二项式系数

张彪

2021 年 10 月 15 日

目录

1 课后习题

7. 利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1},$$

求 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

解

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} m^2 &= \sum_{m=1}^{n}\left(2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right) = 2\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = 2\cdot\frac{(n+1)\cdot n(n-1)}{3\times 2} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

8. 求整数 a, b, c, 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1}, \tag{1.1}$$

求计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

解 将 $m = 1$ 代入(1.1), 得 $c = 1$.

将 $m = 2$ 代入(1.1), 得 $b + 2c = 8$, 解得 $b = 6$.

将 $m = 3$ 代入(1.1), 得 $a + 3b + 3c = 27$, 解得 $a = 6$.

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \sum_{m=1}^{n}\left(6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right) \\ &= b\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \binom{n+1}{2}^2\end{aligned}$$

2 补充习题

1. 证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

证明 对

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\ ,$$

两边对 x 求从 0 到 1 的定积分，

$$\int_0^1(1+x)^n\ \mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\ \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\bigg|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{k+1}x^{k+1}\bigg|_0^1$$

$$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

此即所证等式。使用这种方法证明不等式时一定要取定积分，否则易出现常数确定上的错误.

2. 计算

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}.$$

解 对

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边求导，得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

两边乘 x, 得

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k$$

两边再求导，得

$$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}\right]=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

取 $x=1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n\left(2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^{n-2}\right)=n(n+1)2^{n-2}$$

3. 证明

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

证法一

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

证法二 用组合证明. 考虑从 n 个人中选出带一个小组长的 k 人小组. 若先选出 k 个人，再从 k 个人中选小组长，则有 $k\binom{n}{k}$ 种选法. 若先选出组长，再从剩下的 $n-1$ 个人中选 k 一 1 个组员，则有 $n\binom{n-1}{k-1}$ 种选法. 从而

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1},\quad \text{即}\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

4. 用 $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ 证明下列恒等式。

   (a) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

   (b) $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$.

   (d) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

   解

   (a) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=n\cdot 2^{n-1}$

   (b) $\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n-1}{k}=n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$

   (c) 利用前两个式子证明。

   (d) 最后一个式子可用 $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ 这个公式证明。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\\&=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{0}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\end{aligned}$$

5. 证明下列组合恒等式:

   (a) $\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$;

   (b) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}=0$

   (c) $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=2^m\binom{n}{m}$

   证明

   (a) $\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{j!(k-j)!}=\frac{n}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

   (b) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{m}\sum_{k}(-1)^k\binom{m}{k}=\binom{n}{m}0=0$

   (c) $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m\binom{n}{m}$

3 思考题

1. 设 n 和 k 均为正整数, 给出下面式子的一个组合证明:
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

2. 设 n 是正整数, 证明
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & n \text{ 为偶数} 2m. \end{cases}$$
提示：考虑 $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数。

3. 设 n 是正整数，证明
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

4. 证明下列恒等式
$$\binom{n+k}{k}^2 = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}.$$
李善兰恒等式为组合数学中的一个恒等式，由中国清代数学家李善兰于 1859 年在《垛积比类》一书中首次提出，因此得名。

4 高斯系数

4.1 高斯系数的定义

我们下面要介绍的高斯系数是由德国数学家高斯最早提出的．高斯被认为是最重要的数学家，并有“数学王子”的美誉．1792 年，15 岁的高斯进入 Braunschweig 学院．从此，高斯开始对高等数学作研究．独立发现了二项式定理的一般形式、数论上的“二次互反律”、素数定理及算术-几何平均数．18 岁时，高斯转入哥廷根大学学习．在他 19 岁时，第一个成功的用尺规构造出了规则的 17 边形．1811 年，高斯已是哥廷根大学的教授．一次偶然的机会，他在研究“二次高斯和”的估值的时候提出了这样一个多项式 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

定义 4.1. *一般地，称*
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}, \quad 1 \le k \le n. \tag{4.1}$$
为 **Gauss** *系数*.

