# 第五章　二次型

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

# Outline

1. 二次型及其矩阵表示

2. 标准形

3. 正定二次型

二次型就是二次齐次多项式. 在解析几何中讨论的有心二次曲线，当中心与坐标原点重合时，其一般方程为：

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f$$

方程的右端就是关于 x，y 的一个二次齐次多项式. 为了便于研究这个二次曲线的几何性质，通过选取合适的角度，把坐标轴作逆时针旋转，则相应的坐标变换为：

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

在新坐标下二次曲线的方程可化为标准方程：

$$a'x'^2 + c'y'^2 = f$$

这是一个只含有平方项的标准方程.

考察方程:

$$\frac{13}{72}x^2 + \frac{10}{72}xy + \frac{13}{72}y^2 = 1$$

该方程表示 xy 平面上怎样的一条二次曲线?

将 $xy$ 坐标系逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 即令

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

在新坐标下二次曲线的方程可化为标准方程:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

**定义**

一个系数在数域 $P$ 上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

称为数域 $P$ 上的一个 $n$ 元二次型，简称为二次型.

注意：

(1) 二次型就是 $n$ 元二次齐次多项式;

(2) 交叉项的系数采用 $2a_{ij}$，主要是为了矩阵表示的方便.

若在 $n$ 元二次型中令 $a_{ij}=a_{ji}$, 由于 $x_ix_j=x_jx_i$, 则二次型可表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$, 则二次型可用矩阵的乘积表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$$

其中 $A$ 称为该二次型的矩阵，$A$ 的秩称为该二次型的秩.

对于二次型的矩阵表示方法，需注意如下几点：

(1) 由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 故 $A$ 为对称矩阵

(2) 矩阵 A 中 $a_{ii}$ 为 $x_i^2$ 项的系数，$a_{ij}$ 为交叉项 $x_i x_j$ 系数的

(3) $n$ 元二次型 $f$ 与 $n$ 阶对称矩阵 $A$ 一一对应

**例 1**

写出二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵.

对于二次型的矩阵表示方法，需注意如下几点：

(1) 由于 $a_{ij}=a_{ji}$, 故 $A$ 为对称矩阵

(2) 矩阵 A 中 $a_{ii}$ 为 $x_i^2$ 项的系数，$a_{ij}$ 为交叉项 $x_ix_j$ 系数的

(3) $n$ 元二次型 $f$ 与 $n$ 阶对称矩阵 $A$ 一一对应

**例 1**

写出二次型 $f=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3$ 的矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

## 例 2

写出下列对称矩阵的二次型

*(1)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(2)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

## 例 3

写出二次型 $f(x_1, x_2) = X' \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X$ 的矩阵.

# 线性替换

## 定义

系数在数域 $P$ 中的一组关系式:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个线性替换.

令 $\quad X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)', \quad Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)',$

则线性替换可以表示为 $X = CY$.

若系数矩阵 $C$ 的行列式 $|C| \neq 0$, 则称该线性替换是非退化的.

二次型 $f = X'AX$ 经可逆变换 $X := CY$ 后, 有

$$f = (CY)'A(CY) = Y'\left(C'AC\right)Y$$

得到一个新二次型，矩阵由 $A$ 变为 $B = C'AC$.

**定义**

设 $A$, $B$ 是 $n$ 阶矩阵，如果存在一个 $n$ 阶可逆矩阵 $C$，使得 $B = C'AC$ 则称 $B$ 与 $A$ 是合同的.

**注**

- 合同是矩阵之间的一个等价关系, 这时因为合同关系满足
  1. 反身性 : $A = E'AE$
  2. 对称性: 由 $B = C'AC$ 即得 $A = \left(C^{-1}\right)' BC^{-1}$
  3. 传递性: 由 $A_1 = C_1'AC_1$ 和 $A_2 = C_2'A_1C_2$ 即得 $A_2 = (C_1C_2)' A (C_1C_2)$
- 合同矩阵具有相同的秩.
- 若 $A$ 为对称矩阵，则 $B$ 也为对称矩阵.

**定义**

一个只含有平方项的 $n$ 元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

称为**标准二次型**.

要使二次型 $f$ 经非退化线性变换 $X = CY$ 变成标准形就是要使

$$\begin{aligned} f = Y'(C'AC)Y &= k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

也就是要使 $C'AC$ 成为对角矩阵.

**定理 1**

数域 $P$ 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成标准形.

**定理 2**

数域 $P$ 上任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

**证明** 下面的证明实际上是一个具体地把二次型化成平方和的方法, 这就是中学里学过的“配方法”我们对变量的个数 $n$ 作归纳法.

- 对于 $n = 1$, 二次型就是

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2$$

  已经是平方和了.

