广义排列

- 令 $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ 表示包含有限个非零元素的 $\mathbb{N}$-矩阵。

广义排列

- 令 $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ 表示包含有限个非零元素的 $\mathbb{N}$-矩阵。
- 对每个 A 定义一个广义排列(generalized permutation)w_A 为

$$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

其中

a $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$,
b 如果 $i_r = i_s$ 且 $r \leq s$，那么 $j_r \leq j_s$,
c 对每个数对 (i, j)，恰有 a_{ij} 个 r 满足 $(i_r, j_r) = (i, j)$。

广义排列

- 容易看出，A 确定唯一一个两行阵列 w_A 满足 $(a)-(c)$，反过来任何一个这样的阵列对应到唯一一个 A。

广义排列

- 容易看出，A 确定唯一一个两行阵列 w_A 满足 $(a)-(c)$，反过来任何一个这样的阵列对应到唯一一个 A。
- $$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow w_A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

RSK 算法

- 我们可以把 A（或 w_A）与一对半标准 Young 表 (P, Q) 按照如下方式对应起来。

- 我们可以把 A（或 w_A）与一对半标准 Young 表 (P, Q) 按照如下方式对应起来。
- 以 $(P(0), Q(0)) = (\emptyset, \emptyset)$（这里 $\emptyset$ 表示空半标准 Young 表）为出发点。如果当 $t < m$ 时 $(P(t), Q(t))$ 都已定义，那么令
  (a) $P(t+1) = P(t) \leftarrow j_{t+1}$(Schensted “碰撞” 算法)；
  (b) $Q(t+1)$ 通过从 $Q(t)$ 插入 i_{t+1} 得到（保留 $Q(t)$ 的所有部分不变）使得 $P(t+1)$ 和 $Q(t+1)$ 具有相同的形状。

RSK 算法

- 我们可以把 A（或 w_A）与一对半标准 Young 表 (P,Q) 按照如下方式对应起来。
- 以 $(P(0),Q(0))=(\emptyset,\emptyset)$（这里 $\emptyset$ 表示空半标准 Young 表）为出发点。如果当 $t<m$ 时 $(P(t),Q(t))$ 都已定义，那么令
  (a) $P(t+1)=P(t)\leftarrow j_{t+1}$(Schensted “碰撞” 算法);
  (b) $Q(t+1)$ 通过从 $Q(t)$ 插入 i_{t+1} 得到（保留 $Q(t)$ 的所有部分不变）使得 $P(t+1)$ 和 $Q(t+1)$ 具有相同的形状。
- 该过程终止于 $(P(m),Q(m))$，我们定义 $(P,Q)=(P(m),Q(m))$。记这个对应为 $A\xrightarrow{\text{RSK}}(P,Q)$，称为RSK 算法(RSK algorithm)。

RSK 算法

- 我们可以把 A（或 w_A）与一对半标准 Young 表 (P, Q) 按照如下方式对应起来。
- 以 $(P(0), Q(0)) = (\emptyset, \emptyset)$（这里 $\emptyset$ 表示空半标准 Young 表）为出发点。如果当 $t < m$ 时 $(P(t), Q(t))$ 都已定义，那么令
  (a) $P(t+1) = P(t) \leftarrow j_{t+1}$(Schensted “碰撞”算法);
  (b) $Q(t+1)$ 通过从 $Q(t)$ 插入 i_{t+1} 得到（保留 $Q(t)$ 的所有部分不变）使得 $P(t+1)$ 和 $Q(t+1)$ 具有相同的形状。
- 该过程终止于 $(P(m), Q(m))$，我们定义 $(P, Q) = (P(m), Q(m))$。记这个对应为 $A \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$，称为RSK 算法(RSK algorithm)。
- 我们称 P 为 A 或 w_A 的插入表(insertion tableau)，称 Q 为记录表(recording tableau)。

RSK 算法

$P(i)$	$Q(i)$
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

RSK 算法

$P(i)$	$Q(i)$
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
$\boxed{1}\boxed{3}$	$\boxed{1}\boxed{1}$

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

RSK 算法

$P(i)$	$Q(i)$
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
$\boxed{1}\boxed{3}$	$\boxed{1}\boxed{1}$
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{3}$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

RSK 算法

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$P(i)$	$Q(i)$
$\begin{array}{\|c\|}\hline 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 3 & 3 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$

RSK 算法

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$P(i)$	$Q(i)$
$\begin{array}{\|c\|}\hline 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 3 & 3 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c\|}{3} \\ \cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c\|}{2} \\ \cline{1-2}\end{array}$

