1 欧拉数

欧拉 (Euler)，瑞士数学家及自然科学家。1707 年 4 月 15 日出生于瑞士的巴塞尔，1783
年 9 月 18 日于俄国彼得堡去逝。欧拉出生于牧师家庭，自幼受父亲的教育。13 岁时入读巴塞尔大学，15 岁大学毕业，16 岁获硕士学位。

欧拉是 18 世纪数学界最杰出的人物之一，他不但为数学界作出贡献，更把数学推至几乎整个物理的领域。他是数学史上最多产的数学家，平均每年写出八百多页的论文，还写了大量的力学、分析学、几何学、变分法等的课本，《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等都成为数学中的经典著作。

欧拉对数学的研究如此广泛，因此在许多数学的分支中也可经常见到以他的名字命名的重要常数、公式和定理。诸如：欧拉函数，欧拉数，欧拉定理，欧拉常数等等。

1.1 欧拉数的定义和性质

排列的各种统计量是组合数学研究的一个重要课题，对排列统计量的研究可以使我们更清楚的了解排列的内部结构。下面我们就介绍一些在排列上十分熟知的统计量。对于一个排列 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, 位置 $i(1\leqslant i<n)$ 称为是 π 的一个下降位 (descent) 如果 $\pi_i>\pi_{i+1}$；反之则称为 π 的上升位 (acscent). 定义所有下降位构成的集合

$$\mathrm{Des}(\pi)=\{i|\pi_i>\pi_{i+1}\}$$

为 π 的下降集 (descent set), 定义该集合的个数为 $\mathrm{des}(\pi)=|\mathrm{Des}(\pi)|$ 为 π 的下降数。由定义 $n\notin\mathrm{Des}(\pi)$.

例 1.1 对于 $[5]$ 上的排列 $\pi=43521$, 以上的统计量分别为：$\mathrm{Des}(\pi)=\{1,3,4\}$, $\mathrm{des}(\pi)=3$.

设 $A(n,k)$ 为 n 的所有置换中具有 $k-1$ 个下降位的置换个数，我们称 $A(n,k)$ 为欧拉数 (Eulerian number). 本节我们就主要研究欧拉数的一些组合性质。在此之前，我们先给出 $n\leq 6$ 时欧拉数。

$n\setminus k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

由欧拉数的组合意义，我们有下面的递推关系。

命题 1.2

$$A(n,\,k)=kA(n-1,\,k)+(n-k+1)A(n-1,\,k-1) \tag{1}$$

证明 给定一个 $n-1$ 长的且下降数为 $k-1$ 的排列，则我们把 n 插入这 $k-1$ 个下降位的位置后面不会改变总的下降数的个数。显然如果把 n 插在最后一个位置也不会改变下降数的个数。如果在非下降位的后面插入 n, 则会使下降位增加一个。所以我们有 $A(n,k) = kA(n-1,k) + (n-k+1)A(n-1,k-1)$. ∎

由上面的递推关系，我们很容易得到 $A(n,k)$ 的对称性。

命题 1.3

$$A(n,k+1) = A(n,n-k). \tag{2}$$

当然从组合的观点，我们也可以这样而得。设 n 的置换 $p = p_1p_2\cdots p_n$ 有 k 个下降数，则它的转置 $p^r = p_np_{n-1}\cdots p_1$ 有 $n-k-1$ 个降序数。由 p 和 p^r 的一一对应可得。

由**??**知，exc 与 des 是等分布的，所以我们有。

命题 1.4 *在 $[n]$ 的所有置换中具有 $k-1$ 个胜位的置换个数为 $A(n,k)$.*

1.2 与欧拉数有关的等式

由欧拉数的组合意义，我们还可以得到一些特殊的具有组合意义的式子。

定理 1.5 *([**?**]) 令 $A(0,0)=1$, 且当 $n>0$ 时，令 $A(n,0)=0$. 则对于所有非负整数 n 和实数 x 满足如下等式*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)\binom{x+n-k}{n} \tag{3}$$