我们总是假定 $|q|<1$. 若记 $[n]!=[1]![2]!\cdots[n]!$, 其中 $[n]=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$, 则(4.1)式也可写为

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

组合恒等式中最基本的就是二项系数 $\binom{n}{k}$，它的组合意义大家都已十分清楚了. 高斯系数是二项式系数的 q-模拟. 由定义可知

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

这也是我们将 q-Gauss 系数，也称为 q-二项式系数名称的由来.

4.2 高斯系数的性质

定理 4.1. *q-Gauss 系数具有以下性质:*

1. $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}=1$;
2. $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}$;
3. $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}+q^{n-k}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$;
4. $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}+q^{k}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$.

证明 (1)、(2) 可直接由定义可得，我们只证 (3),

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}&=\frac{(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)\cdots(1-q)}[(1-q^n)-(1-q^{n-k})]\\&=\frac{(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})q^{n-k}(1-q^k)}{(1-q^k)\cdots(1-q)}\\&=\frac{q^{n-k}(1-q^(n-1))\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}\\&=q^{n-k}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

类似可证明 (4).

下面我们主要阐述 Gauss 系数的组合意义.

4.3 与线性代数的关系

组合意义 1: 为此，先给出有限域上的线性空间的一些概念. 设 $\mathbb{F}_q$ 为有限域, 其中 $q=p^r$, p 为素数. 对自然数 n, 我们定义 $V_n(q)$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的有序 n 元组

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{F}_q, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

组成的集合，并满足线性运算

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\alpha\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q$$

则 V_n 构成 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间, 其中的元素称为向量. 若向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

则称向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是线性无关的. V_n 中含 n 个向量的线性无关组称为 V_n 的一组基。V_n 中的任意向量都可以由 V_n 的一组基线性表示, 即 $\forall X \in V_n, \exists \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \in \mathbb{F}_q$, 使得

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

用坐标表示为

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的组合含义由下面定理给出.

定理 4.2. *有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.*

证明 首先，从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的元组构成一个 k 维子空间的 (有序) 基. 为此，我们需要从空间 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量. 对于第一个向量 v_1，可以选取任意非零向量，因此由 q^n-1 中选择. 对于第二个向量 v_2，我们不能选取 v_1 的倍数，因此有 q^n-q 种选择. 对于第三个向量 v_3，有 q^2 个不能选取的向量，它们是 v_1 和 v_2 的线性组合. 以此类推，从 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量的方法数为

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1}), \tag{4.2}$$

值得注意的是，一个子空间可以有很多组 (有序) 基. 类似上面的讨论，选定一个 k 维子空间，在其中选一组基的方法数为

$$(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1}).$$

这就是(4.2)中每个子空间重复计数的数目. 因此，$V_n(q)$ 的 k 维子空间的个数是

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

4.4　与排列的关系

组合意义 2:

首先给出排列中逆序数的概念．一对元素 (i,j) 称为是一个逆序 (inversion)，如果满足 $i<j$ 且 $\pi_i>\pi_j$．π 的逆序的个数为 π 的逆序数，记作 $inv(\pi)$．

命题 4.1.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi\in S(1^k2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k2^{n-k})$ 是由如下置换 π 构成的集合: $\pi=a_1a_2\cdots a_n$, 其中有 k 个 a_i 为 1, $n-k$ 个 a_i 为 2.

证明　对 n 用归纳法．

当 $n=1$ 时，性质显然成立．现在假设对 $n-1$ 成立，考虑 n 的情形．$\forall\ \pi=a_1a_2\cdots a_n\in S(1^k2^{n-k})$，分两种情况考虑:

若 $a_n=2$，则将 a_n 去掉后，π 的逆序数不发生变化，且此时 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\in S(1^k2^{n-k-1})$;

若 $a_n=1$，则因为 π 中的每个 2 皆对 a_n 产生一个逆序数，故去掉 a_n 后，逆序数减少 $n-k$ 个，且 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\in S(1^{k-1}2^{n-k})$.

