组合数学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

二项式定理中的系数都是组合数, 组合数和二项式定理有密切的关系.

本章我们就详细讨论这种关系.

回忆：表达式 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k 元子集的个数.

对于非负整数 n 和 k, 我们已经证明了

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

由此不难得到

- 对称性：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 恒等式：$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

它还具有许多很奇妙的性质, 关于它也有着许多恒等式.

第 3 章　二项式系数

1. Pascal 公式
2. 二项式定理
3. 多项式定理
4. 组合恒等式
5. 高斯系数

二项式系数

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

表: Pascal 三角

证明: 直接将 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ 代入上式验证等式成立.

Pascal 三角 (杨辉三角或贾宪三角)

17 世纪, 法国数学家 Pascal 做出了下面的三角形.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

表: Pascal 三角

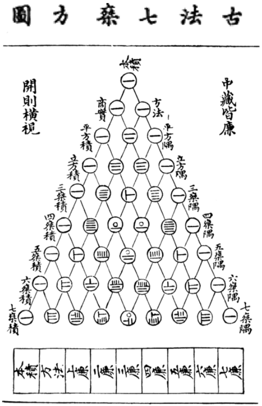


图: 朱世杰《四元玉鉴》中的“古法七乘方图”

13 世纪中国南宋数学家杨辉在《详解九章算术》里解释右边这种形式的数表, 并说明此表引自 11 世纪贾宪的《释锁算术》.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的组合证明 — 集合的组合

- 令 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$,
  考虑它的 k 元子集的个数
- 将 S 的 k 元子集分成两类:
  $$\begin{aligned} A &= \{\text{不含元 } n \text{ 的 } k \text{ 元子集}\} \\ B &= \{\text{包含元 } n \text{ 的 } k \text{ 元子集}\} \end{aligned}$$
- 按加法原理, $\binom{n}{k} = |A| + |B|$.
- A 中的 k 元子集恰好是集合 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的 k 元子集, 故 $|A| = \binom{n-1}{k}$
- B 的 k 元子集已包含 n, 只需从集合 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中再选出 $k-1$ 个元素即可, 故 $|B| = \binom{n-1}{k-1}$.

例如:

- $n = 5$, $k = 3$, $\binom{n}{k} = 10$
  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- A 的 3 元子集
  $$\{1,2,3\}, \{1,2,4\},$$
  $$\{1,3,4\}, \{2,3,4\},$$
  对应集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的 3 元子集.
- B 的 3 元子集
  $$\{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\},$$
  $$\{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\},$$
  去掉元素 $n = 5$ 后, 得
  $$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\},$$
  $$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$
  恰好是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的 2 元子集.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 的另一种组合解释

- 令 n 是非负整数, 且 $1 \le k \le n-1$.
- 回忆 $\binom{n}{k}$ 表示从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的格路的个数, 其中每条格路包含 n 步, 每一步只有两种选择:

$$\text{水平向右 } (1,0) \rightarrow \qquad \text{水平向上 } (0,1) \uparrow$$

- 考虑从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的格路, 有两种选择
  $i)$ 从点 (0,0) 到点 $(k, n-k-1)$, 再水平向上移至 $(k, n-k)$;
  $ii)$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(k-1, n-k)$, 再水平向右移至 $(k, n-k)$;
- 由加法原理, 得 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

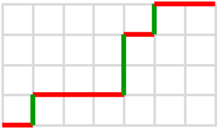


图: 格路

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t, s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如：$1, 3, 3, 1$.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t, s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如：$1, 3, 3, 1$.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

提示：只需对 $0 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ 证明 $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

一般地，可以得到

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

例 1.1

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

例 1.1

利用
$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$
计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \sum_{m=1}^{n} m^2 = 2\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1). \end{aligned}$$

例 1.2

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

例 1.2

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

将 $m = 1, 2, 3$ 分别代入 (*) 式得

$$\begin{aligned} 1 &= c \\ 8 &= b + 2c \\ 27 &= a + 3b + 3c \end{aligned}$$

解方程组得 $a = 6, b = 6, c = 1$.

例

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \qquad (*)$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

因此,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3 &= 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

清代数学家李善兰 (1811-1882) 在《垛积比类》一书中对垛积进行了系统的研究. 所谓垛积数就是二项式系数, 因用于计算按照一定图形堆垛的物品数量而得其名. 在该书的第二卷, 李善兰讨论了如下的求和问题:

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p,$$

其中 p 为正整数. 为此他把 m^p 分解成垛积数 $\binom{m+p-k}{p}$ 的线性组合

$$m^p = \sum_{k=1}^{p} A(p,k)\binom{m+p-k}{p}, \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $A(p,k)$ 为与 m 无关的系数, 称为李善兰系数.

