

数列极限

李 君

天津师范大学，数学科学学院

2023 年 6 月

目 录

§2 收敛数列的性质

本节首先考察收敛数列这个新概念有哪些优良性质？然后学习怎样运用这些性质.

- 一、惟一性
- 二、有界性
- 三、保号性
- 四、保不等式性
- 五、迫敛性 (夹逼原理)
- 六、极限的四则运算
- 七、一些例子

一、惟一性

定理 2.2 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则对于任何正数 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon. \quad (2)$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 (1), (2) 同时成立, 从而有

$$|a - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的, 所以 $a = b$.

二、有界性

定理 2.3 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列, 即存在 $M > 0$, 使得 $|a_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对于正数 $\varepsilon = 1, \exists N, n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$, 即 $a - 1 < a_n < a + 1$.

若令 $M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, |a - 1|, |a + 1|\}$, 则对一切正整数 n , 都有 $|a_n| \leq M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.

三、保号性

定理 2.4 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 $b, c, b < a < c$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时, $b < a_n < c$.

证 取 $\varepsilon = \min\{a - b, c - a\} > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,
 $b \leq a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \leq c$, 故 $b < a_n < c$.

注 若 $a > 0$ (或 $a < 0$), 我们可取 $b = \frac{a}{2}$ (或 $c = \frac{a}{2}$), 则
 $a_n > \frac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \frac{a}{2} < 0$).

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证 对任意正数 ε , 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} = 0$, 所以由定理 2.4, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} < 1, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

四、保不等式性

定理 2.5 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为收敛数列, 如果存在正数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \leq b_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 若 $b < a$, 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, 由保号性定理, 存在 $N > N_0$, 当 $n > N$ 时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$, 导致矛盾. 所以 $a \leq b$.

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \leq b_n$ 改为 $a_n < b_n$, 也只能得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

这就是说, 即使条件是严格不等式, 结论却不一定是严格不等式.

例如, 虽然 $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$.

五、迫敛性（夹逼原理）

定理 2.6 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都以 a 为极限, 数列 $\{c_n\}$ 满足: 存在 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 则 $\{c_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

证 对任意正数 ε , 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, 所以分别存在 N_1, N_2 , 使得

当 $n > N_1$ 时, $a - \varepsilon < a_n$; 当 $n > N_2$ 时, $b_n < a + \varepsilon$.

取 $N = \max \{N_0, N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

这就证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

例 2 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限.

解 设 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, 则有

$$n = (1 + h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \quad (n \geq 2),$$

故 $1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \right) = 1,$$

所以由迫敛性, 求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

六、四则运算法则

定理 2.7 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为收敛数列, 则 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ 也都是收敛数列, 且有

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \text{ 当 } b_n \text{ 为常数 } c \text{ 时,}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} cb_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$(3) \text{ 若 } b_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ 则 } \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \text{ 也收敛, 且}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

证 (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \forall \varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$, 所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

证 (2) 因 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 设 $|b_n| \leq M$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

于是

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

证 (3) 因为 $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, 由 (2), 只要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

由于 $b \neq 0$, 据保号性, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时,

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \varepsilon$$

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \leq \varepsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

七、一些例子

例 3 用四则运算法则计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

其中 $m \leq k, a_m b_k \neq 0$.

解 依据 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 (\alpha > 0)$, 分别得出:

(1) 当 $m = k$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m + a_{m-1} \frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{n} + \cdots + b_1 \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \frac{1}{n^m}} \\
&= \frac{a_m}{b_m}.
\end{aligned}$$

(2) 当 $m < k$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-m}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m + a_{m-1} \frac{1}{n} + \cdots + a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \frac{1}{n^m}}{b_k + b_{k-1} \frac{1}{n} + \cdots + b_1 \frac{1}{n^{k-1}} + b_0 \frac{1}{n^k}} \\
&= 0 \cdot \frac{a_m}{b_k} = 0.
\end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & m = k, \\ 0, & m < k. \end{cases}.$$

例 4 设 $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证 由于 $a_n \geq 0$, 根据极限的保不等式性, 有 $a \geq 0$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可得:

(1) $a = 0$ 时, 有 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$;

(2) $a > 0$ 时, 有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.

例 5 设 $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 根据极限的保号性, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$, 即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$, 所以由极限的迫敛性, 证得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例 6 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a \neq -1)$.

解 (1) $|a| < 1$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, 所以由极限四则运算法则, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a^n} = 0.$$

$$(2) a = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(3) $|a| > 1$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/a^n) = 0$, 故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/a^n} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/a^n)} = 1.$$

例 7 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. 由

$$a \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ma^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a = \max \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

定义 1 设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为 \mathbf{N}_+ 的无限子集, 且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列, 简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 由定义, $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项均选自 $\{a_n\}$, 且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序. $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 故总有 $n_k \geq k$.

定理 2.8 若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a , 则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a .

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k \geq k$, 因此 $k > N$ 时, $n_k \geq k > N$, 亦有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知, 若一个数列的两个子列收敛于不同的值, 则此数列必发散.

例 8 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a.$$

证 (必要性) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

因为 $2n > N, 2n - 1 \geq N$, 所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

$$a + b$$

(充分性) 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $k > N$ 时,

$$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon.$$

令 $N = 2K$, 当 $n > N$ 时, 则有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

例 9 若 $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证 显然

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} -\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = -1;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = 1.$$

因此, 数列 $\{a_n\}$ 发散.

复习思考题

1. 极限的保号性与保不等式性有什么不同?
2. 仿效例题 5 的证法, 证明: 若 $\{a_n\}$ 为正有界数列, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = \sup \{a_n\}.$$