直接比较 (12)两边 k^n 的系数，很显然定理成立，这里我们给出它的一个组合证明。定理两边都是关于 t 的 n 次多项式，我们只需证明它对于 $n+1$ 个不相等的实数成立即可。这里，我们证明其对于任意正整数成立。

证明 我们先假设 x 是一个正整数. 则等式左边代表的是长度为 n 的，且每个分量取自集合 $[x]$ 的序列个数. 则我们只需说明等式右边也是计算的这种序列的个数。令 $a = a_1a_2\cdots a_n$ 为任意一个这样的序列, 重新排列 a 中元素的顺序使其非递降得 $a' = a_{i_1} \le a_{i_2} \le \cdots \le a_{i_n}$. 如果是相同的数字则在 a' 中的顺序是其在按照它们在 a 中的下标递增的顺序排列. 则 $i = i_1i_2\cdots i_n$ 为 n 的由 a 唯一决定的置换，i_k 代表了 a 中第 i_k 大的数字所在的位置. 例如 $a = 3\ 1\ 1\ 2\ 4\ 3$, 重排后得 $a' = 1\ 1\ 2\ 3\ 3\ 4$, 对应的置换为 $i = 2\ 3\ 4\ 1\ 6\ 5$.
如果我们能说明每一个具有 $k-1$ 个下降数的置换 i 是恰好从 $x+n-k$ 个序列 a 而得到的, 则我们就完成了证明。
很显然如果 $a_{i_j} = a_{i_{j+1}}$, 那么 $i_j < i_{j+1}$。对应的，如果 j 是置换 $p(a) = i_1i_2\cdots i_n$ 的一个下降数，则 $a_{i_j} < a_{i_{j+1}}$. 这就意味着只要 j 是一个下降数则序列 a' 在此位置是严格递增的。我们可以在上面的例子中验证一下。i 在位置 $3,5$ 是下降的，确实 a' 在这些位置上是严格递增的。那么有多少个序列 a 能得到置换 $i = 2\ 3\ 4\ 1\ 6\ 5$ 呢? 由前面的分析可得，a 中元素必须满足

$$1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 < a_1 \le a_6 < a_5 \le x$$

严格的不等号是在第三个和第五个位置. 上面的不等式链等价为

$$1 \leq a_2 < a_3+1 < a_4+2 < a_1+2 < a_6+3 < a_5+3 \leq x$$

因此这种序列的个数为 $\binom{x+3}{6}$. 同样的方法，对于任意的 n 和具有 $k-1$ 个下降数的置换 i, 我们得到 n 的具有 $k-1$ 个下降数的置换可从 $\binom{x+(n-1)-(k-1)}{n}=\binom{x+n-k}{n}$ 个序列中得到.
如果 x 不是一个正整数，由于等式两边都可以看作是关于变量 x 的多项式，而它们在无穷多个数值上取值相同，所以它们必须是本身是相等的。 ∎

利用上述定理，我们可以讨论正整数前 n 项和的方幂求和的问题，我们有如下结论:

命题 1.6

$$\sum_{x=1}^{m} x^n = \sum_{k=1}^{n} A(n,k)\binom{k+m}{n+1}. \tag{4}$$

证明 首先，利用欧拉数的对称性，将(3)进行化简。
当 $n>0$ 时

$$t^n = \sum_{k=1}^{n} A(n,k)\binom{t+n-k}{n} = \sum_{k=1}^{n} A(n,n+1-k)\binom{t+n-k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k+1)\binom{t+k}{n}$$

上式两边对 t 求和，有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{m} t^n &= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k+1)\sum_{t=1}^{m}\binom{t+k}{n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k+1)\sum_{t=1}^{m}\left(\binom{t+k+1}{n+1}-\binom{t+k}{n+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k+1)\binom{m+k+1}{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} A(n,k)\binom{m+k}{n+1}\end{aligned}$$

∎

推论 1.7

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)\binom{x+k-1}{n}. \tag{5}$$

证明 在定理1.5中用 $-x$ 代替 x, 我们得

$$x^n(-1)^n = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)\binom{-x+n-k}{n}.$$

