1 Catalan 数

1.1 格路

定义 1.1 *平面上从 $(0,0)$ 到 $(2n,0)$ 的一条路径，如果每步只能是向 $(1,1)$ 方向或向 $(1,-1)$ 方向前进 (只走格点)，并且保证不穿越到 x 轴的下方，这样的路径被称为 Dyck path。从 $(0,0)$ 到 $(2n,0)$ 的 Dyck path 可简记为 n-Dyck path。*

我们知道，n-Dyck path 的总数是第 n 项 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。容易计算，$C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42$。Catalan 数在组合计数中有着十分广泛的应用，许多计数问题都可以直接或间接地用 Catalan 数解决。比如乘法排序问题 (*multiplication orderings*)：将 $n+1$ 个数通过不同的顺序乘起来的方式数，注意要求保持数本身的顺序不变。

习题 1.2 *将 xyz 按照不同顺序乘起来有 $C_2 = 2$ 种方式：$((xy)z), (x(yz))$。*

将 $xyzw$ 按照不同顺序乘起来有 $C_3 = 5$ 种方式：$((xy)(zw)), (((xy)z)w), ((x(yz))w), (x((yz)w)), (x(y(zw)))$。

1.2 有禁置换

定义 1.3 *若置换 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$ 中不存在 $1 \le i < j < k \le n$ 使得 $\pi_i\pi_j\pi_k$ 是模式 (pattern) 312(即 $\pi_j < \pi_k < \pi_i$)，则称置换 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 是 312-禁排置换。类似可定义 123-禁排置换，321-禁排置换。*

由 312-禁排置换的定义容易得到下面的引理：

引理 1.4 *置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 是 312-禁排的当且仅当对 $\forall\, i \in [n]$，i 右边比 i 小的所有元素构成的子列是递减的。*

定理 1.5 *$\mathfrak{S}_n$ 中 312-禁排置换数目是第 n 项 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。*

证明 我们知道 n-Dyck path 的数目是第 n 项 Catalan 数 C_n，所以一个比较自然的想法就是试图在 n-Dyck paths 和 $\mathfrak{S}_n$ 中 312-禁排置换间构造一个双射。为此，我们介绍一种标号方法，这里称之为 312-禁排标号。对任意一条 n-Dyck path D，我们按如下方式来标号：将向 $(1, 1)$ 方向走的 n 步用 $1, 2, \ldots, n$ 从左到右依次标号；对向 $(1,-1)$ 方向走的 n 步我们这样来处理：对任意一个峰不妨设为 ud (这里 u 是向 $(1, 1)$ 方向走的一步，d 是紧接的向 $(1,-1)$ 方向走的一步)，对 d 标与 u 相同的标号；对剩下的尚未标号的向 $(1,-1)$ 方向走的每步 d，我们用 $max\{l^u \backslash l^d\}$ 从左到右依次给它标号，这里 $l^u(l^d)$ 是 d 左边向 $(1, 1)((1,-1))$ 方向走的每步标号的集合。从左到右依次记下向 $(1,-1)$ 方向走的 n 步的标号得与 D 对应的置换记为 $L_{312}(D)$，由我们的标号原则不难看出 $L_{312}(D)$ 是 312-禁排置换。反之，对任意一个 312-禁排置换 π，据之前的原则很容易构造出与之对应的 n-Dyck path。从而，我们就得到了 n-Dyck paths 和 $\mathfrak{S}_n$ 中 312-禁排置换之间的一个双射。 ∎

习题 1.6 *对如下图所示的 Dyck path 用上面所叙述的原则来标号得到对应的 $\pi =$ 324651798。*

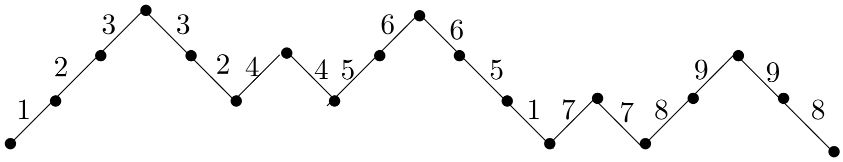

图 1

若将置换 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$ 看作一个字 (word)，我们可以定义它的子字 (subword) $\sigma = \pi_{i_1}\cdots\pi_{i_k}(1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n)$。记 $\pi - \sigma$ 为子字 (subword) $\pi_{j_1}\cdots\pi_{j_{n-k}}$,这里,$\{i_1,\ldots,i_k\}\cup\{j_1,\cdots,j_{n-k}\} = [n]$ 且 $\{i_1,\ldots,i_k\}\cap\{j_1,\cdots,j_{n-k}\} = \phi$。

由 321-禁排置换的定义我们容易得到下面的引理:

引理 1.7 *置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 是 321-禁排的当且仅当 $lrm(\pi) = \{\pi_i | i = 1$ 或 $\pi_i > \pi_j (j < i)\}$ 和 $[n]\backslash lrm(\pi)$ 都是递增的。*

