第八章：特殊计数序列

Outline

定义 1.1

给定非负整数n，称数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

为第n个*Catalan*数。

例 1.2

$$\begin{array}{ll} C_0 = 1 & C_5 = 42 \\ C_1 = 1 & C_6 = 132 \\ C_2 = 2 & C_7 = 429 \\ C_3 = 5 & C_8 = 1430 \\ C_4 = 14 & C_9 = 4862 \end{array}$$

定义 1.1

给定非负整数n，称数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

为第n个*Catalan*数。

例 1.2

$$\begin{array}{ll} C_0 = 1 & C_5 = 42 \\ C_1 = 1 & C_6 = 132 \\ C_2 = 2 & C_7 = 429 \\ C_3 = 5 & C_8 = 1430 \\ C_4 = 14 & C_9 = 4862 \end{array}$$

定理 1.3

由n个$+1$和n个-1构成的符合条件

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq 2n$$

的数列$a_1 a_2 \cdots a_{2n}$的个数为第n个*Catalan*数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

证明：用减法原理。设$\mathcal{S}_n$表示由n个$+1$和n个-1构成的所有数列，A_n表示$\mathcal{S}_n$中符合定理条件的数列所成之集，称这些数列为可接受的。令

$$U_n = \mathcal{S}_n \setminus A_n,$$

U_n中的数列称为不可接受的。

定理 1.3

由n个$+1$和n个-1构成的符合条件

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq 2n$$

的数列$a_1 a_2 \cdots a_{2n}$的个数为第n个*Catalan*数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

证明： 用减法原理。设$\mathcal{S}_n$表示由n个$+1$和n个-1构成的所有数列，A_n表示$\mathcal{S}_n$中符合定理条件的数列所成之集，称这些数列为可接受的。令

$$U_n = \mathcal{S}_n \setminus A_n,$$

U_n中的数列称为不可接受的。

则

$$|A_n| + |U_n| = |\mathcal{S}_n| = \binom{2n}{n}.$$

为证$|A_n| = C_n$, 只需证明

$$|U_n| = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n+1}. \tag{1}$$

令V_n表示$n+1$个$+1$和$n-1$个-1构成的数列所成之集。则

$$|V_n| = \binom{2n}{n+1}.$$

因此要证明(1)式，只需构造一个双射：$\varphi : U_n \longrightarrow V_n$ 即可。

则

$$|A_n| + |U_n| = |\mathcal{S}_n| = \binom{2n}{n}.$$

为证$|A_n| = C_n$, 只需证明

$$\begin{aligned} |U_n| &= \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \binom{2n}{n+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

令V_n表示$n+1$个$+1$和$n-1$个-1构成的数列所成之集。则

$$|V_n| = \binom{2n}{n+1}.$$

因此要证明(1)式，只需构造一个双射：$\varphi : U_n \longrightarrow V_n$ 即可。

给定数列$a_1a_2\cdots a_{2n}\in U_n$, 设$k$是满足条件

$$a_1+a_2+\cdots+a_k<0$$

的最小整数，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=0,\quad a_k=-1.$$

对任意$1\le i\le 2n$，令

$$b_i=\begin{cases}-a_i, & 1\le i\le k;\\ a_i, & k+1\le i\le 2n.\end{cases}$$

记$\varphi(a)=b_1b_2\cdots b_{2n}$.

即

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \Big\downarrow \varphi & & & & \\ -a_1 & \cdots & -a_{k-1} & -a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \Big\| & & & & \\ b = b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_{2n} \end{array}$$

显然，根据以上构造，$b \in V_n$且k是使得

$$b_1 + \cdots + b_k > 0$$

成立的最小整数。基于这一事实，容易验证$\varphi : U_n \to V_n$是双射。

即

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \Big\downarrow \varphi & & & & \\ -a_1 & \cdots & -a_{k-1} & -a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \Big\| & & & & \\ b = b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_{2n} \end{array}$$

