组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

1. 第一类Stirling数及其普通生成函数
2. 第二类Stirling数及其普通生成函数
3. 第二类Stirling数的指数型生成函数
4. 两类Stirling数的联系
5. 第一类Stirling数的指数型生成函数

Outline

第一类Stirling数

定义 1.1

对于正整数n,k,定义$c(n,k)$为n元对称群S_n中恰好由k个不交轮换构成的置换个数（不动点也看作一个轮换）.
$s(n,k)=(-1)^{n-k}c(n,k)$被称为**第一类Stirling数**，$c(n,k)$**也常称为无符号的第一类Stirling数.**

规定$c(0,0)=1$以及当$n\geq 1$时，$c(n,0)=c(0,n)=0$,这显然是合理的.

第一类Stirling数的递推关系

引理 1.2

对任意$n \geq 1, k \geq 1$，$c(n,k)$ 满足如下递推式

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1).$$

第一类Stirling数的递推关系

引理 1.2

对任意$n \geq 1, k \geq 1$，$c(n,k)$ 满足如下递推式

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1).$$

证明.

设置换σ是S_n中恰好有k个轮换的置换，若$\sigma(n) = n$,则n在σ 中为一个单独的轮换，从而这样的σ 的个数等于S_{n-1}中恰有$k-1$个轮换的置换的个数，即$c(n-1,k-1)$个;若$\sigma(n) = i, 1 \leq i \leq n-1$,则将轮换中的$n$与$i$看为一个元素，从而这样的$\sigma$ 的个数等于S_{n-1}中恰有k个轮换的置换的个数，即$c(n-1,k)$个，因此

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1).$$

□

第一类Stirling数的普通生成函数

定理 1.3

$\{c(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

第一类Stirling数的普通生成函数

证明.

对n用归纳法证明命题.$n=1$时命题即$x=x$,显然成立. 设对$n\geq 2, n-1$时命题成立，则当n时，由归纳假设及$c(n,k)$的递推性质知，任意$1\leq k\leq n$,

$$\begin{aligned}[x^k]x\cdots(x+n-1)=&[x^k]x\cdots(x+n-2)x+(n-1)[x^k]x\cdots(x+n-2)\\=&[x^{k-1}]x\cdots(x+n-2)+(n-1)[x^k]x\cdots(x+n-2)\\=&c(n-1,k-1)+(n-1)c(n-1,k)\\=&c(n,k).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}c(n,k)x^k=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1),$$

即命题对n成立.

由归纳原理知命题对一切正整数n成立，即$\{c(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足定理中所述函数方程. □

第一类Stirling数的普通生成函数

很多情况下，第一类Stirling数$s(n,k)$往往比无符号的第一类Stirling数$c(n,k)$更容易处理.针对$\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$,定理（1.3）相应的等价形式是下面定理.

定理 1.4

$\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n.$$

这里$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

第一类Stirling数的普通生成函数

定理1.4 $\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n.$$

这里$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

证明.

在定理（1.3）中用$-x$代替x得

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)(-x)^k = -x(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+n-1),$$

两边同时乘以$(-1)^n$得

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^n c(n,k)(-x)^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n.$$

第一类Stirling数的普通生成函数

证明 现在我们用另外一种方法证明定理（1.4）. 回顾引理（1.2）中无符号的第一类Stirling数$c(n,k)$满足的递推关系及初始条件，将其转化成第一类Stirling数$s(n,k)$,且当$n \geq 1$时，满足如下递推式

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k).$$

我们希望找到生成函数$f_n(x) = \sum_{k\geq 0} s(n,k)x^k$. 在上述递推式左右两边同乘以$x^k$,并对$k, k \geq 1$求和,得

$$\sum_{k\geq 1} s(n,k)x^k = \sum_{k\geq 1} s(n-1,k-1)x^k - (n-1)\sum_{k\geq 1} s(n-1,k)x^k.$$

接下来使用$f_n(x)$表示上述等式，得

$$f_n(x) - s(n,0)x^0 = f_n(x) = xf_{n-1}(x) - (n-1)f_{n-1}(x),$$

即

$$f_n(x) = (x-n+1)f_{n-1}(x).$$

这就得到生成函数序列$f_n(x)$的递推关系.由初始条件$s(0,k)$得$f_0(x) = 1$.现在容易猜出$f_n(x)$的表达式，只需写出前面一些值然后用归纳法证明即可. 这样就证明了当$n, k \geq 1$时定理成立.

