第二章 数列极限

§3 数列极限存在的条件

问题：

- 怎么知道一个数列是收敛的？即极限的存在性问题；
- 之前的方法：定义.

  需要知道极限；

  具体的证明可能会很麻烦.
- 其他方法：夹逼性、四则运算.
- 寻找数列本身特征.

单调数列

定义

若数列a_n满足：对于$\forall x \in \mathbb{N}_+$

$$a_n \leqslant a_{n+1}\ (a_n \geqslant a_{n+1}),$$

则称数列a_n为递增（递减）数列.

单调递增数列与单调递减数列统称为单调数列.

- 类似，可以定义严格单调数列.
- 与单调函数的定义是统一的.
- 判断：$\dfrac{n}{n+1}$、n^2、$\dfrac{(-1)^n}{n}$.

单调有界定理

定理

在实数系中，有界的单调数列必有极限.

证明过程

注1. 单增有上界的数列极限存在，为其上确界.

注2. 单减有下界的数列极限存在，为其下确界.

注3. 单增无上界（单减无下界）的数列$\{a_n\}$有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

单调有界定理例题

例

$\alpha \geqslant 2$，设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}.$$

证明：$\{a_n\}$收敛.

证明过程

单调有界定理例题

例

证明数列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\ \cdots$$

收敛，并求其极限.

▸ 证明过程

注1. 此类问题一般使用数学归纳法.

注2. 如何快速找到“界”？.

例题

例

下面的叙述错在哪儿?

“设 $a_n = 2^n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

因为显然有 $a_n > 0$，所以 $\{a_n\}$ 递增. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，从而得出

$$A = 2A \Rightarrow A = 0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = 0.$”

单调有界定理例题

第二章 数列极限

§3 数列极限存在的条件

单调数列

单调有界定理

单调有界定理例题

致密性定理

Cauchy收敛准则

Cauchy收敛准则例题

作业

定理和例题的证明过程

命题

设S为有界数集. 证明：若$\sup S = a \notin S$，则存在严格递增数列$x_n \subset S$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

证明过程

有界数集的下确界有类似结论.

单调有界定理例题

例 (4)

证明

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

存在.

▶ 证明过程

注1. 定义

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

注2. e 为无理数，$\mathrm{e}\approx 2.718281828459.$

注3. 以e为底的对数称为自然对数，记为$\ln x=\log_e x.$

从证明过程中我们可以得到:

- $$数列\{(1+\frac{1}{n})^n\}严格单增.$$
- $$(1+\frac{1}{n})^n < e.$$
- $$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

  需要证明: $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}.\}$为严格单减数列.
- $$\frac{1}{n+1} < \ln x < \frac{1}{n}.$$

例题

例

设 $s_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}.$$

利用上例题证明过程中的结果.

▸ 证明过程

例题注释

由公式 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$，可以较快地算出 e 的近似值.

由于

$$0<s_{n+m}-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!},$$

令 $m\to\infty$, 得到

$$0<e-s_n\leq\frac{1}{n!n}, n=1,2,\cdots.$$

取 $n=10$，$\mathrm{e}\approx s_{10}\approx 2.7182818$，其误差

$$0<\mathrm{e}-s_{10}\leqslant\frac{1}{10\cdot 10!}<10^{-7}.$$

单调有界定理例题

例

设数列

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

证明：数列$\{c_n\}$收敛，并求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

注：利用

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

证明过程

单调有界定理例题

例 (5)

任何数列都存在单调子列.

将数列分为两类:

- 有单减子列: $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\{a_{n+k}\}$有最大项;
- 有单增子列: 存在$k \in \mathbb{N}_+$, $\{a_{n+k}\}$无最大项.

证明过程

致密性定理

定理

任何有界数列必定有收敛子列.

注1. 单调有界定理和例5的直接推论.

注2. 与Weierstrass定理（第七章）等价.

致密性定理例题

例

设数列$\{a_n\}$无上界，则存在$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$，

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

证明过程

注1. 无下界有类似结论.

注2. 证明中构造子列的方法是常用技巧.

