

数学物理方程第四章

王岗伟

河北经贸大学数学与统计学院

gangwei@hueb.edu.cn

<https://wanggangwei82.github.io/>



2023

内容提要

- 1 二阶线性方程的分类
- 2 二阶线性方程的特征理论
- 3 三类方程的比较
 - 先验估计

前言

在前面各章,我们分别讨论了弦振动方程、热传导方程与拉普拉斯方程。这三类方程虽然形状很特殊,但是在二阶线性偏微分方程中,它们却是三个典型的代表。一般的二阶线性偏微分方程之间的共性与差异,往往可以从对这三类方程的研究得到。本章中,我们就以关于这三类方程的知识为基础,研究一般的二阶线性偏微分方程,并对这三类方程的性质进行比较深入的总结与讨论。在下面的讨论中,常将二阶线性偏微分方程简称为二阶线性方程。

1. 两个自变量的方程

■ 1. 两个自变量的方程

我们首先研究含两个自变量的二阶线性方程, 前面遇到的一维热传导方程、弦振动方程以及二维拉普拉斯方程都是其特例。一般说来, 方程所含的自变量越多, 处理起来也越复杂。先从含两个自变量的方程入手, 较容易了解一般二阶线性方程应如何分类以及各种不同类型方程的特点, 也将有助于对含多个自变量的二阶线性方程的研究。若用 (x, y) 记自变量, 一般的二阶线性方程总可以写成如下的形状

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (1.1)$$

这里 $a_{11}, a_{12}, a'_{22}, b_1, b_2, c$ 及 f 都是变量 x, y 在某一区域 Ω 上的实函数, 并通常假定它们适当光滑, 例如连续可导。

1. 两个自变量的方程

我们希望通过适当的自变量的变换与未知函数的线性变换使方程(1.1) 简化,并在此基础上对方程进行分类。通过种种变换使方程得到简化是偏微分方程研究中常用的方法。例如,就自变量的变换来说,如果一个方程(A) 经过可逆的自变量变换后得到方程(B),那么方程(B) 与方程(A) 就可以看成为同一方程的不同表达形式,方程(A) 的解经过自变量的这个变换后,就得到方程(B) 的解,而方程(B) 的解经过这个自变量变换的逆变换,也就得到方程(A) 的解。如果方程(B) 的形式比方程(A) 的形式简单,那么直接研究方程(B) 就比较方便。又如果好些方程都能通过自变量变换化成方程(B),则对(B) 的研究就更具有典型意义。关于未知函数的变换也可以作类似的说明。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

■ 2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

我们现在开始对方程(1.1)在区域 Ω 中某点 (x_0, y_0) 的附近进行简化。为此,作自变量的变换

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (1.2)$$

假设变换(1.2)二次连续可导,且使函数行列式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

在点 (x_0, y_0) 不等于零。根据隐函数存在定理,在点 (x_0, y_0) 附近变换(1.2)是可逆的。利用变换(1.2),可以将方程(1.1)化成下述关于自变量 ξ, η 的偏微分方程

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

$$\bar{a}_{11}u_u + 2\bar{a}_{12}u_{k\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}. \quad (1.4)$$

由于

$$\begin{cases} u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, \\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y, \\ u_{x,x} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}, \end{cases} \quad (1.5)$$

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

故方程(1.4) 中的 $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{22}$ 为

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \end{cases} \quad (1.6)$$

$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{c}$ 及 \bar{f} 也可以相应地决定。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

现在设法选取变换(1.2), 使方程(1.4)的二阶偏导数项化成最简单的形式。注意到(1.6)中的第三式和第一式的形式是完全相同的, 仅是将 ξ 换成了 η , 因此, 如果能选择到方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.7)$$

的两个函数无关的解 $\varphi = \varphi_1(x, y)$ 及 $\varphi = \varphi_2(x, y)$, 取

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y), \\ \eta = \varphi_2(x, y), \end{cases}$$

方程(1.4)中的系数 $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{22}$ 就变为零。这样, (1.4)式就较(1.1)式大为简化了。现在考察这种选取的可能性。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

我们知道关于 φ 的一阶偏微分方程(1.7)的求解问题可以化为求下述常微分方程在 (x, y) 平面上的积分曲线问题:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.8)$$

设 $\varphi_1(x, y) = c$ 是方程(1.8)的一族积分曲线, 则 $z = \varphi_1(x, y)$ 就是方程(1.7)的一个解。称方程(1.8)的积分曲线为方程(1.1)的特征线, 方程(1.8)有时亦称为特征方程。为了求得方程(1.8)的积分曲线, 将方程(1.8)分解成两个方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (1.9_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.9_2)$$

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

这时有下面三种情形: (1) 在点 (x_0, y_0) 的附近 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. 此时方程(1.9), 及(1.9)₂ 右端取相异的实值, 故(1.8) 的积分曲线为两族不相同的实曲线, 依次将它们表示为 $\varphi_1(x, y) = c$ 及 $\varphi_2(x, y) = c$ 。假设 φ_{1x} 及 φ_{1y} , φ_{2x} 及 φ_{2y} 均不同时为零, 则变换

$$\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y) \quad (1.10)$$

是可逆变换, 因为此时函数行列式不等于零⁽¹⁾。选取这样的变换后, 方程(1.4) 中的 $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{22}$ 都化为零, 同时易知可逆变换不能将二阶偏微分方程变成一阶, 故此时必有 $\bar{a}_{12} \neq 0$ (也可以通过直接计算验证)。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

因此, (1.4)式可化为

$$u_{\xi\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D \quad (1.11)$$

的形式, 其中 A, B, C, D 为 ξ, η 的函数。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

如果在(1.11) 式中再作自变量的变换

$$\xi = \frac{1}{2}(s+t), \quad \eta = \frac{1}{2}(s-t),$$

则方程(1.11) 进一步化为

$$u_{ss} - u_{tt} = A_1 u_s + B_1 u_t + C_1 u + D_1 \quad (1.12)$$

的形式。(2) 在点 (x_0, y_0) 的一邻域中 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$, 并且 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不全为零。此时(1.7) 式化为完全平方

$$(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)^2 = 0,$$

故特征曲线只有一族, 记为 $\varphi_1(x, y) = c$ 。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

选取 $\xi = \varphi_1(x, y)$ 。由于 $\Delta \equiv 0$,

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0,\end{aligned}$$

因此 \bar{a}_{11} 及 \bar{a}_{12} 同时为零。任选一函数 $\eta = \varphi_2(x, y)$, 使 φ_1, φ_2 函数无关, 则通过变换(1.10), 方程(1.1) 就化为

$$\bar{a}_{22}u_{\eta\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D$$

的形式, 其中 $\bar{a}_{22} \neq 0$ 。以 \bar{a}_{22} 除上式两端, 得到形状为

$$u_{\eta\eta} = A_1u_{\xi} + B_1u_{\eta} + C_1u + D_1 \quad (1.13)$$

的方程。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

如果在(1.13) 式中再作未知函数的线性变换

$$v = ue^{-\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} B,(\varepsilon, \tau) d\tau},$$

就得到关于 v 的方程

$$v_m = A_2 v_{\xi} + C_2 v + D_2, \quad (1.14)$$

其中不再出现关于 η 的一阶偏导数项。(3) 在点 (x_0, y_0) 的附近 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. 此时不存在实的特征线, 方程(1.8) 的通积分只能是复函数。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

假设

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c$$

是(1.9)₁ 式的一个通积分, 即满

足 $a_{11}\varphi_x = -\left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\varphi_y$, 并且 φ_1, φ_y 不同时为零, 这里 φ_1, φ_2 是实的函数, 则 $z = \varphi(x, y)$ 满足

