第五章：二项式系数

Outline

定理 1.1

对任意满足$1 \leq k \leq n-1$的整数n和k，有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

公式(1)称为帕斯卡公式*(Pascal's formula)*。

组合证明：设$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. 记$S$的所有$k$-元子集作成的集族为$X$,则必然有

$$|X| = \binom{n}{k}.$$

另一方面，设

$$X_1 = \{A \in X | x_1 \in A\}, \quad X_2 = \{A \in X | x_1 \notin A\}$$

则$\{X_1, X_2\}$是X的一个划分。

定理 1.1

对任意满足$1 \le k \le n-1$的整数n和k，有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

公式(1)称为帕斯卡公式*(Pascal's formula)*。

组合证明：设$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. 记$S$的所有$k$-元子集作成的集族为$X$,则必然有

$$|X| = \binom{n}{k}.$$

另一方面，设

$$X_1 = \{A \in X | x_1 \in A\}, \quad X_2 = \{A \in X | x_1 \notin A\}$$

则$\{X_1, X_2\}$是X的一个划分。

定理 1.1

对任意满足$1 \leq k \leq n-1$的整数n和k，有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

公式(1)称为帕斯卡公式*(Pascal's formula)*。

组合证明： 设$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. 记$S$的所有$k$-元子集作成的集族为$X$,则必然有

$$|X| = \binom{n}{k}.$$

另一方面，设

$$X_1 = \{A \in X | x_1 \in A\}, \quad X_2 = \{A \in X | x_1 \notin A\}$$

则$\{X_1, X_2\}$是X的一个划分。

不难验证

$$|X_1| = \binom{n-1}{k-1}$$

$$|X_2| = \binom{n-1}{k}.$$

因此

$$\binom{n}{k} = |X| = |X_1| + |X_2| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

不难验证

$$|X_1| = \binom{n-1}{k-1}$$

$$|X_2| = \binom{n-1}{k}.$$

因此

$$\binom{n}{k} = |X| = |X_1| + |X_2| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

不难验证

$$|X_1| = \binom{n-1}{k-1}$$

$$|X_2| = \binom{n-1}{k}.$$

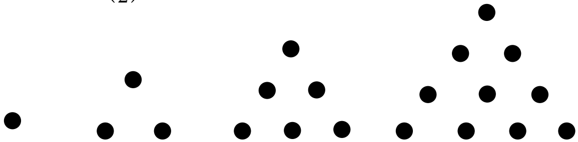
因此

$$\binom{n}{k} = |X| = |X_1| + |X_2| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

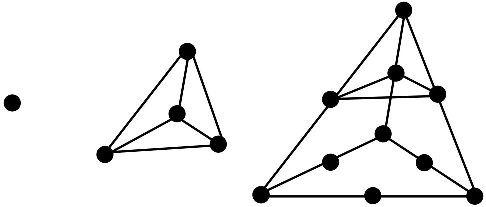
$\blacksquare$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		

三角形数$\binom{n}{2}$:



四面体数$\binom{n}{3}$:



二项式系数的几何解释——格路（Lattice Path）：

令$\mathbb{Z}^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$。序列

$$L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

称为$\mathbb{Z}^d$ 中的一条从v_0到v_k的长为k的格路，其中$v_i \in \mathbb{Z}^d$。对任意的$1 \leq i \leq k$，向量$v_i - v_{i-1} \in \mathbb{Z}^d$称为$L$的步（Step）。

命题 1.2

坐标平面上从点$(0,0)$到$(k,-n)$且每一步为$(0,-1)$或者$(1,-1)$的路径L的条数为$\binom{n}{k}$.

二项式系数的几何解释——格路（Lattice Path）：

令$\mathbb{Z}^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$。序列

$$L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

称为$\mathbb{Z}^d$ 中的一条从v_0到v_k的长为k的格路，其中$v_i \in \mathbb{Z}^d$。对任意的$1 \leq i \leq k$，向量$v_i - v_{i-1} \in \mathbb{Z}^d$称为$L$的步（Step）。

命题 1.2

坐标平面上从点$(0,0)$到$(k,-n)$且每一步为$(0,-1)$或者$(1,-1)$的路径L的条数为$\binom{n}{k}$.

