第五章　习题选讲

1 5）解 $$\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & 1 & 1 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ 1 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 1 & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac12 \\ 0 & 0 & -\frac12 & -1 \\ 1 & -\frac12 & -1 & -1 \\ 1 & \frac12 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac34 \\ 1 & -\frac12 & -1 & -\frac12 \\ 1 & \frac12 & -1 & -\frac12 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6） $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac32 & -\frac12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac32 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 设 $f(X)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$, $g(Y)=\lambda_{i_1}y_1^2+\lambda_{i_2}y_2^2+\cdots+\lambda_{i_n}y_n^2$，证明 $f(X)$ 可经过非退化线性替换化为 $g(Y)$ 即可，所需线性替换为: $\begin{cases} y_1=x_{i_1}, \\ y_2=x_{i_2}, \\ \quad\vdots \\ y_n=x_{i_n} \end{cases}$.

4. (1) A 反对称,则 $A^T=-A$, $X^TAX=(X^TAX)^T=X^TA^TX=-X^TAX=X^TAX$,则 $X^TAX=0$,

反之,取标准单位向量 ε_i ,则 $\varepsilon_i^TA\varepsilon_i=a_{ii}=0$, $i=1,2,\cdots,n$,

$(\varepsilon_i+\varepsilon_j)^TA(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=a_{ij}+a_{ji}=0$,任给 i,j .

故 A 是反对称矩阵.

(2) 由(1), A 既是对称阵,又是反对称阵,从而 $A=0$.

6. $\Rightarrow$:设 $f(X)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)$,取系数组成的向量为 α,β

若 α,β 线性相关,设 $\beta=k\alpha$, $f(X)=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$,不妨设 $a_1\neq0$,

做线性替换 $\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ y_2 = x_2, \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$,则 $g(Y) = ky_1^2$,秩为1的二次型

若 α, β 线性相无关,不妨设 $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$,则令 $\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n, \\ y_3 = x_3, \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$,则 $f(X)$ 化为 $g(Y) = y_1y_2$,

再令, $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2, \\ y_2 = z_1 - x_2, \\ y_3 = z_3, \\ \quad \vdots \\ y_n = z_n \end{cases}$,则 $g(Y)$ 化为 $h(Z) = z_1^2 - z_2^2$,秩为 2 ,符号差为 0 .

$\Leftarrow$: 若秩为 2 符号差为 0 ,则二次型 $f(X)$ 可经非退化线性替换 $X = CY$ 化为 $g(Y) = y_1^2 - y_2^2$,

假设 $X = CY$ 中 $\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \end{cases}$,则 $g(Y) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$ 就是两个一次齐次多项式的乘积.

若秩为1,则二次型 $f(X)$ 可经非退化线性替换 $X = CY$ 化为 $g(Y) = ay_1^2$,仍然是两个一次齐次多项式的乘积.

7 3）而二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，其中行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{n-1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 1+\frac{n-1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+\frac{n-1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+\tfrac{n-1}{2}) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1+\tfrac{n-1}{2}) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (1+\tfrac{n-1}{2})\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$$

其k阶顺序主子式为$|A_k|=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1\end{vmatrix}(1+\frac{k-1}{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}>0$.

9. 证明: 由A构造二次型$f(X)=X^TAX$，正定. 假设主子式所在的行列为$i_1<i_2<\cdots<i_k$行列,设

$$A_k=\begin{pmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{pmatrix},\text{设}|A_k|=p_k.$$

做k元二次型$f_1(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=X_1^TA_kX_1$,任取不全零的数$c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k}$,则有

$f_1(c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k})=f(0,\cdots,c_{i_1},\cdots,c_{i_2},\cdots,c_{i_k},\cdots,0)>0$,二次型正定$A_k$正定,行列式大于零.

或者如下：对A进行合同变换,可把主子式A_k所在的$i_1<i_2<\cdots<i_k$行、列移到前k行前k列,即存在可逆矩阵C,使得$C^TAC=\begin{pmatrix}A_k & A_1\\ A_1^T & A_2\end{pmatrix}$, A正定,从而$C^TAC=\begin{pmatrix}A_k & A_1\\ A_1^T & A_2\end{pmatrix}$正定,从而$|A_k|=p_k>0$.

