第四章 矩阵（总结+典型例题）

关于 $AB=0$

1 矩阵乘法消去律不成立　　$AB=0 \not\Rightarrow A=0,或B=0$，即存在非零矩阵 A,B，而 $AB=0$.

例：设 $A^2=A, A\neq E$（单位矩阵），证明 $|A|=0$.

2 方程组的解的解释

设 $A_{s\times n}, B_{n\times m}$，假设 $AB=0$，取 B 的列向量组 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则

$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=0=(0,0,\cdots,0)$，从而 $A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,m$，

若考察 $AX=0$，以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组，则 $A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,m$，即说明 β_i 是 $AX=0$ 的解.故 $AB=0$ 的一个解释就是：B 的列向量组 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 $AX=0$ 的解.

反之，若 $AX=0$ 有非零解 X_1,X_2，则令 $B=(X_1,X_2)$，非零，且 $AB=0$，其中 B 是一个 $n\times 2$ 阵.

由上面解释我们可给出：设 $A_{s\times n}, B_{n\times m}$，若 $AB=0$，且 $r(A)=n$，则 $B=0$.

矩阵可逆:

设 n 阶方阵 A,则 A 可逆的充要条件是

$\Leftrightarrow$ 定义 $AB=BA=E$ $\Leftrightarrow$ 行列式非零,即 $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 矩阵的秩为 n $\Leftrightarrow$ 行满秩 $\Leftrightarrow$ 列满秩.

$\Leftrightarrow$ 行向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 与单位阵等价 $\Leftrightarrow$ A 可写成初等矩阵的乘积.

$\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解.

$\Leftrightarrow$ 任一 n 维行(列)向量都可由矩阵的行(列)向量组线性表出.

如何求逆（定义、伴随矩阵、初等变换）举例说明

1 用定义证明矩阵可逆，及求逆（抽象题目）

例 已知方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$,则 $A^{-1}=$______. $(A+2E)^{-1}=$______.

由 $A^2-A-2E=0$，可得 $A(A-E)=2E$，从而 $A\frac{1}{2}(A-E)=E$，则 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=-4E$,从而 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

2 设 A 是一4阶可逆阵,知 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&1&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,则 $A=$________.

由 $AA^*=|A|E$，可知 $A=|A|E(A^*)^{-1}=|A|(A^*)^{-1}$，故计算 $|A|$ 即可. $|(A^*)^{-1}|=27=\frac{1}{|A^*|}$，故

$\left|A^*\right|=\dfrac{1}{27}=\left|A\right|^3$，故$\left|A\right|=\dfrac{1}{3}$，代入求解.

矩阵的秩：

1) 设矩阵 A 是一个 $s\times n$ 矩阵,则 $r(A)\le \min(s,n)$, $r(A^T)=r(A)$, $r(kA)=r(A)$,其中 $k\ne 0$.

2) 设 P,Q 可逆,则 $r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$.

3) （课后题 17） $A_{s\times n},B_{s\times n}:0\le r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$；

$A_{s\times n},B_{s\times m}:\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；用列向量解释

$A_{s\times n},B_{t\times n}:\max(r(A),r(B))\le r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$. 用行向量解释

$A_{s\times n},B_{n\times m}:r(AB)\le \min(r(A),r(B))$.

4) $A_{s\times n},B_{t\times m}$： $r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$； $r\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\ge r(A)+r(B)$.

对矩阵 A,B,存在可逆阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2,使得 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}$, $P_2BQ_2=\begin{pmatrix}E_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1AQ_1&0\\0&P_2BQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}&0\\0&\begin{pmatrix}E_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&E_{r_2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&E_{r_2}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1+r_2}&0\\0&0\end{pmatrix},\text{从而 } r(\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix})=r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B).$$

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1AQ_1&0\\P_2CQ_1&P_2BQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}&0\\P_2CQ_1&\begin{pmatrix}E_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\C_1&C_2&E_{r_2}&0\\C_3&C_4&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&E_{r_2}&0\\0&C_4&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_{r_1}&0&0&0\\0&E_{r_2}&0&0\\0&0&C_4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1+r_2}&0&0\\0&C_4&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

则 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}) = r(\begin{pmatrix} E_{r_1+r_2} & 0 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \ge r(A)+r(B)$.

