&b_{22}&\cdots&b_{t2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{1l}&b_{2l}&\cdots&b_{tl}\end{pmatrix}$

则$\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}a_{ij}\sum_{k=1}^{l}b_{jk}\gamma_k=\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{l}a_{ij}b_{jk}\gamma_k=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{t}a_{ij}b_{jk}\gamma_k, i=1,2,\cdots,s$,

则$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1t}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2t}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1l}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2l}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{t1}&b_{t2}&\cdots&b_{tl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_l\end{pmatrix}$.

性质:结合律:$(AB)C=A(BC)$,设$A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{jk})_{n\times m}, C=(c_{kl})_{m\times t}$.

考查$(AB)C$与$A(BC)$两边(i,l)位置上的元素.

$$AB=(x_{ik})_{s\times m}=(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})_{s\times m}, BC=(y_{jl})_{s\times m}=(\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl})_{n\times t}.$$

则$(AB)C=(z_{il})_{s\times t}=(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl})_{s\times m}, A(BC)=(z_{il})_{s\times t}=(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl})_{n\times t}$.

从而$(AB)C=A(BC)$.

但是对交换律一般不成立.即$AB\neq BA$.反映在三个方面

(1) $A_{s\times n}, B_{n\times m}$,则$(AB)_{s\times m}$,但是$BA$无意义.

(2) $A_{s\times n}, B_{n\times s}$,则$(AB)_{s\times s}$,但是$(BA)_{n\times n}$. (3) $A_{n\times n}, B_{n\times n}$,但是$AB\neq BA$.

例子: $A=\begin{pmatrix}1&1\\ -1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\ -1&1\end{pmatrix}$,此时$AB=\begin{pmatrix}1&1\\ -1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\ -1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\ 0&0\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$.

例子: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$,则

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11\\11&25\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&14\\14&20\end{pmatrix}$.

消去律一般也不成立.即 $AB=AC, A\neq 0$,但是 $B\neq C$,或者 $AB=0\nRightarrow A=0$ 或者 $B=0$.

或者 $A\neq 0, B\neq 0$,但是可以 $AB=0$.

问题:给出一个具体的矩阵,求与这个矩阵可交换的矩阵.

例子:设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,求所有与 A 可交换的矩阵.

解:设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,满足 $AB=BA$,即 $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,

即 $\begin{pmatrix}a+c&b+d\\-a-c&-b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b&a-b\\c-d&c-d\end{pmatrix}$.

得到 $\begin{cases}a+c=a-b\\b+d=a-b\\-a-c=c-d\\-b-d=c-d\end{cases}$,即 $\begin{cases}a-2b-d=0\\a+2c-d=0\\b+c=0\end{cases}$,求得 $\begin{cases}d=a-2b\\ \\c=-b\end{cases}$,从而 $B=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a-2b\end{pmatrix}$.

4. **定义**:主对角线上的元素是 1,其余元素为零的 n 阶方阵 $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 称为单位矩阵,

记为 E 或者 I ,特别的记 E_n 或 I_n 表示 n 阶方阵.

性质: $A_{sn}E_s=A_{sn}=E_sA_{sn}$, $A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA$.

定义方阵的正方幂: $A^2=AA, A^k=A^{k-1}A$.特别的 $A^0=E$.从而有 $A^kA^l=A^{k+l}, (A^k)^l=A^{kl}$.

5. **数量乘积**:取 $k\in P$,取 $A=(a_{ij})_{sn}$,定义 $kA=(ka_{ij})_{sn}$,称为数 k 与矩阵 A 的数量乘积.

性质: $(k+l)A=kA+lA$, $k(lA)=(kl)A$, $1A=A$, $k(A+B)=kA+kB$, $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

特别的: kE 称为数量矩阵. $kA=(kE)A=A(kE)$,其中 A 是一个 n 阶方阵.

6. **转置**: 行列互换.设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$,定义 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$称为矩阵 A 的转置.

