高等代数第七章练习题

一 填空题

1. 线性空间V中,固定$\alpha \in V$,定义$\sigma\xi = \xi + \alpha (\forall \xi \in V)$,若$\sigma$是$V$的一个线性变换,则$\alpha =$_________.

2. 取σ是线性空间$P[x]_3$的微分变换,即$\sigma f(x) = f'(x)$,则$(\sigma^2+\sigma)(x^2+x)=$_____________.

3. 若线性空间V的线性变换σ, τ在V的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的矩阵分别为$A, B$,则$\sigma^2 + \sigma\tau + \tau^2$在此组基下的矩阵为__________________.

4. 在线性空间V中,基(I)$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基(II)$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵为$C$,线性变换$\sigma$在基(I)下的矩阵为$A$,向量$\alpha$在基(I)下的坐标为$X$(列向量),则$\alpha$在基(II)下的坐标为____________,$\sigma\alpha$在基(II)下的坐标为______,$\sigma$在基(II)下的矩阵为___________.

5. 设n阶阵$A=(a_{ij})$可逆,$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = a \neq 0 (\forall i = 1,2,\cdots,n)$,则$A^{-1}$的一个特征值为__________.

6. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & b & a \end{pmatrix}$有特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$,则$a=$______,$b=$_____.

7. 已知0是方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$的特征值,则$a=$________,$A$的所有特征值是_________.

8. 已知$\alpha = (1,1,-1)^T$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$的一个特征向量,则$x=$_______.

9. 设$g(\lambda)$是λ的多项式,若3阶矩阵A与$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$相似,则矩阵$A$的多项式$g(A)$的行列式$|g(A)|=$_______,$g(A)$的三个特征值为_____,_____,_____.

10. 设A是3阶矩阵,知X是A的属于λ的一个特征向量,取可逆阵P,$P^{-1}AP$的属于特征值λ的一个特征向量为_______.

11. 若λ是可逆矩阵A的特征值,则$A^* + 2E$有特征值为______.

12. 设n阶方阵A的n个特征值为$0,1,2,\cdots,n-1$,矩阵B与A相似,则行列式$|B+E|=$_______.

13. 设A是秩为2的3阶实对称矩阵, 且$A^2+5A=0$, 则A的全部特征值为________.

14. 若3阶方阵A满足$|E-A|=|E+A|=|A|=0$,则A的迹$\mathrm{tr}A=$______,$|A|=$_______.

15. 设A为3阶方阵,已知$|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$,其中E为3阶单位矩阵,则$|A+4E|=$__.

16. λ_0是n阶阵A的一个s重特征值,若A能相似对角化,则属于λ_0的线性无关的特征向量的个数为____.

17. 线性空间 $P[x]_n$ 中,微分变换 σ (即 $\sigma f(x)=f'(x)$)的秩为________,零度为________.

18. n 阶阵 A,秩为 r,对 $\xi\in F^n$,令 $\sigma(\xi)=A\xi$,σ 是线性变换,则 $\dim\operatorname{Im}(\sigma)=$____,$\dim\ker(\sigma)=$______.

19. 设 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\in P^{2\times 2}, c\neq 0$,则 A 在 P 上可相似对角化的充要条件是_____________.

20. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,已知 A 与矩阵 B 相似,则秩 $r(AB-A)=$_____ .

21. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$________,$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$_________.

22. 已知 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ t & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ 相似,则 $t=$______,$x=$_______.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为________;$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为_______,最小多项式为________.

24. $f(\lambda)$ 是线性变换 σ 的特征多项式,λ_0 是 $f(\lambda)$ 的 s 重根.$V_{\lambda_0}=\{\xi\mid\sigma\xi=\lambda_0\xi\}$ 是 σ 的属于 λ_0 的特征子空间,如果 V_{λ_0} 是 t 维空间,那么 t ___ s (大小关系);如果 σ 在某组基下的矩阵 A 可以对角化,那么 t ___ s.

25. σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基,$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$,则子空间 σV 的维数与矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的关系是________.

二 计算题

1 取 P^3 的线性变换 $\sigma(a,b,c)=(2a-b,b+c,a)$,

(1) 求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵;

(2) 求 σ 在基 $\eta_1=(1,0,0),\eta_2=(1,1,0),\eta_3=(1,1,1)$ 下的矩阵;

(3) 求向量 $\alpha=(1,2,3)$ 的像 $\sigma\alpha$ 分别在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和 η_1,η_2,η_3 下的坐标.

