17

二、计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&0&1&\cdots&1&1\\1&2&0&\cdots&1&1\\1&1&2&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&2&0\\1&1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}$.

解

加边法

法一

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&2&0&\cdots&1&1\\0&1&2&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&1&\cdots&2&0\\0&1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\-1&1&-1&\cdots&0&0\\-1&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1&-1\\-1&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-n&2&1&\cdots&1&1\\-n&1&0&\cdots&0&0\\-(n-1)&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-2&0&0&\cdots&1&0\\-1&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=(1-n+2n+(n-1)+\cdots+2+1)$$

$$=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

二 各行减最后一行

$$D_n=\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0&-1\\0&1&-1&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&-1\\0&0&0&\cdots&1&-2\\1&1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\\0&0&0&\cdots&1&-2\\1&2&3&\cdots&n-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&1&0\\1&2&3&\cdots&n-1&\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

$2+1+2+\cdots+2(n-1)$

法三 拆项法

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&1&\cdots&1&1\\1&2&0&\cdots&1&1\\1&1&2&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&1&\cdots&1&1\\1&2&0&\cdots&1&1\\1&1&2&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2&0\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=D_{n-1}+\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+\begin{vmatrix}1&0&&&&\\&1&0&&&\\&&1&\ddots&&\\&&&\ddots&1&0\\1&2&3&\cdots&n-1&n\end{vmatrix}=D_{n-1}+n$$

$$=n+n-1+\cdots+2+\cancel{D_1}\ 2$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

三、计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解

法一 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-n)(-1)^n = (-1)^n(1-n)$

法二 $D_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & & \\ & -1 & 0 & & & \\ & & -1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$

四、利用克拉默法则求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3.$

五、n 阶行列式 D 中每个数 a_{ij} 分别用 2^{i-j} 乘所得的行列式记为 D_1，求行列式 D_1 的值.

解 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2^{-1}a_{12} & 2^{-2}a_{13} & \cdots & 2^{1-n}a_{1n} \\ 2a_{21} & a_{22} & 2^{-1}a_{23} & \cdots & 2^{2-n}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^{n-1}a_{n1} & 2^{n-2}a_{n2} & 2^{n-3}a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= 2^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} a_{11} & 2^{-1}a_{12} & 2^{-2}a_{13} & \cdots & 2^{1-n}a_{1n} \\ a_{21} & 2^{-1}a_{22} & 2^{-2}a_{23} & \cdots & 2^{1-n}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 2^{-1}a_{n2} & 2^{-2}a_{n3} & \cdots & 2^{1-n}a_{nn} \end{vmatrix}$

$= 2^{1+2+\cdots+n}\, 2^{-1-2\cdots-n}\, D$

$= D$