二项式系数的几何解释——格路（Lattice Path）：

令$\mathbb{Z}^d = \{(a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$。序列

$$L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

称为$\mathbb{Z}^d$ 中的一条从v_0到v_k的长为k的格路，其中$v_i \in \mathbb{Z}^d$。对任意的$1 \le i \le k$，向量$v_i - v_{i-1} \in \mathbb{Z}^d$称为$L$的步（Step）。

命题 1.2

坐标平面上从点$(0,0)$到$(k,-n)$且每一步为$(0,-1)$或者$(1,-1)$的路径L的条数为$\binom{n}{k}$.

命题 1.3

坐标平面上从点$(0,0)$到$(k,n-k)$且每一步为$(1,0)$或者$(0,1)$的路径L的条数为$\binom{n}{k}$.

更一般地，我们有：

定理 1.4

设$v=(n_1,n_2,\ldots,n_d)\in\mathbb{N}^d$. 则$\mathbb{Z}^d$中从原点$(0,0,\ldots,0)$ 到v且每一步取自$\{e_1,e_2,\ldots,e_d\}$的格路共有

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_d}$$

条，其中$n=n_1+n_2+\cdots+n_d$.

Outline

定理 2.1

对任意正整数n，有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
$$= y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + x^n.$$

其他形式：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

定理 2.1

对任意正整数n，有

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\\
&= y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1+x^n.
\end{aligned}
$$

其他形式：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$$

令$y=1$得：

推论 2.2

对任意正整数n，有:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k.$$

Outline

★ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

组合证明： 任取n-元集S的一个k- 元子集，并将其中一个元素染成蓝色。设按照这种方式能得到的不同子集数为$x(n,k)$。若按照先选子集后染色的顺序，可知

$$x(n,k) = \binom{n}{k} \times k = k\binom{n}{k}.$$

另一方面，可以先从S中任选一个元素染成蓝色，再从剩下的$n-1$个元素中选出$k-1$个与之组成符合条件的k-元子集。由乘法原理可知

$$x(n,k) = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

因此，

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

★ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

组合证明： 任取n-元集S的一个k- 元子集，并将其中一个元素染成蓝色。设按照这种方式能得到的不同子集数为$x(n,k)$。若按照先选子集后染色的顺序，可知

$$x(n,k) = \binom{n}{k} \times k = k\binom{n}{k}.$$

另一方面，可以先从S中任选一个元素染成蓝色，再从剩下的$n-1$个元素中选出$k-1$个与之组成符合条件的k-元子集。由乘法原理可知

$$x(n,k) = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

因此，

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

★ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

组合证明： 任取n-元集S的一个k- 元子集，并将其中一个元素染成蓝色。设按照这种方式能得到的不同子集数为$x(n,k)$。若按照先选子集后染色的顺序，可知

$$x(n,k) = \binom{n}{k} \times k = k\binom{n}{k}.$$

另一方面，可以先从S中任选一个元素染成蓝色，再从剩下的$n-1$个元素中选出$k-1$个与之组成符合条件的k-元子集。由乘法原理可知

$$x(n,k) = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

因此，

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

代数证明一：直接由二项式系数公式:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

可证得。 $\blacksquare$

代数证明二: 将公式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

两端对x求导得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

又因为

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}$$

比较以上两个式子中x^{k-1}的系数，即可完成证明。

代数证明二: 将公式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

两端对x求导得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

又因为

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}$$

比较以上两个式子中x^{k-1}的系数，即可完成证明。

代数证明二: 将公式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两端对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

又因为

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^k=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}$$

比较以上两个式子中x^{k-1}的系数，即可完成证明。

代数证明二: 将公式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两端对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

又因为

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^k=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}$$

