

一. 填空题:

- 二次型 $X^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} X$ 的矩阵为_____,二次型 $X^T A X$ 的矩阵为_____.
- 写出 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ 所决定的二次型 $f(x_1, x_2, x_3) =$ _____.
- 非零二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2$ 的矩阵是_____,秩为_____.
- 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 的秩为_____.
- n 阶实对称矩阵按合同分类有_____类, n 阶复对称矩阵按合同分类有_____类.
- (1) t 取何值_____时,实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3$ 正定.
(2) 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + tx_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 正定, t 满足条件_____.
(3) t 满足条件_____时,二次型 $tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 负定.
- 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$ 的正惯性指数为_____,负惯性指数为_____,符号差为_____.
- 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$ 的规范形为_____,其符号差为_____.
- 复二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_8) = x_1x_2 + x_3x_4 - 2x_5x_6 - 2x_7x_8$ 的规范形是_____.
- n 元正定二次型 $X^T A X$ 的正惯性指数为_____,负惯性指数为_____,符号差为_____.
- 实二次型 $f(X) = -X^T X$ 的符号差为_____.
- 秩为 n 的 n 元实二次型 $f(X)$ 与 $-f(X)$ 合同,则 $f(X)$ 的正惯性指数为_____.
- 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ 是否正定_____.
- 设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, A, B, C 中合同的是_____.
- 设 n 阶正定阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$,其中 A_1 为 m 阶方阵, A_1, A_2, A_3, A_4 中哪些正定_____.
- 设 A 是 n 阶实对称阵,若 A 正定, A^{-1}, A^*, A^m 中哪些正定_____.
- 两个 n 阶实对称阵 A, B 合同的充要条件是_____.
- 只与自身合同的矩阵是_____.

19. 实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$ 中与单位阵合同的有_____.

20. 设 n 阶阵 $A = (a_{ij})_n$, 则二次型 $X^T A X$ 中交叉项 $x_i x_j$ 的系数为_____.

21. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 写出 A 是正定矩阵的三个充要条件

i) _____ ii) _____ iii) _____.

22. 设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$, 当 a_1, a_2, \dots, a_n 满足_____条件时, 二次型 f 为正定二次型.

23. 实对角矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_{m+n} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}$ 合同的充要条件是_____.

二. 计算题:

1. 用配方法求实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 + 3x_2 x_3 + 4x_1 x_3$ 的标准形和规范形.

2. 给出实对称阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求可逆阵 C 和对角阵 D , 使得 $C^T A C = D$ (将 A 合同对角化).

3. 用非退化线性替换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 为标准形.

4. 用非退化线性替换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ 为标准形.

5. 用非退化线性替换化实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 6x_2 x_3 + x_3^2$ 为规范形.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, 问 A 是否正定, 若正定, 求一矩阵 C , 使得 $A = C^T C$.

7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$, 其中 $a_1 \neq 0$, 写出其对应的二次型, 并化成标准形.

8. 判断二次型 $2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 是否正定.

三. 证明题:

1. 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 其中 $m < n$, 证明 AA^T 正定当且仅当 $r(A) = m$ ($A^T A$ 正定当且仅当 $r(A) = n$).

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$

(1) 若 A 可逆, 证明二次型 f 的矩阵是 A 的伴随阵 A^* .

(2) 若 A 正定, 证明二次型 f 也正定.

3. 若实对称阵 A 的主对角线上有一个元素 $a_{ii} < 0$, 证明 A 不是正定阵.

4. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 是半正定, k 为正实数. 证明: $kE + A$ 是正定的

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵, 秩为 r , 证明: 存在秩为 $n - r$ 的对称矩阵 B , 使 $AB = 0$.

6. 证明如果方阵 A, B 合同, 那么 A, B 有相同的正定性.