一个 $s\times n$ 矩阵的转置就是一个 $n\times s$ 矩阵.

性质: $(A^T)^T=A$, $(A+B)^T=A^T+B^T$, $(AB)^T=B^TA^T$. $(kA)^T=kA^T$.

特别的,设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,则 $\alpha^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. 证明 $(AB)^T=B^TA^T$:

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$, $(AB)^T$ 的 (i,j) 位置元素为 AB 的 (j,i) 位置元素.这个数为 $\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$.

B^TA^T 的 (i,j) 位置元素为 B^T 的第 i 行与 A^T 的第 j 列对应相乘的结果.即 B 的第 i 列与 A 的第 j 行对应相乘,即 $\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}$.

例子: $A=(1,2,3)$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,则 $A^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$AB=(3,14,3)$, $(AB)^T=\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^TA^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$.

§3 矩阵乘积的行列式与秩

考虑两个问题. (1) $|AB|$, (2) $r(AB)$.

1.乘积的行列式.

定理:设 A,B 是两个 n 阶方阵,则 $|AB|=|A||B|$.

证明:设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

首先有 $D=|A||B|$. 其次

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn} \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=|AB|(-1)^{n^2+n}=|AB|.$$

推论:设 n 阶方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,则 $|A_1A_2\cdots A_s|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

2. **非退化矩阵**.

定义:设 A 是一 n 阶方阵.若 $|A|\neq 0$,则称 A 是一个非退化矩阵,否则称为退化的.

$|A|\neq 0 \Leftrightarrow r(A)=n$,满秩.

推论:设 A,B 是两个 n 阶方阵,则 AB 退化当且仅当 A,B 至少一个退化.

注: $|A|=0 \Leftarrow A=0$,但是 $|A|=0 \nRightarrow A=0$,有 $|A|=0 \Rightarrow r(A)<n$.

3.**秩.**

定理:设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times s$ 矩阵,则 $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$.

需要的结论: (1) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可有 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

(2) 取矩阵的行向量组和列向量组,

证明:设 $AB=C$,取 C 的列向量组, $C=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_s)$,则

$$C=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}.$$

取 C 的行向量组, $C=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$,则 $C=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$,

上面两式表明:
矩阵乘积的列向量组可有第一个矩阵的列向量组线性表出,
矩阵乘积的行向量组可有第二个矩阵的行向量组线性表出,

故 $r(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, $r(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$.

即 $r(AB)\le r(A), r(AB)\le r(B)$.

推论: $r(A_1A_2\cdots A_s)\le \min\{r(A_1), r(A_2),\cdots, r(A_s)\}$.

补充: (1) 设矩阵 $A_{s\times n}, B_{n\times s}$,则 $|AB|=\begin{cases} 0 & s<n \\ |A||B| & s=n \\ * & s>n \end{cases}$.

§4 矩阵的逆

1.可逆矩阵.

定义:设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一 $n\times n$ 矩阵,若存在 n 阶方阵 B ,使得 $AB=BA=E$.则称 A 是可逆的. B 称为矩阵 A 的逆矩阵.

注: (1) 只有方阵才有可逆和不可逆之说.

(2) 若矩阵可逆,则唯一.若 $AB_1=B_1A=E, AB_2=B_2A=E,$ 则 $B_1=B_1E=B_1AB_2=B_2$.

(3) 若矩阵 A 可逆,则行列式非零.

2. 矩阵可逆的条件.

定义:设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一 $n\times n$ 矩阵, A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式,则称 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 是 A 的伴随矩阵.我们有

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|E.$$

故若 $|A|\neq 0$,则由 $AA^*=|A|E$,可得 $A\dfrac{A^*}{|A|}=E$,从而 A 可逆,其逆为 $\dfrac{A^*}{|A|}$.

定理: n 阶方阵 A 可逆当且仅当行列式 $|A|\neq 0$,即 A 非退化,且其逆为 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$.

3. 求逆矩阵.