闻名中外的"李善兰恒等式"就是从上述分解过程中归纳得到的:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 \binom{n+2m-k}{2m} = \binom{m+n}{n}^2.$$

Andrews 称上述恒等式为中国恒等式 (Chinese Identity).

华罗庚给出了这个恒等式的数学归纳法证明.

二项式定理

定理 2.1

令 n 是一个正整数, 对所有的 x 和 y, 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- 证明一：乘法分配律展开, 再合并同类项.
  将 $(x+y)^n$ 写作
  $$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdots\cdot(x+y)}_{n},$$
  我们发现对于 $x^{n-k}y^k$ 一项, 一定有 n 项乘积中的 $n-k$ 项贡献了 x, 其余 k 项贡献了 y. 因此 $x^{n-k}y^k$ 项系数为 $\binom{n}{k}$.
- 证明二：归纳法.

证明三：泰勒级数展开.

e^x 的泰勒级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots.$$

因为 $e^{x+y}=e^xe^y$, 相同函数的幂级数逐项相等, 于是在 $x+y$ 处的级数等于在 x 处的级数和在 y 处的级数的卷积, 即

$$\frac{(x+y)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!},$$

化简得

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

等价形式

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{k} y^{n-k}$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$

特殊地, 令 $y=1$, 得

推论 2.2

令 n 是一个正整数, 对所有的 x, 有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$$

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^4$.

例 2.2

$(3x-2y)^9$ 的展开式中, x^2y^7 的系数是什么? x^7y^2 的系数是什么?

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^4$.

例 2.2

$(3x-2y)^9$ 的展开式中，x^2y^7 的系数是什么？x^7y^2 的系数是什么？

$$(2x-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4.$$

$$(3x-2y)^9 = \sum_{r=0}^{9} \binom{9}{r} (3x)^r (-2y)^{9-r}$$

$$x^2y^7 \text{ 系数：} \tbinom{9}{2} 3^2 (-2)^7 = -41472$$

$$x^7y^2 \text{ 系数：} \tbinom{9}{7} 3^7 (-2)^2 = 314928$$

牛顿二项式定理

定义 2.3

设 α 是实数,k 是非负整数, 定义二项式系数为

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

定理 2.4

设 α 是实数, 对 $|z| < 1$ 的 z, 有

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

常用展开式

- $\alpha = -n$, 其中 n 为正整数

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1+z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$
- $(1+z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) z^k$

令 $-z$ 代替上面的 z

- $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$
- $(1-z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$

推论 2.5

$(1-z)^{-n}$ 中 z^k 的系数等于 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ 的非负整数解，即 $\binom{n+k-1}{k}$.

$$(1-z)^{-n} = (1-z)^{-1} \cdots (1-z)^{-1} = (1+z+z^2+\cdots) \cdots (1+z+z^2+\cdots)$$

从第一个因子选取 z^{k_1}，从第二个因子选取 z^{k_2}，$\cdots$

常用展开式

- $\alpha = 1/2$

$$\binom{1/2}{k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!\cdot(2k-2)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k-2)!!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k!\cdot(k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}$$

因此

$$(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}z^k$$

二项式系数

1. Pascal 公式
2. 二项式定理
3. 多项式定理
4. 组合恒等式
5. 高斯系数

回顾——重集的排列数

定理 3.1

令 S 是一个有 t 个不同类型的元的多重集，各个元的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_t$，满足 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$，则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}$$

定义 3.2

多项式系数定义为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}$$

这里 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$.

定理 3.3

对于 t 个不同的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n, \\ n_1, n_2, \cdots, n_t \geqslant 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$$

- 证明：利用乘法的分配律将乘积完全展开，再考虑合并同类项，$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 有 $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 种排列.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中, $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中, $x_1^3x_2x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3(-3)^1 5^2 = -36000$$

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中, $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3(-3)^1 5^2 = -36000$$

$$\binom{10}{3,1,4,2} = \frac{10!}{3!1!4!2!} = 12600$$

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中, 共有多少不同的项?

例 3.3

展开式 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 中, 共有多少不同的项?

展开式中, 一般项为 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$, 满足

$$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$$

因此不同的项的数目等同于上述方程的非负整数解的个数, 即 $\binom{n+t-1}{n}$.

