

# 组合数学

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



# 第 5 章 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 组合型分配问题的生成函数
- ⑤ 排列型分配问题的指数型生成函数

# 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 组合型分配问题的生成函数
- ⑤ 排列型分配问题的指数型生成函数

# 引论

生成函数是一种既简单又有用的数学方法, 它最早出现于 19 世纪初.

对于组合计数问题, 生成函数是一种最重要的一般性处理方法.

它的中心思想是:

对于一个有限或无限数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

用幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

使之成为一个整体,

然后通过研究幂级数  $A(x)$ , 导出数列  $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$  的构造和性质.

我们称  $A(x)$  为序列  $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$  的生成函数, 并记为  $G\{a_n\}$ .

# 引论

实际上, 在第 3 章中我们已经使用过生成函数方法. 组合数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

的生成函数为

$$f_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

由二项式定理知

$$f_n(x) = (1+x)^n.$$

通过对  $(1+x)^n$  的运算, 可以导出一系列组合数的关系式, 例如

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

等等.

## 例 1

投掷一次骰子, 出现点数  $1, 2, \dots, 6$  的概率均为  $\frac{1}{6}$ . 问连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

## 例 1

投掷一次骰子, 出现点数  $1, 2, \dots, 6$  的概率均为  $\frac{1}{6}$ . 问连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组  $(i, j) (1 \leq i, j \leq 6)$ , 共有  $6^2 = 36$  种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为  $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .

## 例 1

投掷一次骰子, 出现点数  $1, 2, \dots, 6$  的概率均为  $\frac{1}{6}$ . 问连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组  $(i, j) (1 \leq i, j \leq 6)$ , 共有  $6^2 = 36$  种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为  $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .

如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了.

这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径.



解 我们用多项式

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

表示投掷一次可能出现点数  $1, 2, \dots, 6$ , 观察

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

从两个括号中分别取出  $x^m$  和  $x^n$ , 使

$$x^m \cdot x^n = x^{10},$$

即是两次投掷分别出现点数  $m, n$ , 且  $m + n = 10$ . 由此得出, 展开式中  $x^{10}$  的系数就是满足条件的方法数. 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}$$

中  $x^{30}$  的系数.

而

$$\begin{aligned}& (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10} \\&= x^{10} (1 - x^6)^{10} (1 - x)^{-10} \\&= x^{10} \cdot \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} x^{6i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{10-1+i}{i} x^i\end{aligned}$$

所以,  $x^{30}$  的系数为

$$\binom{29}{20} - \binom{23}{14} \binom{10}{1} + \binom{17}{8} \binom{10}{2} - \binom{11}{2} \binom{10}{3} = 2930455.$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}} \approx 0.0485$$

# 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 组合型分配问题的生成函数
- ⑤ 排列型分配问题的指数型生成函数

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念.

# 形式幂级数

我们称幂级数 (5.2.2) 是形式幂级数, 其中的  $x$  是未定元, 看作是抽象符号.

对于实数域  $\mathbb{R}$  上的数列  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ,  $x$  是  $\mathbb{R}$  上的未定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

称为  $\mathbb{R}$  上的形式幂级数.

一般情况下, 形式幂级数被认为是形式的,  $x$  只是一个抽象符号, 并不需要对  $x$  赋予具体数值, 因而就不需要考虑它的收敛性.

在这样定义下, 解析收敛不是问题, 对于  $\sum_{n \geq 0} n!x^n$ , 除了在  $x = 0$  处外没有其他点收敛, 我们也可讨论形式幂级数.

## 定义 2.1

设  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  与  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  是  $\mathbb{R}$  上的两个形式幂级数, 若对任意  $k \geq 0$ , 有  $a_k = b_k$ , 则称  $A(x)$  与  $B(x)$  相等, 记作  $A(x) = B(x)$ .

我们用符号

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ for all } n \geq 0 \right\}$$

表示形式幂级数的集合. 这个集合是代数, 称为 **形式幂级数的代数**, 加法、数乘、乘法规则定义如下

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

$$c \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (c a_n) x^n,$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} c_n x^n,$$

其中  $c \in \mathbb{R}$  且

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

## 定理 2.2

对  $\mathbb{R}[[x]]$  中的任意一个元素  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  有乘法逆元当且仅当  $a_0 \neq 0$ .

### 证明.

一方面, 假设  $A(x)B(x) = 1$ , 其中  $B(x) = \sum_n b_n x^n$ .