2. (I): $f_1=1+2x^2,\ f_2=x+2x^2,\ f_3=1+2x+5x^2$,与(II): $g_1=1-x, g_2=1+x^2, g_3=x+2x^2$ 是 $P[x]_3$ 的两组基,线性变换 $\sigma:\sigma(f_1)=2+x^2,\sigma(f_2)=x,\sigma(f_3)=1+x+x^2$.

(1) 求基 f_1,f_2,f_3 到基 g_1,g_2,g_3 的过渡矩阵 P.　(2) 求 σ 在基 g_1,g_2,g_3 下的矩阵 A.

(3) 设 $f=1+2x+3x^2$,求 f 在 σ 下的像 $\sigma(f)$.

3. 设 A 是3阶阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的3维列向量,且 $A\alpha_1=4\alpha_1-4\alpha_2+3\alpha_3, A\alpha_2=-6\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$,$A\alpha_3=0$,求矩阵 A 的特征值和对应的特征向量.

4. 设σ是线性空间$P[x]_3$的一个线性变换,在基$1,x,x^2$的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(1) 证明σ是一个可逆线性变换,求σ^{-1}在基$1,x,x^2$的矩阵.

(2) σ是否可以相似对角化,若可以,求一组基,使得σ关于此组基的矩阵是对角阵.

5. 给出n阶方阵$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$可相似对角化的条件.

6. 若矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$相似于对角阵$D$, (1) 求$a$; (2) 求可逆阵$P$,使得$P^{-1}AP=D$.

7. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$相似,求$a,b$的值;求可逆矩阵,使$P^{-1}AP=B$.

8. 判断矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是否相似,若相似,求可逆矩阵$P$,使得$P^{-1}AP=B$.

9. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求$A^k$ (利用特征值和特征向量).

10. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 求$A$的最小多项式;

(2) A能否相似对角化?若可以,求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵,若不能说明理由.

11. 在线性空间P^3中,定义线性变换$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$,求$\sigma$的值域与核.

12. $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(0,x_2,0)$是$P^3$上的一个线性变换, 求$\sigma^{-1}(0)$和$\sigma P^3$的一组基.

13. σ是$\mathbf{R}^2$的一个线性变换,在标准基下的矩阵是$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 证明σ的不变子空间只能为$\mathbf{R}^2$与$\{0\}$;

(2) 若τ是$\mathbf{C}^2$的一个线性变换,在标准基下的矩阵是A,证明τ有一维不变子空间.

三 证明题:

1. 设σ是线性空间V的一个线性变换,且满足$\sigma^2 = id$ (单位变换),

(1) 证明σ的特征值为1或者-1;

(2) 证明$V = V_1 \oplus V_{-1}$,其中$V_1 = \{\alpha \in V \mid \sigma\alpha = \alpha\}, V_{-1} = \{\alpha \in V \mid \sigma\alpha = -\alpha\}$;

(3) 证明存在V的一组基,使得σ在此组基下的矩阵为对角阵.

2. 设σ为数域P上的n维线性空间V上的一个线性变换,且$\sigma^2 = \sigma$,证明:

(1) σ的特征值是0或1;.

(2) $V = V_1 \oplus V_0$,其中V_1, V_0分别为σ的特征值1与0对应的特征子空间.

3. 设n阶方阵$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,证明$N$与其转置$N^T$相似.

4. 设数域P上的矩阵$A = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, 证明$A, B, C$彼此相似.

5. 设σ是数域P上的n维线性空间V的一个线性变换.$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$V$中的$m$个向量.

证明:如果$\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \cdots, \sigma\alpha_m$线性无关,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$也线性无关.

6. 设A, B为n阶实方阵,A有n个互异特征值,证明$AB = BA \Leftrightarrow A$的特征向量是$B$的特征向量.

7. 设A, B为n阶方阵,且$A + B + AB = 0$,

(1) 证明A与B的特征向量是公共的;

(2) 证明A相似于对角阵当且仅当B相似于对角阵;

(3) 证明$r(A) = r(B)$.

8. V是n维线性空间,$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$是线性变换$\sigma$的特征子空间$V_{\lambda_0}$的一组基,将它扩充为$V$的一组基

$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$,

(1) 求σ在$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$下的矩阵;

(2) 证明$\dim V_{\lambda_0} \le \lambda_0$的代数重数(即$\lambda_0$作为特征多项式的根的重数).