比较以上两个式子中x^{k-1}的系数，即可完成证明。 ∎

★ $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$

代数证明： 在公式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

中令$x=-1, y=1$，得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

即

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots.$$

★ $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$

代数证明： 在公式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

中令$x=-1, y=1$，得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

即

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots.$$

★ $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$

代数证明： 在公式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

中令$x=-1, y=1$，得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

即

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots.$$

★ $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$

代数证明： 在公式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

中令$x=-1, y=1$，得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

即

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots.$$

■

组合证明？？

★ $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

组合证明： 考虑如下计数问题，用双计数法即可完成证明。

给定一个n-元集，任取一个非空子集，并将该子集中一个元素染成蓝色。求按照这样的方法可得到的不同子集数。

代数证明: 公式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{n}x^n$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

令$x=1$，得到

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

★ $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

组合证明： 考虑如下计数问题，用双计数法即可完成证明。

给定一个n-元集，任取一个非空子集，并将该子集中一个元素染成蓝色。求按照这样的方法可得到的不同子集数。

代数证明: 公式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{n}x^n$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

令$x=1$，得到

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

★ $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

组合证明： 考虑如下计数问题，用双计数法即可完成证明。

给定一个n-元集，任取一个非空子集，并将该子集中一个元素染成蓝色。求按照这样的方法可得到的不同子集数。

代数证明: 公式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{n}x^n$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

令$x=1$，得到

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

★ $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

组合证明： 考虑如下计数问题，用双计数法即可完成证明。

给定一个n-元集，任取一个非空子集，并将该子集中一个元素染成蓝色。求按照这样的方法可得到的不同子集数。

代数证明: 公式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{n}x^n$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

令$x=1$，得到

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

★ $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

组合证明： 考虑如下计数问题，用双计数法即可完成证明。

给定一个n-元集，任取一个非空子集，并将该子集中一个元素染成蓝色。求按照这样的方法可得到的不同子集数。

代数证明: 公式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{n}x^n$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

令$x=1$，得到

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

★

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$$

代数证明：公式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1} \tag{2}$$

在(2)两边同乘x得

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k$$

★

$$n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

代数证明： 公式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} \tag{2}$$

在(2)两边同乘x得

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$$

★

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$$

代数证明： 公式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边对x求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1} \tag{2}$$

在(2)两边同乘x得

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k$$

上式两端再对x求导得

$$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)(1+x)^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

令$x=1$得,

$$n[2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

即

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

上式两端再对x求导得

$$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)(1+x)^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

令$x=1$得，

$$n[2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

即

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

上式两端再对x求导得

$$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)(1+x)^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

令$x=1$得，

$$n[2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

即

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

∎

★

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

组合证明：令

$$S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n\}$$
$$S_1=\{x_1,x_2\ldots,x_n\},\ S_2=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}.$$

$$X=\{S\text{的所有}n\text{元子集}\}.$$

显然$|X|=\binom{2n}{n}$.

另一方面，令

$$X_k=\{A\in X\mid |A\cap S_1|=k\},$$

★

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

组合证明：令

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$
$$S_1 = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\},\ S_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

$$X = \{S\text{的所有}n\text{元子集}\}.$$

显然$|X| = \binom{2n}{n}$.

另一方面，令

$$X_k = \{A \in X \mid |A \cap S_1| = k\},$$

★

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

组合证明：令

$$S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n\}$$
$$S_1=\{x_1,x_2\ldots,x_n\},\ S_2=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}.$$
$$X=\{S\text{的所有}n\text{元子集}\}.$$

显然$|X|=\binom{2n}{n}$.

另一方面，令

$$X_k=\{A\in X\mid |A\cap S_1|=k\},$$

则

$$X = X_0 \uplus X_1 \uplus \cdots \uplus X_n$$

且$|X_k| = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$.

从而由加法原理有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

∎

★

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

对任意正整数n和k成立。

代数证明：重复使用帕斯卡公式。

组合证明?

