高等代数第六章练习题

一. 填空题

1. 数域 P 上全体 n 阶对称矩阵所构成的线性空间的维数是________________.

2. 设 n 维向量空间 P^n 的两个子空间 V_1, V_2 满足 $V_1 \oplus V_2 = P^n$,则 $\dim V_1 + \dim V_2 =$_______.

3. 给出子空间的和 $V_1 + V_2$ 是直和的一个充要条件_____________________.

4. 设 n 维线性空间 V 的一组基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,则零元在此基下的坐标为_____________________,若 α 在此基下的坐标为 X ,则 $-\alpha$ 在此基下的坐标为__________.

5. 设线性空间 V 中由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 A ,向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 X (列向量),则 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标为_______.

6. 若 $s \times n$ 阵 A 的秩为 r ,则线性方程组 $AX = 0$ 的解空间的维数为___________.

7. 在线性空间 $P[x]_4$ 中,向量组 $f_1 = x+1, f_2 = x-1, f_3 = x^2+1, f_4 = x^2-1$ 的秩为_________.

8. 取线性空间 V 和子空间 V_1, V_2 ,则同时包含 V_1, V_2 的 V 的最小子空间是__________,同时包含于 V_1, V_2 的 V 的最大子空间是__________.

9. 将向量组 $\alpha_1 = (1,2,1,1), \alpha_2 = (2,1,1,1)$ 扩充成 P^4 的一组基,需添加的向量为_________________.

10. 数域 P 上两个线性空间 V 与 W 同构的充要条件是________________.

11. 把同构的子空间算做一类,则 n 维线性空间的子空间共有_______类?

12. 已知 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 5$, $\dim(V_1 + V_2) = 6$,则 $\dim(V_1 \cap V_2) =$___.

13. 已知 V_1, V_2, V_3 都是一线性空间的子空间,且 $\dim V_i = d_i$, $(i = 1,2,3)$, $\dim(V_1 + V_2 + V_3) = d$,

    则 $\dim((V_1 + V_2) \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2) =$________________________________.

14. 设 V_1 和 V_2 是 V 的子空间,若 $V_1 + V_2$ 是直和,则 $\dim(V_1 \cap V_2) =$_________________.

15. 设 $W = \{A \mid \mathrm{tr}(A) = 0, A \in P^{n\times n}\}$,其中 $tr(A)$ 表示 A 的迹,即 A 的主对角线上元素的和, W 是 $P^{n\times n}$ 的一个子空间,则 $\dim W =$_____________________.

16. 数域 P 上线性空间 V 中任一向量可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性表出,则 $\dim V$ ____ k (大小关系).

17. S_1 为 $P^{n\times n}$ 中全体下三角矩阵做成的数域 P 上的线性空间, S_2 为 $P^{n\times n}$ 中全体严格下三角矩阵(主对角线上元素都是 0 的下三角矩阵)做成的数域 P 上的线性空间,那么 $\dim S_1 =$____________, $\dim S_2 =$___________.

18. 已知 $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n - t = 0\}$ 为 P^n 的子空间,则 $t =$________.

19. 复数域作为实数域上的线性空间,维数是_______,一组基为________. 复数域作为复数域上的线性空间,维数等于__________,一组基为___________.

20. $x^2 + 2x + 3$ 在 $P[x]_4$ 的一组基 $x^3, x^3 + x, x^2 + 1, x + 1$ 下的坐标为________________.

二. 计算题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$,记 $W=\{B\mid AB=BA,B\in P^{3\times 3}\}$,求 W 的维数和一组基.

2. 已知 $f_1=1-x,\ f_2=1+x^2,\ f_3=x+2x^2$ 与 $g_1=x,g_2=1-x^2,g_3=1-x+x^2$ 是 $P[x]_3$ 中的两个向量组,

(1) 证明 $f_1,\ f_2,\ f_3$ 和 g_1,g_2,g_3 都是 $P[x]_3$ 的基, (2) 求由基 $f_1,\ f_2,\ f_3$ 到基 g_1,g_2,g_3 的过渡矩阵,

(3) 求 $f=1+2x+3x^2$ 分别在基 $f_1,\ f_2,\ f_3$ 与基 g_1,g_2,g_3 下的坐标.