RSK 算法

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc}
P(i) & Q(i) \\
\hline
\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}
\end{array}$$

RSK 算法

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$P(i)$	$Q(i)$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$

RSK 算法

定理

RSK 算法是有限支集 $\mathbb{N}$-矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ 和同形状的有序对半标准 *Young* 表 (P, Q) 之间的双射。在这个对应下

$$\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A), \quad \mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A).$$

RSK 算法

定理

RSK 算法是有限支集 $\mathbb{N}$-矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ 和同形状的有序对半标准 Young 表 (P, Q) 之间的双射。在这个对应下

$$\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A), \quad \mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A).$$

- Cauchy 公式:

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

RSK 算法

定理

RSK 算法是有限支集 $\mathbb{N}$-矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ 和同形状的有序对半标准 *Young* 表 (P, Q) 之间的双射。在这个对应下

$$\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A), \quad \mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A).$$

- Cauchy 公式:
$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$
- 正交性: $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$

对偶 Cauchy 公式

- 对偶 Cauchy 公式：

$$\prod_{i,j}(1+x_i y_j)=\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x)s_{\lambda'}(y).$$

对偶 Cauchy 公式

- 对偶 Cauchy 公式:

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j)=\sum_{\lambda}s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y).$$

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y) \quad = \quad \sum_\lambda s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y))$$

对偶 Cauchy 公式

- 对偶 Cauchy 公式:

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y).$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y) &= \textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y)) \\ &= \omega_y\textstyle\prod(1-x_iy_j)^{-1}\end{aligned}$$

对偶 Cauchy 公式

- 对偶 Cauchy 公式：

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j)=\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y).$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y) &= \textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y))\\ &= \omega_y\prod(1-x_iy_j)^{-1}\\ &= \omega_y\sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y)\end{aligned}$$

对偶 Cauchy 公式

- 对偶 Cauchy 公式:

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j)=\sum_{\lambda}s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y).$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y) &= \textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y)) \\ &= \omega_y\textstyle\prod(1-x_iy_j)^{-1} \\ &= \omega_y\sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y) \\ &= \sum_\lambda m_\lambda(x)e_\lambda(y)\end{aligned}$$

对偶 Cauchy 公式

- 对偶 Cauchy 公式:

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j)=\sum_{\lambda}s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y).$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y) &= \textstyle\sum_\lambda s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y)) \\
&= \omega_y \textstyle\prod(1-x_iy_j)^{-1} \\
&= \omega_y \sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y) \\
&= \sum_\lambda m_\lambda(x)e_\lambda(y) \\
&= \textstyle\prod(1+x_iy_j)
\end{aligned}$$

提纲

1. RSK 算法对称性

置换矩阵的 RSK 算法

- 如果 A 是一个置换矩阵，那么由 RSK 算法得到的杨表对 (P, Q) 具有什么性质呢?

置换矩阵的 RSK 算法

- 如果 A 是一个置换矩阵，那么由 RSK 算法得到的杨表对 (P, Q) 具有什么性质呢?
- 显然，若 $sh(P) = \lambda \vdash n$，那么 $1, 2, \ldots, n$ 在 P 中出现并且恰好出现一次。我们称这样的杨表为标准杨表(standard Young tableaux)。

置换矩阵的 RSK 算法

- 如果 A 是一个置换矩阵，那么由 RSK 算法得到的杨表对 (P, Q) 具有什么么性质呢?
- 显然，若 $sh(P) = \lambda \vdash n$，那么 $1, 2, \ldots, n$ 在 P 中出现并且恰好出现一次。我们称这样的杨表为标准杨表(standard Young tableaux)。同样 Q 也是标准杨表。

置换矩阵的 RSK 算法

- 如果 A 是一个置换矩阵，那么由 RSK 算法得到的杨表对 (P, Q) 具有什么性质呢?
- 显然，若 $sh(P) = \lambda \vdash n$，那么 $1, 2, \ldots, n$ 在 P 中出现并且恰好出现一次。我们称这样的杨表为标准杨表(standard Young tableaux)。同样 Q 也是标准杨表。
- 记 f_λ 为形状为 λ 的标准杨表的个数。那么

$$\sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2 = n!.$$

广义排列标准化

- 对任意 $\mathbb{N}$-矩阵 A 的 RSK 算法可以简化到置换矩阵的情况。

广义排列标准化

- 对任意 $\mathbb{N}$-矩阵 A 的 RSK 算法可以简化到置换矩阵的情况。
- $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & 3 & \color{red}{2} & 3 & \color{blue}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{2} & \color{red}{2} \end{pmatrix}.$$

