第三章：鸽巢原理

Outline

鸽巢原理：简单形式

鸽巢原理：加强形式

定理 1.1

将$n+1$个物体放进n个盒子，则至少存在一个盒子包含两个或更多的物体。

例 1.2

13个人中存在两个人，他们的生日在同一个月份。

例 1.3

设有n对夫妇，为了保证至少一对夫妇被选出，至少要从这$2n$个人中选出$n+1$人。

定理 1.1

将$n+1$个物体放进n个盒子，则至少存在一个盒子包含两个或更多的物体。

例 1.2

13个人中存在两个人，他们的生日在同一个月份。

例 1.3

设有n对夫妇，为了保证至少一对夫妇被选出，至少要从这$2n$个人中选出$n+1$人。

定理 1.1

将$n+1$个物体放进n个盒子，则至少存在一个盒子包含两个或更多的物体。

例 1.2

13个人中存在两个人，他们的生日在同一个月份。

例 1.3

设有n对夫妇，为了保证至少一对夫妇被选出，至少要从这$2n$个人中选出$n+1$人。

例 1.4

给定m个整数$a_1, a_2, \ldots, a_m$,必存在整数k和l，$0 \le k < l \le m$，使得$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$能够被$m$整除。

证明提示：考虑以下m个数除以m所得的余数：

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m.$$

例 1.4

给定m个整数$a_1, a_2, \ldots, a_m$,必存在整数k和l，$0 \leq k < l \leq m$，使得$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$能够被$m$整除。

证明提示: 考虑以下m个数除以m所得的余数：

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m.$$

∎

例 1.5

一位国际象棋大师有11周的时间备战一场锦标赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了不使自己过于疲劳他还决定在每周不能下棋超过12盘。证明存在连续若干天，期间这位大师恰好下了21盘棋。

证明提示: 令s_i表示前i 天下棋的总盘数。考虑数列

$$s_1, s_2, \ldots, s_{77}, s_1 + 21, s_2 + 21, \ldots, s_{77} + 21.$$

例 1.5

一位国际象棋大师有11周的时间备战一场锦标赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了不使自己过于疲劳他还决定在每周不能下棋超过12盘。证明存在连续若干天，期间这位大师恰好下了21盘棋。

证明提示: 令s_i表示前i 天下棋的总盘数。考虑数列

$$s_1, s_2, \ldots, s_{77}, s_1 + 21, s_2 + 21, \ldots, s_{77} + 21.$$

∎

例 1.6

从整数$1, 2, \ldots, 200$中选择101个数，其中必存在两个整数，使得一个被另一个整除。

证明：对任意$1 \leq k \leq 100$，令

$$A_{2k-1} = \{m | m = 2^i \cdot (2k-1), 1 \leq m \leq 200\}$$

则$A_1, A_3, \ldots, A_{199}$将$\{1, 2, \ldots, 200\}$分成了100个互不相交的子集，由鸽巢原理，从{1,2,...,200}中任选101个数，则某个A_{2k-1}中必然选出了至少两个数，这两个数中必有一个被另一个整除。 ∎

例 1.6

从整数$1, 2, \ldots, 200$中选择101个数，其中必存在两个整数，使得一个被另一个整除。

证明：对任意$1 \le k \le 100$，令

$$A_{2k-1} = \{m | m = 2^i \cdot (2k-1), 1 \le m \le 200\}$$

则$A_1, A_3, \ldots, A_{199}$将$\{1, 2, \ldots, 200\}$分成了100个互不相交的子集，由鸽巢原理，从{1,2,...,200}中任选101个数，则某个A_{2k-1}中必然选出了至少两个数，这两个数中必有一个被另一个整除。 ∎

例 1.7

中国剩余定理：设m,n是两个互素的正整数，a,b为满足：$0\leq a\leq m-1,\ 0\leq b\leq n-1$的两个整数。则同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv a \pmod{m} \\ x\equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