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0.$$

为了避免引入复函数, 我们作变换

$$\begin{aligned}\xi &= \operatorname{Re} \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ \eta &= \operatorname{Im} \varphi(x, y) = \varphi_2(x, y).\end{aligned}\tag{1.15}$$

可以证明, $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 是函数无关的。



2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

事实上, 因为 $\varphi(x, y) = c$ 满足 $(1.9)_1$ 式, 故

$$a_{11}\varphi_x = - \left(a_{12} + i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right) \varphi_y. \quad (1.16)$$

把实部及虚部分开, 得到

$$\begin{cases} a_{11}\xi_x = -a_{12}\xi_y + \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\eta_y, \\ a_{11}\eta_x = -a_{12}\eta_y - \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\xi_y. \end{cases} \quad (1.16')$$

由于 $a_{11} \neq 0$ (否则 Δ 不会小于零), 成立

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}} (\xi_y^2 + \eta_y^2).$$

这个行列式的值不等于零, 否则就会推出 $\xi_y = \eta_y = 0$ 。

2. 两个自变量的二阶线性方程的化简

再由(1.16)' 就得出 $\xi_x = \eta_x = 0$, 从而 $\varphi_x = \varphi_y = 0$, 但这与关于函数 φ 的假定不符。因此(1.15)中的 φ_1, φ_2 是函数无关的。由于 $\xi + i\eta$ 满足方程(1.7), 代入后将实部及虚部分开, 得到

$$\begin{aligned}a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\a_{11}\xi_x\xi_y + a_{12}(\xi_2\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y &= 0.\end{aligned}$$

因此, 由(1.6)式, 方程(1.1)化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D \quad (1.17)$$

的形式。

3. 方程的分类

- **3. 方程的分类** 我们看到, 两个自变量的二阶线性方程通过自变量的可逆变换能够化成哪种标准形, 要看二次型

$$Q(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$$

的代数性质如何来定, 或者说, 由 l, m 平面上的二次曲线 $Q(l, m) = 1$ 的性质而定。由于这个曲线可以是一个椭圆、一个双曲线或者一个抛物线, 故我们相应地定义方程在一点的类型如下: 若方程(1.1) 中二阶偏导数项的系数 a_{11}, a_{12}, a_{22} 在区域 Ω 中某点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为双曲型的;

3. 方程的分类

若在点 (x_0, y_0) 情足

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为抛物型的; 若在点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$$

则称方程在点 (x_0, y_0) 为椭圆型的。

其次, 如果方程在一个区域 Ω 中的每点均为双曲型, 那么就称方程在区域 Ω 中是双曲型的。同样, 如方程在区域 Ω 中的每点均为抛物型或椭圆型的, 那么就称方程在区域 Ω 中抛物型或椭圆型的话, 那么它在区域 Ω 中任一点 (x_0, y_0) 的附近就可分别化成(1.11) (或(1.12)), (1.13) (或(1.14)) 或(1.17)的形式因而(1.11)(或(1.12)), (1.13)(或(1.14)) 和(1, 17)

3. 方程的分类

就分别称为双曲型、抛物型与椭圆型方程的标准形式。容易看出, 如果点 (x_0, y_0) 为方程(1, 1) 的双曲型点或椭圆型点, 那么一定存在该点的一个邻域, 使方程在这邻域内是双曲型或椭圆型的, 因此就能在这点的附近将方程化为标准形式。但如点 (x_0, y_0) 为抛物型点, 就不一定存在一个邻域, 使方程在这邻域内是抛物型的, 因此并不能保证在该点附近可化成抛物型方程的标准形式。根据刚才所说的分类方法, 可以容易地看到弦振动方程是双曲型的, 一维热传导方程是抛物型的, 二维的拉普拉斯方程是椭圆型的。由于弦振动方程描述波的传播现象, 它具有对时间可逆的性质; 热传导方程反映了热的传导、物质的扩散等不可逆现象; 而拉普拉斯方程描述平衡或定常的状态。

3. 方程的分类

这三种方程所描述的自然现象的本质不同, 这三种方程的性质也各异。由此可见, 两个自变量的二阶线性方程的上述分类方法, 是有其深刻的原因的。最后, 我们指出, 有些方程在区域 Ω 的一个部分是双曲型的, 而在另一部分是椭圆型的, 而在它们的分界线上是抛物型的。这样的方程在区域 Ω 中称为是混合型的。例如特里科米(Tricomi)方程

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.18)$$

在上半平面 $y > 0$ 是椭圆型的, 而在下半平面 $y < 0$ 是双曲型的。当所考察的区域 Ω 包含轴 $y = 0$ 上的某些线段时, 这方程在 Ω 中就是混合型的。在研究空气动力学中的跨音速流问题时, 常遇到混合型方程。

4. 例题

- 现在我们举出一些化两个自变量的二阶线性偏微分方程为标准形式的例子。

列1 弦振动方程

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0$$

本身已具有标准形式(1.12), 其特征线族为

$$x + at = c \text{ 及 } x - at = c.$$

作变换 $\xi = x + at, \eta = x - at$ 后, 即化为标准形式(1, 11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

4. 例题

利用这种标准形式, 就容易作出它的通解。事实上, 以 v 表 $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, 即得 $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$, 于是 $v = f(\eta)$, 其中 f 是 η 的一个任意函数。再在方程

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$$

中将 ξ 视为参数, 关于 η 积分, 就得到

$$u = \int f(\eta) d\eta + \varphi(\xi)$$

或

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \quad (1.19)$$

其中 φ 和 ψ 是两个任意的二阶连续可导函数。

4. 例题

例2 特里科米方程

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的特征方程为

$$y dy^2 + dx^2 = 0.$$

在椭圆型区域 $y > 0$ 内, 它化为故

$$dx \pm i\sqrt{y}dy = 0,$$

$$x \pm i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c.$$

作变换

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

4. 例题

原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (1.20)$$

在双曲型区域 $y < 0$ 内, 特征方程为故

$$\begin{aligned} dx \pm \sqrt{-y} dy &= 0, \\ x \pm \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} &= c. \end{aligned}$$

作变换

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (1.21)$$

5. 多个自变量的方程的分类

- 考察一般的多个自变量的二阶线性偏微分方程, 它的形式为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (1.22)$$

其中 a_{ij}, b_i, c 及 f 是 n 维空间 (x_1, x_2, \dots, x_n) 中某区域 Ω 上的适当光滑的函数, 并总可取 $a_{i\eta} = a_{ij}$ 。此时, 一般不能像两个自变量情形那样将方程在一个区域内化成标准形式。但也有必要把方程划分为若干类型来进行研究。我们注意到, 在对两个自变量的方程的分类时, 作为分类标准所利用到的是方程中二阶偏导数的系数的代数性质: 使方程为椭圆型的点, 行列式 $\Delta < 0$, 这就是二次型 $A(\lambda) =$

$a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2$ 为正定或负定的情形;

5. 多个自变量的方程的分类

使方程为抛物型的点, $\Delta = 0$, 这就是二次型 $A(\lambda)$ 为退化的情形; 而对于使方程为双曲型的点, 二次型 $A(\lambda)$ 是既不为退化, 又不是正定或负定的情形。换言之, 这三种情形分别对应于二次型 $A(\lambda)$ 的特征根, 即方程

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

的为同号、有零根及异号的情形。对方程(1.22) 也可作二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \quad (1.24)$$

5. 多个自变量的方程的分类

可以看到: 对多个自变量的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_v^2} = 0$$

而言, 二次型 $A(\lambda) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$ 是正定的, 它所对应的矩阵的所有的特征根为同号。对 $n+1$ 个自变量的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

而言, $A(\lambda) = \lambda_0^2 - a^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2)$ 是既非退化, 也非正定(或负定的), 它所对应的矩阵的 $n+1$ 个特征根中, 有 n 个同号(即为 $-a^2$), 而另外一个取相反的符号(即为 1)。

