组合数学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

第 2 章　排列与组合

排列与组合

加法原理

以下假设 A 和 B 是两类不同的、互不关联的事件。

定理 1.1

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，则选 A 或 B 共有 $m+n$ 种方式。

加法原理

以下假设 A 和 B 是两类不同的、互不关联的事件。

定理 1.1

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，则选 A 或 B 共有 $m+n$ 种方式。

用集合的语言可将加法原理叙述成以下定理:

定理 1.2

设 A, B 为有限集，$A \cap B = \varnothing$, 则

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

例 1.1

从北京到上海可以乘飞机 *(3 种方案)*，或者火车 *(5 种方案)*。

问从北京到上海共几种方案 *?*

乘法原理

定理 1.3

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，那么选取 A 以后再选取 B 共有 $m \cdot n$ 种方式。

乘法原理

定理 1.3

设事件 A 有 m 种选取方式，事件 B 有 n 种选取方式，那么选取 A 以后再选取 B 共有 $m \cdot n$ 种方式。

用集合论的语言可将上述乘法原理叙述成如下的定理：

定理 1.4

设 A，B 是两个有限集合，$|A| = m$，$|B| = n$, 则

$$|A \times B| = |A| \times |B| = m \cdot n.$$

例 1.2

从北京到上海有 *2* 条路线，从上海到深圳有 *5* 条路线。
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线？

例 1.3

求 *1400* 的不同的正因子个数。

例 1.2

从北京到上海有 *2* 条路线，从上海到深圳有 *5* 条路线。
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线？

例 1.3

求 *1400* 的不同的正因子个数。

$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7^1$

正因子为：$2^i \times 5^j \times 7^k$，其中 $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1$

共计 $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$

例 1.4

在 *0* 和 *10000* 之间有多少个整数恰好有一位数字是 *5*?

例 1.4

在 *0* 和 *10000* 之间有多少个整数恰好有一位数字是 *5*?

通过添加 0，把所有的数都看成是四位数，例如 6=0006。

假如第 i 位数是 5，则有 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 种可能。

共计 $4 \times 729 = 2916$

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个?

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序:

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 $\rightarrow$ 千位 $\rightarrow$ 百位 $\rightarrow$ 十位

例 1.5

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个?

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 $\to$ 千位 $\to$ 百位 $\to$ 十位

答案： $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$

例 1.6

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合，或简称 n 元集。再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合，称为幂集。求 2^S 的基数?

例 1.6

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合，或简称 n 元集。再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合，称为幂集。求 2^S 的基数?

解: 令

$$\{0,1\}^n=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_i=0\text{或}1\}.$$

因为每个 ε_i 有两种可能的取值，所以有

$$\#\{0,1\}^n=2^n.$$

定义映射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$ 为

$$\theta(T)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n),$$

其中

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & \text{若} x_i\in T\\ 0, & \text{若} x_i\notin T.\end{cases}$$

容易看出 θ 是一个双射. 于是，$\#2^S=2^n$.

集合的排列

定义 2.1

给定某个含有不同的元素集合 S，我们把它的元素排成一个线性序，使得每个元素恰好出现一次，叫做该集合的一个排列 *(permutation)*。

以 $[n]$ 表示 n 个正整数构成的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$, 那么 $[n]$ 上的一个排列可以看成是 $[n]$ 到自身的一个双射。

对于一个排列，我们可以用一行

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$$

来表示，其中 π_i 表示 i 的像。

我们来看一下 n 元集合的排列的个数。

定理 2.2

n 元集合上全部排列的个数为

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

注意，为方便起见，我们令 $0! = 1$.

例 2.1

集合 $[3]$ 上的排列个数为 $3! = 6$，它们分别为

$$1\,2\,3,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 3\,2\,1.$$

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

2-排列为

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列。

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1, \quad 2, \quad 3,$$

2-排列为

$$12, \quad 13, \quad 21, \quad 23, \quad 31, \quad 32.$$

用 $P(n,r)$ 表示 n 元集合的 r-排列的数目。

如果 $r > n$, 则 $P(n,r) = 0$。

定理 2.4

对于正整数 n 和 r, $r \leq n$, 有

$$P(n,r) = n\ (n-1) \cdots (n-r+1).$$

记 $(n)_r = n\ (n-1) \cdots (n-r+1)$，称为 n 的 (r 阶)下阶乘。

例 2.3

将 a, b, c, d, e, f 进行排列，问：

(1) 使得字母 b 正好在字母 e 左邻的排列有多少种?