广义排列标准化

- 对任意 $\mathbb{N}$-矩阵 A 的 RSK 算法可以简化到置换矩阵的情况。
-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ {\color{blue}1} & {\color{blue}1} & 3 & {\color{red}2} & 3 & {\color{blue}1} & {\color{red}2} & {\color{red}2} & {\color{red}2} \end{pmatrix}.$$

- 广义排列 w_A 的标准化为

$$\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ {\color{blue}1} & {\color{blue}2} & 8 & {\color{red}4} & 9 & {\color{blue}3} & {\color{red}5} & {\color{red}6} & {\color{red}7} \end{pmatrix}.$$

广义排列标准化

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- w_A 的 RSK 算法结果：

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

- $\tilde{w}_A$ 的 RSK 算法结果：

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 9 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 7 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

分解步骤

$$\begin{array}{l} w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{l} \boxed{1}, \boxed{1} \\ \\ \boxed{1}, \boxed{1} \end{array}$$

分解步骤

$$\begin{array}{l} w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{1}, \boxed{1} \\ \\ \boxed{1}, \boxed{1} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{1\,|\,1}, \boxed{1\,|\,1} \\ \boxed{1\,|\,2}, \boxed{1\,|\,2} \end{array}$$

分解步骤

$$
\begin{aligned}
w_A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
\tilde{w}_A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\mapsto
\begin{matrix} \boxed{1}, \boxed{1} \\ \\ \boxed{1}, \boxed{1} \end{matrix}
\mapsto
\begin{matrix} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \end{matrix}
$$

$$
\mapsto
\begin{matrix} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \end{matrix}
$$

分解步骤

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \quad \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau} \end{matrix}$$

$$\mapsto \quad \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 & 1 & 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 & 2 & 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \end{ytableau} \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{ytableau} \end{matrix}$$

分解步骤

$$
\begin{array}{l}
w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \\[2ex]
\begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau} \\[2ex]
\begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}
\end{array}
$$

$$
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \end{ytableau} \\[2ex]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \end{ytableau}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{ytableau} \\[2ex]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 4 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{ytableau}
\end{array}
$$

$$
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau} \\[2ex]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 \end{ytableau}
\end{array}
$$

分解步骤

$$
\begin{aligned}
w_A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
\tilde{w}_A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\mapsto
\begin{array}{l}
\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{l}
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\\hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline\end{array}
\end{array}
$$

$$
\mapsto
\begin{array}{l}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 8\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline\end{array}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{l}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4\\\hline 8 \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 \\\cline{1-1}\end{array}
\end{array}
$$

$$
\mapsto
\begin{array}{l}
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 9\\\hline 8 \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 5\\\hline 4 \\\cline{1-1}\end{array}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{l}
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 3\\\hline 2 \\\cline{1-1} 3 \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2\\\hline 2 \\\cline{1-1} 3 \\\cline{1-1}\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 9\\\hline 4 \\\cline{1-1} 8 \\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 5\\\hline 4 \\\cline{1-1} 6 \\\cline{1-1}\end{array}
\end{array}
$$

分解步骤

$$\begin{array}{l} w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{1}, \boxed{1} \\ \\ \boxed{1}, \boxed{1} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \mapsto \cdots$$

$$\mapsto \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 9 \\ \hline 8 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \end{array}$$

分解步骤

$$
\begin{array}{l}
w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau} \\
\begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}
\end{array}
\mapsto \cdots
$$

$$
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 \end{ytableau}
\end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 \\ 6 \end{ytableau}
\end{array}
$$

分解步骤

$$
\begin{matrix}
w_A = \\ \tilde{w}_A =
\end{matrix}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7
\end{pmatrix}
\mapsto
\begin{matrix}
\begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}
\end{matrix}
\mapsto
\begin{matrix}
\begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}
\end{matrix}
\mapsto \cdots
$$

$$
\mapsto
\begin{matrix}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 \\ 6 \end{ytableau}
\end{matrix}
\mapsto
\begin{matrix}
\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau} \\[1em]
\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 \end{ytableau}
\end{matrix}
$$

分解步骤

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau} \end{matrix} \mapsto \cdots$$

$$\mapsto \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 \end{ytableau} \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau} \\[1em] \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 9 \\ 8 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 7 \\ 6 \end{ytableau} \end{matrix}$$

