第一章：什么是组合数学

Outline

组合数学概述：

几个实例

离散 $\xrightarrow{\text{微积分}}$ 连续 $\xrightarrow{\text{计算机}}$ 离散

组合数学是计算机出现以后迅速发展起来的一门数学分支，它的发展奠定了本世纪计算机革命的基础。

$$\text{离散} \xrightarrow{\text{微积分}} \text{连续} \xrightarrow{\text{计算机}} \text{离散}$$

组合数学是计算机出现以后迅速发展起来的一门数学分支，它的发展奠定了本世纪计算机革命的基础。

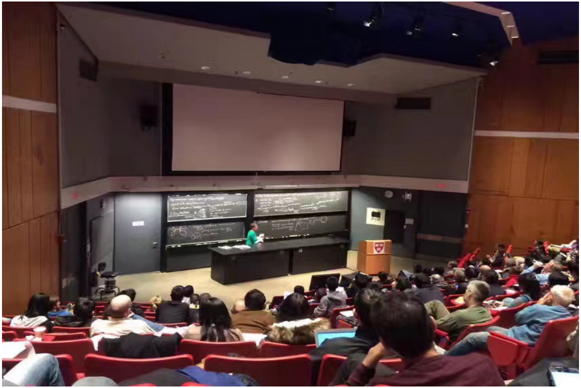
$$\text{离散} \xrightarrow{\text{微积分}} \text{连续} \xrightarrow{\text{计算机}} \text{离散}$$

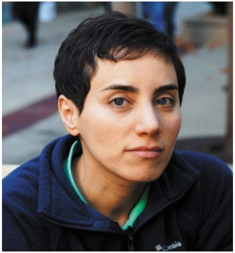
组合数学是计算机出现以后迅速发展起来的一门数学分支，它的发展奠定了本世纪计算机革命的基础。

(Izrail Moiseevich Gelfand 1913～2009, 首届Wolf奖（1978年）获得者)

“组合数学和几何学将是下一世纪数学研究的前沿阵地。”

瑞士洛桑联邦理工学院的Maryna Viazovska：组合几何
法国国际高等科学研究院的Hugo Duminil-Copin：概率论
牛津大学的James Maynard：数论
美国普林斯顿大学的June Huh：组合几何





Maryam Mirzakhani, 1977.05—2017.07, 首位女性菲尔兹奖得主

(吴文俊，（1919-2017），著名数学家，中国科学院院士)

“信息技术很可能会给数学本身带来一场根本性的变革，而组合数学则将显示出它的重要作用。”

(Gian-Carlo Rota, 1932-1999, 美国科学院院士, 近代组合数学的奠基人)

“组合数学是计算机软件产业的基础。中国最终一定能成为一个软件大国，但是要实现这个目标的一个突破点就是发展组合数学。”

组合数学概述：

组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科。主要包括组合计数，代数组合，组合设计，图论与组合优化等研究方向。

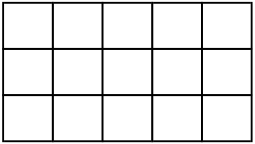
例如，

- 排列的存在性：将给定集合的元素排列成某种特定的模式，所需要的排列是否存在？
- 排列的计数和分类：指定的排列若存在，个数如何确定？如何将他们进行分类？
- 研究已知的排列：研究所需的这些排列的性质和结构
- 构造最优的排列：在某种指定意义下，如何寻找一个最优的排列。