比较两边的常数项得到  $a_0 b_0 = 1$ , 因而  $a_0 \neq 0$ .

另一方面, 假设  $a_0 \neq 0$ . 我们构造逆  $g(x) = \sum_n b_n x^n$ , 满足  $f(x)g(x) = 1$ .

比较两边  $x^n$  系数, 有  $a_0 b_0 = 1$ , 且当  $n \geq 1$  时,

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0.$$

因为  $a_0 \neq 0$ , 所以  $b_0 = 1/a_0$ . 类似地, 当  $n \geq 1$  时, 我们可以在上式中解出  $b_n$ , 通过给出其递推关系. 这样我们就确定了  $B(x)$ . □

考虑  $A(x) = \sum_n a_n x^n$  与  $B(x)$  的 **复合** 为

$$A(B(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n B(x)^n.$$

上式右边是关于形式幂级数的无限求和, 而不仅仅是形式变量.

为讨论这样的和, 需要在  $\mathbb{C}[[x]]$  中引入收敛的概念. (略)

### 定理 2.3

给定  $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ , 复合  $A(B(x))$  存在当且仅当  $A(x)$  为多项式 或者  $B(x)$  常数项为 0.

(证明略)

因此, 不存在形式幂级数  $e^{x+1}$ .



在整环  $\mathbb{R}[[x]]$  上还可以定义形式导数.

## 定理 2.4

对于任意  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$ , 规定

$$DA(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

称  $DA(x)$  为  $A(x)$  的形式导数.

$A(x)$  的  $n$  次形式导数可以递归地定义为

$$\begin{cases} D^0 A(x) \equiv A(x) \\ D^n A(x) \equiv D(D^{n-1} A(x)) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

形式导数满足如下规则:

- (1)  $D[\alpha A(x) + \beta B(x)] = \alpha DA(x) + \beta DB(x)$
- (2)  $D[A(x) \cdot B(x)] = A(x)DB(x) + B(x)DA(x)$
- (3)  $D(A^n(x)) = nA^{n-1}(x)DA(x)$

**证明** 证明规则 (1) 由定义可以直接得出, 而规则 (3) 则是规则 (2) 的推论. 现证明规则 (2). 显然有

$$\begin{aligned} D[A(x) \cdot B(x)] &= D \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (i a_i x^{i-1}) b_j x^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} (a_i x^i) (j b_j x^{j-1}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} j b_j x^{j-1} \right) \\ &= A(x) D B(x) + B(x) D A(x). \quad \square \end{aligned}$$

由此可知, 形式导数满足微积分中求导运算的规则.

当某个形式幂级数在某个范围内收敛时, 形式导数就是微积分中的求导运算.

为了书写方便, 以后用  $A'(x)$ ,  $A''(x)$ ,  $\dots$  分别代表  $DA(x)$ ,  $D^{(2)}A(x)$ ,  $\dots$ .

# 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 组合型分配问题的生成函数
- ⑤ 排列型分配问题的指数型生成函数

设数列  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  的生成函数为  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ,

数列  $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$  的生成函数为  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ .

我们可以得到生成函数的如下一些性质:

### 性质 1

若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < \ell) \\ a_{k-\ell} & (k \geq \ell) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^\ell \cdot A(x).$$

### 性质 2

若  $b_k = a_{k+l}$ , 则

$$B(x) = \frac{1}{x^l} \left( A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k \right).$$

### 性质 3

若  $b_k = \sum_{i=0}^k a_i$ , 则  $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$ .

### 性质 3

若  $b_k = \sum_{i=0}^k a_i$ , 则  $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$ .

**证明** 由假设条件, 有

$$b_0 = a_0,$$

$$b_1x = a_0x + a_1x$$

$$b_2x^2 = a_0x^2 + a_1x^2 + a_2x^2$$

$$\dots\dots,$$

$$b_kx^k = a_0x^k + a_1x^k + a_2x^k + \dots + a_kx^k,$$

$$\dots\dots$$

把以上各式的两边分别相加, 得

$$\begin{aligned} B(x) &= a_0(1 + x + x^2 + \dots) + a_1x(1 + x + x^2 + \dots) \\ &\quad + a_2x^2(1 + x + x^2 + \dots) + \dots \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= \frac{A(x)}{1-x} \end{aligned}$$

## 性质 4

若  $b_k = ka_k$ , 则

$$B(x) = xA'(x).$$

## 性质 4

若  $b_k = ka_k$ , 则

$$B(x) = xA'(x).$$

**证明** 由  $A'(x)$  的定义知

$$xA'(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x).$$



## 性质 5

若  $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$ , 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x).$$

## 性质 6

若  $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$ , 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x).$$

这两个性质可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出.