Cauchy收敛准则

定理

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得$\forall n, m > N$时，有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

证明过程

注1. 这一充要条件称为Cauchy条件.

注2. 类似定义形式，相对优势：不需要知道极限.

注3. 几何意义：收敛数列各项的值越到后面，彼此越接近.

Cauchy收敛准则

Cauchy条件等价形式:

- $\forall \epsilon > 0$, 存在$N > 0$, 使得$\forall n$, $m > N$时, 有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- $\forall \epsilon > 0$, 存在$N > 0$, 使得$\forall m > n > N$时, 有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- $\forall \epsilon > 0$, 存在$N > 0$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, 有$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

逆否命题:

定理

数列$\{a_n\}$发散的充要条件是: 存在$\varepsilon_0 > 0$, $\forall N > 0$, 存在$n_0 > N$, $p_0 \in \mathbb{N}_+$时, 有 $|a_n - a_m| \geqslant \varepsilon_0$.

Cauchy收敛准则例题

例

证明：任意无限十进制小数

$$\alpha = 0.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

的$n(\in \mathbb{N}_+)$位不足近似

$$\frac{b_1}{10},\ \frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2},\ \cdots \frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n},\ \cdots$$

满足Cauchy条件，其中$b_k \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$，$k \in \mathbb{N}_+$.

证明过程

例题注释

循环小数 $0.\dot{9}$ 的不足近似值组成的数列为

$$a_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

利用等比数列求和公式，可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

这就是为什么可以将无限小数 $0.\dot{9}$ 表示为 1 的一个原因.

例题

例

设 $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 发散.

证明

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N > 0$, $\exists n_0 = N, m_0 = 2N$, 使得

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

$$\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \varepsilon_0.$$

由柯西收敛准则的否定陈述, 可知 $\{x_n\}$ 发散.

例题

例

设 $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 发散.

证明

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N > 0$, $\exists n_0 = N, m_0 = 2N$，使得

$$
\begin{aligned}
|x_{n_0} - x_{m_0}| &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} \\
&\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

由柯西收敛准则的否定陈述，可知 $\{x_n\}$ 发散.

例题

例

设 $x_n = \dfrac{\sin 1}{2^1} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证明

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \dfrac{-\log \varepsilon}{\log 2}$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right| \\
&\le \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right) \\
&= \frac{2}{2^{m+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) \le \frac{1}{2^m} < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\} \text{ 收敛.}
\end{aligned}
$$

例题

例

设 $x_n = \dfrac{\sin 1}{2^1} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证明

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \frac{-\log \varepsilon}{\log 2}, \text{当 } n > m > N \text{ 时, 有}$$

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right| \\
&\le \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right) \\
&= \frac{2}{2^{m+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) \le \frac{1}{2^m} < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\} \text{ 收敛.}
\end{aligned}$$

Cauchy收敛准则例题

例

设$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}$. 证明:

(1) 当$\alpha > 1$时, a_n收敛;

(2) 当$\alpha \leqslant 1$时, a_n发散.

例

设数列满足条件: $|a_{n+1} - a_n| < r^n, n = 1, 2, \cdots$, 其中$r \in (0, 1)$. 求证: $\{a_n\}$收敛.

证明过程

注释

柯西收敛准则的意义在于:

可以根据数列通项本身的特征来判断该数列是否收敛，而不必依赖于极限定义中的那个极限值 A. 这一特点在理论上特别有用，大家将会逐渐体会到它的重要性.

复习思考题

1. 对于数列是否收敛的各种判别法加以总结.
2. 试给出 $\{a_n\}$ 不是Cauchy列的正面陈述.

作业:

- P37 习题2.3

  1, 3 (1), 5 (1), 7.

- P39 总练习题

  4, 5, 6.

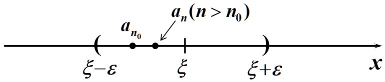
单调有界定理

证明

不妨设 $\{a_n\}$ 单调增，有上界. 由确界定理，存在

$$\sup\{a_n\}=\xi.$$

由上确界的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 a_{n_0}，使 $a_{n_0}>\xi-\varepsilon$. 故当 $n>n_0(=N)$ 时，



$$\xi-\varepsilon<a_{n_0}\le a_n\le\xi<\xi+\varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$.