(2) 使得字母 b 正好在字母 e 左边的排列有多少种?

例 2.3

将 a, b, c, d, e, f 进行排列，问：

(1) 使得字母 b 正好在字母 e 左邻的排列有多少种?

(2) 使得字母 b 正好在字母 e 左边的排列有多少种?

例 2.4

从集合 $\{1, 2, \ldots, 9\}$ 中取出 7 个不同的数字组成 7 位数，要求 5 和 6 不相邻，问有多少不同的种?

例 2.4

从集合 $\{1, 2, \ldots, 9\}$ 中取出 *7* 个不同的数字组成 *7* 位数，要求 *5* 和 *6* 不相邻，问有多少不同的种?

所有的 7 位数 $P(9, 7) = \frac{9!}{2!} = 181440$

5 和 6 相继出现的 7 位数 $P(7, 5) \times P(6, 1) \times P(2, 1) = \frac{7!}{2!} \times 6 \times 2 = 30240$

共计 181440−30240=151200

圆排列

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个**圆排列**。

定理 2.5

n 元集合的 r-圆排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，n 元集合的圆排列是 $(n-1)!$.

例 2.5

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式?

圆排列

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个**圆排列**。

定理 2.5

n 元集合的 r-圆排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，n 元集合的圆排列是 $(n-1)!$.

例 2.5

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式?

答案：$(10-1)! - 2 \times (9-1)! = 282240.$

例 2.6

7 个男生和 3 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻。
问有多少种旋转排列方式?

例 2.6

7 个男生和 *3* 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻。
问有多少种旋转排列方式?

答案：$(7-1)! \times P(7,3) = 151200.$

例 2.7

用 7 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链?

例 2.7

用 *7* 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链?

答案： $\frac{1}{2}(7-1)! = 360$

例 2.8

有 *4* 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种?

例 2.8

有 4 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种?

答案：$3! + 3 = 9$.

提示：(错排问题) 把 4 位同学分别记为 1,2,3,4, 假设第 i 位同学拿到了第 π_i 位同学写的贺卡，则 $\pi_i \neq i$ 对于所有的 $1 \leq i \leq 4$. 于是，所求问题可以转化为求排列满足 $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$, 其中 $\pi_i \neq i$ 对于 $1 \leq i \leq 4$ 的个数.

然后，再考虑排列的圈表示，即求圈表示中不含 1-圈的排列的个数.

例 2.9 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式?

例 2.9 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式?

答案：$(4-1)! \times 2 = 12$.

提示：先让女士就座，就座方式有 $(4-1)! = 6$ 种，然后再让男士就座，只有 2 种可能.

集合的组合

定义 3.1

n 元集合的k-组合是指从 S 中取出 k 个元素的一种无序选择，也可以看作是 S 的一个 k 元子集。

例 3.1

若 $S=\{a,b,c,d\}$，则

$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\}$$

是 S 的所有 2-组合。

用 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合的个数，读作“n 取 k”。

用 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合的个数，读作“n 取 k”。

显然，当 $k > n$ 时，$\binom{n}{k} = 0$.

定理 3.2

若 $0 \le k \le n$，则

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$n\,(n-1)\cdots(n-k+1) \overset{why?}{=} \binom{n}{k} \cdot k!$$

例 3.2

系里欲将 *6* 名保送研究生推荐给 *3* 个单位, 每个单位 *2* 名, 问有多少种方案?

例 3.3

从 $1, 2, \cdots, 100$ 中选出两个不同的数, 使其和为偶数, 问有多少种取法?

例 3.4

在平面上给出 *25* 个点，任意三点不共线，这些点可以确定多少条直线？确定多少个三角形？

例 3.4

在平面上给出 *25* 个点，任意三点不共线，这些点可以确定多少条直线？确定多少个三角形?

