第二章　　数列极限

§2　　收敛数列的性质

1. §2收敛数列的性质
   - 唯一性
   - 有界性
   - 保号性
   - 保不等式性
   - 迫敛性
   - 四则运算法则
   - 其他运算法则
   - 子列

唯一性

定理

若 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

证明

设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则对于任何正数 $\varepsilon > 0, \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

唯一性

定理

若 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

证明

设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则对于任何正数 $\varepsilon > 0, \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

唯一性

证明

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时 (1), (2) 同时成立, 从而有

$$|a-b|\leq|a_n-a|+|a_n-b|<2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的, 所以 $a=b$.

有界性

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列, 即存在 $M>0$, 使得 $|a_n| \le M,\ n=1,2,\cdots$.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于正数 $\varepsilon=1, \exists N, n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 从而 $|a_n|<|a|+1$.

若令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1\}$, 则对一切正整数 n, 都有 $|a_n| \le M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说 明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条 件.

有界性

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列, 即存在 $M>0$, 使得 $|a_n| \leq M,\ n=1,2,\cdots$.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于正数 $\varepsilon=1, \exists N, n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 从而 $|a_n|<|a|+1$.

若令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1\}$, 则对一切正整数 n, 都有 $|a_n| \leq M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.

有界性

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列, 即存在 $M>0$, 使得 $|a_n|\leq M,\ n=1,2,\cdots$.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 对于正数 $\varepsilon=1, \exists N, n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 从而 $|a_n|<|a|+1$.

若令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1\}$, 则对一切正整数 n, 都有 $|a_n|\leq M$.

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说 明有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条 件.

保号性

定理

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 b, c, $b < a < c$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $b < a_n < c$.

证明

取 $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $b \le a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \le c$, 故 $b < a_n < c$.

注 若 $a > 0$ (或 $a < 0$), 我们可取 $b = \dfrac{a}{2}$ (或 $c = \dfrac{a}{2}$), 则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$).

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

保号性

定理

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 b, c, $b < a < c$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $b < a_n < c$.

证明

取 $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $b \le a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \le c$, 故 $b < a_n < c$.

注 若 $a > 0$ (或 $a < 0$), 我们可取 $b = \dfrac{a}{2}$ (或 $c = \dfrac{a}{2}$), 则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$).

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

保号性

定理

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 $b, c, b < a < c$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $b < a_n < c$.

证明

取 $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,

$b \le a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \le c$, 故 $b < a_n < c$.

注 若 $a > 0$ (或 $a < 0$), 我们可取 $b = \dfrac{a}{2}$ (或 $c = \dfrac{a}{2}$), 则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$).

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

例子

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证明

对任意正数 ε, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$, 所以由 定理 2.4, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ 即\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

例子

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证明

对任意正数 ε, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$, 所以由 定理 2.4, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ 即\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

保不等式性

定理

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为收敛数列，如果存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n\le b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若 $b<a$，取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，由保号性定理，存在 $N>N_0$，当 $n>N$ 时，

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\ b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故 $a_n>b_n$，导致矛盾.

所以 $a\leqslant b$.

保不等式性

定理

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为收敛数列，如果存在正数 N_0，当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \leq b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 若 $b < a$，取 $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$，由保号性定理，存在 $N > N_0$，当 $n > N$ 时，

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},\quad b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$，导致矛盾.

所以 $a \leqslant b$.

注释

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \leq b_n$ 改为 $a_n < b_n$，也只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

这就是说，即使条件是严格不等式，结论却不一定是严格不等式.

例如：虽然 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0.$

迫敛性（夹逼原理）

定理

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{c_n\}$ 满足：存在 N_0，当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \le c_n \le b_n$，则 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

迫敛性（夹逼原理）的证明

证明

对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，所以分别存在 N_1, N_2，使得

当 $n > N_1$ 时，$a - \varepsilon < a_n$;

当 $n > N_2$ 时，$b_n < a + \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，

$$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon.$$

这就证得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

例子

例

求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限.

解

设 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geqslant 0$，则有

$$n = (1+h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 (n \geq 2),$$

故 $1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \leq 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1,$$

所以由迫敛性，求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

四则运算法则

证明过程

定理

若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为收敛数列，则数列

$$\{a_n+b_n\},\ \{a_n-b_n\},\ \{a_n\cdot b_n\}$$

也都是收敛数列，且有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，当 b_n 为常数 c 时，$\lim\limits_{n\to\infty}cb_n=c\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(3) 若 $b_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$，则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n/\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

例子

例

用四则运算法则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}$$

其中 $m \le k$, $a_m b_k \ne 0$.