例题解答

返回命题

证明

显然数列$\{a_n\}$单调递增. 下面只需要证明数列 $\{a_n\}$ 有界.

任意的$n \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&\leqslant \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\
&= 1 - \frac{1}{n} < 1.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ 有界，从而收敛.

例题解答

返回例题

解

记上述数列为

$$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \cdots,\ a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\ \cdots$$

显然$a_n>0$. 因 $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故 $a_2>a_1$；

设 $a_n>a_{n-1}$，则有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\sqrt{2+a_n}-\sqrt{2+a_{n-1}}\\&=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n}+\sqrt{2+a_{n-1}}}>0,\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 递增. 下面再来证明此数列有上界.

例题解答

返回例题

证明

显然，$a_1 = \sqrt{2} < 2$，设 $a_n < 2$，则

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

由此得到 $\{a_n\}$ 有上界 2，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在.

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n}$, 可得

$$A^2 = 2 + A,$$

并解出 $A = 2$，$A = -1$.

由极限的不等式性, 知道 $A > 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

例题证明

返回例题

考察数列 $\{e_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的收敛性，下面的证法是最基本的，而教材上的证法技巧性较强.

证明

利用二项式展开，得

$$
\begin{aligned}
e_n =& 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
=& + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
& + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

例题证明

返回例题

证明

由此得

$$\begin{aligned} e_{n+1} = & 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\ & +\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ & +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

把 e_n 和 e_{n+1} 的展开式作比较就可发现，e_n 的展开式有 $n+1$ 项，其中的每一项都比 e_{n+1} 的展开式中的前 $n+1$ 项小，而 e_{n+1} 的最后一项大于零.

证明

因此

$$e_n < e_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots ,$$

从而 $\{e_n\}$ 是单调增数列，且

$$e_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

由此 $e_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$，这就证明了 $\{e_n\}$ 又是有界数列. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ 存在. 记此极限为 e，即

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

例题解答

返回例题

证明

设数列为$\{a_n\}$. 下面分两种情形来讨论.

1. 对于任意的$k \in \mathbb{N}_+$，数列$\{a_{n+k}\}$有最大项.

设$\{a_{1+n}\}$的最大项为$\{a_{n_1}\}$，因为$\{a_{n_1+n}\}$也有最大项，设其最大项为$\{a_{n_2}\}$，显然有$n_2 > n_1$，且因$\{a_{n_1+n}\}$是$\{a_{1+n}\}$的一个子列，故$a_{n_2} \leqslant a_{n_1}$；

同理存在$n_3 > n_2$，使得$a_{n_3} \leqslant a_{n_2}$；

$\cdots\cdots$

这样就得到一个单调递减的子列$\{a_{n_k}\}$.

例题解答

返回例题

证明

2. 至少存在某正整数k，数列$\{a_{n+k}\}$没有最大项.

先取$n_1 = k+1$，因为$\{a_{k+n}\}$没有最大项，故$\{a_{n_1}\}$后面总存在$\{a_{n_2}\}(n_2 > n_1)$，使得

$$a_{n_2} > a_{n_1};$$

同理存在a_{n_2}后面的项$\{a_{n_3}\}(n_3 > n_2)$，使得

$$a_{n_3} > a_{n_2};$$

$\cdots\cdots$

这样就得到一个严格递增的子列$\{a_{n_k}\}$.

例题解答

返回例题

证明

因为 $\{a_n\}$ 无上界，所以对于任意正数 M，存在 a_{n_0}，使得 $a_{n_0} > M$.