两点确定一条直线 $\binom{25}{2} = 300$, 三点确定一个三角形 $\binom{25}{3} = 2300$.

例 3.5

在一个凸 $n(n \geqslant 4)$ 边形 C 的内部, 如果没有三条对角线共点, 求其全部对角线在 C 内部的交点的个数.

例 3.6

如果要求每个“单词”包含 *3*，*4* 或 *5* 个元音字母，那么用 *26* 个英文字母可以构造多少个长度为 *8* 的“单词”?（字母使用次数无限制）

例如单词 *Andee* 使用了 *3* 个元音字母。

例 3.6

如果要求每个“单词”包含 *3*，*4* 或 *5* 个元音字母，那么用 *26* 个英文字母可以构造多少个长度为 *8* 的“单词”？（字母使用次数无限制）
例如单词 *Andee* 使用了 *3* 个元音字母。

3 元音单词：$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$,

4 元音单词：$\binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4$,

5 元音单词：$\binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3$,

共计：$\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5 + \binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4 + \binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3$.

例 3.7

一个俱乐部有 *10* 名男成员和 *12* 名女成员, 现从中选出 *4* 人组成一个委员会, 若要求*:*

(1) 至少要有 *2* 名女成员*;*

(2) 除 *(1)* 外, 又要求 A 先生和 B 女士不能同时入选。

分别求出有多少种不同的选法。

例 3.7

一个俱乐部有 *10* 名男成员和 *12* 名女成员, 现从中选出 *4* 人组成一个委员会, 若要求:

(1) 至少要有 *2* 名女成员;

(2) 除 *(1)* 外, 又要求 A 先生和 B 女士不能同时入选。

分别求出有多少种不同的选法。

解 (1) 设入选的女成员有 i 名, 那么入选的男成员就有 $4-i$ 名, 其选法数为

$$\binom{12}{i}\binom{10}{4-i}$$

又 $2 \leqslant i \leqslant 4$, 所以选法总数为

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}+\binom{12}{3}\binom{10}{1}+\binom{12}{4}\binom{10}{0}=5665$$

(2) 从 (1) 中减去 A 先生和 B 女士同时入选的可能情况, 即为所求选法。

若 A 先生和 B 女士同时入选, 则另两名成员应从 9 名男士和 11 名女士中选出, 且至少选人一名女士, 与 (1) 类似, 其选法数为

$$\binom{11}{2}\binom{9}{0}+\binom{11}{1}\binom{9}{1}=99+55=154.$$

因此, 共有 $5665-154=5511$ 种选法。

另法　总方案数 $=A,B$ 二人都不入选方案数 $+A$ 人选 B 不入选方案数 $+A$ 不入选 B 入选方案数, 即总方案数为

$$\sum_{i=2}^{4}\binom{11}{i}\binom{9}{4-i}+\sum_{i=2}^{3}\binom{11}{i}\binom{9}{3-i}+\sum_{i=1}^{3}\binom{11}{i}\binom{9}{3-i}$$

多重集合的排列

例 4.1

用 3 个 A，2 个 B，4 个 C, 1 个 D 可以构成多少个长度为 10 的字符串?

多重集合的排列

例 4.1

用 *3* 个 *A*，*2* 个 *B*，*4* 个 *C*, *1* 个 *D* 可以构成多少个长度为 *10* 的字符串?

多重集是元素可以重复出现的集合。

把某个元素 a_i 出现的次数 k_i，叫做该元素的重数。

通常把含有 k 个不同元素的多重集 S 记做

$$\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}$$

或者

$$\{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_k^{k_n}\}.$$

多重集合的排列

用 $\binom{k_1+k_2+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ 表示多重集合 $\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}$ 的全排列个数。

先把 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ 个元素看成是互不相同的，

但这里 k_i 个 a_i 是相同的，只要两个排列中这些 a_i 的位置相同，就可以视为相同的多重集的排列。

定理 4.1

$$\binom{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}.$$

例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法?

例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法?

$$\binom{11}{1,2,4,4} = 34650$$

例 4.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 S，问有多少种排法?

