

第二章 数 初初眼

§ 2收敛数列的

性质

保亏性

保不等式性

四则运算法则

第二章 数列极限

§2 收敛数列的性质



二章 数列极限

§ 2收敛数列的

有界性

保亏性 保不等式

迫敛性

其他运算法则

一些例子

作业定理和例题的证明。

■ §2收敛数列的性质

- 唯一性
- 有界性
- 保号性
- 保不等式性
- 迫敛性
- 四则运算法则
- 其他运算法则
- 子列



月二草 数 列极限

§ 2收敛数列的

唯一性

有界性保号性

保不等式性

四则运算法

其他还并法 一些例子

子列

定理和例题的证明:

定理

若 $\{a_n\}$ 收敛,则它只有一个极限.

证明

设 $a \neq \{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a, b$ 不能 $\neq \{a_n\}$ 的极限

 \ddot{a} a,b 都是 $\{a_n\}$ 的极限,则对于任何正数 $\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

 $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon$$



唯一性

定理

若 $\{a_n\}$ 收敛,则它只有一个极限.

证明

设 $a \in \{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a, b$ 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限,则对于任何正数 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时,有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

 $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon$$
.

第二章 数 列极限

§2收敛数列的 性质

唯一性 有界性

保不等式性

四则远算法员

其他远算法则 一些例子

子列

定理和例题的证明过

证明

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 n > N 时 (1), (2) 同时成立, 从而

有

$$|a - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的,所以a=b.



第二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

唯一性 有界性 保予性

保不等式性

四则远算法则 其他远算法则

一些例子子列

定理和例题的证明过程

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 为有界数列,即存在 M>0,使得 $|a_n| \leq M$, $n=1,2,\cdots$.

证明

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 对于正数 $\varepsilon=1,\exists N,n>N$ 时 $|a_n-a|<1$, 从而 $|a_n|<|a|+1$.

若令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a|+1\},$

则对一切正整数 n, 都有 $|a_n| \leq M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的,但却不收敛. 这就说明有界只数列收敛的必要条件,而不是充分条件.



若数列 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 为有界数列,即存在 M > 0,使 $\{a_n\} < M$, $n = 1, 2, \cdots$.

证明

设
$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$
, 对于正数 $\varepsilon=1,\exists N,n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 从而 $|a_n|<|a|+1$.

若令
$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a|+1\},$$

则对一切正整数 n, 都有 $|a_n| \leq M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说 明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.



若数列 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 为有界数列,即存在 M > 0,使得 $|a_n| \le M$, $n = 1, 2, \cdots$.

证明

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 对于正数 $\varepsilon=1,\exists N,n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 从而 $|a_n|<|a|+1$.

若令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a|+1\},$

则对一切正整数 n, 都有 $|a_n| \leq M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说 明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.



设 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 b, c, b < a < c, 则存在 N, 当 n > N 时, $b < a_n < c$.

设 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 b, c, b < a < c, 则存在

N, 当 n > N 时, $b < a_n < c$.

证明

取 $\varepsilon = \min\{a - b, c - a\} > 0, \exists N, \, \text{当} \, n > N \, \text{时},$

 $b < a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < c$, at $b < a_n < c$.

注 若
$$a > 0$$
 (或 $a < 0$), 我们可取 $b = \frac{a}{2}$ (或 $c = \frac{a}{2}$), 则 $a_n > \frac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \frac{a}{2} < 0$).



设 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 b, c, b < a < c, 则存在 N, 当 n > N 时, $b < a_n < c$.

证明

取
$$\varepsilon = \min\{a - b, c - a\} > 0, \exists N, \, \text{当} \, n > N$$
 时, $b \le a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \le c$, 故 $b < a_n < c$.

注 若
$$a > 0$$
 (或 $a < 0$), 我们可取 $b = \frac{a}{2}$ (或 $c = \frac{a}{2}$), 则 $a_n > \frac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \frac{a}{2} < 0$).

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

第二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

唯一性

有乔性

保亏性

保不等式台

迫效性

四则运算法员

其他远算法!