5. 多个自变量的方程的分类

对 $n+1$ 个自变量的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

而言, $A(\lambda) = -a^2 (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)$ 为退化的, 即它所对应的矩阵有一特征根为零。这样, 我们可以自然地作出如下的定义: 设方程(1.22) 在某点 $P(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, 其二次型

$$A(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(P) \lambda_j^2$$

为正定或负定(即矩阵 (a_{ij}) 的特征根的符号完全相同), 那么称方程在点 P 为椭圆型的;

5. 多个自变量的方程的分类

如果 $A(\lambda)$ 在点 P 为退化的(即矩阵 a_{ij} 的特征根中至少有一个为零), 那么称方程在点 P 为抛物型的;如果 $A(\lambda)$ 在点 P 既不为退化, 也不为正定或负定, 但矩阵 (a_{ij}) 的特征根中有 $n-1$ 个同号,那么就称方程在点 P 为双曲型的。还需补充一种情况, 即 $A(\lambda)$ 在点 P 非正定或负定, 亦不退化, 又不为双曲型, 那么就称它为超双曲型的。这时矩阵 (a_{ij}) 至少有两个特征根为正、有两个特征根为负。与两个自变量的情形相类似, 我们可以给出一个方程在某区域中为椭圆型、抛物型、双曲型、超双曲型以及混合型的定义。在以后还可以看到这种分类方法的更进一步的根据。

1. 特征概念

■ 特征概念

对于一个具 n 个自变量的二阶方程来说, 若有一函数 u 在某个 n 维区域内有一阶连续偏导数, 且在此区域内除了一个 $(n-1)$ 维光滑曲面 S ($n=2$ 时它是曲线)外, 有二阶连续偏导数, 并处处满足方程, 同时 u 的二阶偏导数在 S 上的左右极限均存在(具有第一类间断), 那么称这个函数 u 为方程的弱间断解。

1. 特征概念

以右传播波为例, 它在 $x - at = \text{常数}$ 的特征线上为常数。因此, 如果一右传播波 $u = f(x - at)$ 在初始 $t = 0$ 时取值为

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处一阶导数连续、二阶导数有间断, 则相应的右传播波形式的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} [(x - at)^2 - 1]^2, & |x - at| \leq 1, \\ 0, & |x - at| > 1. \end{cases}$$

它在 $x - at = \pm 1$ 处有弱间断。如前所述, 上述解是有物理意义的, 而 $x - at = 1$ 与 $x - at = -1$ 这两条弱间断线恰表示波的前阵面与后阵面。

2. 特征方程

■ 特征方程

在 n 维空间 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的某区域 Ω 上, 考察下面一般的二阶线性方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (2.1)$$

其中 $a_{ij}, b_i (i, j = 1, \dots, n), c$ 及 f 为 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的已知函数。我们问, 在什么条件下一个超曲面⁽¹⁾

$$S: \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.2)$$

如果在 $\varphi = 0$ 上给定了函数 u 及其所有一阶偏导数的值, 能不能利用这些值以及方程(2.1)来唯一地决定 u 的二阶偏导数? 显然, 如果能够唯一地在 S 上决定 u 的二阶偏导数之值, 那么 $\varphi = 0$ 就不可能成为某个弱间断解 u 的弱间断曲面。

2. 特征方程

首先考察 S 为坐标超平面 $x_n = 0$ 的特殊情形。若在 S 上 u 及其一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$ 之值为已知的 (x_1, \dots, x_{n-1}) 的函数, 则显然二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n-1)$ 在 S 上的值可以通过将 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 对 x_j 求导而唯一决定。因此, 剩下需要决定的只是二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ 在 S 上的值。

2. 特征方程

利用方程(2.1) 易知, 若 $a_{nn}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) \neq 0$, 就可以在 S 上唯一地决定出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ 的值。而若成立

$$a_{nn}|_S = a_{nn}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0, \quad (2.3)$$

就不能在 S 上唯一地决定出 u 的一切二阶偏导数。因此, (2.3) 就是坐标超平面 $x_n = 0$ 可能成为方程(2.1) 的某个弱间断解的弱间断面的条件。

2. 特征方程

现在回到一般的情形(2.2)。令 $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 是 S 上任意给定的一点, 则一定可以找到一个自变量的可逆变换 $\xi_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $(i = 1, \dots, n)$, 将 x_0 变为 ξ 坐标中的原点, 而将 x_0 在 S 上的一个邻域变换到 ξ 坐标中原点在 $\xi_n = 0$ 上的一个邻域。事实上, 因假设在超曲面(2.2)上, 有 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \Big|_{x=x_0} \neq \mathbf{0}$, 于是, 至少有某个 $j (1 \leq j \leq n)$, 使 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \neq 0$ 。不妨设 $j = n$, 令

$$\begin{cases} \xi_i = x_i - \dot{x}_i^0 & (i = 1, \dots, n-1), \\ \xi_n = \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.4)$$

2. 特征方程

易见这个自变量变换将 x_0 变换为 ξ 坐标中的坐标原点, 且其在 x_0 点的雅可比(Jacobi) 行列式为 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \Big|_{x=x_0} \neq 0$, 因而它是在 x_0 邻域中的一个可逆变换, 并将超曲面(2.2) 变换为坐标超平面 $\xi_n = 0$ 。在坐标变换(2.4) 下, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \text{只包含 } u \text{ 的一阶偏导数的项,} \end{cases}$$

2. 特征方程

于是方程(2.1) 就化为

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \cdots = f \quad (2.5)$$

的形式,其中被省略的项仅包含 u 及 u 的一阶偏导数,而

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

2. 特征方程

由(2.3)式,就可得到 x_0 在 S 上的邻域可能成为(2.1) 的某个弱间断解的弱间断面的必要条件为

$$\tilde{a}_{nn}(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, 0) = 0,$$

即

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \bigg|_{\xi_n=0} = 0.$$

2. 特征方程

注意到(2.4)式的最后一式, 上式又可写为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \quad (2.7)$$

在 S 上 x_0 的一个邻域中成立。由于 x_0 是 S 上的任意一点, 就得到: 在 S 上成立(2.7)式是 S 可能成为方程(2.1)的弱间断解的弱间断面的必要条件。如果在曲面 S 上成立(2.7)式, 就称 S 为方程(2.1)的特征曲面。

2. 特征方程

■ 特征方向概念

对于一个固定的点 x , 如果过该点的方向 $l(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 满足特征方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{t,\alpha_1\alpha_j} = 0 \quad (2.8)$$

则称 l 为此点 x 的特征方向。由于 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$ 表示超曲面 $\varphi = 0$ 的法向, 所以特征曲面也就是每点的法向为特征方向的曲面。

3. 例题

■ 例题1

对于两个自变量的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

其特征方程为

$$a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2^2 = 0 ?$$

满足上述关系式的方向 (α_1, α_2) 为特征方向(1)。该方程的特征线满足

$$\varphi(x, y) = 0$$

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0.$$

这就是§1 中特征曲线满足的方程。

3. 例题

例题2 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

的特征方程为

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0,$$

因此拉普拉斯方程没有实的特征方向。

3. 例题

例题3 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

的特征方程(2.8) 为

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$$

由于(2.9)式,应有

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

故 $\alpha_0^2 = 1$ 。因此特征曲面为超平面 $t = \text{const}$ 。热传导方程的柯西问题的初始条件恰巧给在特征面 $t = 0$ 上,这和波动方程的情形不同;对波动方程的柯西问题来说,其初始平面 $t = 0$ 为非特征面。

