高等代数第五章练习题

一. 填空题:

1. 二次型 $X^T\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}X$ 的矩阵为_______________,二次型 X^TAX 的矩阵为______________.

2. 写出 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-3\\0&-3&-2\end{pmatrix}$ 所决定的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=$_________________________.

3. 非零二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵是________________,秩为_________________.

4. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2$ 的秩为___________________.

5. n 阶实对称矩阵按合同分类有_______________类, n 阶复对称矩阵按合同分类有____________类.

6. (1) t 取何值_________________时,实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2tx_1x_2+2tx_1x_3$ 正定.

(2) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定, t 满足条件___________.

(3) t 满足条件__________________时,二次型 $tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 负定.

7. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$ 的正惯性指数为______,负惯性指数为______,符号差为_____.

8. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$ 的规范形为____________________,其符号差为______.

9. 复二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_8\right)=x_1x_2+x_3x_4-2x_5x_6-2x_7x_8$ 的规范形是_________________.

10. n 元正定二次型 X^TAX 的正惯性指数为________,负惯性指数为________,符号差为________.

11. 实二次型 $f(X)=-X^TX$ 的符号差为________________.

12. 秩为 n 的 n 元实二次型 $f(X)$ 与 $-f(X)$ 合同,则 $f(X)$ 的正惯性指数为_________.

13. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$ 是否正定____________.

14. 设 $A=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-3&2\\0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$, A,B,C 中合同的是___________.

15. 设 n 阶正定阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$,其中 A_1 为 m 阶方阵, A_1,A_2,A_3,A_4 中哪些正定______________.

16. 设 A 是 n 阶实对称阵,若 A 正定, A^{-1},A^*,A^m 中哪些正定__________________.

17. 两个 n 阶实对称阵 A,B 合同的充要条件是___________________________.

18. 只与自身合同的矩阵是______________________.

19. 实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&7&1\\1&1&8\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&3&-\frac{3}{2}\\2&-\frac{3}{2}&-4\end{pmatrix}$中与单位阵合同的有_____.

20. 设n阶阵 $A=\left(a_{ij}\right)_n$,则二次型 X^TAX 中交叉项 x_ix_j 的系数为________________.

21. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 写出 A 是正定矩阵的三个充要条件

i) _______________ ii) _________________ iii) ______________________.

22. 设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$,当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足____________条件时,二次型 f 为正定二次型.

23. 实对角矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_{m+n}\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}E_m&0\\0&-E_n\end{pmatrix}$合同的充要条件是_____________.

二. 计算题:

1. 用配方法求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+3x_2x_3+4x_1x_3$ 的标准形和规范形.

2. 给出实对称阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$,求可逆阵 C 和对角阵 D,使得 $C^TAC=D$(将 A 合同对角化).

3. 用非退化线性替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 为标准形.

4. 用非退化线性替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形.

5. 用非退化线性替换化实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3+x_3^2$ 为规范形.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&7&1\\1&1&8\end{pmatrix}$, 问 A 是否正定,若正定,求一矩阵 C,使得 $A=C^TC$.

7. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{pmatrix}$,其中 $a_1\neq 0$,写出其对应的二次型,并化成标准形.

8. 判断二次型 $2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 是否正定.

9. 求二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$ 的秩和符号差.

10. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}$,其中 n 为偶数,a,b 为实数.问 a,b 满足什么条件时,二次型 f 正定.

11. t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是半正定的.

三. 证明题:

1. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,其中 $m<n$,证明 AA^T 正定当且仅当 $r(A)=m$.

2. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

(1) 若 A 可逆,证明二次型 f 的矩阵是 A 的伴随阵 A^*.

(2) 若 A 正定,证明二次型 f 也正定.

3. 若实对称阵 A 的主对角线上有一个元素 $a_{ii}<0$,证明 A 不是正定阵.

4. 已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^TAX$ 是半正定,k 为正实数.证明：$kE+A$ 是正定的

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵,秩为 r ,证明:存在秩为 $n-r$ 的对称矩阵 B ,使 $AB=0$.

6. 证明如果方阵 A,B 合同，那么 A,B 有相同的正定性.

7. (1) 已知 A 是 n 阶实可逆矩阵,证明 A^TA 是正定矩阵.

(2) 设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 为实矩阵,证明 A^TA , AA^T 是半正定矩阵.

