二、计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 法一

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -(n-1) & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-n+2n+(n-1)+\cdots+2+1)$$

$$= 1+\frac{n(n+1)}{2}$$

法二

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & \end{vmatrix} = \underbrace{1+\cdots+n-1}+n+1$$

$$2+\underbrace{1+2+3\cdots+(n-2)}+2(n-1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}+1$$

三、计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

四、利用克拉默法则求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$

五、n 阶行列式 D 中每个数 a_{ij} 分别用 2^{i-j} 乘所得的行列式记为 D_1，求行列式 D_1 的值.

三 法一

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(1-n)(-1)^n=(-1)^n(1-n)$$

法二

解

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & & & & \\ & -1 & 0 & & & \\ & & -1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

四. $D=3$ $D_1=3$ $D_2=6$ $D_3=9$

$x_1=\frac{D_1}{D}=1$ $x_2=\frac{D_2}{D}=2$ $x_3=\frac{D_3}{D}=3$

五

$D_1=2^{1+2+\cdots+n}\,2^{-1-2\cdots-n}\,D=D$