例子:设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $|A|=-2$,则 A 可逆. $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

例子: 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $|A|=1$, A 可逆, $A^{-1}=?$.

4. 性质:

(1) 若 A 可逆,则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

(2) 若 A,B 都可逆,则 A^T, AB 都可逆,且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$, $ABB^{-1}A^{-1}=E$.

(3) $(A^{-1})^*,(A^*)^{-1},(kA)^*(k\neq 0),(A^*)^*,\left|A^*\right|$.

1). $A^{-1}(A^{-1})^*=|A|^{-1}E$,则$(A^{-1})^*=|A|^{-1}A=\dfrac{A}{|A|}$.

2). $AA^*=|A|E$,则$AA^*(A^*)^{-1}=|A|(A^*)^{-1}$,即$A=|A|(A^*)^{-1}$,则$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$.故$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

3) $(kA)(kA)^*=|kA|E$,$(kA)(kA)^*=k^n|A|E$,则$A(kA)^*=k^{n-1}|A|E$,若A可逆,$(kA)^*=k^{n-1}|A|A^{-1}$.

4) $AA^*=|A|E$,则$|A|\left|A^*\right|=\left||A|E\right|=|A|^n$.

若A可逆,则$|A|\neq 0$,则$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$.

若A不可逆,$AA^*=0$,来证明A^*也不可逆.即$\left|A^*\right|=0$.假若A^*可逆,由$AA^*=0$,得$A=AA^*(A^*)^{-1}=0$.

若$A\neq 0$,则矛盾; 若$A=0$,则自然有$A^*=0$.故综合可得$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$.

5) $A^*(A^*)^*=\left|A^*\right|E=|A|^{n-1}E$,则$(A^*)^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}=|A|^{n-2}A$.

5. 与克拉默法则的关系.

对非齐次线性方程组$Ax=\beta$,其中A是一个n阶方阵,

若$|A|\neq 0$,则方程组$Ax=\beta$有唯一解,解为$x=(\dfrac{|A_1|}{|A|},\dfrac{|A_2|}{|A|},\cdots,\dfrac{|A_n|}{|A|})^T$.

若$|A|\neq 0$, $Ax=\beta$左右两边同时左乘A^{-1},则有$x=A^{-1}\beta$.

$$x=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\beta=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|A_1|\\|A_2|\\\vdots\\|A_n|\end{pmatrix}.$$

6.**定理:**设$A_{s\times n},P_{s\times s},Q_{n\times n}$, P,Q可逆,则$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$.即矩阵乘可逆矩阵,秩不变.

证明: $r(PA)\leq r(A)=r(P^{-1}PA)\leq r(PA)$,则$r(PA)=r(A)$.

$r(AQ)\leq r(A)=r(AQQ^{-1})\leq r(AQ)$,则$r(AQ)=r(A)$.

§5 矩阵的分块

设 $s\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.这就是行分块和列分块.

1.矩阵的分块.

(1) 例子: $A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline 1&2&1&2\\3&4&3&4\end{array}\right)_{4\times4}=\begin{pmatrix}E&0\\A_1&A_1\end{pmatrix}_{2\times2}$,$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&1&2\\3&4&3&4\end{pmatrix}_{4\times4}=\begin{pmatrix}1&0\\ \alpha&A_2\end{pmatrix}_{2\times2}$

一般来讲,设 $s\times n$ 矩阵 A,在行,列中插入一些线段,可将矩阵分成许多块,这种分法称为矩阵的分块,分块后的矩阵称为一个分块矩阵.

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1l}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2l}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\A_{t1}&A_{t2}&\cdots&A_{tl}\end{pmatrix}\begin{matrix}s_1\\s_2\\ \vdots\\s_t\end{matrix}\\ \begin{matrix}n_1&n_2&\cdots&n_{1l}\end{matrix}\end{array}$$,其中 A_{ij} 是一个 $s_i\times n_j$ 矩阵块,

几种特殊情况:

(1) $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.行向量组与列向量组. $Ax=0$,有 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$.