例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法?

$$\binom{11}{1,2,4,4} = 34650$$

例 4.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 S，问有多少种排法?

$$\binom{11}{1,2,4,4} - \binom{8}{1,1,2,4} = 33810$$

例 4.4

考虑 例*1.6* 中定义的双射 $\theta\colon 2^S \to \{0,1\}^n$。集合 S 上的k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0, k\cdot 1\}$ 的排列一一对应。

例 4.4

考虑 例*1.6* 中定义的双射 $\theta\colon 2^S \to \{0,1\}^n$。集合 S 上的k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0, k\cdot 1\}$ 的排列一一对应。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k, k}$$

例 4.5 (格路计数问题)

在平面上有多少从 $(0,0)$ 到 $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 点的格路径，其每一步都具有形式 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ （即每一步向东或向北走一个单位距离）。

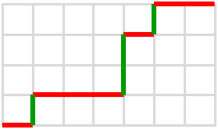

图: 格路

例 4.5 (格路计数问题)

在平面上有多少从 $(0,0)$ 到 $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 点的格路径，其每一步都具有形式 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ （即每一步向东或向北走一个单位距离）。

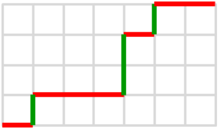

图: 格路

其与多重集 $\{m \cdot E, n \cdot N\}$ 的排列一一对应。

例 4.6

从 *6* 男 *2* 女共 *8* 名学生中选出队长 *1* 人，副队长 *1* 人，普通队员 *2* 人组成 *4* 人服务队，要求服务队中至少有 *1* 名女生，共有多少种不同的选法?

例 4.6

从 *6* 男 *2* 女共 *8* 名学生中选出队长 *1* 人，副队长 *1* 人，普通队员 *2* 人组成 *4* 人服务队，要求服务队中至少有 *1* 名女生，共有多少种不同的选法?

先选出 4 人：　3 男 1 女　或　2 男 2 女

再考虑多重集合 $\{1\cdot\text{队长}, 1\cdot\text{副队长}, 2\cdot\text{普通队员}\}$ 的排列，比如

$$\begin{pmatrix} \text{张三} & \text{李四} & \text{王五} & \text{赵六} \\ \text{队长} & \text{队员} & \text{副队长} & \text{队员} \end{pmatrix}$$

共计 $\left(\binom{6}{3}\binom{2}{1}+\binom{6}{2}\binom{2}{2}\right)\times\binom{4}{1,1,2}=(40+15)\times 12=660.$

该题来自 2017 年浙江高考。

例 4.7

在由四个 0 和八个 1 组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ 中，没有两个连续 0 的序列有多少个?

例 4.7

在由四个 0 和八个 1 组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ 中，没有两个连续 0 的序列有多少个?

插空法 $\binom{8+1}{4} = 126$

例 4.8

将 6 个蓝球、5 个红球、4 个白球、3 个黄球排成一行, 要求黄球不挨着, 问有多少种排列方式?

例 4.8

将 *6* 个蓝球、*5* 个红球、*4* 个白球、*3* 个黄球排成一行, 要求黄球不挨着, 问有多少种排列方式?

先将蓝、红、白三种球进行全排列, 再将 3 个黄球插入其中.

令 $M=\{6\cdot b, 5\cdot r, 4\cdot w\}$, 则 M 的全排列数为 $\frac{15!}{6!5!4!}$.

每个"*" 表示 M 的一个全排列中的一个元素, 共有 15 个"*", 则可以在 16 个"△ "所示位置中选出 3 个插入 3 个黄球, 共有 $\binom{16}{3}$ 种取法.

所以, 共有 $\frac{15!}{6!5!4!}\cdot\binom{16}{3}$ 种排列方法.

引例

一家面包房生产 8 种炸面包圈。如果将一打（12 个）炸面包圈装进盒内，则一共有多少种不同的盒装组合?

引例

求

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的个数。

引例

将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，要求每个盒子小球的个数不受限制，有多少种方法?

