第　一　章

组合历史

组合数学是近几十年来发展迅速的一门数学分支。它的发展得益于计算机科学的推动，也得益于与其它数学分支越来越密切的联系。另一方面，组合数学在工程技术及其它自然科学学科和社会科学中也有广泛的应用。

早期的组合数学问题大多与趣味数学游戏联系在一起，那时候的组合数学主要是一些由天才的数学家解决的漂亮问题。当然，这些趣味数学的问题对组合数学的发展也起着重要的推动作用，如*Königsberg*七桥问题、Kirkman女生问题、四色问题等。近半个世纪以来，组合数学产生了一些系统和深刻的方法，如代数方法、拓扑方法和概率方法等。此外，几何、分析、表示论等数学分支中的很多问题实际上也都可以表述为组合问题，为利用组合数学的技巧和方法提供了可能。组合数学正以最体面的姿态跻身于主流数学的研究，其重要性也被越来越多的数学家所认识。

一般认为组合数学起源于东方，中国和印度在早期组合数学的发展史上占据着重要地位。中国的《易经》中已经蕴含了有限集合的子集个数的计数，古代印度的文化中已经蕴含了选择与排序的基本思想，虽然这些关于组合数学的萌芽并没有以明确的形式给出。近现代组合数学则是从17世纪开始的，其标志是Pascal关于二项式系数构成的Pascal三角的论著《Trait*é* du triangle arithm*é* tique》的出版。Pascal三角又被称为"杨辉三角"，这是因为在Pascal之前它已经出现在南宋数学家杨辉于1261年所著的《详解九章算法》一书中。

从Pascal的时代起，计数组合学逐渐得到发展。Pascal和Leibniz注意到代数表达式乘积中项的展开与合并对应于枚举特定类型的组合对象。18世纪时，deMoivre进一步发展了他们的思想，并用以确定$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ 展开式中各项的系数。deMoivre还发现了容斥原理，并用它证明了n个对象的错排个数公式。在此之前，Bernoulli和de Montmort用其它方式得到了这个错排公式。除显示公式外，生成函数（generating functions）也开始成为组合计数的一个重要工具，很多重要的组合序列最开始也都以生成函数的形式出现。例如，Catalan序列早在清朝数学家明安图于18世纪30年代所著的《割圆密率捷法》一书中就已作为无穷级数的系数出现。生成函数的使用需要对幂级数进行形式处理，最重要的一个运算是对幂级数反演，其中拉格朗日反演公式是组合计数的一个基本工具。在19世纪的一系列文章中，Blissard采用了与分析学家完全不同的技巧处理生成函数。他的方法包括展开级数并进而在合适的点处替换幂次为下标。类似的方法还被Lucas于1877年采用，Bell和Riordan也在这方面做了工作。容斥原理及默比乌斯反演是计数组合学的另一个重要工具。在数论中，利用筛法需要用到定义在正整数上的默比乌斯函

数的概念。在1935年左右，默比乌斯函数的概念独立地被Weisner、Hall和Ward推广到偏序集上。最初，偏序集的研究源于19世纪的Boole，Schröder和Dedekind等人，但是作为独立的研究对象是从20世纪30年代Birkhoff开始的。

作为组合数学的一个重要分支，整数分拆理论于17世纪由Leibniz开始研究，他在这方面有很多未发表的手稿。18世纪时，Euler继续了整数分拆理论的研究，得到分拆的生成函数公式、Euler分拆定理等许多影响深远的工作。利用图表研究分拆则是从Sylvester开始的，他本人给出了Euler分拆定理的双射证明，他的学生Franklin则给出了Euler五角数定理的简洁证明。在19世纪末20世纪初，MacMahon的工作开创了分拆研究的新局面。他撰写的《Combinatory analysis》可谓计数组合学方面的鸿篇巨著，包括了MacMahon主定理、平面分拆计数和对称函数理论等一系列工作。通过研究MacMahon关于分拆的个数的表格，Ramanujan还证明了一些同余关系。Ramanujan还发现了一些无穷乘积与无穷级数的等式，包括著名的Rogers-Ramanujan恒等式。20世纪40年代，Dyson进一步研究了Ramanujan同余关系，并猜想通过他引入的分拆的秩的概念可以给出Ramanujan同余。分拆理论中深刻的结果还有1926年的Schur分拆定理。Euler分拆定理、Rogers-Ramanujan恒等式、Schur分拆定理、Dyson猜想等对分拆理论的发展影响巨大。