(2) $A=(a_{ij})_{sn}$. (3) $A=A$.整体, $AB=0$, $A(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)=0$.

2. **分块矩阵的运算.**

(1) **加法:**取 $s\times n$ 矩阵 A,B,分块为 $A=(A_{ij})_{t\times l},B=(B_{ij})_{t\times l}$.要求 A 与 B 的分块方法相同,则定义

$$A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{t\times l}.$$

例子:设 $A=\left(\begin{array}{cc:ccc}1&2&3&4&5\\6&2&3&4&5\\0&0&1&1&1\end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc:ccc}1&1&1&0&0\\1&1&0&2&0\\0&0&2&2&2\end{array}\right)$,

(2) **乘法:**设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\3&4&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\2&1\\2&1\end{pmatrix}$.则 $AB=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\3&4&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\2&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&9\\13&17\end{pmatrix}$

若分块,则 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&0\\3&4&0&3\end{array}\right)=(A_1,A_2)$, $B=\left(\begin{array}{cc}1&2\\1&2\\\hline 2&1\\2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$. $AB=(A_1,A_2)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=A_1B_1+A_2B_2$.

一般来讲,设 A_{sn},B_{nm},并设 $A=\begin{array}{c} \\ s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}n_1&n_2&\cdots&n_l\end{array}\\ \begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1l}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{t1}&A_{t2}&\cdots&A_{tl}\end{pmatrix}\end{array}$, $B=\begin{array}{c} \\ n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_l\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}m_1&m_2&\cdots&m_r\end{array}\\ \begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1r}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{l1}&B_{l2}&\cdots&B_{lr}\end{pmatrix}\end{array}$.则

$AB=(A_{ij})_{tl}(B_{jk})_{lr}=(C_{ik})_{tr}$,其中 $C_{ik}=\sum_{j=1}^{l}A_{ij}B_{jk}$.

(3) 数量乘积:设 $A=(A_{ij})_{tl}$,则 $kA=(kA_{ij})_{tl}$.

(4) 则 $A^T=\begin{array}{c} \\ n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}s_1&s_2&\cdots&s_l\end{array}\\ \begin{pmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T&\cdots&A_{t1}^T\\A_{12}^T&A_{22}^T&\cdots&A_{t2}^T\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1l}^T&A_{2l}^T&\cdots&A_{tl}^T\end{pmatrix}\end{array}$. 简单的 $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A^T&C^T\\B^T&D^T\end{pmatrix}$.

3. 应用

(1) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$,设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,则

$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$.

(2) $r(AB)\le r(A),r(B)$,

$$C=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{ms}\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix}$$

(3) 设 $D=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1n}&b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&\cdots&c_{mn}&b_{m1}&\cdots&b_{mm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}$. $|D|=|A||B|$.若 A,B 可逆,则 D 可逆,求 D^{-1}.

$DD^{-1}=D^{-1}D=E$.对 D^{-1} 分块,设 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, $D=\begin{array}{c|cc} & n & m \\ n & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$}} \\ m & & \end{array}$,则 $D^{-1}=\begin{array}{c|cc} & n & m \\ n & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$}} \\ m & & \end{array}$.

$$DD^{-1}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+BX_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} AX_{11}=E \\ AX_{12}=0 \\ CX_{11}+BX_{21}=0 \\ CX_{12}+BX_{22}=E \end{cases}\text{.则}\begin{cases} X_{11}=A^{-1} \\ X_{12}=0 \\ X_{21}=-B^{-1}CA^{-1} \\ X_{22}=B^{-1} \end{cases}\text{,则 }D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别的. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

准对角阵: $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$.若每个 A_i 都可逆,则 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$.则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s+B_s \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

注: (1) 若 $AXB=C$,其中 A,B,C 都是方阵,且 A,B 可逆,则 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

(2) 对 $D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 能否运用求伴随矩阵的方法?

