

第五章 二次型

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Outline

- ① 二次型及其矩阵表示
- ② 标准形
- ③ 正定二次型

二次型就是二次齐次多项式. 在解析几何中讨论的有心二次曲线, 当中心与坐标原点重合时, 其一般方程为:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f$$

方程的右端就是关于 x, y 的一个二次齐次多项式. 为了便于研究这个二次曲线的几何性质, 通过选取合适的角度, 把坐标轴作逆时针旋转, 则相应的坐标变换为:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

在新坐标下二次曲线的方程可化为标准方程:

$$a'x'^2 + c'y'^2 = f$$

这是一个只含有平方项的标准方程.

考察方程：

$$\frac{13}{72}x^2 + \frac{10}{72}xy + \frac{13}{72}y^2 = 1$$

该方程表示 xy 平面上怎样的一条二次曲线？

将 xy 坐标系逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ ，即令

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

在新坐标下二次曲线的方程可化为标准方程：

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

§1 二次型及其矩阵表示

定义

一个系数在数域 P 上的 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型，简称为二次型。

注意：

- (1) 二次型就是 n 元二次齐次多项式；
- (2) 交叉项的系数采用 $2a_{ij}$ ，主要是为了矩阵表示的方便。

若在 n 元二次型中令 $a_{ij} = a_{ji}$, 由于 $x_i x_j = x_j x_i$, 则二次型可表示为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则二次型可用矩阵的乘积表示为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$$

其中 A 称为该二次型的矩阵, A 的秩称为该二次型的秩.

对于二次型的矩阵表示方法，需注意如下几点：

- (1) 由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 故 A 为对称矩阵
- (2) 矩阵 A 中 a_{ii} 为 x_i^2 项的系数, a_{ij} 为交叉项 $x_i x_j$ 系数的
- (3) n 元二次型 f 与 n 阶对称矩阵 A 一一对应

例 1

写出二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵.

对于二次型的矩阵表示方法，需注意如下几点：

- (1) 由于 $a_{ij} = a_{ji}$ ，故 A 为对称矩阵
- (2) 矩阵 A 中 a_{ii} 为 x_i^2 项的系数， a_{ij} 为交叉项 $x_i x_j$ 系数的
- (3) n 元二次型 f 与 n 阶对称矩阵 A 一一对应

例 1

写出二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

例 2

写出下列对称矩阵的二次型

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

例 3

写出二次型 $f(x_1, x_2) = X' \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X$ 的矩阵.

线性替换

定义

系数在数域 P 中的一组关系式:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由向量 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个线性替换.

令 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$,

则线性替换可以表示为 $X = CY$.

若系数矩阵 C 的行列式 $|C| \neq 0$, 则称该线性替换是**非退化的**.

二次型 $f = X'AX$ 经可逆变换 $X := CY$ 后, 有

$$f = (CY)'A(CY) = Y'(C'AC)Y$$

得到一个新二次型, 矩阵由 A 变为 $B = C'AC$.

定义

设 A, B 是 n 阶矩阵, 如果存在一个 n 阶可逆矩阵 C , 使得 $B = C'AC$ 则称 B 与 A 是合同的.

注

- 合同是矩阵之间的一个等价关系, 这时因为合同关系满足
 - ① 反身性: $A = E'AE$
 - ② 对称性: 由 $B = C'AC$ 即得 $A = (C^{-1})'BC^{-1}$
 - ③ 传递性: 由 $A_1 = C_1'AC_1$ 和 $A_2 = C_2'A_1C_2$ 即得 $A_2 = (C_1C_2)'A(C_1C_2)$
- 合同矩阵具有相同的秩.
- 若 A 为对称矩阵, 则 B 也为对称矩阵.

§2 标准形

定义

一个只含有平方项的 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

称为**标准二次型**.

要使二次型 f 经非退化线性变换 $X = CY$ 变成标准形就是要使

$$\begin{aligned} f &= Y' (C'AC) Y = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \dots + k_n y_n^2 \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

也就是要使 $C'AC$ 成为对角矩阵.

定理 1

数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成标准形.

定理 2

数域 P 上任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

证明 下面的证明实际上是一个具体地把二次型化成平方和的方法, 这就是中学里学过的“配方法”我们对变量的个数 n 作归纳法.

- 对于 $n = 1$, 二次型就是

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2$$

已经是平方和了.

- 现假定对 $n - 1$ 元的二次型, 定理的结论成立.
- 再设

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

分三种情形来讨论:

- 1) $a_{ii} (1 \leq i \leq n)$ 中至少有一个不为零.
- 2) 所有 $a_{ii} = 0$, 但是至少有一 $a_{1j} \neq 0 (2 \leq j \leq n)$.
- 3) $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$.

