

2017-2018 学年第二学期月考 1 矩阵, 二次型

一、填空题

1. 设 $A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 是 3 阶方阵, $|A| = -2$, 则 $|2\beta_1, \beta_1 + 2\beta_2, \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3| = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设方阵 A 满足 $A^2 + A - 2E = 0$, 则 $(A + E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 A, B 均为 n 阶方阵, $|A| = |B| = 2$, 则 $|2AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 A, B 是 n 阶方阵, 且 $r(A) = r$, $r(B) = s$, 则 $r(A, AB) = \underline{\hspace{2cm}}$, $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & B \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 A 是 3 阶可逆方阵, 将 A 的第一列的 3 倍加到第二列, 再将第二列的 3 倍加到第三列后得到矩阵 B , 则 $A^{-1}B = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 是否正定: $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 只与自身合同的矩阵是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 4 阶实对称矩阵按合同分类有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 类.
9. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_3x_4$ 的正惯性指数是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 负惯性指数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. n 元实二次型 $f(X) = X^T AX$ 正定的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、设 $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$,

(1) 求 $(f(x), g(x))$;

(2) 求 $u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

三、证明: $(f(x), h(x)) = 1, (g(x), h(x)) = 1$ 当且仅当 $(f(x)g(x), h(x)) = 1$.

四、设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

(1) 用非退化线性替换化此二次型为标准形; (2) a 满足何值时, 此二次型正定.

五、设 A 是实 n 阶方阵, 证明 $r(A^T A) = r(A)$.