有解。

证明提示：考虑以下一列数：

$$a, m+a, 2m+a, \ldots, (n-1)m+a.$$

例 1.7

中国剩余定理：设m, n是两个互素的正整数，a, b为满足：$0 \le a \le m-1,\ 0 \le b \le n-1$的两个整数。则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

有解。

证明提示: 考虑以下一列数：

$$a, m+a, 2m+a, \ldots, (n-1)m+a.$$

Outline

鸽巢原理：简单形式

鸽巢原理：加强形式

定理 2.1

设$q_1, q_2, \ldots, q_n$为n个正整数。若将

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$$

个物体放入n个盒子，则必存在$i : 1 \leq i \leq n$，使得第i个盒子至少含有q_i个物体。

推论 2.2

如果将$n(q-1)+1$ 个物体放进n 个盒子，则有一个盒子至少含q 个物体。

定理 2.1

设$q_1, q_2, \ldots, q_n$为n个正整数。若将

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$$

个物体放入n个盒子，则必存在$i : 1 \leq i \leq n$，使得第i个盒子至少含有q_i个物体。

推论 2.2

如果将$n(q-1)+1$ 个物体放进n 个盒子，则有一个盒子至少含q 个物体。

定理 2.3

对n个非负整数$m_1, m_2, \ldots, m_n$，若

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} \geq q$$

则至少存在一个$m_i \geq q$. 若

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} < q$$

则至少存在一个$m_i < q$.

例 2.4

用一个篮子装苹果、香蕉和桔子。为了保证篮子内或者至少有8 个苹果或者至少有6 个香蕉或者至少有9 个桔子，篮子里至少要放多少个水果？

例 2.5

两个碟子，其中一个比另一个小，它们均被分成200 个恒等的扇形。在大碟子中任选100 个扇形涂成红色；其余的100 个扇形则涂成蓝色。在小碟子中，每一个扇形或者涂成红色，或者涂成蓝色，所涂红色扇形和蓝色扇形的数目没有限制。然后将小碟子放到大碟子上面使两个碟子的中心重合。证明，能够将两个碟子的扇形对齐使得颜色相同的扇形对的数目至少是100对。

例 2.4

用一个篮子装苹果、香蕉和桔子。为了保证篮子内或者至少有8 个苹果或者至少有6 个香蕉或者至少有9 个桔子，篮子里至少要放多少个水果？

例 2.5

两个碟子，其中一个比另一个小，它们均被分成200 个恒等的扇形。在大碟子中任选100 个扇形涂成红色；其余的100 个扇形则涂成蓝色。在小碟子中，每一个扇形或者涂成红色，或者涂成蓝色，所涂红色扇形和蓝色扇形的数目没有限制。然后将小碟子放到大碟子上面使两个碟子的中心重合。证明，能够将两个碟子的扇形对齐使得颜色相同的扇形对的数目至少是100对。

证明：将大碟子的位置固定，取定小碟子的一个扇形使得它与大碟子上的某个扇形重合。记此时大小碟子上颜色重合的扇形对数为m_1。让小扇形沿顺时针方向旋转，直到回到开始的位置。每次转动一个扇形后，得到的颜色重合的扇形对数依次记为$m_2, m_3, \ldots, m_{200}$.在整个旋转过程中，颜色重合的大小扇形的总对数是$m_1 + m_2 + \cdots + m_{200}$。

另一方面，对于小碟子上每一个取定的扇形来说，由于大碟子上红色和蓝色的扇形都有100 个，所以在旋转过程中，一定有100 个大扇形的颜色与该小扇形重合。所以有$m_1 + m_2 \cdots + m_{200} = 200 \times 100 = 20000$。故

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{200}}{200} = 100$$

从而由平均原理知，必然存在某个i，使得$m_i \geq 100$.

