


数学物理方程

王岗伟 

河北经贸大学数学与统计学院

gangwei@hueb.edu.cn

<https://wanggangwei82.github.io/>



2023

内容提要

1 第一章波动方程

- 弦振动方程的导出,定解条件
- 达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播
- 初边值问题的分离变量法
- 高维波动方程的柯西问题
- 波的传播与衰减
- 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦振动方程是在18世纪由达朗贝尔等人首先给予系统研究的。它是一大类偏微分方程的典型代表。下面先从物理问题出发来导出弦振动方程。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦振动方程是在18世纪由达朗贝尔等人首先给予系统研究的。它是一大类偏微分方程的典型代表。下面先从物理问题出发来导出弦振动方程。

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦, 其长为 l , 在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动, 求弦上各点的运动规律。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦振动方程是在18世纪由达朗贝尔等人首先给予系统研究的。它是一大类偏微分方程的典型代表。下面先从物理问题出发来导出弦振动方程。

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦, 其长为 l , 在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动, 求弦上各点的运动规律。

将实际问题归结为数学模型时, 必须做一些理想化的假设, 以便抓住问题的最本质的特征。在考察弦振动问题时的基本假设为:

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦振动方程是在18世纪由达朗贝尔等人首先给予系统研究的。它是一大类偏微分方程的典型代表。下面先从物理问题出发来导出弦振动方程。

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦, 其长为 l , 在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动, 求弦上各点的运动规律。

将实际问题归结为数学模型时, 必须做一些理想化的假设, 以便抓住问题的最本质的特征。在考察弦振动问题时的基本假设为:

弦是均匀的, 弦的截面直径与弦的长度相比可以忽略, 因此弦可以视为一根曲线, 它的(线)密度 ρ 是常数。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦是柔软的,它在形变时不抵抗弯曲,弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致,而弦的伸长形变与张力的关系服从胡克(Hooke)定律。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦是柔软的,它在形变时不抵抗弯曲,弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致,而弦的伸长形变与张力的关系服从胡克(Hooke)定律。

我们将在上述假定下来导出弦振动方程。先讨论不受外力作用时先振动的情形。根据牛顿第二定律知,

作用在物体上的力=该物体的质量 \times 该物体的加速度

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦是柔软的,它在形变时不抵抗弯曲,弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致,而弦的伸长形变与张力的关系服从胡克(Hooke)定律。

我们将在上述假定下来导出弦振动方程。先讨论不受外力作用时先振动的情形。根据牛顿第二定律知,

作用在物体上的力=该物体的质量 \times 该物体的加速度

于是在每一个时间段内

作用在物体上的冲量=该物体的动量的变化

第一节弦振动方程的导出,定解条件

弦是柔软的,它在形变时不抵抗弯曲,弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致,而弦的伸长形变与张力的关系服从胡克(Hooke)定律。

我们将在上述假定下来导出弦振动方程。先讨论不受外力作用时先振动的情形。根据牛顿第二定律知,

作用在物体上的力=该物体的质量 \times 该物体的加速度

于是在每一个时间段内

作用在物体上的冲量=该物体的动量的变化

由于弦上各点的运动规律不同,必须对弦的各个片段分别进行考察。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

为此,如图1.1选择坐标系,将弦的两端固定在 x 轴的 O,L 两点上($OL=l$)。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

为此,如图1.1选择坐标系,将弦的两端固定在 x 轴的 O,L 两点上($OL=l$)。

由基本假设,可以用 $u(x,t)$ 表示弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移。当 t 固定时 $u(x,t)$ 即表示弦在时刻 t 所处的位置。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

为此,如图1.1选择坐标系,将弦的两端固定在 x 轴的 O,L 两点上($OL=l$)。

由基本假设,可以用 $u(x,t)$ 表示弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移。当 t 固定时 $u(x,t)$ 即表示弦在时刻 t 所处的位置。在这弦上任取一弦段 $(x+\Delta x)$,它的弧长为

第一节弦振动方程的导出,定解条件

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx, \quad (1.1)$$

由基本假设2知 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小,

第一节弦振动方程的导出,定解条件

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx, \quad (1.1)$$

由基本假设2知 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小, 于是 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ 于1相比可以忽略不计, 从而

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这样,可以认为这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间无关。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这样,可以认为这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间无关。我们把在 x 点处的张力记为 $T(x)$,它表示在 x 点处弦的左边部分对右边部分的拉力与弦的右边部分对左边部分的拉力大小均为 $T(x)$ 。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这样,可以认为这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间无关。我们把在 x 点处的张力记为 $T(x)$,它表示在 x 点处弦的左边部分对右边部分的拉力与弦的右边部分对左边部分的拉力大小均为 $T(x)$ 。

由基本假设3知,张力 $T(x)$ 的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这样,可以认为这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间无关。我们把在 x 点处的张力记为 $T(x)$,它表示在 x 点处弦的左边部分对右边部分的拉力与弦的右边部分对左边部分的拉力大小均为 $T(x)$ 。

由基本假设3知,张力 $T(x)$ 的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向。

如图1.1所示,在 x 点处作用于弦段 $(x + \Delta x)$ 的张力在 x 、 u 两个方向上的分力分别为

$$-T(x) \cos \alpha_1, \quad -T(x) \sin \alpha_1,$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这里 α_1 是张力 $T(x)$ 的方向与水平线的夹角, 负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这里 α_1 是张力 $T(x)$ 的方向与水平线的夹角, 负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向。在弦段的另一端 $x + \Delta x$ 点处作用于弦段 $(x + \Delta x)$ 的张力在 x, u 两个方向的分力分别为

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha_2, \quad T(x + \Delta x) \sin \alpha_2.$$

其中 α_2 是张力 $T(x + \Delta x)$ 与水平线的夹角。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

这里 α_1 是张力 $T(x)$ 的方向与水平线的夹角,负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向。在弦段的另一端 $x + \Delta x$ 点处作用于弦段 $(x + \Delta x)$ 的张力在 x, u 两个方向的分力分别为

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha_2, \quad T(x + \Delta x) \sin \alpha_2.$$

其中 α_2 是张力 $T(x + \Delta x)$ 与水平线的夹角。

由于弦只在 x 轴的垂直方向作横振动,所以水平方向的合力为零,即

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha_2 - T(x) \cos \alpha_1 = 0. \quad (1.2)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

由于假设弦仅在平衡位置附近作微小振动, 所以

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2}} \approx 1, \quad (1.3)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} \right]^2}} \approx 1, \quad (1.4)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

于是, (1.2)式变为

$$T(x + \Delta x) - T(x) = 0, \quad (1.5)$$

故 $T(x + \Delta x)$,也就是说, T 是一个常数。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

于是, (1.2)式变为

$$T(x + \Delta x) - T(x) = 0, \quad (1.5)$$

故 $T(x + \Delta x)$,也就是说, T 是一个常数。又由基本假设2知

$$\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (1.6)$$

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}, \quad (1.7)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

所以张力在 x 轴的垂直方向的合力为

$$T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 = T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right],$$

从而在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 中该合力产生的冲量为

$$\int_t^{t+\Delta t} T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dt. \quad (1.8)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

另一方面, 在时刻 t 弦段 $(x, x + \Delta x)$ 的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

另一方面, 在时刻 t 弦段 $(x, x + \Delta x)$ 的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$$

在时刻 $t + \Delta t$ 该弦段的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho \frac{\partial u(x, t + \Delta t)}{\partial t} dx$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

所以从时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$, 弦段 $(x, x + \Delta x)$ 的动量增加量为

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho \left[\frac{\partial u(x, t + \Delta t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] dx. \quad (1.9)$$

由于在 $(t, t + \Delta t)$ 时间段内的冲量应动量的增加, 故

$$\int_t^{t+\Delta t} T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dt =$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

$$= \int_x^{x+\Delta x} \rho \left[\frac{\partial u(x, t + \Delta t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] dx.$$

从而

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \left[T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] dx dt = 0. \quad (1.10)$$

由 Δx , Δt 的任意性可知(1.10)中的被积函数必须为零,从而得到

第一节弦振动方程的导出,定解条件

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

记 $\frac{T}{\rho}$ 为 a^2 , 就得到不受外力作用时弦振动所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.11)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

当存在外力作用时, 若在点 x 处外力 (线) 密度为 $F(x, t)$, 其方向垂直于 x 轴, 则小弦段 $x, x + \Delta x$ 上所受外力为

$$\int_x^{x+\Delta x} F(x, t) dx,$$

它在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 中所产生的冲量为

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} F(x, t) dx dt$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

于是在方程 (1.10) 的左侧应添上这一项, 得到

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \left[T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + F(x, t) \right] dx dt = 0. \quad (1.12)$$

仍由 $\Delta x, \Delta t$ 的任意性知

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -F(x, t) \quad (1.13)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (1.14)$$

这就是外力作用下弦振动所满足的方程, 其中 $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{p}$ 表示单位质量在 x 点处所受的外力。

第一节弦振动方程的导出,定解条件

最后,我们指出,弦振动方程中含有两个自变量 x 、 t ,其中 t 表示时间, x 表示位置。由于它描述的是弦的振动或波动现象,因而它又称为一维波动方程。类似地可导出二维波动方程(例如薄膜振动)和三维波动方程(例如电磁波、声波的传播),它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t). \quad (1.16)$$

第一节弦振动方程的导出,定解条件

上面所导出的弦振动方程 (1.14) 包含有未知函数 $u(x, t)$ 和它的关于自变量的偏导数, 所以是偏微分方程。对于一个偏微分方程来说, 如果有一个函数 $u(x, t)$, 具有方程中所需要的各阶连续偏导数, 且将它代入方程时能使方程成为恒等式, 就称这个函数为该方程的解。列出微分方程以后, 目的就是要从微分方程中求得解或研究解的性质。例如, 为了了解弦的振动情况, 就应该设法求出相应的弦振动方程的解。

我们看到, 弦振动方程 (1.14) 描述了弦作微小横振动时位移函数 $u(x, t)$ 所应满足的一般性规律, 但仅仅利用它还不能完全确定所考察弦的运动状况。这是因为弦的运动

第一节弦振动方程的导出,定解条件

还与其初始状态以及边界所处的状况有关,因此还得给出一些其他条件。

我们看到,弦振动方程(1.14)描述了弦作微小横振动时位移函数 $u(x, t)$ 所应满足的一般性规律,但仅仅利用它还不能完全确定所考察弦的运动状况。这是因为弦的运动还与其初始状态以及边界所处的状况有关,因此还得给出一些其他条件。

在上述弦振动问题中,弦的两端被固定在 $x = 0$ 及 $x = l$ 两点,因此有

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (1.17)$$

方程的导出、定解条件

称为边界条件。此外, 设弦在初始时刻 $t=0$ 时的位置和速度为

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (1.18)$$

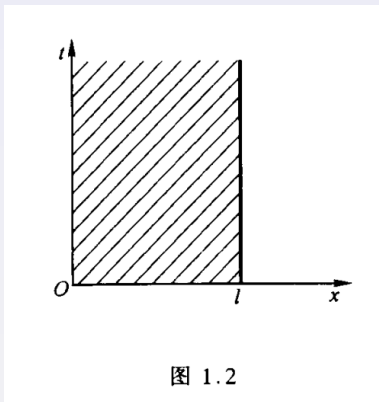
称为初始条件。边界条件与初始条件总称为定解条件。把弦振动方程(1.14)和定解条件(1.17) (1.18)结合起来, 就得到如下的定解问题:

方程的导出、定解条件

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \\ x = 0 : u = 0, \\ x = l : u = 0. \end{cases}$$

要在区域 $(0 \leq x \leq l, t \geq 0)$ 上 (见图1.2) 求上述定解问题的解, 就是要求这样的连续函数 $u = u(x, t)$, 它在区域 $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ 中满足波动方程 (1.19); 在 x 轴 ($t = 0$) 一段区间 $0 \leq x \leq l$ 上满足初始条件 (1.20), 并在边界 $x = 0$ 及 $x = l$ 上分别满足边界条件 (1.21) 及 (1.22)。

方程的导出、定解条件



方程的导出、定解条件

一般形如 (1.17) 的边界条件称为第一类边界条件, (又称狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件)。对于弦振动方程的边界条件通常还可以有以下两种:

(a) 弦的一端 (例如 $x=0$) 处于自由状态, 即可以在垂直于 x 轴的直线上自由滑动, 未受到垂直方向外力。在边界右端的张力的垂直方向分量是 $T \frac{\partial u}{\partial x}$, 得出此时应成立