Outline

第二类Stirling数

定义 2.1

对于正整数n,k,定义$S(n,k)$为把$[n]$分成k个非空子集的划分的个数，称为**第二类Stirling数**

规定$S(0,0)=1$以及当$n \geq 1$时，$S(n,0)=S(0,n)=0$,这显然是合理的.

第二类Stirling数的递推关系

引理 2.2

对任意$n \geq 1, k \geq 1$，第二类*Stirling*数$S(n,k)$ 满足如下递推式

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

第二类Stirling数的递推关系

引理 2.2

对任意$n \geq 1, k \geq 1$，第二类*Stirling*数$S(n,k)$ 满足如下递推式

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

证明.

把$[n]$分成k个非空子集的划分，简称为把$[n]$的一个$k-$划分.设P是$[n]$的一个$k-$划分.若n在P中为一个单独的子集，则这样的P的个数等于$[n-1]$的$(k-1)-$划分个数,即$S(n-1,k-1)$.若n在P中不是一个单独的子集，则从P中去掉n可以得到一个$[n-1]$的$k-$划分,而把n插入任意一个$[n-1]$的$k-$划分可得到k个不同的$[n]$的$k-$划分,从而这样的P的个数等于$[n-1]$的$k-$划分个数的k倍，即$kS(n-1,k)$.因此

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

$\square$

第二类Stirling数

定理 2.3

$\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n.$$

这里$(x)_k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$.

第二类Stirling数

证明 对n用归纳法证明命题.$n=1$时命题即$x=x$,显然成立. 设对$n\geq 2, n-1$时命题成立，则当n时，由归纳假设及$S(n,k)$的递推性质知

$$
\begin{aligned}
x^n &= x^{n-1}x \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)(x)_k x \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)(x)_k (x-k+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,k)(x)_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} kS(n-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=2}^{n} S(n-1,k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^{n-1} kS(n-1,k)(x)_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} S(n-1,k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^{n} kS(n-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k.
\end{aligned}
$$

即命题对n成立.

由归纳原理知命题对一切正整数n成立，即$\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$满足定理中所述函数方程. $\square$

注: 设x为一个正整数，则有x^n个从$[n]$到$[x]$的映射，对$[x]$的每个$k-$子集Y，有$k!S(n,k)$个从$[n]$到Y的满射，所以

$$
x^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{x}{k} k! S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k.
$$

第二类Stirling数的普通生成函数

定理 2.4

$\{S(n,k)\}_{k=1}^{\infty}$满足如下的函数方程

$$\sum_{n=1}^{k} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

第二类Stirling数的普通生成函数

证明 回顾引理（2.2）中第二类Stirling数$S(n,k)$满足如下递推式

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

我们希望找到生成函数$f_k(x) = \sum_{n\geq 0} S(n,k)x^n$. 在上述递推式左右两边同乘以$x^n$,并对$n, n\geq 1$求和,得

$$\sum_{n\geq 1} S(n,k)x^n = \sum_{n\geq 1} kS(n-1,k)x^n + \sum_{n\geq 1} S(n-1,k-1)x^n.$$

接下来使用$f_k(x)$表示上述等式，得

$$f_k(x) = kxf_k(x) + xf_{k-1}(x),$$

即

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} f_{k-1}(x).$$

这就得到生成函数序列$f_k(x)$的递推关系.由初始条件$S(n,0)$得$f_0(x) = 1$.现在容易猜出$f_k(x)$的表达式，只需写出前面一些值然后用归纳法证明即可. 这样就证明了当$n, k \geq 1$时定理成立.

Outline

$S(n,k)$的显式公式

在求第二类Stirling数的指数型生成函数之前，我们先得到$S(n,k)$的显式公式.

定理 3.1

对于任意的正整数n,k,

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(\begin{array}{c}k\\j\end{array}\right)j^n(-1)^{k-j}.$$

证明 构造k个有标记的“篮子”，将$[n]$中的元素分到这k个有区别的篮子里（有些篮子可能分到了零个元素），用S表示所有这样的分法组成的集合.显然$\mid S\mid=k^n$.对任意$1\le i\le k$,定义P_i为“第i个篮子是空”的性质,A_i为S中满足性质P_i的分法组成的集合，$\mathcal{P}$为所有这些性质组成的集合，则

$$S(n,k)=\frac{\mid\{A\in S:A\text{ 不满足 }\mathcal{P}\text{ 中的任何性质}\}\mid}{k!}=\frac{|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}|}{k!}.$$

注意到对于任意$1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k$, $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s}$表示的意义是$S$中满足性质$P_{i_1},\cdots,P_{i_s}$的分法组成的集合.在这些分法中,标号

$S(n,k)$的显式公式

为$i_1,\cdots,i_s$的篮子为空，所有元素只能放进其余$k-s$个篮子中，从而$|\ A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s}\ |=(k-s)^n$.由容斥原理得

$$\begin{aligned} k!S(n,k) &= |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{1\le i<j\le k} |A_i\cap A_j| - \sum_{1\le i<j<t\le k} |A_i\cap A_j\cap A_t| + \cdots \\ &\quad + (-1)^k\,|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k| \\ &= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(k-r)^n(-1)^r \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} j^n(-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

□

注：容易看到，$k!S(n,k)$就是容斥原理章节中例题2.4里面所讨论的从$[n]$到$[k]$的满射的个数.