Outline

棋盘的完美覆盖

- $m\times n$-棋盘：一个有m行n列（或者n行m列）的正方形方格阵；
- b-牌：一个由b个正方形并排连接成的方格条。一张2-牌又称为多米诺骨牌。



3×5棋盘

一张4牌

定义 2.1

$m \times n$棋盘被b牌完美覆盖：将若干张b牌放到棋盘上，使得任何两张b牌不重叠，每张b牌覆盖b个方格，并且棋盘上的所有方格都被覆盖。

定理 2.2

一张$m \times n$棋盘存在多米诺牌完美覆盖的充分必要条件是m与n中至少有一个是偶数。

例 2.3

一张3×5棋盘没有多米诺牌完美覆盖。

定义 2.1

$m \times n$棋盘被b牌完美覆盖：将若干张b牌放到棋盘上，使得任何两张b牌不重叠，每张b牌覆盖b个方格，并且棋盘上的所有方格都被覆盖。

定理 2.2

一张$m \times n$棋盘存在多米诺牌完美覆盖的充分必要条件是m与n中至少有一个是偶数。

例 2.3

一张3×5棋盘没有多米诺牌完美覆盖。

定义 2.1

$m\times n$棋盘被b牌完美覆盖：将若干张b牌放到棋盘上，使得任何两张b牌不重叠，每张b牌覆盖b个方格，并且棋盘上的所有方格都被覆盖。

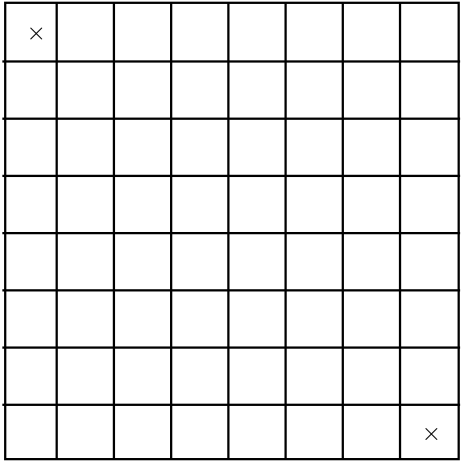
定理 2.2

一张$m\times n$棋盘存在多米诺牌完美覆盖的充分必要条件是m与n中至少有一个是偶数。

例 2.3

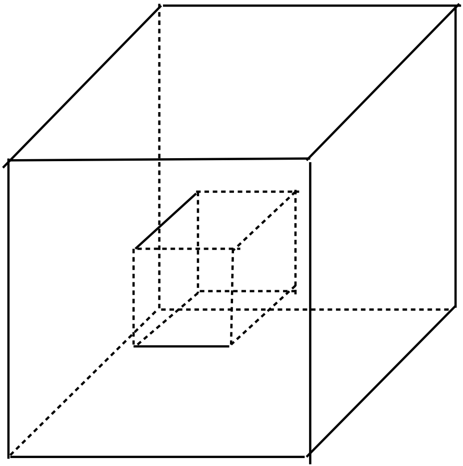
一张3×5棋盘没有多米诺牌完美覆盖。

将8×8棋盘对角线的两个对角上的方格剪去，得到的棋盘是否存在多米诺骨牌完美覆盖？



定理 2.4

一张$m \times n$棋盘存在b-牌完美覆盖的充分必要条件是m与n中至少有一个是b的倍数。



幻方

定义 2.5

给定一个由$1, 2, \ldots, n^2$构成的$n \times n$的方阵M，若M每行、每列及两条对角线上的元素和都等于同一个数s，则称M为一个n阶幻方。s称为该幻方的幻和。

下面是三阶幻方和四阶幻方的例子：

$$M_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

幻方

定义 2.5

给定一个由$1,2,\ldots,n^2$构成的$n\times n$的方阵M，若M每行、每列及两条对角线上的元素和都等于同一个数s，则称M为一个n阶幻方。s称为该幻方的幻和。

下面是三阶幻方和四阶幻方的例子：

$$M_1=\begin{pmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix}16&3&2&13\\5&10&11&8\\9&6&7&12\\4&15&14&1\end{pmatrix}$$

奇数阶幻方的构造方法：

早在17世纪，法国数学家de la Loubère就发现了一种构造奇数阶幻方的方法。设n 是一个奇数，可按照以下方法构造一个n阶幻方：

- 首先将数字1放在顶行的中间，其后的整数沿着对角线方向从左下至右上放置；
- 当达到顶行时，往最底下一行绕；
- 当达到最右边一列时，往最左边一列绕；
- 若按照上述规则，已经没有地方可以放置数字时，则将要放置的数字放在上一个数字的下方。