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

也可以考虑更普遍的边界条件

方程的导出、定解条件

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu(t);$$

其中 $\mu(t)$ 是 t 的已知函数。这种边界条件称为第二类边界条件（又称诺伊曼（Neumann）边界条件）。

(b)在应用上还会遇到另一种情形。将弦的一端固定在弹性支承上，也就是说此时支承的伸缩符合胡克定律。如果支承原来的位置为 $u=0$ ，则 u 在端点的值表示支承在该点的伸长。例如在 $x=l$ 的一端，弦对支承拉力的垂直方向分量为 $-T \frac{\partial u}{\partial x}$ ，由胡克定律知

方程的导出、定解条件

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = ku|_{x=l},$$

其中 k 为弹性系数。因此在弹性支撑的情形, 边界条件归结为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

其中 $\sigma = \frac{k}{T}$ 是已知正数。在数学中也可以考虑更普遍的边界条件

方程的导出、定解条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right) \Big|_{x=l} = v(t),$$

其中 $v(t)$ 是 t 的已知函数。这种边界条件称为第三类边界条件。

下面我们再介绍几个概念。一个偏微分方程所含有的未知函数最高阶导数的阶数称为这个偏微分方程的阶，例如弦振动方程 (1.14) 就是一个二阶偏微分方程。如果方程对未知函数及其各阶导数总体来说是线性的，则称这个方程是线性方程。否则称这个方程是非线方程。

方程的导出、定解条件

进一步, 如果方程对未知函数的所有最高阶导数总体来说是线性的, 则称它为拟线性方程。例如, 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.23)$$

是一阶拟线性方程。如果非线性方程中方程对未知函数的最高阶导数不是线性的, 则称它为完全非线性方程。例如, 方程

方程的导出、定解条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u \quad (1.24)$$

就是一阶完全非线性方程。

我们看到, 方程 (1.14) 与 (1.11) 不同, 它包含有不含 u 及其偏导数的项 $f(x, t)$ (称为自由项), 这样的方程称为非齐次方程, 而 (1.11) 称为齐次方程。类似地, 边界条件

(1.21)、(1.22) 称为齐次边界条件, 相应地, 若边界条件为 $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$, 则称为非齐次边界条件。

方程的导出、定解条件

同样, 初始条件 (1.20) 称为非齐次初始条件, 而对应于 $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ 的初始条件称为齐次初始条件。

方程的导出、定解条件

- 研究数学物理方程的中心内容是求各类问题的解并研究解的性质,使我们其对所描述的自然现象或过程有更深入的认识。

方程的导出、定解条件

- 研究数学物理方程的中心内容是求各类问题的解并研究解的性质,使我们其对所描述的自然现象或过程有更深入的认识。
- 这里首先遇到的一个问题是:定解问题的提法是否合适?例如,这个定解问题的解是否一定存在?这便是解的存在性问题。这个定解问题的解是否只有一个?这便是解的唯一性问题。

方程的导出、定解条件

- 研究数学物理方程的中心内容是求各类问题的解并研究解的性质,使我们其对所描述的自然现象或过程有更深入的认识。
- 这里首先遇到的一个问题是:定解问题的提法是否合适?例如,这个定解问题的解是否一定存在?这便是解的存在性问题。这个定解问题的解是否只有一个?这便是解的唯一性问题。
- 此外,还要考虑解的稳定性问题(或称为解对定解条件或自由项的连续依赖性问题),即当定解条件或自由项作很小的变化时,问题的解是否也做很小的变化。

方程的导出、定解条件

- 定解问题的存在性、唯一性、稳定性，统称为定解问题的适定性。如果一个定解问题的解是存在的，唯一的，而且是稳定的，我们就称这个问题是适定的，即认为这样的定解问题的提法是合适的。

方程的导出、定解条件

- 定解问题的存在性、唯一性、稳定性, 统称为定解问题的适定性。如果一个定解问题的解是存在的, 唯一的, 而且是稳定的, 我们就称这个问题是适定的, 即认为这样的定解问题的提法是合适的。
- 在这里顺便说明对于决定性的现象来说, 一个基本上正确地 (但总是近似的) 描述所考察物理模型的偏微分方程定解问题, 齐姐, 通常应该是存在、唯一并稳定的。这是因为, 所考察的物理模型在一定的条件下总具有唯一确定的状态, 因此, 相应的偏微分方程的定解问题通常也应该具有唯一的解, 即解应是存在的、唯一的; 同时, 因为测量中总有误差, 如果定解条件的微小误差会引起解的重大变化,

方程的导出、定解条件

- 所考察的定解问题实际上就不可能给出相应于所考察物理模型的近似解，从而实际上不可能正确地描述所考察的物理模型，而失去任何实际的作用。

方程的导出、定解条件

- 所考察的定解问题实际上就不可能给出相应于所考察物理模型的近似解,从而实际上不可能正确地描述所考察的物理模型,而失去任何实际的作用。
- 因此,在求解偏微分方程定解问题的过程中,对定解问题的适定性进行一定的分析,可以帮助我们初步判定所归结的定解问题是否合理、所附加的定解条件是否适当以及对怎样的偏微分方程通常应该指定怎样的定解条件等等问题,并对求解起一定的指导作用。但也必须指出,有时一个定解问题尽管不满足适定性的要求,但实际上仍需加以研究。对此,以后还会做比较详细的说明。

方程的导出、定解条件

- 除了研究定解问题的适定性以外，在数学物理方程中还经常研究的问题有解的正则性（光滑性），解的渐进性（包括衰减性），求解方法（包括精确解、渐进解与数值解的求解方法）等等。这些问题的研究构成了数学物理方程的丰富内容。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

叠加原理从本节开始我们讨论弦振动方程的各类定解问题。在此以前,先介绍叠加原理。在物理学的研究中经常出现这样的现象:几种不同原因的综合所产生的效果等于这些不同原因单独产生的效果(即假设其他原因不存在时,该原因所产生的效果)的累加。例如,几个外力作用在一物体上所产生的加速度可以用单个外力各自单独作用在该物体上所产生的加速度相加而得出。这个原理称为金加原理,它的适用范围非常广泛。叠加原理对于用线性方程和线性定解条件描述的物理现象来说,都是成立的。例如,对于弦振动方程(1.14),若 $u_1(x, t)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x, t) \quad (2.1)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

的解, 而 $u_2(x, t)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_2(x, t) \quad (2.2)$$

第二节

2. 弦振动方程的达朗贝尔解法为了考察波动方程的定解问题, 先从最简单的情形入手, 即首先考察边界(从而边界条件)的影响可以忽略不计的情况。如果所考察的物体(如弦线) 长度很长, 而所需知道的又只是在较短时间内且离边界较远的一段范围中的运动情况, 那么边界条件的影响就可以忽略, 并不妨把所考察物体的长度视为无限。在这种情况下, 定解问题归结为如下的形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < +\infty), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty). \end{cases} \quad (2.5 - 2.6)$$

在这个定解问题中, 由于其定解条件只有初始条件, 故通常称为初值问题(也称为柯西(Cauchy) 问题)。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 相应地, §1 中所列的定解问题(1.19)-(1.22), 由于既有初始条件, 又有边界条件, 称为初边值问题, 或混合问题。从§1 中可见, 方程(2.5) 中的自由项 $f(x, t)$ 是由于振动中有外力作用而产生的, 因此(2.5) 中 $f = 0$ 的情况对应于自由振动; 而 $f \neq 0$ 的情况对应于强迫振动。
- 下面我们就可以看到, 对于初值问题(2.5)、(2.6), 不仅可以得到相当简单的求解公式, 而且还可以由此清楚地看到波动传播的规律。为了求解上述初值问题, 我们首先注意到微分方程及定解条件都是线性的。对于这种定解问题, 同样成立着叠加原理, 即如果函数 $u_1(x, t)$ 和 $u_2(x, t)$ 分别是下述初值问题

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \end{cases} \quad (2.7 - 2.8)$$

和

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2.9 - 2.10)$$

的解, 那么 $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ 就一定是原初值问题(2.5)、(2.6) 的解(请读者直接验证)。

- 这表示: 由 $f(x, t)$ 所代表的外力因素和由 $\varphi(x)!$ $\psi(x)$ 所表示的初始振动状态对整个振动过程所产生的综合影响, 可以分解为单独只考虑外力因素(初始位移及速度为零) 或只考虑初始振动状态(外力为零) 对振动过程所产生的影响的叠加。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 这样, 为了求解初值问题(2.5)、(2.6), 只要分别求解齐次方程带非齐次初始条件的初值问题(I)及非齐次方程带齐次初始条件的初值问题(II)即可。首先, 我们考察自由振动情况的初值问题(I), 它可以通过自变量变换的方法求解。引入新自变量:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (2.11)$$

- 利用复合函数求导数的法则, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \end{aligned}$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 类似地,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

从而,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

- 由于 $a^2 > 0$, 因此, 采用(2.11) 式所示的新自变量, 方程(2.7) 就化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.12)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 方程(2.12) 可以直接求解。把它关于 η 积分一次, 再关于 ξ 积分一次, 就容易看出它的通解为

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (2.13)$$

其中 F 和 G 是任意两个可微分的单变量函数。

- 再代回到原来的自变量, 就可将方程(2.7) 的通解表示为

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at). \quad (2.14)$$

利用这个通解表达式, 就可以由初始条件(2.8) 来决定函数 F 和 G , 从而求出初值问题(I) 的解。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 把(2.14) 代入初始条件(2.8), 得到

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= a(-F'(x) + G'(x)) = \psi(x). \end{aligned} \quad (2.15 - 2.16)$$

- 再将(2.16) 式两边积分, 得

$$a(-F(x) + G(x)) + C = \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha, \quad (2.17)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 其中 x_0 是任意一点, 而 C 是积分常数。由(2.15) 和(2.17), 就可以解出 F 和 G :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2a}, \\ G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2a}. \end{cases} \quad (2.18)$$

- 把它们代入(2.14), 就得到初值问题(I) 的解.

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

■

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (2.19)$$

这个公式称为达朗贝尔公式。可以看出, 如果初值问题(I) 有解, 则解一定可以由初始条件用达朗贝尔公式(2.19) 表示出来, 因此解一定是唯一的。

- 同时, 若以记号 C^k 表示在定义域中具有直至 k 阶连续导数的函数的集合, 则不难验证, 当 $\varphi(x) \in C^2, \psi(x) \in C'$ 时, (2.19) 式的确给出初值问题(I) 的解。这样我们就得到

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 定理2.1 设 $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$, 那么初值问题(2.7)、(2.8) 存在唯一的解 $u(x, t)$, 它由达朗贝尔公式(2.19) 给出。解 $u(x, t)$ 关于初始条件的连续依赖性也可以从公式(2.19) 中看出。
- 3. 传播波从(2.14)式可见, 自由振动情况下的波动方程的解, 可以表示成形如 $F(x - at)$ 和 $G(x + at)$ 的两个函数的和, 由此可以特别清楚地看出波动传播的性质, 现在讨论如下: 考察

$$\bar{u}(x, t) = F(x - at) \quad (a > 0), \quad (2.20)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 显然它是齐次波动方程的解。给 t 以不同的值, 就可以看出作一维自由振动的物体在各时刻的相应位置。在 $t = 0$ 时, $\tilde{u}(x, 0) = F(x)$, 它对应于初始的振动状态(相当于弦在初始时刻各点位移状态), 如图1.4 实线所示。
- 经过时刻 t_0 后, $\tilde{u}(x, t_0) = F(x - at_0)$, 在 (x, u) 平面上, 它相当于原来的图形向右平移了一段距离 at_0 , 如图1.4 虚线所示。随着时间的推移, 这图形还要不断地向右移动。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 这说明当齐次波动方程的解具有(2.20) 的形式时, 振动的波形以常速度 a 向右传播。因此, 齐次波动方程的形如 $F(x - at)$ 的解所描述的运动规律, 称为右传播波。同样, 形如 $G(x + at)$ 的解, 称为左传播波, 其所描述的振动的波形以常速 a 向左传播。由此可以知道, 图1.4 方程(2.5) 中出现的常数 a , 表示波动的传播速度。
- 上述这种把定解问题(I) 的解表示为右传播波和左传播波相叠加的方法, 又称为传播波法(也称行波法)。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 4. 依赖区间、决定区域和影响区域从达朗贝尔公式(2.19)立即可以看出, 初值问题(2.7)、(2.8) 的解在上半平面 $t \geq 0$ 上点 (x, t) 处的值 $u(x, t)$ 由初始资料 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在 x 轴的区间 $[x - at, x + at]$ 上的值所唯一确定, 而与 $\varphi(x), \psi(x)$ 在该区间外的值无关。
- 这个区间称为点 (x, t) 的依赖区间。它是过 (x, t) 点分别作斜率为 $\pm \frac{1}{a}$ 的直线与 x 轴所交截而得的区间(见图1.5)。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 对初始轴 $t = 0$ 上的一个区间 $[x_1, x_2]$, 过点 x_1 作斜率为 $\frac{1}{a}$ 的直线 $x = x_1 + at$, 过点 x_2 作斜率为 $-\frac{1}{a}$ 的直线 $x = x_2 - at$, 它们和区间 $[x_1, x_2]$ 一起构成一个三角形区域(图1.6)。此三角形区域中任一点 (x, t) 的依赖区间都落在区间 $[x_1, x_2]$ 之内, 因此, 解在此三角形区域中的数值就完全由区间 $[x_1, x_2]$ 上的初始条件决定, 而与此区间外的初始条件无关。
- 这个区域就称为区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域。给定区间 $[x_1, x_2]$ 上的初始条件, 就可以在其决定区域中完全决定初值问题的解。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 另一方面, 如果在初始时刻 $t = 0$, 初始资料 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的值在区间 $[x_1, x_2]$ 上有变动(称为初始扰动)。那么, 经过时间 t 后, 该扰动所传到的范围(受初始扰动影响到的范围) 就由不等式

