组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

二项式定理中的系数都是组合数, 组合数和二项式定理有密切的关系.

本章我们就详细讨论这种关系.

回忆：表达式 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合数.

对于非负整数 n 和 k, 我们已经证明了

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

由此不难得到

- 对称性：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 恒等式：$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

它还具有许多很奇妙的性质, 关于它也有着许多恒等式.

第 3 章　二项式系数

1. Pascal 公式
2. 二项式定理
3. 多项式定理
4. 组合恒等式
5. 高斯系数

二项式系数

1. Pascal 公式
2. 二项式定理
3. 多项式定理
4. 组合恒等式
5. 高斯系数

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

证明: 直接将 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ 代入上式验证等式成立.

Pascal 三角 (杨辉三角或贾宪三角)

17 世纪, 法国数学家 Pascal 做出了下面的三角形.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

表: Pascal 三角

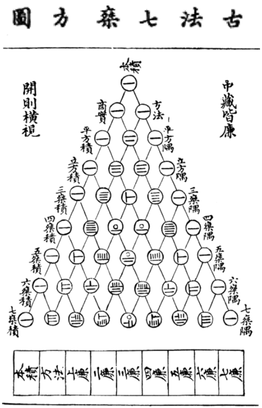


图: 朱世杰《四元玉鉴》中的“古法七乘方图”

13 世纪中国南宋数学家杨辉在《详解九章算术》里解释右边这种形式的数表, 并说明此表引自 11 世纪贾宪的《释锁算术》.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的组合证明 — 集合的组合

- 令 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$, 考虑它的 k-组合
- 将 S 的 k-组合分成两类:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{不含元 } n \text{ 的 } k\text{-组合}\} \\ B &= \{\text{包含元 } n \text{ 的 } k\text{-组合}\} \end{aligned}$$

- 按加法原理, $\binom{n}{k} = |A| + |B|$.
- A 的 k-组合恰好是集合 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的 k-组合, 故 $|A| = \binom{n-1}{k}$
- B 的 k-组合已包含 n, 只需从集合 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中再选出 $k-1$ 个元素即可, 故 $|B| = \binom{n-1}{k-1}$.

例如:

- $n = 5, k = 3, \binom{n}{k} = 10$
  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- A 的 3-组合:

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \\ \{1,3,4\}, \{2,3,4\},$$

对应集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的 3-组合.

- B 的 3-组合:

$$\{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \\ \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\},$$

去掉 $n = 5$ 后, 得

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$

恰好是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的 2-组合.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的另一种组合解释

- 令 n 是非负整数, 且 $1 \leq k \leq n-1$.
- $p(n,k)$: 表示从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的路径的条数, 其中每条路径包含 n 步, 每一步只有两种选择:

$$\text{水平向右 } (1,0) \rightarrow \qquad \text{水平向上 } (0,1) \uparrow$$

- 从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的路径, 有两种选择
  $i)$ 从点 (0,0) 到点 $(k, n-k-1)$, 再水平向上移至 $(k, n-k)$;
  $ii)$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(k-1, n-k)$, 再水平向右移至 $(k, n-k)$;
- 由加法原理: $p(n,k) = p(n-1,k) + p(n-1,k-1)$.

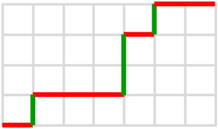


图: 格路

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t, s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如： $1, 3, 3, 1$.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t, s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如：$1, 3, 3, 1$.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

提示：只需对 $0 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ 证明 $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.

对数凹性 (logarithmic concave)

定义 1.4

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$, 如果存在一个整数 t $(1 \le t \le n-1)$, 使得

$$s_t^2 \ge s_{t-1}s_{t+1},$$

则序列 $\{s_t\}_0^n$ 是对数凹的.

对数凹性 (logarithmic concave)

定义 1.4

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$, 如果存在一个整数 t $(1 \le t \le n-1)$, 使得

$$s_t^2 \ge s_{t-1}s_{t+1},$$

则序列 $\{s_t\}_0^n$ 是对数凹的.

命题 1.5

若序列 $\{s_t\}_0^n$ 是对数凹的, 则该序列一定是单峰的.

