设矩阵
$$A, B$$
 满足 $ABA^* = 2AB - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B

例 2

设矩阵
$$A, B$$
 满足 $A^*BA = 2BA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B

求非退化线性替换, 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形.

例 2

求非退化线性替换, 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

为标准形.

若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3$ 正定,求 t 的

取值范围.

已知

$$f_1 = 1 - x$$
, $f_2 = 1 + x^2$, $f_3 = x + 2x^2$

与

$$g_1 = x, g_2 = 1 - x^2, g_3 = 1 - x + x^2$$

是 $P[x]_3$ 中的两个向量组

- ① 证明 f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 都是 $P[x]_3$ 的基;
- ② 求由基 f_1, f_2, f_3 到基 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵
- 3 求 $f = 1 + 2x + 3x^2$ 在基 f_1, f_2, f_3 下的坐标.

1
$$\[\] \[\mathcal{C} \] A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \[\] \mathcal{C} \] W = \{ B | AB = BA, B \in P^{3 \times 3} \}, \[\] \mathcal{R} \] W \text{ in the proof of the proof of$$

和一组基.

② 设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
, 记 $W = \{B \mid AB = BA, B \in P^{3 \times 3}\}$, 求 W 的维数

和一组基.

已知两个齐次线性方程组

(I)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$
 (II)
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- ① 分别求 (I) 和 (II) 的解空间 V_1 和 V_2 的维数和一组基.
- ② 求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基.

取 P^3 的线性变换 $\sigma(a, b, c) = (a - b, b - c, a + b)$

- ① 求 σ 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵
- **2** \vec{x} σ 在基 $\eta_1 = (1,0,0), \eta_2 = (1,1,0), \eta_3 = (1,1,1)$ 下的矩阵
- ③ 求向量 $\alpha=(1,2,3)$ 的像 $\sigma\alpha$ 分别在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和 η_1,η_2,η_3 下的坐标.

在线性空间 P3 中, 定义线性变换

$$\sigma(a, b, c) = (a + 2b - c, b + c, a + b - 2c),$$

分别求 σ 的值域与核的维数与一组基.

设
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
.

- (1) 求 A 的特征值和对应的特征向量.
- (2) 求正交阵 Q, 使得 Q^TAQ 是对角阵.

例 2

用正交线性替换化实二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

设 1,1,-3 是 3 阶实对称矩阵 A 的特征值, $(1,-1,0)^T$ 是 A 属于-3 的特征向量,求 A.