$$x_1 - at \leq x \leq x_2 + at \quad (t > 0) \quad (2.21)$$

所限定, 而在此范围外则不受影响, 仍处于原先的状态。

- 在 (x, t) 平面上, (2.21) 式所表示的区域(图1.7) 称为区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 在这区域中, 初值问题的解 $u(x, t)$ 的数值是受到区间 $[x_1, x_2]$ 上初始条件的影响的;
- 而在此区域外, $u(x, t)$ 的数值则不受区间 $[x_1, x_2]$ 上初始条件的影响。
- 特别, 将区间 $[x_1, x_2]$ 收缩为一点 x_0 , 就可得一点 x_0 的影响区域为过此点的两条斜率各为 $\pm \frac{1}{a}$ 的直线($x = x_0 \pm at$) 所夹成的角状区域(图1.8)。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 在上面的讨论中, 我们看到在 (x, t) 平面上斜率为 $\pm \frac{1}{a}$ 的直线 $x = x_0 \pm at$ 对波动方程的研究起着重要的作用, 它们称为波动方程的特征线。
- 我们看到, 扰动实际上沿特征线传播。扰动以有限速度传播, 是弦振动方程的一个重要特点。
- 例: 现在利用传播波法来讨论一端固定的半无界弦的自由振动问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t > 0, 0 < x < \infty), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) & (0 \leq x < \infty), \\ x = 0 : u = 0. \end{cases}$$

(2.22 – 2.24)

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 为了求解此问题, 我们可以设想在 $x = 0$ 的左例仍然有弦存在, 只是在振动的过程中 $x = 0$ 这一点始终保持不动。这样考虑的一个无界弦的自由振动问题显然和原先所考虑的固定端点的半无界弦的自由振动问题是等价的。
- 问题于是化为: 如何将在 $x \geq 0$ 上已给的初始数据延拓为整个直线 $-\infty < x < \infty$ 上的函数, 使得用延拓后的函数作初值的柯西问题, 其解在 $x = 0$ 处恒为零。记 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 是由 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 分别延拓而得的函数。
- 由达朗贝尔公式, 以 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 的初值的柯西问题的解为

$$U(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi. \quad (2.25)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 因此, 要使 $U(x, t)$ 在 $x = 0$ 处恒为零, 就应当成立

$$\frac{1}{2}(\Phi(at) + \Phi(-at)) + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi = 0.$$

- 为此, 只要将 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 作奇延拓即可。
- 也就是说, 令

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \begin{cases} \varphi(x) & (x \geq 0), \\ -\varphi(-x) & (x < 0), \end{cases} \\ \Psi(x) &= \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0), \\ -\psi(-x) & (x < 0), \end{cases}\end{aligned}\tag{2.26 - 2.27}$$

就可达到要求。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 于是, 将上面定义的函数 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 代入(2.25) 式,
- 即得问题(2.22) – (2.24) 的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x \geq at), \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (0 \leq x < at). \end{cases} \quad (2.28)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 5. 齐次化原理现在我们考察强迫振动情形的初值问题

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (2.29 - 2.30)$$

为了求解此问题,我们可以利用下述的齐次化原理,把非齐次方程的求解问题化为相应的齐次方程的情况来处理,从而可以直接利用前面有关齐次方程的结果。

- 由于所考察的定解问题来自于物理模型,我们首先联系所考察的物理模型来作一些分析和说明。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 从§1 中导出弦振动方程的过程可知, 自由项 $f(x, t)$ 表示时刻 t 时在 x 处单位质量所受的外力, 而 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 表示速度。
- 把时段 $[0, t]$ 分成若干小的时段 $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j (j = 1, 2, \dots, l)$, 在每个小的时段 Δt 中, $f(x, t)$ 可以看作与 t 无关, 从而以 $f(x, t_j)$ 代替 $f(x, t)$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{F(x, t_j)}{\rho}, \text{ 而 } F(x, t_j) \text{ 表示外力, 所以在时段 } \Delta t, \text{ 中自由项所产生的速度改变量为 } f(x, t_j) \Delta t_j .$$
- 把这个速度改变量看作是在时刻 $t = t_j$ 时的初始速度, 它所产生的振动可以由

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 下面的齐次方程带非齐次初始条件的初值问题来描述:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial x^2} = 0 & (t > t_j), \\ t = t_j : \widetilde{W} = 0, \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} = f(x, t_j) \Delta t, \end{cases} \quad (2.31)$$

其解记为 $\widetilde{W}(x, t; t_j, \Delta t)$ 。

- 按照叠加原理, $f(x, t)$ 所产生的总效果可以看成是无数个这种瞬时作用的叠加。
- 这样, 定解问题(II) 的解 $u(x, t)$ 应表示成

$$u(x, t) = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \widetilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j). \quad (2.32)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 由于(2.31) 为线性方程, 所以 \widetilde{W} 与 Δt_j 成正比, 即如果记 $W(x, t; \tau)$ 为如下齐次方程的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t > \tau), \\ t = \tau : W = 0, \frac{\partial W}{\partial t} = f(x, \tau) \end{cases} \quad (2.33)$$

的解,

- 则

$$\widetilde{W}(x, t; t, \Delta t_1) = \Delta t, W(x, t; t_j).$$

于是定解问题(II) 的解可表示为

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

■

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \widetilde{W}(x, t; t_j, \Delta t_j) \\ &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t W(x, t; t_j) \Delta t_j \\ &= \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau. \end{aligned}$$

■ 这样, 我们就得到如下的

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 定理2.2 若 $W(x, t; \tau)$ 是初值问题(2.33) 的解(其中 τ 为参数), 则

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau \quad (2.34)$$

就是初值问题(II) 的解。

- 定理2.2 称为齐次化原理(或Duhamel 原理)。为写出 $W(x, t; \tau)$ 的具体表达式, 在初值问题(2.33) 中作变换 $t' = t - \tau$ 。相应地, (2.33) 化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t' > 0), \\ t' = 0 : W = 0, \frac{\partial W}{\partial t'} = f(x, \tau) \end{cases} \quad (2.35)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 的形式,于是利用达朗贝尔公式(2.19), 就得其解为

$$W(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi, \tau) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-u(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (2.36)$$

- 再代入(2.34) 式就得到所考察的初值问题(II) 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-u(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (2.37)$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

■

$$= \frac{1}{2a} \iint_G f(\xi + \tau) d\xi d\tau,$$

其中区域 G 为 (ξ, τ) 平面上过点 (x, t) 向下作两特征线与 ξ 轴所夹的三角形区域, 见图1.9。

- 上面,我们通过对物理模型的分析,应用叠加原理,得出了定解问题(11)的解的表达式(2.37) 式。它究竟是否确实为定解问题(11) 的解,还需要按照解的定义进行数学上的验证。

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 假设 $f \in C^1$, 从(2.37) 式, 由关于含参变量积分的求导法则, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x + a(t - \tau), \tau) + f(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) + \frac{a}{2} \int_0^t [f_x(x + a(t - \tau), \tau) - f_x(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a} \int_0^t [f(x + a(t - \tau), \tau) - f(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2a} \int_0^t [f_{xx}(x + a(t - \tau), \tau) - f_{xx}(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau,$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

即 $u(x, t)$ 满足方程(2.29)。

- 再由(2.37)式及 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的表示式可得

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

达朗贝尔(d'Alembert) 公式、波的传播

- 即 $u(x, t)$ 满足初始条件(2.30)。所以(2.37) 式所表示的 $u(x, t)$ 确是定解问题(II) 的解。
- 再利用叠加原理, 即容易得到初值问题(2.5)、(2.6)的解。最后,我们指出齐次化原理不仅可以应用于非齐次波动方程的柯西问题,而且也能应用于初边值问题以及其它方程(例如热传导方程)的定解问题。
- 本书中将多次用到这一原理。

初边值问题的分离变量法

- 上节考察了波动方程初值问题, 本节进一步考察波动方程的初边值问题, 并介绍一种常用的解法——分离变量法。考察波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \\ x = 0 : u = 0, \\ x = l : u = 0. \end{cases} \quad (3.1 - 3.3)$$

- 利用叠加原理, 上述初边值问题可以分解为下面两个初边值问题:

第三节

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \\ t = 0 : u_1 = \varphi(x), \frac{\partial u_1}{\partial t} = \psi(x), \\ x = 0 \text{ 和 } x = l : u_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u_2 = 0, \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \\ x = 0 \text{ 和 } x = l : u_2 = 0; \end{cases}$$

■ 而且显然有

$$u = u_1 + u_2.$$

正像§2 中一样,关键是求解问题(I)。

■ 在下面可以看到,问题(II) 可以归结为问题(I) 来求解。

■ 因此,我们首先考察问题(I) 的求解,再转而解决问题(II)。问题(I)描述了两端固定

初边值问题的分离变量法

- 的弦作自由振动的物理过程。从物理上知道,一个复杂的振动往往可以分解成许多简单的振动的叠加。如弦振动所发出的声音可以分解成各种不同频率的单音的叠加。相应于每种单音,弦振动时波形保持不变,从而当时间变化时各点的振幅作同步的变化。也就是说,每种单音都是具有形式为

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

的特殊解, 而整个复杂振动过程可以通过这种特殊解的叠加得到。下面我们详细介绍如何用这一想法来求解初边值问题

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \\ x = 0 \text{ 及 } x = l : u = 0. \end{cases} \quad (3.4 - 3.6)$$

初边值问题的分离变量法

- 我们试求方程(3.4)的可以分离变量的非平凡(即不恒等于零)的特解:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.7)$$

并要求它满足齐次边界条件(3.6)。

- 这里 $X(x)$ 及 $T(t)$ 分别表示仅与 x 有关及仅与 t 有关的待定函数。
- 将(3.7)代入方程(3.4), 得到

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0.$$

将上式分离变量,有

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.8)$$

- 由于在(3.8) 式中, 左边仅是 t 的函数,右边仅是 x 的函数,左

初边值问题的分离变量法

- 右两端要相等, 只有等于同一

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.9)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.10)$$

这样,方程(3.8) 就被分离为两个常微分方程, 其中一个仅含有自变量 t , 另一个仅含有自变量 x , 我们可以通过求解这两个方程来决定 $T(t)$ 及 $X(x)$, 从而得到方程(3.4) 的特解。

- 为了使此解是满足齐次边界条件(3.6) 的非平凡解, 就必须找方程(3.10) 的满足边界条件

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (3.11)$$

的非平凡解。方程(3.10) 的通解随 $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ 以及 $\lambda < 0$ 而不同,下面分三种情况讨论。

初边值问题的分离变量法

- 情形A 当 $\lambda < 0$ 时,方程(3.10) 的通解可以写成

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

要使它满足边界条件(3.11), 就必须

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} &= 0. \end{aligned}$$

- 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0,$$

初边值问题的分离变量法

- 只能 $C_1 = C_2 = 0$ 。故在 $\lambda < 0$ 的情况得不到非平凡解。情形B 当 $\lambda = 0$ 时,方程(3.10) 的通解可以写成

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

要满足边界条件(3.11), $X(x)$ 也只能恒等于零。

- 情形C 当 $\lambda > 0$ 时,方程(3.10) 的通解具有如下形式:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

由边界条件 $X(0) = 0$ 知 $C_1 = 0$, 再由

$$X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

初边值问题的分离变量法

- 可知, 为了使 $C_2 \neq 0$, 就必须 $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ 。于是