§6 初等矩阵

1. 初等变换与初等矩阵

1) 初等变换:设矩阵 A.有三种初等行变换.

(1) 某一行乘以非零的常数倍数.

(2) 某一行的倍数加到另一行上.

(3) 互换两行的位置.

定义:对单位矩阵进行一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵.初等矩阵有三类.

第 i 行乘以 c 倍数: $E \to \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = P(i(c))$.

第 j 行的 k 倍加到第 i 行上: $E \to \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = P(i, j(k))$.

互换 i, j 两行: $E \to \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = P(i, j)$.

同样,有列的初等变换所得到的矩阵.

第 i 列乘以 c 倍数: $E \to \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = P(i(c))$.

第 i 列的 k 倍加到第 j 列上: $E \to \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = P(i, j(k))$.

互换 i, j 两列: $E \to \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = P(i, j)$.

引理: 设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵,对矩阵 A 做一次初等行(列)变换,就相当于在 A 的左(右)边乘上相应的 $s \times s$ ($n \times n$)初等矩阵.

例子来解释一下:

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1(2)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_1 \text{:则 } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2+1(2)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_2 \text{:则 } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2+1(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A_3 \text{:则 } A_3 = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2,3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A_4 \text{:则 } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A.$$

证明:行:对矩阵 A 行分块.设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$,

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}k\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=A_1=\begin{pmatrix}k&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_1+k\alpha_2\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=A_1=\begin{pmatrix}1&k&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}=A_1=\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}.$$

例子: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&0&2\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{1(2)}\begin{pmatrix}2&4&6\\3&2&1\\2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{1+3(-1)}\begin{pmatrix}0&4&4\\3&2&1\\2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[3+2(-1)]{}\begin{pmatrix}0&4&0\\3&2&-1\\2&0&2\end{pmatrix}=B$$

则 $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

注:初等矩阵都是可逆的.

$|P(i(c))|=c$, $|P(j,i(c))|=1$, $|P(j,i)|=-1$,且

$$P(j,i(c))^{-1}=P(j,i(-c)),P(j,i)^{-1}=P(j,i),P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c})).$$

2. 等价标准形.

(1)矩阵的等价:给出两个同型矩阵 A,B,若 A 可经一系列初等变换化为 B,则称矩阵 B 与 A 等价.

矩阵的等价是一种等价关系:
反身性.对称性.传递性.
之前知道,矩阵可经初等行变换化为阶梯形,使得前 r 行为非零行向量.再经过合适的列变换,可使得前 r 个主对角线位置的数非零.

$$A\rightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

写成分块矩阵的形式就是: $A\rightarrow\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

定理:任意一个 $s\times n$ 矩阵都与一个形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵等价,称为矩阵的等价标准形.其中对角线上的元素1的个数即为矩阵的秩.

例子: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 结论:

结论 1: A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ 存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l,Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$,使得 $P_1P_2\cdots P_lAQ_1Q_2\cdots Q_s=B$.

从而 $A=(P_1P_2\cdots P_l)^{-1}B(Q_1Q_2\cdots Q_s)^{-1}=P_l^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}BQ_s^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$.

结论 2: n 阶方阵 A 可逆,则等价标准形是 E,即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_l,Q_1,\cdots,Q_s$,使得

$P_1P_2\cdots P_lAQ_1Q_2\cdots Q_s=E$,则 $A=P_l^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}Q_s^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$,

结论 3: n 阶方阵 A 可逆, A 可写成一些初等矩阵的乘积 $A=P_1P_2\cdots P_s$.

结论 4: 两个 $s\times n$ 矩阵 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆 s 阶方阵 P 和可逆 n 阶方阵 Q,使得 $PAQ=B$.

结论 4: 对任一 $s\times n$ 阵 A,存在 s 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q,使得 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中 $r=r(A)$

结论 5: 可逆阵可经过一些初等行(列) 变换变成单位阵.

