第七章练习题答案(部分)

一 填空题

1 $\alpha=0$. 2 $(\sigma^2+\sigma)(x^2+x)=2x+3$. 3 A^2+AB+B^2. 4 $C^{-1}X$, $C^{-1}AX$, $C^{-1}AC$.

5 a^{-1}. 9 $\left|g\left(A\right)\right|=g(\lambda_1)g(\lambda_2)g(\lambda_3)$. $g(\lambda_1),g(\lambda_2),g(\lambda_3)$. 10 $P^{-1}X$. 13 $-5,-5,0$.

19 $a\neq b$. 20 $r(AB-A)=r(A(B-E))=r(B-E)=r(A-E)$.

二 计算题(最终结果自己完成)

1 (1) $\sigma\varepsilon_1=\sigma(1,0,0)=(2,0,1)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\sigma\varepsilon_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\sigma\varepsilon_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

则$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\underbrace{\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}}_{=A}$,

(2) $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=C}$,则$\sigma$在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$下的矩阵为$C^{-1}AC$

(3) $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\sigma\alpha=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

$\sigma\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)C^{-1}A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

2 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\underbrace{\begin{pmatrix}4&-6&0\\-4&-1&0\\3&1&0\end{pmatrix}}_{=B}$,$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是可逆阵,$A$与$B$相似,特征值相同,求$B$的对应特征值$\lambda$的特征向量$X=(k_1,k_2,k_3)^T$,则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$就是$A$的对应特征值$\lambda$的特征向量.

3 取基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$,求$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}}_{=A}$,

(1) A初等行变换化为阶梯形: $\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,秩为$2$,前两列是极大无关组,则$\sigma$的值域的维数为$2$,一组基为$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2$.

(2) 若向量$\alpha \in \sigma^{-1}(0)$, 设$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)X$,则$\sigma\alpha = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)X = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)AX = 0$,即 $AX = 0$,故核中的向量在$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标是线性方程组 $AX = 0$ 的解,求 $AX = 0$ 的基础解系 $X_1 = (3, -1, 1)^T$,则

$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$就是核的一组基.

4 (1) σ 在基$1, x, x^2$ 的矩阵为 A ,证明σ 可逆,只要证明 A 可逆.σ^{-1}在基$1, x, x^2$ 下的矩阵为 A^{-1}.

(2) 判断相似对角化是计算 A 的特征值和特征向量,每个特征值的代数重数和几何重数是否相等.

5 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$可相似对角化当且仅当每个特征值的代数重数和几何重数相等.

特征值为 0 (n 重),故$r(0E - A) = r(A) = n - n = 0$, A 可相似对角化当且仅当$a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

6 $|\lambda E - A| = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2)$,则特征值6 对应的线性无关的特征向量有 2 个,即$r(6E - A) = 1$,求 a .

三 证明题:

1 证明: (1) 设$\sigma\xi = \lambda\xi$,则$\sigma^2\xi = id\xi$,即$\lambda^2\xi = \xi$,从而$\lambda = 1$或$\lambda = -1$.

(2) 任取$\alpha \in V_1 \bigcap V_{-1}$,则$\sigma\alpha = \alpha$ 且$\sigma\alpha = -\alpha$,故$\alpha = 0$,得$V_1 \bigcap V_{-1} = \{0\}$,即$V_1 + V_{-1}$是直和.

任给$\alpha \in V$,假设$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$,其中$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$,则$\sigma\alpha = \sigma\alpha_1 + \sigma\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2$,

求得$\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(\alpha + \sigma\alpha), \alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\alpha - \sigma\alpha)$,即$\alpha = \dfrac{1}{2}(\alpha + \sigma\alpha) + \dfrac{1}{2}(\alpha - \sigma\alpha)$,从而$V = V_1 \oplus V_{-1}$.

(3) 由(2),$V = V_1 \oplus V_{-1}$,故V_1的一组基和V_{-1}的一组基合起来是V 的一组基,设V_1的基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$,

V_{-1}的基$\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \cdots, \varepsilon_n$,其中$n = \dim V$,而$\sigma\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_i, & i = 1, 2, \cdots, m \\ -\varepsilon_i, & i = m+1, m+2, \cdots, n \end{cases}$,计算可得

$\sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}$.基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$ 即为所求

3 证明: 任给 n 维线性空间V ,任取一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,存在线性变换σ 使得在$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的矩阵为

N ,即 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$, 即

$\sigma(\varepsilon_1)=0,\sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_1,\sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_2,\cdots,\sigma(\varepsilon_n)=\varepsilon_{n-1}$, 而 $\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1},\cdots,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 也是线性空间的一组基,

$\sigma(\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1},\cdots,\varepsilon_2,\varepsilon_1)=(\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n-2},\cdots,\varepsilon_1,0)=(\varepsilon_n,\cdots,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$, 即线性变换 σ 在

$\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1},\cdots,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵为 N^T ,故 N 与 N^T 是线性变换 σ 在不同基下的矩阵,相似.