- 现假定对 $n-1$ 元的二次型, 定理的结论成立.

- 再设

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

  分三种情形来讨论:

  1) $a_{ii}\,(1 \leq i \leq n)$ 中至少有一个不为零.

  2) 所有 $a_{ii} = 0$, 但是至少有一 $a_{1j} \neq 0 (2 \leq j \leq n)$.

  3) $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$.

1) $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个不为零, 例如 $a_{11}\neq 0$. 这时

$$
\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_nx_ix_j\\
&= a_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{i,j}x_ix_j\\
&= a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\right)^2-a_{11}^{-1}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j\\
&= a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

这里

$$
\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j=-a_{11}^{-1}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j
$$

是一个 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的二次型.

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1} a_1, x_j \\ y_2 = x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1} a_{1,y} \\ x_2 = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$

这是一个非退化线性替换，它使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11} y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$$

由归纳法假定，对 $\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$, 有非退化线性替换

$$\begin{cases} z_2 = c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + \cdots + c_{2n} y_n \\ z_3 = c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + \cdots + c_{3n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = c_{n2} y_2 + c_{n3} y_3 + \cdots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

能使它变成平方和 $d_2 z_2^2 + d_3 z_3^2 + \cdots + d_n z_n^2$.

于是非退化线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

就使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}z_1^2 + d_2z_2^2 + \cdots + d_nz_n^2$$

即变成平方和了. 根据归纳法原理, 定理得证.

2) 所有 $a_{ii}=0$, 但是至少有一 $a_{1j}\neq 0(j>1)$, 不失普遍性, 设 $a_{12}\neq 0$. 令

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

它是非退化线性替换, 且使

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= 2a_{12}x_1x_2+\cdots \\ &= 2a_{12}\left(z_1+z_2\right)\left(z_1-z_2\right)+\cdots \\ &= 2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2+\cdots \end{aligned}$$

这时上式右端是 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的二次型, 且 $z_1^2$ 的系数不为零, 属于第一种情况, 定理成立.

3) $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$. 由于对称性，有

$$a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$$

这时

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

是 $n-1$ 元二次型.

根据归纳法假定，它能用非退化线性替换变成平方和. ∎

# 配方法

用配方法化二次型为标准形的关键是消去交叉项

情形 1　如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 含 $x_1$ 的平方项, 而 $a_{11} \neq 0$ 则集中二次型中含 $x_1$ 的所有交叉项, 然后与 $x_i$ 配方，并作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + a_n x_n \\ y_2 = \quad x_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n = \quad x_n \end{cases}$$

得 $f = d_1 y_1^2 + g(y_2, \cdots, y_n)$, 其中 $g(y_2, \cdots, y_n)$ 是 $y_2, \cdots, y_n$ 的二次型 · 对 $g(y_2, y_3, \cdots, y_n)$ 重复上述方法直到化二次型 $f$ 为标准形为止.

情形 2　如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不含平方项, 即 $a_{ii} = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 但含某一个 $a_{ij} \neq 0(i \neq j)$, 则可先作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n; k \neq i, j) \end{cases}$$

把 f 化为一个含平方项 $y_i^2$ 的二次型, 再用情形 1 的方法化为标准形.

## 例 1

用非退化线性变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2$$

为标准形, 并写出所用的非退化线性变换.

**解** (配方法)

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2 + x_1\left(4x_2 + 6x_3\right) + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 2\left(x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 \\ &= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + x_2^2 - 6x_2x_3 - 5x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 - 14x_3^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 - 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{9}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

则原二次型化为 $g(Y) = 2y_1^2 + y_2^2 - 14y_3^2$.

## 例 2

化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

**解** 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

代入

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

得

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

再配方，得

$$f = 2\left(y_1 - y_3\right)^2 - 2\left(y_2 - 2y_3\right)^2 + 6y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$

则 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

得

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# 合同变换法

1. 写出二次型 $f$ 的矩阵 $A$, 并构造 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$.
2. 对 $A$ 进行初等行变换和同样的初等列变换，把 $A$ 化为对角矩阵 $D$, 并对 $E$ 施行与 $A$ 相同的初等列变换化为矩阵 $C$, 此时 $CAC = D$.
3. 写出非退化线性替换 $X = CY$ 化二次型为标准形 $f = Y'DY$ 这个方法可示意如下:

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}E\text{ 只进行其中的初等列变换}]{\text{对}A\text{ 进行同样的初等行变换和初等列变换}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$

**解** 用合同变换法化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形.

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$

则 $C'AC = D$.

标准形中的系数不是唯一确定的. 例如：对二次型

$$2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$$

做线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

得到标准形

$$2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2$$

进一步做替换

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

得到另一个标准形

$$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2$$

合同不改变矩阵的秩.