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad (k = 1, 2, \cdots). \quad (3.12)$$

- 这样就找到了一族非零解

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1, 2, \cdots). \quad (3.13)$$

称(3.13) 右端的函数为常微分方程(3.10) 满足边界条件(3.11) 的固有函数(或特征函数), 而 $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ 称为相应的固有值(或特征值)。

- 将固有值 λ_k 代入方程(3.9) 中, 可得其通解为将固有值 λ_k 代入方程(3.9) 中, 可得其通解为

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l}t \quad (k = 1, 2, \cdots), \quad (3.14)$$

初边值问题的分离变量法

- 其中 A_k, B_k 为任意常数。这样, 就得到方程(3.4) 的满足齐次边界条件(3.6)的下列分离变量形式的特解:

$U_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) =$
 $(A_k \cos \frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l}t) \sin \frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1, 2, \dots)$. 现在我们设法作这种特解的适当的线性组合, 以得出初边值问题(I)的解。也就是说, 要决定常数 A_k, B_k 使

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l}t \right) \sin \frac{k\pi}{l}x \quad (3.15)$$

满足初始条件(3.5)。

- 注意到在上述级数可以逐项求导时,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(-A_k \sin \frac{k\pi a}{l}t + B_k \cos \frac{k\pi a}{l}t \right) \sin \frac{k\pi}{l}x,$$

初边值问题的分离变量法

- 故由初始条件(3.5)应有

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k k \pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x. \end{cases}$$

- 因此, A_k 和 $\frac{B_k k \pi a}{l}$ 应分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[0, l]$ 区间中正弦展开的傅里叶级数的系数, 即

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi, \\ B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \end{cases} \quad (3.16)$$

现在证明当定解问题(I) 的初始条件中的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 满足一定的条件时,级数(3.15) 确实是这定解问题的解。

- 注意到级数(3.15) 中的每一项都满足方程(3.4), 因此只要

初边值问题的分离变量法

- 证明在 φ 和 ψ 满足一定的条件时, 级数(3.15) 可以逐项求导两次就好了。
- 也就是说, 如果证明了级数(3.15) 求导两次后仍是一致收敛的, 那么它一定满足方程(3.4) 。此时初始条件(3.5) 和边界条件(3.6) 的满足也是显然的推论了。
- 根据傅里叶级数的理论可知引理3.1
若 $\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$, 并
且 $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, 系数 A_k, B_k 由(3.16) 式确定。那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |A_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |B_k|$$

收敛。

- 引理的证明见附录I。

初边值问题的分离变量法

- 由引理3.1 知, (3.15) 式右边关于 x 及 t 逐项求导二次以后的级数是绝对且一致收敛的, 因而这些求导后的级数收敛于 u 的相应的导数, 所以 u 满足相应的方程、初始条件及边界条件, 故得定理3.1 若函数 $\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$, 并且

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad (3.17)$$

则弦振动方程的定解问题(I) 的解是存在的, 它可以用级数(3.15) 给出, 其中 A_k 及 B_k 由(3.16) 式确定。

- 通常称条件(3.17) 为相容性条件。以上求解方法的特点就是利用具有变量分离形式的特解(3.7) 来构造初边值问题(3.1)-(3.3) 的解, 故这一方法称为分离变量法。18 世纪初, 傅里叶(Fourier) 首先利用这

初边值问题的分离变量法

- 一方法求解偏微分方程,也正是这种求解过程展示了傅里叶级数的作用与威力,故分离变量法也称为傅里叶方法。

当 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 不满足定理3.1 中所述的条件(例如, $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 仅为连续函数) 时,我们可以把 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 分别看成函数列

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k k \pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x$$

的平均收敛极限。

- 对应于初始条件为 $\varphi_n(x)$ 及 $\psi_n(x)$ 的方程(3.4) 的解是

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (3.18)$$

初边值问题的分离变量法

- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它平均收玫于(3.15) 式所给出的形式解。因此 $u(x, t)$ 可以作为函数列 $u_n(x, t)$ 的平均收玫极限, 而 $u_n(x, t)$ 的初始条件也分别平均收玫于 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 。当 n 很大时, 可以把 $u_n(x, t)$ 看成问题的近似解, 因为方程及边界条件已经满足, 初始条件也近似地得到满足。
- 在实用上, 这常常是行之有效的。作为近似解收玫的极限 $u(x, t)$, 它能比所有的 $u_n(x, t)$ 更好地反映实际情况, 所以它虽然不符合前述解(经典解) 的定义, 但它也是很有实际意义的。
- 通常也将它称为相应初边值问题的解。
- 2. 解的物理意义由级数(3.15) 可知, 初边值问题(I) 的解是

$$u_k(x, t) = \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (3.19)$$

初边值问题的分离变量法

- 其中 $N_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$, $\cos \theta_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}$, $\sin \theta_k = \frac{-B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}$. 在物理上, N_k 称为波的振幅, ω_k 称为圆频率, θ_k 称为波的初位相。由于上式中常数 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 所以当 k 固定时, 圆频率 ω_k 只与弦本身的性质(弦长 l , 张力 T 和密度 ρ) 有关, 它也称为固有(圆) 频率。
- 于是, $u_k(x, t) = N_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \cos(\omega_k t + \theta_k)$ 代表这样的振动波: 在所考虑的弦上各点均以同一频率作简谐振动; 它们的位相相同, 而振幅 $|N_k \sin \frac{k\pi}{l} x|$ 依赖于点 x 的位置。
- 弦上位于 $x = \frac{ml}{k}$ ($m = 0, 1, \dots, k$) 处的点在振动过程中保持不动, 称为节点。弦的这种形态的振动称为驻波。于是, $u(x, t)$ 的级数形式(3.15) 表示自由振动问题(3.4)-(3.6) 是由一系列频

初边值问题的分离变量法

- 率成倍增长, 且位相不同、振幅不同的驻波叠加而成的, 所以分离变量法又称为驻波法。弦所发出的声音, 其音调由其振动频率决定, 而声音的强度则决定于振动的振幅。弦所能发出的最低音所对应的圆频率就是其最低固有频率 $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$, 这个音称为弦的基音。其余的圆频率是 ω_1 的整数倍, 称为泛音。
- 通常弦所发出的声音即由基音与泛音叠加而成。物理上这一事实与前述的分离变量法的求解结果是相符的。
- 例: 设弦的两端固定在 x 轴的 $x=0$ 及 $x=l$ 上, 在点 $x=c$ ($0 < c < l$) 处向上拉起 h , 而后放开作自由振动, 求其运动规律。解以 $u(x, t)$ 表示弦上各点的振动, 它满足(3.4)-(3.6), 其中初始条件可写为

初边值问题的分离变量法

■

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x & (0 < x \leq c), \\ \frac{h}{l-c}(l-x) & (c < x \leq l), \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \equiv 0.$$

- 问题的解 $u(x, t)$ 可以用(3.15) 式表示, 由于 $\psi(x) \equiv 0$, 故所有的 $B_k = 0$, 又由(3.16) 式知

初边值问题的分离变量法

■

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{h}{c} \xi \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi + \frac{2}{l} \int_c^l \frac{h}{l-c} (l-\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi \\ &= \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)k^2} \sin \frac{k\pi c}{l}, \end{aligned}$$

■ 于是得到

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi a}{l} t. \quad (3.22)$$

初边值问题的分离变量法

- 非齐次方程的情形现在讨论非齐次方程的初边值问题

$$(II) \quad (II) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ x = 0 \text{ 和 } x = l : u = 0. \end{cases} \quad (3.23 - 3.25)$$

- 和§2 中非齐次波动方程初值问题的情形完全类似, 此时也成立着如下的齐次化原理若 $W(x, t; \tau)$ 是初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t > \tau), \\ t = \tau : W = 0, \frac{\partial W}{\partial t} = f(x, \tau), \\ x = 0 \text{ 和 } x = l : W = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

初边值问题的分离变量法

- 的解(其中 $\tau \geq 0$ 为参数), 则

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau \quad (3.27)$$

- 就是初边值问题(II) 的解。令 $t' = t - \tau$, 混合问题(3.26) 就化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & (t' > 0), \\ t' = 0 : W = 0, \frac{\partial W}{\partial t'} = f(x, \tau), \\ x = 0 \text{ 和 } x = l : W = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

- 由于方程及边界条件都是齐次的,因此(3.28) 和混合问题(I) 属于同一类,故可直接应用上一段分离变量法所得的结果。利用(3.15)、(3.16)式,我们得到

初边值问题的分离变量法

■

$$\begin{aligned} W = W(x, t; \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} t' \sin \frac{k\pi}{l} x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau) \sin \frac{k\pi}{l} x, \end{aligned} \quad (3.29)$$

而

$$B_k(\tau) = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \quad (3.30)$$

- 由齐次化原理, 把(3.29) 代入(3.27), 就得到混合问题(II) 的解为

初边值问题的分离变量法

■

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t - \tau) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.31)$$

- 类似于定理3.1, 可以证明, 在 $f(x, t) \in C^2$ 以及在端点满足条件

$$f(0, t) = f(l, t) = 0$$

的假设下, 级数(3.31) 确实是定解问题(II) 的解。

初边值问题的分离变量法

- 4. 非齐次边界条件的情形最后,我们讨论弦振动方程具非齐次边界条件的初边值问题, 即

■

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ t = 0 : u = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \\ x = 0 : u = \mu_1(t), \\ x = l : u = \mu_2(t). \end{cases} \quad (3.35 - 3.37)$$

初边值问题的分离变量法

- 而问题(3.32)-(3.34) 的解为

$$u = u_1 + u_2 + u_3.$$

- 另一方面, 问题(3.35)-(3.37) 也可以归结为初边值问题(I) 及(II) 来求解, 为此只要通过未知函数的适当变换把边界条件化为齐次即可。例如, 若令

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \quad (3.38)$$

- 易见它是一个满足边界条件(3.37) 的函数。再作变换

$$V = u_3 - U \quad (3.39)$$

初边值问题的分离变量法

- 引入新的未知函数 V , 易知它满足非齐次方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\mu''(t) - \frac{x}{l} (\mu_2''(t) - \mu_1''(t))$$

- 和非齐次初始条件

$$V = u_3(x, 0) - U(x, 0) = -\mu_1(0) - \frac{x}{l} (\mu_2(0) - \mu_1(0)),$$
$$t = 0 :$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (u_3)_t(x, 0) - U_t(x, 0) = -\mu_1'(0) - \frac{x}{l} (\mu_2'(0) - \mu_1'(0)),$$

同时 V 又显然满足齐次边界条件。

- 因此, 可根据叠加原理用前两段的方法解出 V , 进而由(3.39)式, 立即可以得到初边值问题(III) 的解

$$u_3(x, t) = V(x, t) + U(x, t).$$

高维波动方程的柯西问题

- 膜振动方程的导出从本节起讨论高维波动方程。首先以膜振动问题为例导出二维波动方程。所谓膜是指弹性固体薄片,与弦振动的情形相仿,在考虑它的振动时我们作以下几个基本假设:
 - 1. 膜的厚度很小,从而可以视为一张曲面。膜是均匀的,它的面密度 ρ 是常数。
 - 2. 膜的平衡位置在一平面内,膜上各点在垂直这一平面的方向上作微小振动,膜所受到的外力均与该平面垂直。
 - 3. 膜是柔软的,它对弯曲变形不会产生任何抵抗力。

第四节

- 将膜的平衡位置置于平面 Oxy 中, 以 $u(x, y, t)$ 记膜在 (x, y) 处在时刻 t 的位移, 可以用类似于推导弦振动方程的方法来推导膜振动方程。对于一个紧张着的薄膜, 若它满足上面的基本假设, 则在薄膜上任一点的张力 T 是常值(其证明见附录II)。
- 这时, 若过薄膜上指定点 P 沿某一方向作一个截口 l , 则该薄膜位于 l 两侧的部分分别对于对方有单位强度为 T 的拉力, 拉力的方向与曲面法向垂直, 又与 l 方向相垂直。

高维波动方程的柯西问题

- 于是, 为推导膜振动方程, 在膜上任取一小块 Δ , 它在 Oxy 平面上的投影为 Ω (见图1.10, 在图中为了看得清楚起见, 将 Δ 的位置抬高了)。
- 以下来计算在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 内作用于膜块 Δ 的冲量以及该时间段内这一小块膜的动量变化。