显然，根据以上构造，$b \in V_n$且k是使得

$$b_1 + \cdots + b_k > 0$$

成立的最小整数。基于这一事实，容易验证$\varphi : U_n \to V_n$是双射。 ∎

例 1.4

$2n$个人排成一列进入剧场。入场费为50元。$2n$个人中的n个人各有一张面值为50元的人民币，另外n个人各有一张面值为100元的人民币。剧院用一个空的收银机开始售票。有多少种排队方法使得每个持100元的人购票时，售票处总有50元可以找零？

解： 根据手持的人民币面值将这$2n$个人分别用$+1, -1$标记，手持50元的标$+1$，100 元的标-1。则每一种符合条件的排队方法对应一个由n个$+1$和n个-1构成的可接受数列，根据定理1.3，这样的数列个数为

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

例 1.4

$2n$个人排成一列进入剧场。入场费为50元。$2n$个人中的n个人各有一张面值为50元的人民币，另外n个人各有一张面值为100元的人民币。剧院用一个空的收银机开始售票。有多少种排队方法使得每个持100元的人购票时，售票处总有50元可以找零？

解： 根据手持的人民币面值将这$2n$个人分别用$+1, -1$标记，手持50元的标$+1$，100 元的标-1。则每一种符合条件的排队方法对应一个由n个$+1$和n个-1构成的可接受数列，根据定理1.3，这样的数列个数为

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

在上述对应中，将持同样金额人民币的人之间任意交换位置，对应的是同一个可接受数列，因此对应同一个可接受数列的排队方式共有

$$n! \times n! = (n!)^2$$

种。从而所求的排队方法数为

$$C_n \times (n!)^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \times (n!)^2 = \frac{(2n)!}{n+1}.$$

∎

例 1.5

例. 一位律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走$2n$个街区去上班。如果她从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的上班路线？

解: 根据题意，可能的上班路线分为两类，一类在对角线上面，另一类在对角线下面。将路线关于对角线进行反射，可以得到两类路线之间的一一对应，因此我们只需求出在对角线上面的路线条数，再乘以2即可。

例 1.5

例. 一位律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走$2n$个街区去上班。如果她从不穿越（但可以碰到）从家到办公室的对角线，那么有多少条可能的上班路线？

解: 根据题意，可能的上班路线分为两类，一类在对角线上面，另一类在对角线下面。将路线关于对角线进行反射，可以得到两类路线之间的一一对应，因此我们只需求出在对角线上面的路线条数，再乘以2即可。

显然每一条上班路线都是按照某种顺序向北走和向东走，各走n个街区。用$+1$标识向北走一个街区，用-1标识向东走一个街区，则符合要求的上班路线与由n个$+1$ 和n个-1构成的可接受数列之间一一对应，因此条数等于第n个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

从而，符合条件的路线条数为

$$2C_n = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

∎

命题 1.6

*Catalan*数列满足如下递推关系和初始条件：

$$C_0 = 1$$
$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \ (n \geq 1).$$

证明:

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \times \frac{n!(n-1)!}{(2n-2)!}$$
$$= \frac{2n(2n-1)}{n(n+1)} = \frac{4n-2}{n+1}.$$

故$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$. ∎

命题 1.7

*Catalan*数还满足如下递推关系：

$$
\begin{aligned}
C_n &= C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-1-k}.
\end{aligned}
$$

Outline

定义 2.1

给定数列

$$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots. \tag{2}$$

称由$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$ 定义的数列

$$\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n, \ldots,$$

为数列(2)的一阶差分序列。一般的，若已定义数列(2) 的$p-1$阶差分序列

$$\Delta^{p-1} h_0, \Delta^{p-1} h_1, \Delta^{p-1} h_2, \ldots, \Delta^{p-1} h_n, \ldots,$$

则定义它的p阶差分序列为

$$\Delta(\Delta^{p-1} h_0), \Delta(\Delta^{p-1} h_1), \ldots, \Delta(\Delta^{p-1}(h_n)), \ldots$$

差分表：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 & & \cdots \\
& \Delta h_0 & & \Delta h_1 & & \Delta h_2 & & \Delta h_3 & & \cdots & \\
& & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 & & \cdots & & \\
& & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 & & \cdots & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

