组合数学

二项式系数

- 1 Pascal公式
- 2 二项式定理
- 3 二项式系数的单峰性
- 4 多项式定理
- 5 牛顿二项式定理

1 PASCAL公式

二项式系数

- $\binom{n}{k}$：n元集合的k-组合的个数
- 由于它们出现在二项式定理中，因此也叫做二项式系数。
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

PASCAL公式

- 定理（Pascal公式）对于满足1 ≤k ≤n-1的所有整数k和n，

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- 代数证明：直接将$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$代入验证，学生自行完成。

组合证明

- 令S是n元集合，考虑它的k-组合。
- 任取x∈S，将S的k-组合按x分成两大类，
  A={不含元x的k-组合}，B={包含元x的k-组合}。
- 按加法原理，$\binom{n}{k}$=|A|+|B|
- A的k-组合恰好是集合S-{x}的k-组合，故|A|=$\binom{n-1}{k}$
- B的k-组合是通过将x添加到集合S-{x}的(k-1)-组合得到的，
  故|B|=$\binom{n-1}{k-1}$

举例说明

- 例如：S={x,a,b,c,d}，n=5，k=3，$\binom{n}{k}$=10
- A的3-组合：{a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}，
  对应集合{a,b,c,d}的3-组合
- B的3-组合：
  {x,a,b}, {x,a,c}, {x,a,d}, {x,b,c}, {x,b,d}, {x,c,d}，

