

第一章 多项式

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Outline

① 数域

§1 数域

定义

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1 . 如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在 P 中，则称 P 为一个数域.

常用到的数域：有理数域 \mathbb{Q} 、实数域 \mathbb{R} 、复数域 \mathbb{C} .

数域定义的另一形式

定义

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1 . 如果对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）运算封闭，则称 P 为一个数域.

例 1

所有形如 $a + b\sqrt{2}$ (a, b 是有理数) 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

例 1

所有形如 $a + b\sqrt{2}$ (a, b 是有理数) 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证明 (i) $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(ii) 对四则运算封闭. 事实上 $\forall a, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 设

$\alpha = a + b\sqrt{2}, \beta = c + d\sqrt{2}$, 有

$$a \pm \beta = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$a\beta = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

设 $\alpha = a + b\sqrt{2} \neq 0$, 则 $a - b\sqrt{2} \neq 0$ 且

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{c + d\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} = \frac{(c + d\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} \\ &= \frac{ac - 2bd}{a^2 - 2b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

注

有理数域是最小的数域。

证明 设 P 为一个数域.

- 由定义知 $1 \in P$,
- 又 P 对加法封闭知: $1+1=2$, $1+2=3$, \dots , P 包含所有**自然数**;
- 由 $0 \in P$ 及 P 对减法的封闭性知: P 包含所有负整数, 因而 P 包含所有**整数**;
- 任何一个有理数都可以表为两个整数的商, 由 P 对除法的封闭性知: P 包含所有**有理数**.

即任何数域都包含有理数域作为它的一部分.

定义

设 x 是一个符号 (文字), n 为非负整数. 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_n \in P$, 称为系数在数域 P 中的一元多项式, 简称为数域 P 上的一元多项式.

注

- 符号 x 可以是未知数, 也可以是其它待定事物.
- 这里 $a_i x^i$ 称为 i 次项, a_i 称为 i 次项系数.
若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n x^n$ 为首项.
- 习惯上记为 $f(x), g(x), \dots$ 或 f, g, \dots 上述形式表达式可写为

$$\sum_{i=0} a_i x^i.$$

- 零多项式——系数全为 0 的多项式
- 多项式相等—— $f(x) = g(x)$ 当且仅当同次项的系数全相等（系数为零的项除外）
- 多项式 $f(x)$ 的次数—— $f(x)$ 的最高次项对应的幂次，记作 $\deg(f(x))$.
如： $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ 的次数为 3，即 $\deg(f(x)) = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^2 - 3x + 1 & 3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 \\
 & 3x^3 & -9x^2 & +3x & \\
 \hline
 & 13x^2 & -8x & +6 & \\
 & 13x^2 & -39x & +13 & \\
 \hline
 & & 31x & -7 &
 \end{array}
 \quad 3x + 13$$

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

例 2

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$$

$$g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

求 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

辗转相除法可按下面的格式来作:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & \begin{array}{l} x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 \\ x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x \end{array} & \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \\
 & \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} \end{array} & \\
 & r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} & \\
 \hline
 \end{array} = q_1(x)$$

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

$-\frac{27}{5}x + 9$	$3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$	$x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$
$= q_2(x)$	$3x^3 + 15x^2 + 18x$	$x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x$	$= q_1(x)$
	$-5x^2 - 16x - 3$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3$	
	$-5x^2 - 25x - 30$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$	
	$r_2(x) = 9x + 27$	$r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}$	

$-\frac{27}{5}x + 9$	$3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$	$x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$
$= q_2(x)$	$3x^3 + 15x^2 + 18x$	$x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x$	$= q_1(x)$
	$-5x^2 - 16x - 3$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3$	
	$-5x^2 - 25x - 30$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$	
	$r_2(x) = 9x + 27$	$r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}$	

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$$

$-\frac{27}{5}x + 9$ $= q_2(x)$	$3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$ $3x^3 + 15x^2 + 18x$	$x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$ $x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x$	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$
	$-5x^2 - 16x - 3$ $-5x^2 - 25x - 30$	$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3$ $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$	
	$r_2(x) = 9x + 27$	$r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3}$ $-\frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{3}x$	$-\frac{5}{81}x - \frac{10}{81}$
		$-\frac{10}{9}x - \frac{10}{3}$	
		$-\frac{10}{9}x - \frac{10}{3}$	
		0	

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x)$$