命题 2.2

设$\{g_n\}$和$\{f_n\}$是两个数列，c, d为两个常数。则对任意$p \geq 0$，

$$\Delta^p(cg_n + df_n) = c\Delta^p g_n + d\Delta^p f_n, \quad n \geq 0.$$

差分表：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 & & \cdots \\
& \Delta h_0 & & \Delta h_1 & & \Delta h_2 & & \Delta h_3 & & \cdots & \\
& & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 & & \cdots & & \\
& & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 & & \cdots & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

命题 2.2

设$\{g_n\}$和$\{f_n\}$是两个数列，c, d为两个常数。则对任意$p \geq 0$，

$$\Delta^p(cg_n + df_n) = c\Delta^p g_n + d\Delta^p f_n, \quad n \geq 0.$$

例 2.3

设$f_n = 3n + 1 \quad n \geq 0$，则数列$\{f_n\}$的差分表为

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & & 19 & & \cdots \\
& 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

例 2.4

设$h_n = 2n^2 + 3n + 1,\ \ n \geq 0$.则数列$\{h_n\}$的差分表为

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 6 & & 15 & & 28 & & 45 & & 66 & & 91 & & \cdots \\
& 5 & & 9 & & 13 & & 17 & & 21 & & 25 & & \cdots & \\
& & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

例 2.5

设$g_n = n^3 \quad n \geq 0$.则数列$\{g_n\}$的差分表为

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & 216 & & \cdots \\
 & 1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & \cdots & \\
 & & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \cdots & & \\
 & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

定理 2.6

设序列$\{h_n\}$的一般项为

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0.$$

则对任意$n \geq 0$，$\Delta^{p+1} h_n = 0$.

证明: 对p用数学归纳法。当$p = 0$时，h_n为常数序列，显然$\Delta h_n = 0$. 设$p \geq 1$，且当通项是次数$\leq p-1$的多项式的数列定理成立。由定义

$$\begin{aligned}\Delta h_n =& h_{n+1} - h_n \\ =& (a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \cdots + a_1(n+1) + a_0) \\ & - (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0)\end{aligned}$$

定理 2.6

设序列$\{h_n\}$的一般项为

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0.$$

则对任意$n \geq 0$，$\Delta^{p+1} h_n = 0$.

证明：对p用数学归纳法。当$p = 0$时，h_n为常数序列，显然$\Delta h_n = 0$. 设$p \geq 1$，且当通项是次数$\leq p-1$的多项式的数列定理成立。由定义

$$\begin{aligned}\Delta h_n =& h_{n+1} - h_n \\ =& (a_p (n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \cdots + a_1(n+1) + a_0) \\ & - (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0)\end{aligned}$$

由二项式定理，可知

$$a_p(n+1)^p - a_p n^p = a_p\left(n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + 1\right) - a_p n_p$$
$$= a_p \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + a_p.$$

因此Δh_n是关于n至多$p-1$次多项式。由归纳假设可知，

$$\Delta^p(\Delta h_n) = 0, \quad n \geq 0.$$

从而

$$\Delta^{p+1} h_n = 0, \quad n \geq 0.$$

定理 2.7

差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots, 0$$

的数列通项为

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \cdots + c_p\binom{n}{p}.$$

例 2.8

数列$h_n = n^3 + 3n^2 - 2n + 1 (n \geq 0)$对应的差分表为

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 3 & & 17 & & 49 & & 105 & & \cdots \\
& 2 & & 14 & & 32 & & 56 & & \cdots & \\
& & 12 & & 18 & & 24 & & \cdots & & \\
& & & 6 & & 6 & & \cdots & & & \\
& & & & 0 & & \cdots & & & &
\end{array}$$

第0条对角线为

$$1, 2, 12, 6, 0, 0, \ldots$$

因此，

$$h_n = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$$

定理 2.9

设序列$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的差分表的第0条对角线为

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots$$

则

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \cdots + c_p\binom{n+1}{p+1}.$$

证明：由定理2.7及公式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$$

即可证明。

例 2.10

计算$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$。

解：令$h_n=n^4$. 则对应的差分表为

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & & \cdots \\
& 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & \cdots & \\
& & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & \cdots & & \\
& & & 36 & & 60 & & 84 & & \cdots & & & \\
& & & & 24 & & 24 & & \cdots & & & & \\
& & & & & 0 & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