一些例

子列

定理和例题的证明:

例

证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

证明

对任意正数 ε , 因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} = 0$, 所以

 $\exists N > 0$, 当 n > N 时,

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} < 1$$
, $\mathbb{P} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$

这就证明了 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

列极限

§2收敛数列的 性质

tt ju

保予性 保不等式性 迫敛性

四则远算法则

其他远算法则 一些例子

子列 作业 定理和例题的证明过 例

证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

证明

对任意正数 ε , 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$, 所以由 定理 2.4,

 $\exists N > 0$, 当 n > N 时,

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} < 1, \ \mathrm{Fp} \ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$



月二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

唯一性 有界性 任苦社

迫敛性 四则远算法则

其他远算法则 一些例子

子列作业

定理和例题的证明过程

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为收敛数列,如果存在正数 N_0 ,当 $n > N_0$ 时,有 $a_n \le b_n$,则 $\lim_{n \to \infty} a_n \le \lim_{n \to \infty} b_n$.

证明

设 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$. 若 b < a, 取 $\varepsilon = \frac{a - b}{2}$,

保号性定理,存在 $N > N_0$,当n > N时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}, \ b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$, 导致矛盾.

所以 $a \leq b$.



设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为收敛数列,如果存在正数 N_0 ,当 $n > N_0$ 时,有 $a_n \le b_n$,则 $\lim_{n \to \infty} a_n \le \lim_{n \to \infty} b_n$.

证明

设 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$. 若 b < a, 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, 由保号性定理,存在 $N > N_0$,当 n > N 时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}, \ b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$,导致矛盾.

所以 $a \leq b$.

§ 2收敛数列的

性质 唯一性

有界性保号性

保不等式性

迫效性 四則法算法則

其他运算法则

一些例子

子列 作业

定理和例题的证明过程

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \leq b_n$ 改为 $a_n < b_n$,也只能得到 $\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$.

这就是说,即使条件是严格不等式,结论却不一定是严格不等式.

例如: 虽然
$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$$
,但 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$.

8二章 数
列极限

§ 2收敛数列的

有界性 保予性 保不等式性

四则运算法则

其他远算法则 一些例子 子列

作业 定理和例题的证明过

定理

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都以 a 为极限,数列 $\{c_n\}$ 满足: 存在 N_0 , 当 $n > N_0$ 时,有 $a_n \le c_n \le b_n$,则 $\{c_n\}$ 收敛,且 $\lim_{n \to \infty} c_n = a$.



证明

对任意正数 ε ,因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=a$,所以分 别存在 N_1,N_2 ,使得

当
$$n > N_1$$
 时, $a - \varepsilon < a_n$;

当
$$n > N_2$$
 时, $b_n < a + \varepsilon$.

取
$$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$$
, 当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$$
.

这就证得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$



列极限

§ 2收敛数列的

生质

有存性 保予性 保不等式性

迫效性 四则远算法则

其他远算法则 一些例子

作业 定理和例题的证明过 例

求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限.

解

设
$$h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \ge 0$$
,则有
$$n = (1 + h_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 (n \ge 2),$$
 故 $1 \le \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \le 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 又因
$$\lim_{n \to \infty} 1 = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \right) = 1,$$

所以由迫敛性, 求得 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.





若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为收敛数列,则数列 $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}, \{a_n\cdot b_n\}$

也都是收敛数列, 且有

- (1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;$
- (2) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$, 当 b_n 为常数 c 时, $\lim_{n \to \infty} cb_n = c \lim_{n \to \infty} b_n$;
- (3) 若 $b_n \neq 0$, $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$, 则 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 也收敛,且 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} a_n / \lim_{n \to \infty} b_n.$

用四则运算法则计算

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

其中 $m \leq k$, $a_m b_k \neq 0$.