注意到 $\binom{-x+n-k}{n}=\frac{(-x+n-k)(-x+n-k-1)\cdots(-x+1-k)}{n!} = (-1)^n\binom{x+k-1}{n}$. 对照这两个等式就得到了结论。 ∎

定理 1.8 对于所有满足 $k \le n$ 的非负整数 n, k, 有

$$A(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n \tag{6}$$

证明　组合证明
我们先写下 $k-1$ 个竖线, 这样就产生了 k 个分间。把 $[n]$ 中的每个元素放入任意一个分间内，有 k^n 种方法。然后对每个分间中的数字按递增的顺序排列。例如 $k=4, n=9$

那么其中的一个就可以为

$$237||19|4568.$$

忽虑掉那些竖线我们就得到了一个至多有 $k-1$ 个下降数的置换 (在上例中就是 2 3 7 1 9 4 5 6 8).
我们需注意以下几种情况: 可能会有空的分间 (即分间里面没有放数字); 或者相邻的分间之间没有下降数。由此我们就称一个竖线是" 多余的"，如果
(a) 去掉它仍能得到一个符合规定的排列 (即在每个分间中的数字是递增的顺序)。例如 4|12|3 中的第二个竖线。
(b) 此竖线紧接着前面一个竖线 (即有空的分间)。例如 2|35||614 中的第三个竖线。
我们的目标是计算没有" 多余的竖线" 的排列个数，因为这样的排列是与具有 $k-1$ 个下降数的置换一一对应的。我们利用容斥原理来计算，令 B_i 为至少有 i 个多余的竖线的排列数,B 为没有多余的竖线的排列数，则

$$B = k^n - B_1 + B_2 - B_3 + \cdots + (-1)^n B_n.$$

现在我们来计算这些 B_i. B_1 指的是至少有一个多余的竖线的排列，我们可以这样得到。先写下 $k-2$ 个竖线，再把 $[n]$ 中的数字放入这 $k-1$ 个分间中，然后把一个多余的竖线插入任意一个数字的左边，或放在末尾，共有 $n+1$ 种方法，也就是 $B_1 = \binom{n+1}{1}(k-1)^n$. 类似地，我们可得 $B_2 = \binom{n+1}{2}(k-2)^n$, 这时我们是有 $k-2$ 个分间，再把两个多余的竖线插入。继续这种方法得

$$B_i = \binom{n+1}{i}(k-i)^n$$

把这些式子代人 B 中就得到了所要证的等式的右边. ∎

证明　代数证明
对欧拉多项式 $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A(n,k)x^k$, 我们有 (见欧拉多项式那节)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

前面已经给出了它的组合证明。由上式可得

$$(1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = A_n(x).$$

比较两边系数便可得证。 ∎

下面我们来看一下欧拉数和第二类 Stirling 数之间的关系。第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 是指把集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 分成 k 个互不相交的无序块并的个数。

定理 1.9 对于任意的正整数 n,r, 有

$$S(n,r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}A(n,k)\binom{n-k}{r-k}. \tag{7}$$

证明 组合证明 等式两边同乘以 $r!$ 得,

$$r!S(n,r)=\sum_{k=1}^{r}A(n,k)\binom{n-k}{r-k}$$

显然左边代表的是集合 $[n]$ 的有序 r 划分。我们只要说明右边也是计算的同样的东西。对于 $[n]$ 的具有 $k-1$ 个下降数的置换，就产生了 k 个递增的字串，这恰好对应了把集合 $[n]$ 分成 k 个部分。如果 $k=r$, 那么就是我们所要求的。如果 $k<r$, 我们就需要把一些递增字串拆开成若干个更小的串 (保持原来数字的顺序不变)，从而能到 r 个递增字串。现在我们已经有了 k 个分块，我们还必须增加 $r-k$ 个块。n 个元素的置换除了首末位置共有 $n-1$ 个空隙 (相邻两个数字之间)，只要我们不在下降数的位置, 就可以把串分成更小的串，这样共有 $A(n,k)\binom{n-k}{r-k}$ 种方法。
由上面的方法我们得到了 $\sum_{k=1}^{r}A(n,k)\binom{n-k}{r-k}$ 个 $[n]$ 的有序 r 分划。显然这种分划可由置换唯一决定。反之，给定一个 $[n]$ 的分划, 在每个块中的元素按递增的顺序排列，那么一个有序划分，从左到右读就得到了一个至多具有 r 个递增字串的置换。∎