例 2.10

计算$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$。

解： 令$h_n=n^4$. 则对应的差分表为

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & & \cdots \\
& 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & \cdots & \\
& & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & \cdots & & \\
& & & 36 & & 60 & & 84 & & \cdots & & & \\
& & & & 24 & & 24 & & \cdots & & & & \\
& & & & & 0 & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

其第0条对角线为

$$0,\ 1,\ 14,\ 36,\ 24,\ 0,\ 0,\ \cdots$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = 1\binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}.$$

∎

Outline

定义 3.1

设$h_n = n^p$，其差分表第0条对角线为

$$c(p,0), c(p,1), c(p,2), \cdots, c(p,p), 0,\ 0, \cdots$$

对$0 \le k \le p$，称

$$S(p,k) = \frac{c(p,k)}{k!}$$

为第二类*Stirling*数。

例 3.2

当$p=4$时，由于$h_n=n^4$的差分表第0条对角线为

$$0,\ 1,\ 14,\ 36,\ 24,\ 0,\ 0,\ \cdots.$$

因此

$$S(4,0)=\frac{0}{0!}=0,\qquad S(4,1)=\frac{1}{1!}=1,\qquad S(4,2)=\frac{14}{2!}=7$$

$$S(4,3)=\frac{36}{3!}=6,\qquad S(4,4)=\frac{24}{4!}=1.$$

例 3.2

当$p=4$时，由于$h_n=n^4$的差分表第0条对角线为

$$0,\ 1,\ 14,\ 36,\ 24,\ 0,\ 0,\ \cdots.$$

因此

$$S(4,0)=\frac{0}{0!}=0,\qquad S(4,1)=\frac{1}{1!}=1,\qquad S(4,2)=\frac{14}{2!}=7$$

$$S(4,3)=\frac{36}{3!}=6,\qquad S(4,4)=\frac{24}{4!}=1.$$

记

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1), & k \geq 1; \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} n^p &= c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + c(p,2)\binom{n}{2} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p} \\ &= c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + c(p,2)\frac{[n]_2}{2!} + \cdots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!}, \end{aligned}$$

因此

$$n^p = S(p,0)[n]_0 + S(p,1)[n]_1 + S(p,2)[n]_2 + \cdots + S(p,p)[n]_p. \tag{3}$$

记

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1), & k \geq 1; \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} n^p &= c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + c(p,2)\binom{n}{2} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p} \\ &= c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + c(p,2)\frac{[n]_2}{2!} + \cdots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!}, \end{aligned}$$

因此

$$n^p = S(p,0)[n]_0 + S(p,1)[n]_1 + S(p,2)[n]_2 + \cdots + S(p,p)[n]_p. \tag{3}$$

记

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1), & k \geq 1; \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} n^p &= c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + c(p,2)\binom{n}{2} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p} \\ &= c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + c(p,2)\frac{[n]_2}{2!} + \cdots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!}, \end{aligned}$$

因此

$$n^p = S(p,0)[n]_0 + S(p,1)[n]_1 + S(p,2)[n]_2 + \cdots + S(p,p)[n]_p. \tag{3}$$

根据定义可知，

$$S(p,0)=c(p,0)=\begin{cases}0, & p\geq 1;\\ 1, & p=0.\end{cases}$$

展开式(3)两端比较n^p的系数可知

$$S(p,p)=1.$$

定理 3.3

对$1\leq k\leq p-1$,有

$$S(p,k)=S(p-1,k-1)+kS(p-1,k).$$

根据定义可知，

$$S(p,0)=c(p,0)=\begin{cases}0, & p\ge 1;\\ 1, & p=0.\end{cases}$$

展开式(3)两端比较n^p的系数可知

$$S(p,p)=1.$$

定理 3.3

对$1\le k\le p-1$,有

$$S(p,k)=S(p-1,k-1)+kS(p-1,k).$$

证明：由于

$$n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k, \quad n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k.$$

因此

$$\begin{aligned} n^p = n \times n^{p-1} &= n \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k) n [n]_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k \end{aligned}$$