共同点：标准形中系数不为零的平方项的个数是唯一确定的.

# 复数域上的二次型

## 定理 3

任意一个秩为 $r$ 的复系数的 $n$ 元二次型，可经过适当的非退化线性替换化为复规范型：

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

而且这个规范型是唯一的.

## 推论

- 任意一个复对称矩阵 $A$ 都合同于对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}$$

  其中对角线上 $1$ 的个数 $r$ 等于矩阵 $A$ 的秩.

- 两个复对称矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 它们的秩相等.

## 定理 4

任意一个秩为 $r$ 的实系数的 $n$ 元二次型，可经过适当的非退化线性替换化为实规范型：

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

而且这个规范型是唯一的.

## 定义

实二次型 $f$ 的规范型中，

- 正平方项的个数 $p$ 称为 $f$ 的正惯性指数;
- 负平方项的个数 $r-p$ 称为 $f$ 的负惯性指数;
- 它们的差 $p-(r-p)$ 称为 $f$ 的符号差.

## 例 3

对标准二次型

$$2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2,$$

- 令 $z_1 = \sqrt{2}w_1,\ z_2 = \sqrt{2}w_2 i,\ z_3 = \sqrt{6}w_3 i,$
  得到复数域上的规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2;$$

- 令 $y_1 = \sqrt{2}w_1,\ y_2 = \sqrt{6}w_3,\ y_3 = \sqrt{2}w_2,$
  得到实数域上的规范形

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

## 推论

任意一个实对称矩阵 $A$ 都合同于对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

其中对角线上 $1$ 和 $-1$ 的个数是唯一确定的，且其和 $r$ 等于矩阵 $A$ 的秩.

问题：试给出两个实对称矩阵合同的充要条件.

**推论**

任意一个实对称矩阵 $A$ 都合同于对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

其中对角线上 $1$ 和 $-1$ 的个数是唯一确定的，且其和 $r$ 等于矩阵 $A$ 的秩.

问题：试给出两个实对称矩阵合同的充要条件.

**推论**

两个实对称阵合同 $\Leftrightarrow$ 它们的秩相等且正惯性指数也相等.

# §4 正定二次型

**定义**

实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的，如果对任意一组不全为零的的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$

**定理 5**

实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 是正定二次型的充要条件是 $d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$

非退化的线性替换不改变二次型的正定性.

**定理 6**

$n$ 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定的充要条件是它的正惯性指数为 $n$.

# 正定矩阵

**定义**

如果实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 是正定的，则称实对称矩阵 $A$ 为正定矩阵.

**定理 7**

实对称矩阵 $A$ 正定 $\Leftrightarrow$ 它与单位矩阵合同.

实对称矩阵 $A$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在非奇异矩阵 $C$, 使得 $A = C'C$

**推论**

正定矩阵的行列式大于零.

正定矩阵是可逆的，且其逆矩阵仍为正定矩阵.

直接利用矩阵的元素来判断它的正定性.

## 定义

$n$ 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 的左上角的 $k$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k=1,2,\cdots,n$$

称为矩阵 $A$ 的 $k$ 阶顺序主子式.

## 定理 8

实二次型 $f(X)=X'AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A$ 的各阶顺序主子式全大于零.

## 定理

设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$, 下列命题等价:

1. $n$ 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 是正定的
2. 它的正惯性指数为 $n$
3. $A$ 与单位矩阵 $E$ 合同
4. 存在 $n$ 级实可逆矩阵 $C$ 使 $A = C'C$.
5. 矩阵 $A$ 的各阶顺序主子式全大于零.

## 例 1

判别二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 是否正定。

**解** $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

它的顺序主子式

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} > 0$$

因之, $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定.

## 例 2

当 $t$ 为何值时, 下面的二次型是正定的?

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

**解** 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

要使 $f$ 为正定二次型, 其充分必要条件是 $A$ 的各阶顺序主子式均大于零,

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4(t+2)(t-1) > 0$$

解得当 $-2 < t < 1$ 时二次型 $f$ 正定.

# 二次型的分类

## 定义

设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有

1. $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是正定的。
2. $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geq 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是半正定的。
3. $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) < 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是负定的。
4. $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \leq 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是半负定的。
5. $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 不确定，则称 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是不定的。

## 定理 9

设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$, 下列命题等价:

1. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 是半正定的
2. 它的负惯性指数与秩相等,
3. 有可逆实矩阵 $C$, 使得
$$C'AC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, d_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n$$
4. 有实矩阵 $C$, 使得 $A = C'C$
5. 矩阵 $A$ 的所有主子式大于或等于零.