数列极限

李 君

天津师范大学，数学科学学院

2023 年 6 月

目 录

§1 数列极限的概念

数列极限是整个数学分析最重要的基础之一，它不仅与函数极限密切相关，而且为今后学习级数理论提供了极为丰富的准备知识。

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论“$\varepsilon - N$”说法、一些例子

一、数列的定义

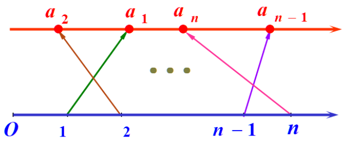
若函数 f 的定义域为全体正整数的集合 $\mathbf{N}_+$, 则称

$$f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R} \text{ 或 } f(n),n\in\mathbf{N}_+$$

为数列. 因为 $\mathbf{N}_+$ 的所有元素可以从小到大排列出来, 所以我们也将数列写成

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

或简记为 $\{a_n\}$. 这里 a_n 称为数列 $\{a_n\}$ 的通项.



二、一个经典的例子

古代哲学家庄周所著的《庄子. 天下篇》引用了一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭"。它的意思是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限制地进行下去.

我们把每天截下部分（或剩下部分）的长度列出：

第一天截下 $\frac{1}{2}$，第二天截下 $\frac{1}{2^2}, \cdots$，第 n 天截下 $\frac{1}{2^n}, \cdots$

这样就得到一个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \text{或} \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

容易看出：数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限趋于 0 .

三、收敛数列的定义

一般地说, 对于数列 $\{a_n\}$, 若当 n 充分变大时, a_n 能无限地接近某个常数 a, 则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 下面给出严格的数学定义.

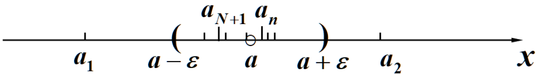
定义 1 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, a 为一个常数, 若对于任意的正数 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \quad (\text{或} \quad a_n \to a,\ n \to \infty)$$

若 $\{a_n\}$ 不收敛, 则称 $\{a_n\}$ 为发散数列.



注 定义 1 这种陈述方式, 俗称为 "$\varepsilon - N$" 说法.

四、按定义验证极限

为了加深对数列收敛定义的了解，下面结合例题加以说明，希望大家对“$\varepsilon - N$”说法能有正确的认识.

例 1 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

分析 对于任意正数 ε，要使 $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$，只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

证 对于任意的正数 ε，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，$\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

例 2 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0 < |q| < 1)$.

分析 对于任意的正数 ε, 要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}.$$

证 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $0 < \varepsilon < 1$), 取 $N = \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log |q|}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|q^n - 0| < \varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例 3 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}$.

分析 任给 $\varepsilon>0$, 由

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n+7}{3\left(3n^2-n-7\right)}\right|,$$

当 $n\geq 7$ 时, $n+7\leq 2n, 3n^2-n-7\geq 3n^2-2n\geq 2n^2$, 故要使

$$\left|\frac{n+7}{3\left(3n^2-n-7\right)}\right|\leq\frac{2n}{6n^2}=\frac{1}{3n}<\varepsilon$$ 成立, 只要 $n>\dfrac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

注意 解这个不等式是在 $n\geq 7$ 的条件下进行的.

证 对于任意的正数 ε, 取

$$N = \max\left\{7, \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right] + 1\right\},$$

当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

即得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}.$$

例 4 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

证 这里只验证 $a>1$ 的情形 ($0<a<1$ 时自证). 设 $\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1$.

因为 $a=(1+\alpha_n)^n\geq 1+n\alpha_n$, 所以

$$0<\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}.$$

故对于任意正数 ε, 取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

因此证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

五、再论“$\varepsilon-N$”说法

从定义及上面的例题我们可以看出:

1. ε 的任意性: 定义中的 ε 用来刻画数列 $\{a_n\}$ 的通项与定数 a 的接近程度. 显然正数 ε 愈小, 表示 a_n 与 a 接近的程度愈高; ε 是任意的, 这就表示 a_n 与 a 可以任意接近. 要注意, ε 一旦给出, 在接下来计算 N 的过程中, 它暂时看作是确定不变的. 此外, 又因 ε 是任意正数, 所以 $2\varepsilon, 3\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{2}, \cdots$ 等均可看作任意正数, 故定义 1 中的不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

可以用 $|a_n - a| < K\varepsilon$ (K 为某一正常数) 来代替.