证明：由于

$$n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k, \quad n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k.$$

因此

$$\begin{aligned} n^p = n \times n^{p-1} &= n \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k) n [n]_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k \end{aligned}$$

证明：由于

$$n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k, \quad n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k.$$

因此

$$\begin{aligned} n^p = n \times n^{p-1} &= n \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k) n [n]_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k)[n]_k + \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)k[n]_k \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} S(p-1,k-1)[n]_k + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k \\
&= S(p-1,p-1)[n]_p + + \sum_{k=1}^{p-1} (S(p-1,k-1) + kS(p-1,k))[n]_k.
\end{aligned}
$$

即

$$\sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$$

$$= S(p-1,p-1)[n]_p + \sum_{k=1}^{p-1}(S(p-1,k-1) + kS(p-1,k))[n]_k,$$

等式两端比较$[n]_k$的系数得

$$S(p,k) = S(p-1,k-1) + kS(p-1,k).$$

∎

根据上述递推关系及初始值:

$$S(p,0)=0\ (p\geq 1),\quad S(p,p)=1\ (p\geq 0).$$

可得$S(p,k)$对应的三角形如下：

$p\diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

命题 3.4

(1) $S(p,0)=0 \quad (p\geq 1)$

(2) $S(p,1)=1 \quad (p\geq 1)$

(3) $S(p,2)=2^{p-1}-1 \quad (p\geq 2)$

(4) $S(p,p-1)=\binom{p}{2} \quad (p\geq 1)$

(5) $S(p,p)=1 \quad (p\geq 0)$.

命题 3.4

(1) $S(p,0)=0\quad(p\geq 1)$

(2) $S(p,1)=1\quad(p\geq 1)$

(3) $S(p,2)=2^{p-1}-1\quad(p\geq 2)$

(4) $S(p,p-1)=\binom{p}{2}\quad(p\geq 1)$

(5) $S(p,p)=1\quad(p\geq 0)$.

命题 3.4

(1) $S(p,0)=0 \quad (p\geq 1)$

(2) $S(p,1)=1 \quad (p\geq 1)$

(3) $S(p,2)=2^{p-1}-1 \quad (p\geq 2)$

(4) $S(p,p-1)=\binom{p}{2} \quad (p\geq 1)$

(5) $S(p,p)=1 \quad (p\geq 0)$.

命题 3.4

(1) $S(p,0)=0 \quad (p\geq 1)$

(2) $S(p,1)=1 \quad (p\geq 1)$

(3) $S(p,2)=2^{p-1}-1 \quad (p\geq 2)$

(4) $S(p,p-1)=\binom{p}{2} \quad (p\geq 1)$

(5) $S(p,p)=1 \quad (p\geq 0)$.

命题 3.4

(1) $S(p,0)=0 \quad (p\geq 1)$

(2) $S(p,1)=1 \quad (p\geq 1)$

(3) $S(p,2)=2^{p-1}-1 \quad (p\geq 2)$

(4) $S(p,p-1)=\binom{p}{2} \quad (p\geq 1)$

(5) $S(p,p)=1 \quad (p\geq 0)$.

定理 3.5

第二类*Stirling*数$S(p,k)$是将一个p-元集划分成k个非空子集的划分的个数。

证明：设$\Pi(p,k)$表示将一个p-元集$P=\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$划分成k个非空子集的所有划分作成的集族，记$S^*(p,k)=|\Pi(p,k)|$. 则显然有

$$S^*(p,0)=0 \quad S^*(p,p)=1 \quad (p\geq 1)$$

因此只需证明当$1\leq k\leq p-1$时，有

$$S^*(p,k)=S^*(p-1,k-1)+kS^*(p-1,k).$$

定理 3.5

第二类Stirling数$S(p,k)$是将一个p-元集划分成k个非空子集的划分的个数。

证明：设$\Pi(p,k)$表示将一个p-元集$P=\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$划分成k个非空子集的所有划分作成的集族，记$S^*(p,k)=|\Pi(p,k)|$. 则显然有

$$S^*(p,0)=0 \qquad S^*(p,p)=1 \quad (p\geq 1)$$

因此只需证明当$1\leq k\leq p-1$时，有

$$S^*(p,k)=S^*(p-1,k-1)+kS^*(p-1,k).$$

令

$$\Pi_1(p,k)=\{\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}\in\Pi(p,k)\mid \text{存在某个i，使得}B_i=\{a_p\}\},$$

$$\Pi_2(p,k)=\{\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}\in\Pi(p,k)\mid B_i\setminus\{a_p\}\neq\emptyset,1\leq i\leq k\}$$