图论是组合数学的另一个古老分支，主要研究用某种方式联系起来的若干事物之间的二元或多元关系。图论的发展起始于Euler关于K?nigsberg七桥问题的解答，他的这项工作也标志着拓扑学的开始。图论的一个重要发展是由Whitney引入的拟阵理论，用以抽象地描述线性无关性，后被Tutte大力发展。与此同时，四色问题、Hamilton圈问题等众多古老问题吸引了很多学者从事图论研究，对图论的发展起到了很大的推动作用。

Euler的36军官问题是现代组合设计理论的起源之一。Euler所讨论的拉丁方及正交拉丁方是组合设计的较早例子。组合设计理论的另一代表人物是Kirkman，他被认为是现代组合设计理论的奠基人，著名的"柯克曼女生问题"就是以他的名字命名的。Cayley和Sylvester也都曾在组合设计领域开展研究，主要是柯克曼女生问题的变形和推广。同时期的重要工作还包括1896年Moore将有限域引入组合设计的构造和1892年法诺Fano将有限射影几何引入组合设计，这些都加强了组合数学与其他数学分支的联系。

19世纪，随着群论的发展，它在组合数学中的应用也越来越广泛。在很多计数问题中，结构的等价性可以由对称群的作用来定义。这类计数问题的核心理论是轨道计数定理，有时又被称为Burnside引理或Cauchy-Frobenius引理。受MacMahon工作的启发，Redfield利用轨道计数定理做了很多重要工作。他的一个定理，后被Read于1959年独立发现，称为Redfield-Read 叠加定理，可用来解决许多计数问题。Pólya在20 世纪30年代中期的一系列文章中，结合生成函数和轨道计数定理形成了一套自己的方法，Pólya计数定理成为计数图和化学分子方面的里程碑式的工作。在树的计数方面，Cayley于1889年给出了标号树的计数公式。

鸽巢原理是现代Ramsey理论发展的前身，早在Gauss的《Disquisitiones Arithmeticae》中就已被使用，它还被Dirichlet用来研究无理数的有理逼近。Ramsey理论是现代组合集合论的一个重要分支，其标志性工作是1930年的Ramsey定理，1935年Erdös和Szekeres给出了这个理论的几何解释。Ramsey理论中经典的结果还包括关于正整数集合划分的Schur定理、关于单色等差数列的van der Waerden定理和关于齐次线性方程组解的Rado定理等。组合集合论中另外两个最有影响的

结果是1935年的Hall婚姻定理和1928年的Sperner定理。在相交系的研究方面，极值集合论的一个里程碑式的工作是Erd?s-Ko-Rado定理，同时期的重要工作还包括Kruskal-Katona定理。对组合集合论中上述经典定理的证明和推广构成了这个分支发展的主要动力。

字的组合学理论真正意义上的现代研究起始于20世纪初Thue的工作。1906年Thue证明了存在无穷长的无重复字母的字，1912年他又提出了现在被称为"Thue-Morse序列"的概念。Thue-Morse序列于1921 年被符号动力学的奠基人Morse重新发现，利用这个序列他证明了非周期一致回归点的存在性。Thue-Morse序列还被用来构造无穷长的无连续三次重复子字的二进制序列，从而否定了Burnside于1902年提出的一个著名问题：假设群的生成元有限且它们满足相同的关系$x^n = 1$，是否群必然是有限的？此外，自由李代数理论中的Poincare-Birkhoff-Witt定理与本原项链的个数密切相关，1937年Witt给出了k个字母集上的n长本原项链个数公式。字的组合学理论的发展，进一步体现了不同数学分支之间的密切联系。

可以说，组合数学是伴随着整个数学学科的发展而前进的。由于它涉及的领域比较广，上面提到的几个分支并不足以概述组合数学发展的全貌。然而，通过这些主要分支的历史的介绍，我们能够对组合数学的概况有所了解，能够对数学的整体性有更进一步的认识。有关组合数学更详细的介绍可参考[1]。

20世纪中叶以来，组合数学与数学其他分支的联系更加密切，它在计算机科学、生物学、物理学、化学等其他学科中的应用也越来越广泛。组合数学的一些经典分支重新焕发生机，一些新的分支也开始形成。