对数凹性 (logarithmic concave)

定义 1.4

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$, 如果存在一个整数 t $(1 \le t \le n-1)$, 使得

$$s_t^2 \ge s_{t-1}s_{t+1},$$

则序列 $\{s_t\}_0^n$ 是对数凹的.

命题 1.5

若序列 $\{s_t\}_0^n$ 是对数凹的, 则该序列一定是单峰的.

证明 反证法. 若该序列不是单峰的, 则存在连续三项满足

$$s_{t-1} > s_t < s_{t+1}.$$

于是有 $s_t^2 < s_{t-1}s_{t+1}$, 与对数凹性定义矛盾.

命题 1.6

二项式系数序列 $\{\binom{n}{k}\}_0^n$ 是对数凹的.

证明 法一（直接证明）

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\,\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} \geq 1.$$

故

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1},$$

该序列对数凹.

法二（格路组合证明）

- 令 $u_1=(1,0), u_2=(0,1), v_1=(k+1,n-k), v_2=(k,n-k+1)$, $p(u_i;v_j)$ 表示从 u_i 到 v_j 只允许向上、向右的格路条数, 于是有

$$p\left(u_1;v_1\right)=p\left(u_2;v_2\right)=\binom{n}{k},$$

$$p\left(u_1;v_2\right)=\binom{n}{k-1},\quad p\left(u_2;v_1\right)=\binom{n}{k+1}.$$

- 要证

$$\binom{n}{k}^2-\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}\geq 0,$$

即考虑如下形式

$$\left|\begin{array}{cc} p\left(u_1;v_1\right) & p\left(u_1;v_2\right) \\ p\left(u_2;v_1\right) & p\left(u_2;v_2\right) \end{array}\right|=p\left(u_1;v_1\right)p\left(u_2;v_2\right)-p\left(u_1;v_2\right)p\left(u_2;v_1\right).$$

- 用 $\mathcal{P}\left(u_i;v_j\right)$ 表示从 u_i 到 v_j 只允许向右、向上的格路集合.
- $p\left(u_1;v_1\right)p\left(u_2;v_2\right)$ 表示如下格路对的计数

$$\left(P_1,P_2\right)\in\mathcal{P}\left(u_1;v_1\right)\times\mathcal{P}\left(u_2;v_2\right):=\mathcal{P}_{12}.$$

- 类似地,$p\left(u_1;v_2\right)p\left(u_2;v_1\right)$ 表示如下格路对的计数

$$\mathcal{P}\left(u_1;v_2\right)\times\mathcal{P}\left(u_2;v_1\right):=\mathcal{P}_{21}.$$

为证明行列式非负, 我们要在集合 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{12} \cup \mathcal{P}_{21}$ 上构建一个符号反转对合 Ω, 其中符号的定义为

$$\operatorname{sgn}(P_1, P_2) = \begin{cases} +1 & \text{如果 } (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{12} \\ -1 & \text{如果 } (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{21} \end{cases}$$

考虑 $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}$,

1. 若 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, 则该格路对一定属于 $\mathcal{P}_{12}$, 因为 $\mathcal{P}_{21}$ 中任意路对都相交. 此时定义
$$\Omega(P_1, P_2) = (P_1, P_2).$$
2. 若 $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, 则考虑路 P_1 与 P_2 的第一个交点 x, 定义 $\Omega(P_1, P_2) = (P_1', P_2')$, 其中
$$P_1' = u_1 \xrightarrow{P_1} x \xrightarrow{P_2} v_2$$
$$P_2' = u_2 \xrightarrow{P_2} x \xrightarrow{P_1} v_1$$
P_1' 表示路 P_1 中从顶点 u 到 x 的部分以及路 P_2 中从顶点 x 到 v_2 的部分组成的路, P_2' 类似.

