第四章 矩阵（逆，秩）

关于 $AB=0$

1 矩阵乘法消去律不成立　$AB=0 \not\Rightarrow A=0,或B=0$，即存在非零矩阵 A,B，而 $AB=0$.

例：设 $A^2=A, A\neq E$（单位矩阵），证明 $|A|=0$.

2 方程组的解的解释

设 $A_{s\times n}, B_{n\times m}$，假设 $AB=0$，取 B 的列向量组 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则

$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=0=(0,0,\cdots,0)$，从而 $A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,m$，

若考察 $AX=0$，以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组，则 $A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,m$，即说明 β_i 是 $AX=0$ 的解.故 $AB=0$ 的一个解释就是：B 的列向量组 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 $AX=0$ 的解.

反之，若 $AX=0$ 有非零解 X_1,X_2，则令 $B=(X_1,X_2)$，非零，且 $AB=0$，其中 B 是一个 $n\times 2$ 阵.

由上面解释我们可给出：设 $A_{s\times n}, B_{n\times m}$，若 $AB=0$，且 $r(A)=n$，则 $B=0$.

矩阵可逆:

设 n 阶方阵 A,则 A 可逆的充要条件是

$\Leftrightarrow$ 定义 $AB=BA=E$ $\Leftrightarrow$ 行列式非零,即 $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 矩阵的秩为 n $\Leftrightarrow$ 行满秩 $\Leftrightarrow$ 列满秩.

$\Leftrightarrow$ 行向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 与单位阵等价 $\Leftrightarrow$ A 可写成初等矩阵的乘积.

$\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解.

$\Leftrightarrow$ 任一 n 维行(列)向量都可由矩阵的行(列)向量组线性表出.

如何求逆（定义、伴随矩阵、初等变换）举例说明

1 用定义证明矩阵可逆，及求逆（抽象题目）

例 已知方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$,则 $A^{-1}=$ ______. $(A+2E)^{-1}=$ ______.

由 $A^2-A-2E=0$，可得 $A(A-E)=2E$，从而 $A\frac{1}{2}(A-E)=E$，则 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=-4E$,从而 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

2 设 A 是一4阶可逆阵,知 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&1&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,则 $A=$ ________.

由 $AA^*=|A|E$，可知 $A=|A|E(A^*)^{-1}=|A|(A^*)^{-1}$，故计算 $|A|$ 即可. $|(A^*)^{-1}|=27=\frac{1}{|A^*|}$，故

$\left|A^*\right| = \dfrac{1}{27} = \left|A\right|^3$，故 $\left|A\right| = \dfrac{1}{3}$，代入求解.

矩阵的秩：

1) 设矩阵 A 是一个 $s\times n$ 矩阵,则 $r(A)\le \min(s,n)$, $r(A^T)=r(A)$, $r(kA)=r(A)$,其中 $k\ne 0$.

2) 设 P,Q 可逆,则 $r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$.

3) （课后题 17） $A_{s\times n},B_{s\times n}:0\le r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$；

$A_{s\times n},B_{s\times m}:\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；用列向量解释

$A_{s\times n},B_{t\times n}:\max(r(A),r(B))\le r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$. 用行向量解释

$A_{s\times n},B_{n\times m}:r(AB)\le \min(r(A),r(B))$.

4) $A_{s\times n},B_{t\times m}$： $r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$； $r\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\ge r(A)+r(B)$.

对矩阵 A,B ,存在可逆阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2 ,使得 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}$, $P_2BQ_2=\begin{pmatrix}E_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1AQ_1&0\\0&P_2BQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}&0\\0&\begin{pmatrix}E_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&E_{r_2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&E_{r_2}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1+r_2}&0\\0&0\end{pmatrix},\text{从而 } r\left(\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}\right)=r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B).$$

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1AQ_1&0\\P_2CQ_1&P_2BQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}&0\\P_2CQ_1&\begin{pmatrix}E_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\C_1&C_2&E_{r_2}&0\\C_3&C_4&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&E_{r_2}&0\\0&C_4&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&E_{r_2}&0&0\\0&0&C_4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1+r_2}&0&0\\0&C_4&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

则 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} E_{r_1+r_2} & 0 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \ge r(A)+r(B)$.

5) 设 A_{sn}, B_{nm} ,则 $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$.

构造 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$ 故 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$,即

$r(AB)+n \ge r(A)+r(B)$,从而 $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$.

6) （课后题 18）若 $AB=0,$ 则 $r(A)+r(B) \le n$.

如上,另外矩阵 B 的列向量组是 $Ax=0$ 的解,从而列向量组的秩不超过 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数.即 $r(B) \le n-r(A)$,从而 $r(A)+r(B) \le n$.

7) 设 A_{sn}, B_{nm}, C_{mt} ,则 $r(ABC) \ge r(AB)+r(BC)-r(B)$.

构造 $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & -AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$,则

$r\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \ge r(AB)+r(BC)$,即 $r(ABC) \ge r(AB)+r(BC)-r(B)$.

8) （补充题 3,4）(1) $A^2=E \Leftrightarrow r(A+E)+r(A-E)=n$.

若证明必要性“$\Rightarrow$”： $A^2-E=(A-E)(A+E)=0$，则 $r(A+E)+r(A-E) \le n$，同时

$r(A+E)+r(A-E) \ge r(A+E-(A-E)) = r(2E) = n$，故 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

证明充分性，需要构造

$$\begin{pmatrix} A+E & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+E & E-A \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2E & E-A \\ A-E & A-E \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2E & E-A \\ 0 & A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2 \end{pmatrix}.$$

若 $A^2=E$,则 $A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2=0$,从而 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

若 $r(A+E)+r(A-E)=n$,则 $0=A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2$,即 $0=2A-2E+E-2A+A^2=A^2-E$.

(2) $A^2=A \Leftrightarrow r(A)+r(A-E)=n$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ -A & -E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ -A & -E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

若 $A^2 = A$,则$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$,从而$r(A)+r(A-E)=n$.

若$r(A)+r(A-E)=n$,则$A-A^2=0$,从而$A^2=A$.

(3) 方阵A，则$(A-aE)(A-bE)=0,(a \neq b) \Leftrightarrow r(A-aE)+r(A-bE)=n$.

9) （课后题 27）设n $(n>1)$阶方阵A,有$r(A^*)=\begin{cases} n, & if \quad r(A)=n, \\ 1, & if \quad r(A)=n-1, \\ 0, & if \quad r(A)<n-1, \end{cases}$

证明:首先有$AA^* = |A|E$.若$r(A)=n$,即A可逆,则A^*可逆,从而满秩.

若$r(A)<n$,则$AA^* = |A|E = 0$,从而根据公式可得$r(A)+r(A^*) \le n$,则$0 \le r(A^*) \le 1$.

$r(A)=n-1$,则矩阵A存在一个$n-1$阶子式非零,从而存在一个元素的代数余子式非零,从而矩阵A的伴随矩阵非零,故$r(A^*)=1$.

若$r(A)<n-1$,则所有元素的代数余子式均为零,从而$A^*=0$,从而$r(A^*)=0$.

10) （补充题 1）若矩阵可写成一个列向量和一个行向量的乘积,即$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,则$0 \le r(A) \le 1$.

若$\alpha \neq 0, \beta \neq 0,$则$r(A)=1$;若其中一个为零,则$r(A)=0$,即$A=0$.