看可逆阵 A, $A=P_1P_2\cdots P_s$,则 $P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}A=E$,由于初等矩阵的逆仍然为初等矩阵,此式表明对 A

进行初等行变换即可化为单位阵.

4. 求矩阵的逆.

现在对 A 进行初等行变换可化为单位阵,为了简单,设这个过程为 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E$.则

$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} E$,即 $P_s \cdots P_2 P_1 E = A^{-1}$,

比较两个式子: $P_s \cdots P_2 P_1 A = E$ 与 $P_s \cdots P_2 P_1 E = A^{-1}$.

可以看出:对 A 进行初等行变换化为单位阵的时候,实行了一些初等行变换,而对单位阵实行同样的初等行变换,恰能化为矩阵的逆.也就是说对 A 和 E 实行同样的初等行变换,把 A 化为单位阵的时候, E 化为的就是矩阵 A 的逆.用式子表示就是:

$P_s \cdots P_2 P_1 (A, E) = (P_s \cdots P_2 P_1 A, P_s \cdots P_2 P_1 E) = (E, A^{-1})$.

例子: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 6$,矩阵可逆,求逆矩阵.

(1) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^* = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2) $(A, E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

例子: 例子: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,可逆,求逆.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1&1&1&\cdots&1&1&1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&1&1&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&1&1&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1&0&0&\cdots&0&0&1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$.

例：设 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\\1&0\end{pmatrix}$,求 X .

解：$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&-2\\0&0&-2&-1&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&-2\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-2\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$,从而 $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-2\\0&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 则 $X=A^{-1}B$.

$P(A,B)=(PA,PEB)=(E,A^{-1}B)$

$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&1\\1&2&1&-2&-1\\0&1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&3&0&1\\0&0&-2&-4&-2\\0&1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&3&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&2&1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-6&-2\\0&1&0&1&0\\0&0&1&2&1\end{array}\right)$,则 $X=\begin{pmatrix}-6&-2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$

§7 分块乘法的初等变换及应用举例

分块矩阵的初等变换,设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$.

1. 分块矩阵的初等变换与初等分块矩阵

取 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$,三种初等变换:

(1) 某一行(左)乘一个非零的方阵 P. (某一列(右)乘一个非零的方阵 P)
(2) 某一行(左)乘一个矩阵 P 加到另一行上.(某一列(右)乘一个矩阵 P 加到另一列上)
(3) 互换两行的位置.(互换两列的位置)

对分块单位阵进行一次初等行变换所得的分块矩阵称为初等分块矩阵.

取 $n+m$ 阶单位阵,分块为 $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}=E$.

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow{1(P)}\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow{2(P)}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow[1(P)]{}\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow[2(P)]{}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow{2+1(P)}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ P_{mn} & E_m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow{1+2(P)}\begin{pmatrix} E_n & P_{nm} \\ 0 & E_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow[2+1(P)]{}\begin{pmatrix} E_n & P_{nm} \\ 0 & E_m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\xrightarrow[1+2(P)]{}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ P_{mn} & E_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的初等变换和初等分块矩阵之间的关系:同矩阵的.
对分块矩阵进行一次初等行变换,所得的矩阵就是原来的矩阵左乘相应的初等分块矩阵.
对分块矩阵进行一次初等列变换,所得的矩阵就是原来的矩阵右乘相应的初等分块矩阵.

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\xrightarrow{P}\begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\xrightarrow[P]{}\begin{pmatrix} A & BP \\ C & DP \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\xrightarrow{2+1(P)}\begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ P & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$$T=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\xrightarrow{1+2P}\begin{pmatrix}A+BP&B\\C+DP&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\P&E\end{pmatrix}.$$

$$T=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}.$$

2.应用举例:

例 1. 设$T=\begin{pmatrix}A&0\\C&D\end{pmatrix}$,其中$A,D$可逆,求$T^{-1}$.