5) 设 A_{sn}, B_{nm} ,则 $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$.

构造 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$ 故 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$,即

$r(AB)+n \ge r(A)+r(B)$,从而 $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$.

6) （课后题 18）若 $AB=0,$ 则 $r(A)+r(B) \le n$.

如上,另外矩阵 B 的列向量组是 $Ax=0$ 的解,从而列向量组的秩不超过 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数.即 $r(B) \le n-r(A)$,从而 $r(A)+r(B) \le n$.

7) 设 A_{sn}, B_{nm}, C_{mt} ,则 $r(ABC) \ge r(AB)+r(BC)-r(B)$.

构造 $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & -AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$,则

$r\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \ge r(AB)+r(BC)$,即 $r(ABC) \ge r(AB)+r(BC)-r(B)$.

8) （补充题 3,4）(1) $A^2=E \Leftrightarrow r(A+E)+r(A-E)=n$.

若证明必要性“$\Rightarrow$”: $A^2-E=(A-E)(A+E)=0$，则 $r(A+E)+r(A-E) \le n$，同时

$r(A+E)+r(A-E) \ge r(A+E-(A-E)) = r(2E) = n$，故 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

证明充分性，需要构造

$$\begin{pmatrix} A+E & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+E & E-A \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2E & E-A \\ A-E & A-E \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2E & E-A \\ 0 & A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2 \end{pmatrix}.$$

若 $A^2=E$,则 $A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2=0$,从而 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

若 $r(A+E)+r(A-E)=n$,则 $0=A-E+\frac{1}{2}(E-A)^2$,即 $0=2A-2E+E-2A+A^2=A^2-E$.

(2) $A^2=A \Leftrightarrow r(A)+r(A-E)=n$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ -A & -E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ -A & -E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

若 $A^2 = A$,则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$,从而 $r(A)+r(A-E)=n$.

若 $r(A)+r(A-E)=n$,则 $A-A^2=0$,从而 $A^2=A$.

(3) 方阵 A，则 $(A-aE)(A-bE)=0,(a\neq b) \Leftrightarrow r(A-aE)+r(A-bE)=n$.

9) （课后题 27）设 $n\ (n>1)$ 阶方阵 A,有 $r(A^*)=\begin{cases} n, & if \quad r(A)=n, \\ 1, & if \quad r(A)=n-1, \\ 0, & if \quad r(A)<n-1, \end{cases}$

证明:首先有 $AA^*=|A|E$.若 $r(A)=n$,即 A 可逆,则 A^* 可逆,从而满秩.

若 $r(A)<n$,则 $AA^*=|A|E=0$,从而根据公式可得 $r(A)+r(A^*)\leq n$,则 $0\leq r(A^*)\leq 1$.

$r(A)=n-1$,则矩阵 A 存在一个 $n-1$ 阶子式非零,从而存在一个元素的代数余子式非零,从而矩阵 A 的伴随矩阵非零,故 $r(A^*)=1$.

若 $r(A)<n-1$,则所有元素的代数余子式均为零,从而 $A^*=0$,从而 $r(A^*)=0$.

10) （补充题 1）若矩阵可写成一个列向量和一个行向量的乘积,即 $A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,则 $0\leq r(A)\leq 1$.

若 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,$ 则 $r(A)=1$;若其中一个为零,则 $r(A)=0$,即 $A=0$.

典型例题

一 矩阵的行列式:

1.(1) 设3阶方阵A,满足$|A|=-2$,设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,设$B=\begin{pmatrix}\alpha_3-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}3\alpha_2\\ 2\alpha_1\\ \alpha_1+\alpha_3\end{pmatrix}$,则

$|B|=$____. $|C|=$______.

(2) 设A是3阶方阵,$|A|=-2$,取$A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,则$|\beta_1+2\beta_2,\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,\beta_3|=$____

$|\beta_1+\beta_2+\beta_3,\beta_2+\beta_3,\beta_3|=$____

2. (1) 设4阶方阵$A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,$B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,其中$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$均为4维列向量,且

$|A|=4,|B|=1$,则$|A+B|=$____.