再有，我们还可以限定 ε 小于某一个正数（比如 $\varepsilon < 1$）. 事实上，对 $0 < \varepsilon < 1$ 若能验证 $\{a_n\}$ 满足定义 1，那么对 $\varepsilon \geq 1$ 自然也可以验证成立.

2. N 的相对性: 从定义 1 中又可看出，随着 ε 的取值不同，N 当然也会不同. 但这并不意味着 N 是由 ε 惟一确定. 例如，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则当 $n > N_1 = 2N$ 时，对于同样的 ε，更应有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

也就是说，在这里只是强调 N 的存在性，而不追求 N 的"最佳性"

.

3. 极限的几何意义

从几何上看, “$n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$”, 实际上就是所有下标大于 N 的 a_n 全都落在邻域 $U(a;\varepsilon)$ 之内, 而在 $U(a;\varepsilon)$ 之外, $\{a_n\}$ 至多只有有限项 (N 项). 反过来, 如果对于任意正数 ε, 落在 $U(a;\varepsilon)$ 之外至多只有有限项, 设这些项的最大下标为 N, 这就表示当 $n > N$ 时, $a_n \in U(a;\varepsilon)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

以上是定义 1 的等价说法, 写成定义就是:

定义 1′ 任给 $\varepsilon > 0$, 若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外至多只有 $\{a_n\}$ 的有限多项, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 这样, $\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义也可陈述为: 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得在 $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 之外含有 $\{a_n\}$ 中的无限多项.

注 $\{a_n\}$ 无极限 (即发散) 的等价定义为: $\{a_n\}$ 不以任何实数 a 为极限.

4. 无穷小数列和无穷大数列

定义 2 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

例如 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ 是无穷小数列. 当 $|q| < 1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列.

以下定理显然成立, 请读者自证.

定理 2.1 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是: $\{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

定义 3 设 $\{a_n\}$ 是一数列, 若对任意 $G > 0$, 总存在正整数 N, 使得任意 $n > N$, $|a_n| > G$, 则称 $\{a_n\}$ 是无穷大数列, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

若 $|a_n| > G$, 改为 $a_n > G$ 或 $a_n < -G$, 则称 $\{a_n\}$ 是正无穷大数列或负无穷大数列, 分别记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

六、一些例子

为了更好地理解“$\varepsilon - N$”定义，再举一些例题.

例 5 证明 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证 对于任意实数 a，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}, \{a_n\} = \{(-1)^n\}$ 满足：当 $a \le 0 (a \ge 0)$ 时，在 $\left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$ 之外有无限多个偶数项（奇数项）. 所以由定义 $1', \{a_n\}$ 不以 a 为极限. 又因 a 是任意的，所以 $\{a_n\}$ 发散.

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

证 $|a|>1$ 时, $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\dfrac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon[|a|]\,!}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{\overbrace{|a|\cdots|a|}^{[|a|]}\ \overbrace{|a|\cdots|a|}^{n-[|a|]}}{1\cdot 2\cdots[|a|][|a|+1]\cdots n}\le\frac{|a|^{[|a|]}}{[|a|]!}\cdot\frac{|a|}{n}<\varepsilon.$$

当 $0<|a|\le 1$ 时, 取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}, n>N$ 时, $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

注 这里我们将 N 取为正数, 而非正整数. 实际上 N 只是表示某个时刻, 保证从这一时刻以后的所有项都能使不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立即可.

例 7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}=0.$

证 我们用两种方法来证明.

(1) 任给正数 ε, 取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$$

(2) 任给正数 ε, 限制 $\varepsilon<1$. 由

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|=\sin\frac{1}{n}<\sin(\arcsin\varepsilon)=\varepsilon,$$

可知只需取 $N=\dfrac{1}{\arcsin\varepsilon}$ 即可.

注 这里假定 $0<\varepsilon<1$ 是必要的, 否则 $\arcsin\varepsilon$ 便没有定义.

复习思考题

1. 极限定义中的 $\forall \varepsilon, \exists N$ 是否可以写成 $\exists N, \forall \varepsilon$ "? 为什么?
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, 反之是否成立?
3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \sigma : N \to N$ 是一个一一映射. 请依据极限定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = A$.