奇数阶幻方的构造方法：

早在17世纪，法国数学家de la Loubère就发现了一种构造奇数阶幻方的方法。设n 是一个奇数，可按照以下方法构造一个n阶幻方：

- 首先将数字1放在顶行的中间，其后的整数沿着对角线方向从左下至右上放置；
- 当达到顶行时，往最底下一行绕；
- 当达到最右边一列时，往最左边一列绕；
- 若按照上述规则，已经没有地方可以放置数字时，则将要放置的数字放在上一个数字的下方。

奇数阶幻方的构造方法：

早在17世纪，法国数学家de la Loubère就发现了一种构造奇数阶幻方的方法。设n 是一个奇数，可按照以下方法构造一个n阶幻方：

- 首先将数字1放在顶行的中间，其后的整数沿着对角线方向从左下至右上放置；
- 当达到顶行时，往最底下一行绕；
- 当达到最右边一列时，往最左边一列绕；
- 若按照上述规则，已经没有地方可以放置数字时，则将要放置的数字放在上一个数字的下方。

奇数阶幻方的构造方法：

早在17世纪，法国数学家de la Loubère就发现了一种构造奇数阶幻方的方法。设n 是一个奇数，可按照以下方法构造一个n阶幻方：

- 首先将数字1放在顶行的中间，其后的整数沿着对角线方向从左下至右上放置；
- 当达到顶行时，往最底下一行绕；
- 当达到最右边一列时，往最左边一列绕；
- 若按照上述规则，已经没有地方可以放置数字时，则将要放置的数字放在上一个数字的下方。

奇数阶幻方的构造方法：

早在17世纪，法国数学家de la Loubère就发现了一种构造奇数阶幻方的方法。设n 是一个奇数，可按照以下方法构造一个n阶幻方：

- 首先将数字1放在顶行的中间，其后的整数沿着对角线方向从左下至右上放置；
- 当达到顶行时，往最底下一行绕；
- 当达到最右边一列时，往最左边一列绕；
- 若按照上述规则，已经没有地方可以放置数字时，则将要放置的数字放在上一个数字的下方。

按照上述方法可构造一个5阶幻方如下：

$$M=\begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

正交拉丁方

问题背景——36军官问题：

设有分别来自6个军团的共有6种不同军衔的36名军官，他们能否排成6×6的方阵，使得每行每列都由不同军衔且来自不同军团的军官组成？

定义 2.6

设L是一个元素取自于集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的矩阵，若每一行每一列上$[n]$中每个数字都出现一次，则称L为一个n阶拉丁方。

定义 2.7

设$L_1=(a_{ij}),L_2=(b_{ij})$为两个$n$阶拉丁方，若

$$\{(a_{ij},b_{ij})|1\leq i,j\leq n\}=[n]\times[n],$$

则称L_1与L_2是正交的。

定义 2.6

设L是一个元素取自于集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$的矩阵，若每一行每一列上$[n]$中每个数字都出现一次，则称L为一个n阶拉丁方。

定义 2.7

设$L_1=(a_{ij}),L_2=(b_{ij})$为两个$n$阶拉丁方，若

$$\{(a_{ij},b_{ij})|1\leq i,j\leq n\}=[n]\times[n],$$

则称L_1与L_2是正交的。

例 2.8

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

则A与B是两个正交的拉丁方。

36军官问题可以重述为：是否存在两个正交的6阶拉丁方？

例 2.8

设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix},$$

则A与B是两个正交的拉丁方。

36军官问题可以重述为：是否存在两个正交的6阶拉丁方？

n阶正交拉丁方的存在性问题:

(Leonhard Euler, 1707～1783)

- 当$n=2k+1$或$n=4k$时，L.Euler给出了构造n阶正交拉丁方的方法；
- Euler猜想：若$n=4k+2(k=0,1,2,3,\ldots)$，则不存在n阶正交拉丁方。
  - (1) $k=0,1$时Euler猜想是对的，其中$k=0$（即$n=2$）时的情形很容易验证，而$k=1$（即$n=6$）时的情形则由Tarry用穷举法证明了，参见[1]。
  - (2) R.C.Bose, E.T.Parker和S.S.Shrikhande证明了当$k\geq 2$,时Euler猜想是错误的。

n阶正交拉丁方的存在性问题：

(Leonhard Euler，1707～1783)