解: $A+B=(\alpha+\beta,2\gamma_1,2\gamma_2,2\gamma_3)$,则

$|A+B|=|\alpha+\beta,2\gamma_1,2\gamma_2,2\gamma_3|=8|\alpha+\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=8(|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|)=8\times5=40$.

3. (1) 设n阶方阵A,B,满足 $|A|=2,|B|=-3$,则$|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$________,$|A^{-1}+A^*|=$_______.

解: $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=|A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}|=|(|B|-|A|)A^{-1}B^{-1}|=(|B|-|A|)^n|A^{-1}B^{-1}|=(-5)^n(-\dfrac{1}{6})$.

(2) 设A是n阶方阵, $|A|=5$,则$\left|A^*-(\dfrac{1}{5}A)^{-1}\right|=$____.

4. 设A,B均为3阶矩阵,$|A|=2,|B|=3$,则$|2AB|=$______,$||2A|B|=$______,$\begin{vmatrix}0&3A\\2B&E\end{vmatrix}=$______,

$\begin{vmatrix}3A&E\\0&2B\end{vmatrix}=$______, $\begin{vmatrix}0&2AB\\-A&A\end{vmatrix}=$_______. $\begin{vmatrix}2AB&0\\A&-A\end{vmatrix}=$_______. $|(2A)^{-1}+3A^*|=$_______.

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$, 则$|B|=$________. $|B|=\dfrac{1}{9}$.

6. 设A,B均为3阶方阵,满足$AB-3A+B=0$,若$|A+E|=-1$,求$|B-3E|=$_______.

解: $(A+E)(B-3E)=AB-3A+B-3E=-3E$, 27

7. 若n阶方阵A与B只是第j列不同,给出$|A+B|$与$|A|+|B|$的关系等式____________________.

解:$\left|A+B\right|=\left|2\alpha_1,\cdots,\alpha+\beta,\cdots,2\alpha_n\right|=2^{n-1}\left(\left|\alpha_1,\cdots,\alpha,\cdots,\alpha_n\right|+\left|\alpha_1,\cdots,\beta,\cdots,\alpha_n\right|\right)=2^{n-1}\left(\left|A\right|+\left|B\right|\right)$.

8. 设 $A^2=A, A\neq E$（单位矩阵）, 证明 $\left|A\right|=0$.

证法一: 如 $\left|A\right|\neq 0$, 则 A 可逆, 那么 $A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$. 与已知条件 $A\neq E$ 矛盾.

证法二: 由 $A^2=A$, 有 $A\left(A-E\right)=0$, 从而 $A-E$ 的每一列都是齐次方程组 $Ax=0$ 的解. 又因 $A\neq E$, 故 $Ax=0$ 有非零解, 从而 $\left|A\right|=0$.

证法三: 由于 $A-E$ 的每一列 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $Ax=0$ 的解, 所以 $r(A-E)\leq n-r(A)$. 又 $A\neq E, r(A-E)>0$, 故 $r(A)\leq n-r(A-E)<n$, 则 $\left|A\right|=0$.

9. 若 $A^2=B^2=E$,且 $\left|A\right|+\left|B\right|=0$,证明 $\left|A+B\right|=0$.

证明: $\left|A\right|\left|A+B\right|=\left|A^2+AB\right|=\left|B^2+AB\right|=\left|B+A\right|\left|B\right|=-\left|B+A\right|\left|A\right|$,故 $\left|A\right|\left|A+B\right|=0$,得 $\left|A+B\right|=0$.

10. 已知 A 是 $2n+1$ 阶矩阵, 满足 $AA^T=A^TA=E$, 证明: $\left|E-A^2\right|=0$.

证明: 由行列式乘法公式, 得 $\left|A\right|^2=\left|A\right|\cdot\left|A^T\right|=\left|AA^T\right|=\left|E\right|=1$.

(1) 若 $\left|A\right|=1$, 则 $\left|E-A\right|=\left|AA^T-A\right|=\left|A\left(A^T-E^T\right)\right|=\left|A\right|\cdot\left|A-E\right|=\left|-\left(E-A\right)\right|$

$$=\left(-1\right)^{2n+1}\left|E-A\right|=-\left|E-A\right|, \text{从而} \left|E-A\right|=0.$$

(2) 若 $\left|A\right|=-1$,由 $\left|E+A\right|=\left|AA^T+A\right|=\left|A\left(A^T+E^T\right)\right|=\left|A\right|\cdot\left|A+E\right|=-\left|E+A\right|$,得到 $\left|E+A\right|=0$.

