高等代数第四章练习题

一　填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$,则 $2A-B^T=$______________; $AB=$__________ .

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $A^{-1}=$______________, $A^*=$______________ , $A^n=$__________ .

3. 设 A 是一 4 阶可逆阵,若 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&-1&4&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$,则 $A=$____________.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\6&2&0\\3&a&4\end{pmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵, 且 $AB=0$, 则 $a=$_______ .

5. 设 $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 是 3 阶方阵, $|A|=-2$,则 $|\beta_1+2\beta_3,\beta_1+2\beta_2+3\beta_3,3\beta_3|=$________ .

6. 设 A,B 是 n 阶方阵, $|A|=2,|B|=-3$,则 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$_________,

7. 设 A,B 均为 3 阶方阵, $|A|=2,|B|=3$,则 $|2AB|=$_____, $\|2A|B|=$_____, $|(-2A)^{-1}-3A^*|=$______.

8. 设 A,B 均为 3 阶方阵,满足 $AB-3A+B=0$,若 $|A+E|=-1$,则 $|B-3E|=$________.

9. 若 n 阶方阵 A 与 B 只是第 j 列不同,给出 $|A+B|$ 与 $|A|+|B|$ 的关系等式____________________.

10. 方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$,则 $A^{-1}=$_________, $(A+2E)^{-1}=$_________, $(A-3E)^{-1}=$_______.

11. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^3=0$,则 $(E-A)^{-1}=$________________ .

12. 设 A,B 是 n 阶可逆阵, $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是__________, $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为__________.

13. 已知 A 是 5 阶方阵, α_1,α_2 是 $Ax=b$ 的不同的解,则 $r((A^*)^*)=$_________.

14. 设 A 是一个 n 阶矩阵,若 $r(A)=1$,则 $r(A^*)=$_______;若 $r(A)=n-1$,则 $r(A^*)=$______.

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$,且 $r(A)=3$, 则 $k=$______.

16. 设 A 是 $n(\ge 3)$ 阶方阵, A 的各行元素之和为 0 ,而 $A^*\ne 0$,则 $r(A)=$_____ .

17. 设 A,B 是 n 阶方阵,且 $r(A)=r$, $r(B)=s$ 则 $r(A,AB)=$_________, $r\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}=$________.

18．设 A 为 n 阶方阵,且 $|A|=1$,则 $r(A)=$______________.

19. 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$, $a<0$, E 为 n 阶单位矩阵, $A=E-\alpha\alpha^T$, $B=E+\dfrac{1}{a}\alpha\alpha^T$,若 A 的逆矩阵为 B,则 $a=$_______.

20. (1) 设 A 是 3 阶可逆方阵,将 A 的第一行的 3 倍加到第三行,再互换第二行和第三行后得到矩阵 B,则 $BA^{-1}=$_____________.

(2) 设 A 是 3 阶可逆方阵,将 A 的第一列的 -3 倍加到第三列,再将第一列的 -2 倍加到第二列,交换第一二列的位置后得到矩阵 B,则 $A^{-1}B=$______________.

21. 设 2 阶矩阵 $A=P(2(2))P(1,2)P(1,2(3))$,则矩阵 $A=$_______________, $A^{-1}=$____________.

22．分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 经过一系列的初等列变换化为 $\begin{pmatrix} 2E \\ C \end{pmatrix}$,则 $C=$__________.

23．已知 $m>n$, $A\in P^{m\times n}$, $B\in P^{n\times m}$,则 $|AB|=$______.

二．计算题

1. 求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2. 求满足 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的 X.

3. 求矩阵 X 使之满足矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,求矩阵 B

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(E+2A)^{-1}(E-A)$,求 $(2B+E)^{-1}$.

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$,求 X.

7. 设 n 阶阵 A 可逆,且 $f(A)=0$,其中 $f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 是一非零多项式,求 A^{-1}.

8．设 $X = AX - A^2 + E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,求矩阵 X .

9．设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\1&-1&1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$,求可逆矩阵 P 与 Q,使得 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&\lambda\\3&6&9\end{pmatrix}$, B 是3阶非零方阵, $AB=0$,对 λ 的可能取值,讨论矩阵 B 的秩 $r(B)$.

三. 证明题

1. 设 A 为2阶矩阵,且 $A^5=0$,证明 $(E-A)^{-1}=E+A$.

2. 设 A 是一个 n 阶方阵,且 $A^2=2A$,证明 $E-A$, $E+A$ 都可逆,并求 $(E-A)^{-1}$,$(E+A)^{-1}$.

3. 设 $A^2=A$, 但 $A\neq E$, 证明 A 不可逆.

4. 任一秩为 r 的矩阵都可表示为 r 个秩为1的矩阵之和.

5. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r ,证明

(a) 存在秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B ,使得 $AB=0$.　(b) 存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 阵 B ,使得 $AB=0$.

6. 若 $A^2=B^2=E$,且 $|A|+|B|=0$,证明 $|A+B|=0$.

7. 设 A 为 n 阶方阵,则 $A^2=E$ 当且仅当秩 $(A+E)$+秩 $(A-E)=n$.

8. 已知 A,B,C,D 为 n 级方阵,满足 $AD=DA$,且 $|A|\neq 0$,证明:$\begin{vmatrix}B&A\\C&D\end{vmatrix}=(-1)^n|AC-DB|$.

9. 已知 n 阶方阵 A 可逆, 证明 A 的伴随阵 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

10．设 A 是方阵, 且 $A^2=A$, 证明任给正整数 k , 都有 $(A+E)^k=E+(2^k-1)A$.

11．设 A,B 为 n 阶方阵,证明:$\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

12．已知 A 可逆,证明 $\begin{bmatrix}A&A\\A&-A\end{bmatrix}$ 可逆,并其逆矩阵.

13. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵,证明:若 $r(A)=r(B)$,则 A,B 等价.

14. 设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$,其中 $m\le n$,若 $AB=E_m$,证明矩阵 B 列满秩.