- 当$n=2k+1$或$n=4k$时，L.Euler给出了构造n阶正交拉丁方的方法；
- Euler猜想：若$n=4k+2(k=0,1,2,3,\ldots)$，则不存在n阶正交拉丁方。

(1) $k=0,1$时Euler猜想是对的，其中$k=0$（即$n=2$）时的情形很容易验证，而$k=1$（即$n=6$）时的情形则由Tarry用穷举法证明了，参见[1]。

(2) R.C.Bose, E.T.Parker和S.S.Shrikhande证明了当$k\geq 2$,时Euler猜想是错误的。

n阶正交拉丁方的存在性问题：

(Leonhard Euler，1707～1783)

- 当$n=2k+1$或$n=4k$时，L.Euler给出了构造n阶正交拉丁方的方法；
- Euler猜想：若$n=4k+2(k=0,1,2,3,\ldots)$，则不存在n阶正交拉丁方。
  (1) $k=0,1$时Euler猜想是对的，其中$k=0$（即$n=2$）时的情形很容易验证，而$k=1$（即$n=6$）时的情形则由Tarry用穷举法证明了，参见[1]。
  (2) R.C.Bose, E.T.Parker和S.S.Shrikhande证明了当$k\geq 2$,时Euler猜想是错误的。

n阶正交拉丁方的存在性问题：

(Leonhard Euler，1707～1783)

- 当$n = 2k+1$或$n = 4k$时，L.Euler给出了构造n阶正交拉丁方的方法；
- Euler猜想：若$n = 4k+2(k = 0,1,2,3,\ldots)$，则不存在$n$阶正交拉丁方。
  - (1) $k = 0, 1$时Euler猜想是对的，其中$k = 0$（即$n = 2$）时的情形很容易验证，而$k = 1$（即$n = 6$）时的情形则由Tarry用穷举法证明了，参见[1]。
  - (2) R.C.Bose, E.T.Parker和S.S.Shrikhande证明了当$k \geq 2$,时Euler猜想是错误的。

一般位置的圆

定义 2.9

设$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$是平面上的$n$个圆。若其中任意两个圆都相交于不同的两个点，则称这n个圆相互重叠。对于n个圆，若其中任意三个圆都没有公共点，则称这n个圆处于一般位置或者普通位置。

问题：平面上n个位于普通位置的相互重叠的圆能将平面分成多少个区域？

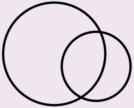
一般位置的圆

定义 2.9

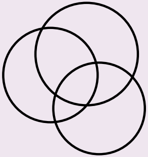
设$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$是平面上的$n$个圆。若其中任意两个圆都相交于不同的两个点，则称这n个圆相互重叠。对于n个圆，若其中任意三个圆都没有公共点，则称这n个圆处于一般位置或者普通位置。

问题：平面上n个位于普通位置的相互重叠的圆能将平面分成多少个区域？

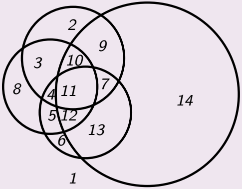
例 2.10



$h_2 = 4$



$h_3 = 8$



$h_4 = 14$

定理 2.11

设处于一般位置的n个互相重叠的圆将平面分成h_n个区域。则$h_1 = 2$且当$n \geq 2$ 时,

$$h_n = h_{n-1} + 2(n-1).$$

从而

$$h_n = n^2 - n + 2.$$

思考：平面上处于一般位置的n条两两相交的直线将平面分成多少个区域?