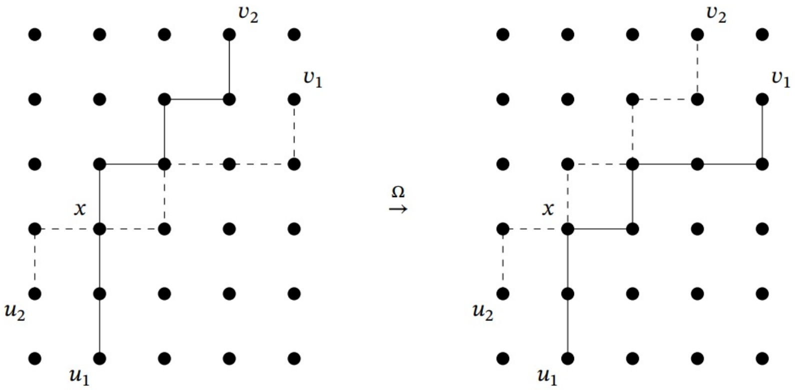


图: 符号对合变换

由 Lindström-Gessel-Viennot 引理, 有

$$\begin{vmatrix} p(u_1; v_1) & p(u_1; v_2) \\ p(u_2; v_1) & p(u_2; v_2) \end{vmatrix} = \text{不相交路对} \, (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{12} \text{ 条数}.$$

我们定义其符号为正, 因此该行列式为正, 即证得二项式系数的对数凹性.

观察得结论

- 三角形数: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

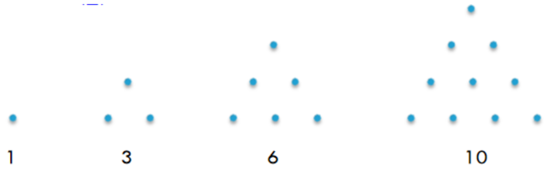


图: 三角形阵列点数

观察得结论

- 四面体数：$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

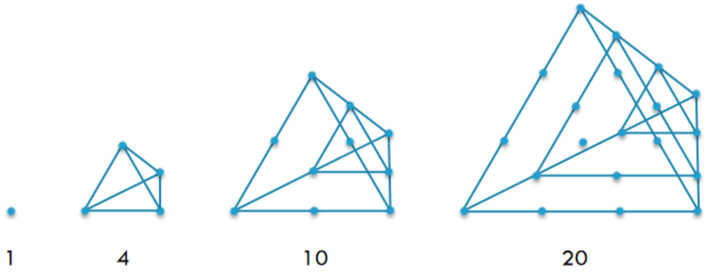


图: 四面体阵列点数

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

一般地，可以得到

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

例 1.1

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

例 1.1

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \sum_{m=1}^{n} m^2 = 2\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right). \end{aligned}$$

例 1.2

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

例 1.2

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

将 $m = 1, 2, 3$ 分别代入 (*) 式得

$$1 = c$$

$$8 = b + 2c$$

$$27 = a + 3b + 3c$$

解方程组得 $a = 6, b = 6, c = 1$.

例

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

因此,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \sum_{m=1}^{n} m^3 = 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

清代数学家李善兰 (1811-1882) 在《垛积比类》一书中对垛积进行了系统的研究. 所谓垛积数就是二项式系数, 因用于计算按照一定图形堆垛的物品数量而得其名. 在该书的第二卷, 李善兰讨论了如下的求和问题:

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p,$$

其中 p 为正整数. 为此他把 m^p 分解成垛积数 $\binom{m+p-k}{p}$ 的线性组合

$$m^p = \sum_{k=1}^{p} A(p,k)\binom{m+p-k}{p}, \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $A(p,k)$ 为与 m 无关的系数, 称为李善兰系数.

闻名中外的"李善兰恒等式"就是从上述分解过程中归纳得到的:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 \binom{n+2m-k}{2m} = \binom{m+n}{n}^2.$$

Andrews 称上述恒等式为中国恒等式 (Chinese Identity).

华罗庚给出了这个恒等式的数学归纳法证明.

二项式系数

二项式定理

定理 2.1

令 n 是一个正整数, 对所有的 x 和 y, 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- 证明一：乘法分配律展开, 再合并同类项.
  将 $(x+y)^n$ 写作
  $$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot\cdots\cdot(x+y)}_{n},$$
  我们发现对于 $x^{n-k}y^k$ 一项, 一定有 n 项乘积中的 $n-k$ 项贡献了 x, 其余 k 项贡献了 y. 因此 $x^{n-k}y^k$ 项系数为 $\binom{n}{k}$.
- 证明二：归纳法.