(3) 设 $B_{m\times n}$ 是实矩阵，证明:齐次线性方程组 $BX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ B^TB 是正定矩阵.（同题 1）

8. 证明在复数域上 E 和 $-E$ 合同，但是在实数域上 E 和 $-E$ 不合同.

9. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $AB+B^TA$ 是正定矩阵,证明 A 可逆.

10. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵,证明:

(1) 对任意 n 维非零实列向量 X ,都有 $X^T(E+A)X>0$.

(2) $E+A,E-A$ 可逆.

高等代数第五章练习题答案(部分)

一. 填空题:

1. $\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}(A+A^T)$.　2. $x_1^2-2x_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3$.　3. $\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_1a_2&a_2^2&a_2a_3\\a_1a_3&a_2a_3&a_3^2\end{pmatrix}$,秩为$1$.

4. 2.　5. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $n+1$.

6. (1) $-1<t<1$.　(2) $t>1$. (3)二次型矩阵$\begin{pmatrix}t&-2&-2\\-2&t&2\\-2&2&t\end{pmatrix}$, $p_3=(t-2)^2(t+4)$,答案：$t<-4$.

7. $2,1,1$.　8. $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2,0$.　9. $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_8^2$. 10. $n,0,n$.　11. $-n$.

12. $\frac{n}{2}$.　13.否.　14. A与C合同.　15. A_1,A_4正定.

16. A^{-1},A^*,A^m都正定.

(A是实对称阵, $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$, $(A^*)^T=(A^T)^*=A^*$, $(A^m)^T=(A^T)^m=A^m$,都是实对称的.

$A^TA^{-1}A=A^T=A$，A^{-1}与A合同,正定；$A^*=|A|A^{-1}$,正定；

$A^2=AEA, A^3=AAA, A^4=A^2EA^2$,

若$m=2s+1$为奇数,则$A^m=A^{2s}AA^{2s}$；若$m=2s$为偶数,则$A^m=A^{2s}EA^{2s}$；都与A合同,正定.

17. 秩相等且对应二次型的正惯性指数相等.　18.零矩阵.　19. 只有C与单位阵合同.　20. $a_{ij}+a_{ji}$.

22. 线性替换$\begin{cases}y_1=x_1+a_1x_2\\y_2=x_2+a_2x_3\\\quad\cdots\\y_{n-1}=x_{n-1}+a_{n-1}x_n\\y_n=x_n+a_nx_1\end{cases}$非退化,可保证$f$正定,即矩阵$\begin{pmatrix}1&a_1&&&\\&1&a_2&&\\&&\ddots&&\\&&&1&a_{n-1}\\a_n&&&&1\end{pmatrix}$可逆,计算行列式非零就行. $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq0$.

23. $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m+n}$中有$m$个正数,$n$个负数.

二. 计算题:

3 注意不能直接做根据题目做替换，这样得出的替换是退化的.

6 计算顺序主子式判断是否正定.若正定，则存在可逆阵C，使得$C^TAC=E$，初等变换法把A化为E，求出C，再取逆，就可得$A=C^TC$.

7 $f(X)=X^T\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}X=X^T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)X=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$

做替换$\begin{cases} y_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，由$a_1\neq 0$，这是非退化的，得标准形$g(Y)=y_1^2$，

8 二次型的矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$，计算各阶顺序主子式

$$p_k=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=(k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=(k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=k+1>0\text{，正定}$$

9 配方法做简单，满秩$2n$，符号差0.

10 二次型的矩阵$\begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}$，计算各阶顺序主子式，设$n=2s$，则

$$p_1=a,p_2=a^2,\cdots,p_s=a^s,\quad p_{s+1}=(a^2-b^2)a^{s-1},p_{s+2}=(a^2-b^2)^2a^{s-2},\cdots,p_n=(a^2-b^2)^s$$

顺序主子式全为正，二次型正定，故$a>0,a>|b|$.

三. 证明题

1. 设A是$m\times n$实矩阵,其中$m<n$,证明AA^T正定当且仅当$r(A)=m$(A^TA正定当且仅当$r(A)=n$).

证明 考察二次型$f(X)=X^TAA^TX$. 设$A^TX=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,则$f(X)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\geq 0$.

若$f(X)=0$,则$y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,故$A^TX=0$.