高维波动方程的柯西问题

- 先考察作用在 Δ 的边界上的张力。设 λ 为 Δ 的边界, 它在 Oxy 平面的投影为 Γ 。以 τ 表示曲线 λ 的切线方向, ν 表示 Δ 的法线方向, s 表示曲线 Γ 的切线方向, n 表示平面上 Γ 的法线方向。
- 因此张力 T 的方向与 $\tau \times \nu$ 的方向一致。膜的位移用 $u(x, y, t)$ 表示, Δ 的方程为 $u = u(x, y, t)$, 曲面法线 ν 的方向可以取为 $(-u_x, -u_y, 1)$ 。现在考察方向 τ , 因 s 的方向为

$$(\cos(x, s), \cos(y, s), 0),$$

- 故 τ 的方向可以取为

$$\left(\cos(x, s), \cos(y, s), \frac{\partial u}{\partial s} \right).$$

高维波动方程的柯西问题

- 所以 $\tau \times v$ 的方向可取为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中

$$\alpha_1 = \cos(y, s) + \frac{\partial u}{\partial s} u_y,$$

$$\alpha_2 = -\cos(x, s) - \frac{\partial u}{\partial s} u_x,$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= u_x \cos(y, s) - u_y \cos(x, s) \\ &= u_x \cos(x, n) + u_y \cos(y, n) = \frac{\partial u}{\partial n}.\end{aligned}$$

- 由此可知, 张力 T 在垂直方向的分量是

高维波动方程的柯西问题



$$T_u = T \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

- 由于 u_x, u_y 以及 $\frac{\partial u}{\partial s}$ 都是小量, 故 $T_u \approx T \frac{\partial u}{\partial n}$. 根据以上的分析知, 沿着曲线 λ , 张力的合力为

$$\int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

高维波动方程的柯西问题

- 所以在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 内作用于 Δ 的冲量为

$$\int_1^{t+\Delta t} \left[\int_r T \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Omega} F(x, y, t) dx dy \right] dt. \quad (4.1)$$

- 又在这个时间段内膜块 Δ 的动量变化为

$$\iint_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t + \Delta t) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right] dx dy. \quad (4.2)$$

- 因此得到

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial n} ds + \iint_{\Delta} F(x, y, t) dx dy \right] dt \\ &= \iint_D \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t + \Delta t) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right] dx dy. \end{aligned}$$

高维波动方程的柯西问题

- 假设 u 关于 x, y 的二阶偏导数都连续,利用格林(Green)公式可得

$$\int_1^{r+\Delta t} \iint_{\Omega} \left\{ T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} dx dy dt = 0.$$

- 由于时间区间段与空间区域 Ω 的任意性,由上式就得到膜振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t).$$

记 $\frac{T}{\rho} = a^2, f = \frac{F}{\rho}$, 就得到膜振动方程的标准形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad (4.3)$$

高维波动方程的柯西问题

- 其中 f 称为方程的自由项。受外力 F 的振动称为强迫振动。因此这样的方程也称为膜的强迫振动方程。当 $f = 0$ 时, 方程是齐次的, 此时的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4.4)$$

称为膜的自由振动方程。

- 方程(4.3)及(4.4) 也称为二维波动方程。

高维波动方程的柯西问题

- 2. 定解条件的提法膜振动方程的定解条件同样有边界条件和初始条件两种。
- 和弦振动的情形一样, 在初始条件的提法中单有初始位移 $u(x, y, 0)$ 是不够的, 因为对两个相同的膜, 如果它们的初始位移相同, 但一个有初始速度, 而另一个在初始时是静止的, 那么它们的运动情形也不会一样。
- 因此对膜振动方程, 初始条件的提法通常为

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 $\varphi(x, y)$ 及 $\psi(x, y)$ 为已知函数。

高维波动方程的柯西问题

- 类似于弦振动方程的情形, 对于膜振动方程的边界条件的提法, 通常也有三种:
- (1) 膜的边界固定或依照一已知函数随时间而变化。此时边界条件的提法为

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = 0$$

或

$$u(x, y, t)|_r = \mu(x, y, t), \quad (4.6)$$

其中 Γ 为薄膜的边界在 Oxy 平面上的投影曲线, $\mu(x, y, t)$ 为已知函数。这种边界条件称为第一类边界条件。

- (2) 薄膜的边界可以在一个光滑的柱面上自由滑动, 不受到摩擦力的作用。此时边界条件的提法为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_r = 0, \quad (4.7)$$

高维波动方程的柯西问题

■

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_r = \mu(x, y, t), \quad (4.8)$$

其中 $\mu(x, y, t)$ 为已知函数。这种边界条件称为第二类边界条件。

■ (3) 将膜固定在弹性支承上, 此时, 边界条件归结为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_r = 0, \quad (4.9)$$

其中 σ 为已知正数。

■ 也可以考虑更普遍的边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_r = \mu(x, y, t), \quad (4.10)$$

高维波动方程的柯西问题

- 其中 $\mu(x, y, t)$ 为已知函数。这种边界条件称为第三类边界条件。对于膜振动方程, 同样可以提柯西问题, 此时所给的初始条件为

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty. \end{cases} \quad (4.11)$$

- 又考察电磁波或声波在空间传播时, 我们会得到非齐次的三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (4.12)$$

- 或齐次的三维波动方程

高维波动方程的柯西问题

■

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (4.13)$$

- 它的边界条件与初始条件的提法也是同上面类似的。

高维波动方程的柯西问题

- 3. 球平均法下面我们考察高维波动方程柯西问题的求解。
首先考察三维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \\ u|_{x=0} = \varphi(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases} \quad (4.14)$$

- 首先我们考虑一个特殊情形, 即如果初始资料 $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ 具有球对称性的情形。
- 这时, φ 与 ψ 仅为变量 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的函数, 我们可寻求只依赖于 t 与 r 的解 $u = u(r, t)$ 。这样, (4.13) 可以写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (4.15)$$

高维波动方程的柯西问题

- 与一维波动方程相比, (4.15)多了一阶导数项, 但如果将 $v = ru$ 取为未知函数, (4.15) 又可写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

- 它与一维波动方程的形成完全相同, 从而我们可以利用达朗贝尔公式来求得问题(4.14) 的具球对称形式的解。

高维波动方程的柯西问题

- 对于一般初始资料的柯西问题的求解,情形要复杂得多。受上面讨论的启发,我们可以用球平均法来求一般情形下柯西问题的解。
- 球平均法的主要想法是引入一个关于 $u(x, y, z, t)$ 在具有不同球心、不同半径的球面上的平均值函数 M_n , 建立 M_u 所满足的偏微分方程与相应的柯西问题, 而后者恰好是比较容易求解的, 然后通过 M_α 得到 u 的表达式。
- 球平均法首先由泊松(Poisson)引入, 后来福里荻·约翰(Fritz John) 将这一方法作了很大的发展。

高维波动方程的柯西问题

- 为了以后的公式写起来方便,我们也常用 (x_1, x_2, x_3) 来记坐标 (x, y, z) 。设 $h(x_1, x_2, x_3)$ 是在整个空间上连续且有直到二阶连续偏导数的任意函数。
- 考虑函数 h 在以 (x_1, x_2, x_3) 为心,以 r 为半径的球面 S_r 上的平均值

$$M_k(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_s h d_r \sigma, \quad (4.16)$$

其中 $d_r \sigma$ 表示球面 S_r 上的面积微元。

高维波动方程的柯西问题

- 引理4.1 设 $h \in C^2$, 则其球平均函数 $M_k(x_1, x_2, x_3, r)$ 也是二次连续可导的, 且满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_k(x_1, x_2, x_3, r) = \Delta M_k(x_1, x_2, x_3, r) \quad (4.17)$$

(其中 $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$)

- 与初始条件

$$M_b|_{r=0} = h(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial M_h}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (4.18)$$

高维波动方程的柯西问题

- 证(4.16) 又可写成

$$\begin{aligned} M_h(x_1, x_2, x_3, r) \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} h(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, x_3 + r\alpha_3) d\omega. \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中 S_1 为单位球面, 在其上 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, 而 $d\omega$ 为单位球面上的面积微元。

- 将(4.19) 对 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 求导数, 可得

$$\Delta M_k = \frac{1}{4\pi} \iint_{s_1} \Delta h(x_r + r\alpha_t) d\omega, \quad (4.20)$$

高维波动方程的柯西问题

- 而由复合函数求导法测, 有

$$\frac{\partial M_h}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \iint_{s_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \alpha_i d\omega = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\xi_r} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \alpha_i d\sigma. \quad (4.21)$$

- 应用格林公式,就得到

$$\frac{\partial M_k}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{D_r} \Delta h dV, \quad (4.22)$$

其中 D_r 是以 (x_1, x_2, x_3) 为心 r 为半径的球体。

- 再对 r 求导一次, 可得

$$\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\pi r^3} \iiint_r \Delta h dV + \frac{1}{4\pi r^2} \iint \Delta h d_s \sigma. \quad (4.23)$$

高维波动方程的柯西问题

- 由(4.20)、(4.22) 及(4.23) 式, 就知道 $M_k(x_1, x_2, x_3, r)$ 确实满足方程(4.17)。令 $r \rightarrow 0$, 则由(4.19) 式直接得出,
 $M_k(x_1, x_2, x_3, r)$ 趋向于 $h(x_1, x_2, x_3)$ 。此外, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 按照中值定理, (4.22) 式中的三重积分与 r^3 同级, 而分母与 r^2 同级, 由此推出 $\frac{\partial M_n}{\partial r}$ 趋向于零。
- 引理得证。
- 由于 M_b 满足(4.18), 故将 M_h 往 $r < 0$ 作偶延拓, 仍有 $M_h \in C^2$ 。

高维波动方程的柯西问题

- 现设 $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 是柯西问题(4.14)!(4.15) 的解, 对它关于 x_1, x_2, x_3 作球平均函数

$$\begin{aligned} M_a(x_1, x_2, x_3, r, t) \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{s_1} u(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, x_3 + r\alpha_3, t) d\omega, \end{aligned} \quad (4.24)$$

- 我们有引理4.2 设 $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 是柯西问题(4.14)、(4.15) 的解, 则由(4.24) 定义的 M_u 作为 r, t 的函数, 满足方程

高维波动方程的柯西问题

■

$$\frac{\partial^2 M_*}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u = 0 \quad (4.25)$$

■ 与初始条件

$$\begin{aligned} M_*|_{r=0} &= M_\psi(x_1, x_2, x_3, r), \\ \frac{\partial M_*}{\partial t} \Big|_{t=0} &= M_\psi(x_1, x_2, x_3, r). \end{aligned} \quad (4.26 - 4.27)$$

高维波动方程的柯西问题

- 证对(4.24) 求导并利用(4.14)式可得

$$\begin{aligned} a^2 \Delta M_\alpha &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x + r\alpha, t) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + ra, t) d\omega = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\alpha. \end{aligned}$$

- 再利用引理4.1 中的(4.17) 式, 即得(4.25)。由函数 $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 满足的初始条件(4, 15) 立刻可推得(4.26)!(4.27)。
- 引理证毕。

高维波动方程的柯西问题

- 将 $M_\alpha(x_1, x_2, x_3, r, t)$ (相应地 M_ϕ 及 M_ψ) 往 $r < 0$ 方向作偶延拓, 则它在 $-\infty < r < \infty, t \geq 0$ 上仍满足 (4.25) – (4.27)。
- 于是, 视 x_1, x_2, x_3 为参数, $v(x_1, x_2, x_3, r, t) = rM_\alpha(x_1, x_2, x_3, r, t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, \quad (4.28 - 4.29)$$

$$\begin{cases} v|_{t=0} = rM_4(x_1, x_2, x_3, r), \\ v|_{t=0} = rM_4(x_1, x_2, x_3, r), \end{cases}$$

于是 v 可以由达朗贝尔公式解出。从而 $M_n = \frac{1}{r}v$, 再令 $r \rightarrow 0$ 就可得到 $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 。

高维波动方程的柯西问题

- 定理4.1 设 $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$, 那么三维波动方程的柯西问题(4.14)、(4.15) 存在唯一的解

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_u^M} \psi dS, \quad (4.30)$$

其中 S_{at}^M 表示以点 $M(x, y, z)$ 为球心 at 为半径的球面, dS 为球面的面积微元。

- (4,30)式称为泊松公式。

高维波动方程的柯西问题

证由前面的分析知 $v(x_1, x_2, x_3, r, t) = rM_u(x_1, x_2, x_3, r, t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{2} [(r + at)M_\psi(x_1, x_2, x_3, r + at)] \\ & + \frac{1}{2} [(r - at)M_\psi(x_1, x_2, x_3, r - at)] \\ & + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+t} \xi M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.31)$$