证明：将大碟子的位置固定，取定小碟子的一个扇形使得它与大碟子上的某个扇形重合。记此时大小碟子上颜色重合的扇形对数为m_1。让小扇形沿顺时针方向旋转，直到回到开始的位置。每次转动一个扇形后，得到的颜色重合的扇形对数依次记为$m_2, m_3, \ldots, m_{200}$.在整个旋转过程中，颜色重合的大小扇形的总对数是$m_1 + m_2 + \cdots + m_{200}$。

另一方面，对于小碟子上每一个取定的扇形来说，由于大碟子上红色和蓝色的扇形都有100 个，所以在旋转过程中，一定有100 个大扇形的颜色与该小扇形重合。所以有$m_1 + m_2 \cdots + m_{200} = 200 \times 100 = 20000$。故

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{200}}{200} = 100$$

从而由平均原理知，必然存在某个i，使得$m_i \geq 100$. ∎

例 2.6

证明：长度为n^2+1的实数列一定存在长度为$n+1$ 的递增子列或者长度为$n+1$ 的递减子列。

证明：假设$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$不含长度为$n+1$ 的递增子列，令m_k表示从a_k 开始的长度最长的递增子列的长度，则$1 \le m_k \le n$对任意$1 \le k \le n^2+1$成立。所以这n^2+1 个数中必有$n+1$ 个相同，令

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}$$

其中$1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \le n^2+1$。

例 2.6

证明：长度为n^2+1的实数列一定存在长度为$n+1$ 的递增子列或者长度为$n+1$ 的递减子列。

证明：假设$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$不含长度为$n+1$ 的递增子列，令m_k表示从a_k 开始的长度最长的递增子列的长度，则$1 \leq m_k \leq n$对任意$1 \leq k \leq n^2+1$成立。所以这n^2+1 个数中必有$n+1$ 个相同，令

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}$$

其中$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leq n^2+1$。

下面我们证明$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{n+1}}$是一个长度为$n+1$的递减子列。用反证法。若有$a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$，将$a_{k_i}$放在从$a_{k_{i+1}}$开始、长度为$m_{k_{i+1}}$的递增子列的前面，则得到一个从$a_{k_i}$开始、长度为$m_{k_i}+1$的递增子列，与$m_{k_i}$的选取矛盾。 ∎

例 2.7

(1) 证明：在边长为1的等边三角形中任选5个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/2$.

(2) 证明：在边长为1的等边三角形中任选10个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/3$.

(3) 对任意n，确定正整数m_n，使得在边长为1的等边三角形中任选m_n 个点，总存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/n$.

例 2.7

(1) 证明：在边长为1的等边三角形中任选5个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/2$.

(2) 证明：在边长为1的等边三角形中任选10个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/3$.

(3) 对任意n，确定正整数m_n，使得在边长为1的等边三角形中任选m_n 个点，总存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/n$.

例 2.7

(1) 证明：在边长为1的等边三角形中任选5个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/2$.

(2) 证明：在边长为1的等边三角形中任选10个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/3$.

(3) 对任意n，确定正整数m_n，使得在边长为1的等边三角形中任选m_n 个点，总存在两个点，使得它们之间的距离至多为$1/n$.

例 2.8

证明：在边长为1的正方形中任选n^2+1个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$\frac{\sqrt{2}}{n}$.

例 2.9

在边长为1的正方形内取9个点，则存在3个点，以这3个点为顶点的三角形面积不超过$1/8$.

例 2.8

证明：在边长为1的正方形中任选n^2+1个点，存在两个点，使得它们之间的距离至多为$\frac{\sqrt{2}}{n}$.

例 2.9

在边长为1的正方形内取9个点，则存在3个点，以这3个点为顶点的三角形面积不超过$1/8$.

