高等代数第九章练习题

一 填空题

1. 在 $\mathbf{R}[x]_3$ 中定义内积 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$,则向量 $1+x+x^2$ 的长度为________.

2. 在 $\mathbf{R}^4$ 的标准内积之下,对 $\alpha=(1,2,2,3),\beta=(3,2,-2,-1)$,有 $\langle\alpha,\beta\rangle=$______,$d(\alpha,\beta)=$______.

3. 若 σ 是欧氏空间 V 的一个正交变换, σ 在一组标准正交基下的矩阵为 A,则 $|A|=$_______.

4. 设 V_1 是 n 维欧氏空间 V 的一个子空间,则 $\dim V_1+\dim V_1^{\perp}=$_____.

5. 若 n 阶正交阵 A 的每个元素均为 $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$,则此正交阵的阶数 $n=$______.

6. σ 为欧氏空间 V 的线性变换,σ 为正交变换当且仅当____________,σ 为对称变换当且仅当__________.

7. 设 $\alpha_1=(0,-1,1),\alpha_2=(2,1,-2),\beta=k\alpha_1+\alpha_2$,若 β 与 α_2 正交,则 $k=$________.

8. A,B 为 n 阶正交矩阵,且 $|A|>0,|B|<0$,则 $|AB|=$________.

9. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 欧氏空间 V 的一组标准正交基,$\alpha\in V$,则 α 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标是______________.

10. 若 $\alpha=(1,1,0),\beta=(0,1,1),\gamma=(1,1,1)$ 是欧氏空间的一组标准正交基,则 $\xi=(1,2,3)$ 的长度为________.

11. 已知一个欧氏空间只有有限组标准正交基,则此个数为________,且此空间同构于_____.

12. 欧氏空间中,$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$ 两两正交,且 $|\alpha_i|^2=i$,$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 $|A|=$__________.

13. 知 $X_1=(a,1,1),X_2=(-1,-1,2),X_3=(2,b,0)$ 是 3 阶实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量,则 $a=$_______,$b=$_______.

14. 若 $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & a\\ b & c\end{pmatrix}(a>0)$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 的正交变换 σ 在一组标准正交基下的矩阵,则 $\mathbf{U}=$________.

15. 已知 V 是 n 维欧氏空间,$\alpha\neq 0$ 是 V 中固定向量,则子空间 $V_1=\{x\mid(x,\alpha)=0,x\in V\}$ 的维数为______.

16. 已知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的全部特征值,当且仅当特征值满足条件_______时,A 是正定矩阵.

17. 设 n 阶实对称阵 A 的特征值为 $1,2,3,\cdots,n$,则当 t 满足______________条件时,$tE-A$ 为正定矩阵.

18. V 是一 n 维欧氏空间,$\alpha\in V$,若对任意 $\beta\in V$,有 $(\beta,\alpha)=0$,则 $\alpha=$________.

19. 设 α,β,λ 为欧氏空间 V 中的向量,满足 $(\alpha,\beta)=-2$,$(\alpha,\gamma)=3$,$(\beta,\gamma)=-1$, β 为单位向量, 则 $(2\alpha+\beta,\beta-3\gamma)=$_______, 若 $|\alpha|=4$, 则 α 与 β 的夹角为_____________.

20. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+bx_3^2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换得标准形 $y_1^2+6y_2^2$,则 $a=$_____,$b=$______.

二 计算题

1.设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$,

(1) 求 A 的特征值和对应的特征向量. (2) 求正交阵 Q,使得 $Q^T AQ$ 是对角阵.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$,求正交矩阵 U,使 $U^T AU$ 为对角形.

3, 取可逆阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$,求正交阵 Q 和主对角线元素为正数的上三角阵 R 使得 $A=QR$.

4. 设 $\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(2,1,2,3),\alpha_3=(0,1,-2,1)$,令 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

5. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+x_2-3x_3+x_5=0\end{cases}$ 解空间 W 的一组标准正交基及 $W^{\perp}$ 的一组基.

6. 已知 $\alpha=(1,-2,2)^T$ 是二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 的矩阵的一个特征向量,用正交线性替换化此二次型为标准形.

7. 设 $1,1,-3$ 是 3 阶实对称矩阵 A 的特征值, $(1,-1,0)^T$ 是 A 属于 -3 的特征向量,求 A.

8. 在 $\mathbf{R}^2$ 中,对任意向量 $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$,定义 $(\alpha,\beta)=\alpha\begin{pmatrix}1&-1\\-1&4\end{pmatrix}\beta'$

(1) 证明: $\mathbf{R}^2$ 作成欧氏空间. (2) 写出这个欧氏空间的柯西—施瓦兹不等式.

9. 欧氏空间 R^2 中,问 $\sigma(x,y)=(2x+y,x-2y)$ 是否为对称变换,给出理由.

10. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$,知 $\alpha_1=(1,a+1,2),\alpha_2=(a-1,-a,1)$ 为分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量. A 的伴随矩阵 A^* 的特征值为 λ_0,且 $A^*\beta_0=\lambda_0\beta_0$,其中 $\beta_0=(2,-5a,2a+1)$,求 a 与 λ_0 的值.

11. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基,令 $\alpha=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_3$, $\beta=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\gamma=2\varepsilon_1+\varepsilon_3$,

证明 α,β,γ 是 V 的一组基, 并将其化为一组标准正交基.

三 证明题:

1. 取实数域上的线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$,任给 $A,B\in\mathbf{R}^{n\times n}$,定义二元实函数 $(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$,

(1) 证明 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 关于此二元实函数做成欧氏空间,

(2) 取 $V_1=\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}\mid A^T=A\}$,$V_2=\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}\mid A^T=-A\}$,证明 V_1 与 V_2 互为正交补.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一组基,证明这组基是标准正交基的充分必要条件是,对 V 中任意向量 α 都有 $\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n$.

3. 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间,且 V_1 的维数小于 V_2 的维数,证明 V_2 中必有一非零向量与 V_1 正交.

4. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的线性无关的向量组,问是否存在一个向量 ξ 使得 $(\alpha_i,\xi)=1,\forall i.$

5. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个对称变换, 且 $\sigma^2=id$ (其中 id 为恒等变换), 试证明

(1) σ 为正交变换;(2) σ 的特征值只能是 ± 1.

6. 设 A,B 是两个 n 阶实对称矩阵,证明存在正交阵 Q 使得 Q^TAQ,Q^TBQ 是对角阵的充要条件是 $AB=BA$.

7. 证明 n 阶矩阵 A 是正交阵当且仅当矩阵 $|A|=\pm1$,且 A 的元素的代数余子式 $A_{ij}=\pm a_{ij}$.具体地: $|A|=1$ 时, $A_{ij}=a_{ij}$; $|A|=-1$ 时, $A_{ij}=-a_{ij}$;

8. 设 V 是 n 维欧氏空间,内积为 (α,β) ,又设 σ 是 V 的一个正交变换,记 $V_1=\{\alpha\in V\mid\sigma\alpha=\alpha\}$, $V_2=\{\alpha-\sigma\alpha\mid\alpha\in V\}$,证明: (1) V_1,V_2 都是 V 的子空间; (2) $V=V_1\oplus V_2$.