列权限

§ 2收敛数列的 Ы Б

有界性 保号性 保不等式性

四则远算法则

以他远算法则 一些例子

作业 定理和例题的证明过 解

依据
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0(\alpha>0)$$
,分别得出:

(1) 当 m=k 时,有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a_m + a_{m-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \frac{1}{b^m}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{n} + \dots + b_1 \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \frac{1}{n^m}}$$

$$= \frac{a_m}{\frac{1}{n}}.$$



解

(2) 当 m < k 时,有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{k-m}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{a_m + a_{m-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \frac{1}{n^m}}{b_k + b_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + b_1 \frac{1}{n^{k-1}} + b_0 \frac{1}{n^k}}$$

$$= 0 \cdot \frac{a_m}{b_k} = 0.$$

原式 =
$$\begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, m = k, \\ 0, m < k. \end{cases}$$



其他运算法则

命题

数列 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{|a_n|\}$ 也收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

命题

数列 $\{a_n\}(a_n \ge 0)$ 收敛,则 $\{\sqrt{a_n}\}$ 也收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} .$$

二章 数列极限

§ 2收敛数列的

性质

有界性

18.77.132

保不等式台

迫敛性

四则还非法!

一些例子

子列

定理和例题的证明过

例

谈
$$a_n \ge 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明

因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$,根据极限的保号性,存在 N, 当

$$n > N$$
 时,有 $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$,即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$$

又因为
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$$
,所以由极限的迫敛性,证得 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

设
$$a_n \ge 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明

因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$,根据极限的保号性,存在 N, 当 n>N 时,有 $\frac{a}{2}< a_n<\frac{3a}{2}$,即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$,所以由极限的迫敛性,证得 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a \neq -1)$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{1 + a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + 1/a^n} = \frac{1}{1 + \lim_{n \to \infty} (1/a^n)} = 1$$

求极限
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a \neq -1).$$

解

- (1) 当|a| < 1, 因为 $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, 所以由极限四则运算法则, 得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^n}{1+\lim_{n\to\infty} a^n} = 0$.
- (3) 当|a| > 1,因 $\lim_{n \to \infty} (1/a^n) = 0$,故得

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{1 + a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + 1/a^n} = \frac{1}{1 + \lim_{n \to \infty} (1/a^n)} = 1.$$

二章 数列极限

§ 2收敛数列的

有界性

保不等式性

四则运算法员

一些例子 子列

子列 作业

定理和例题的证明过程

例

设 a_1, a_2, \cdots, a_m 为 m 个正数,证明

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

证明

设
$$a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$
. 由

$$a \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \le \sqrt[n]{m}a,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m} a = \lim_{n \to \infty} a = a$$

以及极限的迫敛性, 可得

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$



设 a_1, a_2, \cdots, a_m 为 m 个正数,证明

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

证明

设
$$a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$
. 由
$$a < \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} < \sqrt[n]{m}a.$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m} a = \lim_{n \to \infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 可得

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$



5二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

性质唯一性

有界性保守性

保不等式性

7则运算法则

其他远算法则 一些例子 子列

作业 定理和例题的证明过

定义

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为 \mathbb{N}_+ 的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列,简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 由定义, $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项均选自 $\{a_n\}$,且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序.

 $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 故总有 $n_k \ge k$



定义

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为 \mathbb{N}_+ 的无限子集,且 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列,简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 由定义, $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项均选自 $\{a_n\}$,且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序.

 $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项,故总有 $n_k \geqslant k$.

第二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

性质

有齐性 保号性

保不等式性

四则远算法则

一些例子 子列

定理和例题的证明过程

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a,则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a.

证明

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\exists n > N, |a_n - a| < \varepsilon$ 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k \ge k$, 因此

k>N 时, $n_k\geqslant k>N$,亦有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$$

注 由定理 2.8 可知, 若一个数列的两个子列收敛于不同值, 则此数列必发散.

若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a,则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a.

证明

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 n > N, $|a_n - a| < \varepsilon$. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k \geqslant k$, 因此 k > N 时, $n_k \geqslant k > N$, 亦有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$

注由定理 2.8 可知,若一个数列的两个子列收敛于不同的值,则此数列必发散.



若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a,则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a.

证明

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 n>N, $|a_n-a|<\varepsilon$. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k\geqslant k$, 因此 k>N 时, $n_k\geqslant k>N$, 亦有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a.$

注 由定理 2.8 可知, 若一个数列的两个子列收敛于不同的值,则此数列必发散.



第二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

唯一性

保号性 保不等式性 迫效性

四则远算法则

一些例子 子列

定理和例题的证明过程

例

求证
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
 的充要条件是

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \to \infty} a_{2n} = a.$$

证明(必要性)

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

因为2n > N, $2n - 1 \ge N$,所以

$$|a_{2n-1}-a|<\varepsilon, \quad |a_{2n}-a|<\varepsilon$$

从而必要性得证.



