1 Stirling 数

1.1 Stirling 简介

James Stirling 是一位苏格兰籍的数学家。他 1692 年 5 月出生于苏格兰斯特灵郡，1770 年 10 月逝世于爱丁堡。Stirling 数以及 Stirling 逼近都是以他的名字命名的。James Stirling18 岁进入牛津大学贝利奥尔学院 (Balliol College, Oxford) 求学，后被驱逐至威尼斯。在威尼斯期间，James Stirling 在艾萨克. 牛顿的帮助下，与皇家科学院取得联系并邮寄了他的一篇论文 Methodus differentials Newtoniana illustrata (Phil.Trans., 1718)。后又在牛顿的帮助下于 1725 年回到伦敦。在伦敦的十年时间里，他一直致力于学术工作，1730 年，他最重要的工作 the methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum (4to, London) 发表。

这里我们主要介绍一下他的一个重要工作，Stirling 数。Stirling 数分为第一类和第二类。下面先看一下 Stirling 数的具体定义。

1.2 第一类 Stirling 数

定义 1.1 $c(n,k)$ 为恰好含有 k 个圈的 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的个数。数 $s(n,k) := (-1)^{n-k}$ $c(n,k)$ 被称为**第一类 Stirling 数**，而 $c(n,k)$ 被称为**无符号的第一类 Stirling 数**。

定义 1.2 **降阶乘函数**$(x)_n$ 定义如下

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

显然通常的阶乘 $n! = (n)_n$.

第一类 Stirling 数有如下等价定义：

定义 1.3 **第一类 Stirling 数**（记为 $s(n,k)$, $1 \le k \le n$）恰好为降阶乘多项式中的各项系数，即

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1}$$

定理 1.4 $c(n,k)$ 满足如下递推式

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1),\ n,k \ge 1$$

并且初值为 $c(0,0) = 1$，而对其它的 $n \le 0$ 或者 $k \le 0$，$c(n,k) = 0$。

证明：选定一个有 k 个圈的排列 $\pi \in \mathfrak{S}_{n-1}$. 在 π 的不交圈分解中，我们可以将 n 插入数字 $1, 2, \ldots, n-1$ 的任一个的后面，有 $n-1$ 种方法。这样就得到一个排列 $\pi^{'} \in \mathfrak{S}_n$ 的不交圈分解，它具有 k 个圈并且 n 出现在一个长度 ≥ 2 的圈中。于是共有 $(n-1)c(n-1,k)$ 个排列 $\pi^{'} \in \mathfrak{S}_n$ 具有 k 个圈并且满足 $\pi^{'}(n) \ne n$.

另一方面，如果选定一个有 k 个圈的排列 $\pi^{'} \in \mathfrak{S}_{n-1}$, 可以通过定义

$$\pi^{'}(i) = \begin{cases} \pi(i), & 若 i \in [n-1]; \\ n, & 若 i = n. \end{cases}$$

将其扩充为一个具有 k 个圈的排列 $\pi^{'} \in \mathfrak{S}_n$, 并且有 $\pi^{'}(n) = n$。因此，共有 $c(n-1,k-1)$ 个排列 $\pi^{'} \in \mathfrak{S}_n$ 具有 k 个圈并且满足 $\pi^{'}(n) = n$, 得证。 ∎

1.3 第二类 Stirling 数

定义 1.5 *把 n 个元素构成的集合划分为 k 个非空子集的方法数, 称为***第二类 Stirling 数**, *记为 $S(n,k)$.*

举例而言，集合 [3] 划分成三个子集合的方法只有一种: 1/2/3; 划分成两个子集合的方法有三种: 12/3, 13/2, 1/23; 划分成一个子集合的方法只有一种: 1 2 3.

定理 1.6 *第二类 Stirling 数有如下的递归关系式:*

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1),\ 1 \le k < n, \tag{2}$$

其中初始条件为 $S(n,n) = S(n,1) = 1$.