10. 考察$tE+A$的各阶顺序主子式,

$p_1=t+a_{11}>0,$ 则$t>-a_{11}$,

$p_2=\begin{vmatrix}t+a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & t+a_{22}\end{vmatrix}=t^2+(a_{11}+a_{22})t+*$,存在合适的$t_2$,使得$t>t_2$时，$p_2>0$.

$p_3=t^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2+*$,存在合适的$t_3$,使得$t>t_3$时，$p_3>0$.

$p_n=|tE+A|$是关于t的n次多项式,当$t\to+\infty$时，$|tE+A|\to+\infty$,故存在t_n,当$t>t_n$时，$p_n>0$.

从而存在合适的t_0,使得t_0E+A的各阶顺序主子式全为正，t_0E+A正定.

11. $A^{-1}=(A^{-1})^TAA^{-1}$, A^{-1}与A合同,正定. 或者$A=C^TC$,从而$A^{-1}=C^{-1}(C^T)^{-1}$,合同.

12. 证明: 由A,构造二次型$f(X)=X^TAX$,则存在非退化线性替换$X=CY$,化$f(X)=X^TAX$为规范形$g(Y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,而$|A|<0$,首先非零,从而二次型的秩为$n$,且负惯性指数大于零,从而规范形的形式为$g(Y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$,其中$n-p>0$,从而取$Y_0=(0,\cdots,0,1)^T$,则$g(Y_0)=-1<0$,令$X_0=CY_0$,非零向量,且$f(X_0)=g(Y_0)=-1<0$

13 证明 考察二次型$f(X)=X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$，任给非零向量$X_0$，

$f(X_0)=X_0^TAX_0+X_0^TBX_0>0$，正定，故矩阵 $A+B$ 正定.

15 证明 $\Leftarrow$ 若正惯性指数等于秩，则存在非退化线性替换 $X=CY$，二次型化为规范形 $g(Y)=y_1^2+\cdots+y_r^2$，半正定.

$\Rightarrow$ 反之，若二次型半正定，则存在非退化线性替换 $X=CY$，二次型化为规范形 $g(Y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，若 $p<r$，取列向量 $Y_0=\varepsilon_{p+1}$，$g(Y_0)=-1<0$，与半正定矛盾，故 $p=r$，正惯性指数等于秩.

16. 证明 由实对称阵 A,构造实二次型 $f(X)=X^TAX$,则存在非退化线性替换 $X=CY$,化

$f(X)=X^TAX$ 为规范形 $g(Y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,

存在非零向量 X_1,X_2,使得 $f(X_1)>0, f(X_2)<0$,从而正负惯性指数均大于零.则取

$Y_0=(1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$,有 $g(Y_0)=1-1=0$,令 $X_0=CY_0$,则 $f(X_0)=g(Y_0)=0$.

17 证明 证明线性方程组 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解.

首先, 若 $AX_0=0$, 则 $A^TAX_0=0$,即 $AX=0$ 的解是 $A^TAX=0$ 的解.

若 $A^TAX_0=0$, 则 $X_0^TA^TAX_0=0$, 即 $(AX_0)^TAX_0=0$, 设 $AX_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 则

$(AX_0)^TAX_0=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$, 从而 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$, 即 $AX_0=0$,

$A^TAX=0$ 的解是 $AX=0$ 的解. $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解, 从而 $n-r(A^TA)=n-r(A)$, 即 $r(A^TA)=r(A)$.

补充题

2. $$f(X)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=\sum_{i=1}^{s}X^T\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix}(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})X.$$

$$=\sum_{i=1}^{s}X^T\alpha_i^T\alpha_iX=X^T\left(\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^T\alpha_i\right)X=X^T\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_s\end{pmatrix}X=X^TA^TAX$$

4 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{11}&0\\A_{21}&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}$，即

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

5. 对阶数归纳.若 $n=1$,则 $A=(0)$ 成立,

$n=2$, $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$,若 $a_{12}=0$,成立. $a_{12}\neq 0$, $\begin{pmatrix} a_{12}^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12}^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.成立.

假设结论对 $n\le k$ 成立,对 $n=k+1$. $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & a_{kk+1} \\ -a_{1k+1} & \cdots & -a_{kk+1} & 0 \end{pmatrix}$,若最后一行元素全为零,则成立.