由于 $M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi)$ 及 $M_\varphi(x_1, x_2, x_3, \xi)$ 是 ξ 的偶函数, 有

$$\begin{aligned} M_u(x_1, x_2, x_3, r, t) = & \frac{1}{2r} [(at + r)M_\psi(x_1, x_2, x_3, at + r) \\ & - (at - r)M_\varphi(x_1, x_2, x_3, at - r)] \\ & + \frac{1}{2ar} \int_{ar-r}^{ar+r} \xi M_\psi(x_1, x_2, x_3, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.32)$$

高维波动方程的柯西问题

- 令 $r \rightarrow 0$, 左端即 $u(x_1, x_2, x_3, t)$, 通过计算右边的极限就可得到

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial}{\partial t} [tM_\varphi(x_1, x_2, x_3, at)] + tM_\psi(x_1, x_2, x_3, at). \quad (4.33)$$

它就是(4.30)式, 这同时也证明了解的唯一性。

- 为说明解的存在性, 只需验证(4.30) 确实满足(4.14)、(4.15)。事实上, 由引理4.1 知, (4.30) 左边第二项 tM_4 满足

高维波动方程的柯西问题

■

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial t^2} (tM_\psi(x_1, x_2, x_3, at)) \\
 &= \left[a \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_\psi(x_1, x_2, x_3, r)) \right]_{r=at} \\
 &= \left[ar \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_\psi(x_1, x_2, x_3, r) \right]_{r=at}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

■

$$\begin{aligned}
 &= [ar \Delta M_\psi(x_1, x_2, x_3, r)]_{r=at} \\
 &= a^2 \Delta (tM_\psi(x_1, x_2, x_3, at)),
 \end{aligned}$$

高维波动方程的柯西问题

- 故 $u_2(x_1, x_2, x_3, t) = tM_4(x_1, x_2, x_3, at)$ 满足方程(4.14)。
显然, $t = 0$ 时 $u_2 = 0$, 且由引理4.1, 有

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_2(x_1, x_2, x_3, t) \right|_{t=0} = \left(M_\psi + t \frac{\partial}{\partial t} M_\psi \right) \Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3). \quad (4.35)$$

- 又记 $u_1(x_1, x_2, x_3, t) = tM_q(x_1, x_2, x_3, at)$, 则类似于(4.34)
可知 u_1 满足方程(4.14)。

高维波动方程的柯西问题

- 由于该方程的系数为常数, 故 $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ 也满足方程(4.14)。对类似于(4.35) 可知 $\frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, 而且由于 u_1 满足(4.14)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} \right) \right]_{t=0} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = [\Delta u_1]_{t=0} = \Delta [u_1]_{t=0} = 0.$$

- 因此, $\frac{\partial u_t}{\partial t} + u_2$ 满足(4.15) 中的两个初始条件。从而可知, $u = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2$ 确实为柯西问题(4.14)、(4.15)之解。
- 定理证毕。

高维波动方程的柯西问题

■ 4. 降维法现在我们研究二维波动方程的柯西问题

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 (u_{ax} + u_{sx}), \\ \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.36 - 4.37)$$

- 这时,上一段的球平均法不能直接应用(请读者自行思考其原因)。但我们仍可利用上面关于三维波动方程柯西问题的求解结果来解决这个问题。
- 这是因为对于所考察的二维波动方程柯西问题的解 $u(x, y, t)$ 总可以看成是高一维空间 (x, y, z, t) 中的函数 $\tilde{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t)$ 。由于 \tilde{u} 实际上和自变量 z 无关,因此满足三维波动方程

高维波动方程的柯西问题

■

$$\bar{u}_{tr} = a^2 (\tilde{u}_{s,} + \bar{u}_{xy} + \bar{u}_{zz}) \quad (4.38)$$

■ 及初始条件

$$\tilde{u}|_{r=0} = \varphi(x, y), \quad \tilde{u}_r|_{t=u} = \psi(x, y). \quad (4.39)$$

其中 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ 也已视为空间 (x, y, z) 中的函数。

■ 反之, 如果三维波动方程的柯西问题(4.38)、(4.39) 的解 $\tilde{u}(x, y, z, t)$ 是一个与自变量 z 无关的函数, 则它所满足的方程和初始条件就化为二维波动方程的柯西问题。

高维波动方程的柯西问题

- 所以,如果我们能解出三维波动方程的柯西问题(4.38)、(4.39),并能证明这问题的解 $\bar{u}(x, y, z, t)$ 是与 z 无关的函数,那么它就是二维. 波动方程的柯西问题(4.36)、(4.37)的解。
- 这种利用高维波动方程柯西问题的解得出低维波动方程柯西问题解的方法称为降维法。利用解三维波动方程柯西问题的泊松公式(4.30), 得到

高维波动方程的柯西问题

$$\tilde{u} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{M_u} \varphi dS \right\} + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{M_{\text{sit}}} \psi dS,$$

这里的积分是在三维空间 (x, y, z) 的球面 S_x^M 上进行。由于 φ 及 ψ 都是和 z 无关的函数。

- 因此在球面上的积分可以化为它在超平面 $z = \text{常数}$ 上的投影 $\Sigma_{\text{at}}^M : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq a^2 t^2$ 上的积分。
- 注意到球面上的面积微元 dS 和它的投影的面积微元 $d\sigma$ 之间成着如下的关系:

高维波动方程的柯西问题

■

$$d\sigma = dS \cdot \cos \gamma,$$

其中 γ 为这两个面积诸元法线方向间的夹角(图1.11),而

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}.$$

- 再将上下半球面的积分都化成同一圆上的积分, 这样, 就可以把 $\tilde{u}(x, y, z, t)$ 表示成

高维波动方程的柯西问题

■

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, z, t) &= \tilde{u}(M, t) \\
 &= \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\xi_a^M} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \iint_{\xi_{ar}^M} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r d\theta dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r d\theta dr \right],
 \end{aligned}$$

(4.40)

高维波动方程的柯西问题

- 它的确是和 z 无关的函数。因此(4.40) 式就给出所考察的二维波动方程的柯西问题(4.36)!(4.37) 的解, 它称为二维波动方程柯西问题的泊松公式。
- 降维法不仅适用于波动方程, 也适用于某些其他类型的方程。在许多情况下, 此方法可以使我们从多个自变量方程的求解公式中, 推导出自变量个数较少的方程的解。

高维波动方程的柯西问题

- 5. 非齐次波动方程柯西问题的解非齐次波动方程的柯西问题

$$\begin{aligned} u_{us} &= a^2 (u_{xx} + u_{xy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \\ \begin{cases} u|_{r=0} = \varphi, \\ u_r|_{r=0} = \psi \end{cases} \end{aligned} \quad (4.41 - 4.42)$$

- 总可以分解成两个问题来解决: 第一个问题是求齐次方程(4.14) 满足非齐次初始条件(4, 15) 的解, 这个解的求法已由前面的泊松公式(4.30) 给出;
- 第二个问题是求非齐次方程(4, 41) 满足齐次初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

的解。

高维波动方程的柯西问题

- 和一维的情况一样, 上述的第二个问题可以利用齐次化原理求解, 即先求齐次方程的下述柯西问题

$$\begin{aligned} w_{tt} &= a^2 (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \\ \begin{cases} w|_{t=\tau} = 0, \\ w_t|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.44 - 4.45)$$

的解 $w(x, y, z, t; \tau)$, 然后关于参数 τ 积分, 得到

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t w(x, y, z, t; \tau) d\tau, \quad (4.46)$$

它就是柯西问题(4.41)、(4.43) 的解。

- 我们同样可以像一维情况(§2 第5 段)一样给以物理上的解释, 现在我们仅从数学上进行验证。

高维波动方程的柯西问题

- 首先验证由(4.46) 式给出的函数 u 满足初始条件(4.43)。条件 $u|_{t=0} = 0$ 的满足是显然的。
- 今验证 $u_t|_{t=0} = 0$ 。由于

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w(x, y, z, t; t) + \int_0^t \frac{\partial w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} d\tau,$$

- 利用 w 所满足的初始条件 $w|_{t=\tau} = 0$, 上式右端第一项等于零, 从而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau,$$

因此 $u_t|_{t=0} = 0$ 。

高维波动方程的柯西问题

- 再验证函数 u 满足方程(4.41)。
- 为此, 将上面最后一式再关于 t 求导一次, 并注意到方程(4.44) 及条件(4.45) 的第二式, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left. \frac{\partial w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} \right|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau \\ &= f(x, y, z, t) + a^2 \Delta \int_0^t w d\tau = a^2 \Delta u + f\end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

- 这就是说函数 u 满足方程(4.41)。这样就证明了(4.46) 式确实给出柯西问题(4.41)、(4.43) 的解。

高维波动方程的柯西问题

- 现在我们把这个解明显地表示出来。
- 根据泊松公式, 有

$$w(x, y, z, t; \tau) = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{u(t-\tau)}^M} \left[\frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r} \right]_{r=a(t-\tau)} dS,$$

因此

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \iint_{S_{a(t-\tau)}^M} \left[\frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r} \right]_{r=u(t-\tau)} dS d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \iint_{S_r^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} dS dr \\ &\quad \left(\tau = t - \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \tag{4.47}$$

高维波动方程的柯西问题

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r \leq at} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} dV,$$

其中 dV 表示体积微元, 积分在以 (x, y, z) 为中心、以 at 为半径的球体中进行。

- 因此在时刻 t 、位于 $M(x, y, z)$ 处解 u 的数值由函数 f 在时刻 $\tau = t - \frac{r}{a}$ 处的值在此球中的体积积分表出, 称这样的积分为推迟势。
- 在二维的情况, 我们可以进行类似的讨论。

第五节

- §5 波的传播与衰减1. 依赖区域、决定区域和影响区域这一节中将利用泊松公式对高维波动方程的解进行讨论,揭示波的传播与衰减等方面的性质。
- 首先,与弦振动方程相仿,我们引入依赖区域、决定区域和影响区域的概念。先考察二维的情形,在 (x, y, t) 空间内, 取定一点 (x_0, y_0, t_0) 。根据泊松公式(4.40), 解在这点的数值是由初始平面 $t = 0$ 上以 (x_0, y_0) 为中心、 at_0 为半径的圆内的初始条件 $\varphi(x, y)$ 及 $\psi(x, y)$ 的积分所表达, 而不依赖于圆外 φ 和 ψ 的值。
- 因此平面 $t = 0$ 上的圆

波的传播与衰减

■

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t_0^2 \quad (5.1)$$

就称为点 (x_0, y_0, t_0) 的依赖区域。

- 反之, 初始平面 $t = 0$ 上区域(5.1) 中的初始资料 φ 与 ψ 唯一地决定了以 (x_0, y_0, t_0) 为顶点、以该区域为底的圆锥体区域(图1.12)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 (t - t_0)^2 \quad (t \leq t_0) \quad (5.2)$$

上的解。

- 因此, 圆锥体(5.2) 就称为平面 $t = 0$ 上圆(5.1) 的决定区域。

波的传播与衰减

- 再来考察初始平面上一点 $(x_0, y_0, 0)$ 的影响区域, 也就是说要求出这种点 (x, y, t) 的全体, 其依赖区域是包括点 $(x_0, y_0, 0)$ 的。易见这种点满足条件

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \leq a^2 t^2 \quad (t > 0), \quad (5.3)$$

它在 (x, y, t) 空间内构成一个以 $(x_0, y_0, 0)$ 为顶点的圆锥体, 其母线与 t 轴的交角为 $\arctan a$ (图1.13)。

- 因此, 圆锥体(5.3) 称为初始平面上点 $(x_0, y_0, 0)$ 的影响区域。由此还可以给出初始平面上某一给定区域的影响区域, 它就是由此区域上的每一点所作的圆锥体(5.3) 的包络面所围成的区域。
- 从这里可以看到, 锥面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 (t - t_0)^2$ 在研究波动方程时起着很大的作用, 它称为二维波动方程的特征锥。

波的传播与衰减

- 再考察三维的情形。先决定空间 (x, y, z, t) 中一点 (x_0, y_0, z_0, t_0) 的依赖区域。根据泊松公式(4.30), 解在这点的数值是由初始平面 $t = 0$ 上以 (x_0, y_0, z_0) 为中心、 at_0 为半径的球面上的初始条件 φ 及 ψ 的数值所完全决定, 而和此球面外 φ 及 ψ 的数值无关。因此超平面 $t = 0$ 上的球面