1. 线性方程的叠加原理

■ 线性微分方程概念

我们知道, 所谓算子 L 是线性的, 就是指它满足可加性条件

$$L[C_1u_1 + C_2u_2] = C_1L[u_1] + C_2L[u_2], \quad (3.1)$$

其中 C_1, C_2 为任意给定的常数。如果 L 是线性微分算子, 那么方程

$$Lu = f$$

称为线性微分方程。特别地, 当 $f \equiv 0$ 时方程

$$Lu = 0$$

称为齐次的。

1. 线性方程的叠加原理

叠加原理| 设 u_i 满足线性方程(或线性定解条件)

$$Lu_i = f_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

则它们的线性组合 $u = \sum_{i=1}^n C_i u_i$ (其中 C_1, \cdots, C_n 为任意给定的常数)必满足方程(或定解条件)

$$Lu = \sum_{i=1}^n C_i f_i.$$

特别地, 当 $u_i (i = 1, \cdots, n)$ 满足齐次方程(或齐次定解条件) 时, u 也满足此齐次方程(或齐次定解条件)。

1. 线性方程的叠加原理

叠加原理II 设 u_i , 满足线性方程(或线性定解条件)

$$Lu_i = f_i \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

又假设它们的线性组合 $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ 满足一定的条件(1), 那么 u 满足方程(或定解条件)

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i.$$

特别, 当 $u_i (i = 1, 2, \cdots)$ 满足齐次方程(或齐次定解条件) 时, u 也满足此齐次方程(或齐次定解条件)。

1. 线性方程的叠加原理

叠加原理III 设 $u(M, M_0)$ 满足线性方程(或线性定解条件)

$$Lu = f(M, M_0),$$

其中 M_0 为参数。又假设 $U(M) = \int u(M, M_0) dM_0$ 满足一定的条件(2), 那么 $U(M)$ 满足方程(或定解条件)

$$LU = \int f(M, M_0) dM_0.$$

特别, 当 u 满足齐次方程(或齐次定解条件)时, U 也满足此齐次方程(或齐次定解条件)。这些叠加原理虽是十分明显的, 但它们却是线性方程许多重要解法的基础。

1. 线性方程的叠加原理

例如, 当用分离变量法解齐次方程时, 就是利用方程和边界条件的齐次与线性的性质, 把解表示为满足方程和边界条件的一系列特解的叠加, 并使其和恰好符合初始条件。又如, 在用齐次化原理求非齐次方程的解时, 也是把非齐次方程的解视为一系列在特定初始条件下的齐次方程的解的叠加而构造得到的。在本书第二章中介绍的傅里叶变换法与第三章中介绍的格林函数法, 也利用了叠加原理这一基本性质。我们指出, 对非线性方程(或者是线性方程具有非线性定解条件)的情形, 叠加原理不成立。此时, 在线性问题中许多行之有效的方法就不能直接使用, 而必须另外寻求新的方法, 所以对于非线性方程的讨论往往比线性方程要困难得多。

2. 解的性质的比较

■ 2. 解的性质的比较

前一段中说的是三类方程以至一般线性方程的共性,现在我们来指出三类方程的一些差异。它们之间数学性质的差异往往是相应的物理现象的本质差异在数学上的表现。下面我们对三类典型方程来叙述其差别。对于一般的变系数方程,情况要复杂些,但仍成立类似的结论。

2. 解的性质的比较

(1) **解的光滑性** 在经典意义下, 作为一个二阶偏微分方程的解, 要求有方程中出现的那些二阶偏导数, 并且要求它们连续。因而对经典解来说, 它总是所考虑区域中相当光滑的函数。但是, 对不同类型的方程来说, 解的光滑程度可以很不相同。例如, 对弦振动方程来说, 从达朗贝尔公式可见, 如初始条件 $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$ 中的 $\varphi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$, 且 $\varphi(x)$ 的三阶导数不存在, 则解的三阶偏导数也不存在。对高维波动方程, 利用泊松公式也可看到类似的事实。对于热传导方程来说, 情况就不一样, 从热传导方程解的表达式(见第二章(3.22)式)可以验证, 只要初始条件 $\varphi(x)$ 是有界的, 解 $u(x, t)$ 在 $t > 0$ 时就是无穷可微的; 而当将 t 固定时, 解还是空间变量的解析函数。

2. 解的性质的比较

而当将 t 固定时, 解还是空间变量的解析函数。对于拉普拉斯方程, 其解的光滑性更好, 它的任何连续解在解的定义区域内都是解析函数。可以从三类方程所代表的物理现象来解释这些事实。拉普拉斯方程描写平衡与稳定的状态, 表达这些状态的解应该是非常光滑的; 热传导现象具有能迅速地趋于平衡的特点, 因而解也比较光滑。而双曲型方程所描写的波的传播现象, 却并不如此。在波的传播中, 可以将一定的弱间断性保留下来(例如存在波阵面), 因而解就可能不很光滑; 在解的更广泛意义下, 甚至还可以有带更强的间断性的解。附带指出, 如方程有非齐次项或者是变系数的时候, 解的光滑性质还要受到系数与非齐次项的光滑性的影响。

2. 解的性质的比较

(2) **解的极值性质** 拉普拉斯方程与热传导方程都存在极值原理, 但它们所采取的形式是有些区别的。对拉普拉斯方程而言, 它的解反映已处于稳定状态的物理量, 因而当解不是常数时, 在内部不能取极值; 同时, 其边界的各个部分原则上没有什么本质上的区别, 因而极值可能在边界上任一处达到。至于热传导方程, 由于热量的传播速度很快, 所以初始时如内部有极值, 那么在 $t > 0$ 时内部极值就迅速消失, 因而区域内部的最大值不能超过区域初始时刻及侧面边界上的最大值。双曲型方程通常就没有这样的性质, 这是因为波的传播可以互相叠加, 扰动增大的现象往往会在叠加时出现。

2. 解的性质的比较

(3) **影响区域与依赖区域** 从影响区域和依赖区域来看,三类方程也有很大的区别。对波动方程而言,一点的影响区域为以该点为顶点向上作出的特征锥内部(在三维时为锥的表面),决定特征锥斜度的 a 就是波的传播速度;一点的依赖区域就是以该点为顶点向下作出的特征锥与平面 $t=0$ 所交的圆(或球面)。对热传导方程而言,一点的影响区域是该点以上的整个上半平面,因为只要经过一瞬时,在极远处就会受到该点扰动的影响,扰动传播的速度似乎是无限的;而一点的依赖区间就是整个直线 $t=0$ 。

2. 解的性质的比较

现在考察拉普拉斯方程,它是定常型的,因而没有传播速度,但我们可以考虑这样的问题:在边界曲面 Γ 的部分曲面 Γ_1 上给出不等于零的边界值,而在其余部分 $\Gamma - \Gamma_1$ 上假定解为零,此时相应边值问题的解 $u(x, y, z)$ 是否只是在区域 Ω 的一部分区域 Ω_1 上取不等于零的值,而在其余部分 $\Omega - \Omega_1$ 上恒为零?如果这样,那么这部分区域 Ω_1 就可以称为曲面 Γ_1 的影响区域。回答是否定的,因为根据调和函数的解析性定理,如果 u 在一很小区域上恒等于零,则它必在整个区域上恒等于零,从而在 Γ_1 上也只能取等于零的边界值。因此在曲面 Γ 上任意小的部分 Γ_1 给出边界值,它的影响区域必是全部区域 Ω 。附带指出,由于解析性定理对于很广泛的一类椭圆型方程成立,因而这事实也可以推广到这类方程。

2. 解的性质的比较

上面的讨论也可由这些方程所反映的物理现象来说明。波动方程所反映的波传播现象具有一定的传播速度, 因而一点的初始条件的影响范围是一圆锥体, 一点的依赖区域也是圆锥体。由于热传导的现象是进行得十分迅速的, 因而在方程中就近似地反映为无穷的传播速度, 并表现成热传导方程的影响区域为无限的。至于拉普拉斯方程, 它表示定常状态, 或平衡状态, 这时不必考虑时间的因素, 因而不产生影响的传播速度问题。