定理 1.10 对于任意的正整数 n,k, 有

$$A(n,k)=\sum_{r=1}^{k}S(n,r)r!\binom{n-r}{k-r}(-1)^{k-r}. \tag{8}$$

证明 代数证明 由上面的性质把 $S(n,r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}A(n,k)\binom{n-k}{r-k}$ 代人要证式子的右边得,

$$\sum_{r=1}^{k}S(n,r)r!\binom{n-r}{k-r}(-1)^{k-r}=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n-r}{k-r}\sum_{i=1}^{r}A(n,i)\binom{n-i}{r-i}$$

改变求和顺序得

$$\sum_{r=1}^{k}S(n,r)r!\binom{n-r}{k-r}(-1)^{k-r}=\sum_{i=1}^{r}A(n,i)\binom{n-i}{r-i}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n-r}{k-r}$$

此等式的左边就是我们要证明的式子的右边，所以我们只要说明上式的右边等于 $A(n,k)$. 显然上式中 $A(n,k)$ 前的系数为 $\binom{n-k}{k-k}=1$, 所以我们能证明对于 $i<k$,$A(n,i)$ 的系数为零就完成了证明。注意到，如果 $r<i$, 就有 $\binom{n-i}{r-i}=0$, 则对任意的 $i<k$, 我们有

$$\sum_{r=i}^{k}\binom{n-i}{r-i}\binom{n-r}{k-r}(-1)^{k-r}=\sum_{r=i}^{k}\binom{n-i}{r-i}\binom{k-n-1}{k-r}=\binom{k-i-1}{k-i}=0$$

最后第二个等号是由 Cauchy's convolution formula [1]而得到的。 ∎

2 欧拉多项式

由下降数或胜位出发，我们定义

$$A_n(t) = \sum_{\pi \in S_n} t^{1+\mathrm{des}(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} t^{1+\mathrm{exc}(\pi)}$$

为 $[n]$ 上的欧拉多项式 (Eulerian polynomial). 由此定义，则 $A_n(t)$ 中 t^k 的系数为欧拉数 $A(n,k)$. 所以欧拉多项式也可写为

$$A_n(t) = \sum_{k \geq 1} A(n,k) t^k,\ n \geq 1.$$

特别地，定义 $A_0(t) = 1$。本节我们主要研究欧拉多项式的一些基本的性质。在此之前，我们先给出 $n \leq 6$ 时的欧拉多项式。

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= t, \\
A_2(t) &= t + t^2, \\
A_3(t) &= t + 4t^2 + t^3, \\
A_4(t) &= t + 11t^2 + 11t^3 + t^4, \\
A_5(t) &= t + 26t^2 + 66t^3 + 26t^4 + t^5, \\
A_6(t) &= t + 57t^2 + 302t^3 + 302t^4 + 57t^5 + t^6
\end{aligned}$$

命题 2.1 欧拉多项式满足下面的微分方程

$$A_{n+1}(t) = t(1-t)A_n'(t) + (n+1)tA_n(t). \tag{9}$$

证明 由递推关系容易得到

$$\sum_k A(n+1,k)t^k = \sum_k kA(n,k)t^k + (n+1)\sum_k A(n,k-1)t^k - (k-1)\sum_k a(n,k-1)t^k.$$

由此可得

$$A_{n+1}(t) = tA_n'(t) + t(n+1)A_n(t) - t^2 A_n'(t).$$

整理一下上式即可得结论。 ∎

由此微分方程，我们可以容易地得到下面这个等式。

命题 2.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \tag{10}$$

[1] [Cauchy's convolution formula] 设 x, y 为实数,z 为正整数, 则有 $\binom{x+y}{z} = \sum_{d=0}^{z} \binom{x}{d}\binom{y}{z-d}$