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t_0^2 \quad (5.4)$$

就是点 (x_0, y_0, z_0, t_0) 的依赖区域。

- 同时, 初始平面 $t = 0$ 上球面(5.4) 内部区域的决定区域就是以它为底、以 (x_0, y_0, z_0, t_0) 为顶点的圆锥体区域

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq a^2 (t_0 - t)^2 \quad (t \leq t_0). \quad (5.5)$$

波的传播与衰减

- 相应地, 初始平面 $t = 0$ 上一点 $(x_0, y_0, z_0, 0)$ 的影响区域就是锥面

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t^2 \quad (t > 0). \quad (5.6)$$

初始平面上任一给定区域的影响区域就是过其上每一点所作锥面(5.6) 的全体所形成的区域。

- 我们把锥面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 (t - t_0)^2$ 称为三维波动方程的特征锥。

波的传播与衰减

- 2. 惠更斯(Huygens) 原理、波的弥散在考虑影响区域、依赖区域及决定区域时, 三维与二维的情形有显著的不同, 这反映了三维与二维波动传播之间存在着的实质上的区别, 我们现在分别讨论它们。
- 首先考察三维的情形。假设 $t = 0$ 时在点 (x_0, y_0, z_0) 有一瞬时扰动, 点 $(x_0, y_0, z_0, 0)$ 的影响区域是锥面

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t^2.$$

波的传播与衰减

- 对固定的时间 t , 它表示一个以 (x_0, y_0, z_0) 为中心、半径为 at 的球面; 随着时间的增加, 扰动的影响面以速度 a 向四周扩大。
- 对于空间一点 (x_1, y_1, z_1) , 假设它和 (x_0, y_0, z_0) 的距离为 r , 则只有在 $t_0 = \frac{r}{a}$ 的这一瞬时, 这一点才落在扰动面上(也就是说只有在此时刻此点才受到瞬时扰动的影响), 过后又回复到未扰动前的状态。如果在点 (x_0, y_0, z_0) 处的扰动持续进行了 t_1 秒, 则在点 (x_1, y_1, z_1) 处所受扰动影响的时间也是 t_1 秒, 过后仍恢复到原来状态, 只是其扰动开始较点 (x_0, y_0, z_0) 迟 t_0 秒而已。
- 这种现象的最典型的例子就是声音的传播, 从某个声源发出声音, 经过一定时间后传到耳中, 所听到声音的长短和发出的声音一样。

波的传播与衰减

- 现在考察在初始时某有界区域 Ω 中有一个扰动所产生的波传播的情况。区域 Ω 中任一点 M 处的扰动, 经时间 t 后, 它传到以 M 为中心、以 at 为半径的球面上, 因此在时刻 t 受到区域 Ω 中初始扰动影响的区域, 就是所有以 $M \in \Omega$ 为中心、 at 为半径的球面的全体。当 t 足够大时, 这种球面簇有内外两个包络面, 称外包络面为传播波的前阵面, 内包络面为后阵面。
- 这前后阵面的中间部分就是受到扰动影响的部分。前阵面以外的部分表示扰动还未传到的区域, 而后阵面以内的部分是波已传过并恢复了原来状态的区域。因此当初始扰动限制在空间某一局部范围内时, 波的传播有清晰的前阵面和后阵面, 这现象在物理学中称为惠更斯(Huygens) 原理或无后效现象。
- 它对信号的传送与接收具有重要的意义。

波的传播与衰减

- 在二维情况就很不相同。由于点 $(x_0, y_0, 0)$ 的影响区域为锥体(5.3), 在 $t = 0$ 时一点 (x_0, y_0) 处的瞬时扰动经过时间 t 后的影响范围不是圆周而是整个圆

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t^2,$$

随着时间的增加它以速度 a 向外扩大。

- 对于与 (x_0, y_0) 的距离为 r 的一点, 经过 $t_0 = \frac{r}{a}$ 后开始受到扰动影响, 但随着时间的增加, 在此点的扰动影响并不消失, 仍然继续发生作用。

波的传播与衰减

- 如果初始扰动给在 (x, y) 平面上的一个有界区域 Ω 中, 观察在区域 Ω 外的任一点 $M_0(x_0, y_0)$ 在时刻 t_0 时的状态 $u(x_0, y_0, t_0)$ 。
- 由于点 (x_0, y_0, t_0) 的依赖区域是(5.1), $u(x_0, y_0, t_0)$ 的数值由以 (x_0, y_0) 为中心而半径为 at_0 的圆内各点的初始值所决定。
- 因此, 如果记 d 为自 M_0 到区域 Ω 的最近点的距离, 则对于 $t_0 < \frac{d}{a}$ 的各时刻, 函数 $u(M_0, t_0) = 0$, 即扰动的影响

波的传播与衰减

- 还未传到这点。从时刻 $t_0 = \frac{d}{a}$ 开始, 在点 M_0 处就受到了扰动的影响, 而且此扰动在以后不会消失。不过由于(4.40) 式中分母有 at 出现, 随着 t 的增加, 扰动的影响是愈来愈弱的。
- 因此在二维情况, 局部范围中的初始扰动, 具有长期连续的后效特性, 波的传播有清晰的前阵面, 但没有后阵面, 惠更斯原理在此是不成立的。这个现象称为波的弥散, 或说这种波具有后效现象。
- 这是二维波动与三维波动的一个本质区别。

波的传播与衰减

- 且不依赖于坐标 z 。这样,柱体上不同点对于空间内同一点的影响将在不同时刻发生,由此我们可以想像出产生后效现象的原因。
- 在实际生活中水波可以近似地作为平面上二维波的例子,读者可以从水波的传播过程来直观地理解波的后效现象。

波的传播与衰减

- 我们这里所讨论的波的传播现象并不仅限于二维与三维空间中的波动方程。
- 可以证明, 在空间维数 n 是奇数时(除 $n = 1$ 外), 对波动方程总成立前述的惠更斯原理;
- 而当空间维数 n 是偶数时,总有波的弥散现象发生。

波的传播与衰减

- 3. 波动方程解的衰减现在研究当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 波动方程柯西问题(4.14)、(4.15)解的渐近性态。
- 假设初始资料 φ 及 ψ 满足泊松公式所要求的光滑性条件, 并在一有界区域外恒等于零(称为具有紧支集), 即设初始扰动局限在一个有界区域内。那么, 由于初始扰动要向全空间扩散, 所以很自然会想到扰动应该随时间的增加而衰减。
- 这就是本段要讨论的问题。

波的传播与衰减

- 为了下面讨论的方便,我们将泊松公式(4.30)进行改写。由于

$$\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{ut}^M} \varphi dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{|a|=1} t\varphi(x_1 + at\alpha_1, x_2 + at\alpha_2, x_3 + at\alpha_3)$$

其中 $d\omega$ 为单位球面的面积微元。

- 对 t 求导一次,可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\iint_{|a|=1} \varphi(x + at\alpha) d\omega + \iint_{|a|=1} at \sum_{i=1}^3 \varphi_{x_i}(x + at\alpha) \cdot \alpha_i d\omega \right) \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} [\varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overline{MM'}] dS_{M'}. \end{aligned}$$

波的传播与衰减

- 其中 M' 为积分球面上的变动点, 而 $dS_{M'}$ 为面积微元。
- 于是, 泊松公式(4.30) 可写成

$$\begin{aligned}
 u(M, t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} [t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla\varphi(M') \cdot \overline{MM'}] dS_{M'}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

- 若初始资料 φ, ψ 具有紧支集, 则存在一个常数 $\rho > 0$, 使 φ 及 ψ 在以原点为中心, ρ 为半径的球 B_ρ^O 外恒为零, 而在球 B_ρ^O 内成立

$$|\psi|, |\varphi|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C_1 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{5.8}$$

波的传播与衰减

- 其中 C_1 为一个正常数。已知柯西问题的解 $u(x, t)$ 由(5.7) 式给出。但由于 φ, ψ 及 φ 的一阶偏导数仅在 B_ρ^O 内不为零, 上述积分仅需在 $S_{at}^M \cap B_\rho^O$ 上进行。由于 $|\overline{MM}| = at$, 故(5.7) 式中被积函数满足

$$|t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla\varphi(M') \cdot \overline{MM'}| \leq C_2 t + C_3, \quad (5.9)$$

其中 C_2, C_3 为正常数。

- 此外, 球面 S_{at}^M 与球 B_ρ^O 的交集的面积不超过 B_ρ^O 的表面积, 即

波的传播与衰减

■

$$(S_{at}^M \cap B_\rho^O) \text{ 的面积} \leq 4\pi\rho^2. \quad (5.10)$$

■ 于是, 当 $t \geq 1$ 时

$$\begin{aligned} & |u(M, t)| \\ & \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S''_u \cap B_{f'}^o} |t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla\varphi(M') \cdot \overline{MM'}| dS_{M'} \\ & \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} (C_2 t + C_3) \cdot 4\pi\rho^2 \\ & \leq Ct^{-1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中 C 为一正常数。

波的传播与衰减

- (5.11) 就是三维波动方程柯西问题的解的衰减估计。由此可见, 如果初始资料具有紧支集, 那么当 $t \rightarrow \infty$ 时, 柯西问题的解将一致地趋向于零, 其趋于零的阶数为 t^{-1} 。
- 对于二维波动方程的柯西问题来说, 如果初始资料具有紧支集, 那么柯西问题的解在 $t \rightarrow \infty$ 时也将趋于零, 而且通过较复杂的运算还可以证明解将以 $t^{-\frac{1}{2}}$ 的速度趋于零。详细证明此处从略。
- 对于一维波动方程(弦振动方程) 的柯西问题, 由达朗贝尔公式可知, 解在 $t \rightarrow \infty$ 时没有衰减性。

第六节

- 1. 振动的动能和位能在研究没有耗损力的力学问题中, 能量守恒律起了很重要的作用。对于膜振动问题, 总能量由动能与位能两部分组成, 它们都可用二重积分来表达, 其和称为能积分。
- 下面我们导出它们的表达式。采用§4 中建立的坐标系, 振动的动能应等于

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho u^2 dx dy, \quad (6.1)$$

其中 Ω 是薄膜在 Oxy 平面上的投影区域。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 现在考察位能的表达式。首先假设薄膜没有外力的作用。
- 我们知道,使膜变形时所做的功,一部分变为膜的位能,而另一部分能量则通过膜的边界流出。对 Ω 内的任一子区域 Ω' ,按§4.1 的推导,作用在区域 Ω' 上的张力在与 Oxy 平面垂直方向分量的合力等于

$$\iint_{\Omega'} T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (6.2)$$

- 由此可见,张力在与 Oxy 平面垂直方向分力的面密度为

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 设在时刻 t 时, 膜从原来的位置作微小改变 δu , 此时反抗张力所作的功为

$$\begin{aligned}\delta W &= - \iint_{\Omega} T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \delta u dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta u \right) \right] dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \right] dx dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds.\end{aligned}\tag{6.3}$$

- 上式右边的第二项是利用格林公式得到的, 它表示沿边界膜对支承作用力在垂直方向的分量对支承所做的功, 它也就是能量的流出量。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 不计 δu 的高阶项,(6.3) 右端的第一项可以写为

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2} \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial(u + \delta u)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(u + \delta u)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ & - \frac{T}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (6.4)$$

- 因此, 可以用积分

$$V = \frac{T}{2} \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (6.5)$$

表示振动的位能, (6.4)式表示位能的增加量, 记为 δV 。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 在有外力的情形, 将外力密度也考虑进去, 则有

$$\delta W = - \iint_{\Omega} \left[T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F \right] \delta u dx dy, \quad (6.6)$$

- 于是可得

$$V = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - Fu \right\} dx dy \quad (6.7)$$

为外力 F 作用下薄膜的位能。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f, \\ \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \end{cases} & \quad (6.8 - 6.10) \\ u|_T &= \mu(x, y, t), \end{aligned}$$

这里 Γ 表示膜 Ω 的边界。

- 我们知道在没有外力作用的情况下,薄膜振动的能量应该是守恒的。
- 在上段中已经得到薄膜的动能 U 和位能 V 的表示式,它们分别可写为

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho u_t^2 dx dy, \\ V &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} T (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \end{aligned} \quad (6.11 - 6.12)$$

其中 ρ 是密度, T 是张力。

■ 这样, (不计一个常数因子) 薄膜的总能量可写成

$$E(t) = \iint_{\Omega} [u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2)] dx dy, \quad (6.13)$$

其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}$ 。由于在没有外力的作用下, 总能量应该守恒, 因此就应有