即$\Pi_1(p,k)$表示$\Pi(p,k)$中那些包含单点集$\{a_p\}$的所有划分,而$\Pi_2(p,k)$表示不包含单点集$\{a_p\}$的所有划分。

不难得知，$\Pi_1(p,k)$中的任意一个划分可按以下步骤唯一确定：先将

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_{p-1}\}$$

划分成$k-1$ 个非空子集，再与$\{a_p\}$这个单点集一起构成P的划分。因此

$$|\Pi_1(p,k)|=S^*(p-1,k-1).$$

令

$$\Pi_1(p,k)=\{\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}\in\Pi(p,k)\mid \text{存在某个i，使得}B_i=\{a_p\}\},$$

$$\Pi_2(p,k)=\{\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}\in\Pi(p,k)\mid B_i\setminus\{a_p\}\neq\emptyset,1\leq i\leq k\}$$

即$\Pi_1(p,k)$表示$\Pi(p,k)$中那些包含单点集$\{a_p\}$的所有划分,而$\Pi_2(p,k)$表示不包含单点集$\{a_p\}$的所有划分。

不难得知，$\Pi_1(p,k)$中的任意一个划分可按以下步骤唯一确定：
先将

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_{p-1}\}$$

划分成$k-1$ 个非空子集，再与$\{a_p\}$这个单点集一起构成P的划分。因此

$$|\Pi_1(p,k)|=S^*(p-1,k-1).$$

而$\Pi_2(p,k)$中的任意一个划分可以按照以下步骤得到:

(1) 先将$\{a_1, a_2, \ldots a_{p-1}\}$划分成$k$个非空子集;

(2) 再将a_p放入k个子集中的任一个中。

由此可见

$$|\Pi_2(p,k)| = S^*(p-1,k) \times k.$$

从而

$$\begin{aligned}|\Pi(n,k)| &= |\Pi_1(n,k)| + |\Pi_2(n,k)| \\ &= S^*(p-1,k-1) + kS^*(p-1,k).\end{aligned}$$

注： $S(p,k)$还可以理解为将p个不同的物体放入k个完全相同的盒子中，使得每个盒子非空的方法数。

而$\Pi_2(p,k)$中的任意一个划分可以按照以下步骤得到:

(1) 先将$\{a_1, a_2, \ldots a_{p-1}\}$划分成$k$个非空子集;

(2) 再将a_p放入k个子集中的任一个中。

由此可见

$$|\Pi_2(p,k)| = S^*(p-1,k) \times k.$$

从而

$$\begin{aligned}|\Pi(n,k)| &= |\Pi_1(n,k)| + |\Pi_2(n,k)| \\ &= S^*(p-1,k-1) + kS^*(p-1,k).\end{aligned}$$

∎

注： $S(p,k)$还可以理解为将p个不同的物体放入k个完全相同的盒子中，使得每个盒子非空的方法数。

定理 3.6

设$S^{\#}(p,k)$表示将p个物体放入k个可区分的盒子且每个盒子非空的方法数。则

$$S^{\#}(p,k)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p.$$

从而

$$S(p,k)=\frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p.$$

证明：设U表示将p个物体放入k个盒子：$B_1, B_2, \ldots, B_k$的所有方案作成的集合，A_i表示其中第i个盒子B_i为空集的方案作成的集合。则

$$S^{\#}(p,k) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k|.$$

对任意$1 \le t \le k$，集合

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}$$

表示将p个物体放入k个可区分的盒子，且其中$B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_t}$是空盒的方案作成的集合。因此每一个物体都可以被放进剩下的$k-t$个盒子中的任一个。从而