4. $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}C\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=A,\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}C\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=B$

6 证明: 设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 并设 $\sigma\xi_i=\lambda_i\xi_i,i=1,2,\cdots,n$, 特征值互不相同, 则对应的特征子空间 V_{λ_i} 都是一维子空间, 且 ξ_i 就是 V_{λ_i} 的一组基.

$\Rightarrow$ 假若 $AB=BA$,任给 ξ_i $AB\xi_i=BA\xi_i=B\lambda_i\xi_i=\lambda_iB\xi_i$,故 $B\xi_i\in V_{\lambda_i}$ (若 $B\xi_i=0,$ 显然,若 $B\xi_i\neq 0,$ 则 $AB\xi_i=\lambda_iB\xi_i$ 表明 $B\xi_i$ 是 A 的属于 λ_i 的一个特征向量), V_{λ_i} 是一维的, ξ_i 是基,故存在数 μ_i ,使得 $B\xi_i=\mu_i\xi_i$,即 A 的特征向量是 B 的特征向量.

$\Leftarrow$ 若 A 的特征向量是 B 的特征向量,由于 A 的特征值互异,可相似对角化,从而 A 有 n 个线性无关的特征向量设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 而这也是 B 的 n 个线性无关的特征向量,设 $B\xi_i=\mu_i\xi_i$,则

$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 则 $AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$, $BP=P\begin{pmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{pmatrix}$, 故

$AB=P\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1&&&\\&\lambda_2\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\mu_n\end{pmatrix}P^{-1}=BA$

7 证明: $A+B+AB=0$, $(E+A)(E+B)=E$, $(E+B)(E+A)=E$, $A+B+BA=0$,得 $AB=BA$

(1) 假设 $B\alpha=\lambda\alpha$,则 $(A+B+AB)\alpha=A\alpha+B\alpha+AB\alpha=A\alpha+\lambda\alpha+\lambda A\alpha=0$,即

$(\lambda+1)A\alpha=-\lambda\alpha$,其中 $\lambda\neq-1$ (若 $\lambda=-1$,则 $(\lambda+1)A\alpha=-\lambda\alpha$ 即为 $0=\alpha$),故 $A\alpha=-\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\alpha$,

B 的特征向量是 A 的特征向量.同理应用 $A+B+BA=0$,可得 A 的特征向量是 B 的特征向量.

(2) 由(1), A 与 B 的特征向量是公共的, A 相似于对角阵当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量当且仅当 B 有 n 个线性无关的特征向量当且仅当 B 相似于对角阵.

(3) 由 $(E+B)(E+A)=E$,可知 $E+B,E+A$ 都可逆. $A+B+AB=0$ 可得 $A(E+B)=-B$,秩相等.

8. V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 是线性变换 σ 的特征子空间 V_{λ_0} 的一组基,将它扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$,

(1) 求 σ 在 V 的此组基下的矩阵.

(2) 证明 $\dim V_{\lambda_0}\leq\lambda_0$ 的代数重数(即 λ_0 作为特征多项式的根的重数).

(1) $\sigma\varepsilon_i=\begin{cases}\lambda_0\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,k\\ \sigma\varepsilon_i, i=k+1,k+2,\cdots,n\end{cases}$,从而 σ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}\lambda_0E_k & B_1\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$.

(2) λ_0 是 σ 的一个特征值,设 λ_0 的代数重数为 s ,则 σ 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^s g(\lambda)$,其中 $(\lambda-\lambda_0)\nmid g(\lambda)$,由(1), σ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}\lambda_0E_k & B_1\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$,由 B 求 σ 的特征多项式 $\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}(\lambda-\lambda_0)E_k & -B_1\\ 0 & \lambda E-B_2\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_0)^k\left|\lambda E-B_2\right|$,这两个特征多项式是相等的,故

$(\lambda-\lambda_0)^k\left|\lambda E-B_2\right|=(\lambda-\lambda_0)^s g(\lambda)$,比较两边 $\lambda-\lambda_0$ 的方幂次数,可知 $k\leq s$.