分解步骤

$$
w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\qquad
\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}
$$

$$
\mapsto \quad \begin{matrix} \boxed{1}, \boxed{1} \\ \boxed{1}, \boxed{1} \end{matrix}
\quad \mapsto \quad
\begin{matrix} \boxed{1\;1}, \boxed{1\;1} \\ \boxed{1\;2}, \boxed{1\;2} \end{matrix}
\quad \mapsto \cdots
$$

$$
\begin{matrix}
\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{array}, &
\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 9 \\ 8 \end{array}, &
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 7 \\ 6 \end{array}
\end{matrix}
\mapsto
\begin{matrix}
\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{array}, &
\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{array} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 \\ 8 \end{array}, &
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 7 \\ 6 \end{array}
\end{matrix}
$$

广义排列标准化

定理 (交换引理)

设

$$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

是一个两行阵列，且令

$$\tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & \cdots & \tilde{j}_n \end{pmatrix}.$$

假设 $\tilde{w}_A \xrightarrow{\text{RSK}} (\tilde{P}, \tilde{Q})$。令 (P, Q) 表示把 $\tilde{Q}$ 中 k 替换为 i_k，把 $\tilde{P}$ 中 $\tilde{j}_k$ 替换为 j_k 所得到的杨表。那么 $w_A \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$。换句话说，运算 $w_A \mapsto \tilde{w}_A$ 和 RSK 算法“可交换”。

RSK 对称性

定理 (对称性)

设 A 是一个有限支集 $\mathbb{N}$-矩阵，且 $A \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$。那么 $A^t \xrightarrow{\text{RSK}} (Q, P)$，这里 ^{t} 表示转置。

- 给定

$$w_A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

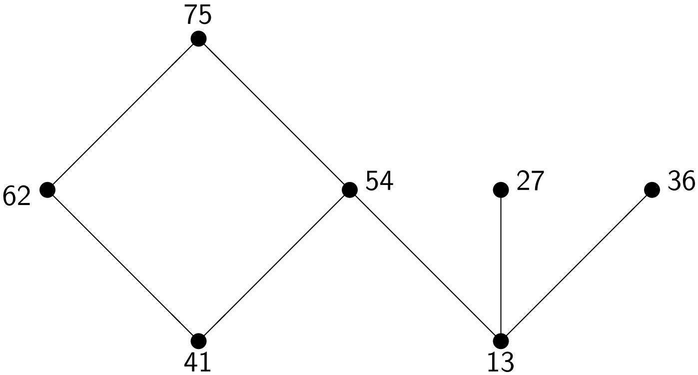
这里 u_i 和 v_j 是互不相同的，定义逆序偏序集(inversion poset) $I = I(A) = I\binom{u}{v}$ 如下：I 的顶点由 $\binom{u}{v}$ 的列构成。为了记号方便起见，把列 $\frac{a}{b}$ 记成 ab。在 I 中定义 $ab < cd$ 如果 $a < c$ 且 $b < d$。

RSK 对称性

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

RSK 对称性

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



RSK 对称性

- 给定逆序偏序集 $I = I(A)$，定义 I_1 为 I 的极小元集合，定义 I_2 为 $I - I_1$ 中的极小元集合，定义 I_3 为 $I - I_1 - I_2$ 中的极小元集合，等等。

RSK 对称性

- 给定逆序偏序集 $I = I(A)$，定义 I_1 为 I 的极小元集合，定义 I_2 为 $I - I_1$ 中的极小元集合，定义 I_3 为 $I - I_1 - I_2$ 中的极小元集合，等等。
- 注意到既然每个 I_i 是 I 的一个反链，它的元可以标号为

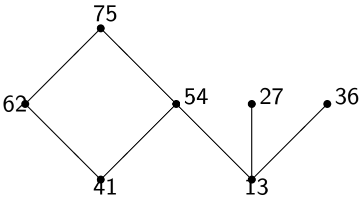
$$(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \dots, (u_{in_i}, v_{in_i}),$$

其中 $n_i = \#I_i$，使得

$$\begin{array}{ccccccc} u_{i1} & < & u_{i2} & < & \cdots & < & u_{in_i} \\ v_{i1} & > & v_{i2} & > & \cdots & > & v_{in_i}. \end{array}$$

RSK 对称性

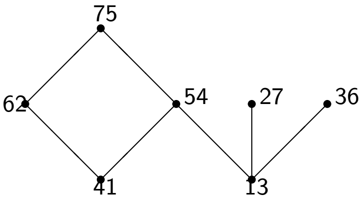
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