又因 $\left|E-A^2\right|=\left|\left(E-A\right)\left(E+A\right)\right|=\left|E-A\right|\cdot\left|E+A\right|$, 所以不论 $\left|A\right|$ 是 1 或 -1, 总有 $\left|E-A^2\right|=0$.

11. 设 A,B 为同阶方阵,满足阵 $AA^T=A^TA=E, BB^T=B^TB=E$,且 $\dfrac{\left|A\right|}{\left|B\right|}=-1$,证明 $\left|A+B\right|=0$.

证明: $(A+B)A^T=E+BA^T=BB^T+BA^T=B(B^T+A^T)$,从而 $\left|A+B\right|\left|A\right|=\left|B\right|\left|B^T+A^T\right|=\left|B\right|\left|B+A\right|$, 而 $\left|A\right|=-\left|B\right|$,故 $\left|A+B\right|=0$.

12. 已知列矩阵 $C=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,行矩阵 $D=(2,0,1,)$ 1. 试计算 $A=CD$ 及 $B=DC$. 2. 求 $A^{100}=?$

二 矩阵的逆

1. 设 A 是一4阶可逆阵,知 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&1&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,则 $A=$ ________.

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$,则 $(A^*)^{-1}=$ ______.

解: $(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&-6\\0&-4&-10\end{pmatrix}$.

2. (1) 已知方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$,则 $A^{-1}=$ ______. $(A+2E)^{-1}=$ ______.

解: $A^2-A-2E=0$,则 $A(A-E)=2E$.从而 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$.

由 $A^2-A-2E=0$,得 $(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=-4E$,从而 $(A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{4}(3E-A)$.

(2) 已知 n 阶矩阵 A 满足方程; $A^2+3A-4E=0$,其中 E 为 n 阶单位矩阵.

1. 求 $(A+3E)^{-1}$. 2. 求 $(A+5E)^{-1}$. 3. 问当 m 满足什么条件时, $(A+mE)$ 必可逆.

3. 设 n 阶方阵 A,B (1) 若 $A^2=A$,证明: $E-2A$ 可逆. (2) 若 $2A(A-E)=A^3$,证明 $E-A$ 可逆.

(3) 若 $A+B=AB$,证明 $E-A$ 可逆,且 $AB=BA$.

(4) 若 $A,B,A+B$ 都可逆,证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆,并求其逆.

4 已知 n 阶矩阵 A 满足方程 $A^2+3A-4E=0$,其中 E 为 n 阶单位矩阵.

1. 求 $(A+3E)^{-1}$. 2. 求 $(A+5E)^{-1}$. 3. 问当 m 满足什么条件时, $(A+mE)$ 必可逆.

5. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$, $B=(E+2A)^{-1}(E-A)$,则 $(2B+E)^{-1}=$ ______.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$,求矩阵 X .

解: 首先, $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$,从而 $A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$.

$(\frac{1}{2}A^*)^*=(2A^{-1})^*=\left|2A^{-1}\right|(2A^{-1})^{-1}=A$.代入$A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+E$,得到

$4A^{-1}XA=8A^{-1}X+E$,左乘A,得到$4XA=8X+A$,即$X(4A-8E)=A$,从而

$$X=A(4A-8E)^{-1}=A\frac{1}{4}(A-2E)^{-1}=\frac{1}{4}A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&0&0\end{pmatrix}.$$

7. 已知$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$,又$B=(E+A)^{-1}(E-A)$,求$(E+B)^{-1}$.

8.设$A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$均为n阶可逆矩阵,则$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$____.

设n阶矩阵A,B满足$|A|=2,|B|=3,|A+B|=4$,则$|A^{-1}+B^{-1}|=$_______.

9. 若A,B都是n阶方阵,且$E+AB$可逆,证明$E+BA$也可逆,求其逆.