二项式定理

证明三：泰勒级数展开.

e^x 泰勒级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots.$$

因为 $e^{x+y} = e^x e^y$, 相同函数的幂级数逐项相等, 于是在 $x+y$ 处的级数等于在 x 处的级数和在 y 处的级数的卷积, 即

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!},$$

化简得

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

等价形式

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{k} y^{n-k}$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$

特殊地, 令 $y=1$, 得

推论 2.2

令 n 是一个正整数, 对所有的 x, 有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$$

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^7$.

例 2.2

$(3x-2y)^{18}$ 的展开式中,x^5y^{13} 的系数是什么? x^8y^{10} 的系数是什么?

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^7$.

例 2.2

$(3x-2y)^{18}$ 的展开式中,x^5y^{13} 的系数是什么? x^8y^{10} 的系数是什么?

$$\begin{aligned}(2x-y)^7 &= \sum_{r=0}^{7}\binom{7}{r}(2x)^r(-y)^{7-r}\\ &= -\sum_{r=0}^{7}(-2)^r\binom{7}{r}x^ry^{7-r}.\end{aligned}$$

$$(3x-2y)^{18}=\sum_{r=0}^{18}\binom{18}{r}(3x)^r(-2y)^{18-r}$$

$$x^5y^{13}\text{ 系数: }\tbinom{18}{5}3^5(-2)^{13}$$

$$x^8y^{10}\text{ 系数: }\tbinom{18}{8}3^8(-2)^{10}$$

牛顿二项式定理

定义 2.3

设 α 是实数,k 是非负整数, 定义二项式系数为

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

定理 2.4

设 α 是实数, 对 $|z| < 1$ 的 z, 有

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

常用展开式

- $\alpha = -n$, 其中 n 为正整数

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- $(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$
- $(1+z)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$
- $(1+z)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^k$

令 $-z$ 代替上面的 z

- $(1-z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k$
- $(1-z)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$
- $(1-z)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$

推论 2.5

$(1-z)^{-n}$ 中 z^k 的系数等于 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的非负整数解, 即 $\binom{n+k-1}{k}$.

$$
\begin{aligned}
(1-z)^{-n} &= (1-z)^{-1}(1-z)^{-1}\cdots(1-z)^{-1}\\
&= (1+z+z^2+\cdots)\cdots(1+z+z^2+\cdots)
\end{aligned}
$$

从第一个因子选取 z^{k_1}, 从第二个因子选取 z^{k_2}, $\cdots$

常用展开式

- $\alpha = 1/2$

$$
\begin{aligned}
\binom{1/2}{k} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!\cdot(2k-2)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k-2)!!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}
\end{aligned}
$$

因此

$$
(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}z^k
$$

二项式系数

回顾——重集的排列数

定理 3.1

令 S 是一个有 t 个不同类型的元的多重集，各个元的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_t$，满足 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$，则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

定义 3.2

多项式系数定义为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

这里 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$.

多项式定理

定理 3.3

对于 t 个不同的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n,\\ n_1,n_2,\cdots,n_t \geqslant 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$$

- 证明：利用乘法的分配律将乘积完全展开，再考虑合并同类项，$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 有 $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 种排列.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中,$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中,$x_1^3x_2x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3(-3)^1 5^2 = -36000$$

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中,$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3(-3)^1 5^2 = -36000$$

$$\binom{10}{3,1,4,2} = \frac{10!}{3!1!4!2!} = 12600$$

多项式定理

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中, 共有多少不同的项?

多项式定理

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中, 共有多少不同的项?

展开式中, 一般项为 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$, 满足

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$$

因此不同的项的数目等同于上述方程的非负整数解的个数, 即 $\binom{n+t-1}{n}$.

二项式系数

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

- 对应着二项式定理中：$x=1$,$y=1$；
- 如果 S 是 n 个元素的集合, 则 S 的所有组合有多少个?

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

- 对应着二项式定理中：$x = 1, y = -1$
- S 的具有偶数个元素的组合有多少个？具有奇数个元素的组合有多少个?
- 可否建立奇组合与偶组合之间的一一对应?