多重集合的组合

假定 n 个不同物体中的每一个都可以被重复选取任意多次。

用 $\binom{n}{r})$ 表示从

$$\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_n\}$$

选取基数为 r 的多重集的方法数。

设元素 a_i 出现 x_i 次。该问题等价于求

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$$

的非负整数解的个数。

这相当于，将 r 个相同的小球放入 n 个不同的箱子中 (即将 r 个相同的小球排成一排，然后在小球中间插入 $n-1$ 个隔板，隔板将小球分成了 n 份)

因此，原问题转化为多重集合 $\{r\cdot\circ,(n-1)\cdot|\}$ 的排列数。

所以，$\left(\binom{n}{r}\right)=\binom{n+r-1}{r}$.

例 5.1

一家面包房生产 *8* 种炸面包圈。

i) 如果将一打（*12* 个）炸面包圈装进盒内，则一共有多少种不同的盒装组合?

ii) 若每盒必定包含所有的 *8* 种炸面包圈呢?

例 5.1

一家面包房生产 *8* 种炸面包圈。

i) 如果将一打（*12* 个）炸面包圈装进盒内，则一共有多少种不同的盒装组合?

ii) 若每盒必定包含所有的 *8* 种炸面包圈呢?

i) $\left(\!\binom{8}{12}\!\right) = \binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12}$，　　ii) $\left(\!\binom{8}{4}\!\right) = \binom{12-1}{4} = \binom{11}{4}$

例 5.2

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个?

ii) 正整数解有多少个?

例 5.2

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个?

ii) 正整数解有多少个?

i) $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$,

ii) 法一：把 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子，要求每个盒子非空。这相当于，将 r 个相同的小球排成一列，然后在小球之间插入 $n-1$ 个隔板将小球分成了 n 份，每一份的数量都要大于或等于 1 ，对应上述方程的一组正整数解。

$$\circ\ \circ\ \circ\,|\ \circ\ \circ\,|\ \circ\ \circ\circ$$

也就是说，从 $r-1$ 个位置挑出 $n-1$ 个位置，用于放置隔板，即 $\binom{r-1}{n-1}$。

法二：令 $y_i = x_i - 1$, 则问题转化为方程 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r - n$ 的非负整数解的个数，即 $\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$.

例 5.3

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的满足

$$x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq -1,\ x_4 \geq 0$$

的整数解有多少个?

例 5.3

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的满足

$$x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq -1,\ x_4 \geq 0$$

的整数解有多少个?

我们引入新变量 $y_1 = x_1 - 4,\ y_2 = x_2 - 2,\ y_3 = x_3 + 1,\ y_4 = x_4.$

原问题变为方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$$

的非负整数解的个数 $\binom{4+15-1}{4-1} = \binom{18}{3} = 816.$

Balls in boxes

I will tell you shamelessly what my bottom line is: It is placing balls into boxes.
— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

例 5.4

i) 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，有多少种方法?
ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法?

Balls in boxes

I will tell you shamelessly what my bottom line is: It is placing balls into boxes.
— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

例 5.4

i) 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，有多少种方法?
ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法?

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解
ii) 正整数解

对 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r}$ 的一个直接的组合证明如下。

令

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_r \le n + r - 1$$

为 $[n + r - 1]$ 的一个 r 元子集。令 $b_i = a_i - i + 1$，则 $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ 是 $[n]$ 的一个 r 元重集。

反之，给定 $[n]$ 上的一个 r 元重集

$$1 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_r \le n,$$

定义 $a_i = b_i + i - 1$，则 $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ 是 $[n + r - 1]$ 的 r 元子集。

这样就定义了 $[n]$ 的 r 元重集与 $[n + r - 1]$ 的 r 元子集之间的双射。

多重集合的组合数（有重数限制）

令

$$S = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$$

是一个多重集，多重集合的 $r-$ 组合数的计数问题更为困难。等价于方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的整数解的个数，其中 $0 \le x_1 \le k_1,\ 0 \le x_2 \le k_2,\ \dots,\ 0 \le x_n \le k_n$.