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 对应着二项式定理中：$x = 1, y = 1$；
- 如果 S 是 n 个元素的集合, 则 S 的所有组合有多少个?

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

- 对应着二项式定理中：$x = 1, y = -1$
- S 的具有偶数个元素的组合有多少个？具有奇数个元素的组合有多少个?
- 可否建立奇组合与偶组合之间的一一对应?

推论

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k\ \text{为奇数}} \binom{n}{k} = \sum_{k\ \text{为偶数}} \binom{n}{k}$$

证明　设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, 则

$$A = \{S \subseteq X : |S|\text{为偶数且}1 \in S\},$$
$$B = \{S \subseteq X : |S|\text{为奇数且}1 \in S\},$$
$$C = \{S \subseteq X : |S|\text{为偶数且}1 \notin S\},$$
$$D = \{S \subseteq X : |S|\text{为奇数且}1 \notin S\}.$$

构造映射 $f : A \to D$ 为 $f(S) = S \setminus \{1\}$, 显然 f 为双射. 所以 $|A| = |D|$.

类似地 $|B| = |C|$.

因此

$$\sum_{k\ \text{为奇数}} \binom{n}{k} = |B| + |D| = |C| + |A| = \sum_{k\ \text{为偶数}} \binom{n}{k}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

- 考虑从 n 人中选出带队长的 k 人小队:
- 可先从 n 人中选出 k 人做队员, 再从 k 人中选出一人做队长;
- 也可以从 n 人中选出一人做队长, 然后再从 $n-1$ 人中选出 $k-1$ 人做队员.

例 4.1

利用 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 计算

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

例 4.1

利用 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 计算

1. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

1. $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1}.$$
2. $$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n-1}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$
3. $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

方法 1：对 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ 两边同时求导得

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

再令 $x = 1$.

方法 2：应用等式 3

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}.$$

方法 3：从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个队, 并选择一人为队长, 有多少种方法?

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

证明 对 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 求导, 得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

将上式左右两边同乘 x, 得

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k}.$$

对上式左右两边求导, 得

$$n\left((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n\left(2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right) = n(n+1)2^{n-2}.$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级, 并选择班长、团支书各一人 (可兼任), 有多少种方法?

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级, 并选择班长、团支书各一人 (可兼任), 有多少种方法?
- $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

证明 对

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

两边对 x 求从 0 到 1 的定积分,

$$\int_0^1 (1+x)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_0^1,$$

$$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

此即所证等式.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

一般地，可以得到

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

归纳法证明：关于 n 做归纳.

组合证明：

- 从 $n+1$ 个人中挑选 $k+1$ 个人组成一个队.
- 先从 $n+1$ 个人当中挑出一个人, 令他的号码是 $i+1$ $(i = k, \cdots, n)$, 作为小队当中号码最大的人.
- 接下来只要从前 i 个人当中挑出剩下的 k 个人即可.

比较系数法：提取

$$\sum_{i=0}^{n} (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$$

两边 x^k 的系数.

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

利用

$$\binom{i}{k} = \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1}$$

可知

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \left(\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \sum_{i=k+1}^{n+1} \binom{i}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \binom{n+1}{k+1} - \underbrace{\binom{k}{k+1}}_{0} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

对于 $f(i)$, 如果存在它的差分$F(i)$ 满足

$$\Delta_i F(i) = F(i+1) - F(i) = f(i),$$

则称 $F(i)$ 是 $f(i)$ 的不定和. 于是

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a}^{b} F(i+1) - \sum_{i=a}^{b} F(i) = F(b+1) - F(a).$$

Gosper 算法:

输入: 超几何项 $f(i)$, 也就是 $f(i+1)/f(i)$ 是有理函数.

输出:

- $F(i)$ 使得 $\Delta_i F(i) = F(i+1) - F(i) = f(i)$;
- 算法失败, 若满足条件的超几何项 $g(i)$ 不存在.

Gosper 算法适用于求下面的不定和

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{2i}{i}^2}{(i+1)4^{2i}} = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i \frac{4i\binom{2i}{i}^2}{4^{2i}} = \frac{(n+1)\binom{2n+2}{n+1}^2}{4^{2n+1}}.$$

不定和没有好的表达式, 定和可能有好的表达式.