例 2.10

从集合$\{1,2,3,\ldots,25\}$中任意取出7个数，则其中必然有两个整数，大数不超过小数的1.5倍。

提示：考虑如下6个“盒子”：

$$\{1\}$$
$$\{2,3\}$$
$$\{4,5,6\}$$
$$\{7,8,9,10\}$$
$$\{11,12,13,14,15,16\}$$
$$\{17,18,19,20,21,22,23,24,25\}$$

例 2.10

从集合$\{1,2,3,...,25\}$中任意取出7个数，则其中必然有两个整数，大数不超过小数的1.5倍。

提示： 考虑如下6个“盒子”：

$$
\begin{aligned}
&\{1\}\\
&\{2,3\}\\
&\{4,5,6\}\\
&\{7,8,9,10\}\\
&\{11,12,13,14,15,16\}\\
&\{17,18,19,20,21,22,23,24,25\}
\end{aligned}
$$

例 2.11

在坐标平面上任取5个整点（横纵坐标都是整数的点），其中必然有两个点，它们连线的中点也是整点。

提示： 考虑如下4个集合

$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2|m,2|n\}$$
$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2|m,2\nmid n\}$$
$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2\nmid m,2|n\}$$
$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2\nmid m,2\nmid n\}$$

例 2.11

在坐标平面上任取5个整点（横纵坐标都是整数的点），其中必然有两个点，它们连线的中点也是整点。

提示： 考虑如下4个集合

$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2|m,2|n\}$$
$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2|m,2\nmid n\}$$
$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2\nmid m,2|n\}$$
$$\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},2\nmid m,2\nmid n\}$$

例 2.12

设平面上有9条直线，它们都把同一个正方形分成面积比为$2:3$的两个四边形。求证：这9条直线中一定存在3条直线共点。

例 2.13

*17*名科学家在学术活动中针对三个问题相互通信。任意两个科学家之间通信时只讨论其中一个问题。证明：至少存在三个科学家，他们之间相互通信时讨论的是同一个问题。

例 2.14

- 在平面上画六个点。甲乙两人分别持一支红笔一支蓝笔轮流在这些点之间连线，每一次只能选择未连线的两点连一条线。先画出同色三角形者为输家。由

$$K_6 \longrightarrow K_3, K_3$$

可知该游戏不可能平局。

- 假如持有绿色笔的丙也希望加入这个游戏。那么平面上画多少个点能保证游戏不可能平局？由例2.13可知，若三个人参加游戏，在平面上画17个点即可保证至少有一个人会画出同色三角形。
- 一般的，对任意正整数n，求平面点数x_n，使得当n个人参加游戏时游戏能有效进行。

例 2.14

- 在平面上画六个点。甲乙两人分别持一支红笔一支蓝笔轮流在这些点之间连线，每一次只能选择未连线的两点连一条线。先画出同色三角形者为输家。由

$$K_6 \longrightarrow K_3, K_3$$

可知该游戏不可能平局。
- 假如持有绿色笔的丙也希望加入这个游戏。那么平面上画多少个点能保证游戏不可能平局？由例*2.13*可知，若三个人参加游戏，在平面上画*17*个点即可保证至少有一个人会画出同色三角形。
- 一般的，对任意正整数n，求平面点数x_n，使得当n个人参加游戏时游戏能有效进行。

例 2.14

- 在平面上画六个点。甲乙两人分别持一支红笔一支蓝笔轮流在这些点之间连线，每一次只能选择未连线的两点连一条线。先画出同色三角形者为输家。由

$$K_6 \longrightarrow K_3, K_3$$

  可知该游戏不可能平局。
- 假如持有绿色笔的丙也希望加入这个游戏。那么平面上画多少个点能保证游戏不可能平局？由例*2.13*可知，若三个人参加游戏，在平面上画*17*个点即可保证至少有一个人会画出同色三角形。
- 一般的，对任意正整数n，求平面点数x_n，使得当n个人参加游戏时游戏能有效进行。

例 2.15

(1) 一个工厂生产3种颜色（蓝、灰、红）的毛巾并分包出售。一包至少应装多少条毛巾才能保证其中存在4条是同色的？

(2) 一个抽屉装有20条毛巾，其中4条蓝色，7条灰色，9条红色。应从中至少取多少条能保证存在4条是同色的？

(3) 一个抽屉装有20件毛巾，其中4条蓝色，7条灰色，9条红色。应从中至少取多少条能保证存在6条是同色的？

解：

(1) 由鸽巢原理，n个盒子中放$n(q-1)+1$个物体，必存在某个盒子含有至少q个物体。对本题而言，$n=3$,$q=4$.因此应至少装$3\times 3+1=10$条毛巾可保证其中存在4条同色。