推论

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k\text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = \sum_{k\text{ 为偶数}} \binom{n}{k}$$

证明　设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, 则

$$A = \{S \subseteq X : |S|\text{为偶数且}1 \in S\},$$
$$B = \{S \subseteq X : |S|\text{为奇数且}1 \in S\},$$
$$C = \{S \subseteq X : |S|\text{为偶数且}1 \notin S\},$$
$$D = \{S \subseteq X : |S|\text{为奇数且}1 \notin S\}.$$

构造映射 $f : A \to D$ 为 $f(S) = S \setminus \{1\}$, 显然 f 为双射. 所以 $|A| = |D|$.

类似地 $|B| = |C|$.

因此

$$\sum_{k\text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = |B| + |D| = |A| + |C| = \sum_{k\text{ 为偶数}} \binom{n}{k}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

- 考虑从 n 人中选出带队长的 k 人小队:
- 可先从 n 人中选出 k 人做队员, 再从 k 人中选出一人做队长;
- 也可以从从 n 人中选出一人做队长, 然后再从 $n-1$ 人中选出 $k-1$ 人做队员.

例 4.1

利用

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

计算

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

例 4.1

利用

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

计算

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$
   $= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1}.$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$
   $= n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$
   $= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

恒等式 4

对于正整数 n
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

方法 1：对 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ 两边同时求导得
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$
再令 $x=1$.

方法 2：应用等式 3
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}.$$

方法 3：从 n 个人中挑选 k $(k=1,2,\cdots,n)$ 个人组成一个队, 并选择一人为队长, 有多少种方法?

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

证明 对 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 求导, 得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

将上式左右两边同乘 x, 得

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k}.$$

对上式左右两边求导, 得

$$n\left((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n\left(2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right) = n(n+1)2^{n-2}.$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级, 并选择班长、团支书各一人 (可兼任), 有多少种方法?

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级, 并选择班长、团支书各一人 (可兼任), 有多少种方法?
- $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

证明　对

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

两边对 x 求从 0 到 1 的定积分,

$$\int_0^1(1+x)^n\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_0^1,$$

$$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

此即所证等式.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

一般地, 可以得到

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

归纳法证明：关于 n 做归纳.

组合证明：

- 从 $n+1$ 个人中挑选 $k+1$ 个人组成一个队.
- 先从 $n+1$ 个人当中挑出一个人, 令他的号码是 $i+1$ $(i = k, \cdots, n)$, 作为小队当中号码最大的人.
- 接下来只要从前 i 个人当中挑出剩下的 k 个人即可.

比较系数法：提取

$$\sum_{i=0}^{n} (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$$

两边 x^k 的系数.

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

利用

$$\binom{i}{k} = \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1}$$

可知

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \left(\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \sum_{i=k+1}^{n+1} \binom{i}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \binom{n+1}{k+1} - \underbrace{\binom{k}{k+1}}_{0} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

对于 $f(i)$, 如果存在它的差分$F(i)$ 满足

$$\Delta_i F(i) = F(i+1) - F(i) = f(i),$$

则称 $F(i)$ 是 $f(i)$ 的不定和. 于是

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a}^{b} F(i+1) - \sum_{i=a}^{b} F(i) = F(b+1) - F(a).$$

Gosper 算法:

输入: 超几何项 $f(i)$, 也就是 $f(i+1)/f(i)$ 是有理函数.

输出:

- $F(i)$ 使得 $\Delta_i F(i) = F(i+1) - F(i) = f(i)$;
- 算法失败, 若满足条件的超几何项 $g(i)$ 不存在.

Gosper 算法适用于求下面的不定和

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{2i}{i}^2}{(i+1)4^{2i}} = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i \frac{4i\binom{2i}{i}^2}{4^{2i}} = \frac{(n+1)\binom{2n+2}{n+1}^2}{4^{2n+1}}.$$

不定和没有好的表达式, 定和可能有好的表达式.

例如 $\binom{n}{i}$ 关于 i 的不定和不是超几何的, 但是

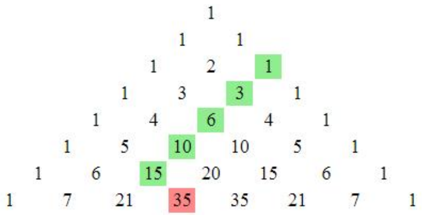
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

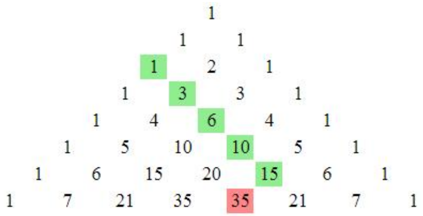
处理定和问题的基本方法是

构造和式满足的多项式系数的递推关系.