定理 1.8 *$\mathfrak{S}_n$ 中 312-禁排置换的数目与 123-禁排置换的数目相等。*

证明 我们这里仍然给出一个类似于定理 2.3 的组合证明，但这次介绍的是 321-禁排标号。对任意一条 n-Dyck path D，我们按如下方式来标号：将向 (1, 1) 方向走的 n 步用 $1, 2, \ldots, n$ 从左到右依次标号；对向 $(1, -1)$ 方向走的 n 步我们这样来处理：对任意一个峰不妨设为 ud (这里 u 是向 (1, 1) 方向走的一步，d 是紧接的向 $(1, -1)$ 方向走的一步)，对 d 标与 u 相同的标号；对剩下的尚未标号的向 $(1, -1)$ 方向走的每步 d，我们用 $min\{l^u\backslash l^d\}$ 从左到右依次给它标号，这里 $l^u(l^d)$ 是 d 左边向 (1, 1)((1, −1)) 方向走的每步标号的集合。从左到右依次记下向 $(1, -1)$ 方向走的 n 步的标号得与 D 对应的置换记为 $L_{321}(D)$。

习题 1.9 *对如下图所示的 Dyck path 用上面所叙述的原则来标号得到对应的 $\pi =$ 314625798。*

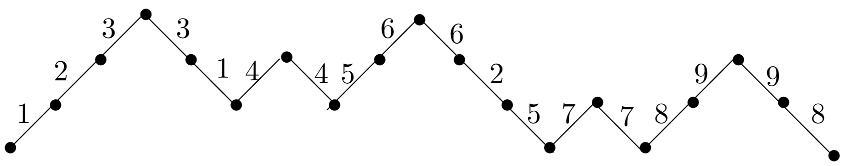

图 2

下面我们来证明刚刚的 321-禁排标号事实上给出了 n-Dyck paths 和 $\mathfrak{S}_n$ 中 321-禁排置换间的一个双射。设 A 是由从左至右的峰中向 $(1, -1)$ 方向走的那些步的标号所构成的字，B 是由剩余的从左至右的向 $(1, -1)$ 方向走的那些步的标号所构成的字。需要注意的是 A 和 B 都是递增的。考虑到向 $(1, -1)$ 方向走的任意三步的标号中必定有两步的标号或者包含于 A 或者包含于 B 中，从而易知 $L_{321}(D)$ 是 321-禁排置换。反之，对任意一个 321-禁排置换 π，作如下分解：$\pi = a_1b_1a_2b_2\cdots a_lb_l$，这里 $1 \le l \le n$，$a_i(1 \le i \le l)$ 是 π 中左到右最大的元素 (left-to-right maximum)，$b_j(1 \le j \le l-1)$ 是 a_j 和 a_{j+1} 间的元素构成的子字，b_l 是 a_l 右边的元素所构成的子字。让 a_i $(1 \le i \le l)$ 对应向 (1, 1) 方向走的 $a_i - a_{i-1}$ 步 (习惯上令 $a_0 = 0$)，让

b_i $(1 \leq i \leq l)$ 对应向 $(1, -1)$ 方向走的 $|b_i| + 1$ 步，结合引理 2.5 知最后所得到的路是一条 n-Dyck path。另外，很容易得到 $\mathfrak{S}_n$ 中 321-禁排置换与 123-禁排置换间的一一对应。 ∎

1.3 Catalan 数

定理 1.10 *第 n 项 Catalan 数*

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

证明 定理中这个等式可以借助 Dyck path 通过组合方法来证明。这里，我们给出的是一种应用了反射原理的证明方法。

令 A 是平面上从 $(0, 0)$ 到 $(2n, 0)$ 且每步只能取 $(1, 1)$ 或 $(1, -1)$ 的路的集合。易知 $|A| = \binom{2n}{n}$。令 B 是 n-Dyck path 的集合，则 $|B| = C_n$ (第 n 项 Catalan 数)。令 C 是包含于 A 且穿越了 x 轴的那些路的集合，则 $|C| = |A| - |B|$。令 D 是平面上从 $(0, 0)$ 到 $(2n, -2)$ 且每步只能取 $(1, 1)$ 或 $(1, -1)$ 的路的集合。易知 $|D| = \binom{2n}{n-1}$。因此我们只需要说明 $|C| = |D|$ 即可。对 C 中任意一条路 p，假定 $(2i-1, -1)$ 是 p 与 $y = -1$ 所交的第一个点，容易知道，将 p 中从 $(2i-1, -1)$ 到 $(2n, 0)$ 的那段关于 $y = -1$ 作反射，$(0, 0)$ 到 $(2i-1, -1)$ 那段不变所得到的是从 $(0, 0)$ 到 $(2n, -2)$ 属于 D 的路 p'，很容易证明这样的反射事实上给出了集合 C 和 D 间的一个一一对应。 ∎

定理 1.11 *设 $G(x)$ 是 Catalan 数的生成函数即 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$，则 $G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$。*

证明 令 $u(d)$ 表示向 $(1, 1)((1, -1))$ 方向走的一步，这样我们就可以把每条 Dyck path 对应于 $\{u, d\}$ 上的一个字。比如，图 1 中的 Dyck path 对应于字 $uuudduduudddududd$。可以观察到每条非空的 Dyck path 可以被唯一的分解成 $\delta = u\alpha d\beta$，这里 α 和 β 都是 Dyck path。假定 δ 和 α 分别长为 $2n$ 和 $2i(0 \leq i \leq n-1)$，从而易知 β 长为 $2n - 2i - 2$，因此有 $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$，所以

$$\begin{aligned} G(x) - 1 &= \sum_{n \geq 1} C_n x^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \right) x^n \\ &= x \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \right) x^n \\ &= x G^2(x). \end{aligned}$$

解上面的函数方程得

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

注意我们在应用求根公式时取了负号，这是因为 $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ 的展开式中包含了项 $\frac{2}{2x} = x^{-1}$。 ∎