2. 解的性质的比较

(4) 关于时间的反演

- 对时间的反演问题的物理意义, 是考察相应物理状态的变化过程是否可逆的。
- 一个物理状态, 其变化过程为可逆的是指: 设在某些外界条件下按某种规律变化的一物理状态, 在时刻 t_1 时处于状态 A , 到时刻 t_2 时变为状态 B ; 如果在 t_2 时刻的状态 B 可以沿着相反的变化过程回到原来的状态 A , 而使外界条件不发生其他的变化, 那么我们就说这物理状态的变化过程是可逆的, 否则, 我们就说这物理状态的变化过程是不可逆的。

2. 解的性质的比较

(4) 关于时间的反演

- 一物理状态的变化过程是否可逆在数学上反映为所归结出来的方程关于时间变量 t 是否是对称的,即以 $-t$ 代替 t 后方程是否不变。
- 在拉普拉斯方程中不出现时间变量,因而不会产生关于时间的反演问题。

2. 解的性质的比较

(4) 关于时间的反演

- 波的传播是一个可逆过程。

事实上, 设以 $u(x, t)$ 表示描写波的传播过程, 它满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

- 在时刻 $t = 0$, 其物理状态为 $u(x, 0)$;
- 而在时刻 $t = t_0$ 时, 其物理状态为 $u(x, t_0)$ 。

2.解的性质的比较

(4)关于时间的反演

- 如果要考察从 t_0 时的状态 $u(x, t_0)$ 沿原来变化过程的逆向过程能否回复到 $t = 0$ 时的状态 $u(x, 0)$, 只要在 $t \leq t_0$ 时求解下面的定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=t_0} = u(x, t_0), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = u_t(x, t_0), \end{cases} \quad (3.2)$$

2.解的性质的比较

(4)关于时间的反演

- 并看它在 $0 \leq t \leq t_0$ 时的状态是否与原来的状态 $u(x, t)$ 相符合就行了。作变换 $t' = t_0 - t$, 上面的问题就化为在 $t' \geq 0$ 时求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t'^2} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \\ \tilde{u}|_{t'=0} = u(x, t_0), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'}|_{t'=0} = -u_t(x, t_0). \end{cases} \quad (3.3)$$

容易看出, 这个问题的解就是

$$\tilde{u}(x, t') = u(x, t_0 - t') = u(x, t). \quad (3.4)$$

- 因此, 波的传播状态从 $t' = 0$ ($t = t_0$) 变化到 $t' = t_0$ ($t = 0$) 的过程 $\tilde{u}(x, t')$ 相当于 $u(x, t)$ 从 $t = t_0$ 变化到 $t = 0$ 的过程, 即 $\tilde{u}(x, t')$ 是 $u(x, t)$ 的逆变化过程。

2.解的性质的比较

(4)关于时间的反演

- 对于热传导方程,情况就不一样。如以 $u(x, t)$ 表示描写热传导过程的函数,它满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

那么 $\tilde{u}(x, t') = u(x, t_0 - t')$ 所满足的方程为

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0,$$

- 与原来的热传导方程不同。与此相应的是对热传导方程在区域 $t < 0$ 内求解柯西问题通常是不适定的。在物理学中这是明显的,因为热传导方程所描述的物理现象如传导、扩散等都是由高到低、由密到稀的单向变化,这种变化过程是不可逆的。

2.解的性质的比较

(5)解的渐近性态

- 波动方程和热传导方程都含有时间变量 t 。但是, 在没有外力和阻尼的情形下, 波动方程描述的是一个能量守恒的保守系统(见第一章), 而热传导方程描述的是热的传导或物质的扩散这样的耗散过程。
- 源于如此不同的物理背景, 当时间变量 t 趋于无穷时, 解的渐近性态也有很大的不同。如在第一章所述, 对在有界区间 $[0, l]$ 上具齐次第一类或第二类边界条件的波动方程的初边值问题, 其能量函数是守恒的, 且从解的表达式(3.15) 也可见到, 解表示为含有 $\sin \frac{k\pi a}{l}t$ 及 $\cos \frac{k\pi a}{l}t$ 的三角级数, 故解并不衰减。而热传导方程的初边值问题的解, 如在第二章所见, 是以指数衰减的方法趋于它的平衡态的。

2.解的性质的比较

(5)解的渐近性态

- 另一方面,从第一及第二章的结果可以看到,无论是波动方程还是热传导方程,在解的渐近性态方面来说,初边值问题的解与初值问题的解,也有很大的不同。例如,对波动方程来说,其具齐次第一类或第二类边界条件的初边值问题的解并不衰减,但是,对初值问题而言,在三维空间变量时,当初值是紧支集时,当 $t \rightarrow +\infty$ 时,解以 t^{-1} 的衰减率趋于零。
- 一般地,可以证明,在 n 个空间变量的情形,解及其偏导数会以 $t^{-\frac{n-1}{2}}$ 的衰减率趋于零,即衰减率是和空间变量的维数 n 有关的。对热传导方程来说,初值问题和初边值问题之间的差别也很明显。对热传导方程具齐次第一类或第二类边界条件的初边值问题,其解总以指数衰减率趋于它的平衡态,而对初值问题而言,解则以 $t^{-\frac{n}{2}}$ 衰减率趋于零,其中 n 是空间变量的维数。这些性质,对相应的非线性方程的研究是非常有用的。

3. 定解问题提法的比较

- 由于三类方程所反映的物理现象有很大的差别, 所以它们可能遇到的定解问题也有很大的差别。例如对椭圆型方程(以拉普拉斯方程为代表)而言, 它反映了一些属于稳定、平衡状态的物理量的分布状况, 因此在其定解问题中, 只有边界条件而没有初始条件, 故一般不提柯西问题与初边值问题。对双曲型方程(以弦振动方程为代表)与抛物型方程(以热传导方程为代表), 虽然都可以提柯西问题与初边值问题, 但它们所需要的初始条件个数也不相同, 对抛物型方程的柯西问题和初边值问题, 其初始条件只需给一个, 而对双曲型方程来说, 却需要两个初始条件。

3. 定解问题提法的比较

- 如果我们将弦振动方程、一个空间变量的热传导方程以及两个自变量的拉普拉斯方程分别写成下列形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.5)$$

3. 定解问题提法的比较

- 在 xOy 平面的区域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 上考虑这些方程的定解问题, 前面研究过的一些定解问题中的定解条件的提法可以用图4.1 表示。很自然会想到这样的问题, 是否可以对拉普拉斯方程提出柯西问题和初边值问题, 对弦振动方程与热传导方程提出狄利克雷问题呢?