(2) 类似于(1)，$n=3$,$q=4$. 应取10条。

(3) 错解：$n=3, q=6,$ 应取$3\times 5+1=16$。

注意本题等价于:

有三个盒子，第一个至多装4个物体，第二个至多装7个物体，第三个至多装9个物体，则一共需要放入多少物体才能保证有一个盒子放入了至少6个物体？(因此这个盒子只能是第二个或者第三个)

解：

(1) 由鸽巢原理，n个盒子中放$n(q-1)+1$个物体，必存在某个盒子含有至少q个物体。对本题而言，$n=3,q=4$.因此应至少装$3\times3+1=10$条毛巾可保证其中存在4条同色。

(2) 类似于(1)，$n=3,q=4$. 应取10条。

(3) 错解：$n=3,q=6$, 应取$3\times5+1=16$。

注意本题等价于:

有三个盒子，第一个至多装4个物体，第二个至多装7个物体，第三个至多装9个物体，则一共需要放入多少物体才能保证有一个盒子放入了至少6个物体？(因此这个盒子只能是第二个或者第三个)

解：

(1) 由鸽巢原理，n个盒子中放$n(q-1)+1$个物体，必存在某个盒子含有至少q个物体。对本题而言，$n=3,q=4$.因此应至少装$3\times 3+1=10$条毛巾可保证其中存在4条同色。

(2) 类似于(1)，$n=3,q=4$. 应取10条。

(3) 错解：$n=3, q=6,$ 应取$3\times 5+1=16$。

注意本题等价于:

有三个盒子，第一个至多装4个物体，第二个至多装7个物体，第三个至多装9个物体，则一共需要放入多少物体才能保证有一个盒子放入了至少6个物体？(因此这个盒子只能是第二个或者第三个)

解：

(1) 由鸽巢原理，n个盒子中放$n(q-1)+1$个物体，必存在某个盒子含有至少q个物体。对本题而言，$n=3,q=4$.因此应至少装$3\times 3+1=10$条毛巾可保证其中存在4条同色。

(2) 类似于(1)，$n=3,q=4$. 应取10条。

(3) 错解：$n=3, q=6$, 应取$3\times 5+1=16$。

注意本题等价于:

有三个盒子，第一个至多装4个物体，第二个至多装7个物体，第三个至多装9个物体，则一共需要放入多少物体才能保证有一个盒子放入了至少6个物体？(因此这个盒子只能是第二个或者第三个)

解：

(1) 由鸽巢原理，n个盒子中放$n(q-1)+1$个物体，必存在某个盒子含有至少q个物体。对本题而言，$n=3$,$q=4$.因此应至少装$3\times3+1=10$条毛巾可保证其中存在4条同色。

(2) 类似于(1)，$n=3$,$q=4$. 应取10条。

(3) 错解：$n=3, q=6,$ 应取$3\times5+1=16$。

注意本题等价于:

有三个盒子，第一个至多装4个物体，第二个至多装7个物体，第三个至多装9个物体，则一共需要放入多少物体才能保证有一个盒子放入了至少6个物体？(因此这个盒子只能是第二个或者第三个)

因此至少需要放入

$$4 + 5 \times 2 + 1 = 15$$

条毛巾。 ∎

例 2.16

现有3个苹果，4个桔子，6个香蕉，8个梨，11个芒果。问需要往一个篮子里放至少多少水果能保证有一种水果放了至少7个？

作业：

- 习题3.4 第7题
- 习题3.4 第9题
- 习题3.4 第10题
- 习题3.4 第14题
- 习题3.4 第17题
- 习题3.4 第28题