例如 $\binom{n}{i}$ 关于 i 的不定和不是超几何的, 但是

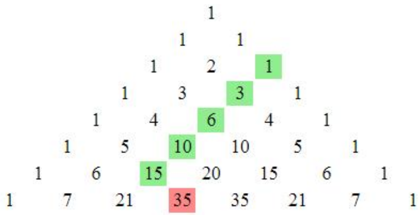
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

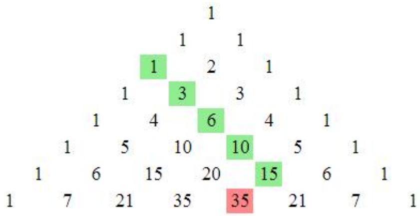
处理定和问题的基本方法是

构造和式满足的多项式系数的递推关系.

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$





恒等式 8

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}=\binom{n+k+1}{k}$$

恒等式 9 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, k 是非负整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

恒等式 9 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, k 是非负整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

方法 1：比较等式 $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m (x+1)^n$ 两边 x^k 的系数.

方法 2：

- $\binom{m+n}{k}$ 是 $(m+n)$ 元集合 $A \cup B$ 中 k-子集的个数, 其中 $A = \{1, \ldots, m\}, B = \{m+1, \ldots, m+n\}$,
- 而其中包含 A 中 i 个元素的这样的 k-子集的个数为 $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$,
- 所以和式 $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 便是对所有的 i 来计这些子集的个数.

特别地, 当 $m = n = k$ 时,

推论

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

方法 3：机器证明.

Doron Zeilberger 提出了一种证明组合恒等式 (更一般的“超几何恒等式”) 的机械化算法. 他认识到问题的实质是：为证明恒等式

$$\sum_k f(n,k) = g(n),$$

只需：

- 找出一个左边和式 $F(n) = \sum_k f(n,k)$ 满足的递推关系；
- 用代入的方法验证右边 $g(n)$ 也满足同样的递推关系；
- 用足够多的初始值验证等式两边相等.

因此寻找和式的递推关系就成了证明和发现恒等式的首要任务.

例如

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zeilberger 算法

输入：双超几何项 $f(n,i)$, 即 $f(n+1,i)/f(n,i)$ 以及 $f(n,i+1)/f(n,i)$ 均为关于 n 和 i 的有理函数.

输出：

- 邻差算子

  $$L=\sum_{j=0}^{d} a_j(n) S_n^j,$$

  其中 $S_n f(n,i)=f(n+1,i)$ 和
- 超几何项 $g(n,i)$ 使得

  $$L(f)=\Delta_i g(n,i)=g(n,i+1)-g(n,i).$$

  于是,

  $$a_0(n)f(n,i)+a_1(n)f(n+1,i)+\cdots+a_d(n)f(n+d,i)=g(n,i+1)-g(n,i).$$

若邻差算子 L 不存在, 则算法失效.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

令 $f(n,i) = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 及 $F(n) = \sum_{i=0}^{k} f(n,i)$, Zeilberger 算法可以找到

$$L = (m+n-k+1)S_n - (m+n+1), \quad g(n,i) = i\binom{m}{i}\binom{n}{k-i},$$

即

$$(m+n-k+1)f(n+1,i) - (m+n+1)f(n,i) = g(n,i+1) - g(n,i).$$

对 i 从 0 到 k 求和可得

$$(m+n-k+1)F(n+1) - (m+n+1)F(n) = g(n,k+1) - g(n,0) = 0.$$

最后需要验证 $\binom{m+n}{k}$ 满足与 $F(n)$ 有相同的初值和递推关系.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

等号左边 $F(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ 的初值为 $F(0) = \binom{m}{k}$, 递推关系为

$$(m+n-k+1)F(n+1) = (m+n+1)F(n).$$

等号右边 $\binom{m+n}{k}$ 的初值为 $\binom{m+0}{k} = \binom{m}{k}$, 递推关系为

$$(m+n-k+1)\binom{m+n+1}{k} = (m+n+1)\binom{m+n}{k}.$$

因此, $F(n)$ 与 $\binom{m+n}{k}$ 具有相同的初值和递推关系.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Mathematica 代码实现:

In[1]:= $<< \boldsymbol{RISC`fastZeil`}$

Fast Zeilberger Package version 3.61

written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese

Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),

Johannes Kepler University, Linz, Austria

In[2]:= $\boldsymbol{Zb[Binomial[m,i]Binomial[n,k-i],\{i,0,k\},n,1]}$

If ‘k’ is a natural number, then:

Out[2]= $\{(m+n+1)\mathsf{SUM}[n] == (1-k+m+n)\mathsf{SUM}[1+n]\}$

例 4.2 (李善兰恒等式)

证明下列恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

李善兰恒等式为组合数学中的一个恒等式, 由中国清代数学家李善兰于 1859 年在《垛积比类》一书中首次提出, 因此得名.

