月考（多项式）答案

班级________姓名__________学号____________

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 多项式 $x+2$ 除 $x^5+2x^4+x^2+2x+3$ 所得的商式为 $\underline{x^4+x}$，余式为 $\underline{3}$.

2. 多项式 x^2+x+1 除 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 所得的余式为 $\underline{0}$，其中 m,n,p 是任意非负整数.

3. 已知 $1+2i$ 是多项式 $f(x)=x^3-x^2+3x+5$ 的一个根，则 $f(x)$ 其余的根为 $\underline{1-2i,-1}$.

4. $(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1, x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)=1$ 当且仅当 m,n 满足 $\underline{(m,n)=1}$.

5. 多项式 $f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$ 的有理根是 $\underline{\frac{1}{3},-2}$.

6. 若 $x-1$ 是多项式 ax^4+bx^3+1 的一个 2 重因式，则 $\underline{a=3,b=-4}$.

7. 有理系数多项式 $\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^2+x+5$ 的本原分解表达式为 $\underline{\frac{1}{6}(3x^3+2x^2+6x+30)}$.

8. $(x^3-1,(x+1)(x^2+x+1),x^6-1)=\underline{x^2+x+1}$.

二、(20 分) 设 $f(x)=x^5+2x^4-3x^3-x+1$，$g(x)=x^3+2x^2-x-2$，

(1) 求 $(f(x),g(x))$；

(2) 求 $u(x),v(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$，其中 $q_1(x)=x^2-2, r_1(x)=6x^2-3x-3$.

$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$，其中 $q_2(x)=\frac{1}{6}x+\frac{5}{12}, r_2(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$.

$r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x)$，其中 $q_3(x)=8x+4, r_3(x)=0$.

$$x-1=-\frac{4}{3}q_2f+\frac{4}{3}(1+q_1q_2)g=(-\frac{2}{9}x-\frac{5}{9})f+(\frac{2}{9}x^3+\frac{5}{9}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{2}{9})g$$

三、(20 分)把 $f(x)=x^5-1$ 表示成 $x-1$ 的方幂和.

$$f(x)=x^5-1=5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$$

1	1	0	0	0	0	−1
		1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0
		1	2	3	4	
1	1	2	3	4	5	
		1	3	6		
1	1	3	6	10		
		1	4			
1	1	4	10			
		1				
	1	5				

四、(20 分) 设 $f(x),g(x),h(x)$ 是同一数域上的三个多项式，其中 $h(x)\neq 0$，证明 $h(x)\mid(f(x)-g(x))$ 当且仅当 $h(x)$ 除 $f(x)$ 与 $h(x)$ 除 $g(x)$ 所得余式相同.

证明: $\Rightarrow$.若 $f=hq_1+r_1, g=hq_2+r_2$，其中 $r_1=0$ 或 $\partial r_1<\partial h$， $r_2=0$ 或 $\partial r_2<\partial h$.而 $f-g=h(q_1-q_2)+r_1-r_2$, 同时 $h(x)\mid f(x)-g(x)$, 则 $h\mid r_1-r_2$, 故 $r_1-r_2=0$.

$\Leftarrow$若 $f=hq_1+r, g=hq_2+r$，则 $f-g=h(q_1-q_2)$，从而 $h\mid f-g$.

五、(20 分)设多项式 $f(x),g(x),h(x),k(x)\in P[x]$ 满足

$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0$,

$(x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0$,

证明： x^2+1是 $f(x),g(x)$的公因式.

证明: 方法一： 第一个式子乘 $x+1$ 减第二个式子乘 $x-1$，得到.

$2(x^2+1)h(x)+[(x+1)(x-2)-(x-1)(x+2)]g(x)=0$,

即 $2(x^2+1)h(x)-2xg(x)=0$, 从而 $(x^2+1)h(x)=xg(x)$, 而 $(x^2+1,x)=1$,

故 $x^2+1\mid g(x)$.同理

第一个式子乘 $x+2$ 减第二个式子乘 $x-2$，得到.

$4(x^2+1)h(x)+[(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)]f(x)=0$,

即 $4(x^2+1)h(x)+2xf(x)=0$，从而 $2(x^2+1)h(x)=-xf(x)$，

而 $(x^2+1,x)=1$，故 $x^2+1\mid f(x)$.

方法二： 两式相加，相减分别得：

$(x^2+1)(h(x)+k(x))+2xf(x)+2xg(x)=0$,

$(x^2+1)(h(x)-k(x))+2f(x)+4g(x)=0$,

即 $x^2+1\mid 2x(f(x)+g(x)), x^2+1\mid 2(f(x)+2g(x))$，故

$x^2+1\mid 2x(f(x)+g(x))-2x(f(x)+2g(x))$，即 $x^2+1\mid -2xg(x)$,

由 $(x^2+1,x)=1$，故 $x^2+1\mid g(x)$，同时由 $x^2+1\mid 2(f(x)+2g(x))$ 得

$x^2+1\mid f(x)$.

方法三： 把 x^2+1的根 $i,-i$ 代入两式

$(i+1)f(i)+(i+2)g(i)=0,(i-1)f(i)+(i-2)g(i)=0$,

$(-i+1)f(-i)+(-i+2)g(-i)=0,(-i-1)f(-i)+(-i-2)g(-i)=0$，解得

$f(i)=g(i)=f(-i)=g(-i)=0$，故 $x^2+1\mid g(x)$， $x^2+1\mid f(x)$.