$I_1 = \{13, 41\}$，$I_2 = \{27, 36, 54, 62\}$，$I_3 = \{75\}$。

RSK 对称性

$$\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

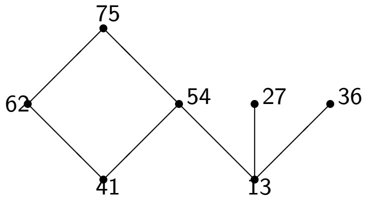


$I_1 = \{13, 41\}$，$I_2 = \{27, 36, 54, 62\}$，$I_3 = \{75\}$。

- 如果 $(u_k, v_k \in I_i)$，那么 v_k 在 RSK 算法中被插入 $P(k-1)$ 第一行的第 i-列。

RSK 对称性

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



$I_1 = \{13, 41\}$，$I_2 = \{27, 36, 54, 62\}$，$I_3 = \{75\}$。

- 如果 $(u_k, v_k \in I_i)$，那么 v_k 在 RSK 算法中被插入 $P(k-1)$ 第一行的第 i-列。
- 设 $I_1, \ldots, I_d$ 是如上定义的（非空）反链。令 $A \to (P, Q)$。那么 P 的第一行为 $v_{1n_1} v_{2n_2} \cdots v_{dn_d}$，$Q$ 的第一行为 $u_{11} u_{21} \cdots u_{d1}$。

RSK 对称性

- 注意到反链 $I_i\binom{v}{u}$ 恰为

$$(v_{im_i}, u_{im_i}), \ldots, (v_{i2}, u_{i2}), (v_{i1}, u_{i1}),$$

其中

$$\begin{array}{ccccccc} v_{im_i} & < & \cdots & < & v_{i2} & < & v_{i1} \\ u_{im_i} & > & \cdots & > & u_{i2} & > & u_{i1}. \end{array}$$

RSK 对称性

- 注意到反链 $I_i\binom{v}{u}$ 恰为

$$(v_{im_i}, u_{im_i}), \ldots, (v_{i2}, u_{i2}), (v_{i1}, u_{i1}),$$

其中

$$\begin{array}{ccccccc} v_{im_i} & < & \cdots & < & v_{i2} & < & v_{i1} \\ u_{im_i} & > & \cdots & > & u_{i2} & > & u_{i1}. \end{array}$$

- P' 的第一行是 $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$，$Q'$ 的第一行是 $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$；分别和 Q 和 P 的第一行是一致的。

RSK 对称性

- 注意到反链 $I_i\binom{v}{u}$ 恰为

$$(v_{im_i}, u_{im_i}), \ldots, (v_{i2}, u_{i2}), (v_{i1}, u_{i1}),$$

其中

$$\begin{array}{ccccccc} v_{im_i} & < & \cdots & < & v_{i2} & < & v_{i1} \\ u_{im_i} & > & \cdots & > & u_{i2} & > & u_{i1}. \end{array}$$

- P' 的第一行是 $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$，$Q'$ 的第一行是 $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$；分别和 Q 和 P 的第一行是一致的。
- 设 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 表示 P 和 Q 的第一行被去除掉后得到的 Young 表，则

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_{12}\cdots u_{1m_1} & u_{22}\cdots u_{2m_2} & \cdots u_{d2}\cdots u_{dm_d} \\ v_{11}\cdots v_{1,m_1-1} & v_{21}\cdots v_{2,m_2-1} & \cdots v_{d1}\cdots v_{d,m_d-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{RSK}} (\bar{P}, \bar{Q}).$$

RSK 对称性

- 类似地，令 $(\bar{P}', \bar{Q}')$ 表示 P' 和 Q' 去除首行后得到的 Young 表。应用同样的推理到 $\binom{v}{u}$ 得到

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_{1,m_1-1} & \cdots v_{11} & v_{2,m_2-1} & \cdots v_{21} \cdots v_{d,m_d-1} & \cdots v_{d1} \\ u_{1m_1} & \cdots u_{12} & u_{2m_2} & \cdots u_{22} \cdots u_{dm_d} & \cdots u_{d2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{RSK}} (\bar{P}', \bar{Q}').$$

- 类似地，令 $(\bar{P}', \bar{Q}')$ 表示 P' 和 Q' 去除首行后得到的 Young 表。应用同样的推理到 $\binom{v}{u}$ 得到

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_{1,m_1-1} & \cdots v_{11} & v_{2,m_2-1} & \cdots v_{21} \cdots v_{d,m_d-1} & \cdots v_{d1} \\ u_{1m_1} & \cdots u_{12} & u_{2m_2} & \cdots u_{22} \cdots u_{dm_d} & \cdots u_{d2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{RSK}} (\bar{P}', \bar{Q}').$$

- 但是，$\binom{a}{b} = \binom{b'}{a'}_{\text{已排序的}}$，因此根据归纳假设我们有 $(\bar{P}', \bar{Q}') = (\bar{Q}, \bar{P})$，