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和. 下面列出常见的几个数列的生成函数:

$$(1) G\{1\} = \frac{1}{1-x};$$

$$(2) G\{a^k\} = \frac{1}{1-ax};$$

$$(3) G\{k\} = \frac{x}{(1-x)^2};$$

$$(4) G\{k(k+1)\} = \frac{2x}{(1-x)^3};$$

$$(5) G\{k^2\} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3};$$

$$(6) G\{k(k+1)(k+2)\} = \frac{6x}{(1-x)^4};$$

$$(7) G\left\{\frac{1}{k!}\right\} = e^x;$$

$$(8) G\left\{\binom{\alpha}{k}\right\} = (1+x)^\alpha;$$

$$(9) G\left\{\binom{n+k}{k}\right\} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$

下面证明其中的几个生成函数, 而生成函数 (8) 和 (9) 可参见定理 3.1.2 及其分析.

**证明 (3)**

$$\begin{aligned} G\{k\} &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ &= x \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} G\{k(k+1)\} &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k = \left( x \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' \\ &= \left( \frac{x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} G\{k(k+1)\} &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)'' \\ &= x^2 \left( \frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} G\{k^2\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} G\{k^2\} &= x \left( \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' = x (G\{k\})' \\ &= x \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right)' \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和, 下面的两个例子说明了一些求解方法. 利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和, 下面的两个例子说明了一些求解方法.

### 例 3.1

已知  $\{a_n\}$  的生成函数为

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x},$$

求  $a_n$ .

### 例 3.1

已知  $\{a_n\}$  的生成函数为

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x},$$

求  $a_n$ .

解 用部分分式的方法得

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x} = \frac{2}{1 - 2x} + 3x,$$

而

$$\frac{2}{1 - 2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n.$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}$$

### 例 3.2

计算级数

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

的和.

### 例 3.2

计算级数

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

的和.

解 由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列  $\{n^2\}$  的生成函数为

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

此处,  $a_k = k^2$ . 令

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2,$$

则

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$



因此, 数列  $\{b_n\}$  的生成函数为

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \\ &= (x+x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k. \end{aligned}$$

比较等式两边  $x^n$  的系数, 得

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= b_n \binom{n+2}{3} + \binom{n-1}{3} \\ &= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

# 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 组合型分配问题的生成函数
- ⑤ 排列型分配问题的指数型生成函数

# 组合数的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题.

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

- (1) 求  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  的  $k$  组合数;
- (2) 求  $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的  $k$  组合数;
- (3) 求  $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$  的 10 组合数.

其中, 问题 (1) 是普通集合的组合问题;

问题 (2) 转化为不定方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  的非负整数解的个数问题;

问题 (3) 是利用容斥原理在  $M = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$  中求不满足下述三个性质:

$P_1$  : 10 组合中  $a$  的个数大于或等于 4 ;

$P_2$  : 10 组合中  $b$  的个数大于或等于 5 ;

$P_3$  : 10 组合中  $c$  的个数大于或等于 6

的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同.

下面我们将看到, 引入生成函数的概念后, 上述三类组合问题可以统一地处理.

## 问题 (2) 的解决

我们先从问题 (2) 开始. 令

$$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$$

的  $k$  组合数为  $b_k$ . 考虑  $n$  个形式算级数的乘积

$$(1 + x + x^2 + \dots) \underbrace{(1 + x + x^2 + \dots) \cdots (1 + x + x^2 + \dots)}_{n \text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个  $x^k$  均为

$$x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n} = x^k \quad (m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k)$$

其中  $x^{m_1}, x^{m_2}, \dots, x^{m_n}$  分别取自代表  $a_1$  的第一个括号, 代表  $a_2$  的第二个括号,  $\dots$ , 代表  $a_n$  的第  $n$  个括号;  $m_1, m_2, \dots, m_n$  分别表示取  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的个数.

于是, 每个  $x^k$  都对应着多重集合  $M$  的一个  $k$  组合.

## 问题 (2) 的解决

因此

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n$$

中  $x^k$  的系数就是  $M$  的  $k$  组合数  $b_k$ . 由此得出序列  $\{b_k\}$  的生成函数为

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \frac{1}{(1 - x)^n}.$$

从而

$$b_k = \binom{n - 1 + k}{k}.$$

这时, 我们再次得到了第 2 章中多重集合  $M$  的  $k$  组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的.

