天津师范大学考试试题参考答案及评分标准

201　—201　学年第一学期期末考试试卷（3卷）

学院：　数学科学学院　　专业：数学与应用数学　信息与计算科学　　科目：高等代数 2-1

一、　**填空题:（每题 3 分，本大题共 30 分）**

1.　$\frac{1}{2}n!$.

2.　$\frac{n(n-1)}{2}-k$.

3.　$-2^6\cdot 3=-192$.

4.　1.

5.　$\frac{4}{5}$.

6.　$-\frac{1}{3}(A+2E)$.

7.　$n-r$.

8.　$t\neq 5$.

9.　$\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

10.　α_1,α_2 或 α_2,α_3 或 α_1,α_3.

二、　**计算题:（每小题 10 分，本大题共 40 分）**

1.　解　$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\0&1&0&\cdots&0&0&2\\0&0&1&\cdots&0&0&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&n-2\\0&0&0&\cdots&0&1&n-1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&-1&n+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\0&1&0&\cdots&0&0&2\\0&0&1&\cdots&0&0&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&n-2\\0&0&0&\cdots&0&1&n-1\\0&0&0&\cdots&0&0&\dfrac{n(n+1)+2}{2}\end{vmatrix}$$

$=\dfrac{n(n+1)+2}{2}$. ……(10 分)

2. 解 设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\x&y&z\end{pmatrix}$满足 $AB=BA$,则有

$\begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\a+d&b+e&c+f\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&a+b&0\\d+e&d+e&0\\x+y&x+y&0\end{pmatrix}$,故$\begin{cases}b=d\\a=e\\c+f=0\\x+y=0\end{cases}$,从而 ……(5 分)

$B=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&-c\\x&-x&z\end{pmatrix}$,其中 a,b,c,x,z 任取. ……(10 分)

3. 解 增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&2&1&1&1\\1&0&2&2&2&3\\2&2&4&3&3&a\\3&8&6&2&2&b\end{array}\right)$ 化为阶梯形.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&2&1&1&1\\1&0&2&2&2&3\\2&2&4&3&3&a\\3&8&6&2&2&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&2&1&1&1\\0&-2&0&1&1&2\\0&-2&0&1&1&a-2\\0&2&0&-1&-1&b-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&2&1&1&1\\0&-2&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&a-4\\0&0&0&0&0&b-1\end{array}\right)$$

当 $a=4$ 且 $b=1$ 时, $r(A)=r(\overline{A})=2$,有解. ……(4 分)

导出组的基础解系含有3个向量.

求特解: $\gamma_0=(3,-1,0,0,0)$, ……(6 分)

基础解系: $\eta_1=(-2,0,1,0,0),\eta_2=(-4,1,0,2,0),\eta_3=(-4,1,0,0,2)$, ……(9 分)

则通解为 $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$.其中 k_1,k_2,k_3 任意. ……(10 分)

4. 解 A 可逆，则由 $A^{-1}BA=6A+BA,$ 可得 $A^{-1}B=6E+B,$ 两端左乘 A ,得 $B=6A+AB$,

移项得 $\left(E-A\right)B=6A,$ 则 $B=6\left(E-A\right)^{-1}A.$ ……(5 分)

$$\left(E-A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&&\\&\frac{3}{4}&\\&&\frac{6}{7}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&\frac{4}{3}&\\&&\frac{7}{6}\end{pmatrix},\text{故 } B=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}.$$ ……(10 分)

三、 **证明题:（每小题 10 分，本大题共 30 分）**

1. 证明 记原行列式为 D_n ,则 D_n 按照第一行展开可得

$D_n=6D_{n-1}-8D_{n-2}$,则有 ……(4 分)

(1) $D_n-2D_{n-1}=4(D_{n-1}-2D_{n-2})$， (2) $D_n-4D_{n-1}=2(D_{n-1}-4D_{n-2})$，

(1) (2) 作为递推公式可分别得

$D_n-2D_{n-1}=4^2(D_{n-2}-2D_{n-3})=4^{n-2}(D_2-2D_1)=4^n$，

$D_n-4D_{n-1}=2^2(D_{n-2}-4D_{n-3})=2^{n-2}(D_2-4D_1)=2^n$,从而可得 ……(6 分)

$D_n=2^{2n+1}-2^n.$ ……(10 分)

2. 证明 对矩阵 B 列分块,设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,由于 $AB=0$, 则

$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=0$,故 $A\beta_1=0,A\beta_2=0,\cdots,A\beta_n=0$.

从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性方程组 $AX=0$ 的解. ……（5 分）

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩不超出 $AX=0$ 的基础解系所含向量的个数,即

$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\le n-r(A)$,即 $r(B)\le n-r(A)$,从而有 $r(A)+r(B)\le n$. ……（10 分）

3. 证明 设(I) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与(II) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 秩都为 r ,且(I)可由(II)线性表出,不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 分别为两个向量组的一个极大无关组,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表出.考察向量组(III) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$.其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是(III)的一个线性无关的部分组,且能线性表出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,故可线性表出(III),当然(III)能线性表出 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$,两个向量组等价,秩相等,从而(III)的秩也为 r ,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也是(III)的一个极大无关组,与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价,从而(I)与(II)等价. ……(10 分)