第二类Stirling数的指数型生成函数

定理 3.2

$\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,k)x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}.$$

第二类Stirling数的指数型生成函数

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}j^n(-1)^{k-j}\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}j^n\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}e^{jx}\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(e^x)^j(-1)^{k-j}\\ &= \frac{1}{k!}(e^x-1)^k.\end{aligned}$$

□

相比之下，尽管也有第一类Stirling数的递推关系，但关于其生成函数的推导要更复杂，为了求$s(n,k)$的指数型生成函数,需要借助两类Stirling数之间的关系。

Outline

两类Stirling数的联系

定理 4.1

由两类*Stirling*数，定义 n 级矩阵

$A=(a_{ij})_{n\times n}:=(s(i,j))_{n\times n}$及$B=(b_{ij})_{n\times n}:=(S(i,j))_{n\times n}$. 则

$$AB=BA=I.$$

两类Stirling数的联系

定理 4.1

由两类*Stirling*数，定义 n 级矩阵

$A=(a_{ij})_{n\times n}:=(s(i,j))_{n\times n}$及$B=(b_{ij})_{n\times n}:=(S(i,j))_{n\times n}$. 则

$$AB=BA=I.$$

证明.

考虑复数域上次数小于$n+1$ 且常数项为零的多项式关于加法和数量乘法构成的线性空间

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^i \mid \lambda_i\in\mathbb{C}\right\},$$

$\{x,x^2,\ldots,x^n\}$ 与 $\{(x)_1,(x)_2,\ldots,(x)_n\}$ 是它的两组基.记$X=(x,x^2,\ldots,x^n)'$, $Y=((x)_1,(x)_2,\ldots,(x)_n)'$,则$X=BY, Y=AX$.即$A,B$恰好是这两组基之间的过渡矩阵.固

$$AB=BA=I.$$

推论 4.2

$$\sum_{l=1}^{n} s(i,l)S(l,j) = \delta(i,j),$$
$$\sum_{l=1}^{n} S(i,l)s(l,j) = \delta(i,j).$$

两类Stirling数的联系

定理 4.3

令 $A(x), B(x)$ 分别表示数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数. 则下列三个命题等价:

(i) 对任意 $n \geq 0, b_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i) a_i$;

(ii) 对任意 $n \geq 0, a_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) b_i$;

(iii) $B(x) = A\left(e^x - 1\right)$, 也即 $A(x) = B(\ln(1+x))$.

两类Stirling数的联系

证明 若 (ii) 成立, 由推论 4.2 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} S(n,j)a_j &= \sum_{j=0}^{n} S(n,j)\sum_{i=0}^{j} s(j,i)b_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{j=i}^{n} S(n,j)s(j,i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} S(n,j)s(j,i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_i \delta(n,i) \\ &= b_n\end{aligned}$$

即 (i) 成立. 同理, 若 (i) 成立, 由推论 4.2 可得 (ii) 成立, 从而命题 (ii) 与 (i) 等价.

两类Stirling数的联系

若 (i) 成立, 由定义, 有

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} S(n,i) a_i \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{n \geq i} S(n,i) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{n \geq 0} S(n,i) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{(e^x - 1)^i}{i!} \\
&= A\left(e^x - 1\right)
\end{aligned}
$$

即 (iii) 成立.易见推导过程可逆，从而命题 (iii) 与 (i) 等价.

综上知命题(i)，(ii)与(iii)相互等价.

Outline

第一类Stirling数的指数型生成函数

推论 5.1

$\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$的指数型生成函数是

$$\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

第一类Stirling数的指数型生成函数

推论 5.1

$\{s(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$的指数型生成函数是

$$\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

证明.

借助两类Stirling数的联系进行证明. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $b_n = \delta(n,k), a_n = s(n,k)$, 则 $a_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) b_i$. 令 $A(x), B(x)$ 分别表示数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数. 显然 $B(x) = \frac{x^k}{k!}$, 由定理4.3知 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$A(x) = B(\ln(1+x)) = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

□