20世纪60年代，Rota深入研究了Weisner、Hall和Ward提出的偏序集上的广义M$\ddot{o}$bius函数，形成了现在应用广泛的M$\ddot{o}$bius反演理论。1988 年Rota获得美国数学会的Steele奖，获奖公告中称他1964年的文章《On the foundations of combinatorial theory, I. Theory of Möbius functions.》揭示了组合数学与代数、拓扑、几何等分支的联系，对其融入现代数学的主流起了重要作用。在级数反演方面另外一个重要工作是以Gould和中国数学家徐利治命名的Gould－Hsu反演，它在证明和发现组合恒等式中有重要应用。Rota和他的学派还进一步发展了Blissard的符号方法，形成了严格的"哑运算"理论，Bell和Riordan等人曾尝试过但未成功，当前这方面的研究主要是关于Sheffer序列的。在Rota和他带领的学派的发展下，代数组合学逐渐成为组合数学中一个活跃的新的分支。

代数组合学最显著的特色在于它与代数拓扑、代数几何、群表示论、交换代数等其他数学分支的深刻联系，代数方法在组合数学中的应用也取得很大成功。例如，1970年Crapo和Rota提出了利用有限域计算超平面特征多项式的思想，1980年Stanley利用代数几何中的强Lefschetz定理给出了高维多面体f-向量必要条件的刻画以及Erd$\ddot{o}$s-Moser猜想的证明，2001年Haiman利用希尔伯特概型证明了Macdonald正猜想和n!猜想，2012年Huh利用奇点理论证明了关于色多项式系数对数凹性的猜想。

MacMahon的平面分拆理论在Andrews、Macdonald、Stanley等人的发展下进一步丰富，与之相关的Young表和对称函数理论也得到快速发展。Young表对应于特殊的平面分拆，是由Young于1901年左右引入的。Young表有很多漂亮的性质，如RSK 算法、Sch$\ddot{u}$tzenberger对合等。RSK算法的思想最初是由Robinson于1938年研究Littlewood-Richardson法则时提出的，后被Schensted在1961年研究最长递增（递降）子序列时重新，Knuth则于1970年将RSK算法从普通排列推广到了广义置换上。RSK算法给出了Erd?s和Szekeres一个著名定理的推广，即任意$mn+1$个

不同的数构成的序列，要么存在$m+1$长的递降子序列，要么存在$n+1$长的递增子序列。在对称函数理论方面，当前主要研究对象包括Schur函数及其各种推广和变形，如阶乘Schur函数、Schubert多项式、Hall-Littlewood多项式、Jack多项式、Macdonald多项式、非交换变量对称函数等。关于平面分拆的另一个活跃的方向是具有某种对称性的平面分拆的计数，其中重要的工作包括全对称平面分拆猜想、交错符号矩阵猜想的研究和证明。此外，关于不交格路的Lindström-Gessel-Viennot方法不仅在研究平面分拆和对称函数方面有重要的应用，而且还被广泛用于研究各种类型行列式的非负性问题。

Ramsey理论继续得到数学家的关注，并催生了概率方法在组合数学中的应用，其标志性工作是1947年Erd?s的开创性成果：如果$\binom{n}{k}2^{1-\binom{n}{k-2}}<1$，那么存在一个含n个顶点的图使得其团数和独立数同时小于k。1961年，Erd$\ddot{o}$s 与Renyi开始了随机图论的系统研究，通过引入随机方法，用于证明某种性质的图的渐近存在性。古典概率论的发展过程中，涉及了许多的计数问题，从这个意义下讲组合数学对概率论的发展是起过作用的，而从Erd$\ddot{o}$s与Renyi开始，概率论又反过来帮助组合数学的研究。早期随机图论研究的一个重要工具是Lov$\acute{a}$sz 于1974年提出的Lov$\acute{a}$sz局部引理。Lov$\acute{a}$sz还开创了拓扑组合学的研究，其标志性工作是他于1978年利用代数拓扑学中的Borsuk-Ulam定理证明了Kneser猜想。概率方法的另一位代表人物是Alon，他在组合数学和理论计算机科学方面做了很多突出的工作，如在数论中有广泛应用的组合零点定理。概率论中的Berry-Esseen定理与组合数学也非常相关，Fulman利用此理论给出了特征比的一个界，这对研究对称群上由对换构成的随机行走的收敛性非常重要。