将在后面的课程中解决该问题。

补充题

1. 集合 $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ 有多少个至少包含一个奇数的子集?
2. 将十个人分成五组，每组两人，不考虑分组顺序, 这样的分法有多少种?
3. 计算满足 $\pi_1 \neq 2$ 的 6 阶排列 $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$ 的个数。
4. 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈?（不动点可以认为是长为 1 的圈）

补充题

1. 集合 $[10]=\{1,2,\ldots,10\}$ 有多少个至少包含一个奇数的子集?
2. 将十个人分成五组，每组两人，不考虑分组顺序, 这样的分法有多少种?
3. 计算满足 $\pi_1 \neq 2$ 的 6 阶排列 $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$ 的个数。
4. 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈?（不动点可以认为是长为 1 的圈）

1. $2^{10}-2^5=992$
2. $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9=945$
3. $5\cdot 5!=600$（或者 $6!-5!=600$）
4. $\binom{6}{1}4!+\binom{6}{2}3!+\frac{1}{2}\binom{6}{3}2!^2=274$

例 5.5

把集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 划分成 b_1 个 *1* 元集, b_2 个 *2* 元集, $\ldots, b_k$ 个 k 元集, 其中 $\sum_{i=1}^{k} ib_i = n$, 这样的分法有多少种?

例 5.5

把集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 划分成 b_1 个 *1* 元集，b_2 个 *2* 元集，$\ldots$，b_k 个 k 元集，其中 $\sum_{i=1}^{k} ib_i = n$，这样的分法有多少种？

解 从排列数出发. n 个元素的全排列有 $n!$ 种. 而对于每个划分，其中 b_i 个 i 元集是没有顺序的，且划分中每个集合的元素也是没有顺序的，因此每个划分对应 $b_1!b_2!\cdots b_k!(1!)^{b_1}(2!)^{b_2}\cdots(k!)^{b_k}$ 个不同的 n-排列. 所以答案为

$$\frac{n!}{b_1!b_2!\cdots b_k!(1!)^{b_1}(2!)^{b_2}\cdots(k!)^{b_k}}.$$

法二 从多重选取数出发，再考虑到划分得到的 i 元集彼此之间是没有顺序的，则有

$$\frac{1}{b_1!b_2!\cdots b_k!}\binom{n}{1,\cdots,1,2,\cdots,2,\cdots,k,\cdots,k}$$

种分法，这和上面的答案一样. (以上多重选取公式中的 i 有 b_i 个，$1\le i\le k$.)

例 5.6

记集合 $[n]=\{1,2,\dots,n\}$. 由 $[n]$ 到其自身的双射 (即 n 元置换) 全体在映射合成下做成一个群, 即 n 元对称群 S_n, 其中任一置换 σ 均可表为 S_n 中一些互不相交 (即两两无公共元素) 的轮换之积，且这种表示方式在不考虑轮换次序的意义下唯一, 称为 σ 的轮换分解. 对 $\sigma\in S_n$, 用 $l_i(\sigma)$ 表示 σ 的轮换分解中长为 i 的轮换个数, 则称 $(l_1(\sigma),l_2(\sigma),\cdots,l_n(\sigma))$ 为 σ 的轮换型号, 记为 *type* (σ). 若 $1l_1+2l_2+\cdots+nl_n=n$, 则 S_n 中轮换型号为 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 的置换有多少个?

例 5.6

记集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$. 由 $[n]$ 到其自身的双射 (即 n 元置换) 全体在映射合成下做成一个群, 即 n 元对称群 S_n, 其中任一置换 σ 均可表为 S_n 中一些互不相交 (即两两无公共元素) 的轮换之积，且这种表示方式在不考虑轮换次序的意义下唯一, 称为 σ 的轮换分解. 对 $\sigma\in S_n$, 用 $l_i(\sigma)$ 表示 σ 的轮换分解中长为 i 的轮换个数, 则称 $(l_1(\sigma),l_2(\sigma),\cdots,l_n(\sigma))$ 为 σ 的轮换型号, 记为 *type* (σ). 若 $1l_1+2l_2+\cdots+nl_n=n$, 则 S_n 中轮换型号为 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 的置换有多少个?

解 与上例方法类似, 知所求结果为

$$\frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_n!(1!)^{l_1}(2!)^{l_2}\cdots(n!)^{l_n}}\cdot\prod_{i=1}^{n}((i-1)!)^{l_i}=\frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_n!1^{l_1}2^{l_2}\cdots n^{l_n}}.$$

此即 Cauchy 公式.