证明: 我们直接从第二类 Stirling 数的定义来给出这个递归关系式的证明。显然, 把 n 个元素放在一个集合和 n 个集合里都只有一种放法。现假设把 $n-1$ 个元素放在 k 个集合里的的方法数为 $S(n-1,k)$. 现在考虑把 n 个元素 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 放在 k 个集合里，我们将 a_n 单独拿出来考虑。会有如下两种方式:

1. 将前 $n-1$ 个元素放入 k 个集合中，再将 a_n 放入这 k 个集合中的某一个。这样一共有 $kS(n-1,k)$ 种放法。

2. 将前 $n-1$ 个元素放入 $k-1$ 个集合中，再将 a_n 单独放在一个新的集合中。这样给出另外 $S(n-1,k-1)$ 种方法。由此定理证明完毕。 ∎

现在我们考虑由变量为 x 的多项式组成的向量空间。对于这个无限维的向量空间最明显的一组基是单项式幂级数 x^n, $n \ge 0$. 然而同时，降阶乘函数

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1),\ n \ge 0$$

也是这个向量空间的一组基，自然能生成幂级数 x^n. 其实，第二类 Stirling 数就是这两组基之间的过渡矩阵里的元素，即:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k. \tag{3}$$

例如，$x^4 = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)$.

证明：现用归纳法证明上述递归关系式3。显然3对于 $n=1$ 成立。假设3对于 n 成立。由降阶乘函数的定义我们得到

$$x(x)_k = (x)_{k+1} + k(x)_k,$$

据此我们由归纳假设得到递归关系式

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)x(x)_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)[(x)_{k+1} + k(x)_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} [S(n,k-1) + kS(n,k)](x)_k + S(n,n)(x)_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1,k)(x)_k. \end{aligned}$$

所以3得证。 ∎

接下来给出3的一个简单的组合证明。考虑映射 $f : N \to X$，其中 $|N| = n$ 而 $|X| = x$。3的左边计数了映射 $f : N \to X$ 的总数。而每一个这样的映射都是到 X 的某个满足 $|Y| \le n$ 的子集 Y 的满射，且 Y 唯一。如果 $|Y| = k$，则有 $k!S(n,k)$ 个这样的映射。而满足 $|Y| = k$ 的 X 的子集 Y 有 $\binom{x}{k}$ 种选择，因此

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)\binom{x}{k} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

现在我们了解了有关于第二类 Stirling 数的组合解释，以及它作为幂函数与降阶乘函数之间过渡矩阵的元素。下面我们计算一下 $S(n,k)$ 的具体数值。

在计算的过程中，我们会用到有限差分演算，下面先简单罗列一下我们计算中会用到的一些概念和公式。给定一个映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$，定义一个新的映射 Δf 如下，称之为 f 的**一阶差分**，

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Δ 称为一阶**差分算子**。将算子 Δ 重复 k 次就可以得到 k 阶差分算子。

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f).$$

以上是差分算子的概念，下面的式子在我们的计算中会起到很重要的作用。

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0). \tag{4}$$

如果将连续两项 $f(i), f(i+1)$ 的差 $f(i+1) - f(i) = \Delta f(i)$ 写在它们下一行的中间，就得到序列

$$\ldots \Delta f(-2)\ \Delta f(-1)\ \Delta f(0)\ \Delta f(1)\ \Delta f(2) \ldots$$

反复这个过程，就得到映射 f 的差分表，它的第 k 行由 $\Delta^k f(n)$ 组成。从 $f(0)$ 开始往右下方延伸的对角线则是由 0 点的差分 $\Delta^k f(0)$ 构成。例如，令 $f(n) = n^4$, 则差分表 (从 $f(0)$ 开始) 如下

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & & \cdots \\
& 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & & \\
& & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & & & \\
& & & 36 & & 60 & & 84 & & & & & \\
& & & & 24 & & 24 & & & & & & \\
& & & & & 0 & & & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & & & &
\end{array}$$

因此，由4得

$$n^4 = \binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} + 0\binom{n}{5}$$

据此再结合3就可以得到 $S(n,k)$ 的具体数值。

习题 1.7 对所有 $m, n \in \mathbb{N}$，成立

$$\sum_{k\geq 0} S(m,n)s(m,n) = \delta_{mn}.$$

提示：$(S(m,n))_{m,n\geq 0}\,, (s(m,n))_{m,n\geq 0}$ 刚好是两组基之间的过渡矩阵。