数列极限

李 君

天津师范大学，数学科学学院

2023 年 6 月

目 录

§3 数列极限存在的条件

学过数列极限概念后，自然会产生两个问题：一是怎么知道一个数列是收敛的？即极限的存在性问题二是如何计算数列的极限？其中，判断数列是否收敛。这在极限理论中占有非常重要的地位下面就报限存在性问题介绍两个重要定理

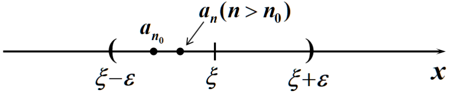
一、单调有界定理

二、柯西收敛准则

一、单调有界定理

定理 2.7 单调有界数列必有极限.

证 该命题的几何意义是十分明显的. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调增, 有上界. 由确界定理, 存在 $\sup\{a_n\} = \xi$. 由上确界的定义, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 a_{n_0}, 使 $a_{n_0} > \xi - \varepsilon$. 故当 $n > n_0 (= N)$ 时,



$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \xi < \xi + \varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$.

例 1 设 $a_1 = \sqrt{2}, \cdots, a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 显然 $a_n > 0$. 因 $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, 故 $a_2 > a_1$; 设 $a_n > a_{n-1}$, 则有

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}$$
$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}} > 0,$$

所以 $\{a_n\}$ 递增. 下面再来证明此数列有上界. 显然, $a_1 = \sqrt{2} < 2$, 设 $a_n < 2$, 则

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

由此得到 $\{a_n\}$ 有上界 2 , 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在.

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}$, 可得
$A^2 = 2 + A$, 并解出 $A = 2, A = -1$.

由极限的不等式性, 知道 $A > 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

例 2 下面的叙述错在哪儿?

"设 $a_n = 2^n, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

因为显然有 $a_n > 0$, 所以 $\{a_n\}$ 递增. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 从而得出

$$A = 2A \Rightarrow A = 0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = 0$."

以前知道圆周率 π 是一个重要的无理数, 现在来介绍另一个重要的无理数 e.

考察数列 $\{e_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的收敛性, 下面的证法是最基本的, 而教材上的证法技巧性较强. 利用二项式展开, 得

$$\begin{aligned}
e_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

由此得

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\
+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

把 e_n 和 e_{n+1} 的展开式作比较就可发现, e_n 的展开式有 $n+1$ 项, 其中的每一项都比 e_{n+1} 的展开式中的前 $n+1$ 项小, 而 e_{n+1} 的最后一项大于零. 因此

$$
e_n < e_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots,
$$

从而 $\{e_n\}$ 是单调增数列, 且

$$e_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

由此 $e_n \le 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} < 3$, 这就证明了 $\{e_n\}$ 又是有界数列. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ 存在. 记此极限为 e, 即

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

*** 例 3** 设 $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n = 1, 2, \cdots$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}.$$

证 显然 $\{s_n\}$ 是单调增数列, 且由例 2 中的 (2) 式,

$$\begin{aligned} e_n &\le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在且由极限的保不等式性,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} e_n \le \lim_{n\to\infty} s_n.$$

又对任意 $n > m$，

$$
\begin{aligned}
e_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

因此，在上式中两边令 $n \to \infty$，得

$$
\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} e_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.
$$

当 $m \to \infty$ 时，由极限的保不等式性，$\mathrm{e} \geq \lim\limits_{m\to\infty} s_m$. 从而

$$
\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).
$$

由公式 $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$, 可以较快地算出 e 的近似值.

由于

$$0 < s_{n+m} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!},$$

令 $m \to \infty$, 得到

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!n}, n = 1, 2, \cdots.$$

取 $n = 10, \mathrm{e} \approx s_{10} \approx 2.7182818$, 其误差

$$0 < \mathrm{e} - s_{10} \leq \frac{1}{10 \cdot 10!} < 10^{-7}.$$

例 4 设 S 是有界数集. 证明: 若 $\sup S = a \notin S$, 则存在严格单调增数列 $\{x_n\} \subset S$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证 因 a 是 S 的上界, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$, 使得 $x > a - \varepsilon$. 又因 $a \notin S$, 故 $x < a$, 从而有

$$a - \varepsilon < x < a.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\exists x_1 \in S$, 使得

$$a - \varepsilon_1 < x_1 < a.$$

再取 $\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, a - x_1\right\}$, 则 $\exists x_2 \in S$, 使得

$$a - \varepsilon_1 < x_2 < a,$$

且有 $x_2 > a - \varepsilon_2 \geq a - (a - x_1) = x_1$. 一般地, 按上述步骤得到 x_{n-1} 之后, 取

$$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\right\},$$

则存在 $x_n \in S$, 使得

$$a - \varepsilon_n < x_n < a$$

且有 $x_n > a - \varepsilon_n \geq a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1}$. 于是得到 $\{x_n\} \subset S$, 它是严格单调的, 满足

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

因此, $|x_n - a| < \varepsilon_n \leq \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

二、柯西收敛准则

定理 2.8 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对于任意正数 ε, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, 有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

柯西准则的充要条件可用另一种形式表达为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathbf{N}_+$, 均有

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

满足上述条件的数列称为柯西列. 由于该定理充分性的证明需要进一步的知识, 因此这里仅给出必要性的证明.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n, m > N$(或 $n, m \geq N$) 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

柯西(Cauchy,A.L. 1789—1857 ,法国)

例 5 设 $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 发散.

证 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall N > 0, \exists n_0 = N, m_0 = 2N$, 使得

$$\left|x_{n_0} - x_{m_0}\right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$
$$\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \varepsilon_0.$$

由柯西收敛准则的否定陈述, 可知 $\{x_n\}$ 发散.

例 6 设 $x_n = \frac{\sin 1}{2^1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}, n = 1, 2, \cdots$. 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \frac{-\log \varepsilon}{\log 2}$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right|$$

$$\le \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right)$$

$$= \frac{2}{2^{m+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) \le \frac{1}{2^m} < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\} \text{ 收敛.}$$

例 7 设数列满足条件: $|a_{n+1}-a_n|<r^n, n=1,2,\cdots,$ 其中 $r\in(0,1)$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证 若 $n<m$, 则

$$|a_n-a_m|\le|a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|$$
$$\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1}=\frac{r^n-r^m}{1-r}<\frac{r^n}{1-r}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1-r}=0$, 于是 $\forall\varepsilon>0, \exists N, n>N$,

$$\left|\frac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$$

若 $m>n>N$, 就有

$$|a_n-a_m|\le\left|\frac{r^n}{1-\mathrm{r}}\right|<\varepsilon.$$

由柯西准则, $\{a_n\}$ 收敛.

注 柯西收敛准则的意义在于：可以根据数列通项本身的特征来判断该数列是否收敛，而不必依赖于极限定义中的那个极限值 A. 这一特点在理论上特别有用，大家将会逐渐体会到它的重要性.

复习思考题

1. 对于数列是否收敛的各种判别法加以总结.
2. 试给出 $\{a_n\}$ 不是柯西列的正面陈述.