Szemer$\acute{e}$di定理是20世纪组合数论方面最重要的定理之一，它是由Erd$\ddot{o}$s和$Tur\acute{a}n$在1936年作为van der Waerden定理的推广以猜想形式提出的，1975年Szemer$\acute{e}$di完整地证明了Erd$\ddot{o}$s-Tur$\acute{a}$n猜想。Szemer$\acute{e}$di给出的证明完全是组合的，他所使用的Szemer$\acute{e}$di正规性引理已成为组合数学研究的一个重要工具。Szemer$\acute{e}$di 定理的其他重要证明包括1977年Furstenberg利用遍历理论给出的证明，2001年Gowers利用Fourier 分析和组合数学给出的证明。受Szemer$\acute{e}$di定理证明的启发，1979年Furstenberg和Weiss利用拓扑动力学理论统一地证明了Schur定理、van der Waerden定理以及组合数论中的一些其他重要定理。与Szemer$\acute{e}$di定理密切相关的另一个结果是Green-Tao定理，他们于2004年证明了素数序列中存在任意长的等差数列。Green-Tao定理是Erd?s关于等差数列猜想的一个特殊情形，Erd$\ddot{o}$s提出的一系列猜想也极大推动了组合数学和数论的发展。

20世纪50年代，字的组合学得到了系统的发展，代表性人物包括Sch$\ddot{u}$tzenberger、Novikov和Adian。《Combinatorics on Words》，《Algebraic Combinatorics on Words》和《Applied Combinatorics on Words》是这一领域的三本经典著作，对字的组合学多个研究方向进行了综述。以Sch$\ddot{u}$tzenberger为首的法国组合学派还建立了正交多项式的组合学理论。他们引入了诸如置换、树、匹配、划分、加权路等组合结构，给出了正交多项式系数的组合解释，并给出了正交多项式满足的恒等式的组合证明。当多项式含有参数时，一般将这些参数作为组合对象的某些加权，很多正交多项式已经找到了对应的组合结构。

组合恒等式的机器证明是20世纪组合数学的一项重大进展，其思想是Sister Celine于1945年提出的，而奠基性的工作则是1978年Gosper给出的求解超几何项不定和的算法。1990年，Zeilberger以Gosper算法为基础提出了一套证明组合恒等式的系统方法。同年，Wilf 和Zeilberger还提出了WZ方法。经过机器证明理论的进

一步发展，几乎所有的超几何类型恒等式都已能用计算机证明。关于超几何恒等式机器证明的思想还被用于研究基本超几何级数等式。近年来，基本超几何级数已经开始应用到基础数学和应用数学以及其它学科中。Andrews和Fine更是将基本超几何级数应用到数论、微分方程、李代数、组合、统计和物理等学科领域。而几乎所有的分拆定理都与组合恒等式或基本超几何级数有关。Andrews作为当代分拆理论的领袖人物对发展这个领域做出了重大贡献，他的著作《The Theory of Partitions》被公认为分拆理论的经典著作。在分拆理论方面，一个重要的工作是关于Dyson的crank猜想的研究，1954年Atkin和Swinnerton-Dyer证明了Ramanujan分拆同余模5和7的情形，1988年Andrews和Garvan找到一个crank函数统一的解释了模5、7和11的情况，2005年Mahlburg解决了Ono关于Ramanujan分拆同余一般情形的猜想。此外，利用模形式理论研究整数分拆的组合性质当前仍然是一个很活跃的研究方向。

在组合设计方面，20世纪下半叶以来，平衡不完全区组设计的研究受到重视，这方面的工作包括不同方式的推广以及它们与一些其他组合设计之间的联系。例如，正交拉丁方的存在性也依赖于成对平衡设计的概念和方法，阿达马矩阵与一类特殊的对称平衡不完全区组设计等价。在正交拉丁方研究方面，Bose等人于1959年否定了欧拉关于正交拉丁方的猜想。在平衡不完全区组设计方面，Hanani, Wilson, Ray-Chaudhuri等人做出了许多工作，其中一个重要工作是中国数学家完成的，1983年陆家羲解决了Steiner三元系大集的存在性难题，1984年他又给出了可分解区组设计的渐近性存在结果。计算机也逐渐被用于组合设计研究，例如1991年Lam利用计算机证明了不存在10阶的射影平面。现代组合设计理论主要研究各种离散结构的存在性问题、构造问题、计数问题和优化问题等，其基本内容、思想和方法已与计算机科学、信息科学、网络通讯理论乃至生物信息学等新兴学科相互交叉渗透。信息的数字化为组合设计理论在信息科学中的运用提供了广阔的舞台，同时也为组合设计理论的发展提供了巨大的源动力。有关的研究已成为当代组合设计研究领域的一个主流方向。

