1　排列统计量

排列的各种统计量是组合数学研究的一个重要课题，对排列统计量的研究可以使我们更清楚的了解排列的内部结构。下面我们就介绍一些在排列上十分熟知的统计量。

位置 $i(1 \leqslant i < n)$ 称为是 π 的一个下降位 (descent) 如果 $\pi_i > \pi_{i+1}$；反之则称为 π 的上升位 (acscent). 定义所有下降位构成的集合

$$\mathrm{Des}(\pi) = \{i|\pi_i > \pi_{i+1}\}$$

为 π 的下降集 (descent set), 定义该集合的个数为 $\mathrm{des}(\pi) = |\mathrm{Des}(\pi)|$ 为 π 的下降数。由定义 $n \notin \mathrm{Des}(\pi)$. 同时我们定义一个排列的主指标 (major index) 为

$$\mathrm{maj}(\pi) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(\pi)} i.$$

如果位置 i 满足 $\pi_i > i$, 则称 i 是一个胜位 (excedance), 若 i 满足 $\pi_i \geq i$, 则称 i 是弱胜位 (weak excedance). 我们记 π 的所有胜位的个数为 $\mathrm{exc}(\pi)$.

一对元素 (i, j) 称为是一个逆序 (inversion)，如果满足 $i < j$ 且 $\pi_i > \pi_j$, 称 π 的所有逆序的个数为 π 的逆序数，记作 $\mathrm{inv}(\pi)$.

对于排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, 定义其逆为其作为映射的逆, 即 $\pi^{-1} = \pi^{-1}(1)\pi^{-1}(2)\cdots\pi^{-1}(n)$; 定义其反为 $\pi^r = \pi_n\pi_{n-1}\ldots\pi_1$; 定义其补为 $\pi^c = (n+1-\pi_1)(n+1-\pi_2)\cdots(n+1-\pi_n)$, 显然它们三个都是 S_n 上自然的一一映射。

例 1.1 *对于* $[5]$ *上的排列* $\pi = 43521$, *以上的统计量分别为:* $\mathrm{Des}(\pi) = \{1, 3, 4\}$, $\mathrm{des}(\pi) = 3$, $\mathrm{maj}(\pi) = 1 + 3 + 4 = 8$, $\mathrm{exc}(\pi) = 3$, $\mathrm{inv}(\pi) = 7$.

1.1　下降数与胜位的等分布性质

我们称两个统计量 u, v 在某个集合 S 上是等分布的 (equidistribute)，若对于任意的自然数 k, 有 $\#\{x \in S|u(x) = k\} = \#\{x \in S|v(x) = k\}$.

定理 1.2 *exc 与 des 在* S_n *上是等分布的。*

一般而言, 证明两个统计量的等分布性有两个主要的思路: 一个是组合证明, 即寻找所在集合的一个到自身的双射；另一个是代数证明，即证明二者有相同的生成函数。

证明　组合证明:

在证明之前，先引入排列的另一种表示形式——圈表示。对于任意 $x \in [n]$, 考虑序列 $x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots$, 最终一定形成一个圈（因为 π 是双射且 $[n]$ 是有限集）。对所有的元素寻找这样的圈，我们可以把排列 π 写成若干个不交圈的并的形式。这种形式显然不是唯一的，首先，圈之间的顺序可以任意，其次，圈内部的圈排列也有不同的表示。为保证其唯一性，我们定义如下标准圈表示形式:

a. 每个圈的最大元素放在首位;

b. 圈按照其最大元从小到大排列。

可以证明，以上的标准圈表示形式存在且唯一的。

对于任意一个排列 $\pi \in S_n$，我们考虑其标准圈表示，并将标准圈表示的圈去掉，这样就得到 $[n]$ 上的一个新的排列 π'，可以证明 $\pi \to \pi'$ 必然是 S_n 上的双射。事实上，对于任意 $\pi \in S_n$, 取其自左向右极大元（即满足对于任意 $j < i$, $\pi_j > \pi_i$ 的元素 π_i）。在相应位置加括号就可以得到上述映射的逆映射。

我们利用以上映射证明我们的结论，只需要证明对于任意的 $\pi \in S_n$, $\mathrm{exc}(\pi) = \mathrm{des}(\pi')$. 事实上，考虑 π 的补排列 π^c 的标准圈表示形式，π 的每一个胜位恰好对应到 $(\pi^c)'$ 的一个下降位。命题得证。 ∎

一般地，称与 des 在 S_n 上等分布的统计量为 Eulerian 的.