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$





恒等式 8

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}=\binom{n+k+1}{k}$$

恒等式 9 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

恒等式 9 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

方法 1：比较等式 $(x+1)^{m+n}=(x+1)^m(x+1)^n$ 两边 x^k 的系数.

方法 2：

- $\binom{m+n}{k}$ 是 $(m+n)$ 元集合 $A\cup B$ 中 k-子集的个数, 其中 $A=\{1,\ldots,m\}, B=\{m+1,\ldots,m+n\}$,
- 而其中包含 A 中 i 个元素的这样的 k-子集的个数为 $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$,
- 所以和式 $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 便是对所有的 i 来计这些子集的个数.

特别地, 当 $m=n=k$ 时,

推论

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}.$$

方法 3：机器证明.

Doron Zeilberger 提出了一种证明组合恒等式 (更一般的“超几何恒等式”) 的机械化算法. 他认识到问题的实质是：为证明恒等式

$$\sum_k f(n,k) = g(n),$$

只需：

- 找出一个左边和式 $F(n) = \sum_k f(n,k)$ 满足的递推关系；
- 用代入的方法验证右边 $g(n)$ 也满足同样的递推关系；
- 用足够多的初始值验证等式两边相等.

因此寻找和式的递推关系就成了证明和发现恒等式的首要任务.

例如

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zeilberger 算法

输入：双超几何项 $f(n,i)$, 即 $f(n+1,i)/f(n,i)$ 以及 $f(n,i+1)/f(n,i)$ 均为关于 n 和 i 的有理函数.

输出：

- 邻差算子
$$L=\sum_{j=0}^{d} a_j(n)S_n^j,$$
其中 $S_n f(n,i)=f(n+1,i)$ 和
- 超几何项 $g(n,i)$ 使得
$$L(f)=\Delta_i g(n,i)=g(n,i+1)-g(n,i).$$
于是,
$$a_0(n)f(n,i)+a_1(n)f(n+1,i)+\cdots+a_d(n)f(n+d,i)=g(n,i+1)-g(n,i).$$

若邻差算子 L 不存在, 则算法失效.

Zeilberger 算法证明组合恒等式

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

令 $f(n,i) = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 及 $F(n) = \sum_{i=0}^{k} f(n,i)$, Zeilberger 算法可以找到

$$L = (m+n-k+1)S_n - (m+n+1), \quad g(n,i) = i\binom{m}{i}\binom{n}{k-i},$$

即

$$(m+n-k+1)f(n+1,i) - (m+n+1)f(n,i) = g(n,i+1) - g(n,i).$$

对 i 从 0 到 k 求和可得

$$(m+n-k+1)F(n+1) - (m+n+1)F(n) = g(n,k+1) - g(n,0) = 0.$$

最后需要验证 $\binom{m+n}{k}$ 满足与 $F(n)$ 有相同的初值和递推关系.

Zeilberger 算法证明组合恒等式

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

等号左边 $F(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ 的初值为 $F(0) = \binom{m}{k}$, 递推关系为

$$(m+n-k+1)F(n+1) = (m+n+1)F(n).$$

等号右边 $\binom{m+n}{k}$ 的初值为 $\binom{m+0}{k} = \binom{m}{k}$, 递推关系为

$$(m+n-k+1)\binom{m+n+1}{k} = (m+n+1)\binom{m+n}{k}.$$

因此, $F(n)$ 与 $\binom{m+n}{k}$ 具有相同的初值和递推关系.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Mathematica 代码实现:

In[1]:= $<< \boldsymbol{RISC`fastZeil`}$

Fast Zeilberger Package version 3.61

written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese

Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),

Johannes Kepler University, Linz, Austria

In[2]:= $\boldsymbol{Zb[Binomial[m, i]Binomial[n, k-i], \{i, 0, k\}, n, 1]}$

If 'k' is a natural number, then:

Out[2]= $\{(m+n+1)\mathsf{SUM}[n] == (1-k+m+n)\mathsf{SUM}[1+n]\}$

例 4.2 (李善兰恒等式)

证明下列恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

李善兰恒等式为组合数学中的一个恒等式, 由中国清代数学家李善兰于 1859 年在《垛积比类》一书中首次提出, 因此得名.