所以

$$\sum_{\pi\in S(1^k2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

4.5　与分拆的关系

4.5.1　分拆简介

一个关于整数 n 的分拆 λ 是一个有限非递增的整数序列 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, 使得 $\sum_{i=1}^r\lambda_r=n$，则 λ_i 称为 λ 的部分，λ_1 为最大部分，λ 的部分数称为 λ 的长度，记为 $l(\lambda)$．λ 的权重是 λ 的各部分相加的和，记为 $|\lambda|$．

例如，5 的分拆共有 7 个，分别是:

$$(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1).$$

有时我们需要用到 λ 中相同部分出现的次数．若 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ 中有 f_1 个 1，f_2 个 2，……我们可以将其表示为

$$\lambda=\langle 1^{f_1},2^{f_2},3^{f_3},\ldots\rangle$$

其中 f_j 表示有 j 出现的次数，注意 $\sum_{i\geq 1} i f_i=n$．

所以上面的例子还可以写为：

$$\langle 5^1\rangle,\langle 1^1,4^1\rangle,\langle 2^1,3^1\rangle,\langle 1^2,3^1\rangle,\langle 1^1,2^2\rangle,\langle 1^3,2^1\rangle,\langle 1^5\rangle$$

分拆还可以用它的 Young 图表示，如图所示：

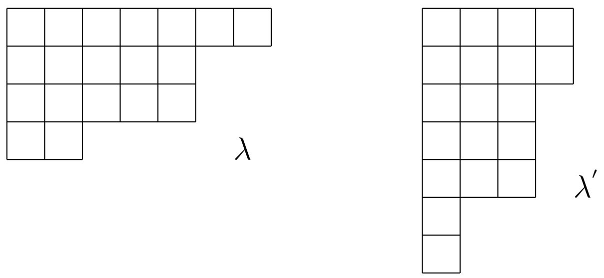

图 1.1: 分拆 $\lambda=(7,5,5,2)$ 及其共轭分拆 $\lambda'=(4,4,3,3,3,1,1)$

给定分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ 我们定义 λ 的共轭分拆 $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_t)$, 其中 λ'_i 表示 λ 中大于或者等于 i 的部分数．实际上共轭 λ' 可以由分拆 λ 通过作关于主对角线的翻转而得到，如图 1.1 所示．

4.5.2 高斯系数与分拆的关系

组合意义 3:

令 Par 表示所有分拆的集合．设

$$L(m,n)=\{\lambda\in Par:\ell(\lambda)\leq n,\ell(\lambda')\leq m\}.$$

高斯系数和分拆的联系由下面的定理给出．

定理 4.3. 对任意的 $m,n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}=\sum_{\lambda\in L(m,n)} q^{|\lambda|}$$

例 4.1. 当 $m=2, n=3$ 时，

$$\begin{bmatrix} 2+3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$$

假设 n 的分拆为

$$n = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + 3\cdot a_3 + \ldots + n\cdot a_n \tag{4.3}$$

令 $p(n,k,N)$ 表示 n 的所有分拆中满足

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \le k, \quad a_{N+1}=\ldots=a_n=0$$

的分拆个数，即分拆部分数 $\le k$, 且最大部分 $\le N$ 的分拆数.

显然

$$p(kN,k,N)=1\text{，唯一的分拆是} < N^k >;$$
$$p(n,k,N)=0, \quad \text{当} n > kN \text{时}.$$

另外，我们令

$$p(n,0,N)=p(n,k,0)=\begin{cases} 1, & n=k=N=0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则有

引理 4.1.

$$p(n,k,N)=p(n,k-1,N)+p(n-k,k,N-1). \tag{4.4}$$

证明 有如下的组合解释：$p(n,k,N)-p(n,k-1,N)$ 计数的是 n 的分拆中分拆部分数恰为 k, 且最大部分 $\le N$ 的 n 的分拆个数；任给 n 的一个满足条件的分拆，从每一部分里减去 1，得到 $n-k$ 的一个分拆，且满足部分数 $\le k$, 最大部分 $\le N-1$. 这样的分拆个数为 $p(n-k,k,N-1)$.

容易验证,这两种类型的分拆之间有一个一一对应.因此(4.4) 式成立.考虑 $p(n,k,N)$ 的生成函数

$$F(q;k,N)=\sum_{n=0}^{kN} p(n,k,N)q^n.$$

由(**??**)式，

$$F(q;k,N)=F(q;k-1,N)+q^kF(q;k;N-1),$$

其中 $F(q;0,N)=F(q;k,0)=1$.