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (k-t)^p.$$

证明：设U表示将p个物体放入k个盒子：$B_1, B_2, \ldots, B_k$的所有方案作成的集合，A_i表示其中第i个盒子B_i为空集的方案作成的集合。则

$$S^{\#}(p, k) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k|.$$

对任意$1 \leq t \leq k$，集合

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}$$

表示将p个物体放入k个可区分的盒子，且其中$B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_t}$是空盒的方案作成的集合。因此每一个物体都可以被放进剩下的$k-t$个盒子中的任一个。从而

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (k-t)^p.$$

由容斥原理可知，

$$
\begin{aligned}
S^{\#}(p,k) &= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k| \\
&= |U| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le k} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \\
&= k^p - \binom{k}{1}(k-1)^p + (-1)^2\binom{k}{2}(k-2)^p + \cdots + (-1)^k (k-k)^p \\
&= \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p.
\end{aligned}
$$

∎

定义 3.7

将一个p-元集划分成非空子集的方法数称为*Bell*数，记为B_p，即

$$B_p = S(p,0) + S(p,1) + \cdots + S(p,p).$$

例 3.8

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5$$
$$B_4 = 15, \ B_5 = 52, \ B_6 = 203, \ B_7 = 877.$$

定义 3.7

将一个p-元集划分成非空子集的方法数称为*Bell*数，记为B_p，即

$$B_p = S(p,0) + S(p,1) + \cdots + S(p,p).$$

例 3.8

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5$$
$$B_4 = 15, \; B_5 = 52, \; B_6 = 203, \; B_7 = 877.$$

定理 3.9

对$p \geq 1$，有

$$B_p = \binom{p-1}{0}B_0 + \binom{p-1}{1}B_1 + \cdots + \binom{p-1}{p-1}B_{p-1}.$$

证明: 设$P = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$。$X$表示$P$的所有划分作成的集族。则$|X| = B_p$。对任意$1 \leq i \leq p$，令

$$X_i = \{\sigma \in X \mid 在划分\sigma中a_p所在的部分有i个元素\}$$

则

$$X = X_1 \uplus X_2 \uplus \cdots \uplus X_p.$$

定理 3.9

对$p \geq 1$，有

$$B_p = \binom{p-1}{0}B_0 + \binom{p-1}{1}B_1 + \cdots + \binom{p-1}{p-1}B_{p-1}.$$

证明: 设$P = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$。$X$表示$P$的所有划分作成的集族。则$|X| = B_p$。对任意$1 \leq i \leq p$，令

$$X_i = \{\sigma \in X \mid \text{在划分}\sigma\text{中}a_p\text{所在的部分有}i\text{个元素}\}$$

则

$$X = X_1 \uplus X_2 \uplus \cdots \uplus X_p.$$

对任意$1 \le i \le p$，X_i中的划分可以通过以下步骤得到:

- 首先在除去a_p以外的$p-1$个元素中任意选$i-1$个与a_p一起构成一个部分A；
- 选定剩下的$p-i$元集的一个划分，将A加入这个划分，得到X_i的一个划分。

因此

$$|X_i| = \binom{p-1}{i-1} B_{p-i} = \binom{p-1}{p-i} B_{p-i}.$$

从而

$$\begin{aligned} B_p &= |X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_p| \\ &= \binom{p-1}{p-1} B_{p-1} + \binom{p-1}{p-2} B_{p-2} + \cdots + \binom{p-1}{0} B_0. \end{aligned}$$

∎

定义 3.10

设

$$[n]_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} s(p,k) n^k,$$

则称$s(p,k)$为第一类*Stirling*数.