1.2 逆序数与主指标

首先我们用代数的方法来给出逆序数的生成函数。

定理 1.3

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}). \tag{1}$$

证明 对任意的 $\pi \in S_n$, 定义其对应的逆序表 (inversion table) 为 $I(\pi) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 其中 a_i 为在 i 左边且比 i 大的元素的个数。例如 $\pi = 417396285$, 则 $I(\pi) = (1,5,2,0,4,2,0,1,0)$. 由定义容易看出

$$I(n) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : 0 \le a_i \le n-i\} = [0, n-1] \times [0, n-2] \times [0,1] \times [0, n].$$

且 $I(n)$ 与 S_n 是一一对应的。

因此从上面的分析可知

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} &= \sum_{a_1=0}^{n-1} \sum_{a_2=0}^{n-2} \cdots \sum_{a_n=0}^{0} q^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \\
&= \sum_{a_1=0}^{n-1} q^{a_1} \sum_{a_2=0}^{n-2} q^{a_2} \cdots \sum_{a_n=0}^{0} q^{a_n} \\
&= (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).
\end{aligned}$$

∎

下面是置换与其逆之间的逆序数的一个关系。

命题 1.4 对任意的 $\pi \in S_n$, 我们有 $\mathrm{inv}(\pi) = \mathrm{inv}(\pi^{-1})$.

逆序数的生成函数从它的定义中就很容易得到，然而另一个定义方式截然不同的统计量——主指标却和它有着非常紧密的联系，下面的定理告诉我们，二者是同分布的。

定理 1.5

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = \sum_{\pi\in S_n} q^{\mathrm{maj}(\pi)}. \tag{2}$$

证明 我们寻找 S_n 到自身的一个双射来证明它。下面我们就给出由 Foata 给出的这个经典的双射，一般称为 Foata 双射。

双射 φ 是递归的定义的。对 $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in S_n$, 我们首先令 $r_1 = w_1$. 现在假设 $r_k(k \le 1)$ 已经定义了，则 r_{k+1} 的定义是这样的：

如果 r_k 的最后一个字母大于（或小于）w_{k+1}, 则我们就在 r_k 中每个大于（或小于）w_{k+1} 的字母后面画一条竖线，这样就把 r_k 中的元素分成了一些块，然后我们对每个块中的字母向右循环移动一位，此时每个块中的最后一个元素就变成该块中第一个元素了，最后我们再把 w_{k+1} 接到变换后的序列后面，就得到了 r_{k+1}. 令 $\varphi(w) = r_n$.

由 φ 的构造可知在每一步变换后都能保证 $\mathrm{maj}(w_1 w_2 \cdots w_k) = \mathrm{inv}(r_k)$.

要说明 φ 是双射，我们只需给出其逆映射。从 φ 的定义我们可以类似的定义 φ^{-1} 如下：

假设 $\sigma = \varphi(w)$, 则 φ^{-1} 的定义为：若 $\sigma_n > \sigma_1$, 则在小于 σ_n 的数字之前加一条竖线，并且在 σ_n 的前面也加；若 $\sigma_n < \sigma_1$, 则在大于 σ_n 的数字之前加一条竖线，并且在 σ_n 的前面也加。然后我们把每个块中的元素向左循环移动一位，去掉竖线就得到了一个新的置换，此时我们就把最后一个元素固定下来作为 φ^{-1} 的最后一个元素。接下来用同样的方法确定最后第二个元素，n 步以后就得到了 $\varphi^{-1}(\sigma)$, 且有 $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{maj}(\varphi^{-1}(\sigma)$. ∎

我们给出一个例子以便读者更好的理解。

例 1.6 *若 $w = 417396285$, 我们有：*

$$\begin{aligned}
r_1 &= w_1 = 4;\\
r_2 &= 4|1;\\
r_3 &= 4|1|7;\\
r_4 &= 4|71|3;\\
r_5 &= 4|7|1|3|9;\\
r_6 &= 74|913|6;\\
r_7 &= 7|4|9|31|6|2;\\
r_8 &= 7|4|39|1|6|2|8;\\
r_9 &= 7|934|61|82|5.
\end{aligned}$$

且 $\mathrm{maj}(w) = 1+3+5+6+8 = 23, \mathrm{inv}(\varphi(w)) = 23.$

一般地，与 maj 在 S_n 上等分布的统计量称为 Mohonian 的。