定理 2.11

设处于一般位置的n个互相重叠的圆将平面分成h_n个区域。则$h_1 = 2$且当$n \geq 2$ 时，

$$h_n = h_{n-1} + 2(n-1).$$

从而

$$h_n = n^2 - n + 2.$$

思考：平面上处于一般位置的n条两两相交的直线将平面分成多少个区域？

Nim取子游戏

设有$k \geq 1$堆硬币，分别含有$n_1, n_2, \ldots, n_k$枚硬币。两个人按照以下规则取走硬币：

- 游戏轮流进行，设先取硬币的人为游戏人I，另一人为游戏人II;
- 轮到任何一个游戏人取硬币时，他们可以选取当前剩下的任何一堆硬币，然后从中取走至少一枚硬币
- 当所有的硬币都被取走，游戏结束。最后取走硬币的人获胜。

问题：游戏人I还是游戏人II能获胜？取胜的策略是什么？

Nim取子游戏

设有$k \geq 1$堆硬币，分别含有$n_1, n_2, \ldots, n_k$枚硬币。两个人按照以下规则取走硬币：

- 游戏轮流进行，设先取硬币的人为游戏人I，另一人为游戏人II;
- 轮到任何一个游戏人取硬币时，他们可以选取当前剩下的任何一堆硬币，然后从中取走至少一枚硬币
- 当所有的硬币都被取走，游戏结束。最后取走硬币的人获胜。

问题：游戏人I还是游戏人II能获胜？取胜的策略是什么？

先考虑$k = 2$时的情形。

若两堆硬币数量不等，即$n_1 \neq n_2$，则游戏人I能取胜，取胜策略如下：

- 第一次从硬币数多的一堆取走一些硬币，使得两堆硬币数相等;
- 每次游戏人II取走m枚硬币后，游戏人I从另一堆中也取走m枚硬币。

若$n_1 = n_2$，则游戏人II能取胜，只需要在游戏人I每次取走m枚硬币后，在另一堆中也取走m枚。

先考虑$k=2$时的情形。

若两堆硬币数量不等，即$n_1 \neq n_2$，则游戏人I能取胜，取胜策略如下：

- 第一次从硬币数多的一堆取走一些硬币，使得两堆硬币数相等;
- 每次游戏人II取走m枚硬币后，游戏人I从另一堆中也取走m枚硬币。

若$n_1 = n_2$，则游戏人II能取胜，只需要在游戏人I每次取走m枚硬币后，在另一堆中也取走m枚。

为了将上述方法推广到一般的$k \geq 2$的情形，我们首先介绍正整数的二进制表示。

定义 2.12

对任意正整数$n \geq 1$，设$2^m \leq n < 2^{m+1}$,则可定义n 的二进制表示为*0-1*序列：

$$a_m a_{m-1} \cdots a_0,$$

其中$a_m = 1$且对$0 \leq i \leq m-1$,

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } 2^i \leq n - a_{i+1} \cdot 2^{i+1} - \cdots - a_m \cdot 2^m < 2^{i+1}; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

为了将上述方法推广到一般的$k \geq 2$的情形，我们首先介绍正整数的二进制表示。

定义 2.12

对任意正整数$n \geq 1$，设$2^m \leq n < 2^{m+1}$,则可定义n 的二进制表示为*0-1*序列：

$$a_m a_{m-1} \cdots a_0,$$

其中$a_m = 1$且对$0 \leq i \leq m-1$,

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } 2^i \leq n - a_{i+1} \cdot 2^{i+1} - \cdots - a_m \cdot 2^m < 2^{i+1}; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

例 2.13

给出十进制数57的二进制表示。

解：

- 由于$2^5 \leq 57 < 2^6$, 故57的二进制表示可设为$a_5a_4a_3a_2a_1a_0$，且$a_5 = 1$.
- 考虑$57 - 1 \times 2^5 = 25$. 由$2^4 \leq 25 < 2^5$ 可得$a_4 = 1$. 类似地，考虑$25 - 2^4 = 9$可得$a_3 = 1$.
- 考虑$9 - 1 \times 2^3 = 1$，由

$$1 < 2^2 \quad \text{且} \quad 1 < 2^1$$

知$a_2 = a_1 = 0$。由

$$2^0 \leq 1 < 2^1$$

知$a_0 = 1$. 从而57的二进制表示为

$$1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1.$$

设有k堆硬币，硬币数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$。将每个n_i表示成二进制数如下（通过前面加0使得它们有共同的位数）：

$$\begin{aligned} n_1 &= a_s \cdots a_1 a_0 \\ n_2 &= b_s \cdots b_1 b_0 \\ &\cdots \\ n_k &= e_s \cdots e_1 e_0 \end{aligned}$$