$\Rightarrow$：若AA^T正定,则$f(X)=0$当且仅当$X=0$.故$A^TX=0$只有零解,从而A^T列满秩,即$r(A^T)=r(A)=m$

$\Leftarrow$：若$r(A)=m$,则$A^TX=0$只有零解, $f(X)=X^TAA^TX=0\Leftrightarrow A^TX=0\Leftrightarrow X=0$,故$AA^T$正定.

2. 设A是n阶实对称矩阵, 二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

(1) 若 A 可逆,证明二次型 f 的矩阵是 A 的伴随阵 A^*.

(2) 若 A 正定,证明二次型 f 也正定.

证明 分块, $f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & X^T \\ -X & A \end{vmatrix}$,

若 A 可逆,则 $f(X)=\begin{vmatrix} 0 & X^T \\ -X & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X^TA^{-1}X & 0 \\ -X & A \end{vmatrix}=|A|X^TA^{-1}X=X^TA^*X$.

A 实对称,则 A^* 也是实对称,二次型的矩阵就是 A^*. 若 A 正定, 则 A^* 也正定,二次型 $f(X)=X^TA^*X$ 正定.

3. 若实对称阵 A 的主对角线上有一个元素 $a_{ii}<0$,证明 A 不是正定阵.

证明: 取初等矩阵 $P(i,1)$,则 $P(i,1)^T AP(i,1)=B$ 的 $(1,1)$ 位置元素是 a_{ii} , A 与 B 合同,故 A 正定当且仅当 B 正定.

现在假设 A 是正定阵,则 B 也是正定阵,故其顺序主子式应全为正,而 B 的一阶顺序主子式为 $a_{ii}<0$,矛盾,故 A 不是正定阵.

4. 已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^TAX$ 是半正定, k 为正实数.证明: $kE+A$ 是正定的.

提示: $X^T(kE+A)X=kX^TX+X^TAX>0$.

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵,秩为 r ,证明:存在秩为 $n-r$ 的对称矩阵 B ,使 $AB=0$.

证明: A 的秩是 r ,则存在可逆矩阵 C ,使得 $C^TAC=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中 B_1 是 r 阶满秩对角阵.则

$A=(C^T)^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}$,故 $AC\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}C^T=(C^T)^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}C^T=0$.

取 $B=C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}C^T$ 即可.

7.提示: 考察 $f(X)=X^TA^TAX$.

(1) $f(X)=X^TA^TAX=(AX)^TAX=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\ge 0$,其中 $AX=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

若 $f(X)=0$,则 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0\Leftrightarrow AX=0$,由于 A 可逆,故 $AX=0\Leftrightarrow X=0$,即二次型 $f(X)$ 正定,从而矩阵 A^TA 是正定矩阵.

(2) 任给 m 维列向量 X ,二次型 $f(X)=X^TA^TAX=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\ge 0$,半正定.

任给 n 维列向量 X ,二次型 $f(X)=X^TAA^TX=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2\ge 0$,半正定.

8 复数域上，有 $(iE)E(iE)=-E$ ；实数域上，秩都为 n ，但正惯性指数不同，不合同.

9. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $AB+B^TA$ 是正定矩阵,证明 A 可逆.

证明: 任给 $X \neq 0$,由于 $AB+B^TA$ 正定,故总有 $X^T(AB+B^TA)X=(AX)^T(BX)+(BX)^T(AX)>0$.

因此, 任给 $X \neq 0$,恒有 $AX \neq 0$(若 $AX=0$,则 $X^T(AB+B^TA)X=0$).即齐次方程组 $AX=0$ 只有零解,从而 A 可逆.

10. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵,证明:

(1) 对任意 n 维非零实列向量 X ,都有 $X^T(E+A)X>0$.

(2) $E+A, E-A$ 可逆.

证明: 由于 A 是 n 阶反对称矩阵,则 $X^TAX=0$,故 $X^T(E+A)X=X^TX \geq 0$,而 $X^T(E+A)X=0$ 当且仅当 $X=0$,正定.同理 $X^T(E-A)X>0$.

(2) 反证法,若 $E+A$ 不可逆,则 $(E+A)X=0$ 有非零解 X_0,则 $(E+A)X_0=0$,从而 $X_0^T(E+A)X_0=0$,与(1)矛盾.