李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

令 $f(n,j)=\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}$ 及 $F(n)=\sum_{j=0}^{k}f(n,j)$, Zeilberger 算法可以找到

$$L=(n+1)^2S_n-(k+n+1)^2,\quad g(n,j)=\frac{j^2(-j+2k+n+1)}{-j+n+1}f(n,j).$$

即

$$(n+1)^2f(n+1,j)-(k+n+1)^2f(n,j)=g(n,j+1)-g(n,j).$$

对 j 从 0 到 k 求和可得

$$(n+1)^2F(n+1)-(k+n+1)^2F(n)=g(n,k+1)-g(n,0)=0.$$

最后验证 $\binom{n+k}{k}^2$ 满足与 $F(n)$ 有相同的初值和递推关系.

李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

Mathematica 代码实现：

In[3]:= $<<\ \boldsymbol{RISC`fastZeil`}$

Fast Zeilberger Package version 3.61
written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese
Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),
Johannes Kepler University, Linz, Austria

In[4]:= $\boldsymbol{Zb[Binomial[k,j]^2 Binomial[n+2k-j,2k],\{j,0,k\},n,1]}$

If 'k' is a natural number, then:

Out[4]= $\{(k+n+1)^2\mathsf{SUM}[n] == (n+1)^2\mathsf{SUM}[1+n]\}$

例 4.3

设 n 和 k 均为正整数, 给出下面式子的一个组合证明

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

例 4.4

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & n \text{ 为偶数} 2m. \end{cases}$$

提示：考虑 $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数.

例 4.5

设 n 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

例 4.6

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
2. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$.
3. $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$.

例 4.6

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$.

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{j!(k-j)!} = \frac{n}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

2. $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$
$$= \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k} = \binom{n}{m}0 = 0$$

3. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = \textstyle\sum_{k=0}^{m}\displaystyle\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m}$$

二项式系数

1. Pascal 公式
2. 二项式定理
3. 多项式定理
4. 组合恒等式
5. 高斯系数

定义 5.1

设 n 和 k 为非负整数, 且 $0 \le k \le n$. 称

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}$$

为高斯系数.

- 例如, $n = 4$, $k = 2$ 时,
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(q^4 - 1)(q^3 - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$
- 记 $[n]! = [1][2] \cdots [n]$, 其中 $[n] = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$, 则高斯系数可以写为
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$
- 高斯系数是二项式系数的 $q-$模拟. 由定义可知
$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$
因此, 高斯系数 也称为$q-$二项式系数.

高斯系数的性质

定理 5.2

高斯系数具有以下性质：

1. $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1;$
2. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix};$
3. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix};$
4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$

定理 5.3 (Cauchy 二项式定理)

$$\prod_{k=1}^{n}(1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

- $q \to 1$ 时,$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

高斯系数的组合解释 1 — 多重集合上的排列

首先给出 (多重集合) 排列中逆序数的概念.

给定一个多重集合的排列 $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_n$, 一对元素 (i,j) 称为是 π 的一个逆序(inversion), 如果满足 $i<j$ 且 $\pi_i>\pi_j$.

π 的逆序的个数为 π 的逆序数, 记作 $\mathrm{inv}(\pi)$.

定理 5.4

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi\in S(1^k2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k,2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

定理

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 全排列构成的集合.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时, 性质显然成立. 现在假设对 $n-1$ 成立.

考虑 n 的情形. 对于 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in S(1^k\, 2^{n-k})$, 分两种情况考虑:

- 若 $\pi_n = 2$, 则将 π_n 去掉后, π 的逆序数不发生变化, 且此时
$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in S(1^k\, 2^{n-k-1});$$
- 若 $\pi_n = 1$, 则因为 π 中的每个 2 皆对 π_n 产生一个逆序数, 故去掉 π_n 后, 逆序数减少 $n-k$ 个, 且
$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in S(1^{k-1}\, 2^{n-k}).$$

所以

$$\sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}\pi} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

