第三章 线性方程组 练习题

一　填空题

1. 已知$5(1,0,-1)-3\alpha-(1,0,2)=(2,-3,-1)$,则$\alpha=$__________________.

2. 判断向量组的线性相关性:

(1) $(1,2,3,4),(4,3,2,1),(0,0,0,0)$.________. (2) $(a,b,c),(b,c,d),(c,d,e),(d,e,f)$.________.

(3) $(a,1,b,0,0),(c,0,d,2,3),(e,4,f,5,6)$. _____.

3. 若任意一个3维向量都可由$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,-2,3),\alpha_3=(a,1,2)$线性表出,则$a$满足________.

4. 向量组$\alpha_1=(1,0,1,2),\alpha_2=(1,1,3,1),\alpha_3=(2,-1,a+1,5)$线性相关,则$a=$__________.

5. 向量组$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(2,2,3),\alpha_3=(1,3,t)$线性无关,则$t$满足_______.

6. 向量组$\alpha_1=(1,-1,3,0),\alpha_2=(-2,1,a,1),\alpha_3=(1,1,-5,-2)$的秩为2,则$a=$__________.

7. 设$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=r,r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma)=r+1$,则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma)=$_______.

8. 设一个齐次线性方程组的系数矩阵是n阶方阵A,

(I) 若A的各行元素之和均为0,且$r(A)=n-1$,则此方程组的通解为______________________.

(II) 若每个n维向量都是此方程组的解,则$r(A)=$______.

9. 设非齐次方程组的系数矩阵是$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,且$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,若常数项组成的列向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,则此方程组的通解为_______________.

10. 若X_1,X_2是方程组$\begin{cases}x_1-x_2-ax_3=3\\2x_1\qquad -3x_3=1\\-2x_1+ax_2+10x_3=4\end{cases}$的两个不同的解向量,则$a=$____________.

11. 已知方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\\x_1+ax_2-2x_3=0\end{cases}$无解,则$a=$_______.

12. 设一线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为矩阵$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&\lambda(\lambda-1)&\lambda\end{pmatrix}$,则当$\lambda=$_____时,方程组无解;当$\lambda=$_____时,方程组有无穷多解.

13. 设一齐次线性方程组的系数矩阵A是4×3矩阵,则当________时,此方程组只有零解,当且仅当______时,方程组有非零解,此时自由未知量的个数等于________.

14. 设A是$m\times n$矩阵,以A为系数矩阵的非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件是________.

15. 若齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$只有零解,则$\lambda$应满足________.

16. 方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=a_1\\ -x_1+x_2-x_3+x_4=a_2\\ -2x_2+2x_3-x_4=a_3\end{cases}$有解的充要条件是________________.

17. 设$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&a\\a&1&3\end{pmatrix}$,若$A$经过初等变换化为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则$r(A)=$______,$a=$________ .

18. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为一个线性无关的$n$维向量组，则$n$与$m$的大小关系为_________.

19. 设A为5阶矩阵,且$|A|=1$,则$r(A)=$______________.

20. 设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$,已知$r(A)=1$,则$k=$____________.

21. 若一个线性方程组系数矩阵的秩为r,则其增广矩阵的秩为_______________.

22. 一个齐次线性方程组含有n个未知量,一组基础解系含r个解,则该方程组系数矩阵的秩为________.

23. 齐次线性方程组只有零解的充要条件是____.

24. 若齐次线性方程组系数矩阵A是n阶矩阵,给出此方程组有非零解的一个充要条件_______________.

25. 如果向量β可由列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表出，则矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的秩为______.

二　计算题

1. 设$\alpha=(2,1,-2),\beta=(-4,2,3),\gamma=(-8,8,5)$.问$\gamma$能否由$\alpha,\beta$线性表出,若能,$\alpha,\beta$线性表出$\gamma$.

2. 求向量组$\alpha_1=(1,0,-1,0),\alpha_2=(-1,2,0,1),\alpha_3=(-1,4,-1,2),\ \alpha_4=(0,0,7,7),\alpha_5=(0,1,1,2)$的一个极大线性无关组.

3. 设向量组$\alpha_1=(1,1,0,2),\alpha_2=(-1,1,2,4),\alpha_3=(2,3,a,7),\alpha_4=(-1,5,-3,a+6)$, $\beta=(1,0,2,b)$,求a,b的取值,使得

(I) β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出;

(II) β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出,且表出法唯一;

(III) β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出,且表出法不唯一,并写出此时表达式.

4. 问λ取何值时,线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3=1\\ -x_1+\lambda x_2-x_3=-\lambda\\ -x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$有唯一解?没有解?有无穷多解?有解时并求解.

5. 设线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+(\lambda-1)x_4=1 \end{cases}$,讨论$\lambda$为何值时,该线性方程组有唯一解?无解?有无穷多解?并在有无穷多解时求通解表达式.

6. 已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=-3 \end{cases}$有三个线性无关的解,求$a,b$的值及方程组的通解.

7. 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=0 \\ 2x_1+6x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=0 \\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=0 \end{cases}$的一组基础解系.

8. 求线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5=-1 \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=2 \\ 4x_1-x_2+4x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$ 的通解.

9. 有两个线性方程组(I) $\begin{cases} x_1+x_2-x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x_1+ax_2-x_3+2x_4=-5 \\ bx_2-x_3+3x_4=-11 \\ 3x_3-9x_4=c \end{cases}$,问当参数$a,b,c$为何值时, (I)和(II)同解.

三 证明题

1. 证明: $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\right)\Leftrightarrow\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

2. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$个线性无关的$n$维向量,$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,且$k_i(i=1,2,\cdots,n)$全不为零.
证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中任意$n$个向量均线性无关.

3. 设两个线性方程组:(I) $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots a_{1n}y_n=b_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots a_{2n}y_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots a_{mn}y_n=b_m \end{cases}$, (II) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1 \end{cases}$,
证明: (I)有解当且仅当(II)无解.

4. 已知A是n阶方阵,以A为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$,若$\beta$不是此方程组的解,证明向量组$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性无关.

5. 向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出,但是不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表出,证明:$\alpha_r$可由

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$线性表出.

6. 已知向量组(I)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; (II)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$; (III)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$,若各向量组的秩分别为$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$, $r(\mathrm{III})=4$,证明向量组(IV)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4.

7. 证明n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关当且仅当任一由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出的向量的表示法是不唯一的.

8. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是一个齐次线性方程组的一个基础解系,令

$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$,

证明: 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也是此方程组的一个基础解系.

9. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,而向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,且$\beta\neq 0$,证明:向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中有且仅有一个向量$\alpha_j(1\le j\le m)$可由其前面的向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$线性表出.

10. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R^m$是$n$个$m$维列向量,其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关, $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关,又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.对线性方程组$x_1\alpha_1+x_1\alpha_2+\cdots+x_1\alpha_n=\beta$,证明:

(1) 此方程组必有无穷多个解.

(2) 记$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为此方程组的任一解,则必有$x_n=1$.

11. 设向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关,且可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出,证明存在向量$\alpha_k(1\le k\le n)$,使得$\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关.