★

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

对任意正整数n和k成立。

代数证明：重复使用帕斯卡公式。

组合证明?

Outline

定义 4.1

给定数列$\{s_i\}_{i=0}^n$. 若存在$t: 0 \leq t \leq n$，使得

$$s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_t \geq s_{t+1} \geq s_{t+2} \geq \cdots \geq s_n.$$

则称数列$\{s_i\}$为单峰的（*unimodal*）。

定理 4.2

给定正整数n。若n为偶数时，

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n};$$

若n为奇数，则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \binom{n}{\frac{n+1}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n}.$$

证明： 由于

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}$$

$$= \frac{n-k+1}{k}$$

因此

当$k < n-k+1$时，$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$;

当$k = n-k+1$时，$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}$;

当$k > n-k+1$时，$\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k}$.

当n为偶数时，对任意整数k，$k \neq n-k+1$. 且$k < n-k+1$等价于$k \leq \frac{n}{2}$。从而有

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n}.$$

当n为奇数时，类似可证。此时二项式系数序列$\{\binom{n}{k}\}_{k=0}^{n}$中间有两项：

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$$

可取最大值。 ∎

定义 4.3

对任意实数x，x的下取整$\lfloor x \rfloor$表示小于或者等于x的最大整数，x的上取整$\lceil x \rceil$表示大于或者等于x的最小整数。

例如：

$$\lfloor 2.7 \rfloor = 2, \lfloor -1.3 \rfloor = -2;$$

$$\lceil 2.7 \rceil = 3, \lceil -1.3 \rceil = -1.$$

定义 4.3

对任意实数x，x的下取整$\lfloor x\rfloor$表示小于或者等于x的最大整数，x的上取整$\lceil x\rceil$表示大于或者等于x的最小整数。

例如：

$$\lfloor 2.7\rfloor = 2, \lfloor -1.3\rfloor = -2;$$

$$\lceil 2.7\rceil = 3, \lceil -1.3\rceil = -1.$$

例 4.4

- 当n为偶数时，

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2};$$

- 当n为奇数时，

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}, \quad \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}.$$

推论 4.5

对任意正整数n及任意整数$k: 0 \le k \le n$，

$$\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

例 4.4

- 当n为偶数时,

$$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\lceil\frac{n}{2}\rceil=\frac{n}{2};$$

- 当n为奇数时,

$$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\frac{n-1}{2},\quad\lceil\frac{n}{2}\rceil=\frac{n+1}{2}.$$

推论 4.5

对任意正整数n及任意整数$k: 0\le k\le n$,

$$\binom{n}{k}\le\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}.$$

Outline

定义 5.1

给定n-元集S. 设$\mathcal{C}$与$\mathcal{A}$都是S的某些子集构成的集族。

- 若对任意$A, B \in \mathcal{C}$, 都有
$$A \subseteq B \quad \text{或者} \quad B \subseteq A,$$
则称$\mathcal{C}$是一条链(*chain*);

- 若对任意$A, B \in \mathcal{A}, A \neq B$，都有
$$A \nsubseteq B \quad \text{且} \quad B \nsubseteq A,$$
则称$\mathcal{A}$为一个反链(*antichain*)。

例 5.2

设$S=\{a,b,c,d\}$。则

$$\mathcal{C}=\{\{a\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$$

是一条链，而

$$\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$$

是一个反链。

设$\mathcal{C}$是一条包含k个子集的链，则其中的集合可唯一地写成如下包含关系：

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k.$$

定义 5.3

给定集合$S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$\mathcal{C}$为$S$的某些子集构成的一条链。称$\mathcal{C}$为一条最大链，若$\mathcal{C}$中的集合按照包含关系写为：

$$\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$$

其中$|A_i| = i$.

设$\mathcal{C}$是一条包含k个子集的链，则其中的集合可唯一地写成如下包含关系：

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k.$$

定义 5.3

给定集合$S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$\mathcal{C}$为$S$的某些子集构成的一条链。称$\mathcal{C}$为一条最大链，若$\mathcal{C}$中的集合按照包含关系写为：

$$\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$$

其中$|A_i| = i$.