据此分别取

$M_1 = 1$，存在 $a_{n_1}, a_{n_1} > 1$;

$M_2 = \max\{2, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_1}|\}$，存在

$$a_{n_2}\,(n_2 > n_1)\text{，使得}a_{n_2} > M_2;$$

$\cdots\cdots$

例题解答

返回例题

证明

$$M_k = \max\left\{k, |a_1|, |a_2|, \cdots, \left|a_{n_{k-1}}\right|\right\}，存在$$

$$a_{n_k}\left(n_k > n_{k-1}\right)，使得 a_{n_k} > M_k;$$

$\cdots\cdots$

由此得到 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$, 满足 $a_{n_k} > M_k \geqslant k$, 推得

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

例题解答

返回例题

证明

记 $a_n = \dfrac{b_1}{10} + \dfrac{b_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{b_n}{10^n}$. 不妨设 $n > m$, 则有

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{b_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \\
&\leqslant \frac{9}{10^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-m-1}}\right) \\
&= \frac{1}{10^m}\left(1 - \frac{1}{10^{n-m}}\right) < \frac{1}{10^m} < \frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 则对一切 $n > m > N$, 有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

这就证明了数列满足柯西条件.

例题解答

返回例题

例

设 $s_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}.$$

证明

显然 $\{s_n\}$ 是单调增数列, 且由上例证明中可知,

$$\begin{aligned} e_n &\leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在且由极限的保不等式性,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} e_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n.$$

例题解答

返回例题

证明

又对任意 $n>m$，

$$\begin{aligned}
e_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&> 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right),
\end{aligned}$$

例题解答

▶ 返回例题

证明

因此, 在上式中两边令 $n\to\infty$, 得

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}e_n\geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m.$$

当 $m\to\infty$ 时,由极限的保不等式性,

$$\mathrm{e}\geqslant\lim_{m\to\infty}s_m.$$

从而

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

命题的证明

返回命题

证明

因 a 是 S 的上界，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in S$，使得 $x>a-\varepsilon$. 又因 $a\notin S$，故 $x<a$，从而有

$$a-\varepsilon<x<a.$$

现取 $\varepsilon_1=1$，则 $\exists x_1\in S$，使得

$$a-\varepsilon_1<x_1<a.$$

再取 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},\ a-x_1\right\}$，则 $\exists x_2\in S$，使得

$$a-\varepsilon_1<x_2<a,$$

且有

$$x_2>a-\varepsilon_2\geq a-(a-x_1)=x_1.$$

命题的证明

返回命题

证明

一般地，按上述步骤得到 $\mathbf{x}_{n-1}$ 之后，取

$$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\right\},$$

则存在 $x_n \in S$，使得

$$a - \varepsilon_n < \mathbf{x}_n < a$$

且有 $x_n > a - \varepsilon_n \geq a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1}$. 于是得到 $\{x_n\} \subset S$，它是严格单调的，满足

$$a - \varepsilon_n < \mathbf{x}_n < \mathbf{a},$$

因此，$|x_n - a| < \varepsilon_n \leq \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$.

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例题解答

返回例题

证明

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n =& 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \\ & -\ln(n+1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n) \\ =& \frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0. \end{aligned}$$

故数列$\{c_n\}$单调递减.

下面需证数列$\{c_n\}$有下界.

例题解答

返回例题

证明

由例4推得的不等式，有

$$\frac{1}{2} < \ln(1+1) < 1,$$

$$\frac{1}{3} < \ln(1+\frac{1}{2}) < 1,$$

$$\cdots,$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

综上可得，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$< 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

例题解答

▶ 返回例题

证明

不等式两边减去 $\ln n$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\ &<\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n\\ &=\ln(n+1)-\ln n>0.\end{aligned}$$

由单调有界定理可知，数列$\{c_n\}$收敛.

例题解答

返回例题

解

设 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} c_{2n} = c$. 从而有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(c_{2n} - c_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) + \ln n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right) \\
&=0,
\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$

Cauchy收敛准则的证明

证明过程

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

由极限定义，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n, m > N$(或 $n, m \geq N$) 时，有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

柯西(Cauchy,A.L. 1789—1857 ,法国)

证明

若 $n<m$，则

$$|a_n-a_m|\le|a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|$$

$$\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1}=\frac{r^n-r^m}{1-r}<\frac{r^n}{1-r}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1-r}=0$，于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n>N$,

$$\left|\frac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$$

若 $m>n>N$，就有

$$|a_n-a_m|\le\left|\frac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$$

由柯西准则，$\{a_n\}$ 收敛.