去掉x后，得

{a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}，

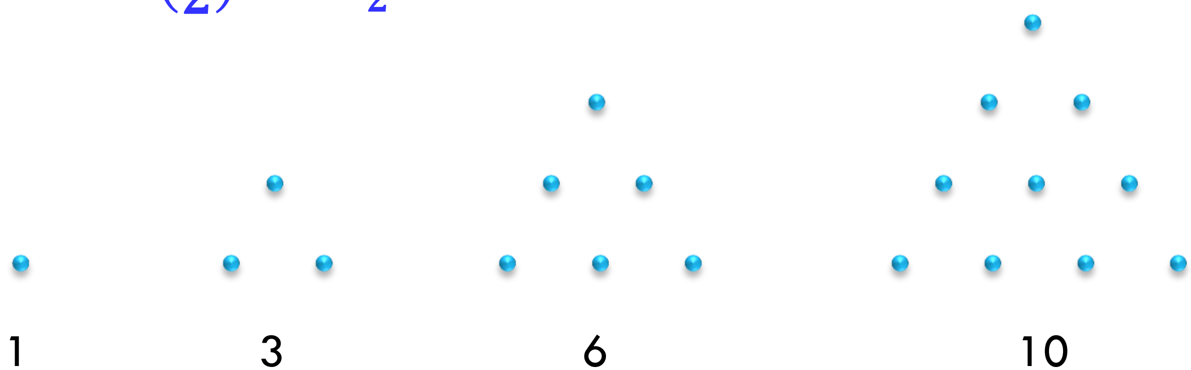
恰好是集合{a,b,c,d}的2-组合。

PASCAL三角形（杨辉三角）

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

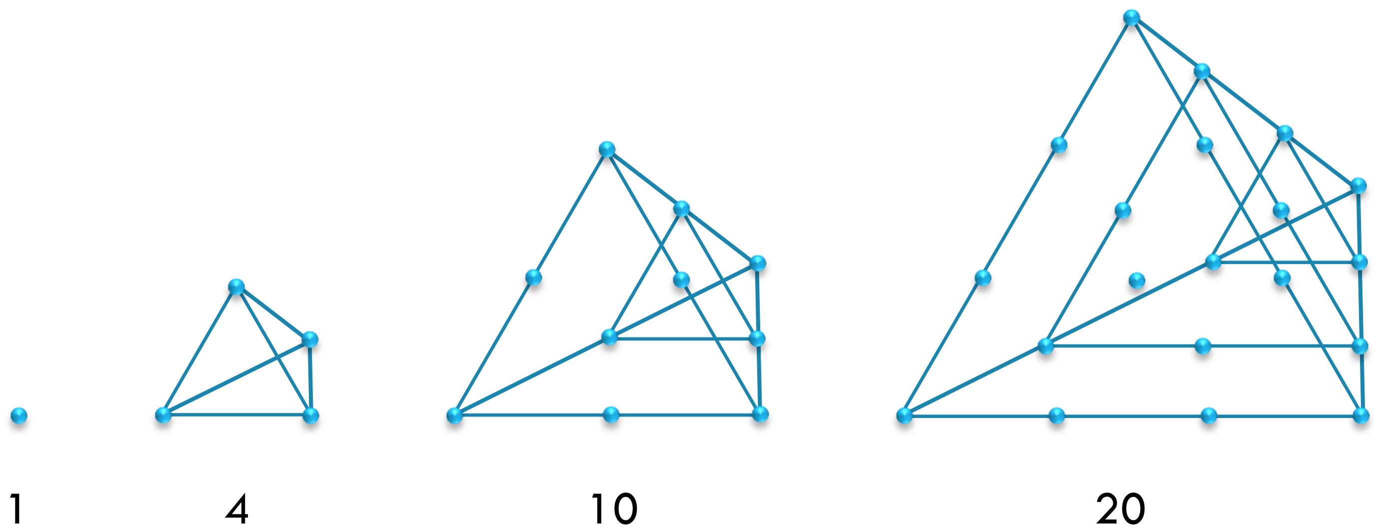
观察得结论

- 对称性：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- 恒等式（定理3.3.2）：$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$
- 三角形数：$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$　　三角形阵列点数



- 四面体数：$\binom{n}{3}=n(n-1)(n-2)/6$　四面体阵列点数

- 四面体数：$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$　四面体阵列点数



另一种组合解释

- 令n是非负整数，且$0 \le k \le n$

p(n,k)：表示从点(0,0)到点(n,k)的路径的条数，

其中，每条路径只能够走两种步子:

水平向右(1,0)　　斜向上　(1,1)

规定：p(0,0)=1，

易知：p(n,0)=1,（必须水平移动）

p(n,n)=1,（必须沿y=x移动）

另一种组合解释

- 从点(0,0)到点(n,k)的路径，有两种选择

i）从点(0,0)到点(n-1,k)，再水平右移至(n,k)；

Ii）从点(0,0)到点(n-1,k-1)，再斜向上移至(n,k)；

- 由加法原理：p(n,k)=p(n-1,k)+p(n-1,k-1)
- 即p(n,k)与$\binom{n}{k}$有相同的递推式和相同的初值，从而p(n,k)=$\binom{n}{k}$

2 二项式定理

二项式定理

- 定理 令**n**是一个正整数。对所有的**x**和**y**，有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

- 证明一：乘法分配律展开，再合并同类项。
- 证明二：归纳法。

等价形式

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

特殊情形

令y=1，得

- 推论：　令n是一个正整数。对所有的x，有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k$$

相关恒等式（一）

- (1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$
   - ➢对应着二项式定理中：x＝1，y＝1;
   - ➢如果S是n个元素的集合，则S的所有组合有多少个?

相关恒等式（一）

- (1) $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

  - 对应着二项式定理中：x＝1，y＝1;
  - 如果S是n个元素的集合，则S的所有组合有多少个?

相关恒等式（二）

- (2) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$
- (2’) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1}$
  - 对应着二项式定理中：x＝1，y＝-1
  - S的具有偶数个元素的组合有多少个？具有奇数个元素的组合有多少个？
  - 可否建立奇组合与偶组合之间的一一对应？

相关恒等式（三）

- (3)　$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

  - 从n个人中挑选k个人组成一个队，并选择一人为队长，有多少种组合?

- (4)　$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

相关恒等式（四）

- (4) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

> 应用(3)式
>
> $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$

> 对$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$两边同时求导得
>
> $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$，再令x=1。

> 从n个人中挑选k（k=1, 2, ⋯, n）个人组成一个队，并选择一人为队长，有多少种组合?

相关恒等式（五）

- (5) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

> 对$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$两边同时求导得
>
> $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$，再同时乘以x得
>
> $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k} = nx(1+x)^{n-1}$，两边同时求导得
>
> $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1} = \left(n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}\right)$，再令x=1。

> 从n个人中挑选k（k=1, 2, ⋯, n）个人组成一个队，
> 并选择正副队长各一人（可兼任），有多少种组合?

相关恒等式（六）

- (6) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

➢ 令|S|是有限集且|S|=2n，求S的n-组合的个数?