例 5.4

设$n = 5, S = \{1,2,3,4,5\}$，则

$$\emptyset \subset \{3\} \subset \{3,4\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\} \subset \{1,2,3,4,5\}$$

就是一条最大链。

n-元集$S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的任一个最大链都可按照下述步骤得到：

- 从空集开始；
- 在S中任选一个元素x_{i_1}，令$A_1 = \{x_{i_1}\}$；
- 在S中任选一个元素$x_{i_2} \neq x_{i_1}$，令$A_2 = \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$；

  $\vdots$
- 在S中选取一个元素$x_{i_n} \neq x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n-1}}$，令$A_n = S$.

例 5.4

设$n=5, S=\{1,2,3,4,5\}$，则

$$\emptyset \subset \{3\} \subset \{3,4\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\} \subset \{1,2,3,4,5\}$$

就是一条最大链。

n-元集$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的任一个最大链都可按照下述步骤得到：

- 从空集开始；
- 在S中任选一个元素x_{i_1}，令$A_1=\{x_{i_1}\}$；
- 在S中任选一个元素$x_{i_2} \neq x_{i_1}$，令$A_2=\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$；

  $\vdots$
- 在S中选取一个元素$x_{i_n} \neq x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n-1}}$，令$A_n=S$.

按照上述步骤，给定S的一个排列$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$，令$A_i = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_i}\}$（$1 \le i \le n$），则

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

是一条最大链。反之，给定一条最大链

$$\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n,$$

由于$|A_i \setminus A_{i-1}| = 1$，可设$A_i \setminus A_{i-1} = \{x_{j_i}\}$. 则我们可得到$S$的一个排列：$x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n}$.

由此可见，最大链的条数为$n!$. 同理，不难得知，任给一个k-元集$A \subset S$, 包含A的最大链的条数为$k!(n-k)!$.

按照上述步骤，给定S的一个排列$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$，令$A_i = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_i}\}$（$1 \le i \le n$），则

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

是一条最大链。反之，给定一条最大链

$$\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n,$$

由于$|A_i \setminus A_{i-1}| = 1$，可设$A_i \setminus A_{i-1} = \{x_{j_i}\}$. 则我们可得到$S$的一个排列：$x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n}$.

由此可见，最大链的条数为$n!$. 同理，不难得知，任给一个k-元集$A \subset S$, 包含A的最大链的条数为$k!(n-k)!$.

定理 5.5 (Sperner定理)

设S是一个n-元集，则由S的子集构成的任意一个反链$\mathcal{A}$至多包含$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$个集合。

证明：设α_k表示$\mathcal{A}$中元素个数为k的集合个数。对任意$A \in \mathcal{A}$，令$\mathcal{MC}_A$表示所有包含A的最大链所构成的集合。若$|A| = k$，则

$$|\mathcal{MC}_A| = k!(n-k)!.$$

注意到$\mathcal{A}$是一个反链，因此任意一条最大链不可能同时包含$\mathcal{A}$中不同的两个集合，即

$$\mathcal{MC}_A \cap \mathcal{MC}_B = \emptyset,\ \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ 且 } A \neq B.$$

因此

$$\sum |\mathcal{MC}_A| \leq n!.$$

定理 5.5 (Sperner定理)

设S是一个n-元集，则由S的子集构成的任意一个反链$\mathcal{A}$至多包含$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 个集合。

证明: 设α_k表示$\mathcal{A}$中元素个数为k的集合个数。对任意$A \in \mathcal{A}$，令$\mathcal{MC}_A$表示所有包含A的最大链所构成的集合。若$|A| = k$, 则

$$|\mathcal{MC}_A| = k!(n-k)!.$$

注意到$\mathcal{A}$是一个反链，因此任意一条最大链不可能同时包含$\mathcal{A}$中不同的两个集合，即

$$\mathcal{MC}_A \cap \mathcal{MC}_B = \emptyset, \ \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ 且 } A \neq B.$$