3. 定解问题提法的比较

- 我们希望通过数学理论上对这个问题给以分析和回答。但要一般地说明对各种方程可以提出怎样的定解条件并不是一件容易的事情,它是一个专门研究的课题。下面我们仅举例说明有些定解问题不满足适定性的要求,从而这些定解问题的提法是不完善的。

3. 定解问题提法的比较

■ 定解问题适定性

适定性包含存在性、唯一性和稳定性三方面内容

Definition

- (1) 存在性是指所讨论的定解问题至少有一个解
- (2) 唯一性是指这个问题的解最多只有一个
- (3) 稳定性是指出现在定解条件中的资料变化很小时, 问题的解也变化很小

■ 稳定性的具体说明

设函数空间 Φ 和 U 都可按照某种方式规定一个距离而形成距离空间。

那么, 稳定性要求可表示为当 Φ 中元素 φ_1, φ_2 的距离 $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ 充分小时, 相应的解 u_1, u_2 在 U 中的距离 $\rho(u_1, u_2)$ 也充分小。

因此, 函数 φ_1, φ_2 在空间 C^0, C^k 以及 H^k 等空间下的距离为

$$\max |\varphi_1 - \varphi_2|, \max_{0 \leq i < k} |D^i \varphi_1 - D^i \varphi_2|, \\ \left[\int_{\Omega_0 \leq i \leq k} |D^i \varphi_1 - D^i \varphi_2|^2 d\Omega \right]^{1/2},$$

■ 不稳定的定解问题

例题

将 y 看成时间变量,考察拉普拉斯方程的初边值问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < \pi, y > 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{n^k} \sin nx \quad (n \text{ 及 } k \text{ 均为正整数}), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

解: 运用分离变量法可求得该问题的解为

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \operatorname{sh} ny.$$

可以证明此定解问题的解是唯一的。但容易看出这样的定解问题的解却并不是稳定的, 因为把这定解问题的解和方程(3.6) 满足齐次的初始条件与边界条件

$$u|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \quad (3.8)$$

的解 $u_0(x, y) \equiv 0$ 相比较, 虽然它们满足同样的边界条件, 而当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 所满足的初始条件本身以及它的直到 $k-1$ 阶导数都一致地趋于 u_0 所满足的齐次初始条件, 但所对应的解

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \operatorname{sh} ny$$

不仅不一致地趋于零, 而且对于任意固定的一点 $(x, y), y > 0$, 它和 $u_0 \equiv 0$ 的差的振幅却趋于无穷; 不仅如此, 它们差的平方的积

$$\begin{aligned}\|u_n - u_0\|^2 &= \int_0^y \int_0^\pi \left(\frac{1}{n^{k+1}} \sin nx \operatorname{sh} ny \right)^2 dx dy \\ &= \frac{\pi}{8n^{2k+3}} (\operatorname{sh} 2ny - 2ny)\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时也是趋于无穷的。这就是著名的阿达马(Hadamard)的例子。它说明拉普拉斯方程的初边值问题尽管解可能存在并且唯一,但并不是稳定的。类似的例子可以说明拉普拉斯方程柯西问题的不稳定性。再考察弦振动方程的狄利克雷问题。为此,将这个方程写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3.9)$$

的形式,并在由 $\xi = a, \eta = b, \xi$ 轴和 η 轴围成的矩形区域上求解狄利克雷问题(图4.2),所给的边界条件是

为使边界条件连续, 我们还需有

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1(a) = f_4(0), \quad f_3(0) = f_2(b), \quad f_3(a) = f_4(b)$$

等相容性条件。由于方程(3.9)的通解为

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$

由(3.10)中的前面两条件已能完全决定解的表达式为

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) - f_1(0).$$

所以, 必须成立

$$f_3(\xi) = f_1(\xi) + f_2(b) - f_1(0),$$

$$f_4(\eta) = f_1(a) + f_2(\eta) - f_1(0),$$

否则所提的定解问题就不会有解。因而我们一般不能提出弦振动方程的狄利克雷问题。

1.先验估计的介绍

- 先验估计:各类数学物理方程或更一般的偏微分方程理论研究中的一种常用方法。
- 具体思路:在所讨论的定解问题有解存在的先验假定下,导出解所满足的估计。(常用的估计有最大模估计、均方估计等)
- 优点:
 - 1 先验估计本身有可能直接提供关于解的有界性、渐进性等方面的信息。
 - 2 一般可以很快得到相应定解问题解的唯一性和稳定性。
 - 3 结合其他方法,还可以利用先验估计推出所考察定解问题的存在性

2. 椭圆型方程解的最大模估计-介绍

设 Ω 为 \mathbf{R}^n 中具有光滑边界 Γ 的有界区域, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 为
其上的拉普拉斯算子, 讨论 Ω 上调和方程狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

的解的最大值估计。在此我们已用 x 简记 \mathbf{R}^* 中的点,
即 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 。我们先证明以下的极值原理。

定理4.1 (弱极值原理)

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足

$$\Delta u \geq 0, \quad (4.2)$$

则成立

$$\max_a u = \max_{\Gamma} u \quad (4.3)$$

证若(4.2) 为严格的不等式, 则容易得到(4.3) 式。事实上, 若 u 在 Ω 内部某点 P 取极大值, 则对一切 i 都有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(P) \leq 0$, 从

而 $\Delta u > 0$ 不可能成立。再考虑(4.2)为非严格不等式的情形。对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 令 $w = u + \varepsilon e^{x_1}$, 则

$$\Delta w = \Delta u + \varepsilon e^{x_1} > 0,$$

于是 w 的最大值只能在边界上达到, 从而有

$$\max u(x) \leq \max w(x) = \max w(x) \leq \max u(x) + \varepsilon \max e^{x_1},$$

注4.1

与第三章中证明调和方程的解所满足的极值原理相比, 不等式(4.2) 比相应的等式条件放宽了, 而且上述的证明方法也适用于讨论一般二阶线性椭圆型方程的情形。但所得到的结论为“最大值必在边界上取到”, 它比“除恒等于常数外, 最大值不能在内部达到”的结论稍弱, 故定理4.1 也称为弱极值原理。利用定理4.1 可以得到问题(4.1) 的解的最大模估计。

定理4.2 (解的最大模估计)

利用定理4.1可以得到问题(4.1)的解得最大模估计。如下设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是问题(4.1)的解, 则成立

$$\max_a |u| \leq \Phi + CF, \quad (4.4)$$

其中 $\Phi = \max_{\Gamma} |\varphi(x)|$, $F = \sup_{\Omega} |f(x)|$, 而 C 是只依赖于 n 与 Ω 的正常数。证不妨设 Ω 位于带形区域 $0 < x_1 < d$ 中, 作辅助函数

$$v(x) = \Phi + (e^{adt} - e^{ax_1}) F, \quad (4.5)$$

其中 $a > 1$ 。于是, 在 Ω 中有

$$\Delta(u - v) = f + a^2 e^{ar}, F \geq 0, \quad (4.6)$$

而在边界 Γ 上

$$u - v \leq 0. \quad (4.7)$$

故由定理4.1知 $u - v \leq 0$ 在 Ω 内部也成立。取 $C = e^{ad} + 1$ 即得。

2. 热传导方程解的最大模估计

- 设 Ω 为 \mathbf{R}^n 中具有光滑边界 Γ 的有界区域,讨论热传导方程在区域 $Q_T = \Omega \times (0, T)$ 上的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{\Gamma \times (0, T)} = g(x, t), \end{cases} \quad (4.8)$$

可以建立以下的最大模估计。定理4.3

设 $u(x, t) \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 是问题(4.8) 的解,则

$$\max_{Q_T} |u| \leqslant FT + B, \quad (4.9)$$

2. 热传导方程解的最大模估计

■ 其中

$$F = \sup_{Q_T} |f|,$$

$$B = \max \left\{ \max_{x \in \Omega} |\varphi|, \max_{x \in \Gamma, 0 \leq s \leq T} |g| \right\}.$$

证首先,利用证明第二章定理4.1 相同的方法可以证明推广的极值原理: 若 $w(x, t) \in C^2(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$, 且在 Q_T 中满足

$$w_t - a^2 \Delta w \leq 0, \quad (4.10)$$

则 $w(x, t)$ 的极大值必在 Q_T 的抛物边界

$\Sigma_T : \{t = 0, x \in \Omega\} \cup \{x \in \Gamma, 0 \leq t \leq T\}$ 上达到。

2. 热传导方程解的最大模估计

■ 令

$$w(x, t) = u(x, t) - Ft - B. \quad (4.11)$$

易见在 Q_T 中

$$w_t - a^2 \Delta w = f - F \leq 0.$$

此外, 根据 B 的选取可知 $w(x, t)$ 在抛物边界 Σ_T 上非正, 所以由推广的极值原理知 $w(x, t)$ 在 \bar{Q}_T 中非正, 从而

$$\max_{Q_T} u(x, t) \leq FT + B.$$

同理, $\max_{Q_T} (-u)$ 也被同样的上界所控制. 由于波动方程没有极值原理, 对于波动方程的解, 较少用最大模估计来研究解的性质, 而更多的是利用反映波动方程特性的均方模估计。

