17-18 A 期末答案

一、 **填空题:（每题 3 分，本大题共 30 分）**

1. $\frac{1}{2}n!$.

2. $\frac{n(n-1)}{2}-k$.

3. $-2^6\cdot 3=-192$.

4. 1.

5. $\frac{4}{5}$.

6. $-\frac{1}{3}(A+2E)$.

7. $n-r$.

8. $t\neq 5$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

10. α_1,α_2 或 α_2,α_3 或 α_1,α_3 .

二、 **计算题:（每小题 10 分，本大题共 40 分）**

1. 解

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n-1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n(n+1)+2}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)+2}{2}.$$

……(10 分)

2. 解 设$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$满足$AB=BA$,则有

$$\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a+b & 0 \\ d+e & d+e & 0 \\ x+y & x+y & 0 \end{pmatrix},\text{故}\begin{cases} b=d \\ a=e \\ c+f=0 \\ x+y=0 \end{cases},\text{从而} \qquad \cdots\cdots(5\text{ 分})$$

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ x & -x & z \end{pmatrix},\text{其中 } a,b,c,x,z \text{ 任取}. \qquad \cdots\cdots(10\text{ 分})$$

3. 解 增广矩阵$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & a \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 2 & b \end{array}\right)$化为阶梯形.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & a \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 2 & b \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & b-3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

当$a=4$且$b=1$时,$r(A)=r(\overline{A})=2$,有解. ……(4 分)

导出组的基础解系含有3个向量.

求特解:$\gamma_0=(3,-1,0,0,0)$, ……(6 分)

基础解系:$\eta_1=(-2,0,1,0,0),\eta_2=(-4,1,0,2,0),\eta_3=(-4,1,0,0,2)$, ……(9 分)

则通解为$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$.其中$k_1,k_2,k_3$任意. ……(10分)

4. 解 A可逆，则由$A^{-1}BA=6A+BA$, 可得$A^{-1}B=6E+B$,两端左乘A,得$B=6A+AB$,

移项得$(E-A)B=6A$,则$B=6(E-A)^{-1}A$. ……(5 分)

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & \frac{3}{4} & \\ & & \frac{6}{7} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{pmatrix},\text{故 } B=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \qquad \cdots\cdots(10\text{ 分})$$

三、 **证明题:（每小题 10 分，本大题共 30 分）**

1. 证明 记原行列式为D_n,则D_n按照第一行展开可得

$D_n = 6D_{n-1} - 8D_{n-2}$,则有 ……(4 分)

(1) $D_n - 2D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 2D_{n-2})$, (2) $D_n - 4D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 4D_{n-2})$,

(1) (2) 作为递推公式可分别得

$D_n - 2D_{n-1} = 4^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = 4^{n-2}(D_2 - 2D_1) = 4^n$,

$D_n - 4D_{n-1} = 2^2(D_{n-2} - 4D_{n-3}) = 2^{n-2}(D_2 - 4D_1) = 2^n$,从而可得 ……(6 分)

$D_n = 2^{2n+1} - 2^n$. ……(10 分)

2. 证明 对矩阵B列分块,设$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,由于$AB = 0$,则

$AB = A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n) = 0$,故$A\beta_1 = 0, A\beta_2 = 0, \cdots, A\beta_n = 0$.

从而$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是线性方程组$AX = 0$的解. ……(5 分)

故$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的秩不超出$AX = 0$的基础解系所含向量的个数,即

$r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \le n - r(A)$,即$r(B) \le n - r(A)$,从而有$r(A) + r(B) \le n$. ……(10 分)

3. 证明 设(I)$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$与(II)$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$秩都为$r$,且(I)可由(II)线性表出,不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$分别为两个向量组的一个极大无关组,故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$线性表出.考察向量组(III) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$.其中$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$是(III)的一个线性无关的部分组,且能线性表出$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$,故可线性表出(III),当然(III)能线性表出$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$,两个向量组等价,秩相等,从而(III)的秩也为$r$,从而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$也是(III)的一个极大无关组,与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$等价,从而(I)与(II)等价. ……(10 分)

17-18 B 期末答案

一、　填空题:（每题 3 分，本大题共 30 分）

1. $\dfrac{3n^2-n}{2}$.

2. $i=2, j=7$.

3. $2,-1$.

4. 0.
5. $a=4$.
6. $a=-1$.
7. 3.
8. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
9. -4.
10. $\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\ 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

二、　计算题:（每小题 10 分，本大题共 40 分）

1. 解 $\begin{vmatrix}x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ -a & a & 0 & \cdots & 0\\ -a & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a)a^{n-1}.$ ……(10 分)

2. 解　增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda\end{array}\right)$,

(1) 若 $\lambda=1$,则 $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$,此时方程组有无穷多解 $x_1=1-x_2-x_3$,其中 x_2,x_3 为自由未定元. ……(4 分)

(2) 若 $\lambda\neq1$,则 $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&1&1&1\\1&-1&0&-1\\0&1&-1&-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&-1\\0&1&-1&-\lambda\\0&0&\lambda+2&(\lambda+1)^2\end{array}\right)$,

则(1) 若 $\lambda\neq-2$,有唯一解 $x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2},x_2=\dfrac{1}{\lambda+2},x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$. ……(8 分)

(2) 若 $\lambda=-2$, $r(A)=2,r(\overline{A})=3,$ 无解. ……(10 分)

3. 解 增广矩阵 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&2&1&1&1\\1&0&2&2&2&3\end{array}\right)$化为阶梯形.

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&2&1&1&1\\1&0&2&2&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&2&2&3\\0&-2&0&1&1&2\end{array}\right)$, $r(A)=r(\overline{A})=2$.

有解,导出组的基础解系含有3个向量. ……(3 分)

求特解: $\gamma_0=(3,-1,0,0,0)$, ……(5 分)

导出组基础解系: $\eta_1=(-2,0,1,0,0),\eta_2=(-4,1,0,2,0),\eta_3=(-4,1,0,0,2)$, ……(8 分)

则通解为 $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$.其中 k_1,k_2,k_3 任意. ……(10 分)

4. 解 由 $AXA-BXB=AXB-BXA+E$ 可得, $(A+B)X(A-B)=E$,故

$X=(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}$,而 ……(3 分)

$(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}$,则 ……(7 分)

$X=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&2&-3\\0&1&0\end{pmatrix}$. ……(10 分)

三、 **证明题:（每小题 10 分，本大题共 30 分）**

1. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x^n.$ ……(10 分)

2. 证明 $(A+B)(A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})$

$=(A+B)A^{-1}(E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})=(E+BA^{-1})(E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})$

$=B(B^{-1}+A^{-1})(E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})=B(B^{-1}+A^{-1}-(B^{-1}+A^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})$

$=B(B^{-1}+A^{-1}-A^{-1})=BB^{-1}=E$. ……(10 分)

3. 证明 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的秩为$t$,$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一个极大无关组,两个向量组等价,且$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的一个线性无关的部分组,可扩充成它的一个极大无关组.而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$秩相同,故$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组,两个向量组有相同的极大无关组,从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价. ……(10 分)