1) $a_{ii}(i = 1, 2, \dots, n)$ 中至少有一个不为零, 例如 $a_{11} \neq 0$. 这时

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + \sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^n a_{i1}x_i x_1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11}x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1j}x_j \right)^2 - a_{11}^{-1} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1j}x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij}x_i x_j \end{aligned}$$

这里

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij}x_i x_j = -a_{11}^{-1} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j$$

是一个 x_2, x_3, \dots, x_n 的二次型.

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1,j} x_j \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^n a_{11}^{-1} a_{1,j} y_j \\ x_2 = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

这是一个非退化线性替换，它使

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} y_1^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij} y_i y_j$$

由归纳法假定，对 $\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n b_{ij} y_i y_j$ ，有非退化线性替换

$$\begin{cases} z_2 = c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + \dots + c_{2n} y_n \\ z_3 = c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + \dots + c_{3n} y_n \\ \dots\dots\dots \\ z_n = c_{n2} y_2 + c_{n3} y_3 + \dots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

能使它变成平方和 $d_2 z_2^2 + d_3 z_3^2 + \dots + d_n z_n^2$.

于是非退化线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

就使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}z_1^2 + d_2z_2^2 + \cdots + d_nz_n^2$$

即变成平方和了. 根据归纳法原理, 定理得证.

2) 所有 $a_{ii} = 0$, 但是至少有一 $a_{1j} \neq 0 (j > 1)$, 不失普遍性, 设 $a_{12} \neq 0$. 令

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

它是非退化线性替换, 且使

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2a_{12}x_1x_2 + \dots \\ &= 2a_{12}(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + \dots \\ &= 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

这时上式右端是 z_1, z_2, \dots, z_n 的二次型, 且 z_1^2 的系数不为零, 属于第一种情况, 定理成立.

3) $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$. 由于对称性, 有

$$a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$$

这时

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} x_i x_j$$

是 $n-1$ 元二次型.

根据归纳法假定, 它能用非退化线性替换变成平方和. ■

配方法

用配方法化二次型为标准形的关键是消去交叉项

情形 1 如果二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 含 x_1 的平方项, 而 $a_{11} \neq 0$ 则集中二次型中含 x_1 的所有交叉项, 然后与 x_1 配方, 并作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

得 $f = d_1 y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$, 其中 $g(y_2, \dots, y_n)$ 是 y_2, \dots, y_n 的二次型.
对 $g(y_2, y_3, \dots, y_n)$ 重复上述方法直到化二次型 f 为标准形为止.

情形 2 如果二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 不含平方项, 即 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 但含某一个 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$, 则可先作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \quad (k = 1, 2, \dots, n; k \neq i, j) \end{cases}$$

把 f 化为一个含平方项 y_i^2 的二次型, 再用情形 1 的方法化为标准形.

例 1

用非退化线性变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2$$

为标准形, 并写出所用的非退化线性变换.

解 (配方法)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + x_1(4x_2 + 6x_3) + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + 3x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 2\left(x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 \\ &= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + x_2^2 - 6x_2x_3 - 5x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 - 14x_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 - 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{9}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则原二次型化为 $g(Y) = 2y_1^2 + y_2^2 - 14y_3^2$.

例 2

化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形, 并求所用的变换矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项, 所以

$$\text{令 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

代入

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

得

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

再配方, 得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

$$\text{则} \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

得

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

合同变换法

- ① 写出二次型 f 的矩阵 A , 并构造 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$.
- ② 对 A 进行初等行变换和同样的初等列变换, 把 A 化为对角矩阵 D , 并对 E 施行与 A 相同的初等列变换化为矩阵 C , 此时 $CAC = D$.
- ③ 写出非退化线性替换 $X = CY$ 化二次型为标准形 $f = Y'DY$ 这个方法可示意如下:

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } E \text{ 只进行其中的初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 进行同样的初等行变换和初等列变换}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$

解 用合同变换法化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} A \\ E \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} D \\ C \end{array} \right) \end{aligned}$$

则 $C'AC = D$.

§3 唯一性

标准形中的系数不是唯一确定的. 例如: 对二次型

$$2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$$

做线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

得到标准形

$$2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2$$

进一步做替换

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

得到另一个标准形

$$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2$$

合同不改变矩阵的秩.

共同点：标准形中系数不为零的平方项的个数是唯一确定的.

复数域上的二次型

定理 3

任意一个秩为 r 的复系数的 n 元二次型, 可经过适当的非退化线性替换化为复规范型:

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

而且这个规范型是唯一的.