## 问题 (3) 的解决

用生成函数方法解问题 (3) 尤为简单. 将  $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$  的  $k$  组合数记为  $b_k$ ,  $\{b_k\}$  的生成函数就是

$$(1 + x + x^2 + x^3) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5).$$

其原因是展开式中的  $x^k$  必定为

$$x^{m_1} x^{m_2} x^{m_3} = x^k \quad (m_1 + m_2 + m_3 = k).$$

由于  $x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}$  分别取自第一、第二、第三个括号, 故

$0 \leq m_1 \leq 3, 0 \leq m_2 \leq 4, 0 \leq m_3 \leq 5$ , 于是每个  $x^k$  对应集合  $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$  的一个  $k$  组合. 特别令  $k = 10$ , 则

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= (1 - x^4) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^6) \cdot \frac{1}{(1 - x)^3} \\ &= (1 - x^4 - x^5 - x^6 + x^9 + x^{10} + x^{11} - x^{15}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n. \end{aligned}$$

## 问题 (3) 的解决

所以,  $x^{10}$  的系数  $b_{10}$  为

$$\begin{aligned} b_{10} &= \binom{10+2}{10} - \binom{6+2}{6} - \binom{5+2}{5} - \binom{4+2}{4} + \binom{1+2}{1} + \binom{0+2}{0} \\ &= 6 \end{aligned}$$

与第 4 章中用容斥原理得到的结果相同.

在普通集合  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  的  $k$  组合中,  $a_i (1 \leq i \leq n)$  或者出现或者不出现, 故该集合的  $k$  组合数序列  $\{b_k\}$  的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

从而

$$b_k = \binom{n}{k}.$$



## 定理 4.1

设从  $n$  元集合  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  中取  $k$  个元素的组合数为  $b_k$ , 若限定元素  $a_i$  出现的次数集合为  $M_i (1 \leq i \leq n)$ , 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

### 定理 4.1

设从  $n$  元集合  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  中取  $k$  个元素的组合数为  $b_k$ , 若限定元素  $a_i$  出现的次数集合为  $M_i (1 \leq i \leq n)$ , 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

### 例 4.1

求多重集合  $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的每个  $a_i$  至少出现一次的  $k$  组合数  $b_k$ .

解 由定理 5.4.1 知

$$M_i = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

于是

$$\begin{aligned} G\{b_k\} &= (x + x^2 + x^3 + \dots)^n \\ &= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-k} x^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k, \end{aligned}$$

所以

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \binom{k-1}{n-1} & (k \geq n) \end{cases}$$

# 组合型分配问题的生成函数

## 定理 4.2

把  $k$  个相同的球放入  $n$  个不同的盒子  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中, 限定盒子  $a_i$  的容量集合为  $M_i (1 \leq i \leq n)$ , 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

# 组合型分配问题的生成函数

## 定理 4.2

把  $k$  个相同的球放入  $n$  个不同的盒子  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中, 限定盒子  $a_i$  的容量集合为  $M_i (1 \leq i \leq n)$ , 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

**证明** 不妨设盒子  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中放入的球数分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n)$$

一种符合要求的放法相当于  $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的一个  $k$  组合, 前面关于盒子  $a_i$  容量的限制转变成  $k$  组合中  $a_i$  出现次数的限制. 由定理 5.4.1 知, 组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

## 例 4.2

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足  $x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6, x_5 \geq 0$  的整数解的个数.

## 例 4.2

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足  $x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6, x_5 \geq 0$  的整数解的个数.

解 本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$M_1 = \{3, 4, \dots\}$$

$$M_2 = \{2, 3, \dots\}$$

$$M_3 = \{4, 5, \dots\}$$

$$M_4 = \{6, 7, \dots\}$$

$$M_5 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned} & (x^3 + x^4 + \dots)(x^2 + x^3 + \dots)(x^4 + x^5 + \dots) \\ & \cdot (x^6 + x^7 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \\ & = x^{15} \cdot (1 + x + x^2 + \dots)^5 = x^{15} \cdot \frac{1}{(1-x)^5} \\ & = x^{15} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^n \end{aligned}$$

其中,  $x^{20}$  的系数  $\binom{5+4}{5} = 126$  就是满足条件的整数解的个数.

### 例 4.3

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

的整数解个数.



### 例 4.3

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

的整数解个数.

**解** 令  $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3$ , 则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即  $0 \leq y_1 \leq 4, 0 \leq y_2 \leq 6, 0 \leq y_3 \leq 5, 0 \leq y_4 \leq 6$ .