李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

令 $f(n,j) = \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k}$ 及 $F(n) = \sum_{j=0}^{k} f(n,j)$, Zeilberger 算法可以找到

$$L = (n+1)^2 S_n - (k+n+1)^2, \quad g(n,j) = \frac{j^2(-j+2k+n+1)}{-j+n+1} f(n,j).$$

即

$$(n+1)^2 f(n+1,j) - (k+n+1)^2 f(n,j) = g(n,j+1) - g(n,j).$$

对 j 从 0 到 k 求和可得

$$(n+1)^2 F(n+1) - (k+n+1)^2 F(n) = g(n,k+1) - g(n,0) = 0.$$

最后验证 $\binom{n+k}{k}^2$ 满足与 $F(n)$ 有相同的初值和递推关系.

李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

Mathematica 代码实现：

In[3]:= $<< \boldsymbol{RISC`fastZeil`}$

Fast Zeilberger Package version 3.61
written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese
Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),
Johannes Kepler University, Linz, Austria

In[4]:= $\boldsymbol{Zb[Binomial[k,j]^2 Binomial[n+2k-j,2k],\{j,0,k\},n,1]}$

If 'k' is a natural number, then:

Out[4]= $\{(k+n+1)^2 \mathsf{SUM}[n] == (n+1)^2 \mathsf{SUM}[1+n]\}$

例 4.3

设 n 和 k 均为正整数, 给出下面式子的一个组合证明

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

例 4.4

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & n \text{ 为偶数} 2m. \end{cases}$$

提示：考虑 $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数.

例 4.5

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

例 4.6

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$.
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$.

例 4.6

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$.
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$.

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{j!(k-j)!} = \frac{n}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{m}{k}$
   $= \binom{n}{m}\sum_k(-1)^k\binom{m}{k} = \binom{n}{m}0 = 0$
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}$
   $= \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m}$

二项式系数

定义 5.1

设 n 和 k 为非负整数, 且 $0 \le k \le n$. 称

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$$

为高斯系数.

- 例如, $n=4$, $k=2$ 时,
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1.$$
- 记 $[n]! = [1][2]\cdots[n]$, 其中 $[n] = 1+q+\ldots+q^{n-1}$, 则高斯系数可以写为
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$
- 高斯系数是二项式系数的 q–模拟. 由定义可知
$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$
因此, 高斯系数 也称为q–二项式系数.

高斯系数的性质

定理 5.2

高斯系数具有以下性质：

1. $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1;$
2. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix};$
3. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix};$
4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$

定理 5.3 (Cauchy 二项式定理)

$$\prod_{k=1}^{n}(1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

- $q \to 1$ 时,$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

高斯系数的组合解释 1 — 多重集合上的排列

首先给出 (多重集合) 排列中逆序数的概念.

给定一个多重集合的排列 $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$, 一对元素 (i,j) 称为是 π 的一个逆序(inversion), 如果满足 $i<j$ 且 $\pi_i>\pi_j$.

π 的逆序的个数为 π 的逆序数, 记作 $\mathrm{inv}(\pi)$.

定理 5.4

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi\in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

定理

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时, 性质显然成立. 现在假设对 $n-1$ 成立.

考虑 n 的情形. 对于 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in S(1^k\, 2^{n-k})$, 分两种情况考虑:

- 若 $a_n = 2$, 则将 a_n 去掉后,π 的逆序数不发生变化, 且此时
$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in S(1^k\, 2^{n-k-1});$$
- 若 $a_n = 1$, 则因为 π 中的每个 2 皆对 a_n 产生一个逆序数, 故去掉 a_n 后, 逆序数减少 $n-k$ 个, 且
$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in S(1^{k-1}\, 2^{n-k}).$$