解:之前已经得到结论: T可逆当且仅当A,D都可逆,且$T^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\-D^{-1}CA^{-1}&D^{-1}\end{pmatrix}$.

$$T=\begin{pmatrix}A&0\\C&D\end{pmatrix}\xrightarrow{2+1(-CA^{-1})}\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix}\xrightarrow{2(D^{-1}),1(A^{-1})}\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}.$$

从而$T^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\-CA^{-1}&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\-D^{-1}CA^{-1}&D^{-1}\end{pmatrix}$.

例 2:设$T_1=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$,设$T_1$可逆,$D$可逆,证明$A-BD^{-1}C$可逆,并求$T_1^{-1}$.

证明: $T_1=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\xrightarrow{1+2(-BD^{-1})}\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C&0\\C&D\end{pmatrix}\xrightarrow[1+2(-D^{-1}C)]{}\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C&0\\0&D\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}E&-BD^{-1}\\0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\-D^{-1}C&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C&0\\0&D\end{pmatrix}.$$

由于T_1可逆,则$A-BD^{-1}C$可逆,首先

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&-BD^{-1}\\0&E\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C&0\\0&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\-D^{-1}C&E\end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}E&0\\-D^{-1}C&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C&0\\0&D\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E&-BD^{-1}\\0&E\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}E&0\\-D^{-1}C&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(A-BD^{-1}C)^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-BD^{-1}\\0&E\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(A-BD^{-1}C)^{-1}&-(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}\\-D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}&D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}\end{pmatrix}.$$

例 3:证明行列式的乘积公式$|AB|=|A||B|$.

证明:做一个矩阵$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$,$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{pmatrix}$,则

$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{pmatrix}$,而$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & a_{11}E_{11} \\ 0 & E \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} E & a_{1n}E_{1n} \\ 0 & E \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} E & a_{nn}E_{nn} \\ 0 & E \end{pmatrix}$,是消法初等矩阵的乘积,而

$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & a_{11}E_{11} \\ 0 & E \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} E & a_{1n}E_{1n} \\ 0 & E \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} E & a_{nn}E_{nn} \\ 0 & E \end{pmatrix}$即等价于对$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$进行消法初等行变换,从而行列式不变.故$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}$,即$|A||B|=|AB||-E|(-1)^{n^2}=|AB|$.

例 4:设$A=(a_{ij})_n$且$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\neq 0$, $k=1,2,\cdots,n$.则有下三角阵B,使得BA是一上三角阵.

证明: 对n归纳. 若$n=1$,成立

假设结论对$n-1$成立,设n阶矩阵A.设$A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}$,其中$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$.

$\alpha=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn-1})$, $\beta=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix}$,其中$A_1$满足题目的要求,故对$A_1$,存在一个$n-1$阶下三角矩阵$B_1$,

使得$B_1A_1=D_1$是一个上三角矩阵.做$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}\xrightarrow{2+1(-\alpha A_1^{-1})}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ 0 & a_{nn}-\alpha A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}\xrightarrow{1(B_1)}\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ 0 & a_{nn}-\alpha A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ 0 & a_{nn}-\alpha A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}$是一个上三角矩阵.

令 $B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}$,是一个下三角矩阵.则有 BA 是一个上三角矩阵.

另外的解释:

$a_{11}\neq 0$,把矩阵的第一列的其余元素消为零.即第一行的某个倍数加到其余各行.则

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\longrightarrow A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{n2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$ 其中 $a_{22}^{(1)}=a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}$,

但是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{vmatrix}\neq 0$,从而 $a_{22}^{(1)}=a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\neq 0$,则用 $a_{22}^{(1)}=a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\neq 0$ 把 A_1 的第二列除一二行外其余元素消为零.得到

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{n2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}\to A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

依此 $a_{33}^{(2)}\neq 0$,消第三列的元素.这样下去.最终的形式

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$ 是一个上三角矩阵. $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A$,

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}A,$$

从而 $A_{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix}A$.上三角阵