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0. \quad (6.14)$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 由这一事实将可以推出初边值问题(6.8)-(6.10) 的解的唯一性。下面我们先从数学的角度来证明(6.14), 也就是证明对于满足齐次波动方程

$$u_{tt} = a^2 (u_{sx} + u_{yy})$$

- 及齐次边界条件

$$u|_{\Gamma} = 0$$

的任一函数 $u(x, y, t)$, 成立(6.14) 式。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 事实上,由(6.10)' 式利用格林公式容易得到

$$\begin{aligned} & \frac{dE(t)}{dt} \\ &= 2 \iint_{\Omega} [u_t u_{tt} + a^2 (u_x u_{rt} + u_y u_{yt})] dx dy \\ &= 2 \iint_{\Omega} [u_t u_{tt} - a^2 (u_{x,x} u_t + u_{y,y} u_t)] dx dy \\ &= 2 \iiint_{\Omega} u_t [u_{tt} - a^2 (u_{x,x} + u_{y,y})] dx dy, \end{aligned} \tag{6.15}$$

- 再利用(6.8)' 式就知道它等于零。这就是说, $E(t)$ 是一与 t 无关的常数, 因此(6.14) 式成立, 即 $E(t) \equiv E(0)$ 。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 现在我们利用总能量守恒的事实来证明初边值问题(6.8)-(6.10) 的解的唯一性。
- 事实上, 设 u_1, u_2 是该定解问题的两个解, 则其差 $u = u_1 - u_2$ 满足相应的齐次方程及齐次边界条件, 因此在初始时刻有 $E(0) = 0$, 故

$$E(t) = \iint_{\Omega} [u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2)] dx dy = 0,$$

即

$$u_t = u_x = u_y = 0 \text{ 或 } u(x, y, t) = \text{const.}$$

- 又由于在初始时刻 $u = 0$, 故得

$$u(x, y, t) \equiv 0.$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 这样就证明了问题(6.8)-(6.10) 的解的唯一性。因而得到定理6.1 波动方程初边值问题(6.8)-(6.10) 的解如果存在的话, 它一定是唯一的。以下利用能量积分方法来讨论初边值问题

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f, \\ \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \end{cases} & \quad (6.16 - 6.18) \\ u|_T &= 0 \end{aligned}$$

的解关于初始条件与方程右端的连续依赖性。

- 此时, 由于外力不等于零, 能量并不守恒, 但从(6.15)式可以得到

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= 2 \iint_{\Omega} u_t f dx dy \\ &\leq \iint_{\Omega} u_t^2 dx dy + \iint_{\Omega} f^2 dx dy \leq E(t) + \iint_{\Omega} f^2 dx dy.\end{aligned}$$

■ 以 e^{-t} 乘上式左右两边, 可得

$$\frac{d}{dt} (e^{-t} E(t)) \leq e^{-t} \iint_{\Omega} f^2 dx dy. \quad (6.19)$$

■ 再从0 到 t 积分上式, 得

$$E(t) \leq e^t \left(E(0) + \int_0^t e^{-\tau} \iint_{\Omega} f^2 dx dy d\tau \right),$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 于是对 $0 \leq t \leq T$, 就有

$$E(t) \leq C_0 \left(E(0) + \int_0^T \iint_{\Omega} f^2 dx dy dt \right), \quad (6.20)$$

其中 C_0 是一个仅与 T 有关的正常数。

- 进一步还可以得到函数 $u(x, y, t)$ 本身平方模的估计。记

$$E_0(t) = \iint_{\Omega} u^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.21)$$

关于 t 求导数, 得

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\begin{aligned}\frac{dE_0(t)}{dt} &= 2 \iint_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy \\ &\leq \iint_{\Omega} u^2 dx dy + \iint_{\Omega} u_t^2 dx dy \leq E_0(t) + E(t).\end{aligned}$$

■ 然后把 e^{-t} 乘上式两端得

$$\frac{d}{dt} (e^{-t} E_0(t)) \leq e^{-t} E(t),$$

■ 再从0 到 t 积分上式, 得到

$$E_0(t) \leq e^t E_0(0) + e^t \int_0^t e^{-\tau} E(\tau) d\tau. \quad (6.22)$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 结合(6.20) 式, 就得到对 $0 \leq t \leq T$ 成立

$$E(t) + E_0(t) \leq C \left(E(0) + E_0(0) + \int_0^T \iint_{\Omega} f^2 dx dy dt \right), \quad (6.23)$$

其中 C 是一个只与 T 有关的正常数。

- (6.23)或(6.20) 称为能不等式, 或能估计式。这个估计式是在假设解存在的前提下得到的, 具有这种特点的估计式均称为先验估计式。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 利用能量不等式, 我们立刻可以就初边值问题(6.16)-(6.18) 的解对初始条件与右端项的连续依赖性作出如下的论断。
- 为了记号简单起见, 对于定义在区域 Ω 上的函数 φ 和定义在区域 $(0, T) \times \Omega$ 上的函数 f ,
- 我们常以 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}$ 分别表示 $(\iint_{\Omega} \varphi^2 dx dy)^{\frac{1}{2}}$ 和 $(\int_0^T \iint_{\Omega} f^2 dx dy dt)^{\frac{1}{2}}$ 。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\begin{aligned}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} &\leq \eta, & \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \eta, \\ \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \eta, & \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)} &\leq \eta, \\ \|f_1 - f_2\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} &\leq \eta,\end{aligned}\tag{6.24}$$

- 那么以 (φ_1, ψ_1) 为初值、 f_1 为右端项的解 u_1 与以 (φ_2, ψ_2) 为初值、 f_2 为右端项的解 u_2 之差在 $0 \leq t \leq T$ 上满足

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, & \|u_{1,x} - u_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, \\ \|u_{1y} - u_{2y}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, & \|u_{1,-} - u_{2,-}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.25)$$

■ 证: 记 $v(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$, 则 $v(x, y, t)$ 满足

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 (v_{xx} + v_{yy}) + f_1 - f_2, \\ \begin{cases} v|_{t=0} = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y), \\ v|_{t=0} = \psi_1(x, y) - \psi_2(x, y), \end{cases} & (6.26 - 6.28) \\ v|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned}$$

从而利用能量不等式(6.23) 即得所需之结论。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 3. 柯西问题解的唯一性与稳定性现在考察波动方程的柯西问题。
- 我们同样可以利用能量的关系式来研究其解的唯一性和稳定性。
- 但如果要计算整个平面 $t = \text{常数}$ 上的能量, 此时积分

$$E_1(t) = \iint_{\mathbf{R}^2} [u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2)] dx dy \quad (6.29)$$

可能是发散的, 因此只能计算在 (x, y) 平面的某个有限区域 Ω 上的能量。在区域 Ω 上, 由于能量在边界上的流进与流出, 它的总量不一定会是常数了。

- 因此我们考察一个随时间增加而缩小的区域 Ω_t , 它在 (x, y, t) 空间构成一个特征锥 K (图1.14):

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2. \quad (6.30)$$

- 锥体 K 在平面 $t = 0$ 上的截面即其底面是一个圆

$$\Omega_0 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2, \quad (6.31)$$

而锥体 K 就是底面 Ω_0 的决定区域。

- 在时刻 t 时, 区域

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\Omega_t : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2 \quad (6.32)$$

上各点处解的数值由圆(6.31) 上的初始条件所完全决定, 在圆(6.31) 外的能量在时刻 t 时不会传进圆 Ω_t 中。

- 因此在区域 Ω_t 上薄膜的总能量不会超过 Ω_0 上的总能量, 即应有 $E_1(\Omega_t) \leq E_1(\Omega_0)$ 。现在我们用数学方法来证明这个事实。以下证明若 $u(x, y, t)$ 在特征锥 K 内满足齐次波动方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$

则在 K 内任一截面 Ω_t 上成立能量不等式

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

■

$$\begin{aligned}
 E_1(\Omega_t) &= \iint_{\Omega_t} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\
 &\leq \iint_{\Omega_0} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = E_1(\Omega_0).
 \end{aligned}
 \tag{6.33}$$

事实上, 这只要证明 $E_1(\Omega_t)$ 在 $0 \leq t \leq \frac{R}{a}$ 中是 t 的单调减少函数即可。为此考察

$$\begin{aligned}
 &\frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \iiint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \in (R-at)^2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\
 &= \frac{d}{dt} \int_0^{R-at} \int_0^{2\pi r} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] ds dr,
 \end{aligned}$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 其中 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, ds 表示圆弧的线素 $r d\theta$ 。
- 利用复合函数求导公式即得

$$\begin{aligned} \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} = & 2 \int_0^{R-at} \int_0^{2\pi r} [u_t u_{tt} + a^2 (u_x u_{xt} + u_y u_{yt})] ds dr \\ & - a \int_{\Gamma_t} [u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2)] ds, \end{aligned}$$

其中 Γ_r 为区域 Ω_r 的边界。

- 再由格林公式, 可将上式写为

$$\begin{aligned} \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} = & 2 \int_0^{R-at} \int_0^{2\pi r} u_t [u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy})] ds dr \\ & + 2 \int_{\Gamma'} \{ a^2 [u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y)] \} \end{aligned}$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

$$-\frac{a}{2} \left[u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2) \right] \Big\} ds.$$

注意到, 由于 u 满足方程(6.8)', 上式右端第一项积分为零, 而第二项沿 Γ_t 的线积分的被积函数

$$\begin{aligned} & a^2 [u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y)] - \frac{a}{2} [u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2)] \\ &= -\frac{a}{2} \left[(a u_x - u_t \cos(n, x))^2 + (a u_y - u_t \cos(n, y))^2 \right] \leq 0, \end{aligned}$$

■ 因此

$$\frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \leq 0 \quad (6.34)$$

这就证明了(6.33) 式。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 利用能量不等式(6.33) 立即可以得出定理6.3 波动方程(6.8) 取初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases} \quad (6.35)$$

的柯西问题的解是唯一的。

- 证：我们只需证明方程(6.8)', 具有零初始条件的解必为零解。事实上利用能量不等式(6.33) 立即可以得出, 如果 $t = 0$ 时,

$$u(x, y, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0,$$

就有 $E_1(\Omega_0) = 0$, 从而 $E_1(\Omega_t)$ 也只能等于零, 因此 $u_t = u_x = u_y \equiv 0$, 即 $u \equiv$ 常数。

- 再根据初始条件 u 在锥体内的连续性得出 $u \equiv 0$ 。这样就证明了柯西问题解的唯一性。

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 还可以利用能量积分方法建立波动方程柯西问题解的稳定性。如对于齐次波动方程的柯西问题,我们有定理6.4 波动方程(6.8)' 取初始条件(6.35) 的柯西问题的解在下述意义下关于初始值是稳定的:
- 对于任何给定的 $\varepsilon > 0$, 一定可找到仅依赖于 ε 和 T 的 $\eta > 0$, 只要

$$\begin{aligned}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \eta, & \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \eta, \\ \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \eta, & \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \eta,\end{aligned}$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 则对应于初始值 (φ_1, ψ_1) 的解 u_1 与对应于初始值 (φ_2, ψ_2) 的解 u_2 的差在 $0 \leq t \leq \frac{R}{a}$ 上成立

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \varepsilon, & \|u_{1,x} - u_{2,x}\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \varepsilon, \\ \|u_{1,y} - u_{2,y}\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \varepsilon, & \|u_{1t} - u_{2t}\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.36)$$

- 又在锥体 K 上成立

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(K)} = \sqrt{\iiint_K (u_1 - u_2)^2 dx dy dt} \leq \varepsilon. \quad (6.37)$$

证对于任何满足齐次方程(6.8)'的函数 $u(x, y, t)$, 引进积分

$$E_0(\Omega_t) = \iint_{\Omega_t} u^2(x, y, t) dx dy. \quad (6.38)$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 将它关于 t 求导,得到

$$\begin{aligned}\frac{dE_0(\Omega_t)}{dt} &= 2 \iint_{\Omega_t} u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy - a \int_{\Gamma_t} u^2 ds \\ &\leq \iint_{\Omega_t} u^2 dx dy + \iiint_{\Omega_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy \\ &\leq E_0(\Omega_t) + E_1(\Omega_t),\end{aligned}$$

- 于是与(6.22) 相仿, 可得

$$E_0(\Omega_t) \leq e^t E_0(\Omega_0) + \int_0^t e^{t-\tau} E_1(\Omega_\tau) d\tau. \quad (6.39)$$

能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

- 结合(6.33) 就得到对于 $0 \leq t \leq \frac{R}{a}$ 成立

$$E_1(\Omega_t) + E_0(\Omega_t) \leq C(E_1(\Omega_0) + E_0(\Omega_0)), \quad (6.40)$$

- 从而成立(6.36), 再关于 t 积分即得(6.37).

谢谢大家!请多指教!