3. 取 P^3 的两组基:$\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(0,1,-1),\alpha_3=(3,0,2)$ 与 $\beta_1=(6,6,5),\beta_2=(-1,-1,-2),\beta_3=(3,1,1)$

(1) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

(2) 求 $\xi\in P^3$,使得 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 (y_1,y_2,y_3),而在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{2}y_2,\frac{1}{2}y_3)$.

4. 给出 F^4 中向量组 $\alpha_1=\left(1,0,-1,0\right)^T,\alpha_2=\left(0,1,2,1\right)^T,\alpha_3=\left(2,1,0,1\right)^T$ 与向量组

$\beta_1=\left(-1,1,1,1\right)^T,\beta_2=\left(1,-1,-3,-1\right)^T,\beta_3=\left(-1,1,-1,1\right)^T$,令子空间 $V_1=L\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right),V_2=L\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$, 求

V_1+V_2 与 $V_1\bigcap V_2$ 的维数以及各自的一组基.

5. 已知两个齐次线性方程组(I) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+2x_2+x_4=0\end{cases}$ (II) $\begin{cases}-2x_1+x_2+6x_3-x_4=0\\-x_1+2x_2+5x_3-x_4=0\end{cases}$,

(1) 分别求(I)和(II)的解空间 V_1 和 V_2 的维数和一组基, (2) 求 V_1+V_2 和 $V_1\bigcap V_2$ 的维数和各自的一组基.

6. 求下列子空间的维数和一组基:

1) $L((2,-3,1),(1,4,2),(5,-2,4))\subseteq P^3$; 2) $L(x-1,1-x^2,x^2-x)\subseteq P[x]$;

3) $L\left(\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-3&3\end{pmatrix}\right)\subseteq P^{2\times 2}$.

三. 证明题:

1.设 $A\in P^{n\times n}$,且 $A^2=A$.记 $V_1=\{X\mid X\in P^n,(A-E)X=0\},V_2=\{X\mid X\in P^n,AX=0\}$,

(1) 证明 V_1,V_2 都是 P^n 的子空间; (2) 证明 $V_1\oplus V_2=P^n$.

2. 设 $A\in P^{n\times n}$,且 $A^2=E$.记 $V_1=\{X\mid X\in P^n,(A-E)X=0\},V_2=\{X\mid X\in P^n,(A+E)X=0\}$,

(1) 证明 V_1,V_2 都是 P^n 的子空间; (2) 证明 $V_1\oplus V_2=P^n$.

3. 设 W_1,W_2 为向量空间 V 的两个子空间, 证明:若 $W_1+W_2=W_1\bigcup W_2$, 则 $W_1\subseteq W_2$ 或 $W_2\subseteq W_1$.

4. 设 W 是 P^n 的一个非零子空间, 对 W 中的任一向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,或者 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$,或者每一个 a_i

都不等于零,证明: $\dim W = 1$.

5. 设 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 是数域 P 上线性空间 V 的 s 个维数相等的子空间,证明:在 V 中存在一个子空间 W,使得

$$V = W_1 \oplus W = \cdots = W_s \oplus W.$$

6. 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = X^T AX$ 是秩为 r 的半正定二次型, 证明方程 $X^T AX = 0$ 的全部解构成实数域上一个 $n-r$ 维的线性空间.
7. 设 V 为数域 P 上的一个 n ($n>1$)维线性空间,如果存在一个子空间 U,使得 $V = W \oplus U$,则称 U 是 W 在 V 中的补子空间.取 W 为 V 的一个非平凡子空间,证明 W 在 V 中的补子空间不唯一.