高斯系数的组合解释 2 — 格路

- 我们考虑从原点到点 (m,n) 的格路, 其中 m,n 为非负整数且只允许向东与向北. 因为我们共要走 $m+n$ 步, 且一定有 m 步向东走 n 步向北走, 故这样的路径有 $\binom{m+n}{m}$ 条.
- 对于每一条这样的路径 p, 在路径、x 轴和直线 $x=m$ 之间都有一个确定的封闭区域 $A(p)$. 右图展示了 $m=n=2$ 时的六条路径及每种情况下所包围的区域面积.
- 如果我们对这个区域取变量为 q 的生成函数, 也就是说, 一条面积为 A 的路径对求和的贡献为 q^A, 那么我们可以得

$$1+q+2q^2+q^3+q^4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

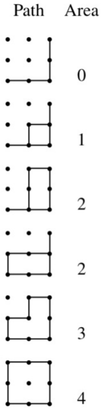


图: 格路

设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 (0,0) 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位, 最终走到 (m,n) 点的格路组成的集合.

对 $p \in \mathscr{P}(m,n)$, 设 $A(p)$ 为由格路 p、x 轴和直线 $x=m$ 包围图形的面积.

定理 5.5

$$\sum_{p \in \mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 (0,0) 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位，最终走到 (m,n) 点的格路组成的集合.

对 $p\in\mathscr{P}(m,n)$，设 $A(p)$ 为由格路 p、x 轴和直线 $x=m$ 包围图形的面积.

定理 5.5

$$\sum_{p\in\mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

证明 我们记等式左边为 $F(n,k)$，显然 $F(n,0)=F(n,n)=0$.

现考虑 $p\in\mathscr{P}(k,n-k)$ 的两种情况：

- 如果路径 p 的最后一步是向北的，那么它是一条从 $(0,0)$ 到 $(k,n-k-1)$ 再接着往北一步的路径，且最后一步不会改变面积.
- 如果路径 p 的最后一步是向东的，那么它是一条从 $(0,0)$ 到 $(k-1,n-k)$ 再接着往东一步的路径，这里最后一步会使面积增加 $n-k$.

故我们有 $F(n,k)=F(n-1,k)+q^{n-k}F(n,k-1)$.

再由定理5.2知，$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ 也具有相同的初值条件和递推关系，因此定理得证.

高斯系数的组合解释 3 — 有限域上的线性空间

先给出有限域上的线性空间的一些概念.

设 $\mathbb{F}_q$ 为有限域, 其中 $q = p^r$, p 为素数.

对正整数 n, 我们定义 $V_n(q)$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的有序 n 元组

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{F}_q, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

组成的集合, 并满足线性运算

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\alpha (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q$$

则 $V_n(q)$ 构成 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间, 其中的元素称为向量.

若向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{F}_q \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

则称向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是线性无关的.

线性空间 $V_n(q)$ 中线性无关的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成 $V_n(q)$ 的一组基.

$V_n(q)$ 中的任意向量都可以由 $V_n(q)$ 的一组基线性表示, 即对任意向量 $X \in V_n(q)$, 存在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

用坐标表示为

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

高斯系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的组合含义由下面定理给出.

定理 5.6

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

例如, $n = 3$, $k = 1$ 时, 有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 3 维线性空间的所有 1 维子空间的个数是

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1.$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

证明思路:

- 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的线性无关的 (有序) 向量组的个数, 它们生成一个 k 维子空间.
- 再计算一个 k 维子空间的 (有序) 基的个数.

证明 首先, 从 $V_n(q)$ 中选取一个由 k 个向量组成的元组构成一个 k 维子空间的 (有序) 基.

为此, 我们需要从空间 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量.

- 第一个向量 v_1, 可以选取任意非零向量, 因此由 $q^n - 1$ 中选择.
- 第二个向量 v_2, 不能选取 v_1 的倍数, 因此有 $q^n - q$ 种选择.
- 第三个向量 v_3, 有 q^2 个不能选取的向量, 它们是 v_1 和 v_2 的线性组合.

以此类推, 从 $V_n(q)$ 中选取 k 个线性无关的向量的方法数为

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}), \tag{1}$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\left[{n \atop k}\right]$.

其次, 一个子空间可以有很多组 (有序) 基.

类似上面的讨论, 选定一个 k 维子空间, 在其中选一组基的方法数为

$$(q^k - 1)(q^k - q)\cdots(q^k - q^{k-1}).$$

这就是(1)中每个子空间重复计数的数目.

因此,$V_n(q)$ 的 k 维子空间的个数是

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)\cdots(q^k - q^{k-1})} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$