所以

$$\sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

高斯系数的组合解释 2 — 格路

- 我们考虑从原点到点 (m,n) 的格路，其中 m,n 为非负整数且只允许向东与向北. 因为我们共要走 $m+n$ 步，且一定有 m 步向东走 n 步向北走，故这样的路径有 $\binom{m+n}{m}$ 条.
- 对于每一条这样的路径 p，在路径、x 轴和直线 $x=m$ 之间都有一个确定的封闭区域 $A(p)$. 右图展示了 $m=n=2$ 时的六条路径及每种情况下所包围的区域面积.
- 如果我们对这个区域取变量为 q 的生成函数，也就是说，一条面积为 A 的路径对求和的贡献为 q^A，那么我们可以得

$$1+q+2q^2+q^3+q^4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

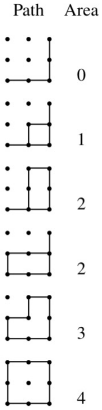


图: 格路

设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 (0,0) 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位, 最终走到 (m,n) 点的格路组成的集合.

对 $p \in \mathscr{P}(m,n)$, 设 $A(p)$ 为由格路 p、x 轴和直线 $x=m$ 包围图形的面积.

定理 5.5

$$\sum_{p\in\mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 (0,0) 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位, 最终走到 (m,n) 点的格路组成的集合.

对 $p\in\mathscr{P}(m,n)$, 设 $A(p)$ 为由格路 p、x 轴和直线 $x=m$ 包围图形的面积.

定理 5.5

$$\sum_{p\in\mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

证明 我们记等式左边为 $F(n,k)$, 显然 $F(0,n)=F(m,0)=0$.

现考虑 $p\in\mathscr{P}(k,n-k)$ 的两种情况:

- 如果路径 p 的最后一步是向北的, 那么它是一条从 $(0,0)$ 到 $(k,n-k-1)$ 再接着往北一步的路径, 且最后一步不会改变面积.
- 如果路径 p 的最后一步是向东的, 那么它是一条从 $(0,0)$ 到 $(k-1,n-k)$ 再接着往东一步的路径, 这里最后一步会使面积增加 $n-k$.

故我们有 $F(n,k)=F(n-1,k)+q^{n-k}F(n,k-1)$.

再由定理5.2知, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ 也具有相同的初值条件和递推关系, 因此定理得证.

高斯系数的组合解释 3 — 有限域上的线性空间

先给出有限域上的线性空间的一些概念.

设 $\mathbb{F}_q$ 为有限域, 其中 $q = p^r$, p 为素数.

对正整数 n, 我们定义 $V_n(q)$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的有序 n 元组

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{F}_q, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

组成的集合, 并满足线性运算

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\alpha (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q$$

则 $V_n(q)$ 构成 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间, 其中的元素称为向量.

若向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0, \ \alpha_i \in \mathbb{F}_q \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

则称向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是线性无关的.

线性空间 $V_n(q)$ 中线性无关的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成 $V_n(q)$ 的一组基.

$V_n(q)$ 中的任意向量都可以由 $V_n(q)$ 的一组基线性表示, 即对任意向量 $X \in V_n(q)$, 存在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

用坐标表示为

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

高斯系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的组合含义由下面定理给出.

定理 5.6

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

例如, $n = 3$, $k = 1$ 时, 有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 3 维线性空间的所有 1 维子空间的个数是

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1.$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

证明思路:

- 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的线性无关的 (有序) 向量组的个数, 它们生成一个 k 维子空间.
- 再计算一个 k 维子空间的 (有序) 基的个数.

证明 首先, 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的元组构成一个 k 维子空间的 (有序) 基.

为此, 我们需要从空间 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量.

- 第一个向量 v_1, 可以选取任意非零向量, 因此由 q^n-1 中选择.
- 第二个向量 v_2, 不能选取 v_1 的倍数, 因此有 q^n-q 种选择.
- 第三个向量 v_3, 有 q^2 个不能选取的向量, 它们是 v_1 和 v_2 的线性组合.

以此类推, 从 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量的方法数为

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1}), \tag{1}$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\left[{n \atop k}\right]$.

其次, 一个子空间可以有很多组 (有序) 基.

类似上面的讨论, 选定一个 k 维子空间, 在其中选一组基的方法数为

$$(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

这就是(1)中每个子空间重复计数的数目.

因此,$V_n(q)$ 的 k 维子空间的个数是

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$