若不全为零.可经行列的相同的互换,使得 $(k,k+1)$ 位置的 $a_{kk+1}\neq 0$,第 $k+1$ 行、列乘 a_{kk+1}^{-1},得

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & a_{kk+1}^{-1}a_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & 1 \\ -a_{kk+1}^{-1}a_{1k+1} & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$,利用合同变换再化为 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & b_{1k-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{1k-1} & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,利用归纳假设,

再化为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 &&&&&&& \\ -1 & 0 &&&&&&& \\ && 0 & 1 &&&&& \\ && -1 & 0 &&&&& \\ &&&& 0 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& 0 & 1 \\ &&&&&&& -1 & 0 \end{pmatrix}$.再化简即可.

6. 由本章课后题 10，对实对称阵 A,存在合适的 t,使得 $tE-A$ 和 $tE+A$ 都是正定的.则任给列向量 X，$X^T(tE-A)X>0$， $X^T(tE+A)X>0$，即 $X^TAX<tX^TX, X^TAX>-tX^TX$，故

$-tX^TX<X^TAX<tX^TX$，即 $\left|X^TAX\right|<tX^TX$.

方法 2： $\left|X^TAX\right|=\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right|\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|\left|x_j\right|$，记 $a=\max\{\left|a_{ij}\right| \mid i,j\}$，则

$$\left|X^TAX\right|\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|\left|x_j\right|\le a\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i\right|\left|x_j\right|\le a\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_i^2+x_j^2}{2}=\frac{a}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i^2+x_j^2)=\frac{na}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{na}{2}X^TX$$

方法 3（应用第 9 章结论）*对实对称阵 A,存在正交矩阵 Q,使得 $Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵,

其中主对角线元素为矩阵 A 的特征值,设 $|\lambda_k| = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,则

$$\left|X^T AX\right| = \left|X^T QDQ^T X\right| = \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2\right| \le \sum_{i=1}^n \left|\lambda_i y_i^2\right| \le |\lambda_k| \sum_{i=1}^n y_i^2 = |\lambda_k| X^T QQ^T X = |\lambda_k| X^T X .$$

7. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{pmatrix}$,取特殊上三角阵 $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$,则

$T^T AT = \begin{pmatrix} T_1^T & 0 \\ T_2^T & T_3^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^T A_1 T_1 & * \\ ** & *** \end{pmatrix}$.而 $\left|T_1^T A_1 T_1\right| = |A_1|$,顺序主子式相同.

(2) $a_{11} \ne 0$.利用 a_{11} 把第一行和第一列的其余元素消为零,则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{2n} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

而 $a'_{22} = \dfrac{P_2}{a_{11}} \ne 0$,利用 a'_{22} 将第二行和第二列的其余元素消为零,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$,如此做下去.可找到

一个特殊上三角阵 T ,使得 $T^T AT$ 是一个对角阵.

归纳: 分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$,则 A_1 可逆,且可用归纳假设,

$$\begin{pmatrix} T_1^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^T A_1 T_1 & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

8. (1) $f(Y) = \begin{vmatrix} A & Y \\ Y^T & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & Y \\ 0 & -Y^T A^{-1} Y \end{vmatrix} = |A|\left|-Y^T A^{-1} Y\right| = -Y^T |A| A^{-1} Y$. A 正定, A^{-1} 也正定, $|A| > 0$,

从而 $|A| A^{-1}$ 正定,故 $f(Y) = -Y^T |A| A^{-1} Y$ 负定.

(2) $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$, A 正定,则 A_1 也正定, $|A| = \begin{vmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_1^{-1}\alpha \end{vmatrix} = |A_1|(a_{nn} - \alpha^T A_1^{-1}\alpha)$,

A_1 正定,故 $-\alpha^T A_1^{-1}\alpha \le 0$,从而 $a_{nn} - \alpha^T A_1^{-1}\alpha \le a_{nn}$,故 $|A| = |A_1|(a_{nn} - \alpha^T A_1^{-1}\alpha) \le a_{nn} P_{n-1}$.

(3) 利用(2)归纳即可.

(4) T 可逆,T^TT 正定,而$T^TT=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}t_{i1}^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum_{i=1}^{n}t_{i2}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{i=1}^{n}t_{in}^2\end{pmatrix}$,则由(3)得$\left|T^TT\right|\le\prod_{j=1}^{n}(t_{1j}^2+t_{2j}^2+\cdots+t_{nj}^2)$.