证明: $(E+AB)A=A+ABA=A(E+BA)$,由于$E+AB$可逆,则

$A=(E+AB)^{-1}A(E+BA)$,两边左乘B,得到$BA=B(E+AB)^{-1}A(E+BA)$,则

$E+BA=E+B(E+AB)^{-1}A(E+BA)$ 则 $E+BA-B(E+AB)^{-1}A(E+BA)=E$,即

$(E-B(E+AB)^{-1}A)(E+BA)=E$,从而$E+BA$可逆,且其逆为: $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$.

三　矩阵的运算

1. 设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,求矩阵$B$

解: 由$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,右乘A^{-1}得$AB=B+3A$,则$(A-E)B=3A$,从而$B=3(A-E)^{-1}A$,否定.

$A^{-1}(A-E)B=3E$,$(E-A^{-1})B=(E-\frac{1}{|A|}A^*)B=3E$,$|A^*|=8=|A|^3$,则$|A|=2$,$B=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}$

2. 已知$2CA-2AB=C-B$,其中$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则$C^3=$_______.

解: 由$2CA-2AB=C-B$,得$2CA-C=2AB-B$,故$C(2A-E)=(2A-E)B$,从而

$C=(2A-E)B(2A-E)^{-1}$ $C^3=(2A-E)B^3(2A-E)^{-1}$

$2A-E=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ $B^3=\begin{pmatrix}27&18&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $(2A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^TC^T=E$.求 A

解: $A(E-B^T(C^T)^{-1})C^T=E$,则 $A(C-B)^T=E$,从而 $A=((C-B)^T)^{-1}$

4. 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$,其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,求 B.

解: $AA^*BA=2ABA-8A$,得 $-2B=2AB-8E$, $AB+B=4E$, $(A+E)B=4E$, $B=4(A+E)^{-1}$

5. 设 A 是3阶可逆方阵,将 A 的第一行的 -3 倍加到第三行,再互换第二行和第三行后得到矩阵 B,则

$BA^{-1}=$____________.

四　矩阵的秩

1. $A\in\mathbf{M}_{m\times n}, B\in\mathbf{M}_{n\times k}$,且 $r(A)=n$,证明 $r(AB)=r(B)$ (若 $r(B)=n$,则 $r(AB)=r(A)$).

2. 设 A,B 是 n 阶方阵,且 $r(A)=r$, $r(B)=s$ 则 $r(A,AB)=$________, $r\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}=$________.

3. 设矩阵 $A_{s\times m}, B_{m\times n}$,证明 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解当且仅当 $r(AB)=r(B)$.

证明:必要性:设同解,则基础解系相同,则所含向量个数为 $n-r(AB)=n-r(B)$,从而 $r(AB)=r(B)$.

充分性:设 $r(AB)=r(B)$,则 $n-r(AB)=n-r(B)$,同时若列向量 x_0 满足 $Bx_0=0$,则 $ABx_0=0$,即 $BX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解,从而 $BX=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 可以看做是 $ABX=0$ 的解集中的一个无关向量组,从而可以扩充为 $ABX=0$ 的一个基础解系,但是 $n-r(AB)=n-r(B)$,所以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 也是 $ABX=0$ 的一个基础解系,即同解.

3, 设 $m\times n$ 实矩阵 A,证明 $r(A^TA)=r(A)$.

证明:考察两个齐次线性方程组: $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$. 首先 $Ax=0$ 的解都是 $A^TAx=0$ 的解.

其次,若 x_0 满足 $A^TAx_0=0$,则 $x_0^TA^TAx_0=0$,即 $(Ax_0)^TAx_0=0$.设 $Ax_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,则

$(Ax_0)^T Ax_0=(y_1,y_2,\cdots,y_n)(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$ 从而 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,即

$Ax_0=0$,从而 $A^TAx=0$ 的解也是 $Ax=0$ 的解,即 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解,则 $r(A^TA)=r(A)$.

五 矩阵的等价标准形

1. (1) 任一秩为 r 的矩阵都可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

(2) 任一秩为 r 的对称矩阵都可表示为 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

(3) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,存在列满秩 $n\times r$ 阵 P,行满秩 $r\times n$ 阵 Q,使得 $A=PQ$.

(4) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,证明

(a) 存在秩为 $n-r$ 的 n 阶阵 B,使得 $AB=0$.

(b) 存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 阶阵 B,使得 $AB=0$.