计算机科学的发展也使图论研究发生了深刻的变化。1976年，Appel和Haken证明了图论中著名的四色猜想，这是第一个借助计算机证明的重要数学定理。四色猜想的研究对结构图论、染色理论、代数图论、拓扑图论等分支的发展起到了极大的推动作用。除四色猜想外，其他一些重要的猜想也取得进展，如1972年Lovász关于Berge猜想（即弱完美图定理）的证明，2006年Chudnovsky、Robertson、Seymour和Thomas关于强完美图猜想的证明。对双圈覆盖猜想、Hadwiger猜想等的研究也促进了图论的发展。从1983年开始，Robertson和Seymour通过一系列工作，开创并发展了图子式理论，在图论界产生深刻的影响。在拟阵研究方面，代表性工作包括1980 年Seymour给出了正则拟阵的分解定理，1982年Kahn和Kung揭示了射影几何和Dowling几何在拟阵理论中扮演重要角色的本质原因，以及Geoff等人关于Rota提出的有限域上可表示拟阵的猜想（Rota's critical conjecture）的研究。另外，在应用图论解决化学、物理学、生物学、经济学、社会科学等学科的问题时，一些新的图论分支不断成长壮大，也吸引了众多学者参与研究。

总之，20世纪中叶以来，组合数学经历了一个大发展的时期，其内涵和外延都发生了深刻的变化。组合数学越来越被数学界所认可，一些著名数学家也积极参与到组合数学的研究中来，如Wolf奖获得者Erd?s、Furstenberg、Lovász，Fields奖获得者Gowers、Okounkov、Tao，Abel奖获得者Szemerédi，Turing奖获得者Knuth等。可以预见，组合数学将是21世纪数学研究的前沿领域之一。

组合数学的发展已呈现出了学科大融合的趋势。根据这个发展的态势，我们从众多的组合数学分支中，列出最有可能得到发展的其中几个方向。

a. 代数组合学在美国数学会"21世纪数学的挑战"大型研讨会上，"组合问题中的代数方法" 被列入纯数学中最具挑战性的方向之一。美国科学院院士、2006年国际数学家大会一小时报告人R.P. Stanley教授在该研讨会上做了关于代数组合学进展的大会报告。虽然,目前在代数组合学方面取得了一些非常重要的进展，但是还有很大的发展空间。代数方法在解决组合问题方面显示出的巨大威力，一方面会促使组合学者加强代数理论方面的基础，另一方面也会促使从事交换代数、群表示论或代数几何等研究的学者关注组合问题，这些都将影响着代数组合学的发展。

b. 概率组合学自从*Erdös*的开创性工作之后，组合学中的概率方法也得到极大的发展。以色列科学院院士N. Alon教授在2002年国际数学家大会一小时报告中曾指出概率方法和代数方法是研究组合数学的两个主要方法。随着信息时代的发展，越来越多的组合问题需要处理图、网络、矩阵等规模超大的结构。由于受到计算能力的限制，这些问题的研究对概率方法的需求也越来越迫切，同时对使用的概率论工具也提出了更高的要求。

c. 分析组合学分析组合学是用以实现超大规模组合结构性质的定量预测的，它不仅在算法分析方面有着重要的应用，而且在计算生物学、统计物理、信息论等分支中数学模型的研究方面发挥着重要作用。Rota曾经预言"生物学中的组合问题将成为组合数学的一个前沿领域"。随着基因测序技术的进步，生物信息数据每天也都在爆炸式增长，如何分析这些离散的序列结构已引起很多数学家的注意。随着大数据时代的到来，对组合算法的有效计算性分析将是一个关注的焦点，这些也决定了分析组合学将成为活跃的研究方向。

d. 拓扑组合学Lovász关于Kneser猜想的证明展示了拓扑学的经典结果在解决组合问题方面的魔力。此后，代数拓扑和微分拓扑相继被引入组合数学的研究，拓扑方法已经成为图的染色理论、算法复杂性问题、偏序集理论、项链问题等方面研究的强有力工具。当前，在图的染色理论、算法复杂性分析方面仍有很多挑战性的猜想，可以预见拓扑方法仍将会是研究这些问题的重要工具。

e. 构造组合学尽管其他数学分支在解决组合问题方面发挥着越来越强大的作用，但是它们往往提供的是非构造性的方法，如何实现算法化将是非常有意义的研究方向。当前，很多著名的猜想借助于其他工具得到解决，但是人们常常并不满足，如何利用纯组合的方法来证明也一直是大家关注的问题。例如，Appel和Haken借助计算机给出的四色猜想的证明最初并不被数学家所接受，尽管后来有了一些简化的证明，但还是需要依赖于计算机的协助。再如，Proctor利用线性代数给出了Erdös-Moser猜想的一个初等证明，但也仅是抛弃了代数几何的语言重写了Stanley的整个证明，纯组合的证明仍然没有找到。对数学定理完美证明的追求也将促进构造组合学的进一步发展。