将S划分成两个子集A和B，|A|= |B|=n。S的每个n-组合含有A的k个元素和B的n-k个元素，0≤k≤n。

- (6') $$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}=\binom{m_1+m_2}{n}$$ （范德蒙卷积公式）

广义的二项式系数

- 定义：设r是实数，k是整数，定义二项式系数为

$$\binom{r}{k}=\begin{cases}\dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} & k\geq 1\\ 1 & k=0\\ 0 & k\leq -1\end{cases}$$

- 例如：$\binom{3.5}{5}=\dfrac{3.5\times 2.5\times 1.5\times 0.5\times(-0.5)}{5!}$

相关恒等式（七）

- (7) $\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$ （帕斯卡公式）
- (8) $\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\cdots+\binom{r+k}{k}=\binom{r+k+1}{k}$
  - 反复应用帕斯卡公式。

相关恒等式（八）

- (9) $\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

  - 反复应用帕斯卡公式。
  - 从n+1个人中挑选k+1个人组成一个队。
  - 等价于先从n+1个人当中挑出一个人，令他的号码是i (i=1, 2, ···, n+1)，作为小队当中号码最大的人。接下来只要从前i-1个人当中挑出剩下的k个人即可。

3 二项式系数的单峰性

考察帕斯卡三角形

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

发现任意一行的系数先递增，再递减。

单峰性

- 定义：对序列$s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数$t(0 \le t \le n)$，使得

$$s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t，s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$$

那么该序列就是单峰的。

- 注：s_t为该序列的最大数，整数t不唯一。
- 例如：1, 3, 3, 1

二项式系数的单峰性（UNIMODAL）

- 定理：$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}$是单峰序列，

其中最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$

注：$\lfloor x \rfloor$是x的向下取整，$\lceil x \rceil$是x的向上取整。

例如：$\lfloor 2.2 \rfloor = 2$，　$\lfloor -2.2 \rfloor = -3$；

　　　$\lceil 2.2 \rceil = 3$，　$\lceil -2.2 \rceil = -2$ 。

4 多项式定理

回顾——重集的排列数

- 定理　令S是一个有t个不同类型的元的多重集，各个元的重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_t$，满足$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$，则$S$的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}$$

- 定义：多项式系数定义为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \cdots n_t!}$$

这里$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ 。

多项式定理

- 定理：对于t个不同的变量$x_1, x_2, \cdots, x_t$，有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n \\ n_1,n_2,\cdots,n_t \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$$

- 证明：利用乘法的分配律将乘积完全展开，再考虑合并同类项，$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$有$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t}$种排列。

- 例：展开式$(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$中，$x_1^2 x_2\, x_3^3$的系数是多少?

$$\binom{6}{3,1,2} 2^2(-3)^1 5^3 = -36000$$

- 例：展开式$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$中，共有多少不同的项?

展开式中，一般项为$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$，满足

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n\ ,$$

因此不同的项的数目等同于上述方程的非负整数解

的个数，即$\binom{n+k-1}{n}$。

5 牛顿二项式定理

回顾——二项式定理

- 定理 令n是一个正整数。对所有的x和y，有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

- 1676年，牛顿扩展了上述二项式定理，得到了$(x+y)^\alpha$的展开式，其中α是任意实数。
- 对应一般的指数，该展开式将是一个无穷级数，需要考虑收敛性问题。我们将只局限于叙述定理并考虑某些特殊情况。

牛顿二项式定理

- 定理 设α是实数，对所有满足$0 \le |x| < |y|$的x和y，有

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

其中$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$。

- 证明可在大多数微积分的书上找到。

等价形式

- **定理** 设α是实数，对所有满足|z|<1的z，有

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^{k}$$

其中$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$。

常用展开式（一）

- (1) $$(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$$

➢ $$\binom{-n}{k}=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{(n)(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}。$$

- (2) $$(1+z)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$$

➢ $$\binom{1+k-1}{k}=\binom{k}{k}=1$$

常用展开式（二）

- (3) $(1-z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k$
- (4) $(1-z)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$

➢ 令-z代替前式中的z。

➢ $(1-z)^{-n}=(1-z)^{-1}\cdots(1-z)^{-1}$ （n个因子）

$$=\left(1+z+z^2\cdots\right)\cdots\left(1+z+z^2\cdots\right)$$

从第一个因子选取z^{k_1}，从第二个因子选取z^{k_2}，…

则z^k的系数等于$k_1+k_2+\cdots+k_n=k$的非负整数解。

- $\binom{1/2}{k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!}$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!\cdot(2k-2)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k-2)!!} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k!\cdot(k-1)!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}$$

- 对|z|<1，有$(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1} z^k$

$$= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2\cdot 2^3}\binom{2}{1}z^2 + \frac{1}{2\cdot 2^5}\binom{4}{2}z^3 - \cdots$$