根据定理 1.1.1 中的 (1),(3), 我们看到 $F(q;k,N)$ 和 $\begin{bmatrix} N+k \\ k \end{bmatrix}$ 有相同的递推关系式和初始值，因此

$$F(q;k,N)=\begin{bmatrix} N+k \\ k \end{bmatrix},$$

也即

$$\begin{bmatrix} N+k \\ k \end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{kN} p(n,k,N)q^n.$$

4.6 Cauchy 二项式定理

众所周知，二项式定理，又称牛顿二项式定理

$$(1+z)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j \tag{4.5}$$

其中

$$\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

上述定理由艾萨克 · 牛顿 (Newton) 于 1665 年初提出。1643 年 1 月 4 日牛顿生于英国林肯郡的沃尔索普村，父亲是一个农民，在牛顿出生前就死了。虽然母亲也希望他务农，但幼年的牛顿却在做机械模型和实验上显示了他的爱好和才能。例如，他做了一个玩具式的以老鼠为动力的磨和一架靠水推动的木钟。14 岁时，由于生活所迫，牛顿停学务农，以后在舅父的帮助下又入学读书。1661 年，不满 19 岁的牛顿考入剑桥大学的三一学院。1665 年，鼠疫在英国流行，剑桥大学关闭，牛顿只好回农村居住。在沃尔索普村的 18 个月里，牛顿给出了二项式定理的证明，发明了微积分，提出了万有引力定律，还研究了光的性质。牛顿一生的重大成就大都发轫于这一期间。后来，他在追忆这段峥嵘的青春岁月时说:“当年我正值发明创造能力最强的年华，比以后任何时期更专心致志于数学和哲学 (科学)。”

下面是 Cauchy 二项式定理:

定理 4.4.

$$\prod_{k=1}^{n}(1+yq^k)=\sum_{k=0}^{n} y^k q^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

由 Gauss 系数的性质可知，Cauchy 二项式定理为牛顿二项式定理的 q 模拟。下面给出推论 4.4 的四种证明。

方法一（数学归纳法）

假设 $n=m$ 时，推论 4.4 显然成立，下面证明 $n=m+1$ 时有

$$\prod_{k=1}^{m+1}(1+yq^k)=\sum_{k=0}^{m+1}y^kq^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix}m+1\\k\end{bmatrix}_q$$

由

$$\begin{bmatrix}m+1\\k\end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q+q^{m+1-k}\begin{bmatrix}m\\k-1\end{bmatrix}_q$$

可知

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m+1}y^kq^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix}m+1\\k\end{bmatrix}_q\\ =&\sum_{k=1}^{m}y^kq^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q+\sum_{k=1}^{m}y^kq^{\frac{k(k+1)}{2}+m+1-k}\begin{bmatrix}m\\k-1\end{bmatrix}_q+1+y^{m+1}q^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}\begin{bmatrix}m+1\\m+1\end{bmatrix}_q\\ =&\sum_{k=0}^{m}y^kq^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q+\sum_{k=0}^{m}y^{k+1}q^{\frac{k(k+1)}{2}+m+1}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q\\ =&(1+yq^{m+1})\prod_{k=1}^{m}(1+yq^k)\\ =&\prod_{k=1}^{m+1}(1+yq^k)\end{aligned}$$

得证。

方法二（生成函数方法）

令

$$F(y)=\prod_{k=1}^{n}(1+yq^k)=\sum_{k=0}^{n}A_ky^k$$

观察到

$$(1+yq)\prod_{k=2}^{n}(1+yq^k)(1+yq^{n+1})=(1+yq)F(yq)=(1+yq^{n+1})F(y)$$

则

$$(1+yq)\sum_{k=0}^{n}A_ky^kq^k=(1+yq^{n+1})\sum_{k=0}^{n}A_ky^k$$

比较 y^k 系数可知

$$A_k+q^{n+1}A_{k-1}=q^kA_k+q^kA_{k-1}$$

则

$$\frac{A_k}{A_{k-1}}=\frac{q^k(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}$$