推论

- 任意一个复对称矩阵 A 都合同于对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}$$

其中对角线上 1 的个数 r 等于矩阵 A 的秩.

- 两个复对称矩阵合同 \Leftrightarrow 它们的秩相等.

实数域上的二次型

定理 4

任意一个秩为 r 的实系数的 n 元二次型, 可经过适当的非退化线性替换化为实规范型:

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

而且这个规范型是唯一的.

定义

实二次型 f 的规范型中,

- 正平方项的个数 p 称为 f 的**正惯性指数**;
- 负平方项的个数 $r - p$ 称为 f 的**负惯性指数**;
- 它们的差 $p - (r - p)$ 称为 f 的**符号差**.

例 3

对标准二次型

$$2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2,$$

- 令 $z_1 = \sqrt{2}w_1$, $z_2 = \sqrt{2}w_2i$, $z_3 = \sqrt{6}w_3i$,
得到复数域上的规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2;$$

- 令 $y_1 = \sqrt{2}w_1$, $y_2 = \sqrt{6}w_3$, $y_3 = \sqrt{2}w_2$,
得到实数域上的规范形

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

推论

任意一个实对称矩阵 A 都合同于对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

其中对角线上 1 和 -1 的个数是唯一确定的，且其和 r 等于矩阵 A 的秩.

问题：试给出两个实对称矩阵合同的充要条件.

推论

任意一个实对称矩阵 A 都合同于对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

其中对角线上 1 和 -1 的个数是唯一确定的，且其和 r 等于矩阵 A 的秩.

问题：试给出两个实对称矩阵合同的充要条件.

推论

两个实对称阵合同 \Leftrightarrow 它们的秩相等且正惯性指数也相等.

§4 正定二次型

定义

实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的, 如果对任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \dots, c_n 都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$

定理 5

实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$ 是正定二次型的充要条件是 $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

非退化的线性替换不改变二次型的正定性.

定理 6

n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 正定的充要条件是它的正惯性指数为 n .

正定矩阵

定义

如果实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是正定的, 则称实对称矩阵 A 为正定矩阵.

定理 7

实对称矩阵 A 正定 \Leftrightarrow 它与单位矩阵合同.

实对称矩阵 A 正定 \Leftrightarrow 存在非奇异矩阵 C , 使得 $A = C'C$

推论

正定矩阵的行列式大于零.

正定矩阵是可逆的, 且其逆矩阵仍为正定矩阵.

直接利用矩阵的元素来判断它的正定性.

定义

n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 的左上角的 k 阶主子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

称为矩阵 A 的 k 阶顺序主子式.

定理 8

实二次型 $f(X) = X'AX$ 正定 \Leftrightarrow 矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零.

定理

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$, 下列命题等价:

- ① n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是正定的
- ② 它的正惯性指数为 n
- ③ A 与单位矩阵 E 合同
- ④ 存在 n 级实可逆矩阵 C 使 $A = C'C$.
- ⑤ 矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零.

例 1

判别二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 是否正定。

解 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

它的顺序主子式

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} > 0$$

因之, $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定.

例 2

当 t 为何值时, 下面的二次型是正定的?

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

要使 f 为正定二次型, 其充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式均大于零,

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4(t+2)(t-1) > 0$$

解得当 $-2 < t < 1$ 时二次型 f 正定.

二次型的分类

定义

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若对于任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \dots, c_n 都有

- ① $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是正定的。
- ② $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是半正定的。
- ③ $f(c_1, c_2, \dots, c_n) < 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是负定的。
- ④ $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$, 则称 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是半负定的。
- ⑤ $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 不确定, 则称 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是不定的。

定理 9

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$, 下列命题等价:

- ① $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是半正定的
- ② 它的负惯性指数与秩相等,
- ③ 有可逆实矩阵 C , 使得

$$C'AC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, d_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

- ④ 有实矩阵 C , 使得 $A = C'C$
- ⑤ 矩阵 A 的所有主子式大于或等于零.

例 1

设矩阵 A, B 满足 $ABA^* = 2AB - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B

例 2

设矩阵 A, B 满足 $A^*BA = 2BA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B

例 3

求非退化线性替换，化二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形.

例 4

求非退化线性替换，化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 为标准形.

例 5

若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3$ 正定，求 t 的取值范围.

例 6

设 A 是 n 阶方阵, 证明存在一个 n 阶非零方阵 B 使得 $AB = 0$ 的充要条件是 $|A| = 0$.

例 7

设 A 是 n 阶实方阵, 证明 $r(AA^T) = r(A)$.