对应的生成函数为

$$\begin{aligned}& (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\& \quad \cdot (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 \\&= \frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)^2}{(1-x)^4} \\&= (1-x^5-x^6-2x^7+x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+x^{14}-2x^{18}-x^{19}-x^{20}+x^{25}) \\& \quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k\end{aligned}$$

所以它的  $x^{16}$  的系数为

$$\begin{aligned}& \binom{16+3}{3} - \binom{11+3}{3} - \binom{10+3}{3} - 2\binom{9+3}{3} + \binom{5+3}{3} \\& \quad + 2\binom{4+3}{3} + 2\binom{3+3}{3} + \binom{2+3}{3} \\&= 969 - 364 - 286 - 2 \times 220 + 56 + 2 \times 35 + 2 \times 20 + 10 \\&= 55.\end{aligned}$$

#### 例 4.4

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个白球, 若每次从中任取 3 个球, 有多少种不同的取法?

#### 例 4.4

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个白球, 若每次从中任取 3 个球, 有多少种不同的取法?

解 方法 1:

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2)(1+x)(1+x+x^2+x^3) \\ &= \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \\ &= (1-x^2-x^3+x^5)(1-x^4) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \end{aligned}$$

$x^3$  的系数为  $\binom{5}{2} - \binom{3}{2} - \binom{2}{2} = 10 - 3 - 1 = 6$

方法 2:  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 3)(0, 1, 2)(1, 0, 2)(1, 1, 1)(2, 0, 1)(2, 1, 0)$

### 例 4.5

设有  $1g$ 、 $2g$ 、 $3g$ 、 $4g$  的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? ( $0g$  不计入)

### 例 4.5

设有  $1g$ 、 $2g$ 、 $3g$ 、 $4g$  的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? ( $0g$  不计入)

**解**  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$ , 故十种.

### 例 4.5

设有  $1g$ 、 $2g$ 、 $3g$ 、 $4g$  的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? ( $0g$  不计入)

解  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$ , 故十种.

### 例 4.6

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

### 例 4.5

设有  $1g$ 、 $2g$ 、 $3g$ 、 $4g$  的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? ( $0g$  不计入)

解  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$ , 故十种.

### 例 4.6

用  $1$  分、 $2$  分、 $3$  分的邮票可贴出多少种总面值为  $4$  分的方案.

解  $1+1+1+1$     $1+1+2$     $1+3$     $2+2$ , 故四种.



### 例 4.7

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有  $n$  个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个 (包括 0 个), 香蕉有 5 的倍数个 (包括 0 个), 橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

### 例 4.7

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有  $n$  个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个 (包括 0 个), 香蕉有 5 的倍数个 (包括 0 个), 橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

解

$$\begin{aligned} & (1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + \cdots) (1 + x^5 + \cdots + x^{5n} + \cdots) \\ & \quad \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) (1 + x) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x) \\ &= \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k \end{aligned}$$

故所求为  $n + 1$  种.

# 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 组合型分配问题的生成函数
- ⑤ 排列型分配问题的指数型生成函数

# 排列数的指数型生成函数

$n$  元集合的  $k$  排列数为  $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ , 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式.

# 排列数的指数型生成函数

$n$  元集合的  $k$  排列数为  $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ , 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数  $x^k$  改换成  $\frac{x^k}{k!}$ , 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) \cdot \frac{x^k}{k!} = (1+x)^n,$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念.

数列  $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$  的指数型生成函数 定义为形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

## 定理 5.1

多重集合  $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的  $k$  排列中, 若限定元素  $a_i$  出现的次数集合为  $M_i (1 \leq i \leq n)$ , 则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right).$$

特别地, 数列  $\{1, 1, \dots\}$  的指数型生成函数  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  具有与指数函数相似的性质:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

$$\begin{aligned}
e^x e^y &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= e^{x+y}.
\end{aligned}$$

特别有

$$e^x e^{-x} = e^0 = 1,$$

从而

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

### 例 5.1

多重集合  $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的  $k$  排列数序列  $\{b_k\}$  的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = (e^x)^n = e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k = n^k$$



## 例 5.2

由数字  $0, 1, 2, 3$  组成的长为  $k$  的序列中, 要求含有偶数个  $0$ , 问这样的序列有多少个?

## 例 5.2

由数字 0, 1, 2, 3 组成的长为  $k$  的序列中, 要求含有偶数个 0, 问这样的序列有多少个?