若对任意$0 \leq j \leq s$，$a_j + b_j + \cdots + e_j$都是偶数，则称对应的Nim取子游戏是平衡的。否则称为非平衡的。如果$a_i + b_i + \cdots + e_i$ 是奇数，则称第i位是非平衡的。

命题 2.14

游戏人I能够在非平衡Nim取子游戏中获胜，游戏人II能够在平衡Nim取子游戏中获胜。

策略：

- 在非平衡Nim取子游戏中：设最大的非平衡位为j，游戏人可以选择硬币数的二进制表示第j位是1的一堆硬币，从中取出若干硬币，使得游戏变成平衡的。此后，无论游戏人II如何取走硬币，都会将游戏再次变为非平衡游戏，因此游戏人I依然可以选取适当的取子方式将游戏变成平衡状态。如此下去，经过有限步之后游戏人I必然获胜。
- 在平衡Nim取子游戏中，游戏人II可以类似地采取使游戏平衡的策略来取胜。

命题 2.14

游戏人I能够在非平衡Nim取子游戏中获胜，游戏人II能够在平衡Nim取子游戏中获胜。

策略：

- 在非平衡Nim取子游戏中：设最大的非平衡位为j，游戏人可以选择硬币数的二进制表示第j位是1的一堆硬币，从中取出若干硬币，使得游戏变成平衡的。此后，无论游戏人II如何取走硬币，都会将游戏再次变为非平衡游戏，因此游戏人I依然可以选取适当的取子方式将游戏变成平衡状态。如此下去，经过有限步之后游戏人I必然获胜。
- 在平衡Nim取子游戏中，游戏人II可以类似地采取使游戏平衡的策略来取胜。

命题 2.14

游戏人I能够在非平衡Nim取子游戏中获胜，游戏人II能够在平衡Nim取子游戏中获胜。

策略：

- 在非平衡Nim取子游戏中：设最大的非平衡位为j，游戏人可以选择硬币数的二进制表示第j位是1的一堆硬币，从中取出若干硬币，使得游戏变成平衡的。此后，无论游戏人II如何取走硬币，都会将游戏再次变为非平衡游戏，因此游戏人I依然可以选取适当的取子方式将游戏变成平衡状态。如此下去，经过有限步之后游戏人I必然获胜。
- 在平衡Nim取子游戏中，游戏人II可以类似地采取使游戏平衡的策略来取胜。

例 2.15

考虑4-堆*Nim*取子游戏，其中各堆硬币数分别为$7, 9, 12, 15$。则

n_1:	0	1	1	1
n_2:	1	0	0	1
n_3:	1	1	0	0
n_4:	1	1	1	1

显然，第0位、第2位、第3位是非平衡的。故这局游戏是非平衡的。因此游戏人I为了获胜，可以在数目为15的硬币堆里面取走13枚硬币，使游戏变为平衡状态。

思考题： 设$n > 1$是一正整数。甲、乙两人交替轮流连续数数，每人每次至少数一个数，最多只能数两个数。最后数到n者为输家，如何才能取胜？

参考文献：

G. Tarry,
Le problème de 36 officeurs, *Compte Rendu de l' Association Francaise pour l' Advancement de Science Naturel*, 1(1990),122-123; 2(1901),170-203.

参考文献：

- R. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 1, 2nd edn.(Cambridge University Press, Cambridge,2012)
- R. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 2, 2nd edn.(Cambridge University Press, New York,1999)
- M. Bóna, A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory, 2nd edn. 2006
- M. Bóna, Introduction to Enuerative Combinatorics(影印版)，清华大学出版社，2009

作业(习题1.8)

- 习题3
- 习题12
- 习题24
- 习题30
- 习题35
- 补充题：求处于一般位置的n条两两相交的直线将平面分成的区域数。