证明 我们利用归纳法来证明。
当 $n=1$ 时，左边 $=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k = x\frac{1}{1-x}' = \frac{x}{(1-x)^2}.=$ 右边。
假设 n 时也成立，我们来看 $n+1$ 的情况。由

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^n x^k = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

对上式两边 x 进行微分，得

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{n+1}x^{k-1} = \frac{(1-x)A_n'(x)+(n+1)A_n(x)}{(1-x)^{n+2}}.$$

要证

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{n+1}x^k = \frac{A_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+2}},$$

则相当于只需证

$$A_{n+1}(x) = x(1-x)A_n(x)+(n+1)xA_n(x).$$

而由性质 (2.1) 上式成立。 ∎

现在我们进一步研究欧拉多项式的指数生成函数。

定理 2.3 令

$$A(x) = \sum_{n\geq 0}A_n(t)\frac{x^n}{n!},$$

则 $A(x)$ 满足

$$A'(x) = (A(x)-1)A(x)+tA(x). \tag{11}$$

证明 我们从生成函数的角度来考虑。假定每个排列的降序位包含最后一位，则相应的生成函数仍是 $A(x)$. $A'(x)$ 表示在排列中去掉最大元后所得到的排列对应的生成函数。不妨设 $\pi=\pi_1(n+1)\pi_2 = a_1a_2\cdots a_i(n+1)a_{i+2}\cdots a_{n+1}\in S_{n+1}$, $0\leq i\leq n$.

下面分析 π 去掉 $n+1$ 后的结构。

如果 $i=0$, 即 $\pi_1=\emptyset$, 而 $\pi_2=\emptyset$ 或者 $\pi_2\neq\emptyset$. 此时，在 π 中去掉 $n+1$ 后，所得排列降序数减少 1, 所以 $\pi_1=\emptyset$ 时，对应生成函数为 $tA(x)$; 如果 $1\leq i\leq n$, 即 $\pi_1\neq\emptyset$, 设 $\mathrm{des}(\pi_1)=k_1$, $\mathrm{des}(\pi_2)=k_2$, 则 π 去掉 $n+1$ 后，所得的两个排列的降序数之和为 k_1+k_2, 而原排列降序中 $a_i(n+1)$ 不对应一个降序，但 $(n+1)a_{i+2}$ 一定对应一个降序，即原排列降序数为 $(k_1-1)+1+k_2=k_1+k_2$, 则 $\pi_1\neq\emptyset$ 时，对应生成函数为 $(A(x)-1)A(x)$.

所以有

$$A'(x) = (A(x)-1)A(x)+tA(x).$$

∎

推论 2.4 $A_n(t)$ 的生成函数为

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{1-te^{(1-t)x}}.$$

证明 根据关系式 (2.3)，解如下微分方程，

$$\frac{dA}{(A-1)A+tA} = dx,$$

$$\frac{1}{t-1}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A-1+t}\right)dA = dx,$$

$$d\ln\frac{A}{A-1+t} = (t-1)dx,$$

$$\frac{A}{A-1+t} = ce^{(t-1)x},$$

其中 c 为常数，由初值 $A(0)=1$, 得到 $c=\frac{1}{t}$, 所以

$$A(x) = \frac{1-t}{1-te^{(1-t)x}}.$$

∎

将生成函数展开为 x 和 t 的幂级数，可得

$$A_n(t) = (1-t)^{n+1}\sum_{k\geq 1} k^n t^k (n\geq 1). \tag{12}$$

即给出了性质2.2的另一个证明。

下面我们讨论一下欧拉多项式的根的特点，首先我们给出一些关于根的特点的定义。

设 f 是一个度为 n 的，且根全为实数的多项式，定义 $\mathrm{roots}(f)=(a_1,\ldots,a_n)$，其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 为 $f(x)=0$ 的根。(注意：如果我们写 $\mathrm{roots}(f)$ 的话，则已假定 f 的根全为实根)。

定义 2.5 给定多项式 f, g, 设 $\mathrm{roots}(f)=(a_1,\ldots,a_n)$, $\mathrm{roots}(g)=(b_1,\ldots,b_n)$, 称 f, g 是严格交错的，如果它们的根满足以下四种关系之一：

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n;$$

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_n;$$

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_n < a_n;$$

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n;$$

当把不等号 $<$ 换成 $\leq$ 就称 f, g 是交错的。显然，如果两个多项式交错，则它们的度至多相差 1.