因此

$$\sum |\mathcal{MC}_A| \leq n!.$$

定理 5.5 (Sperner定理)

设S是一个n-元集，则由S的子集构成的任意一个反链$\mathcal{A}$至多包含$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$个集合。

证明：设α_k表示$\mathcal{A}$中元素个数为k的集合个数。对任意$A \in \mathcal{A}$，令$\mathcal{MC}_A$表示所有包含A的最大链所构成的集合。若$|A| = k$，则

$$|\mathcal{MC}_A| = k!(n-k)!.$$

注意到$\mathcal{A}$是一个反链，因此任意一条最大链不可能同时包含$\mathcal{A}$中不同的两个集合，即

$$\mathcal{MC}_A \cap \mathcal{MC}_B = \emptyset,\ \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ 且 } A \neq B.$$

因此

$$\sum |\mathcal{MC}_A| \le n!.$$

定理 5.5 (Sperner定理)

设S是一个n-元集，则由S的子集构成的任意一个反链$\mathcal{A}$至多包含$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 个集合。

证明：设α_k表示$\mathcal{A}$中元素个数为k的集合个数。对任意$A \in \mathcal{A}$，令$\mathcal{MC}_A$表示所有包含A的最大链所构成的集合。若$|A| = k$, 则

$$|\mathcal{MC}_A| = k!(n-k)!.$$

注意到$\mathcal{A}$是一个反链，因此任意一条最大链不可能同时包含$\mathcal{A}$中不同的两个集合，即

$$\mathcal{MC}_A \cap \mathcal{MC}_B = \emptyset, \ \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ 且 } A \neq B.$$

因此

$$\sum |\mathcal{MC}_A| \leq n!.$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k k!(n-k)! \le n!.$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \le 1.$$

由推论4.5，$\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$，因此

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

故

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Outline

定理 6.1

设n为正整数。对任意$x_1, x_2, \cdots, x_t$，有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n = \sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_t\geq 0\\ n_1+n_2+\cdots+n_t=n}} \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots n_t} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

推论 6.2

出现在$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$展开式中不同项的个数为

$$\left(\!\binom{t}{n}\!\right) = \binom{t+n-1}{n}.$$

定理 6.1

设n为正整数。对任意$x_1, x_2, \cdots, x_t$，有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_t \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n}} \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$$

推论 6.2

出现在$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$展开式中不同项的个数为

$$\left(\!\binom{t}{n}\!\right) = \binom{t+n-1}{n}.$$

例 6.3

在$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^7$的展开式中，$x_1^2x_3x_4^3x_5$的系数为

$$\binom{7}{2\ 0\ 1\ 3\ 1}=\frac{7!}{2!0!1!3!1!}=420.$$

例 6.4

在$(2x_1-3x_2+5x_3)^6$的展开式中，$x_1^3x_2x_3^2$的系数为

$$\binom{6}{3\ 1\ 2}2^3(-3)5^2=-36000.$$

例 6.3

在$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^7$的展开式中，$x_1^2x_3x_4^3x_5$的系数为

$$\binom{7}{2\ 0\ 1\ 3\ 1} = \frac{7!}{2!0!1!3!1!} = 420.$$

例 6.4

在$(2x_1-3x_2+5x_3)^6$的展开式中，$x_1^3x_2x_3^2$的系数为

$$\binom{6}{3\ 1\ 2}2^3(-3)5^2 = -36000.$$

作业：

- P_{96} 习题11；
- P_{96} 习题13；
- P_{96} 习题15；
- P_{96} 习题18；
- P_{97} 习题28

作业

- 证明：集合$S=\{1,2,3,4,5,6\}$的大小为20的反链就是由S的所有3-元子集构成的反链；
- P_{98}，习题37, 并给出本题的组合证明；
- P_{98}，习题42；