解 根据题意, 有

$$M_1 = M_2 = M_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$M_0 = \{0, 2, 4, \dots\}$$

由定理 5.5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^3 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= e^3(x) \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (e^{4x} + e^{2x}) \end{aligned}$$

所以  $\frac{x^k}{k!}$  的系数为

$$b_k = \frac{1}{2} (4^k + 2^k).$$

### 例 5.3

由 1, 2, 3, 4 能组成多少个 1 出现两次或三次, 2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

### 例 5.3

由 1, 2, 3, 4 能组成多少个 1 出现两次或三次, 2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

解 根据题意, 有

$$M_1 = \{2, 3\} \quad M_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$M_2 = \{0, 1\} \quad M_4 = \{0, 2, 4, \dots\}$$

由定理 5.5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \left( 1 + \frac{x}{1!} \right) \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{x^2}{6} (3 + 4x + x^2) \cdot e^x \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{x^2}{12} (3 + 4x + x^2) (e^{2x} + 1). \end{aligned}$$

所以  $\frac{x^5}{5!}$  的系数为

$$5! \times \frac{1}{12} \left( 3 \times \frac{2^3}{3!} + 4 \times \frac{2^2}{2!} + 1 \times \frac{1}{1!} \right) = 140,$$

即满足题意的五位数有 140 个.

### 例 5.4

确定每位数字都是奇数, 且 1, 3 出现偶数次的  $n$  位数的个数.

### 例 5.4

确定每位数字都是奇数, 且 1, 3 出现偶数次的  $n$  位数的个数.

解

$$\begin{aligned}& \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 \\&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{3x} \\&= \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot e^{3x} \\&= \frac{1}{4} (e^{5x} + 2e^{3x} + e^x) = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 5^k \frac{x^k}{k!} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \\&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (5^k + 2 \cdot 3^k + 1) \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

因此, 它的  $x^n$  系数为  $\frac{1}{4} (5^n + 2 \cdot 3^n + 1)$ .

### 例 5.5

求  $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的  $k$  排列中每个  $a_i$  至少出现一次的排列数  $P_k$  的指数型生成函数。

### 例 5.5

求  $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$  的  $k$  排列中每个  $a_i$  至少出现一次的排列数  $P_k$  的指数型生成函数。

解 根据题意, 有

$$M_i = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1 \leq i \leq n).$$

由定理 5.5.1 知, 排列数序列  $\{P_k\}$  的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^n &= (e^x - 1)^n \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} e^{(n-i)x} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-i)^k x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k \right) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

所以  $P_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k \quad (k \geq n).$



### 例 5.6

用红、白、蓝 3 种颜色给  $1 \times n$  棋盘着色, 要求白色方格数是偶数, 问有多少种着色方案?

## 例 5.6

用红、白、蓝 3 种颜色给  $1 \times n$  棋盘着色, 要求白色方格数是偶数, 问有多少种着色方案?

**解** 将  $1 \times n$  棋盘的  $n$  个方格分别用  $1, 2, \dots, n$  标记, 第  $i$  个方格着  $c$  色看作把第  $i$  个物体放入  $c$  盒中. 这时, 问题转化为: 把  $n$  个不同的球放入 3 个不同的盒子中, 各盒的容量集合分别为

$$M_r = M_b = \{0, 1, 2, \dots\},$$

$$M_w = \{0, 2, 4, \dots\}.$$

于是, 分配方案数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= e^{2x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(3x)^n}{n!} + \frac{x^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

其中,  $\frac{x^n}{n!}$  的系数  $\frac{1}{2}(3^n + 1)$  就是满足要求的着色方案数。

## 命题 5.2

若  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ , 则  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1} \frac{x^l}{l!}$  即  $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$  的指数型生成函数为  $f'(x)$ .

## 命题 5.3

若  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ , 则  $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$  的指数型生成函数为  $f^{(i)}(x)$ .

## 命题 5.4

若  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ , 则  $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$  的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{(k-1)!} = x \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= xf'(x) = x \frac{d}{dx}(f(x)). \end{aligned}$$

## 命题 5.5

若  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ , 而  $P(k)$  为一个关于  $k$  的多项式, 则  $\{P(k)a_k\}_{k=0}^{\infty}$  的指数型生成函数为

$$P\left(x \frac{d}{dx}\right)(f(x)).$$

## 命题 5.6

若  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ , 且  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$ , 则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

即  $\{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$  的指数型生成函数为

$$f(x)g(x).$$