化二次型为标准形和实、复规范形： $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

解 配方法：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1+2x_2+x_3)^2-2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3=(x_1+2x_2+x_3)^2-2(x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{5}{2}x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=x_2+\dfrac{1}{2}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ ， $Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X$ ，即 $X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Y$ ，

得标准形 $g(Y)=y_1^2-2y_2^2+\dfrac{5}{2}y_3^2$ ，

复规范形：令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=\sqrt{-2}y_2=\sqrt{2}iy_2 \\ z_3=\sqrt{\frac{5}{2}}y_3=\frac{\sqrt{10}}{2}y_3 \end{cases}$ ，即 $Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}Y$ ，即 $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}Z$

得 $h(Z)=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.所做的线性替换为

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}Z=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}Z.$$

实规范形：令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=\sqrt{\frac{5}{2}}y_3=\frac{\sqrt{10}}{2}y_3 \\ z_3=\sqrt{2}y_2 \end{cases}$ ，即 $Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}Y$ ，即 $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 \end{pmatrix}Z$.

得 $h(Z)=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.所做的线性替换为

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 \end{pmatrix}Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 \end{pmatrix}Z.$$

矩阵的初等变换：二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$，标准形就有了.

令 $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，做 $X=CY$，则二次型化为标准形 $g(Y)=y_1^2-2y_2^2+\dfrac{5}{2}y_3^2$.

复规范形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}$.

令 $C=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}$，做 $X=CY$，则二次型化为标复规范形 $g(Y)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

实规范形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

令 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 \end{pmatrix}$，做 $X=CY$，则二次型化为标实数范形 $g(Y)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.