例 3.11

$$[n]_0 = 1;$$
$$[n]_1 = n;$$
$$[n]_2 = n(n-1) = n^2 - n;$$
$$[n]_3 = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n;$$
$$[n]_4 = n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$$

所以，

$$s(0,0) = 1;$$
$$s(1,0) = 0, s(1,1) = 1;$$
$$s(2,0) = 0, s(2,1) = 1, s(2,2) = 1;$$
$$s(3,0) = 0, s(3,1) = 2, s(3,2) = 3, s(3,3) = 1;$$
$$s(4,0) = 0, s(4,1) = 6, s(4,2) = 11, s(4,3) = 6, s(4,4) = 1.$$

定理 3.12

设$1 \leq k \leq p-1$，则

$$s(p,k) = s(p-1,k-1) + (p-1)s(p-1,k).$$

证明：由于

$$[n]_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} s(p,k) n^k,$$

因此，

$$\begin{aligned}
[n]_p &= [n]_{p-1}(n-(p-1)) \\
&= (n-(p-1)) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} s(p-1,k) n^k \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} s(p-1,k) n^{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} (p-1) s(p-1,k) n^k \\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} s(p-1,k-1) n^k + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} (p-1) s(p-1,k) n^k.
\end{aligned}$$

比较n^k的系数即可完成证明。 ∎

定理 3.13

第一类Stirling数$s(p,k)$是将p个物体排成k个非空循环排列的方法数。

证明：设将p个物体排成k个非空的循环排列的方法数为$s^*(p,k)$，则

$$s^*(p,p)=1,\quad p\geq 1$$
$$s^*(p,0)=0,\quad p\geq 1.$$

因此只需证明对$1\leq k\leq p-1$，有

$$s^*(p,k)=s^*(p-1,k-1)+(p-1)s^*(p-1,k).$$

令$P=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$，当$1\leq k\leq p-1$时，P的满足条件的排法可以分成互不相交的两类：

定理 3.13

第一类Stirling数$s(p,k)$是将p个物体排成k个非空循环排列的方法数。

证明：设将p个物体排成k个非空的循环排列的方法数为$s^*(p,k)$，则

$$s^*(p,p)=1,\quad p\geq 1$$
$$s^*(p,0)=0,\quad p\geq 1.$$

因此只需证明对$1\leq k\leq p-1$，有

$$s^*(p,k)=s^*(p-1,k-1)+(p-1)s^*(p-1,k).$$

令$P=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$，当$1\leq k\leq p-1$时，P的满足条件的排法可以分成互不相交的两类：

- 第一类：在这一类的排法中，元素a_p 单独地形成一个循环排列;
- 第二类：在这一类的排法中，元素a_p 和其它元素一起形成一个循环排列.

第一类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成$k-1$个非空循环排列，然后加上只有a_p的循环排列;

第二类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成k个非空循环排列，然后将a_p加入到这k个循环排列中的任意一个中，共有$p-1$种加入方式。

- 第一类：在这一类的排法中，元素a_p 单独地形成一个循环排列;
- 第二类：在这一类的排法中，元素a_p 和其它元素一起形成一个循环排列.

第一类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成$k-1$个非空循环排列，然后加上只有a_p的循环排列；

第二类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成k个非空循环排列，然后将a_p加入到这k个循环排列中的任意一个中，共有$p-1$种加入方式。

- 第一类：在这一类的排法中，元素a_p 单独地形成一个循环排列;
- 第二类：在这一类的排法中，元素a_p 和其它元素一起形成一个循环排列.

第一类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成$k-1$个非空循环排列，然后加上只有a_p的循环排列；

第二类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成k个非空循环排列，然后将a_p加入到这k个循环排列中的任意一个中，共有$p-1$种加入方式。

- 第一类：在这一类的排法中，元素a_p 单独地形成一个循环排列;
- 第二类：在这一类的排法中，元素a_p 和其它元素一起形成一个循环排列.

第一类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成$k-1$个非空循环排列，然后加上只有a_p的循环排列；

第二类中的排法可以看成是先将集合

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$$

中的元排成k个非空循环排列，然后将a_p加入到这k个循环排列中的任意一个中，共有$p-1$种加入方式。

因此第一类的排法有$s^*(p-1,k-1)$个，而第二类中的排法有$(p-1)s^*(p-1,k)$个，故

$$s^*(p,k) = s^*(p-1,k-1) + (p-1)s^*(p-1,k).$$

作业：

- P_{195}：习题6
- P_{195}：习题7
- P_{195}：习题8
- P_{196}：习题11
- P_{196}：习题12
- P_{196}：习题15
- P_{196}：习题19