例子解答

解

依据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$，分别得出:

(1) 当 $m=k$ 时，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{b^m}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{m-1}}+b_0\frac{1}{n^m}}\\=&\frac{a_m}{b_m}.\end{aligned}$$

例子解答

解

(2) 当 $m<k$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-m}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_m + a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}}{b_k+b_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{k-1}}+b_0\frac{1}{n^k}}$$

$$=0\cdot\frac{a_m}{b_k}=0.$$

所以

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_m}, m=k,\\ 0, m<k.\end{cases}$$

运算的补充（例子）

命题

数列$\{a_n\}$收敛，则$\{|a_n|\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim_{n\to\infty}a_n\right|.$$

▸ 证明过程

命题

数列$\{a_n\}(a_n\geqslant 0)$收敛，则$\{\sqrt{a_n}\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}a_n}.$$

▸ 证明过程

一些例子

例

设 $a_n \geq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，根据极限的保号性，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$，即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$，所以由极限的迫敛性，证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

一些例子

例

设 $a_n \geq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，根据极限的保号性，存在 N, 当 $n > N$ 时，有 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$，即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$，所以由极限的迫敛性，证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

一些例子

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\neq -1)$.

解

(1) 当$|a|<1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$，所以由极限四则运算法则，得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a^n}{1+\lim_{n\to\infty}a^n}=0.$$

(2) 当$a=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 当$|a|>1$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)=0$，故得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/a^n}=\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}(1/a^n)}=1.$$

一些例子

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\neq -1)$.

解

(1) 当$|a|<1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$，所以由极限四则运算法则，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a^n}{1+\lim_{n\to\infty}a^n}=0.$$

(2) 当$a=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 当$|a|>1$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)=0$，故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/a^n}=\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}(1/a^n)}=1.$$

一些例子

例

设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证明

设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 由

$$a \le \sqrt[n]{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n} \le \sqrt[n]{m}a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m}a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性，可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n} = a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

一些例子

例

设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n} = \max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_m\right\}.$$

证明

设 $a = \max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_m\right\}$. 由

$$a \leq \sqrt[n]{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n} \leq \sqrt[n]{m}a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m}a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_m}^n} = a = \max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_m\right\}.$$

子列

定义

设 $\{a_n\}$ 为数列，$\{n_k\}$ 为 $\mathbb{N}_+$ 的无限子集，且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列，简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 由定义，$\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项均选自 $\{a_n\}$，且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序.

$\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项，故总有 $n_k \geq k$.

子列

定义

设 $\{a_n\}$ 为数列，$\{n_k\}$ 为 $\mathbb{N}_+$ 的无限子集，且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列，简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 由定义，$\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项均选自 $\{a_n\}$，且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序.

$\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项，故总有 $n_k \geqslant k$.

子列的性质

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a，则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$，当 $n > N, |a_n - a| < \varepsilon$.

设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k \geqslant k$，因此 $k > N$ 时，$n_k \geqslant k > N$，亦有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知，若一个数列的两个子列收敛于不同的值，则此数列必发散.

子列的性质

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a，则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k \geqslant k$，因此 $k > N$ 时，$n_k \geqslant k > N$，亦有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知，若一个数列的两个子列收敛于不同的值，则此数列必发散.

子列的性质

定理

若数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a，则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛到 a.

证明

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$，当 $n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列. 由于 $n_k \geqslant k$，因此 $k > N$ 时，$n_k \geqslant k > N$，亦有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知，若一个数列的两个子列收敛于不同的值，则此数列必发散.

例子

例

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a.$$

证明 (必要性)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时，

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

因为 $2n > N$, $2n-1 \geq N$，所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

从而必要性得证.

例子

例

求证 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a.$$

证明 (必要性)

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

因为 $2n > N$, $2n-1 \geq N$, 所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

从而必要性得证.

例子

证明 (充分性)

设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $k > N$ 时，

$$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon.$$

令 $N = 2K$，当 $n > N$ 时，则有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

例子

例

若 $a_n = (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证明

显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = -1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{2k}\right) = 1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.

例子

例

若 $a_n = (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证明

显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = -1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k}\right) = 1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.

复习思考题

1. 极限的保号性与保不等式性有什么不同?
2. 仿效例题的证法，证明: 若 $\{a_n\}$ 为正有界数列，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = \sup\{a_n\}.$$

作业：

- P31 习题2.2

  1，2，3，4，9，10.

四则运算法则的证明

返回定理

证 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \forall\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$，所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(2) 因 $\{b_n\}$ 收敛，故 $\{b_n\}$ 有界，设 $|b_n| \le M$. 对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

四则运算法则的证明

返回定理

于是

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \\
&\le |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性，证得

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(3) 因为 $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$，由(2)，只要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

四则运算法则的证明

返回定理

由于 $b \neq 0$，据保号性，$\exists N_1$， 当 $n > N_1$ 时，

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \exists N_2$， 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$， 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \leq \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

绝对值性质的证明

返回性质

证明

设$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 则有对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得当$n>N$，有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

此时，有

$$||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon.$$

从而可知

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|=|\lim_{n\to\infty}a_n|.$$

开根性质的证明

返回性质

证明

设$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 由于 $a_n\geqslant 0$，根据极限的保不等式性，有 $a\geqslant 0$.

对于任意 $\varepsilon>0$, $\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$. 于是可得:

(1) $a=0$ 时，有 $|\sqrt{a_n}-|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon}$;

(2) $a>0$ 时，有

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leq\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ 得证.