则

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{A_k}{A_{k-1}} \cdot \frac{A_{k-1}}{A_{k-2}} \cdots \frac{A_1}{A_0} \cdot A_0 \\
&= \frac{q^k(1-q^{n+1-k})}{1-q^k} \cdot \frac{q^{k-1}(1-q^{n+2-k})}{1-q^{k-1}} \cdots \frac{q(1-q^n)}{1-q} \cdot A_0
\end{aligned}
$$

由 $A_0 = 1$ 可知

$$
A_k = q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q
$$

得证。

方法三 (应用排列相关性质)

由 Gauss 系数性质可知，

$$
\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}_q = \sum_{\sigma \epsilon S(i,j)} q^{inv(\sigma)} \tag{4.6}
$$

其中 $S(i,j)$ 为重集 $\{1^j 2^i\}$ 上的所有排列构成的集合。

引理 4.2. 令 $E = \{(a_1, a_2, \cdots, a_i) | 0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_i \le j, a_1, a_2, \cdots, a_i \epsilon \mathbb{N}\}$，集合 E 与 $S(i,j)$ 间存在一一映射。

证明 对于任意的 $(a_1, a_2, \cdots, a_i) \epsilon E$，构造重集 $\{1^j 2^i\}$ 上的排列 σ，使得 σ 中第一个 2 贡献 a_i 个逆序，第二个 2 贡献 a_{i-1} 个逆序，$\cdots\cdots$，最后一个 2 贡献 a_1 个逆序。例如:

$$
(0,0,1,1,2,2,3) \longleftrightarrow 2122122122
$$

易验证该映射为一一映射。

如果 $(a_1, a_2, \cdots, a_i) \longleftrightarrow \sigma$，那么

$$
a_1 + a_2 + \cdots + a_i = inv(\sigma)
$$

由 (4.6) 得

$$
\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}_q = \sum_{0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_i \le j} q^{a_1 + a_2 + \cdots + a_i} \tag{4.7}
$$

引理 4.3. 令 $F = \{(b_1, b_2, \cdots, b_i) | 1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_i \le j+i, b_1, b_2, \cdots, b_i \in p\mathbb{N}\}$，集合 E 与 F 间存在一一映射。

证明 该一一映射为

$$
(a_1, a_2, \cdots, a_i) \longleftrightarrow (a_1 + 1, a_2 + 2, \cdots, a_i + i)
$$

例如

$$(0,0,1,1,2,3) \longleftrightarrow (1,2,4,5,7,8,10).$$

由 (4.7) 及引理 4.3可知

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}_q &= \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_i\le j} q^{a_1+a_2+\cdots+a_i} \\
&= \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_i\le j} q^{(a_1+1)+(a_2+2)+\cdots+(a_i+i)-\frac{i(i+1)}{2}} \\
&= \sum_{1\le b_1<b_2<\cdots<b_i\le j+i} q^{b_1+b_2+\cdots+b_i-\frac{i(i+1)}{2}}
\end{aligned}$$

令 $j=n-i$，则

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \sum_{1\le b_1<b_2<\cdots<b_i\le n} q^{b_1+b_2+\cdots+b_i-\frac{i(i+1)}{2}} \tag{4.8}$$

注意到 $\prod_{k=1}^{n}(1+yq^k)$ 中 y^i 的系数为

$$\sum_{1\le e_1<e_2<\cdots<e_i\le n} q^{e_1+e_2+\cdots+e_i} = q^{\frac{i(i+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$$

故推论 4.4得证。

方法四 (应用分拆相关性质)

由生成函数知识可知，$\prod_{k=1}^{n}(1+yq^k)$ 为各部分不同、最大部分 $\le n$ 且部分数 $\le n$ 的分拆的生成函数。给定各部分不同且最大部分 $\le n$ 的分拆 λ，设 λ 的部分数为 $k(0\le k\le n)$。将其如图所示做分解：图中，(1) 对应 $q^{\frac{k(k+1)}{2}}$，由 Guass 系数的性质 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 为满足部分数 $\le k$ 最大部分 $\le n-k$ 的分拆的生成函数可知 (2) 对应 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$，得证。