3. 双曲型方程解的能量估计

- 3. 双曲型方程解的能量估计 现在考察双曲型方程初边值问题的解的能量估计。对于波动方程的情形,已在第一章§6 中进行了讨论,以下讨论一般形式的二阶线性双曲型方程的情形。仍设 Ω 为 \mathbf{R}^n 中的有界区域,且具光滑边界 Γ , 在区域 $Q_T = \Omega \times (0, T)$ 中考察二阶双曲型方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ + b_0(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)u = f(x,t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

3. 双曲型方程解的能量估计

■ 在此,我们作如下的假设:

(i) 系数 a_{ij}, b_i, b_0, c 及右端项 f 都是 \bar{Q}_T 上的连续函数,而且 a_{1j} 在 \bar{Q}_T 上还具有一阶连续偏导数。

(ii) 对一切 $i, j = 1, \dots, n$, 成立 $a_{ij} = a_{ji}$, 且存在正常数 $\alpha > 0$, 使得对一切 $(x, t) \in \bar{Q}_T$ 及任意给定的实向量 (ξ_1, \dots, ξ_n) , 成立

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (4.13)$$

3. 双曲型方程解的能量估计

■ 现给定如下的初始条件及边界条件：

$$t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.14)$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \quad (4.15)$$

其中 $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$ 为区域 Q_T 的侧边界。(4.12), (4.14)及(4.15)构成了双曲型方程的初边值问题。对于这个初边值问题的解 $u(x, t)$, 引入能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx, \quad (4.16)$$

则成立以下的能量估计式。

3. 双曲型方程解的能量估计

- 定理4.4 若 $u(x, t)$ 为初边值问题(4.12), (4.14) 及(4.15) 的解, 能量函数 $E(t)$ 按(4.16) 定义, 则成立能量估计式

$$E(t) \leq E(0)e^{Ct} + Ce^{Ct} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx dt, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.17)$$

其中 C 为一个不依赖于 u 的正常数。证 如同波动方程情形一样, 仍以 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 乘以(4.12)式, 并在 Ω 上关于 x 积分, 就得到对任何 $t(0 \leq t \leq T)$ 成立 $\int_{\Omega} u_t f dx =$

$$\int_{\Omega} \left(u_t u_{tt} - u_t \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + u_t \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + b_0 u_t^2 + c u u_t \right) dx \quad (4.18)$$

3. 双曲型方程解的能量估计

- (4.18) 式左端的第一项可以写为 $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_t^2 dx$; 对其第二项利用格林公式进行分部积分, 并注意到边界条件(4.15) (它隐含着 $(u_t|_{\Sigma_T} = 0)$), 边界积分项为零, 再利用系数 a_{ij} 的对称性, 从而(4.18) 式可以写为 $\int_{\Omega} u_t f dx =$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx \right\} + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_t (a_{ij})_{x_j} u_{x_i} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_{x_j} (a_{ij})_t u_{x_i} dx + \int_{\Omega} \left(u_t \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + b_0 u_t^2 + c u u_t \right) dx, \end{aligned} \quad (4.19)$$

3. 双曲型方程解的能量估计

■ 并简记为

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} p(u, u_t, u_x) dx + \int_{\Omega} u_t f dx, \quad (4.20)$$

其右端第一项表示将(4.19)的右端除 $\frac{dE}{dt}$ 外的所有其余积分项移到右端的结果。由关于系数可微性假设(i), 有

$$\left| \int_{\Omega} p(u, u_t, u_x) dx \right| \leq C_1 \int_{\Omega} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) dx \quad (4.21)$$

其中 C_1 为一个与 u 无关的正常数。

为了估计 u^2 在 Ω 上的积分, 我们先证明如下的事实。

3. 双曲型方程解的能量估计

- **引理4.1** 设 $u = u(x)$ 在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上连续可微, 且在边界 Γ 上为零, 则成立如下的弗里德里克斯 (Friedrichs) 不等式:

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx, \quad (4.22)$$

其中 C_0 是一个与 u 无关的正常数。

3. 双曲型方程解的能量估计

- 证:不妨就 $n = 2$ 的情形证明此不等式,并不妨设 Ω 在第一象限内, 则由 Ω 的有界性可作矩形

$$\Omega_1 = \{0 \leq x_1 \leq a, a \leq x_2 \leq b\} \supset \Omega,$$

并在 $\Omega_1 \setminus \Omega$ 上定义 $u \equiv 0$. 对于任意给定的一点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega_1$, 成立

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^{\bar{x}_1} u_{x_1}(x_1, \bar{x}_2) dx_1,$$

于是利用施瓦茨(Schwarz)不等式, 得

$$u^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \bar{x}_1 \int_0^{\bar{x}_1} u_{x_1}^2(x_1, \bar{x}_2) dx_1 \leq a \int_0^a u_{x_1}^2(x_1, \bar{x}_2) dx_1.$$

3. 双曲型方程解的能量估计

- 将上式两端在 Ω_1 上对 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} u^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 &\leq a^2 \int_{a_1} u_{x_1}^2 dx_1 dx_2 \\ &\leq a^2 \int_{a_1} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

由于在 Ω 外 $u \equiv 0$, 故取 $C_0 = a^2$, 就得

$$\int_{\Omega} u^2 dx_1 dx_2 \leq C_0 \int_{\Omega} (u_{\lambda_1}^2 + u_{\lambda_2}^2) dx_1 dx_2,$$

这就是(4.22)式, 引理证毕。利用(4.22), 由(4.21) 即有

$$\left| \int_a p(u, u_x) dx \right| \leq C_1 \int_0 \left(u_f^2 + \sum_{i=1}^N u_{x_i}^2 \right) dx, \quad (4.23)$$

3. 双曲型方程解的能量估计

- 其中 C_1 为一个与 u 无关的正常数。再注意到

$$\left| \int_a u_t f dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + f^2) dx, \quad (4.24)$$

由(4.20) 并注意到(4.13), 就得到能量函数 $E(t)$ 满足

$$\frac{dE}{dt} \leq C \left(E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx \right), \quad (4.25)$$

其中 C 也是一个与 u 无关的正常数。如同第一章§5 讨论波动方程的情形一样, 在(4.25) 两边乘以 e^{-ct} 再对 t 积分, 即可得

$$E(t) \leq E(0)e^{ct} + Ce^c \int_0^t \int_a f^2 dx dt.$$

定理证毕。

4. 抛物型方程解的能量估计

- 与波动方程的情形相仿, 利用能量估计式(4.17) 即可得到初边值问题(4.12),(4.14)及(4.15) 的解的唯一性以及 在均方模意义下解关于初始资料及右端项的稳定性。

4. 抛物型方程解的能量估计 在 $Q_T = \Omega \times (0, T)$ 上考察下列的二阶抛物型方程

$$u_t - \sum_{1,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (4.26)$$

其中对于系数及右端项仍假设上一段中的(i)、(ii)成立。由本章§1 的定义, 方程(4.26) 是在 Q_T 中的抛物型方程。

4. 抛物型方程解的能量估计

- 现给出如下的初始条件及边界条件: $t=0$:

$$u = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.27)$$

$$u|_{\Sigma_\tau} = 0. \quad (4.28)$$

定理4.5 若 $u(x, t)$ 为初边值问题(4.26) – (4.28) 的解, $E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 dx$, 则成立能量估计式

$$E(t) \leq E(0)e^{ct} + e^{ct} \int_0^t \int_\Omega f^2 dx dt, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.29)$$