例 2.6 *Eulerian* 多项式 $A_3(t)$ 和 $A_4(t)$ 是交错的。因为

$$\begin{aligned} A_3(t) &= t + 4t^2 + t^3 \\ A_4(t) &= t + 11t^2 + 11t^3 + t^4. \end{aligned}$$

所以 $\text{roots}\,(A_3(t)) = \left(-2-\sqrt{3},\, -2+\sqrt{3},\, 0\right)$, $\text{roots}\,(A_4(t)) = \left(-5-2\sqrt{6},\, -1,\, -5+2\sqrt{6},\, 0\right)$.

显然它们的根满足定义中的关系之一，所以这两个多项式是交错的。

为了叙述的方便，我们给出符号函数的定义。

定义 2.7 定义在实数集上的符号函数 $\text{sgn}(x)$ 为:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \textit{if } x > 0, \\ 0, & \textit{if } x = 0, \\ -1, & \textit{if } x < 0. \end{cases}$$

定理 2.8 对于任意给定的 n, 欧拉多项式 $A_n(t) = \sum_{k=1}^{n} A(n,k)t^k$ 的根全是实根，并且 $A_{n-1}(t)$ 和 $A_n(t)$ 是交错的。

证明 令 $B_n(t) = \frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}}$，由(12)，有

$$\frac{d}{dt}B_{n-1}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k\geq 1} k^{n-1}t^k = \frac{1}{t}B_n(t)$$

整理得，

$$B_n(t) = t\frac{d}{dt}B_{n-1}(t)$$

补充定义 $A_0(t) = t$, 对于 $n \geqslant 1$, 有

$$A_n(t) = t(1-t)^{n+1}\frac{d}{dt}(1-t)^{-n}A_{n-1}(t) \tag{13}$$

下面我们用归纳法来证明欧拉多项式的根全为实根。当 $n=0$ 时，欧拉多项式 $A_0(t) = t$ 的根为 $t = 0$.

假设 $A_{n-1}(t)$ 有 $n-1$ 个不同的实根，其中有一个为 $t=0$, 其它全为负根。

从 $A_n(t)$ 与 $A_{n-1}(t)$ 的微分关系中，运用罗尔中值定理可知，在 $A_{n-1}(t)$ 的每两个相邻根之间必有一个 $A_n(t)$ 的根，而显然 0 也是一个根，这样我们就找到了 $A_n(t)$ 的 $n-1$ 个根。由于虚根是成对出现的，所以最后一个根也是实根。要证明 $A_{n-1}(t)$ 和 $A_n(t)$ 是交错的，只要说明这个根比 $A_{n-1}(t)$ 的最小的那个根还要小。

设 $\text{roots}\,(A_{n-1}(t)) = (r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$, 则 $\text{sgn}(A'_{n-1}(r_k)) = (-1)^k$, 因为 $A_{n-1}(t)'$ 的首项系数为正的。除了 $r_1 = 0$, 其余根均为负的, 由(13)式得 $\text{sgn}(A_n(r_k)) = (-1)^k$, 因为 $A_n(t)$ 的首项系数也为正，所以 $\text{sgn}(A_n(+\infty)) = +1$, $\text{sgn}(A_n(-\infty)) = (-1)^n$. 由此可知 $A_n(t)$ 必有一个根在区间 $(-\infty, r_{n-1})$ 上，所以 $A_{n-1}(t)$ 和 $A_n(t)$ 是交错的。 ∎