求证
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
 的充要条件是

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \to \infty} a_{2n} = a.$$

证明 (必要性)

设
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

因为
$$2n > N$$
, $2n-1 \ge N$, 所以

$$|a_{2n-1}-a|<\varepsilon, \quad |a_{2n}-a|<\varepsilon.$$

从而必要性得证.

时,

证

3.2代致效入7.07 性质 唯一性

保予性保不等式性

四则远算法则

其他运算法则 一些例子

作业
定理和例题的证明过

证明 (充分性)

设 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \quad \text{\textit{if }} k > N$

$$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon.$$

令
$$N=2K$$
, 当 $n>N$ 时,则有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
.

若
$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

$$\lim_{k \to \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \to \infty} -\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = -1;$$

$$\lim_{k \to \infty} a_{2k} = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = 1.$$

列极限

§ 2收敛数列的

例

若
$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证明

显然

$$\lim_{k \to \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \to \infty} -\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = -1;$$

$$\lim_{k \to \infty} a_{2k} = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = 1.$$

因此,数列 $\{a_n\}$ 发散.

7-7- × 列极限

§ 2收敛数列的

- 有界性 保予性 保不等式性
- 迫敛性 四則远算法則
- 四则远算法则
- 一些例子
- 作业

- 1. 极限的保号性与保不等式性有什么不同?
- 2. 仿效例题的证法,证明: 若 $\{a_n\}$ 为正有界数列,则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n} = \sup\left\{a_n\right\}.$$

§ 2收敛数列的

唯一性

有界性

12 7 22 4

.

on this are all of

一些例子

子列

作业

定理和例题的证明主

• P31 习题2.2

1, 2, 3, 4, 9, 10.



5二章 数 列极限

§ 2收敛数列的

有界性保守性

迫敛性 四则远算法则

其他远算法则 一些例子

作业 定理和例题的证明过 证 (1) 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a, \lim_{n\to\infty}b_n=b, \forall \varepsilon>0$,存在 N,当 n>N 时,有 $|a_n-a|<\varepsilon, |b_n-b|<\varepsilon$,所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性,得到

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n.$$

(2) 因 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界,设 $|b_n| \leq M$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 n > N 时,有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$



5二章 数
列极限

§ 2收敛数列的

四则远算法则

其他远算法则 一些例子 子列

定理和例题的证明过

于是

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$$

 $\leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b| < 2\varepsilon$

由 ε 的任意性,证得

$$\lim_{n \to \infty} a_n b_n = ab = \lim_{n \to \infty} a_n \lim_{n \to \infty} b_n.$$
(3) 因为 $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, 由(2), 只要证明
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} b_n}.$$



第二章 数列极限

§ 2收敛数列的

保予性保不等式性

2效性 2別远算法則 4他远算法則

一些例子 子列

> 定理和例题的证明过 c

由于
$$b \neq 0$$
,据保号性, $\exists N_1$,当 $n > N_1$ 时, $|b_n| > \frac{|b|}{2}$.

又因为 $\lim_{n\to\infty} b_n = b, \exists N_2, \, \, \exists \, n > N_2 \, \, \mathrm{fl},$

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 n > N 时,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \le \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \le \varepsilon,$$

$$\text{ If } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}. \text{ If if } \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n}.$$



§ 2收敛数列的

唯一性

有养性

保不等式性

迫敛性

四则运算法则

一些例子

十列

定理和例题的证明主

证明

设 $a=\lim_{n\to\infty}a_n$. 则有对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbb{N}$,使得当n>N,有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

此时,有

$$||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon.$$

从而可知

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

证明

设 $a = \lim_{n \to \infty} a_n$. 由于 $a_n \ge 0$,根据极限的保不等式性,有 $a \ge 0$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 n > N 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可得:

- (1) a=0 时,有 $|\sqrt{a_n}-|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon}$;
- (2) a > 0 时,有 $\left| \sqrt{a_n} \sqrt{a} \right| = \frac{|a_n a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n a|}{\sqrt{a}} \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.