证明: (1) 对 $m\times n$ 阵 A,若 $r(A)=r$,存在可逆阵 P,Q,使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$,记 S_i ($1\le i\le r$)为 i 行 i 列位置元素为 1 其余元素为 0 的 $m\times n$ 阵,则 $A=P(S_1+S_2+\cdots+S_r)Q$,则 $A=PS_1Q+PS_2Q+\cdots+PS_rQ$.且 $r(PS_iQ)=1$ ($1\le i\le r$).

(2) 合同标准形.

(3) 对 A,存在 m 阶可逆阵 P_1 和 n 阶可逆阵 Q_1,使得 $A=P_1\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1$,

则 $A=P_1\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1=P_1\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}(E_r,0)Q_1$.则 $P_1\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}=P$,$(E_r,0)Q_1=Q$ 满足题意.

(4) 用等价标准形: 对 A,存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q,使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$,

(a) $AQ^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}=0$.令 $Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}=B$ 即可.

(b) $AQ^{-1}\begin{pmatrix}0\\ E_{n-r}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix}0\\ E_{n-r}\end{pmatrix}=0$.令 $Q^{-1}\begin{pmatrix}0\\ E_{n-r}\end{pmatrix}=B$ 即可.

此外,用齐次线性方程组的解: 对 $AX=0$,由于 $r(A)=r$,则 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个向量,设为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$,则令 $B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r},0,\cdots,0)$ (n 阶)和 $B=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$ 即可.

下列命题是否正确.

1. 若 A, B 都是 n 阶方阵,则 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2. 若矩阵 A, B, C 满足 $AB = AC$,则 $B = C$.

3. 若矩阵 A 满足 $A^2 = E$,则 $A = \pm E$.

4. 若矩阵 A 满足 $A^2 = A, |A-E| \neq 0$,则 $A = 0$.

5. 若可逆矩阵 A 经初等变换可以化为方阵 B,则 $A^{-1} = B^{-1}$.

6. 若 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = E$,则 $BCA = E, A^{-1}C^{-1}B^{-1} = E, C^T B^T A^T = E.$

7. 若 A 可逆,且 $|A + AB| = 0$,则 $|B + E| = 0$.

8. 若 n 阶方阵 A 的行列式等于零,则 $A^* = 0$.

9. 对方阵进行初等变换,不改变方阵的行列式.

10. 若分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 满足 $|M| \neq 0$, A, B, C, D 都是方阵,则 $M^{-1} = \dfrac{1}{|AD - BC|}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$.

11. 设 A 为 n 阶方阵,则 $|-A| = -|A|$.

12. 若 n 阶方阵 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵,则 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

13. 若 A 为 n 阶方阵, k 为任意实数,则 $|kA| = k|A|$.

14. 已知 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵,且满足 $PQ = 0$,若 $a \neq 8$,则必有 $r(P) = 1$.

15. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵,则存在矩阵 B,使得 $AB = 0$,且有 $r(A) + r(B) = n$.

16. 若 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 及 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 等价,则矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 等价.

17. 若矩阵 A, B, C 满足 $A = BC$,则 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表出.

1.若矩阵 A 满足 $A^2 = E$,则 $A = \pm E$. 2. 若矩阵 A 满足 $A^2 = A, |A-E| \neq 0$,则 $A = 0$.

3. 若可逆矩阵 A 经初等变换可以化为方阵 B,则 $A^{-1} = B^{-1}$.

4. 若 A 可逆,且 $|A+AB|=0$,则 $|B+E|=0$.

5. 已知 $Q=\begin{pmatrix}3 & 12 & 6\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$, P 为3阶非零矩阵,且满足 $PQ=0$,若 $a\neq 8$,则必有 $r(P)=1$.

6. 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵,则存在矩阵 B,使得 $AB=0$,且有 $r(A)+r(B)=n$.

7. 若 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价,则矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价.

八. 设 A,B 均为 n 阶方阵,且满足 $A^2=0,B^2=0$.

(1) 若 $A+B$ 可逆,证明 $r(A)=r(B)$.

(2) 写出满足 $A+B$ 可逆的两个四阶矩阵 A 和 B,使得 $A^2=0,B^2=0$.

(3) 举例说明 $A+B$ 可逆不是 A 和 B 秩相等的必要条件.