其中 C 为一个不依赖于 u 的正常数。

证: 对于方程(4.26) 的解所定义的能量函数 $E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 dx$ 在物理上对应于系统的“内能”, 它与双曲型方程情形下能量函数为动能与位能(总能量)之和的意义是不同的。

4. 抛物型方程解的能量估计

- 为导出能量估计式(4.29), 对方程(4.26) 的两端乘以 u , 然后在 Ω 上关于 x 积分, 得到

$$\int_{\Omega} u \left(u, - \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu \right) dx = \int_{\Omega} u f dx. \quad (4.30)$$

上式左端的第一项可写为

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \right\};$$

对其第二项关于 x 利用格林公式进行分部积分, 注意到由于边界条件(4.28), 分部积分中出现的边界积分项为零。

4. 抛物型方程解的能量估计

■ 于是第二项可写为

$$\int_a \sum_{i,j=1}^n a_{vj} u_{x_j} u_{x_j} dx + \int_a \sum_{i,j=1}^n (a_{y_j})_i u u_{x_j} dx.$$

将上式中的第二项, 连同(4.30)左端的第三、第四项移到(4.30)等式右边, 并将其和记为

$$\int_0 Q(u, u_x) dx,$$

则由关于系数的可微性假设(i) 可得, 对一切 $0 \leq t \leq T$ 成立

$$\left| \int_0 Q(u, u_x) dx \right| \leq C_T \int_0 \left(\sum_{i=1}^n |u| |u_{x_i}| + u^2 \right) dx, \quad (4.31)$$

其中 C_T 为一个依赖于 T 的正常数, 但与 u 无关。

4. 抛物型方程解的能量估计

■ 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\int_a^n \sum_{i=1}^n |u| |u_{x_i}| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^n \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \frac{n}{2\varepsilon} \int_a^n u^2 dx, \quad (4.32)$$

取 $\varepsilon = \frac{\alpha}{C_T}$, 由(4.31) 就可得

$$\left| \int_a^n Q(u, u_x) dx \right| \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{x_i}|^2 + C_1 \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (4.33)$$

4. 抛物型方程解的能量估计

其中 $C_1 = \frac{nC_T^2}{2\alpha} + C_T$ 。将(4.33) 式代入(4.30), 容易得到

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} dx &\leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \\ &\left(C_1 + \frac{1}{2}\right) \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

再注意到由假设(ii)有

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} dx \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx \quad (4.35)$$

就可得到

$$\frac{dE}{dt} \leq C_2 E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx, \quad (4.36)$$

4. 抛物型方程解的能量估计

其中 $C_2 = 2C_1 + 1$ 。与双曲型方程能量不等式的推导相仿, 可由(4.36) 推得(4.29) 式。证毕。由定理4.5 可以立刻推出抛物型方程初边值问题(4.26)-(4.28) 的解的唯一性, 以及在均方模意义下解关于初始资料与右端项的稳定性。

5. 椭圆型方程解的能量估计

能量估计方法也可以用于讨论椭圆型方程的边值问题。设 Ω 是 \mathbf{R}^n 中的一个具有光滑边界 Γ 的有界区域,在 Ω 中考察下列二阶椭圆型方程

$$\sum_{r,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_{i,j}} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \quad (4.37)$$

与前面相仿,我们假设: (i)系数 a_{10}, b_i, c 及右端项 f 都是 $\bar{\Omega}$ 上的连续函数,而且 a_{11} 在 $\bar{\Omega}$ 上还具有一阶连续偏导数。(ii)对一切 $i, j = 1, \dots, n$,成立 $a_{ij} = a_{jn}$, 且存在正常数 $\alpha > 0$,使得对一切 $x \in \bar{\Omega}$ 及任意实向量 (ξ_1, \dots, ξ_n) ,成立

5. 椭圆型方程解的能量估计

$$\sum_{1,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (4.38)$$

考察方程(4.37) 满足边界条件

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (4.39)$$

的狄利克雷问题。我们有定理4.6 存在一个仅依赖于区域 Ω , α 以及 $\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right|, |b_i| (i, j = 1, \dots, n)$ 的最大值的正常数 λ_0 , 在 $c(x) \leq -\lambda_0$ 时, 椭圆型方程边值问题(4.37) 及(4.39) 的解 $u = u(x)$ 满足

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + u^2 \right) dx \leq C \int_{\Omega} f^2 dx, \quad (4.40)$$

5. 椭圆型方程解的能量估计

证对方程(4.37)两端乘以 u , 然后在 Ω 上积分, 得

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i, x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u + cu^2 \right) dx = \int_{\Omega} f u dx. \quad (4.41)$$

将上式左端第一项利用格林公式进行分部积分, 并利用边界条件(4.39), 可得

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i, x_j} u dx = \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \cos(n, x_j) u ds$$

5. 椭圆型方程解的能量估计

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_{i,j}=1} \sum_{i,j}^n a_{x_i} u_{x_j} u_i dx - \int_{\Omega_{i,j}=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} u_{x_i} u dx \\
 & = - \int_{\Omega_{i,j}=1} \sum_{ij}^n a_{\lambda_i} u_{\lambda_j} dx - \int_{\Omega_{i,j}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} u_{x_i} u dx, \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

于是(4.41) 式可改写为

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} - cu^2 \right) dx = I \quad (4.43)$$

5. 椭圆型方程解的能量估计

其中

$$I = - \int_{\Omega_i, j=1} \sum_0^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} u_{x_i} u dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u dx - \int_{\Omega} f u dx. \quad (4.44)$$

记

$$M = \max_i \max_{x \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right|, |b_i| \right), \quad (4.45)$$

则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 有

5. 椭圆型方程解的能量估计

$$\begin{aligned}|I| &\leq 2M \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}| |u| dx + \int_{\Omega} |f| |u| dx \\&\leq 2M \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \frac{n}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dx \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2 + f^2) dx \\&= M\varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \left(\frac{nM}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2M}$, 则由(4.43) 及假设(4.38) 可得

5. 椭圆型方程解的能量估计

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^n \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx - \int_0^n cu^2 dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^n \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \\ \left(\frac{2nM^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx. \end{aligned} \quad (4.46)$$

令 $\lambda_0 = \frac{2nM^2}{\alpha} + \frac{1}{2}$, 则当 $c \leq -\lambda_0$ 时就有

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^n \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx. \quad (4.47)$$

再利用边界条件(4.39) 以及弗里德里克斯不等式(4.22), 可知存在不依赖于 u 的正常数 C , 使成立

5. 椭圆型方程解的能量估计

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + u^2 \right) \leq C \int_{\Omega} f^2 dx.$$

与双曲型方程、抛物型方程的情况相仿, 能量估计式(4.40)即可导致椭圆型方程狄利克雷问题的解的唯一性以及在其均方模意义下对右端项的连续依赖性。我们强调指出, 在定理4.6

中 $c(x) \leq -\lambda_0$ 的条件是重要的。当这个条件不成立时, 能量估计式以及解的唯一性与稳定性都可能不成立。试看下面的例子。

设 Ω 为平面上的矩形区域 $[0, \pi; 0, \pi]$, 在 Ω 上考察下列椭圆型方程的第一边值问题:

$$\Delta u + cu = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (4.48)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (4.49)$$

5. 椭圆型方程解的能量估计

容易直接验证, 当 $c = 2n^2$ 时(其中 n 为任一正整数), 相应的齐次问题除了零解, 还有非零解 $u = \sin nx \sin ny$ 。换言之, 这时唯一性不成立。相应地, (4.40) 形式的能量估计式也不可能成立。

谢谢大家!请多指教!